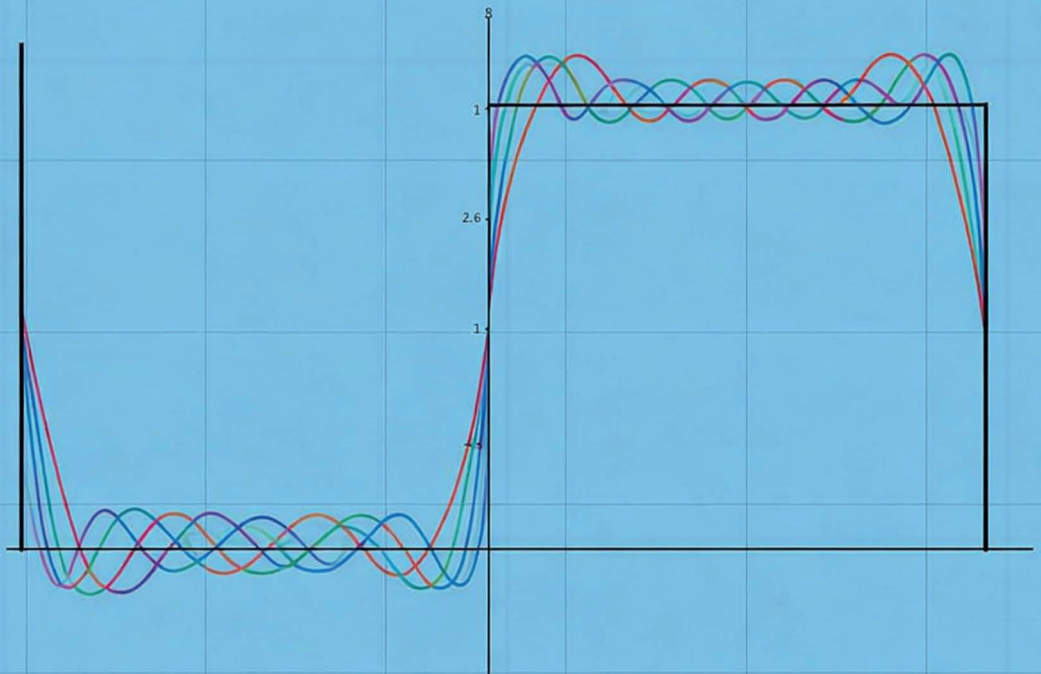


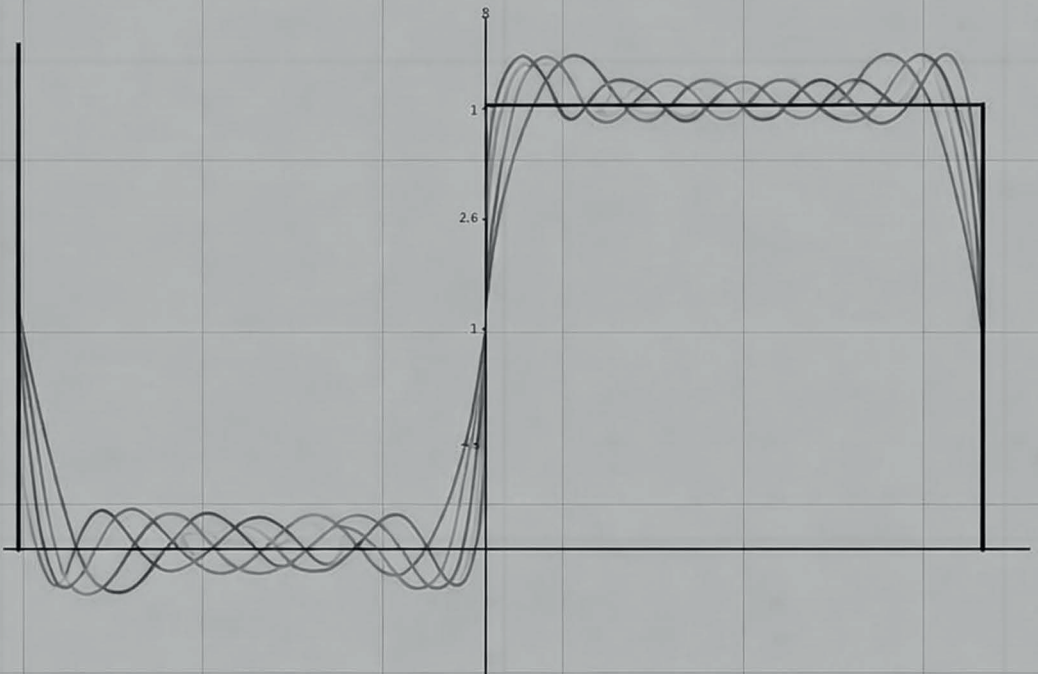
Andréa Fragata
Edvam de Oliveira
Felipe Solart

Tópicos de Séries de Fourier



Andréa Fragata
Edvam de Oliveira
Felipe Solart

Tópicos de Séries de Fourier



2025 by Atena Editora

Copyright © 2025 Atena Editora

Copyright do texto © 2025, o autor

Copyright da edição © 2025, Atena Editora

Os direitos desta edição foram cedidos à Atena Editora pelo autor.

Open access publication by Atena Editora

Editora chefe

Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira Scheffer

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Yago Raphael Massuqueto Rocha



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

A Atena Editora tem um compromisso sério com a transparência e a qualidade em todo o processo de publicação. Trabalhamos para garantir que tudo seja feito de forma ética, evitando problemas como plágio, manipulação de informações ou qualquer interferência externa que possa comprometer o trabalho.

Se surgir qualquer suspeita de irregularidade, ela será analisada com atenção e tratada com responsabilidade.

O conteúdo do livro, textos, dados e informações, é de responsabilidade total do autor e não representa necessariamente a opinião da Atena Editora. A obra pode ser baixada, compartilhada, adaptada ou reutilizada livremente, desde que o autor e a editora sejam mencionados, conforme a Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

Cada trabalho recebeu a atenção de especialistas antes da publicação. A equipe editorial da Atena avaliou as produções nacionais, e revisores externos analisaram os materiais de autores internacionais.

Todos os textos foram aprovados com base em critérios de imparcialidade e responsabilidade.

Tópicos de Séries de Fourier

| Autores:

Andréa Fragata
Edvam de Oliveira
Felipe Solart

| Revisão:

Os autores

| Diagramação:

Nataly Gayde

| Capa:

Yago Raphael Massuqueto Rocha

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

T811 Tópicos de Séries de Fourier / Andréa Fragata, Edvam de Oliveira, Felipe Solart. – Ponta Grossa - PR: Atena Editora, 2026.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-65-258-3904-2 (PDF)

DOI <https://doi.org/10.22533/at.ed.042260503>

1. Séries de Fourier. 2. Análise matemática. 3. Matemática aplicada. I. Fragata, Andréa. II. Oliveira, Edvam de. III. Solart, Felipe. IV. Título.

CDD 515.2433

Atena Editora

☎ +55 (42) 3323-5493

☎ +55 (42) 99955-2866

🌐 www.atenaeditora.com.br

✉ contato@atenaeditora.com.br

CONSELHO EDITORIAL

CONSELHO EDITORIAL

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Profª Drª Amanda Vasconcelos Guimarães – Universidade Federal de Lavras
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Profª Drª Ariadna Faria Vieira – Universidade Estadual do Piauí
Prof. Dr. Arinaldo Pereira da Silva – Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Cirênio de Almeida Barbosa – Universidade Federal de Ouro Preto
Prof. Dr. Cláudio José de Souza – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Daniela Reis Joaquim de Freitas – Universidade Federal do Piauí
Profª Drª. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Fabrício Moraes de Almeida – Universidade Federal de Rondônia
Profª Drª Glécilla Colombelli de Souza Nunes – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Humberto Costa – Universidade Federal do Paraná
Prof. Dr. Joachin de Melo Azevedo Sobrinho Neto – Universidade de Pernambuco
Prof. Dr. João Paulo Roberti Junior – Universidade Federal de Santa Catarina
Profª Drª Juliana Abonizio – Universidade Federal de Mato Grosso
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Prof. Dr. Sérgio Nunes de Jesus – Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

SUMÁRIO

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. DEFINIÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER	3
3. EM BUSCA DOS COEFICIENTES	4
3.1. Achando o coeficiente α_0	4
3.2. Achando o coeficiente a_j	5
3.3. Achando o coeficiente b_j	7
3.4. Exemplos e questões	9
4. EXPANSÃO DOS CONCEITOS	15
4.1. Facilitando os cálculos: Paridade das funções.....	15
4.2. Mudança de intervalos para $[-L, L]$	18
4.3. Exemplos e questões	19
5. CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER	23
5.1. Condições de Dirichlet.....	23
5.2. Convergência Uniforme	25
6. APLICAÇÕES DAS SÉRIES DE FOURIER	27
6.1. Condução de calor em uma barra de ferro	27
6.2. Análise de sinais de rádio AM	32
REFERÊNCIAS	36
SOBRE OS AUTORES	37



1. INTRODUÇÃO

Sempre foi um desejo particular compreender e visualizar as aplicações da trigonometria em âmbito teórico e prático. A princípio, eu não tinha entendimento base do que seriam as funções seno e cosseno e onde estariam presentes em aplicações do cotidiano. Com isso, no decorrer dos anos, ao ingressar na Universidade, a curiosidade passou a aumentar e surgiu o desejo de estudar esse assunto de maneira mais aprofundada, principalmente voltado para o olhar da Engenharia, ao estar se deparando com assuntos relacionados a sinais, sistemas, controle e automatização de sistemas, que envolvem, de alguma forma, conceitos trigonométricos que, muitas das vezes, culminam nos estudos das Séries de Fourier.

