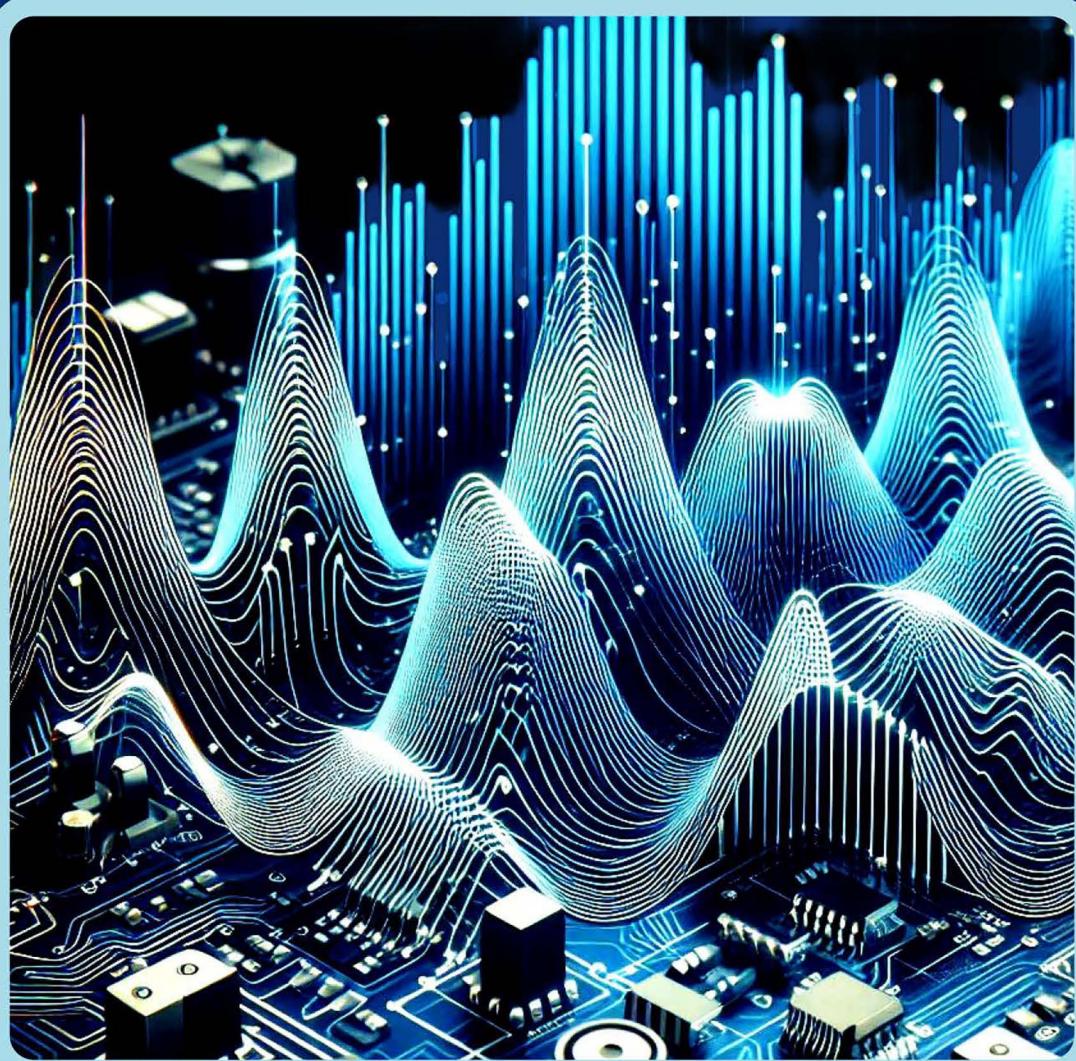


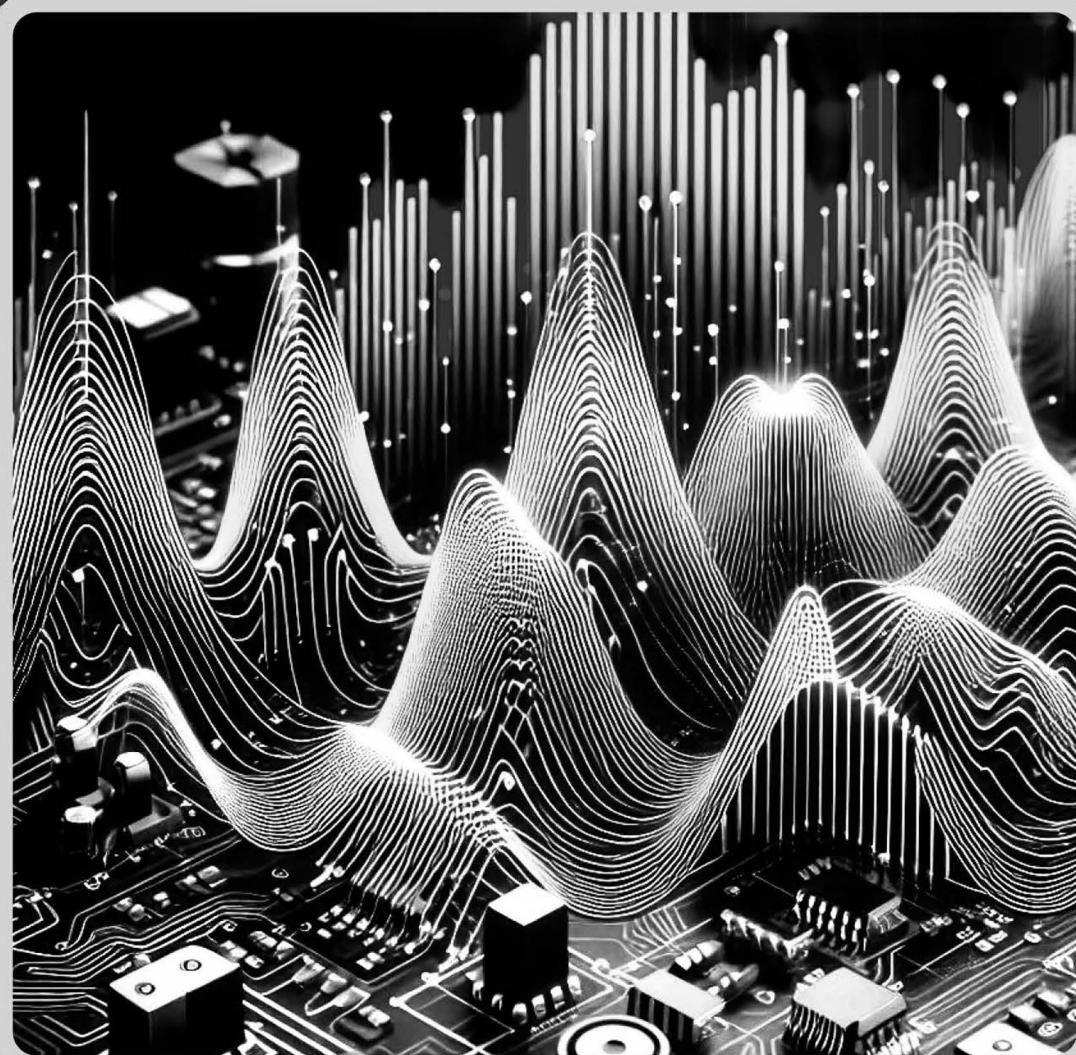
Jumar L. Russi
Fátima C. Soares

ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETIFICADORAS À DIODO



Jumar L. Russi
Fátima C. Soares

ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETIFICADORAS À DIODO



Editora chefe

Prof^a Dr^a Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva 2025 by Atena Editora

Natalia Oliveira Scheffer Copyright © 2025 Atena

Assistente editorial Editora

Flávia Barão Copyright do texto © 2025,

Bibliotecária o autor

Janaina Ramos Copyright da edição © 2025,

Projeto gráfico Atena Editora

Nataly Evilin Gayde Os direitos desta edição

Thamires Camili Gayde foram cedidos à Atena

Imagens da capa Editora pelo autor.

iStock *Open access publication by*

Edição de arte Atena Editora

Yago Raphael Massuqueto Rocha



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo desta obra, em sua forma, correção e confiabilidade, é de responsabilidade exclusiva dos autores. As opiniões e ideias aqui expressas não refletem, necessariamente, a posição da Atena Editora, que atua apenas como mediadora no processo de publicação. Dessa forma, a responsabilidade pelas informações apresentadas e pelas interpretações decorrentes de sua leitura cabe integralmente aos autores.

A Atena Editora atua com transparência, ética e responsabilidade em todas as etapas do processo editorial. Nossa objetivo é garantir a qualidade da produção e o respeito à autoria, assegurando que cada obra seja entregue ao público com cuidado e profissionalismo.

Para cumprir esse papel, adotamos práticas editoriais que visam assegurar a integridade das obras, prevenindo irregularidades e conduzindo o processo de forma justa e transparente. Nossa compromisso vai além da publicação, buscamos apoiar a difusão do conhecimento, da literatura e da cultura em suas diversas expressões, sempre preservando a autonomia intelectual dos autores e promovendo o acesso a diferentes formas de pensamento e criação.

Análise de estruturas retificadoras à diodo utilizando o MATLAB

Autores: Jumar L. Russi
Fátima C. Soares

Revisão: Os autores

Diagramação: Nataly Evilin Gayde

Capa: Yago Raphael Massuqueto Rocha

Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)	
R969	Russi, Jumar L. Análise de estruturas retificadoras à diodo utilizando o MATLAB / Jumar L. Russi, Fátima C. Soares. - Ponta Grossa - PR: Atena, 2025. Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-65-258-3797-0 DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.970251212 1. Eletrônica - circuitos retificadores. I. Russi, Jumar L. II. Soares, Fátima C. III. Título. CDD 621.3815
Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos - CRB-8/9166	

Atena Editora
Ponta Grossa - Paraná - Brasil
+55 (42) 3323-5493
+55 (42) 99955-2866
www.atenaeditora.com.br
 contato@atenaeditora.com.br

Conselho Editorial

Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira - Instituto Federal Goiano

Prof^a Dr^a Amanda Vasconcelos Guimarães - Universidade Federal de Lavras

Prof. Dr. Antonio Pasqualetto - Pontifícia Universidade Católica de Goiás

Prof^a Dr^a Ariadna Faria Vieira - Universidade Estadual do Piauí

Prof. Dr. Arinaldo Pereira da Silva - Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará

Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto - Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. Cirênia de Almeida Barbosa - Universidade Federal de Ouro Preto

Prof. Dr. Cláudio José de Souza - Universidade Federal Fluminense

Prof^a Dr^a Daniela Reis Joaquim de Freitas - Universidade Federal do Piauí

Prof^a Dr^a. Dayane de Melo Barros - Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior - Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof^a Dr^a Érica de Melo Azevedo - Instituto Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos - Instituto Federal do Pará

Prof. Dr. Fabrício Moraes de Almeida - Universidade Federal de Rondônia

Prof^a Dr^a Glécilla Colombelli de Souza Nunes - Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Humberto Costa - Universidade Federal do Paraná

Prof. Dr. Joachin de Melo Azevedo Sobrinho Neto - Universidade de Pernambuco

Prof. Dr. João Paulo Roberti Junior - Universidade Federal de Santa Catarina

Prof^a Dr^a Juliana Abonizio - Universidade Federal de Mato Grosso

Prof. Dr. Julio Cândido de Meirelles Junior - Universidade Federal Fluminense

Prof^a Dr^a Keyla Christina Almeida Portela - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná

Prof^a Dr^a Miranilde Oliveira Neves - Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará

Prof. Dr. Sérgio Nunes de Jesus - Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Prof^a Dr^a Talita de Santos Matos - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo - Universidade Federal Rural do Semi-Árido

Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior - Universidade Federal de Alfenas

Prefácio

O objetivo deste livro é demonstrar que softwares como o MATLAB podem ser utilizados para desenvolver integralmente, ou ao menos uma parte substancial, do estudo analítico de um determinado assunto. Especificamente no presente caso, serão estudadas as estruturas retificadoras, analisando o seu funcionamento, seus estágios de operação, suas principais formas de onda e as equações analíticas que permitem analisar o funcionamento, condições de operação e a realização do projeto dos componentes. O uso de softwares como o MATLAB pode trazer muitas vantagens para o estudo analítico de um assunto, como a possibilidade de automatizar cálculos complexos, a facilidade de visualização de resultados e a redução de erros humanos. Além disso, o uso de softwares pode economizar tempo e recursos, tendo em vista que muitas análises podem ser realizadas de forma mais rápida e precisa do que por meio de desenvolvimento manual. Ao longo deste livro, serão apresentados exemplos práticos de como utilizar o MATLAB para analisar as estruturas retificadoras, desde o seu funcionamento básico até a análise de questões mais específicas de sua operação. Serão abordados tópicos como o retificador monofásico de meia onda, o retificador monofásico de onda completa, bem como estes retificadores com alimentação trifásica. Com o conhecimento adquirido neste livro, espera-se que o leitor possa compreender melhor o funcionamento das estruturas retificadoras e ser capaz de analisá-las de forma mais precisa e eficiente. Além disso, espera-se que o leitor possa aplicar os conceitos aprendidos em outras áreas de estudo, utilizando o MATLAB como uma ferramenta poderosa para o desenvolvimento de análises analíticas.

Lista de Abreviaturas

Abreviatura	Significado
β	ângulo de extinção da corrente
ϕ	ângulo do fator de potência
ϕ_n	ângulo do fator de potência da n-ésima harmônica
π	Pi, constante 3,1415...
$\sigma_{1,2,3\dots}$	partes das equações
τ	constante de tempo do circuito indutivo
θ_1 e θ_2	ângulos de comutação do(s) diodo(s)
ω	frequência angular
a_0	valor médio da forma de onda da série de Fourier
a_n	coeficiente da n-ésima harmônica dos cossenos da série de Fourier
$asin$	função trigonométrica arco-seno
$atan$, $atan2$	função trigonométrica arco-tangente
b_n	coeficiente da n-ésima harmônica dos senos da série de Fourier
cos	função trigonométrica cosseno
D , D_1 , D_2 , ...	diodo, diodo1, diodo2...
e	função exponencial
E	fonte de tensão constante
i_L	corrente através da carga
$i_{L,E1}(wt)$	corrente através da carga durante a etapa um, em função do ângulo
IL_0	valor inicial da corrente
IL_s	corrente elétrica no domínio da frequência
L	indutância
n	ordem da frequência harmônica
R	resistência, carga resistiva
RE	carga resistiva com fonte de tensão em série
s	frequência (no domínio da frequência)
sen , sin	função trigonométrica seno
t	tempo
T	período da forma de onda de corrente ou tensão
tan	função trigonométrica tangente
$v(\omega t)$	tensão senoidal em função do ângulo
V_p	tensão de pico
V_{DMax} , I_{DMax}	tensão, corrente máxima sobre o diodo
V_L	tensão na carga

V_{LMed} , I_{LMed}	tensão, corrente média sobre a carga
V_{LRMS} , I_{LRMS}	tensão, corrente eficaz sobre a carga
V_o	valor eficaz da tensão
X_L	reatância indutiva
Z	impedância da carga
Z_n	impedância da carga na frequência harmônica n

Listas de Figuras

1.1	Retificador monofásico de meia onda à diodo.	19
1.2	Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga resistiva.	19
1.3	Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo.	20
1.4	Principais formas de onda.	20
1.5	Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão. .	24
1.6	Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.	24
1.7	Principais formas de onda.	25
1.8	Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva.	30
1.9	Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva.	31
1.10	Principais formas de onda.	31
1.11	Formas de onda da corrente através da carga e de suas componentes.	36
1.12	Ângulo de extinção β em função de ϕ [rad].	37
1.13	Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.	42
1.14	Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.	43
1.15	Principais formas de onda.	43
1.16	Forma de onda da corrente através da carga para o MCD.	48
1.17	Forma de onda da corrente através da carga para o MCC.	51
1.18	Forma de onda da corrente através da carga para o MCD.	54
1.19	Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga de fonte de corrente. .	68
1.20	Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga I. .	68
1.21	Principais formas de onda.	69
2.1	Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo.	73
2.2	Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga R. .	74
2.3	Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga R.	74
2.4	Principais formas de onda.	75
2.5	Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.	78
2.6	Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.	79
2.7	Principais formas de onda.	79
2.8	Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva.	85

2.9	Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva.	85
2.10	Principais formas de onda.	85
2.11	Forma de onda da corrente através da carga e de suas componentes.	89
2.12	Forma de onda da corrente através da carga.	91
2.13	Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.	96
2.14	Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.	96
2.15	Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga de fonte de corrente.	97
2.16	Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga de fonte de corrente.	97
2.17	Principais formas de onda.	98
3.1	Retificador monofásico de onda completa à diodo.	101
3.2	Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga R.	102
3.3	Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga R.	102
3.4	Principais formas de onda.	103
3.5	Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.	104
3.6	Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.	105
3.7	Principais formas de onda.	105
3.8	Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva.	108
3.9	Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva.	108
3.10	Principais formas de onda.	109
3.11	Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.	111
3.12	Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.	111
3.13	Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga de fonte de corrente.	112
3.14	Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga de fonte de corrente.	113
3.15	Principais formas de onda.	113
4.1	Retificador trifásico de meia onda à diodo.	115
4.2	Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga R.	116
4.3	Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga R.	116
4.4	Formas de onda trifásicas.	117
4.5	Tensões sobre os diodos.	120
4.6	Principais formas de onda.	122
4.7	Fasores de tensão sobre os diodos.	124
4.8	Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.	127
4.9	Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.	127
4.10	Principais formas de onda.	128

4.11	Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva.	133
4.12	Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva.	134
4.13	Principais formas de onda.	134
4.14	Forma de onda da corrente através da carga e de suas componentes.	139
4.15	Forma de onda da corrente através da carga para o MCC	144
4.16	Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.	148
4.17	Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.	148
4.18	Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga de fonte de corrente.	149
4.19	Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga de fonte de corrente.	149
4.20	Principais formas de onda.	150
5.1	Retificador trifásico de onda completa à diodo.	155
5.2	Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga R.	156
5.3	Etapas de operação do retificador trifásico de onda completa à diodo com carga R.	157
5.4	Formas de onda trifásicas.	158
5.5	Diagrama fasorial	159
5.6	Formas de onda das tensões de linha.	159
5.7	Principais formas de onda.	160
5.8	Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.	163
5.9	Principais formas de onda.	164
5.10	Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga indutiva.	169
5.11	Principais formas de onda.	170
5.12	Forma de onda da corrente através da carga e de suas componentes.	174
5.13	Forma de onda da corrente através da carga.	178
5.14	Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.	183
5.15	Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga de fonte de corrente.	183
5.16	Principais formas de onda.	185

Lista de Tabelas

1.1	Correspondência de variáveis.	32
1.1	Correspondência de variáveis.	45
5.1	Intervalos de condução.	158

Conteúdo

1	Retificador Monofásico de Meia Onda à Díodo	19
1.1	Carga R	19
1.1.1	Topologia	19
1.1.2	Etapas de operação	20
1.1.3	Formas de onda	20
1.1.4	Equações para o projeto	21
1.1.5	Exemplos numéricos	23
1.2	Carga RE	23
1.2.1	Topologia	23
1.2.2	Etapas de operação	24
1.2.3	Formas de onda	24
1.2.4	Equações para o projeto	26
1.2.5	Exemplos numéricos	29
1.3	Carga Indutiva RL	30
1.3.1	Topologia	30
1.3.2	Etapas de operação	30
1.3.3	Formas de onda	31
1.3.3.1	Determinação da corrente através da carga, $i_L(t)$	31
1.3.3.2	Ângulo de extinção β em função do ângulo ϕ	37
1.3.4	Equações para o projeto	37
1.3.5	Exemplos numéricos	40
1.4	Carga RL com Díodo de Roda Livre	42
1.4.1	Topologia	42
1.4.2	Etapas de operação	42
1.4.3	Formas de onda	43
1.4.3.1	Análise preliminar para a corrente de carga	44
A.	1 ^a etapa	44
B.	2 ^a etapa	45
1.4.3.2	Corrente de carga para o modo de condução descontínua, MCD	47
A.	1 ^a etapa	47
B.	2 ^a etapa	48
1.4.3.3	Corrente de carga para o modo de condução contínua, MCC	48
A.	1 ^a etapa	48
B.	2 ^a etapa	50
1.4.3.4	Análise através da utilização das séries de Fourier	50
1.4.4	Equações para o projeto	53
1.4.4.1	Tensão média através da carga, $V_{L\text{Med}}$	53
1.4.4.2	Corrente média através da carga, $I_{L\text{Med}}$	54

A.	MCD	54
B.	MCC	55
1.4.4.3	Tensão eficaz através da carga, V_{LRMS}	56
1.4.4.4	Corrente eficaz através da carga, I_{LRMS}	56
A.	MCD	56
B.	MCC	57
1.4.4.5	Utilizando as séries de Fourier	58
A.	Corrente I_{LMed}	60
B.	Corrente I_{LRMS}	61
1.4.4.6	Tensão máxima sobre o diodo, V_{DMax}	61
1.4.4.7	Corrente máxima através do diodo, I_{DMax}	61
A.	Modo de condução descontínua	61
B.	Modo de condução contínua	62
1.4.5	Exemplos numéricos	62
1.4.5.1	Modo de condução descontínua, MCD	63
A.	Equações	63
B.	Grandezas	64
C.	Grandezas séries de Fourier	65
1.4.5.2	Modo de Condução Contínua, MCC	65
A.	Equações	66
B.	Grandezas	66
C.	Séries de Fourier	67
D.	Grandezas pelas Séries de Fourier	68
1.5	Carga I com Diodo de Roda-Livre	68
1.5.1	Topologia	68
1.5.2	Etapas de operação	68
1.5.3	Formas de onda	69
1.5.4	Equações para o projeto	70
1.5.5	Exemplos numéricos	71
1.6	Conclusão	72
2	Retificador Monofásico de Onda Completa com Ponto Médio à Diodo	73
2.1	Carga R	73
2.1.1	Topologia	73
2.1.2	Etapas de operação	74
2.1.3	Formas de onda	75
2.1.4	Equações para o projeto	75
2.1.5	Exemplos numéricos	77
2.2	Carga RE	77
2.2.1	Topologia	77
2.2.2	Etapas de operação	78
2.2.3	Formas de onda	78
2.2.4	Equações para o projeto	80
2.2.5	Exemplos numéricos	83
2.3	Carga Indutiva RL	84
2.3.1	Topologia	84
2.3.2	Etapas de operação	84
2.3.3	Formas de onda	86

2.3.3.1	Determinação de $i_L(t)$	86
2.3.3.2	Análise utilizando a série de Fourier	89
2.3.4	Equações para o projeto	92
2.3.5	Exemplos numéricos	93
2.4	Carga RL com diodo de Roda Livre	95
2.4.1	Topologia	95
2.4.2	Etapas de operação	95
2.4.3	Formas de onda	96
2.4.4	Equações para o projeto	96
2.4.5	Exemplos numéricos	96
2.5	Carga I com Diodo de Roda-Livre	96
2.5.1	Topologia	96
2.5.2	Etapas de operação	97
2.5.3	Formas de onda	97
2.5.4	Equações para o projeto	97
2.5.5	Exemplos numéricos	99
2.6	Conclusão	100
3	Retificador Monofásico de Onda Completa em Ponte	101
3.1	Carga R	101
3.1.1	Topologia	101
3.1.2	Etapas de operação	102
3.1.3	Formas de onda	102
3.1.4	Equações para o projeto	102
3.1.5	Exemplos numéricos	103
3.2	Carga RE	104
3.2.1	Topologia	104
3.2.2	Etapas de operação	104
3.2.3	Formas de onda	105
3.2.4	Equações para o projeto	105
3.2.5	Exemplos numéricos	106
3.3	Carga Indutiva RL	107
3.3.1	Topologia	107
3.3.2	Etapas de operação	108
3.3.3	Formas de onda	108
3.3.4	Equações para o projeto	108
3.3.5	Exemplos numéricos	108
3.4	Carga RL com Diodo de Roda Livre	111
3.4.1	Topologia	111
3.4.2	Etapas de operação	111
3.4.3	Formas de onda	111
3.4.4	Equações para o projeto	111
3.4.5	Exemplos numéricos	112
3.5	Carga I com Diodo de Roda-Livre	112
3.5.1	Topologia	112
3.5.2	Etapas de operação	112
3.5.3	Formas de onda	112
3.5.4	Equações para o projeto	113

3.5.5 Exemplos numéricos	114
3.6 Conclusão	114
4 Retificador Trifásico de Meia Onda à Diodo	115
4.1 Carga R	115
4.1.1 Topologia	115
4.1.2 Etapas de operação	116
4.1.2.1 Condução dos diodos	117
A. Condições de condução para o diodo D_1	119
B. Condições de condução para o diodo D_2	119
C. Condições de condução para o diodo D_3	120
4.1.2.2 Determinação dos instantes de comutação	121
4.1.3 Formas de onda	122
4.1.4 Equações para o projeto	122
4.1.5 Exemplos numéricos	125
4.2 Carga RE	126
4.2.1 Topologia	126
4.2.2 Etapas de operação	127
4.2.3 Formas de onda	128
4.2.4 Equações para o projeto	129
4.2.5 Exemplos numéricos	132
4.3 Carga Indutiva RL	133
4.3.1 Topologia	133
4.3.2 Etapas de operação	133
4.3.3 Formas de onda	134
4.3.3.1 Determinação de $i_L(t)$	134
4.3.3.2 Análise utilizando a série de Fourier	138
4.3.4 Equações para o projeto	143
4.3.5 Exemplos numéricos	146
4.4 Carga RL com diodo de Roda Livre	148
4.4.1 Topologia	148
4.4.2 Etapas de operação	148
4.4.3 Formas de onda	148
4.4.4 Equações para o projeto	148
4.4.5 Exemplos numéricos	149
4.5 Carga I com Diodo de Roda-Livre	149
4.5.1 Topologia	149
4.5.2 Etapas de operação	149
4.5.3 Formas de onda	150
4.5.4 Equações para o projeto	150
4.5.5 Exemplos numéricos	152
4.6 Conclusão	153
5 Retificador Trifásico de Onda Completa à Diodo	155
5.1 Carga R	155
5.1.1 Topologia	155
5.1.2 Etapas de operação	155
5.1.3 Formas de onda	157

5.1.4	Equações para o projeto	159
5.1.5	Exemplos numéricos	162
5.2	Carga RE	162
5.2.1	Topologia	162
5.2.2	Etapas de operação	163
5.2.3	Formas de onda	163
5.2.4	Equações para o projeto	165
5.2.5	Exemplos numéricos	168
5.3	carga indutiva RL	169
5.3.1	Topologia	169
5.3.2	Etapas de operação	169
5.3.3	Formas de onda	169
5.3.3.1	Determinação de $i_L(t)$	170
5.3.3.2	Análise utilizando a Série de Fourier	174
5.3.4	Equações para o projeto	178
5.3.5	Exemplos numéricos	180
5.4	Carga RL com Diodo de Roda Livre	182
5.4.1	Topologia	182
5.4.2	Etapas de operação	182
5.4.3	Formas de onda	182
5.4.4	Equações para o projeto	183
5.4.5	Exemplos numéricos	183
5.5	Carga I com Diodo de Roda-Livre	183
5.5.1	Topologia	183
5.5.2	Etapas de operação	184
5.5.3	Formas de onda	184
5.5.4	Equações para o projeto	184
5.5.5	Exemplos numéricos	187
5.6	Conclusão	187

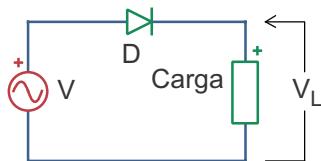
Capítulo 1

Retificador Monofásico de Meia Onda à Diodo

Este capítulo apresenta a análise dos retificadores de meia onda à diodo. Serão obtidas as equações fundamentais para cada modo de operação e serão apresentados os gráficos com as principais formas de onda. Também será explicado como ocorre a operação das topologias apresentadas.

A Fig. 1.1 ilustra o retificador monofásico de meia onda à diodo. Inicialmente, será realizada uma análise com carga puramente resistiva (R). Em seguida, serão introduzidas diferentes cargas e serão analisados seus efeitos na operação do retificador.

Figura 1.1. Retificador monofásico de meia onda à diodo.

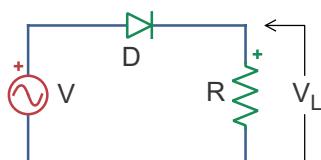


1.1 Carga R

1.1.1 Topologia

O retificador mostrado na Fig. 1.2 é formado por uma fonte de tensão (V), um diodo (D) e pela carga R . Todos os componentes estão conectados em série.

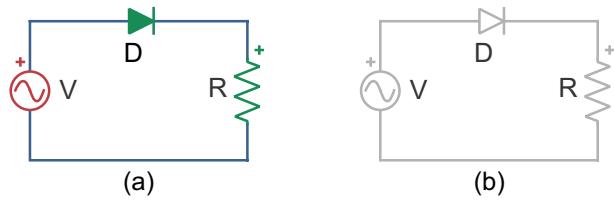
Figura 1.2. Retificador monofásico de meia onda com carga resistiva.



1.1.2 Etapas de operação

Para esta topologia, quando a carga é puramente resistiva, o diodo conduz durante o semicírculo positivo (Fig. 1.3(a)) e bloqueia durante o semicírculo negativo (Fig. 1.3(b)). Dessa forma, durante o semicírculo positivo é aplicada a tensão da fonte de entrada sobre a Carga R enquanto a corrente elétrica flui através da mesma. A tensão através da carga é nula durante o semicírculo negativo porque no decorrer deste semicírculo o diodo se encontra reversamente polarizado e assim não circula nenhuma corrente através da mesma.

Figura 1.3. Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo.

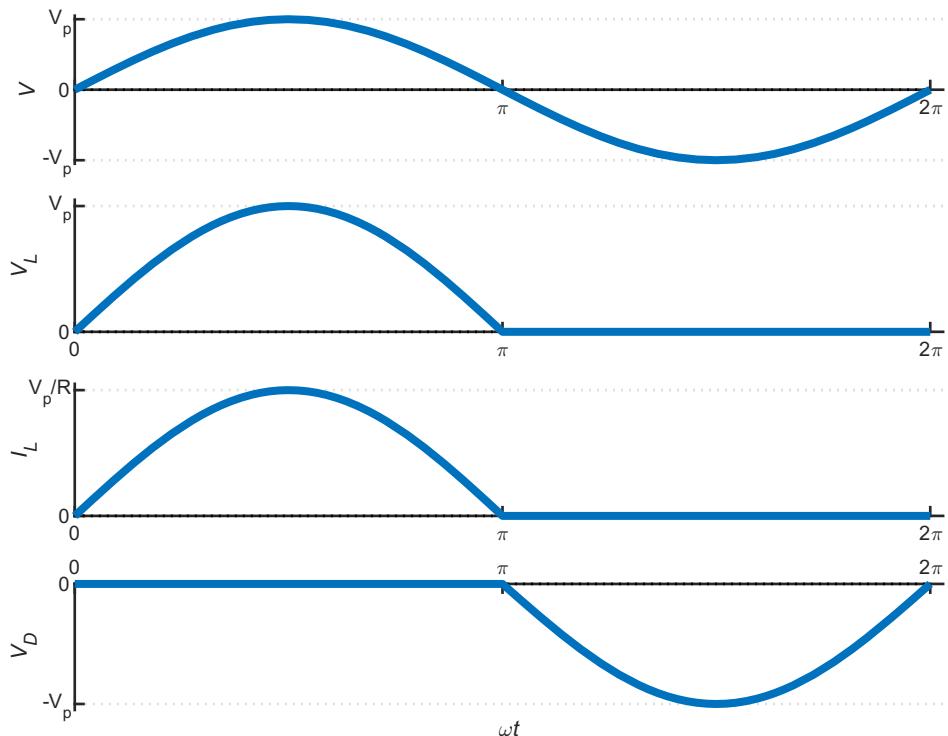


1.1.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 1.4, a seguir. Observa-se que a tensão e a corrente através da carga são proporcionais, sendo sempre positivas. No semicírculo negativo o diodo se encontra bloqueado e ambas grandezas são nulas.

1 Figura_WF_1pulso_para_carga_R();

Figura 1.4. Principais formas de onda.



1.1.4 Equações para o projeto

A tensão de alimentação é dada por:

$$v(\omega t) = V_p \operatorname{sen}(\omega t) [V] \quad (1.1)$$

onde

V_p é a tensão de pico; e

ω é a frequência angular.

Durante o semiciclo positivo a fonte de entrada está conectada à carga. Como a corrente é nula durante o semiciclo negativo, a tensão através da carga é nula. Dessa forma,

$$v_L(\omega t) = \begin{cases} V_p \operatorname{sen}(\omega t) & 0 \leq \omega t < \pi \\ 0 & \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases} \quad (1.2)$$

A corrente é proporcional à tensão, pois a carga é puramente resistiva:

$$i_L(\omega t) = \frac{v_L(\omega t)}{R} \quad (1.3)$$

A tensão média sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\text{Med}} := \frac{1}{T} \int_0^T v(\omega t) d(\omega t) \quad (1.4)$$

Esta equação pode ser desenvolvida, tendo em vista que a tensão sobre a carga corresponde à tensão de alimentação durante o semiciclo positivo e é nula durante o negativo, conforme a Fig. 1.4.

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi V_p \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} (0) d(\omega t) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V_p \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t) \quad (1.5)$$

```
1 syms V_p wt
2 V_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,pi)
```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{V_p}{\pi} \quad (1.6)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```
1 I_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt)/R,wt,0,pi)
```

$$I_{L\,Med} = \frac{V_p}{R\pi} \quad (1.7)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\,RMS} := \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (v(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (1.8)$$

Assim, de maneira semelhante, como a tensão da carga corresponde à tensão de alimentação durante o semicírculo positivo e é nula durante o semicírculo negativo, tem-se

$$V_{L\,RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (1.9)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/(2*pi)*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,pi))
```

$$V_{L\,RMS} = 0.5 V_p \quad (1.10)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```
1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(1/(2*pi)*int((V_p*sin(wt)/R)^2,wt,0,pi))
```

$$I_{L\,RMS} = \frac{0.5 V_p}{R} \quad (1.11)$$

A tensão máxima sobre o diodo corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação.

$$V_{D\,Max} = V_p$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\,Max} = V_p \quad (1.12)$$

E a corrente máxima é proporcional à tensão máxima,

$$I_{D\,Max} = V_p/R$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{D\,Max} = \frac{V_p}{R} \quad (1.13)$$

1.1.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir. Serão utilizadas as equações 1.6, 1.7, 1.10, 1.11, 1.12 e 1.13, desenvolvidas na seção 1.1.4.

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3
4 V_LMed = V_p/pi

```

$$V_{L\,Med} = 99.0348$$

```

1 I_LMed = V_p/(R*pi)

```

$$I_{L\,Med} = 9.9035$$

```

1 V_LRMS = 0.5*V_p

```

$$V_{L\,RMS} = 155.5635$$

```

1 I_LRMS = (0.5*V_p)/R

```

$$I_{L\,RMS} = 15.5563$$

```

1 V_DMax = V_p

```

$$V_{D\,Max} = 311.1270$$

```

1 I_DMax = V_p/R

```

$$I_{D\,Max} = 31.1127$$

1.2 Carga RE

1.2.1 Topologia

Esta topologia é semelhante à topologia analisada na seção 1.1, exceto que a carga é formada por uma resistência em série com uma fonte de tensão de valor E, conforme ilustrado na Fig. 1.5.

$$V_p > E$$

Figura 1.5. Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.

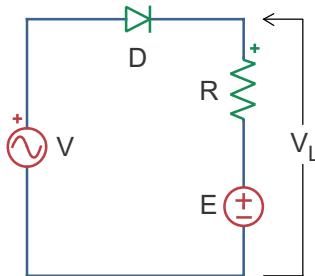
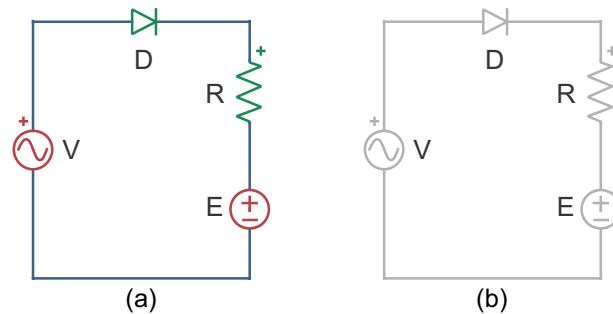


Figura 1.6. Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.



1.2.2 Etapas de operação

Para esta topologia, o diodo D conduz quando a tensão da fonte de entrada $V(\omega t)$, for maior que a tensão da fonte E (Fig. 1.6(a)). Caso contrário, este diodo se encontra bloqueado e assim não há corrente através da carga de forma que não há nenhuma queda de tensão sobre a resistência R (Fig. 1.6(b)). Portanto, quando o diodo não está conduzindo, a tensão $V_L(\omega t)$ será igual a E .

Os circuitos equivalentes são mostrados na Fig. 1.6.

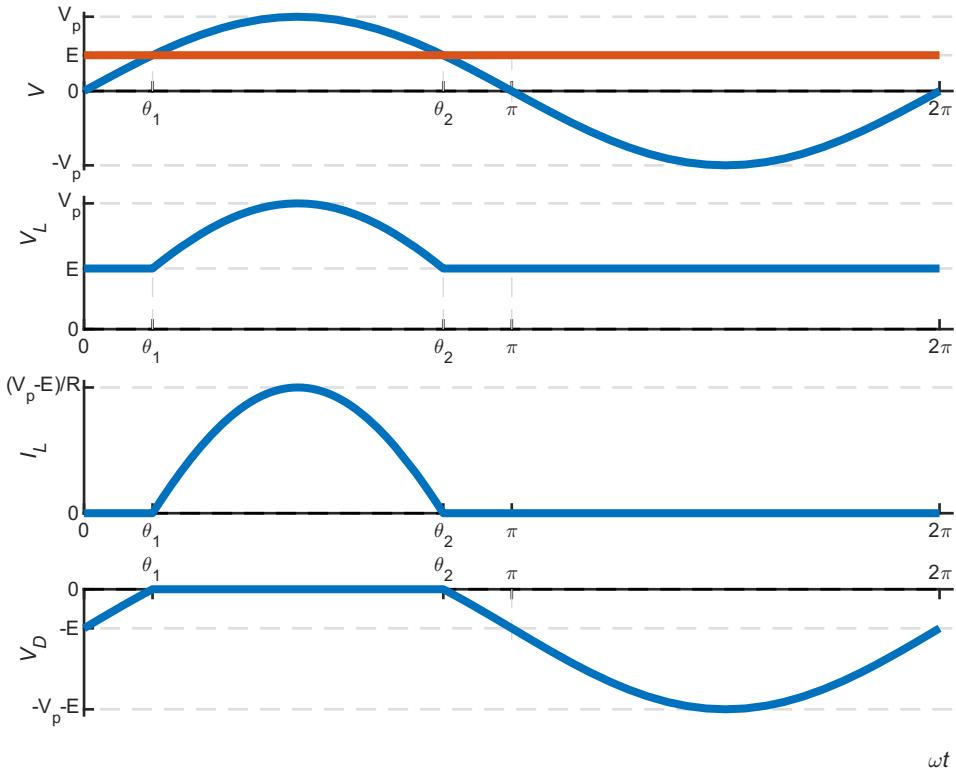
1.2.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 1.7. Observa-se que as interseções entre as formas de onda $V(\omega t)$ e E ocorrem para os ângulos θ_1 e θ_2 . A tensão na carga é sempre igual ou superior à tensão da fonte E . A corrente através da carga é proporcional à tensão sobre a resistência R .

1 | **Figura_WF_1pulso_para_carga_RE()**

Primeiramente devem ser determinadas as interseções entre as formas de onda das duas fontes. A tensão da fonte E deverá ser inferior ao pico de tensão da fonte de alimentação V para que as interseções ocorram.

Figura 1.7. Principais formas de onda.



```

1 clearvars
2 syms V_p wt E R
3
4 % Exemplos de valores de grandezas
5 % Vp = sqrt(2)*220;
6 % f = 60;
7 % omega = 2*pi*f;
8 % Va = Vp*sin(omega*t);
9 % E = 100;
10 % R = 10;
11
12 eq = V_p*sin(wt) == E;
13
14 thetas = solve(eq,wt)

```

$$\theta_{1,2} = \begin{bmatrix} \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \\ \pi - \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

```
1 theta_1 = thetas(1)
```

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \quad (1.15)$$

```
1 theta_2 = thetas(2)
```

$$\theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \quad (1.16)$$

O diodo estará no estado de condução entre os ângulos θ_1 e θ_2 , aplicando a tensão da fonte de entrada à carga.

Dessa forma, a tensão através da carga é dada por:

$$v_L(\omega t) = \begin{cases} E & 0 \leq \omega t < \theta_1 \\ V_p \sin(\omega t) & \theta_1 \leq \omega t < \theta_2 \\ E & \theta_2 \leq \omega t < 2\pi \end{cases} \quad (1.17)$$

onde θ_1 e θ_2 são os ângulos de interseção entre as formas de onda de V e E, conforme já comentado.

A corrente através da carga pode ser obtida através da tensão sobre a resistência. Dessa forma,

$$V_R(\omega t) = \frac{v(\omega t) - E}{R}$$

1.2.4 Equações para o projeto

Como visto, os instantes de comutação influem no funcionamento do conversor. Desta forma, utilizam-se os valores de θ_1 e θ_2 para o projeto deste retificador.

A tensão média sobre a carga pode ser obtida através de

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\theta_1} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{2\pi} Ed(\omega t) \right] \quad (1.18)$$

Que pode ser simplificada para

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{0+\theta_2}^{\theta_1+2\pi} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (1.19)$$

Assim,

```
1 syms wt theta_1 theta_2
2
3 V_LMed = 1/(2*sym('pi'))*(int(V_p*sin(wt),wt,theta_1,theta_2)+...
4 int(E,wt,theta_2,2*sym('pi')+theta_1))
```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{0.5(E(2\pi + \theta_1 - \theta_2) + V_p(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)))}{\pi} \quad (1.20)$$

Obtém-se então a tensão média sobre a resistência para calcular a corrente através da mesma. A tensão média sobre R corresponde à

$$V_{R\text{Med}} = V_{L\text{Med}} - E$$

durante o período compreendido entre θ_1 e θ_2 . Assim,

$$V_{R\text{Med}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (V_p \sin(\omega t) - E) d(\omega t) \quad (1.21)$$

```
1 V_RMed = 1/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E),wt,theta_1,theta_2)
```

$$V_{R\text{Med}} = \frac{0.5(V_p(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E(\theta_1 - \theta_2))}{\pi}$$

$I_{L\text{Med}}$ é proporcional à $V_{R\text{Med}}$. Dessa forma

```
1 I_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E)/R,wt,theta_1,theta_2)
```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{0.5 \left(\frac{V_p(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))}{R} + \frac{E(\theta_1 - \theta_2)}{R} \right)}{\pi}$$

```
1 I_LMed = simplifyFraction(I_LMed)
```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{0.5(E\theta_1 - E\theta_2 + V_p \cos(\theta_1) - V_p \cos(\theta_2))}{R\pi}$$

```
1 %I_LMed = simplify(I_LMed)
2 I_LMed = collect(I_LMed, {'E', 'V_p', 'R'})
```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{V_p(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E(\theta_1 - \theta_2)}{2R\pi} \quad (1.22)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\theta_1} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p (\sin(\omega t))^2 d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{2\pi} E^2 d(\omega t) \right]} \quad (1.23)$$

Que como visto anteriormente, pode ser simplificada para

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left[\int_{0+\theta_2}^{\theta_1+2\pi} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p (\sin(\omega t))^2 d(\omega t) \right]} \quad (1.24)$$

```

1 syms V_p wt, assume([V_p, sym('pi')], 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*(int((V_p*sin(wt))^2,wt,theta_1,theta_2)+...
3 int((E)^2,wt,theta_2,2*sym('pi')+theta_1)))

```

$$V_{LRMS} = \frac{\sqrt{0.5 E^2 (2 \pi + \theta_1 - \theta_2) - 0.1250 V_p^2 (2 \theta_1 - 2 \theta_2 - \sin(2 \theta_1) + \sin(2 \theta_2))}}{\pi^{0.5}} \quad (1.25)$$

```

1 V_RRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E)^2,wt,theta_1,theta_2));
2 MostrarEquacoesLongas(V_RRMS,[2,1])

```

$$V_{RRMS} = \frac{\sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8}}{\pi^{0.5}} \quad (1.26)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0.1250 V_p^2 \sin(2 \theta_1) \\ \sigma_2 &= -0.1250 V_p^2 \sin(2 \theta_2) \\ \sigma_3 &= -0.5 E^2 \theta_1 \\ \sigma_4 &= 0.5 E^2 \theta_2 \\ \sigma_5 &= -0.2500 V_p^2 \theta_1 \\ \sigma_6 &= 0.2500 V_p^2 \theta_2 \\ \sigma_7 &= -E V_p \cos(\theta_1) \\ \sigma_8 &= E V_p \cos(\theta_2) \end{aligned}$$

Como a corrente através do circuito auxiliar é proporcional à tensão sobre o resistor,

```

1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sym('V_RRMS')/R

```

$$I_{LRMS} = \frac{V_{RRMS}}{R} \quad (1.27)$$

A tensão máxima sobre o diodo corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação acrescida da fonte E.

$$V_{DMax} = V_p + E$$

```

1 V_DMax = V_p + E

```

$$V_{DMax} = E + V_p \quad (1.28)$$

E a corrente máxima,

$$I_{DMax} = (V_p - E)/R$$

```

1 I_DMax = (V_p - E)/R

```

$$I_{DMax} = -\frac{E - V_p}{R} \quad (1.29)$$

1.2.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, conforme as equações 1.20, 1.22, 1.25, 1.27, 1.28 e 1.29.

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 f = 60;
4 E = 150;
5 w = 2*pi*f

```

$$w = 376.9911$$

```

1 theta_1 = asin(E/V_p)

```

$$\theta_1 = 0.5031$$

```

1 theta_2 = pi - asin(E/V_p)

```

$$\theta_2 = 2.6385$$

```

1 V_LMed = (0.5*(E*(2*pi + theta_1 - theta_2) + V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)))/pi

```

$$V_{L\,Med} = 185.7849$$

```

1 I_LMed = (V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)) + E*(theta_1 - theta_2))/(2*R*pi)

```

$$I_{L\,Med} = 3.5785$$

```

1 V_LRMS = sqrt(0.5*E^2*(2*pi + theta_1 - theta_2) - ...
2 0.1250*V_p^2*(2*theta_1 - 2*theta_2 - sin(2*theta_1) + ...
3 sin(2*theta_2)))/pi^0.5

```

$$V_{L\,RMS} = 194.4478$$

```

1 sigma1 = 0.125*V_p^2*sin(2*theta_1);
2 sigma2 = -0.125*V_p^2*sin(2*theta_2);
3 sigma3 = -0.5*E^2*theta_1;
4 sigma4 = 0.5*E^2*theta_2;
5 sigma5 = -0.25*V_p^2*theta_1;
6 sigma6 = 0.25*V_p^2*theta_2;
7 sigma7 = -E*V_p*cos(theta_1);
8 sigma8 = E*V_p*cos(theta_2);
9 V_RRMS = sqrt(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + sigma6 + sigma7 + sigma8)/
pi^0.5

```

$$V_{RRMS} = 67.6349$$

$$1 \quad I_{LRMS} = V_{RRMS}/R$$

$$I_{LRMS} = 6.7635$$

$$1 \quad V_{DMax} = V_p + E$$

$$V_{DMax} = 461.1270$$

$$1 \quad I_{DMax} = (V_p - E)/R$$

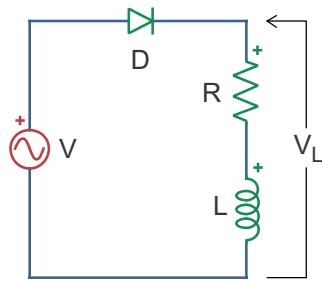
$$I_{DMax} = 16.1127$$

1.3 Carga Indutiva RL

1.3.1 Topologia

Este retificador é idêntico àquele da seção 1.1. No entanto, sua carga apresenta um comportamento indutivo, sendo formada por um resistor e por um indutor conectados em série, conforme a Fig. 1.8.

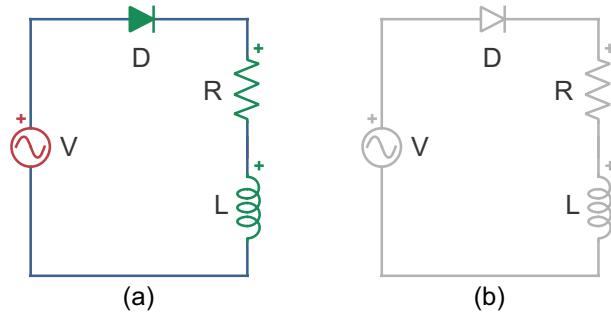
Figura 1.8. Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva.



1.3.2 Etapas de operação

Conforme comentado, a carga desta topologia é composta por uma indutância em série com uma resistência de modo que a mesma apresenta uma característica indutiva. Dessa forma, o comportamento do circuito é alterado em relação ao circuito estudado na seção 1.1. O diodo permanecerá em condução enquanto a corrente através do mesmo for positiva (Fig. 1.9(a)). No momento em que a sua corrente se anular, o diodo irá bloquear e quando isto ocorre não será mais possível aplicar a tensão da fonte $V(\omega t)$ à carga formada pelo conjunto resistor e indutor, (Fig. 1.9(b)), de modo que a corrente através da carga permanecerá nula até o início do próximo ciclo.

Figura 1.9. Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva.

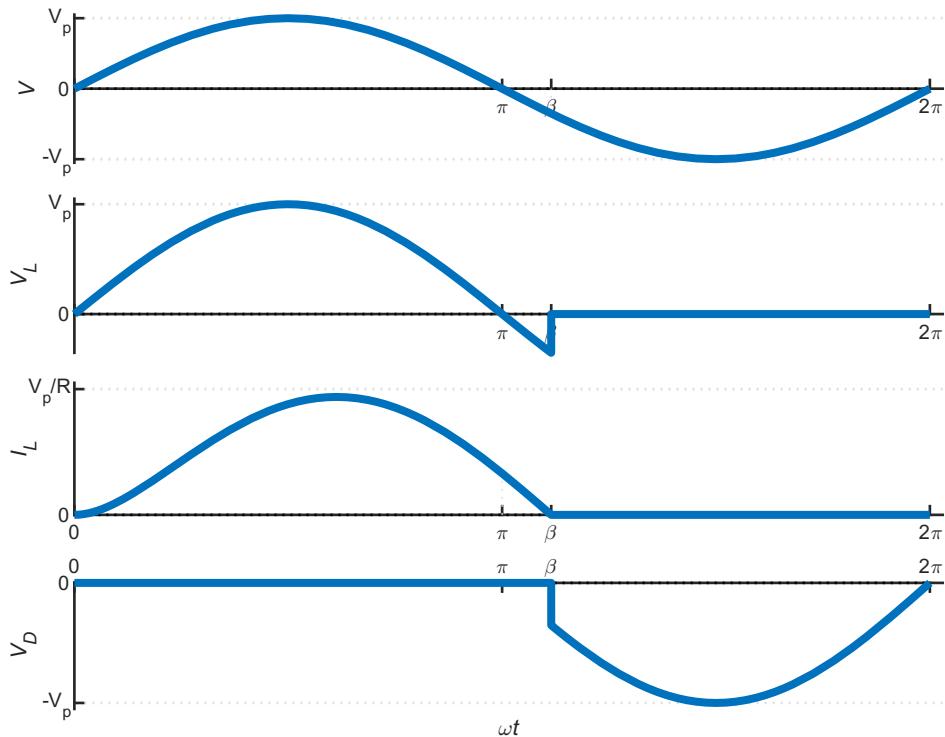


1.3.3 Formas de onda

As principais formas de onda podem ser vistas na Fig. 1.10, a seguir. Observa-se que a corrente se anula quando $\omega t = \beta$. Durante o intervalo entre os ângulos π e β é aplicada tensão negativa sobre a carga, reduzindo o seu valor médio e assim a potência que pode ser transferida para a mesma.

1 Figura_WF_1pulso_para_carga_RL();

Figura 1.10. Principais formas de onda.



1.3.3.1 Determinação da corrente através da carga, $i_L(t)$

O procedimento para a determinação de $i_L(t)$ consta da aplicação da lei das tensões de Kirchhoff (LTK) ao laço formado pela fonte, diodo e carga, e então, da resolução da equação diferencial obtida.

Tabela 1.1. Correspondência de variáveis.

Definição original		Substituição	
Código	Visualização	Código	Visualização
<code>laplace(i_L(t),t,s)</code>	$\text{laplace}(i_L(t), t, s)$	<code>IL_s</code>	IL_s
<code>i_L(0)</code>	$i_L(0)$	<code>IL_0</code>	IL_0

Inicialmente necessita-se definir algumas variáveis simbólicas para obter a corrente através do indutor.