Dessa forma, o material em questão foi fruto de um trabalho voltado para pesquisa bibliográfica proporcionada pela bolsa de estudos do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME), ofertada a medalhistas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), com auxílio da minha orientadora do programa, professora MSc. Andrea Freitas Fragata, e do professor Dr. Edvam de Oliveira Nunes. A finalidade desse projeto é realizar uma análise introdutória das Séries de Fourier, assim como sua definição, propriedades, teoremas e aplicações, de forma a compartilhar o conhecimento apreendido nesta pesquisa, principalmente, para alunos que estão seguindo esse caminho na formação acadêmica, e contribuir com a divulgação científica deste assunto.

A princípio, o estudo das Séries de Fourier foi empreendido por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matemático e físico nascido na França. Fourier buscava a solução do problema de transferência de calor entre sólidos metálicos, a qual, outrora, foi descrita com a teoria do Cálculo Diferencial e Integral, porém, ainda se mostrava insuficiente para sua resolução. Sendo assim, fez-se necessário a elaboração da teoria envolvendo as chamadas Séries de Fourier. Nisso, seguindo a teoria proposta, Fourier acaba chegando à conclusão de que a função $f(x)$, em um intervalo finito, pode ser decomposta em um somatório das funções trigonométricas seno e cosseno.

Sua descoberta abriu novas portas para a Matemática, Física e Engenharia, além das demais ciências. E hoje em dia, passa a ser muito mais desenvolvida e presente, sendo usada na solução de problemas envolvendo transferência de calor,

equações da onda, processamento de sinais e imagens digitais, além de possuir participação fundamental na música, que com sua análise possibilita a remoção de ruídos e separar sons.

Seguindo essa linha, o material foi dividido em cinco capítulos para descrever o que é a Série de Fourier, e como isso é desenvolvido e aplicado matematicamente. No primeiro capítulo, tem-se a sua definição matemática formal. Logo em seguida, já se faz um estudo sobre como encontrar seus coeficientes em intervalos definidos de $-\pi$ a π , um passo vital para reescrever a função em Séries de Fourier, e aplica-se com alguns exercícios também. Dando continuidade, é expandido esse conceito ao adotar novos intervalos que podem ser escolhidos arbitrariamente e com o uso do conceito de paridades de funções para simplificação de cálculos. No capítulo referente às convergências das Séries de Fourier, faz-se um estudo teórico necessário para comprovar a convergência dessa série que fundamenta a solução por meio de integrais utilizadas para achar os coeficientes. Por fim, o último capítulo é reservado para demonstrar aplicações das Séries de Fourier em questões físicas e práticas, como a condução de calor em uma barra de ferro, situação inicial na qual Jean Baptiste Joseph Fourier construiu o conceito dessa teoria, culminando com todos os conceitos anteriormente estudados no capítulo anterior.



2. DEFINIÇÃO DA SÉRIE DE FOURIER

Seja a função $f(x)$ periódica e definida no intervalo $(-L, L)$. Ela pode ser escrita como uma série trigonométrica, na qual:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$$

E tendo esse padrão, pode ser reescrita também na forma de somatório, de maneira mais sucinta:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \quad (1)$$

De tal modo, denomina-se essa função $f(x)$ como: *Série de Fourier*. Mas, afinal, o que essa função representa e por que foi elaborada de tal modo? Bom, primeiramente, uma série é caracterizada como a soma de vários termos, sendo estes infinitos ou não. Uma série conhecida e muito trabalhada é a Série de Taylor (chamada também de Expansão de Taylor), na qual se trabalha com séries de potências e derivadas, de modo que suas somas sucessivas e infinitas conseguem representar a função. Aliás, esse método é utilizado em calculadoras para encontrar valores com várias casas decimais, como raízes irracionais.

Ademais, com relação à Série de Fourier, seu conceito foi definido através de uma inspiração musical. Pois quando tocamos um instrumento, o som reproduzido, na verdade, é a sobreposição de várias notas de frequência múltiplas da nota mais grave. Por exemplo, se você quiser realizar um *acorde de Dó*, pela teoria musical, você precisaria tocar as notas Dó, Mi e Sol. E de modo similar, Fourier enxergou uma função como a combinação de infinitas notas musicais, múltiplas desse valor base, de modo a caracterizar um acorde único, que seria a própria função!

Agora, tendo a Série de Fourier definida, faz-se necessário encontrar os coeficientes a_0 , a_j e b_j para prosseguirmos com o estudo posterior.



3. EM BUSCA DOS COEFICIENTES

3.1. Achando o coeficiente a_0

Primeiramente, será adotado um intervalo $[-\pi, \pi]$ para encontrar os devidos coeficientes (lembrando que isto é apenas um valor conveniente para os cálculos, podendo ser escolhidos outros intervalos). Em seguida, estaremos integrando a função $f(x)$, o que resultará em

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \right]\end{aligned}$$

Pelo princípio da convergência uniforme, é possível mudar a ordem da integral inserindo-a dentro do somatório.

Resolvendo as respectivas integrais contendo $\sin(nx)$ e $\cos(nx)$, teremos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = a_n \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ a_n \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} &= \frac{a_n}{n} [\sin n\pi - \sin(-n\pi)] = \frac{a_n}{n} [\sin n\pi + \sin n\pi]\end{aligned}$$

Entretanto, como n corresponde apenas a números inteiros, $\sin n\pi$ resultará sempre em múltiplos de π , que porventura, resultam em 0. Ou seja, teremos que

$$\sin \pi = \sin 2\pi = \sin 3\pi = \dots = \sin n\pi = 0$$

Portanto, a integral em questão resulta em 0, pois

$$\frac{a_n}{n} [\sin n\pi + \sin n\pi] = \frac{a_n}{n} [0 + 0] = 0$$

De mesmo modo, iremos desenvolver com a seguinte integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx \, dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx = b_n \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$b_n \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{b_n}{n} [\cos n\pi - \cos(-n\pi)]$$

Como a função cosseno corresponde a uma função par, ficará

$$\cos(-n\pi) = \cos n\pi.$$

Assim, nossa integral também resultará em 0, pois:

$$-\frac{b_n}{n} [\cos n\pi - \cos(-n\pi)] = -\frac{b_n}{n} [\cos n\pi - \cos n\pi] = 0$$

E como as integrais dentro do somatório resultam em 0, só nos restará desenvolver:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0 \, dx$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \, dx = \frac{1}{2} [a_0 x]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} [a_0 \pi - (-a_0 \pi)] = \frac{1}{2} \cdot 2 a_0 \pi = a_0 \pi$$

Portanto, isolando a_0 na igualdade, ficará que:

$$a_0 \pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx \quad (2)$$

$$\therefore a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

Feito isso, resta encontrar os coeficientes a_j e b_j .

3.2. Achando o coeficiente a_j

Dessa vez, multiplicaremos a Equação (1) por jx , e, de modo similar, integramos ambos os lados da igualdade:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos jx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \right] \cdot \cos jx \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos jx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0 \cdot \cos jx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cdot \cos jx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \operatorname{sen} nx \cdot \cos jx \, dx \right]$$

Para a primeira integral, nos deparamos com a mesma situação anterior da integral do cosseno, que irá zerar:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0 \cdot \cos jx \, dx = \frac{1}{2} a_0 \cdot \left[\frac{\text{sen } jx}{j} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Seguindo a segunda integral, teremos um produto de cosseno, e será necessário usar uma identidade trigonométrica

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cdot \cos jx \, dx$$

Usando a identidade, encontra-se

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

Logo, realizando a igualdade de $a = nx$ e $b = jx$, fica

$$\cos nx \cdot \cos jx = \frac{1}{2} [\cos(n+j)x + \cos(n-j)x]$$

Na qual então, a integral pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cdot \cos jx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cdot \frac{1}{2} [\cos(n+j)x + \cos(n-j)x] \, dx \\ \frac{a_n}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n+j)x + \cos(n-j)x] \, dx &= \frac{a_n}{2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+j)x \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-j)x \, dx \right) = \\ \frac{a_n}{2} \left\{ \left[\frac{\text{sen}(n+j)x}{n+j} \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\text{sen}(n-j)x}{n-j} \right]_{-\pi}^{\pi} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