```

1 % V_o – tensão eficaz da fonte de alimentação
2 % V_p – tensão de pico da fonte de alimentação
3 % omega – frequência angular da fonte de alimentação
4 % R – resistência da carga
5 % L – indutância da carga
6 % i_L(t) – corrente através da carga no domínio do tempo
7 % t – tempo no domínio do tempo
8 % s – frequência no domínio da frequência
9
10 % inicialização
11 clearvars
12 syms V_o omega R L t i_L(t) s V_p

```

A tensão aplicada ao circuito é definida por

```

1 %V = sqrt(2)*V_o*sin(w*t)
2 V = V_p*sin(omega*t)

```

$$V = V_p \sin(\omega t)$$

Aplicando a LTK à malha do circuito da Fig. 1.11 se obtém:

```

1 % LTK: -V + V_R + V_L == 0
2 eq = -V + R*i_L + L*diff(i_L,t) == 0

```

$$eq(t) = L \frac{\partial}{\partial t} i_L(t) - V_p \sin(\omega t) + R i_L(t) = 0 \quad (1.30)$$

Empregando a transformada de Laplace,

```

1 Leq = laplace(eq)

```

$$Leq = R \text{laplace}(i_L(t), t, s) - L(i_L(0) - s \text{laplace}(i_L(t), t, s)) - \frac{V_p \omega}{\omega^2 + s^2} = 0$$

A seguir, substitui-se a transformada de Laplace da corrente através da malha, $\text{laplace}(I_L(t), t, s)$, por IL_s e o valor inicial desta corrente $i_L(0)$ por IL_0 para facilitar a obtenção de $I_L(s)$ que é a corrente através da malha no domínio da frequência, conforme a tabela 1.1.

```
1 syms IL_s IL_0 i_L(s) Z X_L beta phi tau
2 Leq = subs(Leq,{laplace(i_L(t), t, s), i_L(0)},{IL_s, IL_0})
```

$$Leq = IL_s R - L(IL_0 - IL_s s) - \frac{V_p \omega}{\omega^2 + s^2} = 0$$

Então isola-se $I_L(s)$

```
1 IL_s = solve(Leq,IL_s)
```

$$IL_s = \frac{IL_0 L + \frac{V_p \omega}{\omega^2 + s^2}}{R + L s}$$

Calcula-se a transformada inversa de Laplace para retornar a equação para o domínio do tempo.

```
1 i_L(t) = ilaplace(IL_s,t)
```

$$i_L(t) = \frac{R V_p \sin(\omega t) - L V_p \omega \cos(\omega t)}{L^2 \omega^2 + R^2} + \frac{e^{-\frac{R t}{L}} (IL_0 L^2 \omega^2 + V_p L \omega + IL_0 R^2)}{L^2 \omega^2 + R^2}$$

Define-se a constante de tempo do circuito LR,

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (1.31)$$

e a reatânciia indutiva,

$$X_L = \omega L \quad (1.32)$$

substitui-se:

- R/L por $1/\tau$;
- wL por X_L e;
- $X_L^2 + R^2$ por Z^2 , onde Z é a impedânciia do circuito.

```
1 i_L(t) = subs(i_L(t),(R/L),1/tau);
2 i_L(t) = subs(i_L(t),(omega*L),X_L);
3 i_L(t) = subs(i_L(t),(X_L^2 + R^2),Z^2)
```

$$i_L(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} (IL_0 R^2 + IL_0 X_L^2 + V_p X_L)}{Z^2} - \frac{V_p X_L \cos(\omega t) - R V_p \sin(\omega t)}{Z^2}$$

Novamente substitui-se $R^2 + X_L^2 = Z^2$, porém multiplicados por IL_0 .

```
1 | i_L(t) = subs(i_L(t), IL_0*R^2 + IL_0*X_L^2, IL_0*Z^2)
```

$$i_L(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} (IL_0 Z^2 + V_p X_L)}{Z^2} - \frac{V_p X_L \cos(\omega t) - R V_p \sin(\omega t)}{Z^2}$$

Da trigonometria tem-se que

$$A \sin(x) + B \cos(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x - \phi)$$

onde

$$\phi = \text{atan}(A/B) \quad (1.33)$$

Dessa forma, pode-se executar a seguinte substituição

$$V_p R \sin(\omega) - V_p X_L \cos(\omega) = V_p \sqrt{R^2 + X_L^2} \sin(\omega - \phi) = V_p Z \sin(\omega - \phi)$$

```
1 | i_L(t) = subs(i_L(t), (V_p*R*sin(omega*t) - V_p*X_L*cos(omega*t)), V_p*Z*sin(omega*t - phi))
```

$$i_L(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} (IL_0 Z^2 + V_p X_L)}{Z^2} - \frac{V_p \sin(\phi - \omega t)}{Z}$$

Considerando-se o triângulo das impedâncias, percebe-se que

$$\sin(\phi) = \frac{X_L}{Z}$$

Então substitui-se X_L por $Z \sin(\phi)$

```
1 | i_L(t) = subs(i_L(t), (X_L), Z*sin(phi))
```

$$i_L(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} (IL_0 Z^2 + V_p \sin(\phi) Z)}{Z^2} - \frac{V_p \sin(\phi - \omega t)}{Z}$$

Reescrevendo $i_L(t)$

```
1 | i_L(t) = collect(i_L, {'Z', 'V_p'})
```

$$i_L(t) = -\frac{V_p (\sin(\phi - \omega t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\phi)) - IL_0 Z e^{-\frac{t}{\tau}}}{Z} \quad (1.34)$$

Que pode ser escrita em função do ângulo, fazendo-se

$$t = \frac{wt}{\omega}.$$

```
1 syms wt omega
2 i_L(wt) = subs(i_L(t),{omega*t, t},{wt, wt/omega})
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z} \quad (1.35)$$

onde

- wt é o ângulo da senoide da fonte de alimentação e corresponde ao produto entre ω e t .
- ω é a frequência angular, $\omega = 2\pi f$.

ω é a mesma variável nos dois casos, sendo escrita de maneira diferente apenas para permitir que o ângulo wt seja escrito explicitamente ($w = w = \omega$).

Como a corrente inicial através do indutor é nula,

$$i_L(0) = 0$$

Executando-se esta substituição,

```
1 i_L(wt) = subs(i_L(wt),IL_0,0)
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right)}{Z} \quad (1.36)$$

Assim é obtida a equação da corrente através do indutor. Observa-se na Fig. 1.11 que a corrente cresce gradualmente, atinge o seu valor máximo, decresce até zero e circularia no circuito no sentido oposto, o que não é permitido pelo diodo em série com a carga que bloqueia esta corrente no momento que a mesma iria se tornar negativa.

```
1 Figura_IL_1pulso_para_carga_RL();
```

IL_0 não foi substituída por zero na equação 1.35 pois a mesma será utilizada na seção 1.4.

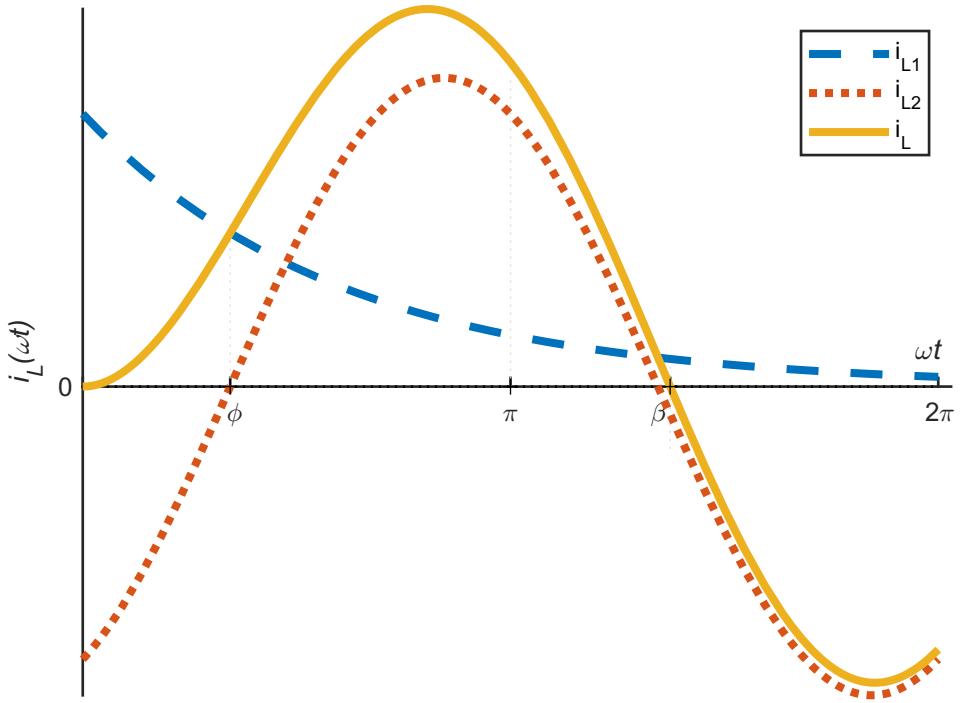
Na Fig. 1.11 é mostrada a forma de onda da corrente $i_L(wt)$ e as formas de onda das componentes ($i_{L1}(wt)$ e $i_{L2}(wt)$) que somadas compõem a corrente através do circuito. Nesta figura, $i_{L1}(wt)$ é o termo exponencial e $i_{L2}(wt)$ corresponde ao termo senoidal.

$$i_L(wt) = i_{L1}(wt) + i_{L2}(wt)$$

Dessa forma, o próximo passo é determinar o ângulo para o qual a corrente se anula, denominado ângulo de extinção, β .

Sabendo-se que a corrente de carga se anula para o ângulo β , ou seja, para $wt = \beta$ tem-se $i_L(0) = 0$.

Figura 1.11. Formas de onda da corrente através da carga e de suas componentes.



Fazendo $wt = \beta$,

```
1 eq = i_L(beta) == 0
```

$$eq = \frac{V_p \left(\sin(\beta - \phi) + e^{-\frac{\beta}{\omega \tau}} \sin(\phi) \right)}{Z} = 0$$

Que pode ser simplificada multiplicando-se ambos os lados da equação por Z/V_p

```
1 eq = eq*Z/V_p
```

$$eq = \sin(\beta - \phi) + e^{-\frac{\beta}{\omega \tau}} \sin(\phi) = 0 \quad (1.37)$$

Como não há solução algébrica para a equação 1.37, pode-se traçar um gráfico de β em função de ϕ . É importante observar que ϕ pode ser determinado em função da frequência, da indutância e da resistência.

$$\phi = \text{atan}(X_L/R)$$

```
1 phi = atan2(X_L,R)
```

$$\phi = \text{atan2}(1, X_L, R) \quad (1.38)$$

Para a solução numérica, o palpite inicial para buscar o valor de beta deve situar-se entre π e 2π .

Por exemplo:

```
1 % syms beta
2 % beta = vpasolve(sin(beta - phi) + exp(-beta/(tau*w)) * sin(phi) == 0, beta, pi)
```

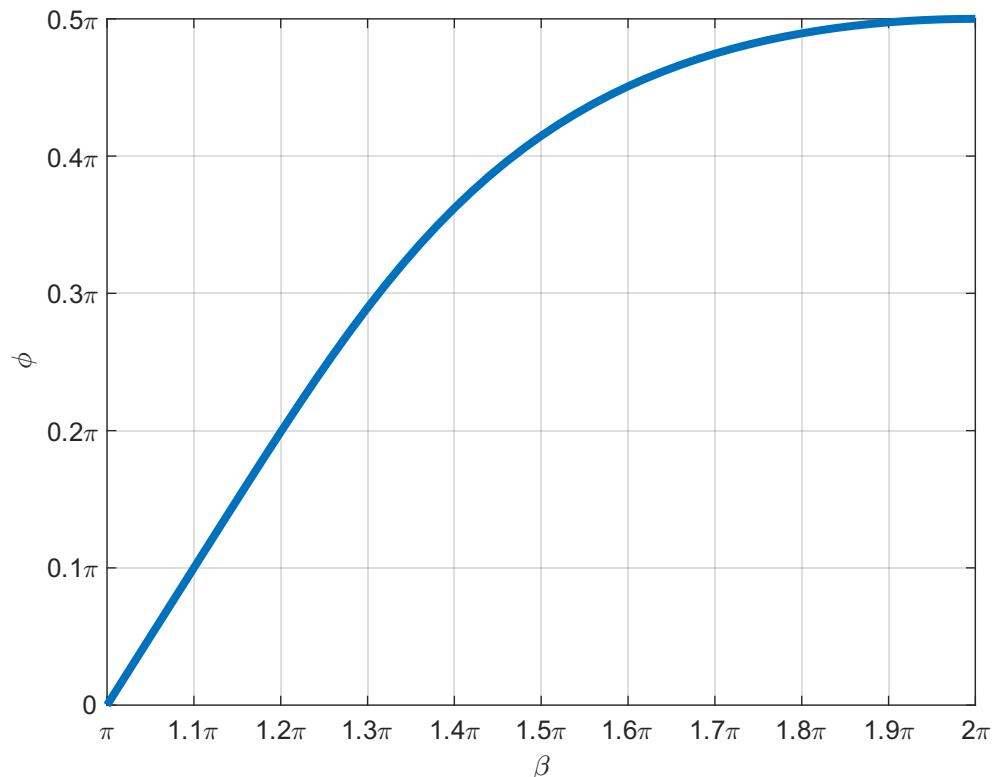
1.3.3.2 Ângulo de extinção β em função do ângulo ϕ

Na Fig. 1.12 é traçado um gráfico que permite a determinação do ângulo de extinção β em função do ângulo de deslocamento ϕ . Observa-se que β varia entre π e 2π , sendo sempre superior ao ângulo em que a corrente se anula para um circuito com carga puramente resistiva e menor que 2π porque a tensão média sobre a carga não pode ser negativa neste caso. Por sua vez ϕ varia entre 0 e π , que é a faixa de variação do ângulo do fator de potência.

1 **Figura_Angulo_Extincao_Beta_Um_Pulso();**

Dessa forma, calcula-se ϕ através de 1.38 e determina-se β com o auxílio do gráfico da Fig. 1.12.

Figura 1.12. Ângulo de extinção β em função de ϕ [rad].



1.3.4 Equações para o projeto

Tendo determinado β , a tensão média sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\,Med} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\beta V_p \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t)$$

1 **syms V_p wt**
 2 **V_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,beta)**

$$V_{L\,Med} = -\frac{0.5 V_p (\cos(\beta) - 1)}{\pi} \quad (1.39)$$

A tensão média através do indutor é nula pois, caso contrário a corrente através deste indutor decresceria ou cresceria com o passar dos ciclos. Assim,

$$V_{R\text{Med}} = V_{L\text{Med}}$$

Dessa forma, a corrente através do circuito é proporcional à tensão $v_L(\omega t)$ e assim à $V_{L\text{Med}}$.

```
1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt)/R,wt,0,beta)
```

$$I_{L\text{Med}} = -\frac{0.5 V_p (\cos(\beta) - 1)}{R \pi} \quad (1.40)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\beta (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (1.41)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,beta))
```

$$V_{LRMS} = \frac{V_p \sqrt{0.2500 \beta - 0.1250 \sin(2\beta)}}{\pi^{0.5}} \quad (1.42)$$

A corrente eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$I_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\beta \left(-\frac{V_p}{Z} (\sin(\phi - \omega t) - e^{-t/\tau} \sin(\phi)) \right)^2 d(\omega t)}$$

```
1 %clearvars
2 syms V_p phi wt w tau Z beta, assume([V_p, Z], 'positive')
3 i_Lt = - (V_p * (sin(phi - wt) - exp(-wt/(w*tau)) * sin(phi))) / Z;
4 I_LRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*int((i_Lt)^2,wt,0,beta));
5 MostrarEquacoesLongas(I_LRMS, [4, 1]);
```

$$I_{LRMS} = \frac{V_p \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8 + \sigma_9 + \sigma_{10}}}{Z \pi^{0.5}} \quad (1.43)$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0.2500 \beta \cos(\beta - \phi)^2 \\ \sigma_2 &= -0.2500 \cos(\phi) \sin(\phi) \\ \sigma_3 &= 0.2500 \beta \sin(\beta - \phi)^2 \\ \sigma_4 &= -0.2500 \sin(\beta - \phi) \cos(\beta - \phi) \\ \sigma_5 &= 0.2500 \tau w \sin(\phi)^2 \\ \sigma_6 &= -\frac{\tau w \sin(\phi)^2}{\tau^2 w^2 + 1} \\ \sigma_7 &= -0.2500 \tau w e^{-\frac{2\beta}{\tau w}} \sin(\phi)^2 \\ \sigma_8 &= \frac{\tau^2 w^2 \cos(\phi) \sin(\phi)}{\tau^2 w^2 + 1} \\ \sigma_9 &= -\frac{\tau^2 w^2 e^{-\frac{\beta}{\tau w}} \sin(\phi) \cos(\beta - \phi)}{\tau^2 w^2 + 1} \\ \sigma_{10} &= -\frac{\tau w \sin(\beta - \phi) e^{-\frac{\beta}{\tau w}} \sin(\phi)}{\tau^2 w^2 + 1} \end{aligned}$$

Devido à complexidade do resultado, pode ser mais interessante calcular-se I_{LRMS} numericamente.

A tensão máxima sobre o diodo corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação.

$$V_{DMax} = V_p$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{DMax} = V_p \quad (1.44)$$

A corrente máxima pode ser obtida derivando-se a equação da corrente e igualando a zero,

```
1 eq = diff(i_L(t),t)==0
```

$$eq = \frac{V_p \left(\cos(\phi - t) - \frac{e^{-\frac{t}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau} \right)}{Z} = 0$$

que pode ser multiplicada por Z/V_p em ambos os lados para sua simplificação. Então substitui-se t por t_{Max} que é o instante de tempo em que a corrente é máxima.

```
1 eq = subs(eq*Z/V_p,t, sym('t_Max'))
```

$$eq = \cos(\phi - t_{Max}) - \frac{e^{-\frac{t_{Max}}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau} = 0$$

encontra-se t_{Max} numericamente e substitui-se em $i_L(t)$. Um palpite inicial para a solução é $T/4 = \pi/2$ (90°).

Por exemplo:

```
1 % t_Max = vpasolve(eq,sym('t_Max'),1/(4*f))
2 % I_LMax = i_L(t_Max)
```

No entanto, em termos práticos, o valor máximo que a corrente de carga poderá atingir é dado por

$$I_{DMax} = V_p/R$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{DMax} = \frac{V_p}{R} \quad (1.45)$$

Observa-se, porém, que esta pode ser uma aproximação bastante grosseira, principalmente se o circuito for muito indutivo.

1.3.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, por meio das equações 1.39, 1.40, 1.42, 1.43, 1.44 e 1.45.