E aqui, encontramos novamente a mesma situação das integrais do cosseno, pois como n e j representam números inteiros maiores que 1, então, sua soma ou subtração resultam em inteiros também. Portanto, quando $n \neq j$, teremos ao fim da integral múltiplos de π , o que irá anular os senos novamente. Porém, um caso especial é para quando $n = j$, pois nisso, teremos:

$$\frac{a_j}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(j+j)x + \cos(j-j)x] \, dx = \frac{a_j}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos 2jx + \cos 0] \, dx = \frac{a_j}{2} \left(\frac{\text{sen } 2jx}{2j} \Big|_{-\pi}^{\pi} + x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right)$$

E, de novo, como $2jx$ será sempre múltiplo de π , essa função seno resultante irá zerar:

$$\frac{a_j}{2} \left(\frac{\sin 2jx}{2j} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_j}{2} [\pi - (-\pi)] = \frac{2a_j\pi}{2} = a_j\pi$$

E por fim, estudamos a integral do produto de seno por cosseno, usando novamente a identidade trigonométrica:

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \cdot \cos jx \, dx$$

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos b$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

E também, seguirá dessa igualdade na identidade que $a = nx$ e $b = jx$, ficando a integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \frac{1}{2} [\sin(n+j)x + \sin(n-j)x] \, dx$$

Poderíamos desenvolver as integrais, porém, por se tratarem de integrais de uma função seno em intervalos $[-\pi, \pi]$, ocorrerá a mesma situação vista na integral do $\sin nx$. Resultará em uma função par sua primitiva, e anulará os valores. Logo, essa integral inteira resulta em zero. (Fica a critério do leitor desenvolver a integral descrita).

Como todas as integrais se anulam, restará, por fim, a seguinte igualdade:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos jx \, dx = a_j\pi$$

$$\therefore a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos jx \, dx \quad (3)$$

3.3. Achando o coeficiente b_j

De modo análogo, para encontrar b_j , seguir-se-á o mesmo princípio, entretanto, a Equação (1) agora será multiplicada por $\sin jx$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin jx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] \cdot \sin jx \, dx$$

Reorganizando:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \text{sen } jx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0 \cdot \text{sen } jx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cdot \text{sen } jx \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \text{sen } nx \cdot \text{sen } jx \, dx \right]$$

Devido às propriedades de integral citadas anteriormente, já sabemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_0 \cdot \text{sen } jx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cdot \text{sen } jx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_n \frac{1}{2} [\text{sen}(j+n)x + \text{sen}(j-n)x] \, dx = 0$$

O que muda, é que usando a outra identidade trigonométrica

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \cdot \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{sen } a \cdot \text{sen } b = \frac{1}{2} \cdot [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

a última integral terá por resultado:

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \text{sen } nx \cdot \text{sen } jx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \frac{1}{2} \cdot [\cos(n-j)x - \cos(n+j)x] \, dx$$

Na qual também, para todo $n \neq j$, isso sempre resultará em 0. Mas quando $n = j$, teremos por valor:

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_j \frac{1}{2} \cdot [\cos(j-j)x - \cos(j+j)x] \, dx = \frac{b_j}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 0 - \cos 2jx \, dx$$

Possuindo, novamente:

$$\frac{b_j}{2} \cdot 2\pi = b_j \pi$$

Assim, portanto, teremos que a igualdade da função ficará:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \text{sen } jx \, dx &= b_j \pi \\ \therefore b_j &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \text{sen } jx \, dx \end{aligned} \quad (4)$$

Portanto, conseguimos encontrar todos os coeficientes a_0, a_j e b_j . Listados a seguir:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos jx dx$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen} jx dx$$

3.4. Exemplos e questões

Exemplo 1: Seja a função $f(x) = x$, para $-\pi < x < \pi$, encontre a sua Série de Fourier.

Solução: Lembremos como achar os coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Substituindo $f(x) = x$, ficará:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} [\pi^2 - (-\pi)^2] = 0$$

Agora, para $j \geq 1$, temos:

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos jx dx$$

Utilizando integração por partes:

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos jx dx \rightarrow \int dv = \int \cos jx dx$$

$$v = \frac{\operatorname{sen} jx}{j}$$

Assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos jx dx = \left[x \cdot \frac{\operatorname{sen} jx}{j} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} jx}{j} dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos jx \, dx = \pi \cdot \frac{\text{sen } j\pi}{j} - (-\pi) \cdot \frac{\text{sen}(-j\pi)}{j} - \left[-\frac{\cos jx}{j^2} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \cos jx \, dx = \frac{\cos j\pi}{j^2} - \frac{\cos(-j\pi)}{j^2} = 0$$

Portanto, temos que o coeficiente a_j vale:

$$a_j = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0$$

De modo análogo, para encontrar o coeficiente b_j :

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \text{sen } jx \, dx$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \text{sen } jx \, dx$$

E para resolver a integral, segue-se o mesmo processo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \text{sen } jx \, dx$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \text{sen } jx \, dx \rightarrow \int dv = \int \text{sen } jx \, dx$$

$$v = -\frac{\cos jx}{j}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \text{sen } jx \, dx = \left[-x \cdot \frac{\cos jx}{j} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos jx}{j} \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \text{sen } jx \, dx = -\pi \frac{\cos j\pi}{j} - [-(-\pi)] \cdot \frac{\cos(-j\pi)}{j} + \left[\frac{\text{sen } jx}{j^2} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \text{sen } jx \, dx = \frac{-2\pi \cdot \cos j\pi}{j}$$

Logo, o valor de b_j será:

$$b_j = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-2\pi \cdot \cos j\pi}{j} \right) = \frac{-2 \cos j\pi}{j}$$

Nesse momento, é importante notar que para todo j ímpar, nós teremos que a função cosseno presente resultará em -1 , e o oposto é válido, pois quando j é par, o cosseno resulta em 1 , ou seja:

$$\cos \pi = \cos 3\pi = \cos 5\pi = \dots = -1$$

E

$$\cos 2\pi = \cos 4\pi = \cos 6\pi = \dots = 1$$

Dito isso, percebemos um padrão. Por exemplo, ao usar $j = 1$:

$$b_1 = \frac{-2 \cos \pi}{1} = \frac{-2 \cdot (-1)}{1} = 2$$

Mas quando $j = 2$, ocorre que:

$$b_2 = \frac{-2 \cos 2\pi}{2} = \frac{-2 \cdot 1}{2} = -1$$

Assim, b_j apresenta uma periodicidade quanto ao seu sinal positivo ou negativo, de tal maneira concluímos que quando j é ímpar, seu sinal é *positivo*, e quando j é par, o sinal passa a ser *negativo*. Logo, podemos reescrever o coeficiente b_j em função dessa periodicidade, como:

$$b_j = \frac{2 \cdot (-1)^{j+1}}{j}$$

E essa nova forma condiz exatamente com o que foi dito anteriormente e com a função original achada para b_j . Por fim, ao reescrever a Série de Fourier usando os coeficientes achados:

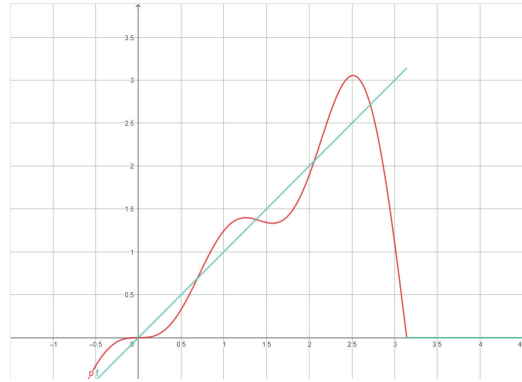
$$f(x) = x = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4x + \dots$$

Ou colocando o fator 2 em evidência:

$$f(x) = x = 2 \left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \dots \right)$$

Essa Série de Fourier, ao escrever a soma até $j = 4$, ou seja, os 4 primeiros termos, teremos o seguinte gráfico:

Figura 1 – Gráfico Série de Fourier da função $f(x)$



Exemplo 2: Calcule a Série de Fourier da seguinte função

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Solução: Nessa situação, temos dois valores diferentes para $g(x)$, seguindo as condições apresentadas. Portanto, a única diferença, é que ao integrar para achar os coeficientes, será necessário mudar os limites de integração. Assim, será:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} \pi dx \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \pi \int_0^{\pi} dx = x \Big|_0^{\pi} = \pi$$

Para achar a_j :

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos jx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \cos jx dx$$

$$a_j = \int_0^{\pi} \cos jx dx = \frac{\sin jx}{j} \Big|_0^{\pi} = 0$$

Por fim, achando o b_j :

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin jx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \pi \sin jx dx$$

$$b_j = \int_0^{\pi} \sin jx dx = \left[-\frac{\cos jx}{j} \right]_0^{\pi} = -\frac{\cos j\pi}{j} - \left(-\frac{\cos j \cdot 0}{j} \right) = \frac{1 - \cos j\pi}{j}$$

Novamente, devido à periodicidade do $\cos j\pi$ resultar em 1 ou -1, isso nos leva à mesma conclusão de anteriormente, quando j é par, o cosseno assume valor de 1, e quando ímpar, resulta em -1. Entretanto, levando em conta o b_j como um todo, percebemos que para todo j par, b_j resulta em 0, e quando ímpar, resulta em $\frac{2}{j}$