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 L = 50e-3;
4 f = 60;
5
6 w = 2*pi*f

```

$$w = 376.9911$$

```

1 tau = L/R

```

$$\tau = 0.0050$$

```

1 X_L = w*L

```

$$X_L = 18.8496$$

```

1 Z = sqrt(R^2+(XL)^2)

```

$$Z = 21.3379$$

```

1 phi = atan2(XL,R)

```

$$\phi = 1.0830$$

```

1 i_L(t) = - (V_p*(sin(phi - t*w) - exp((-t/tau))*sin(phi)))/Z

```

$$i_L(t) = 12.8806 e^{-200t} + 14.5810 \sin(376.9911t - 1.0830)$$

```

1 syms beta
2 eq = sin(beta - phi) + exp((-beta/(tau*w)))*sin(phi) == 0

```

$$eq = 0.8834 e^{-0.5305\beta} + \sin(\beta - 1.0830) = 0$$

```

1 beta = vpasolve(eq,beta,pi)

```

$$\beta = 4.3143$$

```

1 % Beta em segundos
2 deltaTBeta = beta/pi*1/f/2

```

$$\Delta t(\beta) = 0.0114$$

```

1 V_LMed = - 0.5*V_p*(cos(beta) - 1)/pi

```

$$V_{LMed} = 68.7127$$

```

1 I_LMed = - 0.5*V_p*(cos(beta) - 1)/(R*pi)

```

$$I_{LMed} = 6.8713$$

```

1 V_LRMS = V_p*sqrt((0.125*(2*beta - sin(2*beta)))/pi)

```

$$V_{LRMS} = 174.5880$$

```

1 sigma1 = -0.5*beta*cos(beta - phi)^2;
2 sigma2 = 0.5*cos(phi)*sin(phi);
3 sigma3 = -0.5*beta*sin(beta - phi)^2;
4 sigma4 = 0.5*sin(beta - phi)*cos(beta - phi);
5 sigma5 = -0.5*tau*w*sin(phi)^2;
6 sigma6 = (2*tau*w*sin(phi)^2)/(tau^2*w^2 + 1);
7 sigma7 = 0.5*tau*w*exp((-2*beta)/(tau*w))*sin(phi)^2;
8 sigma8 = -(2*tau^2*w^2*cos(phi)*sin(phi))/(tau^2*w^2 + 1);
9 sigma9 = (2*tau^2*w^2*exp(-beta/(tau*w)))*sin(phi)*cos(beta - phi)/(tau^2*w^2 + 1);
10 sigma10 = (2*tau*w*sin(beta - phi)*exp(-beta/(tau*w)))*sin(phi)/(tau^2*w^2 + 1);
11
12 I_LRMS = (V_p*sqrt(-(0.5*(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + ...
13 sigma6 + sigma7 + sigma8 + sigma9 + sigma10))/pi))/Z

```

$$I_{LRMS} = 9.6977$$

```

1 V_DMax = V_p

```

$$V_{DMax} = 311.1270$$

```

1 syms t_Max
2 eq = w*cos(phi - t_Max*w) - (exp(-t_Max/tau))*sin(phi))/tau == 0

```

$$eq = 376.9911 \cos(376.9911 t_{Max} - 1.0830) - 176.6768 e^{-200 t_{Max}} = 0$$

```

1 t_Max = vpasolve(eq,sym('t_Max'),1/(4*f))

```

$$t_{Max} = 0.0067$$

$$1 \quad I_{LMax} = i_L(t_{Max})$$

$$I_{LMax} = 17.8346$$

ou menor que

$$1 \quad I_{DMax} = V_p/R$$

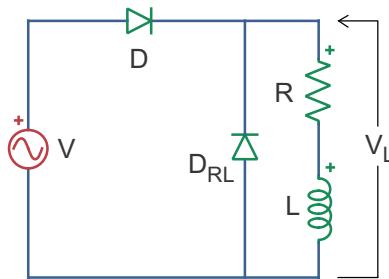
$$I_{DMax} = 31.1127$$

1.4 Carga RL com Diodo de Roda Livre

1.4.1 Topologia

Esta topologia é semelhante àquela estudada na seção 1.3, porém a mesma apresenta um diodo em paralelo com a carga, o qual tem por objetivo evitar que a tensão sobre a mesma se torne negativa. Dessa forma, este diodo possibilita que uma maior quantidade de potência seja transferida à carga. Esta topologia está ilustrada na Fig. 1.13.

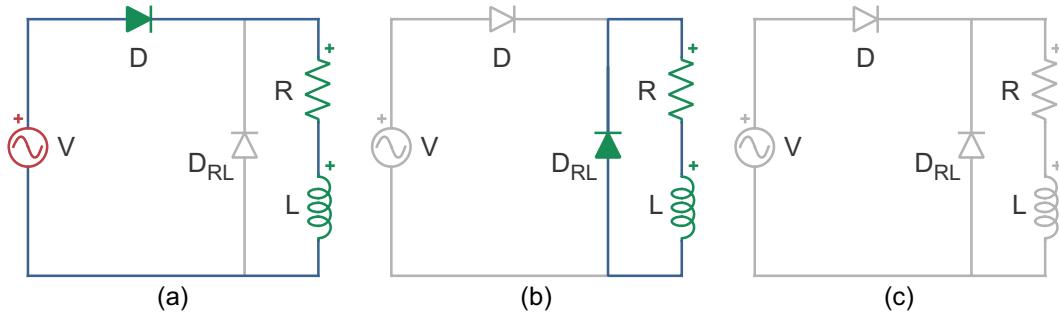
Figura 1.13. Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



1.4.2 Etapas de operação

O diodo D está polarizado diretamente durante o semiciclo positivo, estando no estado de condução, Fig. 1.14(a). Dessa forma a tensão da fonte da entrada é aplicada à carga. No início do semiciclo negativo o diodo D_{RL} entra em condução, aplicando uma tensão negativa sobre o diodo D, fazendo com que este bloquee e a corrente de carga passa a circular através do diodo de roda livre até que esta corrente se anule, Fig. 1.14(b). Finalmente, nenhum diodo conduz até o final do semiciclo negativo, Fig. 1.14(c).

Figura 1.14. Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.

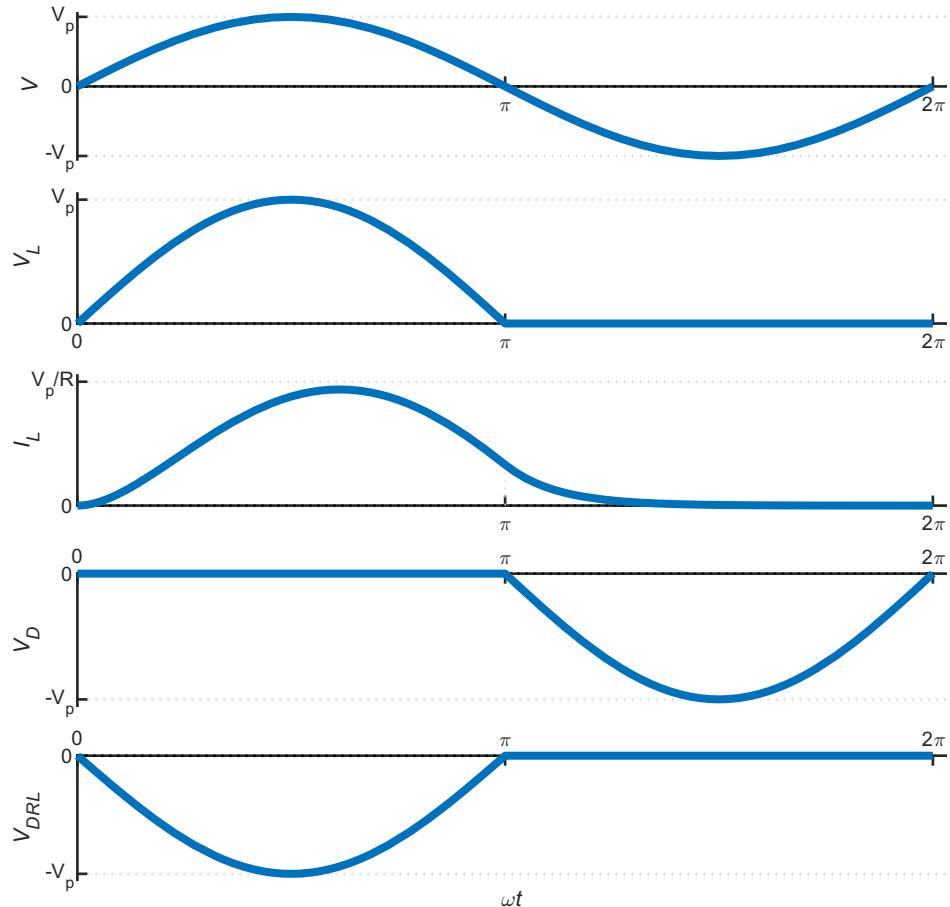


1.4.3 Formas de onda

As principais formas de onda para o modo de condução descontínua são mostradas na Fig. 1.15. Observa-se que a corrente $i_L(wt)$ sofre um atraso devido à indutância, se anulando somente após o ângulo π . Devido ao diodo de roda-livre, D_{RL} , a tensão na carga fica grampeada em zero, não podendo atingir valores negativos.

1 [Figura_WF_1pulso_para_carga_RL_com_DRL\(\)](#);

Figura 1.15. Principais formas de onda.



A tensão através da carga é dada por:

$$v_L(\omega t) = \begin{cases} V_p \operatorname{sen}(\omega t) & 0 \leq \omega t < \pi \\ 0 & \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases} \quad (1.46)$$

A corrente através da carga será definida mais adiante.

Dependendo da relação entre os valores do resistor, do indutor e da frequência, o retificador poderá operar no modo de condução descontínua (MCD), que ocorre quando a corrente se anula durante um período de operação ou no modo de condução contínua (MCC) em que a corrente é sempre superior à zero. Valores menores de resistência e maiores de indutância e frequência direcionam a operação deste retificador para o modo de condução contínua.

1.4.3.1 Análise preliminar para a corrente de carga

A seguir, são obtidas as equações para a corrente através da carga.

A. 1^a etapa

Parte-se da equação para a corrente obtida para o retificador de um pulso com carga RL (equação 1.35).

```

1 clearvars
2 syms t tau phi omega wt V_p Z R L IL_E1_0
3
4 i_L_E1(wt) = - (V_p*(sin(phi - wt) - exp(-wt/(omega*tau)))*sin(phi))...
5 - IL_E1_0*Z*exp((-wt/(omega*tau)))/Z

```

$$i_{L,E1}(wt) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_{E1,0} Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z} \quad (1.47)$$

onde $i_{L,E1}$ é a equação da corrente através do indutor durante a etapa 1.

Calcula-se o valor final da corrente para esta etapa, fazendo-se $\omega t = \pi$. Este será o valor inicial da corrente para a próxima etapa.

```

1 i_L_E1_Final = i_L_E1(sym('pi'))

```

$$i_{L,E1,Final} = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - \pi) - e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_{E1,0} Z e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}}}{Z}$$

Da trigonometria sabe-se que

$$\sin(\phi - \pi) = -\sin(\phi)$$

Fazendo esta substituição

```

1 i_L_E1_Final = subs(i_L_E1_Final, {sin(phi-sym('pi'))}, {-sin(phi)})

```

$$i_{L,E1,Final} = \frac{V_p \left(\sin(\phi) + e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) + IL_{E1,0} Z e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}}}{Z} \quad (1.48)$$

B. 2^a etapa

Aplicando a LTK ao circuito

```

1 syms i_L_E2(t)
2
3 % -Va + VR + VL == 0
4 eq = R*i_L_E2 + L*diff(i_L_E2,t) == 0

```

$$eq(t) = L \frac{\partial}{\partial t} i_{L,E2}(t) + R i_{L,E2}(t) = 0 \quad (1.49)$$

$i_{L,E2}$ é a corrente através da carga durante a etapa 2.

Então calcula-se a transformada de Laplace

```

1 Leq = laplace(eq)

```

$$Leq = R \text{laplace}(i_{L,E2}(t), t, s) - L(i_{L,E2}(0) - s \text{laplace}(i_{L,E2}(t), t, s)) = 0$$

substitui-se $\text{laplace}(I_{L,E2}(t), t, s)$ por $IL_{E2,s}$ e $i_{L,E2}(0)$ por $IL_{E2,0}$, conforme explicado anteriormente, tabela 1.1.

Tabela 1.1. Correspondência de variáveis.

Definição original		Substituição	
Código	Visualização	Código	Visualização
<code>laplace(i_L_E2(t), t, s)</code>	<code>laplace(i_{L,E2}(t), t, s)</code>	<code>IL_E2_s</code>	$IL_{E2,s}$
<code>i_L_E2(0)</code>	<code>i_{L,E2}(0)</code>	<code>IL_E2_0</code>	$IL_{E2,0}$

```

1 syms IL_E2_s IL_E2(s) IL_E2_0 beta Z phi
2 Leq = subs(Leq,{laplace(i_L_E2(t), t, s), i_L_E2(0)},{IL_E2_s, IL_E2_0})

```

$$Leq = IL_{E2,s} R - L(IL_{E2,0} - IL_{E2,s} s) = 0$$

```

1 IL_E2_s = solve(Leq,IL_E2_s)

```

$$IL_{E2,s} = \frac{IL_{E2,0} L}{R + L s}$$

Calcula-se a transformada inversa de Laplace

```

1 i_L_E2(t) = ilaplace(IL_E2_s,t)

```

$$i_{L,E2}(t) = IL_{E2,0} e^{-\frac{Rt}{L}}$$

substitui-se R/L por $1/\tau$

```
1 i_L_E2(t) = subs(i_L_E2(t), (R/L), 1/tau)
```

$$i_{L,E2}(t) = IL_{E2,0} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Esta equação foi obtida considerando o instante de tempo inicial na referência, ou seja, $wt = 0$. Deslocando-se o eixo do tempo por um semiciclo, $wt = \pi$ (que é quando a segunda etapa tem início),

```
1 i_L_E2(t) = subs(i_L_E2(t), t, t-sym('pi')/omega)
```

$$i_{L,E2}(t) = IL_{E2,0} e^{-\frac{t-\frac{\pi}{\omega}}{\tau}}$$

Que pode ser reescrito em função do ângulo, bastando para isso substituir t por wt/ω .

```
1 i_L_E2(wt) = subs(i_L_E2, {t}, {wt/omega})
```

$$i_{L,E2}(wt) = IL_{E2,0} e^{\frac{\frac{\pi}{\omega} - \frac{wt}{\omega}}{\tau}}$$

$IL_{E2,0}$ é o valor inicial da corrente do indutor nesta etapa, correspondendo ao valor final da etapa anterior. Assim,

```
1 i_L_E2(wt) = subs(i_L_E2(wt), IL_E2_0, i_L_E1_Final)
```

$$i_{L,E2}(wt) = \frac{e^{\frac{\frac{\pi}{\omega} - \frac{wt}{\omega}}{\tau}} \left(V_p \left(\sin(\phi) + e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) + IL_{E1,0} Z e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} \right)}{Z}$$

reescrevendo

```
1 i_L_E2 = expand(i_L_E2)
```

$$i_{L,E2}(wt) = IL_{E1,0} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} + \frac{V_p e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z} + \frac{V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z}$$

A seguir, tenta-se simplificar esta equação, agrupando termos comuns,

```
1 i_L_E2 = collect(i_L_E2,Z)
```

$$i_{L,E2}(wt) = \frac{V_p e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) + IL_{E1,0} Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z}$$

```
1 i_L_E2 = collect(i_L_E2,sin(phi))
```

$$i_{L,E2}(wt) = IL_{E1,0} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} + \frac{\sin(\phi) (V_p e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}})}{Z}$$

```
1 i_L_E2 = collect(i_L_E2,V_p)
```

$$i_{L,E2}(wt) = IL_{E1,0} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} + \frac{V_p \sin(\phi) (e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} + e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}})}{Z}$$

```
1 i_L_E2 = collect(i_L_E2,exp((-wt/(omega*tau))))
```

$$i_{L,E2}(wt) = e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \left(IL_{E1,0} + \frac{V_p \sin(\phi) (e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} + 1)}{Z} \right) \quad (1.50)$$

Dessa forma, obteve-se $i_{L,E2}(wt)$, a equação da corrente através do indutor durante a etapa 2.

Esta equação pode ser interpretada como um decaimento exponencial, pois é formada por um termo exponencial que é multiplicado pelos termos entre parênteses que são constantes.

1.4.3.2 Corrente de carga para o modo de condução descontínua, MCD

Quando a corrente de carga se anula durante um ciclo de operação, se diz que o retificador opera no modo de condução descontínua, MCD.

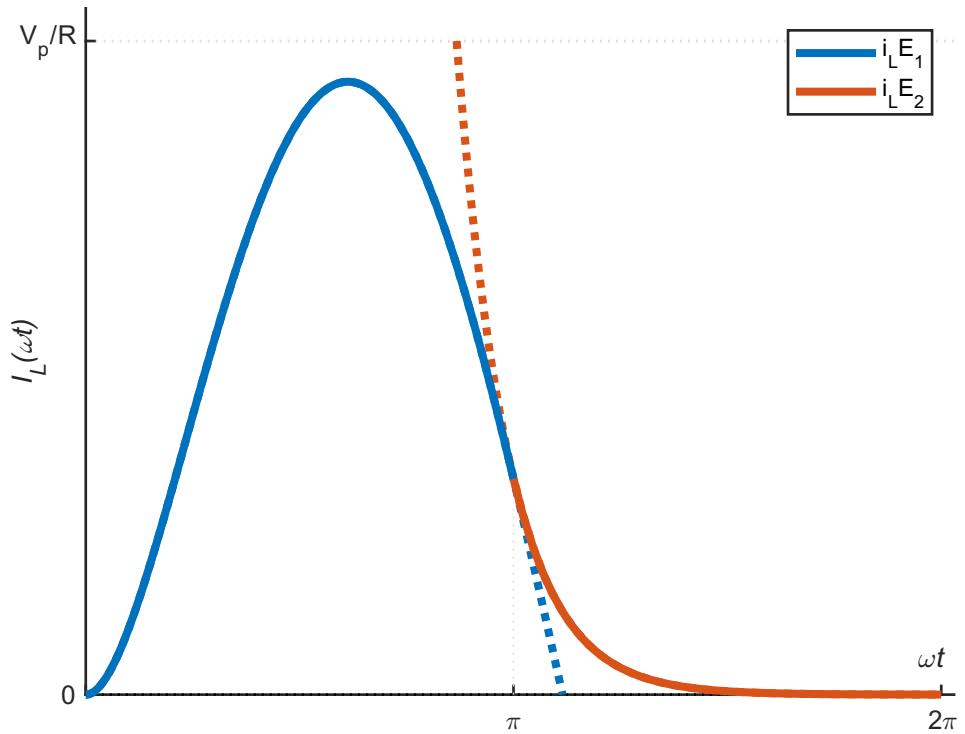
A. 1^a etapa

Para o MCD, fazendo $I_{L,0,E1} = 0$ em 1.47, tem-se

```
1 i_L_E1_MCD = subs(i_L_E1,IL_E1_0,0)
```

$$i_{L,E1,MCD}(wt) = -\frac{V_p (\sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi))}{Z} \quad (1.51)$$

Figura 1.16. Forma de onda da corrente através da carga para o MCD.



B. 2^a etapa

Fazendo $I_{L,0,E1} = 0$ em 1.50, obtém-se

```
1 i_L_E2_MCD = subs(i_L_E2, IL_E1_0, 0)
```

$$i_{L,E2,MCD}(wt) = \frac{V_p e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) (e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} + 1)}{Z} \quad (1.52)$$

Na Fig. 1.16 é ilustrada a forma de onda da corrente através da carga para o modo de condução descontínua. As linhas pontilhadas representam a continuação das formas de onda para cada uma das etapas, caso a comutação do diodo não tivesse acontecido.

```
1 Figura_IL_1pulso_para_carga_RL_com_DRL_MCD()
```

De maneira geral, quando $\pi/\omega < 5\tau$ o conversor deve operar no modo de condução descontínua.

1.4.3.3 Corrente de carga para o modo de condução contínua, MCC

A. 1^a etapa

Neste caso, o valor da corrente ao final da etapa 2 deve corresponder ao valor inicial da etapa 1 quando o conversor opera em regime permanente. Dessa forma, resolvendo 1.50 para o ângulo $wt = 2\pi$ e fazendo igual a $IL_{E1,0}$, que é o valor da corrente no início da etapa 1,

```
1 eq = i_L_E2(2*sym('pi')) == IL_E1_0
```

$$eq = e^{-\frac{2\pi}{\omega\tau}} \left(IL_{E1,0} + \frac{V_p \sin(\phi) \left(e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} + 1 \right)}{Z} \right) = IL_{E1,0}$$

Resolvendo para $IL_{E1,0}$,

```
1 IL_E1_0 = solve(eq, IL_E1_0)
```

$$IL_{E1,0} = -\frac{V_p \sin(\phi)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}} \quad (1.53)$$

Substituindo o valor de $IL_{E1,0}$ na equação de $i_{L,E1}$, 1.47

```
1 i_L_E1_MCC = subs(i_L_E1, 'IL_E1_0', IL_E1_0)
```

$$i_{L,E1,MCC}(wt) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) + \frac{V_p Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}} \sin(\phi)}{Z} \quad (1.54)$$

Simplificando

```
1 i_L_E1_MCC = collect(i_L_E1_MCC, Z)
```

$$i_{L,E1,MCC}(wt) = -\frac{V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) + V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z \left(e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}$$

```
1 i_L_E1_MCC = collect(i_L_E1_MCC, exp((wt/(omega*tau))))
```

$$i_{L,E1,MCC}(wt) = -\frac{e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \left(e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \left(V_p \sin(\phi - wt) - V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \right) + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Como não foi possível simplificar a equação acima via software, será demonstrada a simplificação manual no anexo 1. O resultado obtido é

$$i_{L,E1,MCC}(\omega t) = -\frac{V_p}{Z} \left[\sin(\phi - \omega t) + \frac{\sin(\phi) e^{-\frac{\omega t}{\omega\tau}}}{e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1} \right] \quad (1.55)$$

Ou seja,

```
1 i_L_E1_MCC(wt) = - V_p/Z * (sin(phi - wt) + sin(phi)*exp(-wt/(omega*tau))/(exp(-sym('pi'))/(omega*tau)) - 1))
```

$$i_{L,E1,MCC}(wt) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) + \frac{e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1} \right)}{Z} \quad (1.56)$$

B. 2^a etapa

Para a etapa 2, substitui-se o valor de $IL_{E1,0}$, 1.53, na equação de $i_{L,E2}(\omega t)$, 1.50.

```
1 i_L_E2_MCC = subs(i_L_E2, 'IL_E1_0', IL_E1_0)
```

$$i_{L,E2,MCC}(wt) = -e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \left(\frac{V_p \sin(\phi)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}} - \frac{V_p \sin(\phi) (e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} + 1)}{Z} \right)$$

reescrevendo

```
1 i_L_E2_MCC = expand(i_L_E2_MCC)
```

$$i_{L,E2,MCC}(wt) = \frac{V_p e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z} - \frac{V_p e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}} + \frac{V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z}$$

Simplificando

```
1 i_L_E2_MCC = collect(i_L_E2_MCC, Z);
2 i_L_E2_MCC = collect(i_L_E2_MCC, sin(phi));
3 i_L_E2_MCC = collect(i_L_E2_MCC, exp((-wt/(omega*tau))));
4 i_L_E2_MCC = collect(i_L_E2_MCC, V_p)
```

$$i_{L,E2,MCC}(wt) = -\frac{V_p e^{\frac{2\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z (e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}})} \quad (1.57)$$

A forma de onda da corrente através da carga para o modo de condução contínua é ilustrada na Fig. 1.17. As linhas pontilhadas representam a continuação das formas de onda para cada uma das etapas, caso não houvesse acontecido a comutação do diodo.

```
1 Figura_IL_1pulso_para_carga_RL_com_DRL_MCC()
```

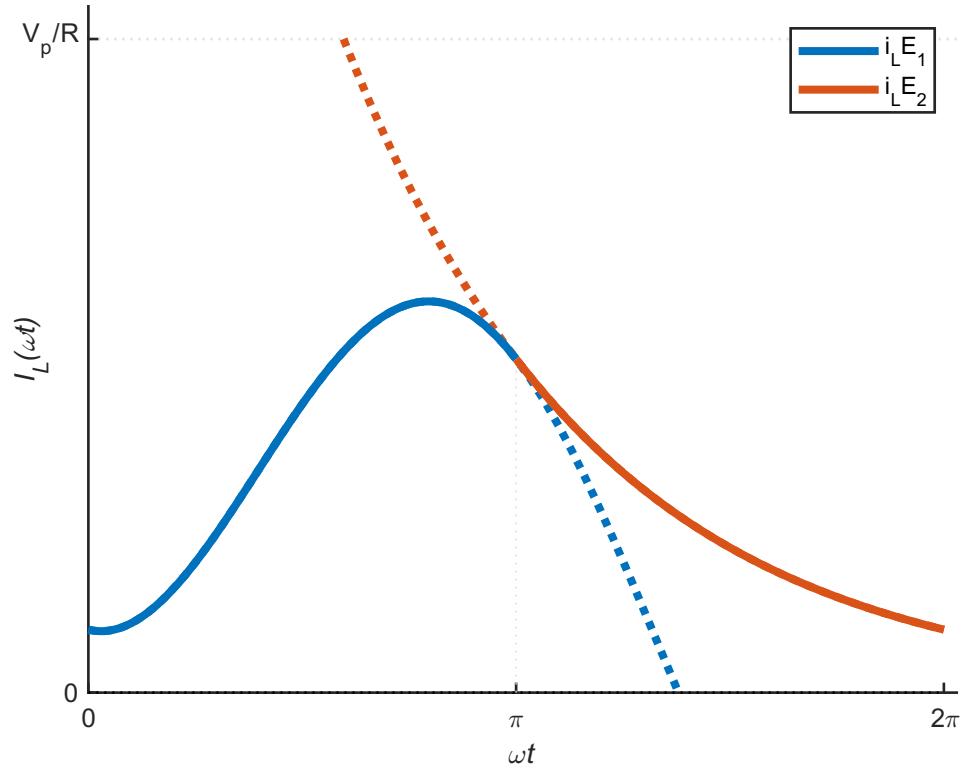
1.4.3.4 Análise através da utilização das séries de Fourier

No modo de condução contínua, a corrente não se anula ao final de um ciclo de operação. Desta forma, é interessante o uso de uma outra ferramenta, no caso, as Séries de Fourier para fazer a análise e também para a obtenção da forma de onda de corrente através do circuito.

A Série de Fourier de uma variável pode ser calculada através da equação a seguir, 1.58.

$$v(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (1.58)$$

Figura 1.17. Forma de onda da corrente através da carga para o MCC.



Quando é considerado um período de 2π radianos os coeficientes são dados por:

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \mathbf{d}(\omega t) \quad (1.59)$$

$$\mathbf{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \cos(n\omega t) \mathbf{d}(\omega t) \quad (1.60)$$

$$\mathbf{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(\omega t) \sin(n\omega t) \mathbf{d}(\omega t) \quad (1.61)$$

O ponto de partida para a Série de Fourier é a tensão aplicada à carga, pois esta variável é conhecida. Então, pode-se calcular a corrente através das equação a seguir, incluindo a impedância do circuito para cada frequência envolvida.

$$i_n(\omega t) = \frac{v_n(\omega t)}{Z_n}$$

onde Z_n é a impedância do circuito para o múltiplo n da frequência fundamental.

Assim, calcula-se:

$$Z_n = \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2} \quad (1.62)$$

Z_n é a impedância na frequência harmônica n .

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{n\omega L}{R}\right) \quad (1.63)$$

ϕ_n é o deslocamento sofrido por cada senoide na frequência harmônica n .

Desse modo, obtém-se a equação para a corrente

$$i(\omega t) = \frac{a_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\omega t - \phi_n) + b_n \sin(n\omega t - \phi_n)}{Z_n} \quad (1.64)$$

Após estas definições preliminares busca-se determinar as séries de Fourier para a tensão e corrente na carga.

Definição das variáveis simbólicas utilizadas:

```
1 syms V_p wt n omega L R % definição das variáveis simbólicas
2 assume(n,{'positive', 'integer'}),%, definição das restrições
```

- Limites de integração

```
1 lim_inf = 0;
2 lim_sup = sym(pi);
```

- Forma de onda da tensão sobre a carga

```
1 v_L(wt) = V_p*sin(wt);
```

- Determinação dos coeficientes

```
1 a_0 = 1/(2*sym('pi'))*int(v_L,wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_0 = \frac{V_p}{\pi} \quad (1.65)$$

```
1 a_n(n) = 1/sym('pi')*int(v_L*cos(n*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_n(n) = \begin{cases} -\frac{V_p((-1)^n + 1)}{\pi(n^2 - 1)} & \text{if } n \neq 1 \\ 0 & \text{if } n \in \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \quad (1.66)$$

Que para este caso pode ser interpretada da seguinte forma: as harmônicas ímpares são nulas e as harmônicas pares são dadas pela equação a seguir, considerando a condição "par".

$$a_n(n) = \begin{cases} -\frac{V_p((-1)^n + 1)}{\pi(n^2 - 1)} & \text{quando } n \text{ é par} \\ 0 & \text{quando } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

ou seja,

$$a_n(n) = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 1 \\ -\frac{2V_p}{3\pi} & \text{para } n = 2 \\ 0 & \text{para } n = 3 \\ -\frac{2V_p}{15\pi} & \text{para } n = 4 \\ 0 & \text{para } n = 5 \\ -\frac{2V_p}{35\pi} & \text{para } n = 6 \\ 0 & \text{para } n = 7 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

```
1 b_n(n) = 1/sym(pi)*int(v_L*sin(n*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$b_n(n) = 0.5 (0)^{n-1} V_p \quad (1.67)$$

ou seja, os coeficientes b_n são nulos para todas as frequências, exceto a fundamental ($n = 1$).

$$b_1 = \frac{V_p}{2}$$

A impedância é dada por

```
1 Z_n(n) = sqrt(R^2+(n*omega*L)^2)
```

$$Z_n(n) = \sqrt{n^2 \omega^2 L^2 + R^2} \quad (1.68)$$

```
1 phi_n(n) = atan2(n*omega*L,R)% atan2 e a funcao arco tangente para quatro quadrantes
```

$$\phi_n(n) = \text{atan2}(1 L n \omega, R) \quad (1.69)$$

A Fig. 1.18 mostra o gráfico das Séries de Fourier obtidas para a tensão e para a corrente através da carga, sendo que foi variada a quantidade de termos utilizados para a geração da série. Foram utilizados dois termos para gerar um par de formas de onda (tensão e corrente) e dez termos para gerar o par seguinte.

```
1 Figura_VL_IL_1pulso_para_carga_RL_com_DRL_Serie_Fourier();
```

1.4.4 Equações para o projeto

1.4.4.1 Tensão média através da carga, $V_{L\text{Med}}$

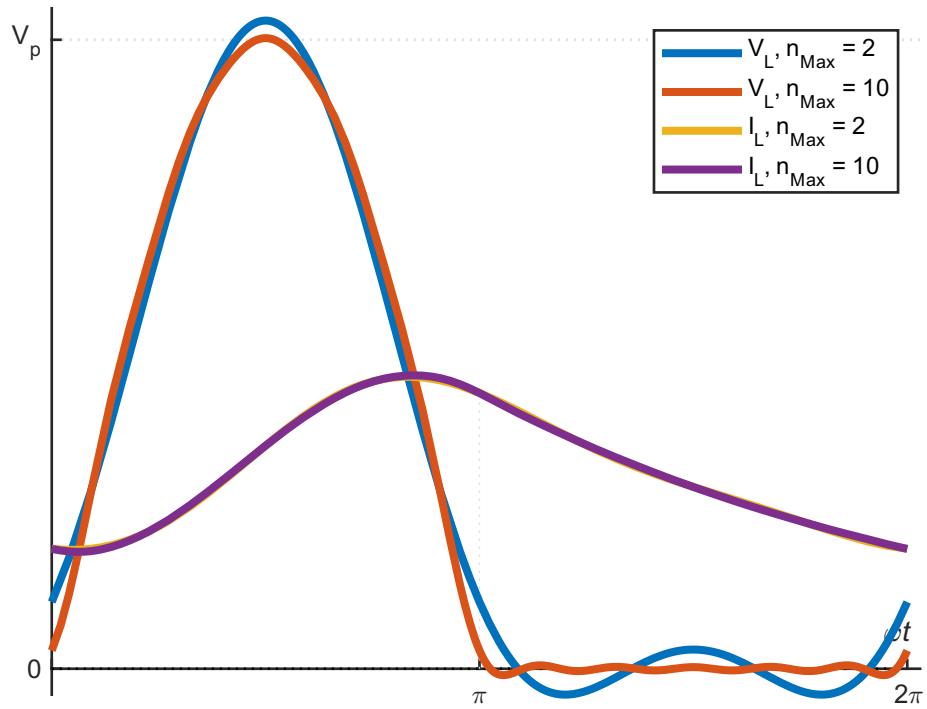
A tensão média sobre a carga é a mesma do retificador de um pulso com carga R, sendo independente do modo de operação. Pode ser calculada através da equação

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (1.70)$$

```
1 syms V_p wt w
2 V_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,pi)
```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{V_p}{\pi} \quad (1.71)$$

Figura 1.18. Forma de onda da corrente através da carga para o MCD.



1.4.4.2 Corrente média através da carga, I_{LMed}

A. MCD

A corrente média através do indutor para o MCD pode ser determinada, conforme segue,

```

1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 1/(2*sym('pi'))*(int(i_L_E1_MCD,wt,0,sym('pi')) + ...
3 int(i_L_E2_MCD,wt,sym('pi'),2*sym('pi')))
```

$$I_{LMed} = -\frac{0.5000 \left(\frac{V_p (\cos(\phi-\pi)-\cos(\phi))}{Z} + \frac{V_p \omega \tau \sin(\phi) (e^{-\frac{\pi}{\omega \tau}} - 1)}{Z} + \frac{V_p \omega \tau \sin(\phi) (e^{-\frac{2\pi}{\omega \tau}} - 1)}{Z} \right)}{\pi}$$

Como

$$\cos(\phi - \pi) = -\cos(\phi)$$

```

1 I_LMed = subs(I_LMed, {cos(phi=sym('pi'))}, {-cos(phi)});
```

Expandindo I_{LMed} e agrupando termos comuns como Z , ω ,...

```

1 I_LMed = expand(I_LMed);
2 I_LMed = collect(I_LMed,Z);
3 I_LMed = collect(I_LMed,omega);
4 I_LMed = collect(I_LMed,sin(phi));
5 I_LMed = collect(I_LMed,tau);
6 I_LMed = collect(I_LMed,V_p);
7 I_LMed = collect(I_LMed,IL_E1_0)
```

$$I_{LMed} = V_p \left(\frac{\cos(\phi)}{Z\pi} - \frac{\omega\tau \sin(\phi) \left(e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} + e^{-\frac{2\pi}{\omega\tau}} - 2 \right)}{2Z\pi} \right) \quad (1.72)$$

Que pode ser reescrito manualmente como

```
1 I_LMed = (V_p/(Z*sym('pi'))*(cos(phi) - (omega*tau*sin(phi)*(exp(-sym('pi'))/(omega*tau)) + exp(-(2*sym('pi'))/(omega*tau)) - 2))/(2)))
```

$$I_{LMed} = \frac{V_p \left(\cos(\phi) - 0.5000 \omega \tau \sin(\phi) \left(e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} + e^{-\frac{2\pi}{\omega\tau}} - 2 \right) \right)}{Z\pi} \quad (1.73)$$

B. MCC

A corrente média pode ser calculada por

```
1 I_LMed = 1/(2*sym('pi'))*(int(i_L_E1_MCC,wt,0,sym('pi')) + ...
2 int(i_L_E2_MCC,wt,sym('pi'),2*sym('pi')))
```

$$I_{LMed} = \frac{0.5000 \left(\frac{V_p (\cos(\phi) - \cos(\phi - \pi) + \omega \tau \sin(\phi))}{Z} + \frac{V_p \omega \tau \sin(\phi)}{Z} \right)}{\pi} \quad (1.74)$$

Como

$$\cos(\phi - \pi) = -\cos(\phi)$$

```
1 I_LMed = subs(I_LMed, {cos(phi-sym('pi'))}, {-cos(phi)})
```

$$I_{LMed} = \frac{0.5000 \left(\frac{V_p (2 \cos(\phi) + \omega \tau \sin(\phi))}{Z} + \frac{V_p \omega \tau \sin(\phi)}{Z} \right)}{\pi} \quad (1.75)$$

Expandindo I_{LMed} e agrupando termos comuns como Z , V_p ,...

```
1 I_LMed = expand(I_LMed)
```

$$I_{LMed} = \frac{V_p \cos(\phi)}{Z\pi} + \frac{V_p \omega \tau \sin(\phi)}{Z\pi} \quad (1.76)$$

```
1 I_LMed = collect(I_LMed,Z)
```

$$I_{LMed} = \frac{V_p \cos(\phi) + V_p \omega \tau \sin(\phi)}{Z\pi} \quad (1.77)$$

```
1 I_LMed = collect(I_LMed,V_p)
```

$$I_{LMed} = \frac{V_p (\cos(\phi) + \omega \tau \sin(\phi))}{Z\pi} \quad (1.78)$$

1.4.4.3 Tensão eficaz através da carga, V_{LRMS}

A tensão eficaz sobre a carga é a mesma do retificador de um pulso com carga R, podendo ser calculada através da equação

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\beta (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)}$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,sym('pi')))
```

$$V_{LRMS} = V_p \sqrt{\frac{0.1250 (2\pi - \sin(2\pi))}{\pi}}$$

```
1 V_LRMS = eval(simplify(V_LRMS))
```

$$V_{LRMS} = 0.5 V_p \quad (1.79)$$

1.4.4.4 Corrente eficaz através da carga, I_{LRMS}

A corrente eficaz sobre a carga é calculada através da equação a seguir.

$$I_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (i_{L,E1}(\omega t))^2 d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} (i_{L,E2}(\omega t))^2 d(\omega t) \right)}$$

A. MCD

Quando o retificador opera no MCD,

```
1 syms V_p wt R, assume([V_p, R, Z], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(1/(2*sym(pi)))*(int((i_L_E1_MCD)^2,sym('wt'),0,sym(pi)) + ...
3     int((i_L_E2_MCD)^2,sym('wt'),sym(pi),2*sym(pi)));
4 % para evidenciar a constante pi
5 I_LRMS = subs(I_LRMS, {sym(pi)},{sym('pi')});
6 I_LRMS = expand(I_LRMS)
7 MostrarEquacoesLongas(I_LRMS,[2,1])
```

$$I_{LRMS} = \frac{\sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8 + \sigma_9 + \sigma_{10} + \sigma_{11}}}{\pi^{0.5}} \quad (1.80)$$

onde:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{0.2500 V_p^2 \pi \cos(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_2 &= \frac{0.2500 V_p^2 \pi \sin(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_3 &= -\frac{V_p^2 \omega \tau \sin(\phi)^2}{Z^2 \omega^2 \tau^2 + Z^2} \\ \sigma_4 &= \frac{0.5000 V_p^2 \omega \tau \sin(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_5 &= -\frac{V_p^2 \omega \tau e^{-\frac{\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2}{Z^2 \omega^2 \tau^2 + Z^2} \\ \sigma_6 &= \frac{V_p^2 \omega^2 \tau^2 \cos(\phi) \sin(\phi)}{Z^2 \omega^2 \tau^2 + Z^2} \\ \sigma_7 &= \frac{0.5000 V_p^2 \omega \tau e^{-\frac{\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_8 &= -\frac{0.2500 V_p^2 \omega \tau e^{-\frac{2\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_9 &= -\frac{0.5000 V_p^2 \omega \tau e^{-\frac{3\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_{10} &= -\frac{0.2500 V_p^2 \omega \tau e^{-\frac{4\pi}{\omega \tau}} \sin(\phi)^2}{Z^2} \\ \sigma_{11} &= \frac{V_p^2 \omega^2 \tau^2 e^{-\frac{\pi}{\omega \tau}} \cos(\phi) \sin(\phi)}{Z^2 \omega^2 \tau^2 + Z^2}\end{aligned}$$

Novamente, devido à complexidade do resultado, pode ser mais interessante calcular-se I_{LRMS} numericamente.

B. MCC

Para o modo de condução contínua,

```
1 syms V_p wt R, assume([V_p, R, Z], 'positive')
2
3 I_LRMS = sqrt(1/(2*sym(pi)) * (int((i_L_E1_MCC)^2, sym('wt'), 0, sym(pi)) + ...
4 int((i_L_E2_MCC)^2, sym('wt'), sym(pi), 2*sym(pi))));
```

Simplificando

```
1 I_LRMS = subs(I_LRMS, {sym(pi)}, {sym('pi')});
2 I_LRMS = simplifyFraction(I_LRMS);
3 MostrarEquacoesLongas(I_LRMS, [2, 1, 5]);
```

$$I_{LRMS} = \frac{\sqrt{\frac{0.2500 V_p^2 (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8 + \sigma_9 + \sigma_{10} + \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{14})}{Z^2 (e^{\frac{\pi}{\omega \tau}} - 1) (\omega^2 \tau^2 + 1)}}}{\pi^{0.5000}} \quad (1.81)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= -\pi \cos(\phi)^2 \\
 \sigma_2 &= -\pi \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_3 &= 2\omega^3 \tau^3 \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_4 &= -2\omega \tau \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_5 &= \pi e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \cos(\phi)^2 \\
 \sigma_6 &= \pi e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_7 &= 2\omega^3 \tau^3 e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_8 &= -2\omega \tau e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_9 &= -\omega^2 \pi \tau^2 \cos(\phi)^2 \\
 \sigma_{10} &= -\omega^2 \pi \tau^2 \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_{11} &= 4\omega^2 \tau^2 \cos(\phi) \sin(\phi) \\
 \sigma_{12} &= \omega^2 \pi \tau^2 e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \cos(\phi)^2 \\
 \sigma_{13} &= \omega^2 \pi \tau^2 e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)^2 \\
 \sigma_{14} &= 4\omega^2 \tau^2 e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \cos(\phi) \sin(\phi)
 \end{aligned}$$

Devido à complexidade dos resultados obtidos, pode ser mais interessante calcular-se I_{LRMS} numericamente.

1.4.4.5 Utilizando as séries de Fourier

Conforme foi visto anteriormente

$$v(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

De onde é derivada a equação para a corrente

$$i(\omega t) = \frac{a_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\omega t - \phi_n) + b_n \sin(n\omega t - \phi_n)}{Z_n}$$

Os coeficientes são:

1 a0 = V_p/sym('pi')

$$a_0 = \frac{V_p}{\pi} \quad (1.82)$$

1 a_n(n) = piecewise(n > 1, -(V_p*(-sym(1))^n + 1)/(sym('pi')*(n^2 - 1)), n==1, 0)

$$a_n(n) = \begin{cases} -\frac{V_p((-1)^n + 1)}{\pi(n^2 - 1)} & \text{if } n \geq 2 \\ 0 & \text{if } n = 1 \end{cases} \quad (1.83)$$

Assim seus primeiros termos são:

1 a_n(1)

$$a_n(1) = 0$$

1 a_n(2)

$$a_n(2) = -\frac{0.6667 V_p}{\pi}$$

1 a_n(3)

$$a_n(3) = 0$$

Por sua vez:

1 b_n(n) = (1/2)*0^(n - 1)*V_p

$$b_n(n) = 0.5 0^{n-1} V_p \quad (1.84)$$

E seus primeiros termos são:

1 b_n(1)

$$b_n(1) = 0.5 V_p$$

1 b_n(2)

$$b_n(2) = 0$$

1 b_n(3)

$$b_n(3) = 0$$

Assim pode-se obter a forma de onda de tensão, ou seja,

```
1 v(wt) = a_0 + ...
2 a_n(1)*cos( wt ) + b_n(1)*sin( wt ) +...
3 a_n(2)*cos(2*wt) + b_n(2)*sin(2*wt) +...
4 a_n(3)*cos(3*wt) + b_n(3)*sin(3*wt)
```

$$v(wt) = \frac{V_p}{\pi} + 0.5 V_p \sin(wt) - \frac{0.6667 V_p \cos(2wt)}{\pi}$$

A impedância para cada frequência é

```
1 Z_n(n) = sqrt(R^2 + (n*w*L)^2)
```

$$Z_n(n) = \sqrt{L^2 n^2 w^2 + R^2}$$

E assim,

```
1 Z_0 = R
```

$$Z_0 = R$$

```
1 Z_1 = sqrt(R^2 + (w*L)^2)
```

$$Z_1 = \sqrt{L^2 w^2 + R^2}$$

```
1 Z_2 = sqrt(R^2 + (2*w*L)^2)
```

$$Z_2 = \sqrt{4 L^2 w^2 + R^2}$$

```
1 Z_3 = sqrt(R^2 + (3*w*L)^2)
```

$$Z_3 = \sqrt{9 L^2 w^2 + R^2}$$

De modo que a equação para a corrente se torna,

```
1 syms phi2 phi3
2
3 i_L_SF(wt) = a_0/R + ...
4 a_n(1)/Z_1*cos( wt-phi1 ) + b_n(1)/Z_1*sin( wt-phi1 ) + ...
5 a_n(2)/Z_2*cos(2*wt-phi2) + b_n(2)/Z_2*sin(2*wt-phi2) + ...
6 a_n(3)/Z_3*cos(3*wt-phi3) + b_n(3)/Z_3*sin(3*wt-phi3)
```

$$i_{L,SF}(wt) = \frac{V_p}{R\pi} - \frac{0.5 V_p \sin(\phi_1 - wt)}{(L^2 w^2 + R^2)^{0.5}} - \frac{0.6667 V_p \cos(\phi_2 - 2wt)}{\pi (4 L^2 w^2 + R^2)^{0.5}}$$

Os ângulos ϕ_n não interferem no valor médio da tensão pois apenas deslocam as formas de onda no eixo do tempo (ou do ângulo, wt).

A. Corrente $I_{L,Med}$

Como as funções senoidais possuem valores médios nulos durante um período, obtém-se para o valor médio da corrente,

```
1 I_L_SF_Med = a_0/R
```

$$I_{L,SF,Med} = \frac{V_p}{R\pi} \quad (1.85)$$

B. Corrente I_{LRMS}

Para o cálculo da tensão eficaz, utilizam-se os primeiros termos da Série de Fourier. Observa-se que os termos com senóides simples possuem integrais nulas, produtos de senóides de diferentes frequências também possuem integrais nulas pois as áreas positivas são iguais às negativas do gráfico da curva.

```
1 I_L_SF_RMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*(int((i_LSF)^2,wt,0,2*sym(pi))))
```

$$I_{L,SF,RMS} = \frac{1.7725 \sqrt{\frac{0.0139 V_p^2 (288 L^4 w^4 + 36 L^2 R^2 \pi^2 w^2 + 376 L^2 R^2 w^2 + 9 R^4 \pi^2 + 88 R^4)}{4 L^4 w^4 + 5 L^2 R^2 w^2 + R^4}}}{R \pi^{1.5}} \quad (1.86)$$

1.4.4.6 Tensão máxima sobre o diodo, V_{DMax}

A tensão máxima sobre o diodo corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação, como no caso de carga puramente resistiva.

$$V_{DMax} = V_p \quad (1.87)$$

1.4.4.7 Corrente máxima através do diodo, I_{DMax}

A. Modo de condução descontínua

A corrente máxima para o MCD pode ser obtida derivando-se a equação da corrente e igualando a zero, como no caso de carga puramente resistiva.

```
1 i_L_E1_MCD
```

$$i_{L,E1,MCD}(wt) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega \tau}} \sin(\phi) \right)}{Z}$$

```
1 eq = diff(i_L_E1_MCD(wt),wt)==0
```

$$eq = \frac{V_p \left(\cos(\phi - wt) - \frac{e^{-\frac{wt}{\omega \tau}} \sin(\phi)}{\omega \tau} \right)}{Z} = 0$$

multiplica-se o resultado por Z/V_p para simplificar e substitui-se wt por wt_{Max} .

```
1 eq = subs(eq*Z/V_p,wt, sym('wt_Max'))
```

$$eq = \cos(\phi - wt_{Max}) - \frac{e^{-\frac{wt_{Max}}{\omega \tau}} \sin(\phi)}{\omega \tau} = 0 \quad (1.88)$$

Então, encontra-se wt_{Max} numericamente e substitui-se em $i_{L,E1,MCD}(wt)$. Um palpite inicial para a raiz é $T/4$.

Por exemplo:

```
1 % wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),pi/2)
2 % I_LMax = i_L_E1_MCD(wt_Max)
```

B. Modo de condução contínua

A corrente máxima para o MCC pode ser obtida de maneira semelhante ao que foi feito para o MCD, ou seja,

1 `i_L_E1_MCC`

$$i_{L,E1,MCC}(wt) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) + \frac{e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1} \right)}{Z}$$

1 `eq = diff(i_L_E1_MCC(wt),wt)==0`

$$eq = \frac{V_p \left(\cos(\phi - wt) + \frac{e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau \left(e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1 \right)} \right)}{Z} = 0$$

multiplica-se o resultado por Z/V_p para simplificar e substitui-se wt por wt_{Max} .

1 `eq = subs(eq*Z/V_p,wt, sym('wt_Max'))`

$$eq = \cos(\phi - wt_{Max}) + \frac{e^{-\frac{wt_{Max}}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau \left(e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1 \right)} = 0 \quad (1.89)$$

Finalmente, encontra-se wt_{Max} numericamente e substitui-se em $i_{L,E1,MCC}(wt)$. Um palpite inicial para a raiz é $T/4$.

Por exemplo:

1 `% wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),pi/2)`
2 `% ILMax = i_L_E1_MCC(wt_Max)`

No entanto, em termos práticos, o valor máximo que a corrente de carga poderá atingir é dado por

$$I_{DMax} = V_p/R \quad (1.90)$$

Esta última abordagem simplificada é indicada para o projeto do diodo, uma vez que leva em consideração o valor limite para a corrente através do mesmo.

1.4.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, através das equações 1.71, 1.73 ou 1.78, 1.79, 1.80 ou 1.81, 1.87 e 1.90.

1.4.5.1 Modo de condução descontínua, MCD

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 L = 10e-3;
4 f = 60;
5
6 w = 2*pi*f

```

$$w = 376.9911$$

```

1 omega = w;
2 tau = L/R

```

$$\tau = 1.0000e - 03$$

```

1 X_L = w*L

```

$$X_L = 3.7699$$

```

1 Z = sqrt(R^2+(XL)^2)

```

$$Z = 10.6870$$

```

1 phi = atan2(XL,R)

```

$$\phi = 0.3605$$

A. Equações

```

1 i_L_E1_MCD(wt) = - (V_p*(sin(phi - wt) - exp(-wt/(omega*tau))*sin(phi)))/Z

```

$$i_{L,E1,MCD}(wt) = 10.2697 e^{-2.6526 wt} + 29.1126 \sin(wt - 0.3605)$$

```

1 i_L_E1_MCD_final = - (V_p*(sin(phi - pi) - exp(-pi/(omega*tau))*sin(phi)))/Z

```

$$i_{L,E1,MCD,final} = 10.2721$$

```

1 i_L_E2_MCD(wt) = V_p*(exp(-wt/(omega*tau))*sin(phi) + sin(phi)*exp((pi-wt)/(omega*tau)))

```

$$i_{L,E2,MCD}(wt) = 10.2697 e^{8.3333 - 2.6526 wt} + 10.2697 e^{-2.6526 wt}$$

```

1 i_L_E2_MCD_final = 0