Para tornar isso generalizado, podemos determinar que:

$$b_j = \begin{cases} 0, & \text{se } j=2n \\ \frac{2}{j}, & \text{se } j=2n+1 \end{cases}$$

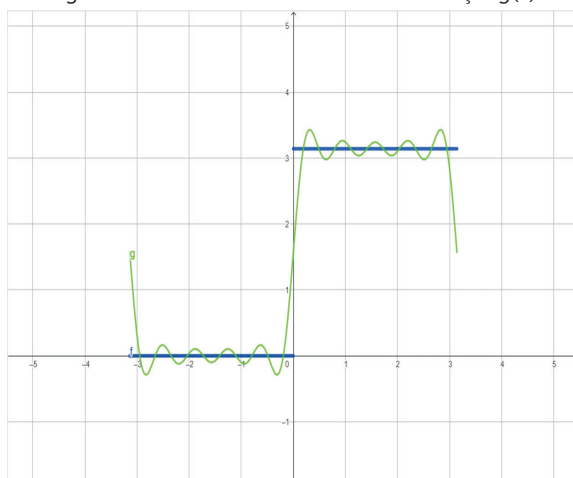
Em que $n=1, 2, 3\ldots$

Usa-se os termos $2n$ para expressar caso seja par em âmbito geral (visto que todo número multiplicado por um número par, resulta em um par também). E $2n + 1$, de modo análogo, expressa termos ímpares, em geral (número par mais um ímpar, sempre resulta em outro ímpar). Desse jeito, ao reescrever a função $g(x)$ na forma de uma Série de Fourier, teremos:

$$g(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \left(\sin x + \sin \frac{3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

O seu gráfico, quando somados os cinco primeiros termos, fica da seguinte forma:

Figura 2 – Gráfico da Série de Fourier da função $g(x)$



EXERCÍCIOS:

1. Encontre as Séries de Fourier das seguintes funções:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $g(x) = \text{sen } 2x$

c) $h(x) = x^2 - x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

d) $i(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ x, & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

2. Mostre que a série de senos da função constante $f(x) = \pi/4$ é:

$$\frac{\pi}{4} = \text{sen } x + \frac{\text{sen } 3x}{3} + \frac{\text{sen } 5x}{5} + \dots$$

Para $0 < x < \pi$. Qual soma é obtida ao definir $x = \pi/2$? Qual é a série de cossenos dessa função?



4. EXPANSÃO DOS CONCEITOS

4.1. Facilitando os cálculos: Paridade das funções

Relembrando o conceito de funções pares e ímpares, temos pela definição matemática que uma função é par quando

$$f(-x) = f(x)$$

Em outras palavras, seu sinal não altera o valor da função. Seja negativo ou positivo, eles terão um caráter simétrico. E para a função ímpar, tem-se:

$$g(-x) = -g(x)$$

O que, analogamente, infere que o sinal “inverte” nossa função, trazendo um caráter oposto. Dito isso, alguns exemplos de funções pares e ímpares (utilizadas até então) são:

$$f(x) = \cos(x) \text{ é par, pois } \cos(-x) = \cos(x)$$

$$g(x) = \text{sen}(x) \text{ é ímpar, pois } \text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$$

Agora, se decidimos calcular integrais num intervalo $[-a, a]$, de funções pares e ímpares, respectivamente, obtemos um resultado interessante (e até conveniente, dada a situação), no qual

$$\int_{-a}^a f(x) = F(a) - F(-a)$$

Porém, caso $f(x)$ seja função par, ao calcular sua integral, sua primitiva será uma função ímpar. Por exemplo, se $f(x) = x^2$, sabemos que sua integral definida resulta em $F(x) = \frac{x^3}{3}$, o que aumenta um grau e, consequentemente, torna a função de par para ímpar. Retomando a ideia de $f(x)$ ser par, teremos uma função primitiva $F(x)$ ímpar, ou seja

$$\int_{-a}^a f(x) = F(a) - F(-a) = F(a) - [-F(a)] = F(a) + F(a) = 2 \cdot F(a)$$

Em outras palavras, dizemos que a integral de uma função par é igual a

$$\int_{-a}^a f(x) = 2 \cdot \int_0^a f(x) = 2 \cdot F(a)$$

De modo semelhante, temos que caso $f(x)$ seja uma função ímpar, teremos uma primitiva $F(a)$ par. O que nos traria

$$\int_{-a}^a f(x) = F(a) - F(-a) = F(a) - F(a) = 0$$

Logo, nesse caso, **a integral de uma função ímpar resulta em zero sempre!**

Para prosseguirmos a ideia, temos uma relação de paridade, que é bem semelhante ao caso da adição de números ímpares e pares. Sabe-se que nos anos iniciais de escola aprendemos que ao somar números pares com ímpares, isso resultaria em um número ímpar, e o inverso é válido ($4 + 3 = 3 + 4 = 7$). Além disso, temos que a soma de um número par com outro par resulta em um par também. E por fim, ao somarmos um ímpar com outro ímpar, obtemos um número par.

Embora trivial e aparentemente não significativa para a situação atual, a verdade é que o *produto de funções* segue essa mesma lógica! Ou seja, se temos duas funções definidas em $f(x)$ e $g(x)$, sendo $f(x)$ par e $g(x)$ ímpar, se realizarmos o seu produto, obteremos uma função $h(x)$ *ímpar*. Exemplificando com $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$, temos

$$f(x) \cdot g(x) = x \cdot x^2 = x^3$$

Na qual x^3 é uma função ímpar. E assim, se estabelece as seguintes relações com produto de funções:

$$\begin{aligned} (\text{par}) \cdot (\text{par}) &= (\text{par}) & (\text{ímpar}) \cdot (\text{par}) &= (\text{ímpar}) \\ (\text{ímpar}) \cdot (\text{ímpar}) \cdot (\text{ímpar}) \cdot (\text{ímpar}) &= (\text{par}) \end{aligned}$$

(Por favor, não confundam com o **produto entre números** pares e ímpares, pois segue a lógica diferente do que foi apresentado). E dito isso, devemos lembrar que os coeficientes de Fourier são também um produto de duas funções, e $f(x)$ é dada pela situação. Seguindo esse raciocínio, vamos notar os casos para $f(x)$ par e ímpar.

Para **$f(x)$ sendo par**, obtemos os coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin jx \, dx$$

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos jx \, dx$$

Na situação a_0 , lembramos do caso para integral de função par. Já para a_j , devemos notar que a função cosseno é uma *função par*, logo, o produto $f(x)$ por $\cos jx$ resultará em uma *função par* também. Nos valores de a_0 e a_j , podemos reescrever a integral como

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx$$

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos jx \, dx$$

Porém, para o coeficiente b_j , teremos o produto de uma *função par* por uma *função ímpar* (função seno), e isso resulta em *função ímpar*. Portanto, essa integral resulta em zero, o que nos dá $b_j = 0$.

Para **$f(x)$ sendo ímpar**, isso retornará o oposto da situação descrita anteriormente, pois a_0 e a_j terão funções ímpares em suas integrais, e isso resultará em zero. Já o b_j terá função par. E no geral, esse caso fica

$$a_0 = 0$$

$$a_j = 0$$

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot jx \, dx$$

Resumindo as paridades para funções, teremos, então, dois casos:

$f(x)$ par:

$f(x)$ ímpar:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx$$

$$a_0 = 0$$

$$a_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos jx \, dx$$

$$a_j = 0$$

$$b_j = 0$$

$$b_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot jx \, dx$$

Agora, podemos simplificar muitos cálculos apenas analisando a paridade das funções, vendo quais coeficientes irão zerar ou não. E o mais importante, isso implica que se uma função for **par**, ela terá apenas termos **coseno**, e caso **ímpar**, terá apenas termos **senos**! (Lembrando que isso só é válido para intervalos $[-a, a]$. Qualquer outro intervalo fora dessa forma já anula as relações).

4.2. Mudança de intervalos para $[-L, L]$

Tudo o que fora desenvolvido até agora foi seguindo um intervalo arbitrário de $[-\pi, \pi]$, que tornou os cálculos simples e conveniente. Entretanto, a maioria dos casos, principalmente envolvendo a parte física, não seguem, necessariamente, o intervalo de π . Por isso, torna-se necessário generalizar a Série de Fourier para um intervalo geral de $[-L, L]$. E não se preocupem, pois os conceitos antes elaborados permanecem os mesmos. Adotaremos, a seguir, um artifício para poder colocar nossa série nesse novo intervalo, mas usando também nossos limites de $[-\pi, \pi]$.

Primeiro, usaremos uma nova variável t , e ela estará em função de x da seguinte forma:

$$t = \frac{\pi x}{L} \rightarrow x = \frac{Lt}{\pi}$$

De modo que $x \in [-L, L]$, o que, conseqüentemente, nos leva a concluir que quando $x \rightarrow L$, $t \rightarrow \pi$ (lê-se, quando x tende a L , t tende a π); e também, $x \rightarrow -L$, $t \rightarrow -\pi$. E isso conclui que a nossa variável t está num intervalo de $[-\pi, \pi]$, assim como adotado no começo deste material. Desse modo, **definimos** agora uma nova função $\tilde{f}(t) \equiv f\left(\frac{Lt}{\pi}\right)$, dada no intervalo de $[-\pi, \pi]$. E então, se $\tilde{f}(t)$ converge (falaremos desse critério no capítulo adiante), podemos reescrevê-la em Série de Fourier

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nt + b_n \sin nt]$$

Para achar seus coeficientes, usamos a mesma fórmula estabelecida

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) \cdot \cos nt \, dt$$

Realizando a mudança pela função definida

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Lt}{\pi}\right) \cdot \cos nt \, dt$$

Porém, sabemos que $x = \frac{Lt}{\pi}$, $t = \frac{\pi x}{L}$, e também $dt = \frac{\pi}{L} dx$. E quando $t \rightarrow -\pi$, $x \rightarrow -L$. Assim como $t \rightarrow \pi$, $x \rightarrow L$. Substituindo na expressão anterior

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(n \cdot \frac{\pi x}{L}\right) \frac{\pi}{L} dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

E o mesmo raciocínio segue para b_n , que resulta em

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cdot \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$$

Portanto, nossa Série de Fourier generalizada fica na forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right]$$

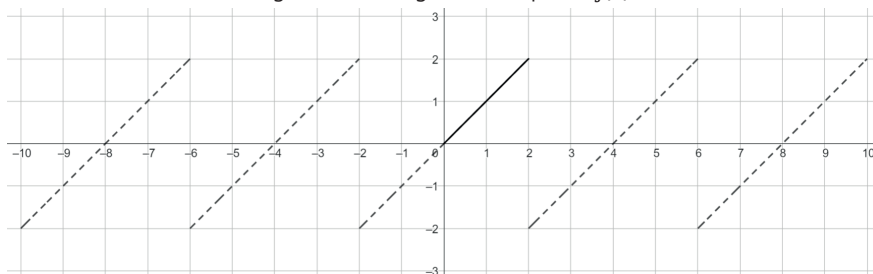
Desse modo, podemos trabalhar com qualquer outro intervalo definido no período $2L$, quebrando a limitação antes imposta e podendo tornar esse método mais abrangente. E agora, coloquemos em prática, seguindo esse novo quesito.

4.3. Exemplos e questões

Exemplo 1: Desenvolva $f(x) = x$, $0 < x < 2$ em semi-série (a) de senos, (b) de cossenos.

(a) Nessa situação, devemos lidar com a condição para a paridade de funções, pois uma função ímpar terá termos $a_n = 0$, o que implica dizer que teremos apenas termos b_n , e por isso, nossa função será uma série apenas de **senos**, como pede a questão. Para isso, precisamos fazer um prolongamento ímpar da $f(x)$, representada na Figura 3, que consiste em representar em limites de período $2L = 4$ uma projeção da função $f(x)$, porém, assumindo valores negativos, por ser função ímpar.

Figura 3 – Prolongamento ímpar de $f(x)$



Por conta disso, vemos que $f(x)$ respeita a condição de função ímpar. O que então, nos permite gerar a série de senos, dada por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Utilizando integração por partes, obtemos

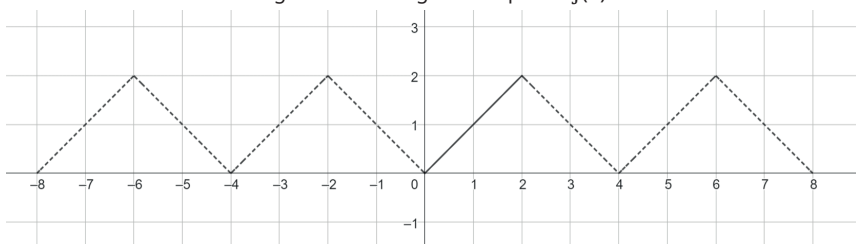
$$\left(x \left(-\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) - 1 \left(-\frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) \right) \Bigg|_0^2 = -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi$$

O que então, nos leva a dizer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{2} = \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} - \dots \right)$$

(b) Para esse segundo caso, deveremos construir um prolongamento par, de modo que tenhamos apenas coeficientes a_n , o que nos retorna apenas a parte **cosseno** da série (pois b_n será 0). E assim, o período $2L$ é igual a 4, fazendo $L = 2$. E a função assume apenas valores positivos, por ser par.

Figura 4 – Prolongamento par de $f(x)$



Assim, o coeficiente a_n será dado por

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \left(x \left(\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) - 1 \left(-\frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \right) \Bigg|_0^2$$

$$a_n = \frac{4}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1), \quad \text{se } n \neq 0$$

Para $n = 0$, teremos a_0 dado por

$$a_0 = \int_0^2 x \, dx = 2$$

Então, nossa $f(x)$ será dada por:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{2} = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} - \dots \right)$$

Exemplo 2: Supondo que a Série de Fourier correspondente a $f(x)$ convirja uniformemente para $f(x)$ em $[-L, L]$, prove a identidade de Parseval.

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Sabendo que $f(x)$ pode ser escrita pela Série de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right]$$

Podemos, então, multiplicar ambos os lados por $f(x)$ e integrar a expressão no intervalo $[-L, L]$ (isso se justifica porque a série é *uniformemente convergente*), obtendo

$$\int_{-L}^L [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right]$$

Porém, pelas relações estabelecidas pelos coeficientes, sabemos que as integrais presentes, na verdade, são

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= L \cdot a_n & \int_{-L}^L f(x) dx &= L \cdot a_0 \\ \int_{-L}^L f(x) \sen \frac{n\pi x}{L} dx &= L \cdot b_n \end{aligned}$$

O que nos permite substituir essas integrais na expressão, ficando

$$\int_{-L}^L [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_0 \cdot L \cdot a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot L \cdot a_n + b_n \cdot L \cdot b_n]$$

Evidenciando o L

$$\int_{-L}^L [f(x)]^2 dx = L \left[\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

Por fim, passamos L dividindo, o que nos traz a identidade de Parseval

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Interessante notar que essa propriedade é matematicamente plausível justamente pela condição de **convergência uniforme**, pela qual será descrita e provada no capítulo a seguir deste material. Por hora, seguimos com as informações predispostas. Mas em qualquer situação, é válido compreender o rigor matemático adiante.

Exercícios:

1. Encontre as Séries de Fourier dessas funções:

a) $f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1-x, & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$

b) $g(x) = |x|, \quad -2 \leq x \leq 2$

c) $h(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 1, & \text{se } 0 \leq x < 2 \end{cases}$

2. Calcule a Série de Fourier da função $f(x)$ no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



5. CONVERGÊNCIA DAS SÉRIES DE FOURIER

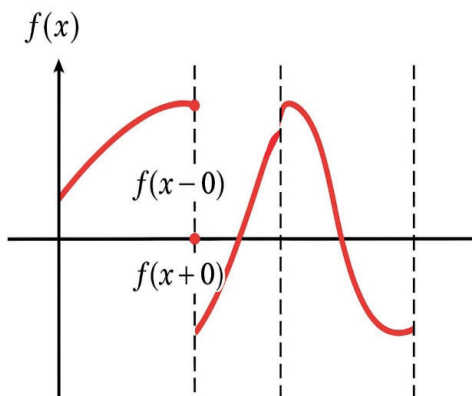
5.1. Condições de Dirichlet

Embora definida a Série de Fourier, é necessário utilizar de conceitos e teoremas matemáticos para garantir sua convergência, visto que ela está intrinsecamente relacionada com as Integrais e Transformadas de Fourier, cuja convergência é necessária para sua solução. E para isso, remontaremos à principal definição da Série de Fourier com relação a esse paradigma, elaborada pelo matemático alemão Dirichlet, determinada como **Condições de Dirichlet**. Mas antes, precisa-se definir uma *função seccionalmente contínua*.

Definição 5.1 (Função Seccionalmente Contínua): Uma função f é dita seccionalmente contínua em um intervalo $[a, b]$ se existe um número finito de $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, chamada **partição do intervalo** $[a, b]$, tal que:

1. f é contínua em cada um dos subintervalos $x_{i-1} < x < x_i$;
2. Os limites laterais nas extremidades de cada subintervalo existem e são finitos.

Figura 5 – Gráfico de uma função $f(x)$ seccionalmente contínua.



Teorema 5.1: Suponhamos que

- i. $f(x)$ seja definida, exceto possivelmente em um número finito de pontos $(-L, L)$
- ii. $f(x)$ seja periódica de período $2L$;
- iii. $f(x)$ e $f'(x)$ sejam seccionalmente contínuas em $(-L, L)$ Então a série (1) com coeficientes calculados em (3) e (4) converge para
 - (a) $f(x)$ se x é ponto de continuidade
 - (b) $\frac{f(p^+) + f(p^-)}{2}$ se x é ponto de descontinuidade.