```

$$i_{L,E2,MCD,final} = 0$$

B. Grandezas

```
1 V_LMed = V_p/pi
```

$$V_{L\text{Med}} = 99.0348$$

```
1 I_LMed = (V_p*(2*cos(phi) + 2*omega*tau*sin(phi) - ...
2 omega*tau*exp((-pi/(omega*tau)))*sin(phi) - ...
3 omega*tau*exp((-2*pi)/(omega*tau)))*sin(phi))/(2*Z*pi)
```

$$I_{L\text{Med}} = 9.9033$$

```
1 V_LRMS = V_p*sqrt((0.125*(2*pi - sin(2*pi)))/pi)
```

$$V_{L\text{RMS}} = 155.5635$$

```
1 sigma1 = 0.5*pi*cos(phi)^2;
2 sigma2 = 0.5*pi*sin(phi)^2;
3 sigma3 = 0.5*omega*tau*sin(phi)^2;
4 sigma4 = -(2*omega*tau*sin(phi)^2)/(omega^2*tau^2 + 1);
5 sigma5 = -0.5*omega*tau*exp((-2*pi)/(omega*tau))*sin(phi)^2;
6 sigma6 = -(2*omega*tau*exp((-pi/(omega*tau)))*sin(phi)^2)/((omega*tau)^2 + 1);
7 sigma7 = (2*omega^2*tau^2*cos(phi)*sin(phi))/(omega^2*tau^2 + 1);
8 sigma8 = (2*(omega*tau)^2*exp(-pi/(omega*tau))*cos(phi)*sin(phi))/((omega*tau)^2 + 1);
9
10 I_LRMS = sqrt((0.5*V_p^2*(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + sigma7 ...
11 + sigma4*exp(-pi/(omega*tau)) + sigma7*exp(-pi/(omega*tau))))/Z^2 + ...
12 (0.25*V_p^2*omega*tau*exp((-4*pi)/(omega*tau)))*(exp((2*pi)/...
13 (omega*tau)) - 1)*(sin(phi) + exp((pi/(omega*tau)))*sin(phi))^2)/Z^2)/pi^0.5
```

$$I_{L\text{RMS}} = 14.7721$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\text{Max}} = 311.1270$$

```
1 syms wt_Max
2 eq = cos(phi - wt_Max) - (exp((-wt_Max/(omega*tau)))*sin(phi))/(omega*tau) == 0
```

$$eq = \cos(wt_{\text{Max}} - 0.3605) - 0.9357 e^{-2.6526 wt_{\text{Max}}} = 0$$

```
1 wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),pi/2)
```

$$wt_{\text{Max}} = 1.9257$$

```
1 I_DMax = i_L_E1(wt_Max)
```

$$I_{DMax} = 29.1743$$

ou

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{DMax} = 31.1127$$

C. Grandezas séries de Fourier

```
1 I_L_SF_Med = V_p/(pi*R)
```

$$I_{LSFMed} = 9.9035$$

```
1 I_L_SF_RMS = (1.7725*V_p*sqrt((0.0139*(288*L^4*w^4 + 36*L^2*R^2*pi^2*w^2 + ...  
2 376*L^2*R^2*w^2 + 9*R^4*pi^2 + 88*R^4)))/(pi^3*(4*L^4*w^4 + 5*L^2*R^2*w^2 + R^4)))/R
```

$$I_{LSFRMS} = 14.7683$$

1.4.5.2 Modo de Condução Contínua, MCC

```
1 V_p = sqrt(2)*220;  
2 R = 10;  
3 L = 50e-3;  
4 f = 60;  
5  
6 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 tau = L/R
```

$$\tau = 0.0050$$

```
1 XL = w*L
```

$$X_L = 18.8496$$

```
1 Z = sqrt(R^2+(XL)^2)
```

$$Z = 21.3379$$

```
1 phi = atan2(XL,R)
```

$$\phi = 1.0830$$

A. Equações

```

1 i_L_E1_MCC(wt) = - V_p/Z*(sin(phi - wt) + sin(phi)*exp(-wt/(w*tau))/...
2 (exp((-sym(pi))/(w*tau)) - 1))

```

$$i_{L,E1,MCC} = 15.8799 e^{-0.5305 wt} + 14.5810 \sin(wt - 1.0830)$$

```

1 i_L_E1_final = - V_p/Z*(sin(phi - pi) + sin(phi)*exp(-pi/(w*tau))/(exp((-pi)/(w*tau))...
2 - 1))

```

$$i_{L,E1,final} = 15.8799$$

```

1 i_L_E2_MCC(wt) = -(V_p*exp((2*sym(pi))/(w*tau))*sin(phi))/(Z*(exp(wt/(w*tau))...
2 - exp(sym(pi)/(w*tau))*exp(wt/(w*tau))))

```

$$i_{L,E2,MCC} = 84.0761 e^{-0.5305 wt}$$

```

1 i_L_E2_final = -(V_p*sin(phi))/(Z - Z*exp((sym(pi)/(w*tau))))

```

$$i_{L,E2,final} = 2.9993$$

B. Grandezas

```

1 % syms beta
2 % eq = sin(beta - phi) + exp((-beta/(tau*w)))*sin(phi) == 0
3 % beta = vpasolve(eq,beta,pi)
4
5 V_LMed = V_p/pi

```

$$V_{LMed} = 99.0348$$

```

1 I_LMed = V_p/(R*pi)

```

$$I_{LMed} = 9.9035$$

```

1 V_LRMS = 0.5*V_p

```

$$V_{LRMS} = 155.5635$$

```

1 I_LRMS = (vpa('1.7725')*V_p*sqrt((vpa('0.0139')*(288*L^4*w^4 + ...
2 36*L^2*R^2*pi^2*w^2 + 376*L^2*R^2*w^2 + 9*R^4*pi^2 ...
3 + 88*R^4))/(4*L^4*w^4 + 5*L^2*R^2*w^2 + R^4)))/(R*pi^1.5)

```

$$I_{LRMS} = 11.2336$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{DMax} = 311.1270$$

```
1 syms wt_Max
2 eq = cos(phi - wt_Max) + (exp((-wt_Max/(w*tau)))*sin(phi))/(w*tau*(exp((-sym(pi)/(w*tau)) - 1)) == 0
```

$$eq = 376.9911 \cos(376.9911 t_{Max} - 1.0830) - 176.6768 e^{-200 t_{Max}} = 0$$

```
1 t_Max = vpasolve(eq,sym('t_Max'),1/(4*f))
```

$$wt_{Max} = 2.4998$$

```
1 I_LMax = i_L_E1(wt_Max)
```

$$I_{LMax} = 18.6243$$

ou

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{DMax} = 31.1127$$

C. Séries de Fourier

```
1 a_0 = V_p/pi
```

$$a_0 = 99.0348$$

```
1 a_n(n) = piecewise(n ~=~ 1, -(V_p*((-1)^n + 1))/(pi*(n^2 - 1)), n == 1, 0)
```

$$a_n(n) = \begin{cases} -\frac{99.0348((-1)^n + 1)}{n^2 - 1} & \text{if } n \neq 1 \\ 0 & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

```
1 b_n(n) = 0.5*0^(n-1)*V_p
```

$$b_n(n) = 155.5635 0^{n-1}$$

```
1 Z_n(n) = sqrt(R^2 + (n*w*L)^2)
```

$$Z_n(n) = 2 \sqrt{88.8264 n^2 + 25}$$

```
1 phi_n(n) = atan2(n*w*L, R)
```

$$\phi_n(n) = \tan(1.8850 n)$$

D. Grandezas pelas Séries de Fourier

$$1 \quad I_{L_SF_Med} = V_p / (\pi * R)$$

$$I_{L SF Med} = 9.9035$$

$$1 \quad I_{L_SF_RMS} = (1.7725 * V_p * \sqrt{((0.0139 * (288 * L^4 * w^4 + 36 * L^2 * R^2 * \pi^2 * w^2 + \dots$$

$$2 \quad 376 * L^2 * R^2 * w^2 + 9 * R^4 * \pi^2 + 88 * R^4))) / (\pi^3 * (4 * L^4 * w^4 + 5 * L^2 * R^2 * w^2 + R^4))) / R$$

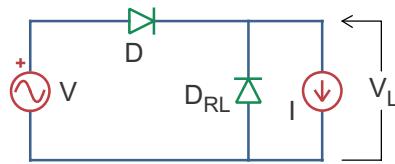
$$I_{L SF RMS} = 11.2336$$

1.5 Carga I com Diodo de Roda-Livre

1.5.1 Topologia

Esta topologia é formada por uma fonte de tensão em série com um diodo e uma carga que é uma fonte de corrente ou pode ser uma carga com uma indutância muito alta. Devido à característica indutiva da carga é necessário um diodo em paralelo com a mesma para que a corrente possa circular em roda livre para evitar o surgimento de sobre tensões nas chaves caso esta corrente seja interrompida, Fig. 1.19.

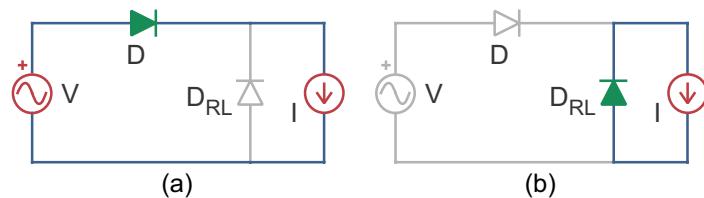
Figura 1.19. Retificador monofásico de meia onda à diodo com carga de fonte de corrente.



1.5.2 Etapas de operação

Durante o semiciclo positivo toda a corrente de carga circula através do diodo D, pois este está polarizado diretamente, Fig. 1.20(a). Por outro lado, durante o semiciclo negativo, toda a corrente de carga circula através do diodo de roda livre (D_{RL}) e o diodo D se encontra bloqueado, Fig. 1.20(b).

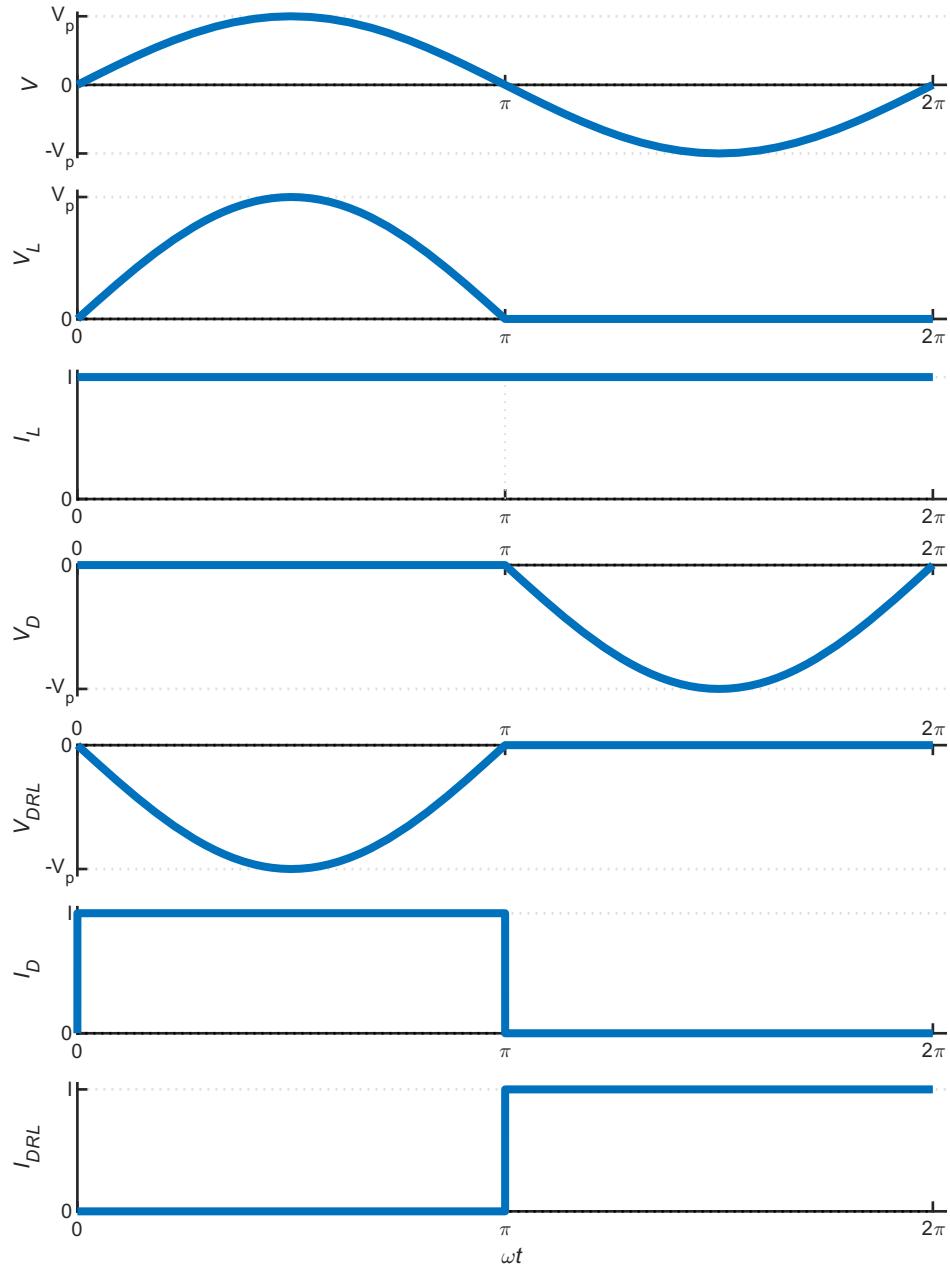
Figura 1.20. Etapas de operação do retificador monofásico de meia onda à diodo com carga I.



1.5.3 Formas de onda

As principais formas de ondas estão mostradas na Fig. 1.21. Observa-se que a corrente através da carga é contínua e igual a I e que a mesma circula através do diodo D durante o semiciclo positivo e através do diodo D_{RL} durante o semiciclo negativo.

Figura 1.21. Principais formas de onda.



A tensão através da carga é dada por:

$$v_L(\omega t) = \begin{cases} V_p \operatorname{sen}(\omega t) & 0 \leq \omega t < \pi \\ 0 & \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases} \quad (1.91)$$

A corrente através da carga é constante:

$$i_L(\omega t) = I \quad (1.92)$$

1.5.4 Equações para o projeto

A tensão média sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (1.93)$$

```
1 syms V_p wt I
2 V_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,pi)
```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{V_p}{\pi} \quad (1.94)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

```
1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 1/(2*sym('pi'))*int(I,wt,0,2*sym('pi'))
```

$$I_{L\text{Med}} = I \quad (1.95)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{L\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (1.96)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/(2*pi)*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,pi))
```

$$V_{L\text{RMS}} = 0.5 V_p \quad (1.97)$$

Como mencionado, a corrente através da carga é constante. Então,

```
1 syms V_p wt R, assume([I, sym('pi')], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*int(I^2,wt,0,2*sym('pi')))
```

$$I_{L\text{RMS}} = I \quad (1.98)$$

A tensão máxima sobre os diodo corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação.

$$V_{D\ Max} = V_{DRL\ Max} = V_p$$

1 **V_DMax = V_p**

$$V_{D\ Max} = V_p \quad (1.99)$$

E a corrente máxima,

$$I_{D\ Max} = I_{DRL\ Max} = I$$

1 **I_DMax = I**

$$I_{D\ Max} = I \quad (1.100)$$

1.5.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, por meio das equações 1.94, 1.95, 1.97, 1.98, 1.99 e 1.100.

1 **V_p = sqrt(2)*220;**
 2 **I = 10;**
 3
 4 **V_LMed = V_p/pi**

$$V_{L\ Med} = 99.0348$$

1 **I_LMed = I**

$$I_{L\ Med} = 10$$

1 **V_LRMS = 0.5*V_p**

$$V_{L\ RMS} = 155.5635$$

1 **I_LRMS = I**

$$I_{L\ RMS} = 10$$

1 **V_DMax = V_p**

$$V_{D\ Max} = 311.1270$$

1 **I_DMax = I**

$$I_{D\ Max} = 10$$

1.6 Conclusão

Neste capítulo foi estudado o retificador monofásico de meia onda. Foram estudados os modos de operação para carga resistiva (R), carga resistiva em série com fonte de tensão, carga indutiva (RL), carga indutiva com diodo de roda livre e carga com corrente constante (I). Foram vistas as principais formas de onda e analisada a corrente de carga. Foram apresentadas equações para auxiliar no projeto dos retificadores analisados.

A estrutura estudada neste capítulo é a mais simples possível, necessitando de um único diodo. No entanto, somente um semiciclo da potência fornecida pela fonte de entrada é aproveitada, limitando a energia transferida para a carga e causando elevada ondulação na corrente de carga.

Capítulo 2

Retificador Monofásico de Onda Completa com Ponto Médio à Diodo

A Fig. 2.1 ilustra o retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo. Inicialmente será feita análise com carga R, puramente resistiva.

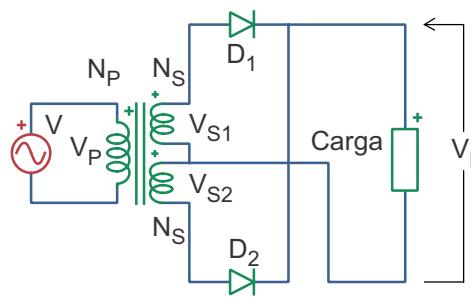
As relações entre espiras do transformador serão consideradas unitárias e, portanto, as relações entre as tensões nos enrolamentos do transformador também serão unitárias. Caso isso não ocorra, basta considerar $V_p \text{sen}(\omega t)$ como sendo a tensão de saída de cada um dos secundários do transformador, ou seja, $V_{S1} = V_{S2} = V_p \text{sen}(\omega t)$, de forma que a tensão de alimentação será

$$v(\omega t) = V_{S1} \frac{N_p}{N_s} = V_{S2} \frac{N_p}{N_s}$$

E dessa forma:

$$V_p = V_{p,S1} = V_{p,S2} = V_{p,P} \frac{N_s}{N_p} = V_{p,in} \frac{N_s}{N_p}$$

Figura 2.1. Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo.

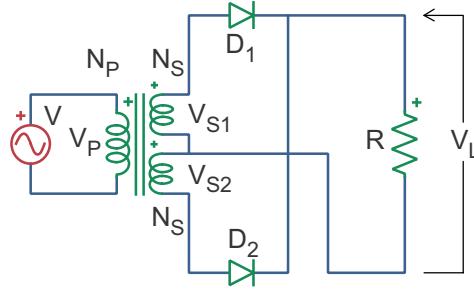


2.1 Carga R

2.1.1 Topologia

O retificador mostrado na Fig. 2.2 é formado por uma fonte de tensão, um transformador com dois enrolamentos secundários, dois diodos e pela carga R.

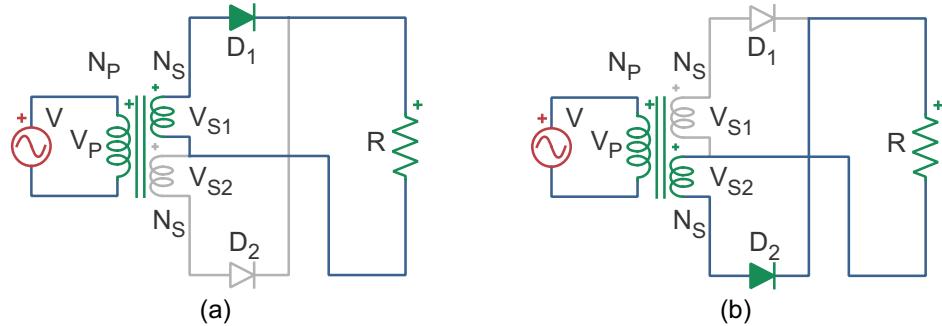
Figura 2.2. Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga R.



2.1.2 Etapas de operação

Para esta topologia o diodo D_1 conduz durante o semiciclo positivo (Fig. 2.3(a)), enquanto o diodo D_2 se encontra bloqueado. Dessa forma, durante o semiciclo positivo é aplicada a tensão da fonte de entrada sobre a Carga R e a corrente flui através da mesma no sentido positivo. Durante o semiciclo negativo, a tensão através da carga também é positiva porque a tensão da fonte de entrada agora é negativa e quem está em condução é o diodo D_2 , enquanto o diodo D_1 se encontra bloqueado (Fig. 2.3(b)). Consequentemente, como o diodo D_2 está conectado ao terminal positivo da carga, a corrente através da mesma continua a fluir no sentido positivo.

Figura 2.3. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga R.



A tensão de alimentação é dada por:

$$v(\omega t) = V_p \operatorname{sen}(\omega t) [V]$$

- V_p é a tensão de pico nos secundários do transformador; e
- ω é a frequência angular.

A tensão através da carga é dada por:

$$v_L(\omega t) = \begin{cases} V_p \operatorname{sen}(\omega t) & 0 \leq \omega t < \pi \\ -V_p \operatorname{sen}(\omega t) & \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases}$$

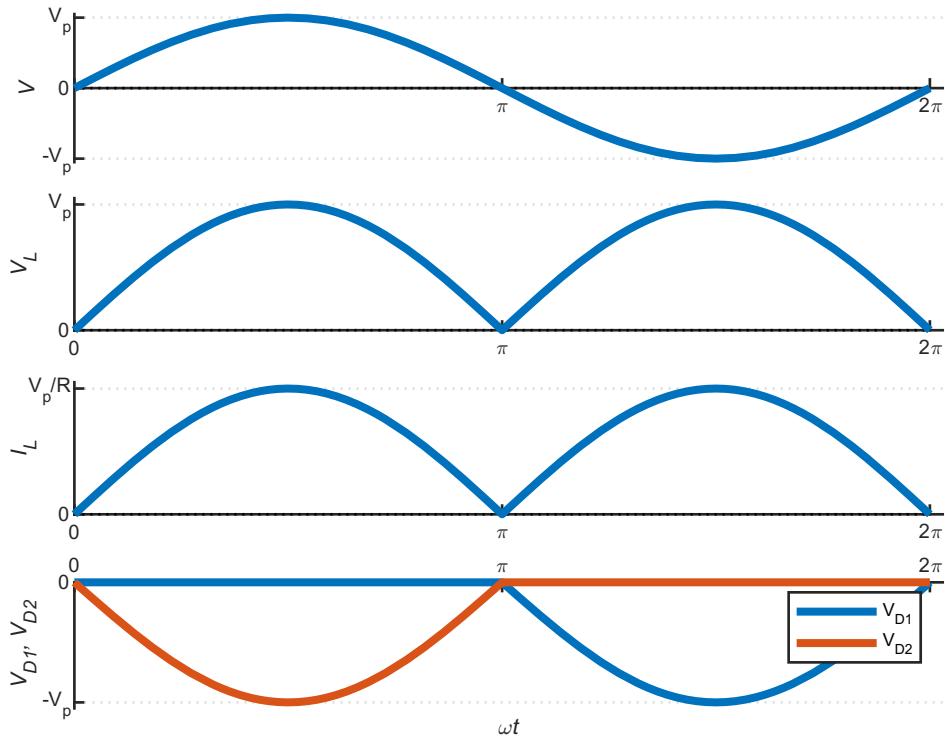
A corrente é proporcional à tensão, pois trata-se de um circuito resistivo:

$$i_L(\omega t) = \frac{v_L(\omega t)}{R}$$

2.1.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 2.4. Observa-se que tanto a tensão, como a corrente através da carga sempre são positivas, sendo proporcionais entre si.

Figura 2.4. Principais formas de onda.



2.1.4 Equações para o projeto

A tensão média sobre a carga é calculada através de

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi V_p \text{sen}(\omega t) d(\omega t) \quad (2.1)$$

A principal diferença no cálculo da tensão média entre as topologias desta seção e da seção 1.1 está no fato que a frequência da tensão sobre a carga dobra para este retificador, então o período corresponde à metade daquele da seção 1.1.

```
1 syms V_p wt
2 V_LMed = 1/(sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,pi)
```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{2 V_p}{\pi} \quad (2.2)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```

1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 1/(sym('pi'))*int(V_p*sin(wt)/R,wt,0,pi)

```

$$I_{LMed} = \frac{2V_p}{R\pi} \quad (2.3)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através de

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (2.4)$$

```

1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/pi*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,pi))

```

$$V_{LRMS} = 0.7071 V_p \quad (2.5)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```

1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(1/(pi)*int((V_p*sin(wt)/R)^2,wt,0,pi))

```

$$I_{LRMS} = \frac{0.7071 V_p}{R} \quad (2.6)$$

A tensão máxima sobre cada diodo corresponde ao dobro da tensão máxima da fonte de alimentação, pois os dois enrolamentos secundários do transformador estão conectados em série nas etapas que o outro diodo se encontra em condução.

```

V_DMax = 2*V_p
1 V_DMax = 2*V_p

```

$$V_{DMax} = 2V_p \quad (2.7)$$

E a corrente máxima,

$$I_{DMax} = V_p/R$$

```

1 I_DMax = V_p/R

```

$$I_{DMax} = \frac{V_p}{R} \quad (2.8)$$

2.1.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir. Serão utilizadas as equações 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8.

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3
4 V_LMed = 2*V_p/pi

```

$$V_{L\,Med} = 198.0696$$

```

1 I_LMed = 2*V_p/(R*pi)

```

$$I_{L\,Med} = 19.8070$$

```

1 V_LRMS = (sqrt(2)/2)*V_p

```

$$V_{L\,RMS} = 220.0000$$

```

1 I_LRMS = ((sqrt(2)/2)*V_p)/R

```

$$I_{L\,RMS} = 22.0000$$

```

1 V_DMax = 2*V_p

```

$$V_{D\,Max} = 622.2540$$

```

1 I_DMax = V_p/R

```

$$I_{D\,Max} = 31.1127$$

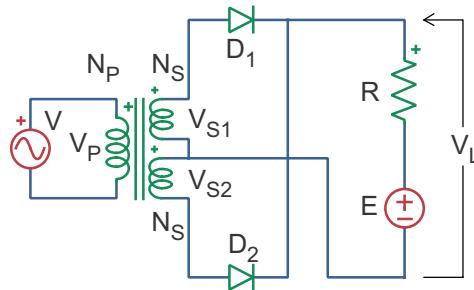
2.2 Carga RE

2.2.1 Topologia

Esta topologia é semelhante à topologia analisada na seção 2.1 exceto que a carga é formada por uma resistência em série com uma fonte de tensão de valor E, conforme ilustrado na Fig. 2.5. No decorrer desta seção considera-se sempre que o pico de tensão de entrada é maior que a tensão E.

$$V_p > E$$

Figura 2.5. Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.