Na qual p^+ e p^- são definidos por

$$f(p^+) = \lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$$

$$f(p^-) = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$$

O que nos permite escrever um resultado geral de

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] = \begin{cases} f(x), & \text{se } f \text{ é contínua em } x \\ \frac{f(p^+) + f(p^-)}{2}, & \end{cases}$$

Em outras palavras, é o mesmo que dizer que a Série de Fourier de uma função $f(x)$ convergirá para a própria $f(x)$ nos pontos contínuos ou ela convergirá para a média aritmética dos pontos de descontinuidades da função (no lugar onde o gráfico “quebra”, semelhante à Figura 5 e Figura 2). Essa situação é bem visível na Figura 2, visto que a função possui essa descontinuidade em $x = 0$, porém, o gráfico da Série de Fourier passa exatamente na posição da média aritmética dessa região descontínua.

É importante dizer que as condições (i), (ii) e (iii) são suficientes para provar a convergência, embora não sejam necessárias. Isso implica dizer que, se as condições são seguidas, garantimos a sua convergência, mas caso contrário, a série ainda pode convergir da mesma maneira. Mas no geral, essas condições já são satisfeitas nas ocasiões práticas de problemas surgidos na Ciência e Engenharia.

5.2. Convergência Uniforme

Além das condições de Dirichlet, a Convergência Uniforme nos traz consequências muito importantes para este estudo, que envolve a possibilidade da diferenciação, integração e operações de limites nas Séries de Fourier.

Suponha-se uma série infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

E a soma parcial de ordem R, sendo esta a soma dos primeiros R termos

$$S_R(x) = \sum_{n=1}^R u_n(x)$$

E pela definição, a série infinita converge para $f(x)$ em algum intervalo se, dado um $\varepsilon > 0$, existe, para cada x no intervalo, um número positivo N , tal que

$$|S_R(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ sempre que } R > N$$

Na qual N depende de x e ε , e $f(x)$ é conhecida como *soma da série*. E disso, surgem dois teoremas importantes da convergência uniforme.

Teorema 5.2: Se cada termo de uma série infinita é contínuo em um intervalo $[a, b]$, e se a série converge uniformemente para $f(x)$ nesse intervalo, então

1. $f(x)$ também é contínua no intervalo
2. a série pode ser integrada termo a termo, isto é

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

Teorema 5.3: Se cada termo de uma série infinita é derivável, e se a série de derivadas é uniformemente convergente, então a série pode ser derivada termo a termo, isto é

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x)$$

E por isso a integração e derivação é justificável nos casos em que o fizemos para achar os coeficientes e provar a Identidade de Parseval. Entretanto, o processo pelo qual é usado para afirmar poderosamente que uma função é de fato uniformemente convergente é usando o teorema conhecido como *teste M de Weierstrass*.

Teorema 5.4 (Teste M de Weierstrass): Se existe um conjunto de constantes M_n , com $n = 1, 2, \dots$, tais que para todo x em um intervalo $|u_n(x)| \leq M_n$, e se, além disso, o somatório a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

Então, de fato a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

Converge uniformemente no intervalo. Um exemplo disso é para a série de uma função seno:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n^2}$$

Essa série converge em qualquer intervalo pois é possível determinar um conjunto de constantes $M_n = 1/n^2$, tais que

$$\left| \frac{\text{sen } nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

De modo que converge a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$



6. APLICAÇÕES DAS SÉRIES DE FOURIER

Até aqui, nós vimos a definição, método e teoria por detrás das Séries de Fourier. Entretanto, seria muito mais intuitivo e reconfortante ver tudo o que foi aprendido em termos práticos envolvendo situações do mundo real, ou melhor dizendo, físico. Por isso, aqui estarão algumas aplicações, envolvendo problemas da condução de calor em uma barra, aliás, que foi o problema chave que induziu Jean Baptiste Fourier a criar as renomadas Séries de Fourier.

6.1. Condução de calor em uma barra de ferro

Exemplo 1: Imagine uma barra de comprimento L , cuja superfície total, incluindo extremidades, é isolada e possui temperatura inicial $f(x)$. Determine a temperatura subsequente da barra.

Para esse caso, teremos um problema de contorno, também conhecido como *problemas de valor inicial de fronteira*. E é muito importante salientar que para esse problema é vital o conhecimento prévio quanto a resoluções de EDOs e EDPs (Equações Diferenciais Ordinárias/Parciais), pois é o método base para seu desenvolvimento. E caso o leitor desconheça tais assuntos, fique à vontade para ir direto na sessão em que se usa as Séries de Fourier.

Primeiramente, temos que a descrição física desse fenômeno é dada por uma igualdade de derivadas parciais de uma função $u(x, t)$, na qual u depende tanto de x (deslocamento) quanto de t (tempo):

$$u_t = K u_{xx}$$

(Os índices t e x aí presentes representam que a função foi derivada parcialmente por tais variáveis, e como o x se repete duas vezes, então u foi derivada em função de x duas vezes). Suas condições iniciais são dadas por:

$$|u(x, t)| < M, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$$

E para resolver essa EDP, é preciso representar a função $u(x, t)$ como o produto de duas outras funções, dependente de x e t , respectivamente, isto é

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

Realizando as derivadas parciais, obtemos a seguinte relação

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t)$$

E isolando

$$\frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

E como o lado esquerdo é em função apenas de t , enquanto o lado direito é em função apenas de x , isso nos leva a dizer que eles dependem apenas de t e x , respectivamente, permitindo-nos igualar essas duas razões a um parâmetro independente $-\lambda^2$ dessas variáveis (usamos esse coeficiente pois torna mais simples e conveniente a resolução da EDO).

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda^2, \quad \frac{1}{K} \frac{G'(t)}{G(t)} = -\lambda^2$$

O lado esquerdo nos afirma que F deve satisfazer à EDO

$$F''(x) + \lambda^2 F(x) = 0, \quad \text{para } 0 < x < L$$

E de modo análogo, o lado direito segue também a EDO

$$G'(t) + k\lambda^2 G(t) = 0$$

Feito isso, utilizando algum método de resolução de EDOs, chegamos às respectivas *soluções gerais* para as funções F e G , respectivamente:

$$F(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x, \quad G(t) = c \cdot e^{-k\lambda^2 t}$$

O que nos traz que a solução dada é

$$u(x, t) = e^{-k\lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x), \quad \text{com } A = ac \text{ e } B = bc$$

E pelas condições iniciais, podemos achar os coeficientes A e B . De $u_x(0, t) = 0$, obtemos $B = 0$, pois derivando em x e fazendo a igualdade a zero

$$u_x(x, t) = e^{-k\lambda^2 t} (-A \sin \lambda x + B \cos \lambda x)$$

$$u_x(0, t) = e^{-k\lambda^2 t} B = 0$$

Logo, para ser verdade, apenas tendo $B=0$. O que nos traz a nova função como

$$u(x, t) = A e^{-k\lambda^2 t} \cos \lambda x$$

E como $u_x(L, t) = 0$, temos

$$u_x(L, t) = -A e^{-k\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda L = 0$$

Porém, nesse caso, nosso A não pode ser zero, pois assim teremos apenas uma função nula, o que não seria desejável como uma solução física. Por isso, o termo que **deve** zerar é $\operatorname{sen} \lambda L$, o que nos trará

$$\operatorname{sen} \lambda L = 0, \quad \text{ou} \quad \lambda L = n\pi \rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n=0, 1, 2, 3, \dots$$

E assim, a nossa função, dado um n inteiro, ficará

$$u_n(x, t) = A e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Temos então uma relação para u_n , só que essa solução é apenas para um valor de n . Porém, a função $u(x, t)$ apresenta uma característica notável, que é a sua *linearidade*, o que em outras palavras é que: se tivermos uma ou mais soluções dessa função u , nós poderemos achar soluções gerais através de suas combinações lineares. Isso é chamado de *princípio da superposição*. Desse jeito, qualquer expressão da forma

$$\sum_{n=1}^N c_n u_n(x, t)$$

Na qual C_n são constantes e os u_n são as funções definidas, serão elas soluções de $u(x, t)$. E tratando isso em somas infinitas, condizente com a Série de Fourier, teremos pela superposição

$$u(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Porém, nós ainda temos a situação inicial de que $u(x, 0) = f(x)$, representando a temperatura no tempo inicial. O que nos trará a conhecida igualdade de

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-kn^2\pi^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

E agora entra nosso estudo da Série de Fourier, pois para achar esses coeficientes, precisamos realizar as integrais

$$A_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx \qquad A_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

Portanto, nossa função $u(x, t)$, com os coeficientes A_0 e A_m , passa a ter finalmente a solução geral dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n e^{-kn^2 \pi^2 t / L^2} \cos \frac{n\pi x}{L} \right) \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right]$$

Exemplo 2: Resolva o problema de valores de contorno

$$u_t = 2u_{xx}$$

$$u(0, t) = 10, \quad u(3, t) = 40, \quad u(x, 0) = 25, \quad |u(x, t)| < M$$

Esse é o mesmo caso da condução de calor em uma barra metálica, com uma diferença que agora as extremidades estão às temperaturas de 10 °C e 40 °C. Isso irá mudar nossa solução pois não poderemos mais fazer as mesmas conclusões do exemplo anterior. Agora, teremos que admitir que nossa função seja a soma de outras duas funções

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x)$$

Na qual Ψ é a função a ser determinada convenientemente e $v(x, t)$ também segue as mesmas condições iniciais instituídas em u , podendo estabelecer que

$$v_t = 2v_{xx} + \psi''(x), \quad v(0, t) + \psi(0) = 10, \quad v(3, t) + \psi(3) = 40,$$

$$v(x, 0) + \psi(0) = 25, \quad |v(x, t)| < M$$

De modo que possa ser simplificado usando

$$\psi''(x) = 0, \quad \psi(0) = 10, \quad \psi(3) = 40$$

Donde isso nos leva a concluir que $\Psi(x)$ deve ser uma função do primeiro grau, por conta de a derivada segunda ali presente zera, com um coeficiente linear igual a 10, restando apenas encontrar o coeficiente angular, dado por

$$\psi(3) = a \cdot 3 + 10 = 40$$

$$3a = 30 \rightarrow a = 10$$

Isso nos traz que $\Psi(x) = 10x + 10$, de modo que o problema de contorno resultante é

$$\begin{aligned}v_t &= 2v_{xx} \\v(0, t) &= 0, \quad v(3, t) = 0, \\v(x, 0) &= 15 - 10x, \quad |v(x, t)| < M\end{aligned}$$

E assim, de modo semelhante ao problema anterior, fazendo a função v igual a um produto de duas funções de variável x e t , respectivamente, obteremos que a solução geral é dada por

$$v(x, t) = e^{-2\lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x)$$

E pela condição inicial de $v(0, t) = v(3, t) = 0$, isso nos afirma que

$$\begin{aligned}v(0, t) &= A e^{-2\lambda^2 t} = 0, \quad \text{logo } A = 0 \\v(3, t) &= B e^{-2\lambda^2 t} \operatorname{sen} 3\lambda = 0\end{aligned}$$

E como $B \neq 0$, devemos ter $\operatorname{sen} 3\lambda = 0$, ou $3\lambda = n\pi$, fazendo nosso valor de λ igual a

$$\lambda = \frac{n\pi}{3}$$

Realocando nossos valores e usando o princípio da superposição, encontraremos que a solução geral para $v(x, t)$ será

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-2n^2 \pi^2 t / 9} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3}$$

E pela última condição $v(x, 0) = 15 - 10x$, realizamos a igualdade

$$15 - 10x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3}$$

Na qual, pela teoria das Séries de Fourier, achamos coeficientes B_n dados por

$$B_n = \frac{2}{3} \int_0^3 (15 - 10x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{30}{n\pi} (\cos n\pi - 1)$$

Agora, como nossa função original é dada por $u(x, t) = v(x, t) + \Psi(x)$, temos que nossa solução final para esse problema de contorno é

$$u(x, t) = 10x + 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{30}{n\pi} (\cos n\pi - 1) e^{-2n^2\pi^2 t/9} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3}$$

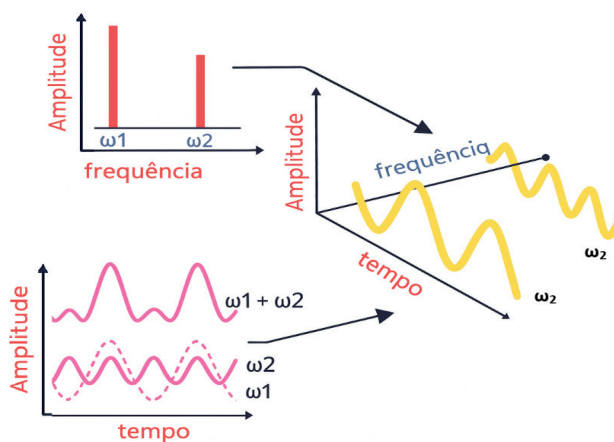
E, fisicamente falando, temos que $10x + 10$ é a temperatura estacionária, ou seja, a temperatura que o bloco tende a atingir após uma longa passagem de tempo!

6.2. Análise de sinais de rádio AM

Os sinais de rádio transmitidos na estação AM são definidos como AM-DSB (com faixa de 500 a 1.600 kHz), e a sigla significa *Amplitude Modulation-Sideband*. Isso implica na modulação de amplitudes de sinais com banda lateral. Basicamente, ocorre a variação da amplitude da onda portadora de acordo com a informação que se deseja transmitir (chamado de *senal modulador*), e também, nessa variação, surgem *bandas laterais*, que são a criação de novas frequências desse espectro do sinal, sendo classificadas em *superiores* (frequência maior que a da portadora) e *inferiores* (frequência menor que a da portadora). E são nessas bandas que está a informação do sinal modulador, que são codificados e transmitidos pelo emissor, para posteriormente serem decodificados pelo receptor.

Nisso, ao se trabalhar com esse sinal, são usados dois domínios para representá-lo: o do **tempo** e o da **frequência**. Por conta desses dois fatores, é possível descrever a variável em um gráfico tridimensional, constando a amplitude em função tanto da frequência como do tempo. E um detalhe importante, é que esses dois sistemas são permutáveis, ou seja, não há perda de informação ao mudar seu domínio.

Figura 6 – Gráficos para representação de onda em função do tempo e frequência.



De forma geral, a expressão algébrica para representar a onda em modulação AM é da forma

$$s(t) = [A_p + A_m \cdot m(t)] \cdot p(t)$$

Na qual $s(t)$ é o sinal modulado, A_p é a amplitude da portadora, A_m é a amplitude da modulante, $m(t)$ é a onda modulante e $p(t)$ é a onda portadora. Além disso, com as respectivas amplitudes, é possível determinar o índice de modulação (μ), dado pela razão entre a amplitude da modulante pela portadora. Para que a informação seja perfeitamente transmitida, o índice deve compreender o intervalo descrito em $0 \leq \mu \leq 1$, que em outras palavras, significa que a amplitude da modulante deve ser menor que a amplitude da portadora. Caso contrário, haverá a *sobremodulação*, caracterizada pela perda dessa informação.

Também, existe a função “envelope” da onda, que corresponde exatamente à $[A_p + A_m \cdot m(t)]$, mas que também pode ser definida algebricamente por

$$e(t) = \frac{s(t)}{p(t)}$$

Em termos práticos, a onda portadora possui uma alta frequência, enquanto a onda moduladora possui frequências bem mais baixas. Nisso, é possível representá-las uma a uma no software *GeoGebra*, como exemplo. Primeiramente, definiu-se as funções $m(t)$ e $p(t)$.

Figura 7 – Função $m(t)$

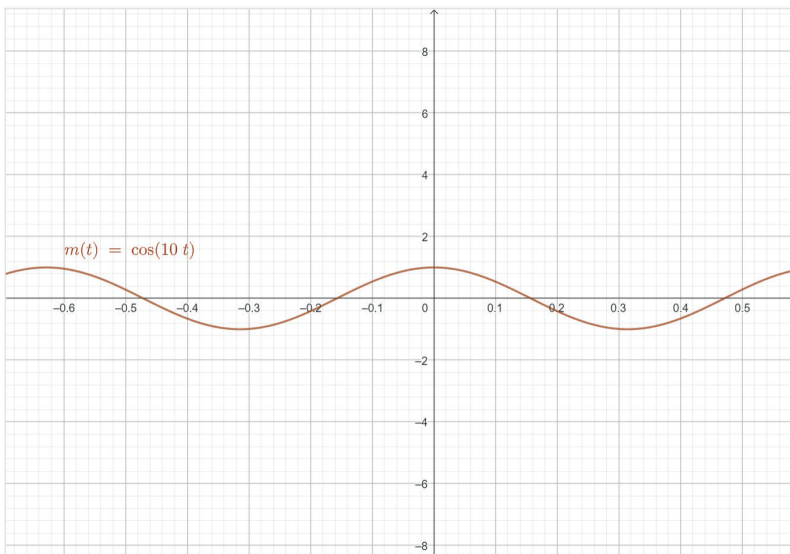
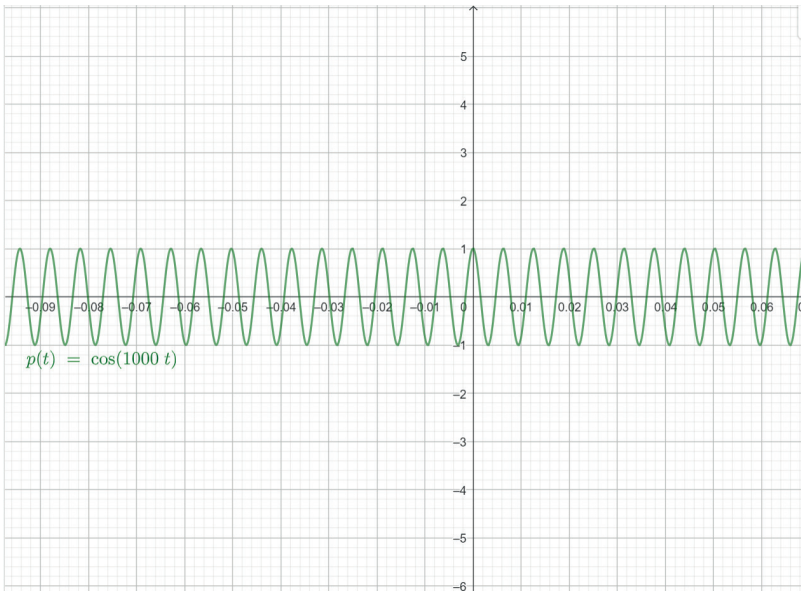