2.2.2 Etapas de operação

Para esta topologia, o diodo D_1 conduz durante o semiciclo positivo quando a tensão da fonte de entrada $V(\omega t)$, for maior que a tensão da fonte E (Fig. 2.6(a)). Por sua vez, o diodo D_2 conduz durante o semiciclo negativo quando a tensão negativa da fonte de entrada $-V(\omega t)$, for maior que a tensão da fonte E (Fig. 2.6(b)). Caso contrário, ambos os diodos se encontram bloqueados e assim não há corrente através da carga, de forma que não há nenhuma queda de tensão sobre a resistência R (Fig. 2.6(c)). Portanto, quando não há nenhum diodo conduzindo, a tensão $V_L(\omega t)$ será igual a E .

Os circuitos equivalentes são mostrados na (Fig. 2.6). Considerando esta figura, a sequência das etapas de operação será:

- Fig. 2.6(c) para $0 < \omega t < \theta_1$
- Fig. 2.6(a) para $\theta_1 < \omega t < \theta_2$
- Fig. 2.6(c) para $\theta_2 < \omega t < \pi + \theta_1$
- Fig. 2.6(b) para $\pi + \theta_1 < \omega t < \pi + \theta_2$
- Fig. 2.6(c) para $\pi + \theta_2 < \omega t < 2\pi$

2.2.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 2.7. Observa-se que a interseção entre as formas de onda $V(\omega t)$ e E ocorre para os ângulos θ_1 e θ_2 e se repete para $\pi + \theta_1$ e $\pi + \theta_2$. Durante estes intervalos, a tensão na carga é sempre superior à tensão da fonte E . A corrente através da carga é proporcional à tensão sobre a resistência R .

1 **Figura_WF_2pulsosPM_para_carga_RE()**

Primeiramente determina-se a interseção entre as formas de onda das duas fontes.

```

1 clearvars
2 syms V_p wt E R
3
4 eq = V_p*sin(wt) == E

```

Figura 2.6. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.

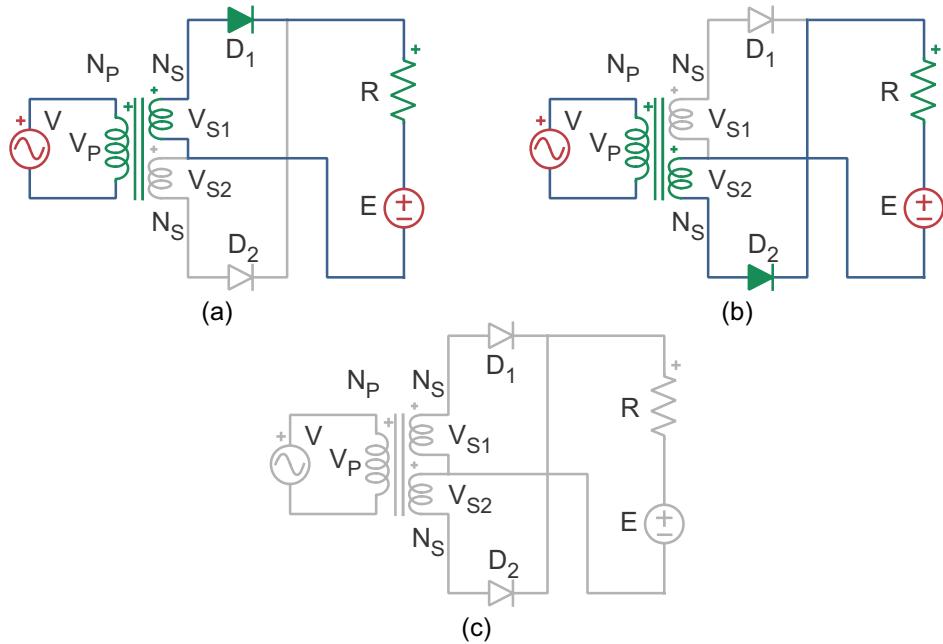
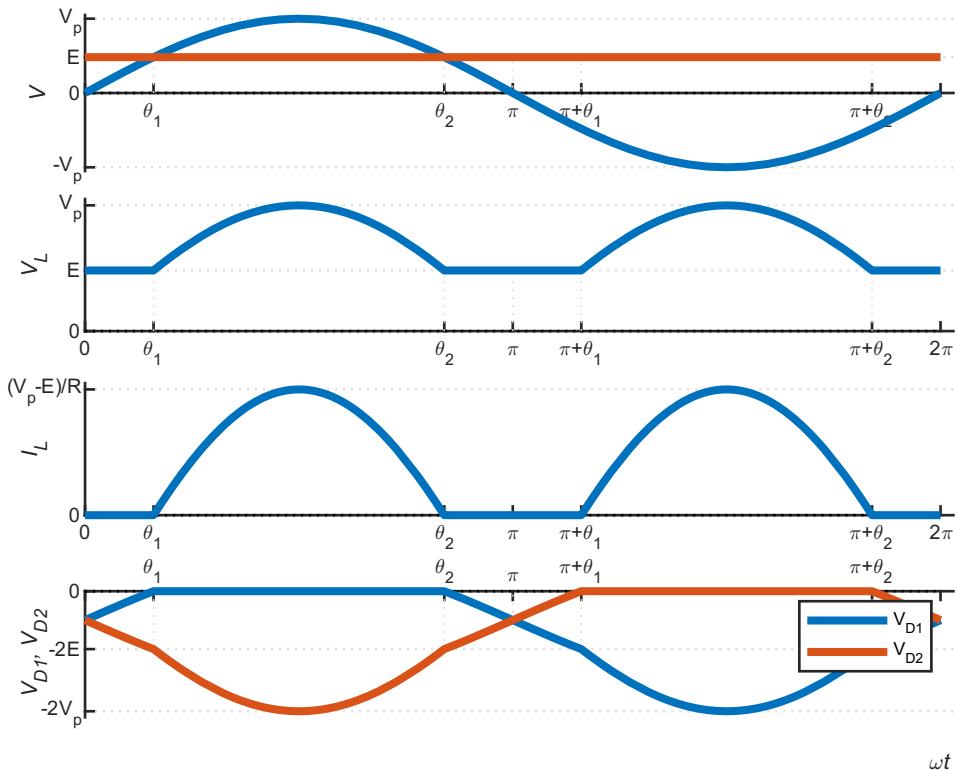


Figura 2.7. Principais formas de onda.



$$eq = V_p \sin(\omega t) = E$$

```
1 thetas = solve(eq,wt)
```

$$thetas = \begin{bmatrix} \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \\ \pi - \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \end{bmatrix}$$

```
1 theta_1 = thetas(1)
```

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right)$$

```
1 theta_2 = thetas(2)
```

$$\theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right)$$

Conforme já mencionado, o diodo D_1 conduzirá entre θ_1 e θ_2 . Por sua vez, diodo D_2 conduzirá entre $\pi + \theta_1$ e $\pi + \theta_2$

Tensão sobre os diodos

- Entre θ_1 e θ_2 : o diodo D_1 está conduzindo, logo sua tensão é nula;

$$V_{D1} = 0$$

- Entre $\pi + \theta_1$ e $\pi + \theta_2$ o diodo D_2 está conduzindo; a tensão sobre D_1 será o dobro da tensão fornecida pela fonte de alimentação, pois ambos os secundários do transformador estão em série com este diodo;

$$V_{D1} = 2V_{S2}(\omega t)$$

- Nos intervalos $[0, \theta_1]$, $[\theta_2, \pi + \theta_1]$ e $[\pi + \theta_2, 2\pi]$ nenhum diodo está em condução. Então

$$V_{D1} = V_{S2}(\omega t) - E$$

O mesmo raciocínio é válido para a tensão sobre o diodo D_2 .

2.2.4 Equações para o projeto

Tendo em vista o que foi discutido nas seções anteriores, utilizam-se os valores de θ_1 e θ_2 para o projeto deste retificador.

A tensão média sobre a carga pode ser calculada utilizando

$$V_{L\,Med} = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\theta_1} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{\pi} Ed(\omega t) \right] \quad (2.9)$$

Que pode ser simplificada através da adição dos limites dos termos semelhantes para

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{0+\theta_2}^{\theta_1+\pi} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (2.10)$$

```

1 syms wt theta_1 theta_2
2
3 V_LMed = 1/(sym('pi'))*(int(V_p*sin(wt),wt,theta_1,theta_2)+...
4 int(E,wt,theta_2,sym('pi')+theta_1))

```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{E(\pi + \theta_1 - \theta_2) + V_p(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))}{\pi} \quad (2.11)$$

A corrente média através da carga pode ser obtida através da determinação da tensão média sobre R.

```

1 V_RMed = 1/(sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E),wt,theta_1,theta_2)

```

$$V_{R\text{Med}} = \frac{V_p(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E(\theta_1 - \theta_2)}{\pi}$$

```

1 syms wt theta_1 theta_2
2
3 I_LMed = 1/(sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E)/R,wt,theta_1,theta_2)

```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{\frac{V_p(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))}{R} + \frac{E(\theta_1 - \theta_2)}{R}}{\pi}$$

```

1 I_LMed = simplifyFraction(I_LMed)

```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{E\theta_1 - E\theta_2 + V_p \cos(\theta_1) - V_p \cos(\theta_2)}{R\pi}$$

```

1 %I_LMed = simplify(I_LMed)
2 I_LMed = collect(I_LMed, {'E', 'V_p', 'R'})

```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{V_p(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E(\theta_1 - \theta_2)}{R\pi} \quad (2.12)$$

A tensão eficaz sobre a carga pode ser obtida através da equação

$$V_{L\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\theta_1} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{\pi} E^2 d(\omega t) \right]} \quad (2.13)$$

Que como visto anteriormente, corresponde a

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \left[\int_{0+\theta_2}^{\theta_1+\pi} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) \right]} \quad (2.14)$$

```

1 syms V_p wt, assume([V_p, sym('pi')], {'positive', 'real'})
2 V_LRMS = sqrt(1/(sym('pi'))*(int((V_p*sin(wt))^2,wt,theta_1,theta_2)+...
3 int((E)^2,wt,theta_2,sym('pi')+theta_1)))

```

$$V_{LRMS} = \frac{\sqrt{E^2 (\pi + \theta_1 - \theta_2) - 0.2500 V_p^2 (2 \theta_1 - 2 \theta_2 - \sin(2 \theta_1) + \sin(2 \theta_2))}}{\pi^{0.5}} \quad (2.15)$$

```

1 V_RRMS = sqrt(1/(sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E)^2,wt,theta_1,theta_2));
2 MostrarEquacoesLongas(V_RRMS,[2,1])

```

$$eq = \frac{\sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8}}{\pi^{0.5}}$$

onde:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0.2500 V_p^2 \sin(2 \theta_1) \\ \sigma_2 &= -0.2500 V_p^2 \sin(2 \theta_2) \\ \sigma_3 &= -E^2 \theta_1 \\ \sigma_4 &= E^2 \theta_2 \\ \sigma_5 &= -0.5000 V_p^2 \theta_1 \\ \sigma_6 &= 0.5000 V_p^2 \theta_2 \\ \sigma_7 &= -2 E V_p \cos(\theta_1) \\ \sigma_8 &= 2 E V_p \cos(\theta_2) \end{aligned}$$

Como a corrente através do circuito auxiliar é proporcional à tensão sobre o resistor,

```

1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sym('V_RRMS')/R

```

$$I_{LRMS} = \frac{V_{RRMS}}{R} \quad (2.16)$$

```

1 % I_LRMS = eval(sqrt(1/(2*sym('pi'))*int(((V_p/R)*sin(wt))^2,wt,0,sym('pi'))))
2 % I_LRMS = eval(I_LRMS)

```

A tensão máxima sobre os diodos corresponde ao dobro da tensão máxima da fonte de alimentação devido aos dois enrolamentos do secundário conectados em série.

$$V_{DMax} = 2 V_p$$

```

1 V_DMax = 2*V_p

```

$$V_{D\ Max} = 2 V_p \quad (2.17)$$

E a corrente máxima é proporcional à tensão sobre a resistência,

$$I_{D\ Max} = \frac{(V_p - E)}{R}$$

```
1 I_DMax = (V_p - E)/R
```

$$I_{D\ Max} = -\frac{E - V_p}{R} \quad (2.18)$$

2.2.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 2.11, 2.12, 2.15, 2.16, 2.17 e 2.18.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 f = 60;
4 E = 150;
5 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 theta_1 = asin(E/V_p)
```

$$\theta_1 = 0.5031$$

```
1 theta_2 = pi - asin(E/V_p)
```

$$\theta_2 = 2.6385$$

```
1 V_LMed = (E*(pi + theta_1 - theta_2) + V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)))/pi
```

$$V_{L\ Med} = 221.5697$$

```
1 I_LMed = (V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)) + E*(theta_1 - theta_2))/(R*pi)
```

$$I_{L\ Med} = 7.1570$$

```
1 V_LRMS = sqrt(E^2*(pi + theta_1 - theta_2) - ...
2 0.2500*V_p^2*(2*theta_1 - 2*theta_2 - sin(2*theta_1) + sin(2*theta_2)))/pi^0.5
```

$$V_{LRMS} = 230.4775$$

```

1 sigma1 = 0.250*V_p^2*sin(2*theta_1);
2 sigma2 = -0.250*V_p^2*sin(2*theta_2);
3 sigma3 = -E^sym(2)*theta_1;
4 sigma4 = E^sym(2)*theta_2;
5 sigma5 = -0.5*V_p^2*theta_1;
6 sigma6 = 0.5*V_p^2*theta_2;
7 sigma7 = -2*E*V_p*cos(theta_1);
8 sigma8 = 2*E*V_p*cos(theta_2);
9 V_RRMS = sqrt(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + sigma6 + sigma7 + ...
10   sigma8)/pi^0.5

```

$$V_{RRMS} = 95.6503$$

```

1 I_LRMS = V_RRMS/R

```

$$I_{LRMS} = 9.5650$$

```

1 V_DMax = 2*V_p

```

$$V_{DMax} = 622.2540$$

```

1 I_DMax = (V_p - E)/R

```

$$I_{DMax} = 16.1127$$

2.3 Carga Indutiva RL

2.3.1 Topologia

Este retificador é composto por uma fonte de tensão, um transformador com dois secundários e por dois diodos. A Carga é indutiva, formada por um resistor e por um indutor conectados em série, conforme a Fig. 2.8.

2.3.2 Etapas de operação

Para esta topologia foi acrescentada uma indutância em série com a carga resistiva, então a carga apresenta uma característica indutiva. O comportamento do circuito é similar ao do retificador da seção 2.1 em termos de etapas de operação, exceto que a corrente deixa de ser proporcional à tensão. O diodo D_1 conduz durante o semicírculo positivo (Fig. 2.9(a)) e o diodo D_2 durante o semicírculo negativo (Fig. 2.9(b)).

Figura 2.8. Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva.

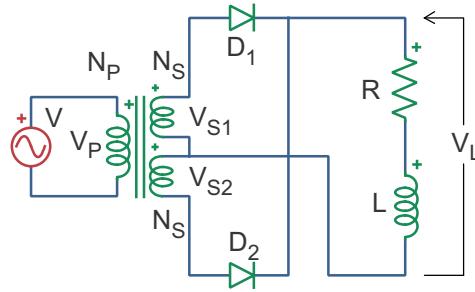


Figura 2.9. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva.

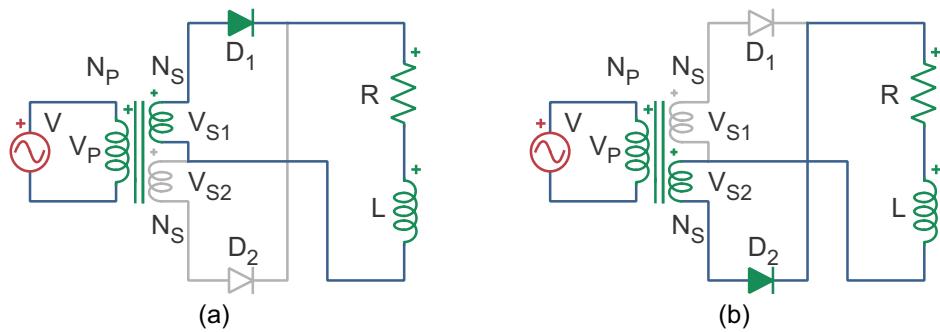
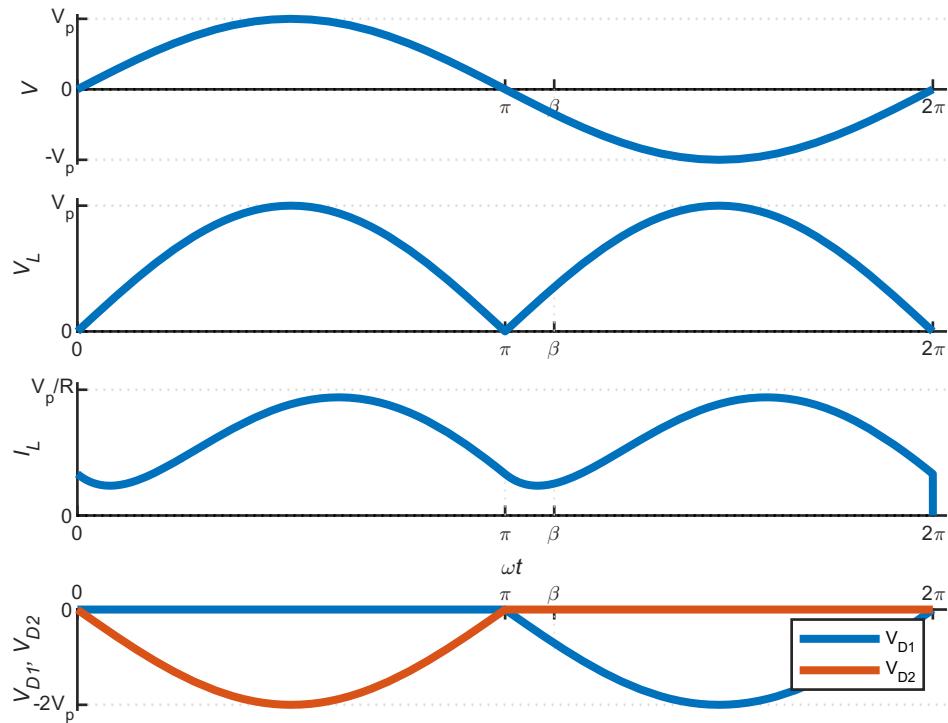


Figura 2.10. Principais formas de onda.



2.3.3 Formas de onda

As principais formas de onda podem ser vistas na Fig. 2.10, a seguir. Observa-se que a corrente nunca se anula e, portanto, o retificador sempre operará no modo de condução contínua, MCC.

1 Figura_WF_2pulosPM_para_carga_RL();

2.3.3.1 Determinação de $i_L(t)$

Inicialmente necessita-se definir algumas variáveis simbólicas para obter a corrente através do indutor.

```
1 % inicialização
2 clearvars
3 syms V_o w R L t i_L(t) s V_p X_L tau
```

Na seção 1.3 foi visto que a corrente através da carga é dada por 1.35, reproduzida aqui.

```
1 syms omega phi wt IL_0 Z
2 i_L(wt) = -(V_p*(sin(phi - wt) - exp((-wt/(omega*tau)))*sin(phi)) ...
3 - IL_0*Z*exp((-wt/(omega*tau))))/Z
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z}$$

A corrente inicial através do indutor, IL_0 , não é nula, sendo necessário determiná-la, o que será feito a seguir.

Sabe-se que o valor da corrente ao final do semiciclo positivo pode ser obtido calculando-se 1.35 para $\omega t = \pi$.

1 i_L(sym('pi'))

$$i_L(\pi) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - \pi) - e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}}}{Z}$$

Fazendo-se $i_L(0) = i_L(\pi)$, pois a função é periódica, pode-se determinar IL_0 .

1 eq = i_L(0)==i_L(sym('pi'))

$$eq = IL_0 = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - \pi) - e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}}}{Z}$$

E resolvendo para IL_0

```
1 IL_0 = solve(eq, IL_0)
```

$$IL_0 = -\frac{V_p \sin(\phi) - V_p \sin(\phi - \pi) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Como

$$\sin(\phi) = -\sin(\phi - \pi)$$

Fazendo a substituição

```
1 IL_0 = subs(IL_0, sin(phi - sym('pi')), -sin(phi))
```

$$IL_0 = -\frac{V_p \sin(\phi) + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

```
1 IL_0 = simplifyFraction(IL_0)
```

$$IL_0 = -\frac{V_p \sin(\phi) + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Substituindo IL_0 na equação de $i_L(wt)$, 1.35

```
1 i_L(wt)=subs(i_L(wt), 'IL_0', IL_0)
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) + \frac{Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} (V_p \sin(\phi) + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi))}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}}{Z}$$

Tentando simplificar a equação...

```
1 i_L = simplifyFraction(i_L, "Expand", true)
```

$$i_L(wt) = -\frac{2 V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) + V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}}$$

Grupando os termos comuns

```
1
2 i_L = collect(i_L, {'V_p', 'Z'})
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left(2e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) + \sin(\phi - wt) e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - \sin(\phi - wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}{Z \left(e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}$$

```
1 i_L = collect(i_L,sym(sin(phi - wt)))
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \sin(\phi - wt)}{Z} - \frac{2V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z \left(e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}$$

Os termos exponenciais desta equação podem ser reescritos manualmente, multiplicando numerador e denominador por $e^{-wt/(\tau w)}$, conforme segue.

$$\frac{e^{\frac{\pi}{\tau w}}}{e^{\frac{wt}{\tau w}} - e^{\frac{\pi}{\tau w}} e^{\frac{wt}{\tau w}}} = \frac{e^{\frac{\pi}{\tau w}} e^{-\frac{wt}{\tau w}}}{e^{\frac{wt}{\tau w}} e^{-\frac{wt}{\tau w}} - e^{\frac{\pi}{\tau w}} e^{\frac{wt}{\tau w}} e^{-\frac{wt}{\tau w}}} = \frac{e^{\frac{\pi-wt}{\tau w}}}{1 - e^{\frac{\pi}{\tau w}}}$$

Assim,

```
1 i_L = subs(i_L,(exp((sym('pi'))/(omega*tau))))/((exp(wt/(omega*tau)) - ...
2   exp((sym('pi'))/(omega*tau)))*exp((wt/(omega*tau)))),...
3   exp(-(wt-sym('pi'))/(tau*omega))/(1-(exp(sym('pi'))/(tau*omega))))
```

$$i_L(wt) = \frac{2V_p e^{\frac{\pi-wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z \left(e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1 \right)} - \frac{V_p \sin(\phi - wt)}{Z}$$

Que pode ser simplificada manualmente para:

$$i_L(wt) = \frac{V_p}{Z} \left(\frac{2e^{\frac{\pi-wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1} - \sin(\phi - wt) \right)$$

Dessa forma tem-se

```
1 i_L = (V_p/Z)*((2*exp(((sym('pi')) - wt)/(omega*tau)))*sin(phi))/...
2   ((exp((sym('pi'))/(omega*tau)) - 1)) - (sin(phi - wt)))
```

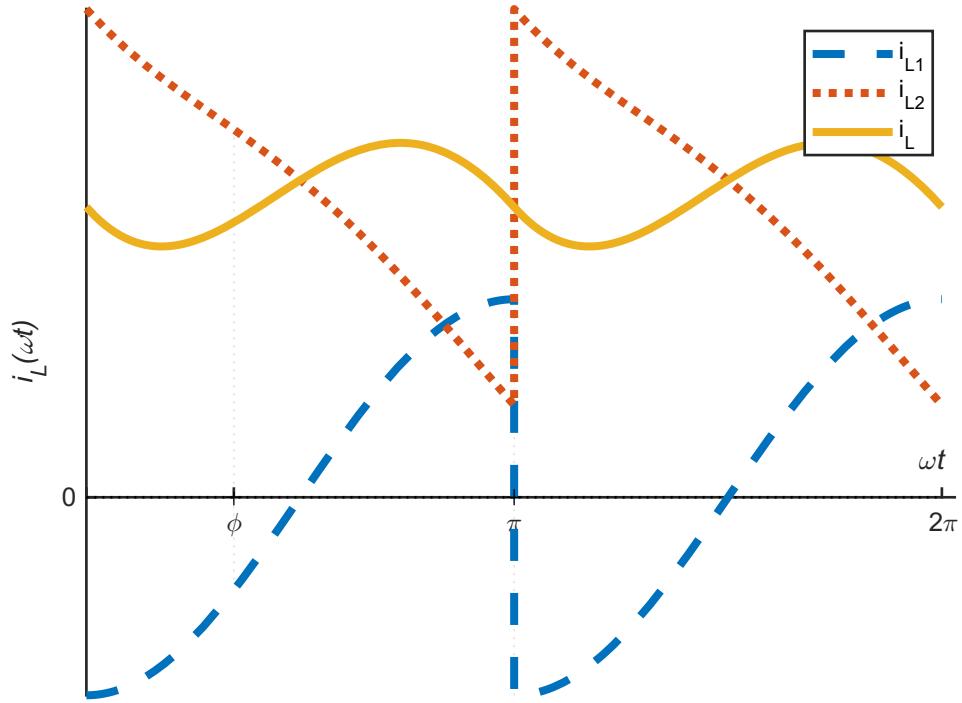
$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) - \frac{2e^{\frac{\pi-wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1} \right)}{Z} \quad (2.19)$$

Assim é obtida a equação da corrente através do indutor.

Na Fig. 2.11 é mostrada a forma de onda da corrente $i_L(wt)$ e as formas de onda das componentes ($i_{L1}(wt)$ e $i_{L2}(wt)$) que somadas compõem a corrente através da carga. A corrente $i_{L1}(wt)$ corresponde ao decaimento exponencial, enquanto que $i_{L2}(wt)$ é uma forma de onda senoidal defasada pelo ângulo ϕ , que é o fator de potência do circuito. Observa-se que as frequências das formas de onda na carga correspondem ao dobro da frequência da fonte de entrada.