Figura 8 – Função $p(t)$

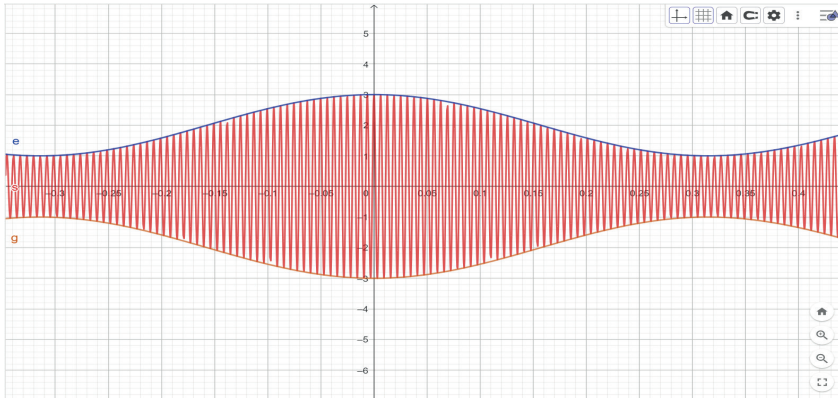


Definidas as funções, escolhe-se amplitudes arbitrárias para a portadora e modulante, sendo 2 e 1, respectivamente. Agora, basta aplicar esses valores no *GeoGebra* usando as equações definidas anteriormente, o que retornará o seguinte gráfico.

Figura 9 – Expressões definidas na *janela de álgebra*.

	$m(t) = \cos(10 t)$	
	$p(t) = \cos(1000 t)$	
	$A_p = 2$	
	$A_m = 1$	
	$s(t) = (A_p + A_m m(t)) p(t)$ $= (2 + 1 \cos(10 t)) \cos(1000 t)$	
	$e(t) = \frac{s(t)}{p(t)}$ $= \frac{(2 + 1 \cos(10 t)) \cos(1000 t)}{\cos(1000 t)}$	
	$g(t) = -e(t)$ $= - \frac{(2 + 1 \cos(10 t)) \cos(1000 t)}{\cos(1000 t)}$	
	Entrada...	

Figura 10 – Onda em modulação AM-DSB.



Dessa forma, sabendo a natureza da onda AM-DSB, ainda deseja-se encontrar suas frequências de modulante e portadora, pois é onde encontra-se seu conteúdo. E é nesse aspecto que entra a teoria das Séries de Fourier, só que de uma forma mais expandida, culminando nas Transformadas de Fourier. Como não se aprofundaremos muito nesse último assunto, em termos básicos, a Transformada de Fourier de uma função $f(x)$ consiste em:

$$F(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

E sua principal propriedade é a de converter uma função no domínio do tempo para o domínio da frequência. Ou seja, aplicando essa transformada na função de onda AM-DSB, é possível determinar suas frequências de modulante e portadora, que são justamente as frequências cruciais para adquirir as informações desejadas. Existem funções computacionais que realizam esse procedimento, e geralmente a mais utilizada é a *Fast Fourier Transform*, que se trata de um algoritmo eficiente para esse cálculo.

REFERÊNCIAS

ARNDT, Deise Monquelate. *Modulação em Amplitude*. São José, SC: Instituto Federal de Santa Catarina, 2016. Material de aula. Disponível em: https://wiki.sj.ifsc.edu.br/images/0/00/Mod_AM_aula2.pdf. Acesso em: 25 set. 2025.

CHIARADIA, José Ezequiel. *Sintetizando funções: uma aplicação das séries de Fourier*. 2018. 65 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Viçosa, Florestal, 2018.

FERREIRA, Priscila Savulski. *Séries de Taylor*. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), 2023. Material didático. Disponível em: http://paginapessoal.utfpr.edu.br/psferreira/calculo-integral/CI_02_20/serie_5.pdf

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1977. 274 p. (Projeto Euclides).

KRANTZ, Steven G. *Differential Equations DeMYSTiFieD: A Self-Teaching Guide*. New York: McGraw-Hill, 2004. 352 p.

SPIEGEL, Murray R. *Análise de Fourier*. 1. ed. Tradução de Alfredo Alves de Farias. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1976. 250 p. (Coleção Schaum).

VALLE, Roger. *Aula 24 – Convergência de Séries de Fourier*. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 2016. Disponível em: <https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2016/MA311/Aula24.pdf>

VIANA, Marcelo. *Na Folha, Viana conta a história de Jean-Baptiste Fourier*. IMPA, 2023. Disponível em: <https://impa.br/noticias/na-folha-viana-counta-a-historia-de-jean-baptiste-fourier/>. Acesso em: 23 set. 2025.

ZANINOTTO, João Manoel R.; SOARES, Maria Zoraide M. C. *Séries de Fourier: uma aplicação da trigonometria na engenharia de telecomunicações*. Campinas, SP: UNICAMP, [s.d.]. Material de aula.

SOBRE OS AUTORES



ANDRÉA FREITAS FRAGATA - com Graduação e Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM), é professora dos Cursos de Engenharia da Universidade do Estado do Amazonas (UEA) na Escola Superior de Tecnologia (EST/UEA) desde 2008. Tem interesse em Métodos Matemáticos e sua utilização nas práticas de ensino.



EDVAM DE OLIVEIRA NUNES - é doutor em Física da Matéria Condensada pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). É professor de Física por 25 anos até a presente data (setembro de 2025). Leciona para os cursos de Engenharia da Escola Superior de Tecnologia (EST) e desenvolve trabalhos em pesquisa e metodologias de ensino, tendo interesse em Grafeno, Semicondutores, Metodologias de Ensino e História da Física.



FELIPE VIEIRA SOLART - é graduando em Engenharia de Controle e Automação pela Universidade do Estado do Amazonas (UEA). Durante o ensino médio, participou de várias olimpíadas escolares, destacando-se na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), que abriu as portas para a iniciação científica e inspirou a sua caminhada no mundo acadêmico.

Tópicos de Séries de Fourier



www.atenaeditora.com.br



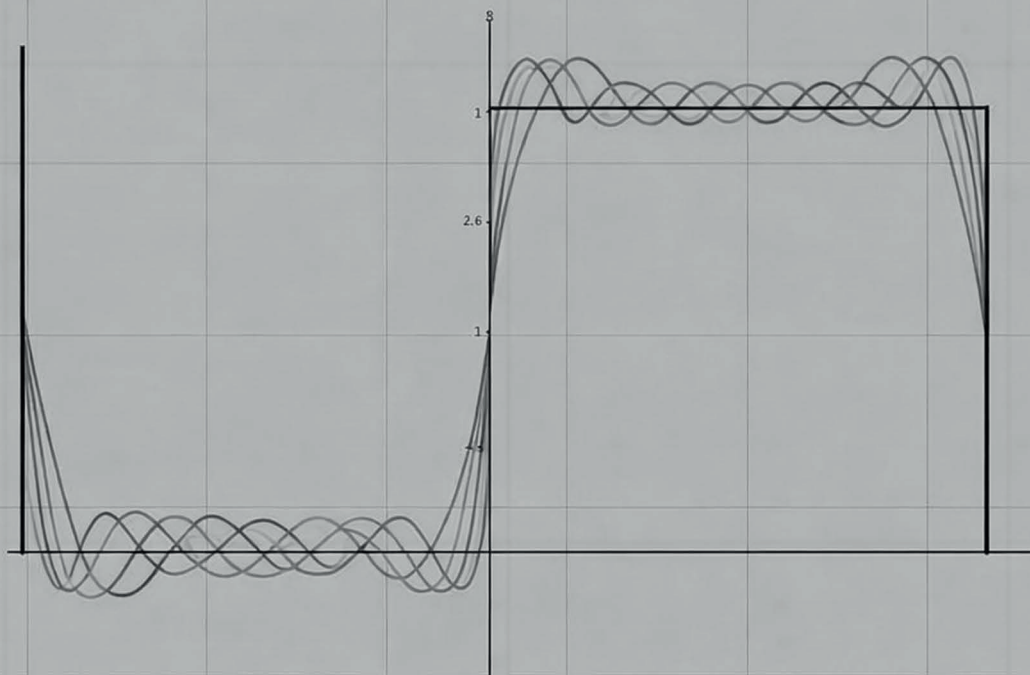
contato@atenaeditora.com.br



[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)



www.facebook.com/atenaeditora.com.br



Tópicos de Séries de Fourier

🌐 www.atenaeditora.com.br
✉ contato@atenaeditora.com.br
📷 @atenaeditora
📘 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