```
1 Figura_IL_2pulosPM_para_carga_RL();
```

Figura 2.11. Forma de onda da corrente através da carga e de suas componentes.



2.3.3.2 Análise utilizando a série de Fourier

A Série de Fourier para a tensão através da carga pode ser calculada através da equação abaixo. Nessa equação observa-se que os argumentos do seno e do cosseno foram multiplicados por dois porque a frequência da tensão através da carga corresponde ao dobro da frequência da fonte que alimenta o retificador.

$$v(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2n\omega t) + b_n \sin(2n\omega t))$$

$$v(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2n\omega t) + b_n \sin(2n\omega t))$$

e a corrente através da carga pode ser calculada conforme abaixo.

$$i(\omega t) = \frac{a_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{Z_n} \cos(2n\omega t) + \frac{b_n}{Z_n} \sin(2n\omega t) \right)$$

$$i(\omega t) = \frac{a_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(2n\omega t - \phi_n) + b_n \sin(2n\omega t - \phi_n)}{Z_n}$$

Observa-se que para se obter a equação da corrente através da carga, basta dividir a tensão pelo valor de impedância correspondente. Como as impedâncias possuem termos complexos as senóides são deslocadas.

```
1 syms V_p wt n omega L R % definição das variáveis simbólicas
2 assume(n,{'positive', 'integer'})% definição das restrições
```

Como a frequência da forma de onda sobre a carga é o dobro da frequência da entrada o intervalo a ser considerado inicia em zero e termina em π .

- Limites de integração

```
1 lim_inf = 0;
2 lim_sup = sym('pi');
```

A forma de onda de tensão sobre a carga durante o semiciclo positivo é dada por

```
1 vL(wt) = V_p*sin(wt);
```

- Determinação dos coeficientes

```
1 a_0 = 1/(sym('pi'))*int(vL,wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_0 = -\frac{V_p (\cos(\pi) - 1)}{\pi}$$

```
1 a_n(n) = 2/sym('pi')*int(vL*cos(n*2*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_n(n) = \frac{2 V_p \left(\frac{\cos(\pi(2n-1))}{4n-2} - \frac{\cos(\pi(2n+1))}{4n+2} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n+2} \right)}{\pi}$$

Quando o argumento da função cosseno é múltiplo ímpar de π , como é o caso de $2n - 1$ e $2n + 1$,

$$\cos(n\pi) = -1, \text{ } n \text{ ímpar}$$

```
1 a_n(n) = subs(a_n, {cos(sym('pi'))*(2*n + 1), cos(sym('pi'))*(2*n - 1)}),{-1, -1})
```

$$a_n(n) = -\frac{2 V_p \left(\frac{2}{4n-2} - \frac{2}{4n+2} \right)}{\pi}$$

```
1 a_n = simplify(a_n)
```

$$a_n(n) = -\frac{4 V_p}{\pi (4n^2 - 1)}$$

```
1 b_n(n) = 2/sym('pi')*int(vL*sin(n*2*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$b_n(n) = \frac{2 \left(\frac{V_p \sin(\pi(2n-1))}{4n-2} - \frac{V_p \sin(\pi(2n+1))}{4n+2} \right)}{\pi}$$

Quando o argumento da função seno é múltiplo de π

$$\sin(n\pi) = 0$$

```
1 b_n = subs(b_n, {sin(sym('pi'))*(2*n + 1), sin(sym('pi'))*(2*n - 1)}),{0, 0})
```

$$b_n(n) = 0$$

```
1 Z_n(n) = sqrt(R^2+(n*omega*L)^2)
```

$$Z_n(n) = \sqrt{L^2 n^2 \omega^2 + R^2}$$

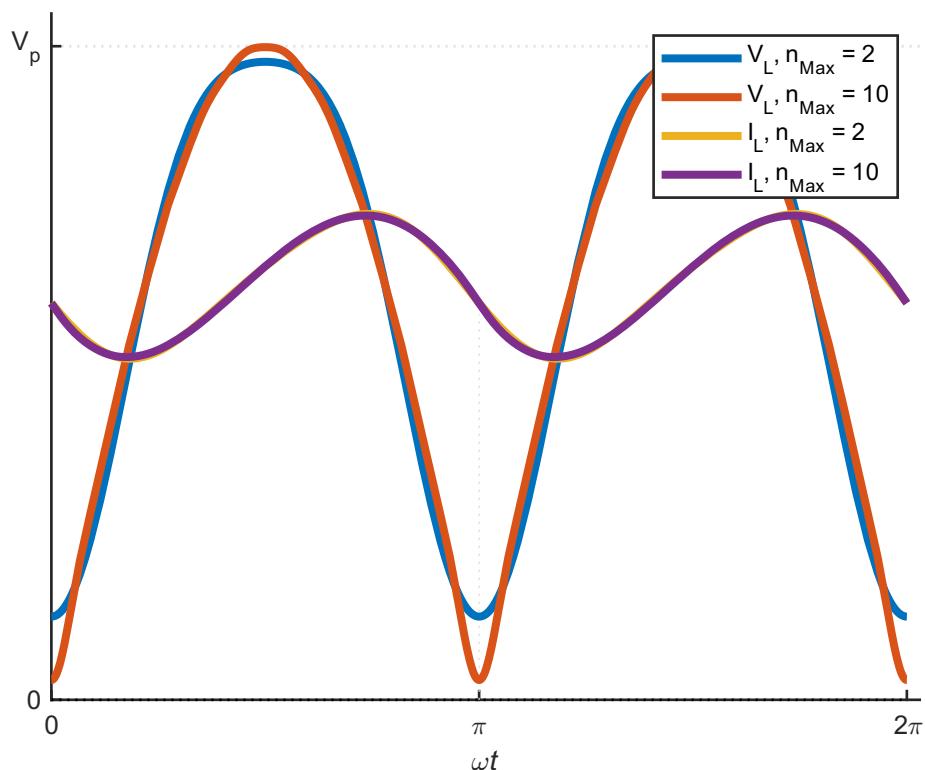
```
1 phi_n(n) = atan2(n*omega*L,R)
```

$$\phi_n(n) = \text{atan2}(1 L n \omega, R)$$

A Fig. 2.12 mostra o gráfico da Série de Fourier obtida para a tensão e para a corrente através da carga, sendo que foi variada a quantidade de termos utilizados para o desenvolvimento da série. Foram utilizados dois termos para gerar um par de formas de onda e dez termos para gerar o outro par. Observa-se que as formas de onda para a corrente são praticamente idênticas, independentemente da quantidade de termos utilizada para processar a série de Fourier.

```
1 Figura_VL_IL_2pulsosPM_para_carga_RL_Serie_Fourier;
```

Figura 2.12. Forma de onda da corrente através da carga.



2.3.4 Equações para o projeto

As equações das tensões V_{LMed} , V_{LRMS} , V_{DMax} e de I_{LMed} são as mesmas da seção 2.1.4 e repetidas aqui por conveniência.

```
1 syms V_p wt
2 V_LMed = 1/(sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,pi)
```

$$V_{LMed} = \frac{2V_p}{\pi} \quad (2.20)$$

```
1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 1/(sym('pi'))*int(V_p*sin(wt)/R,wt,0,pi)
```

$$I_{LMed} = \frac{2V_p}{R\pi} \quad (2.21)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/sym('pi'))*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,sym('pi')))
```

$$V_{LRMS} = \frac{V_p \sqrt{0.5000 \pi - 0.2500 \sin(2\pi)}}{\pi^{0.5000}}$$

Quando o argumento da função seno é um número inteiro e é múltiplo por π

$$\sin(n\pi) = 0$$

```
1 V_LRMS = subs(V_LRMS, {sin(sym('pi'))*2},{0})
```

$$V_{LRMS} = \frac{V_p \sqrt{0.5000 \pi}}{\pi^{0.5000}} \quad (2.22)$$

A corrente eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$I_{LRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (i_L(\omega t))^2 d(\omega t)}$$

```
1 %clearvars
2 syms V_p phi wt tau Z, assume([V_p, Z], 'positive')
3 i_L = -V_p*(sin(phi - wt)/Z + (2*exp((sym('pi'))/(omega*tau)))*sin(phi))/...
4 (Z*(exp(wt/(omega*tau)) - exp((sym('pi'))/(omega*tau)))*exp((wt/(omega*tau)))))...
5 I_LRMS = sqrt(1/(sym('pi'))*int((i_L)^2,wt,0,sym('pi')))
```

$$I_{LRMS} = \frac{\sqrt{\int_0^\pi V_p^2 \left(\frac{\sin(\phi - \omega t)}{Z} + \frac{2e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z \left(e^{\frac{\omega t}{\tau}} - e^{-\frac{\pi}{\omega\tau}} e^{\frac{\omega t}{\tau}} \right)} \right)^2 d\omega t}}{\pi^{0.5000}} \quad (2.23)$$

Como não foi possível obter um resultado algébrico, deve-se calcular I_{LRMS} numericamente.

A tensão máxima sobre o diodo corresponde ao dobro da tensão máxima da fonte de alimentação, devido aos dois enrolamentos secundários do transformador em série.

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{DMax} = V_p \quad (2.24)$$

A corrente máxima pode ser obtida derivando-se a equação da corrente e igualando a zero,

```
1 % Por exemplo:
2 % eq = diff(i_L,wt)==0
```

multiplica-se por Z/V_p para simplificar e substitui-se ωt por t_{Max}

```
1 % Por exemplo:
2 % eq = subs(eq*Z/V_p,wt, sym('t_Max'))
```

encontra-se t_{Max} numericamente e substitui-se em $i_L(\omega t)$. Um palpite inicial para a raiz é $T/4$.

```
1 % Por exemplo:
2 % t_Max = vpasolve(eq,sym('t_Max'),1/(4*f))
3 % I_LMax = i_L(t_Max)
```

Em termos práticos, o valor máximo que a corrente de carga poderá atingir é dado por

$$I_{DMax} = V_p/R$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{DMax} = \frac{V_p}{R} \quad (2.25)$$

2.3.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, utilizando as equações 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24 e 2.25.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 L = 50e-3;
4 f = 60;
5 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```

1 omega = w;
2
3 tau = L/R

```

$$\tau = 0.0050$$

```

1 X_L = w*L

```

$$X_L = 18.8496$$

```

1 Z = sqrt(R^2+(XL)^2)

```

$$Z = 21.3379$$

```

1 phi = atan2(XL,R)

```

$$\phi = 1.0830$$

```

1 i_L(wt) = -V_p*(sin(phi - wt)/Z + (2*exp((pi/(omega*tau)))*sin(phi))/...
2 (Z*(exp(wt/(omega*tau)) - exp((pi/(omega*tau)))*exp((wt/(omega*tau))))))

```

$$i_L(wt) = 31.7598 e^{-0.5305 wt} + 14.5810 \sin(wt - 1.0830)$$

```

1
2 V_LMed = (2*V_p)/pi

```

$$V_{LMed} = 198.0696$$

```

1 I_LMed = (2*V_p)/(R*pi)

```

$$I_{LMed} = 19.8070$$

```

1 V_LRMS = (sqrt(2)/2)*V_p

```

$$V_{LRMS} = 220.0000$$

```

1 I_LRMS = sqrt(1/(pi)*int((i_L)^2,wt,0,pi))

```

$$I_{LRMS} = 19.9528$$

```
1 V_DMax = 2*V_p
```

$$V_{DMax} = 622.2540$$

```
1 % Obtendo o ângulo em que a corrente de carga é máxima
2 syms wt_Max
3 eq = diff(subs(i_L(wt),wt,wt_Max))==0
```

$$eq = 14.5810 \cos(wt_{Max} - 1.0830) - 16.8491 e^{-0.5305 wt_{Max}} = 0$$

```
1 wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),2*pi/4)
```

$$wt_{Max} = 2.3071$$

```
1 I_LMax = i_L(wt_Max)
```

$$I_{LMax} = 23.0527$$

ou, ao menos, a corrente é menor que

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{DMax} = 31.1127$$

2.4 Carga RL com diodo de Roda Livre

2.4.1 Topologia

Esta topologia opera de maneira semelhante àquela apresentada na seção 2.3. O diodo de roda livre, D_{RL} , ajuda a proteger os dois outros diodos nos instantes da comutação da corrente entre os mesmos. Essa topologia está ilustrada na Fig. 2.13.

2.4.2 Etapas de operação

Durante o semiciclo positivo o diodo D_1 está polarizado diretamente, estando em condução, Fig. 2.14(a). Dessa forma a tensão da fonte da entrada é aplicada à carga. Com D_1 em condução é aplicada uma tensão negativa sobre D_2 que permanece bloqueado durante esta etapa. Durante o semiciclo negativo o diodo D_2 entra em condução, aplicando uma tensão positiva sobre a carga e negativa sobre o diodo D_1 , fazendo com que este bloquee, Fig. 2.14(b).

Figura 2.13. Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.

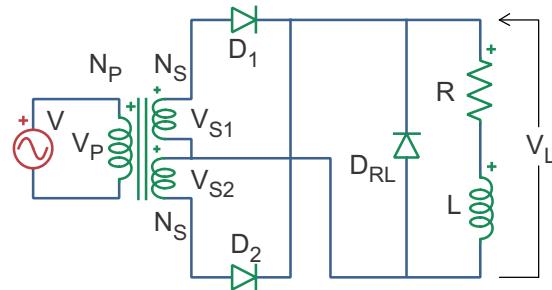
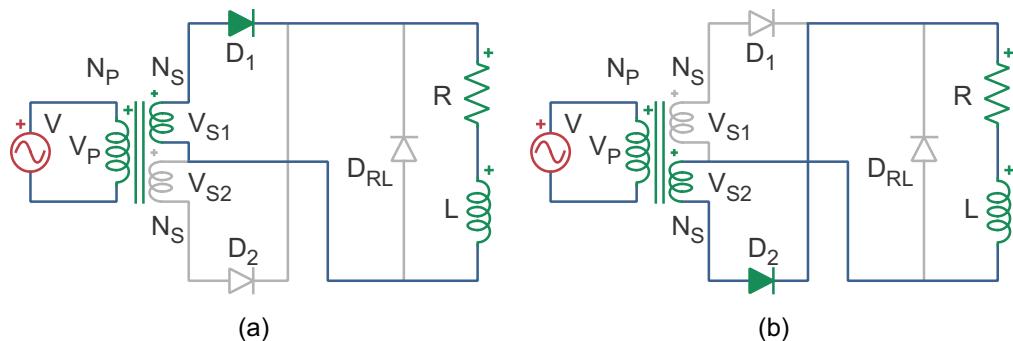


Figura 2.14. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



2.4.3 Formas de onda

As principais formas de onda são idênticas àquelas da seção 2.3.3 e são ilustradas na Fig. 2.10.

2.4.4 Equações para o projeto

As principais equações para o projeto são as mesmas daquelas apresentadas seção 2.3.4.

2.4.5 Exemplos numéricos

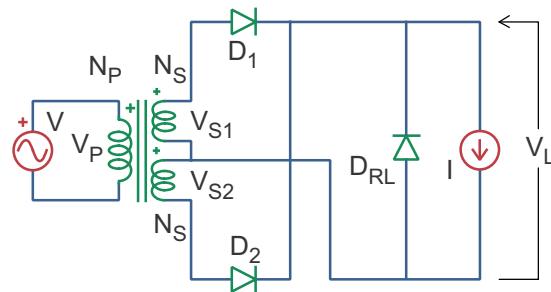
Os exemplos numéricos são idênticos àqueles da seção 2.3.5.

2.5 Carga I com Díodo de Roda-Livre

2.5.1 Topologia

A carga conectada à esta topologia é uma fonte de corrente ou pode ser uma carga RL com uma indutância muito alta. Devido à característica indutiva da carga, a corrente permanece praticamente constante e é importante que haja um diodo em paralelo com a mesma para proteger os diodos D_1 e D_2 nos instantes de suas comutações, Fig. 2.15.

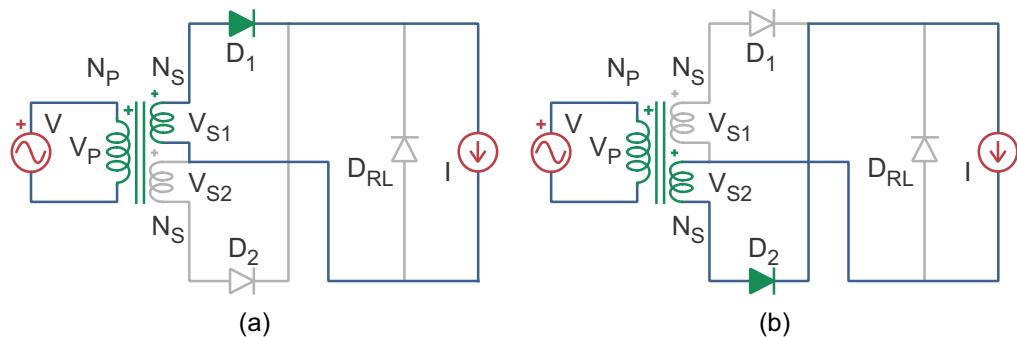
Figura 2.15. Retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga de fonte de corrente.



2.5.2 Etapas de operação

Durante o semiciclo positivo toda a corrente de carga circula através do diodo D_1 , pois este está polarizado diretamente, Fig. 2.16(a), enquanto D_2 está bloqueado. Durante o semiciclo negativo, toda a corrente de carga circula através do diodo D_2 e o diodo D_1 se encontra bloqueado, Fig. 2.16(b).

Figura 2.16. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo com carga de fonte de corrente.



2.5.3 Formas de onda

As principais formas de ondas estão mostradas na Fig. 2.17. Observa-se que a corrente através da carga é contínua e igual a I e que a mesma circula através do diodo D_1 durante o semiciclo positivo e através do diodo D_2 durante o semiciclo negativo.

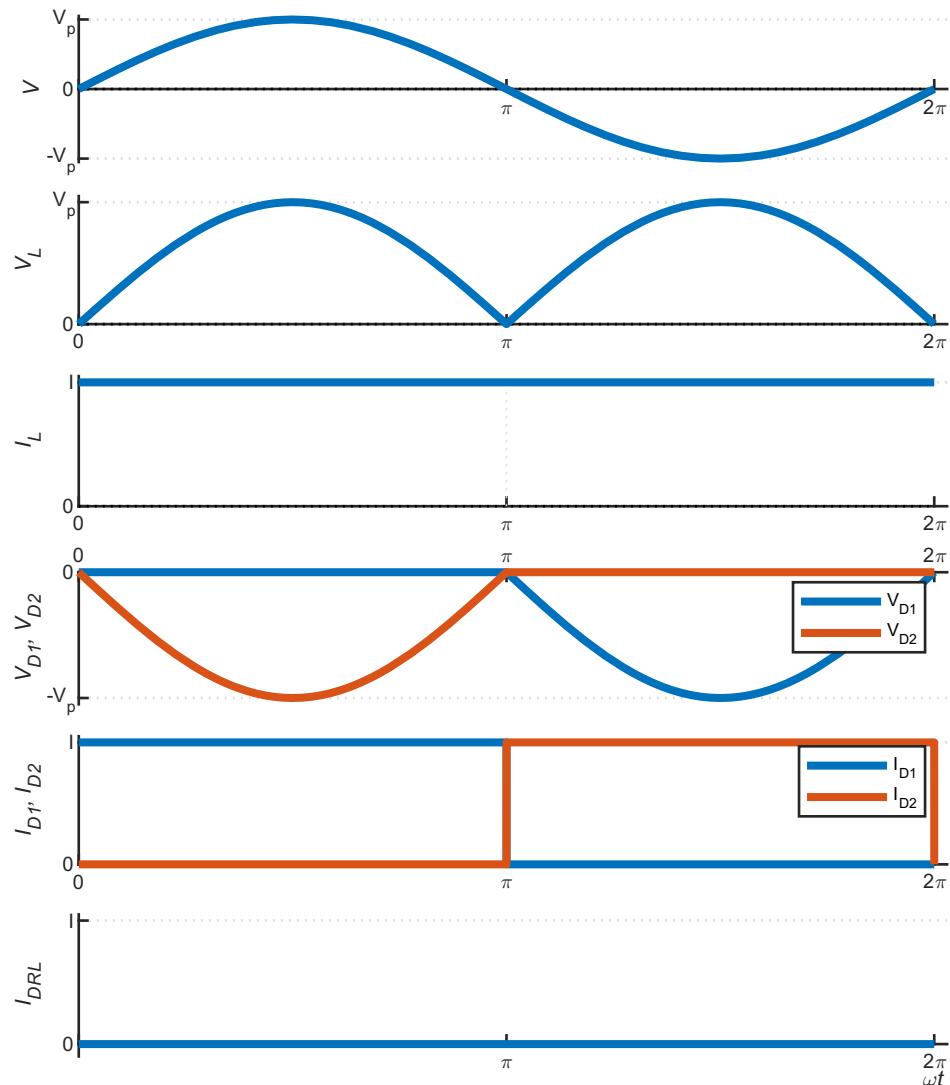
1 `Figura_WF_2pulsosPM_para_carga_I()`

2.5.4 Equações para o projeto

A tensão média sobre a carga é calculada através da equação

```
1 syms V_p wt I
2 V_LMed = 1/(sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,0,pi)
```

Figura 2.17. Principais formas de onda.



$$V_{L\,Med} = \frac{2V_p}{\pi} \quad (2.26)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

```
1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 1/(sym('pi'))*int(I,wt,0,sym('pi'))
```

$$I_{L\,Med} = I \quad (2.27)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(1/(pi)*int((V_p*sin(wt))^2,wt,0,pi))
```

$$V_{LRMS} = 0.7071 V_p \quad (2.28)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

```
1 syms V_p wt R, assume([I, sym('pi')], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(1/(sym('pi'))*int(I^2,wt,0,sym('pi')))
```

$$I_{LRMS} = I \quad (2.29)$$

A tensão máxima sobre os diodos corresponde ao dobro da tensão máxima da fonte de alimentação.

$$V_{DMax} = 2 V_{DRLMax} = 2 V_p$$

```
1 V_DMax = 2*V_p
```

$$V_{DMax} = 2 V_p \quad (2.30)$$

E a corrente máxima,

$$I_{DMax} = I_{DRLMax} = I$$

```
1 I_DMax = I
```

$$I_{DMax} = I \quad (2.31)$$

2.5.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 2.26, 2.27, 2.28, 2.29, 2.30 e 2.31.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 I = 10;
3
4 V_LMed = 2*V_p/pi
```

$$V_{LMed} = 198.0696$$

```
1 I_LMed = I
```

$$I_{LMed} = 10$$

```
1 V_LRMS = (sqrt(2)/2)*V_p
```

$$V_{LRMS} = 220.0000$$

```
1 I_LRMS = I
```

$$I_{LRMS} = 10$$

```
1 V_DMax = 2*V_p
```

$$V_{DMax} = 622.2540$$

```
1 I_DMax = I
```

$$I_{DMax} = 10$$

2.6 Conclusão

Esta topologia necessita de dois transformadores para a obtenção do ponto médio que funciona como terminal Terra para a carga. Sua desvantagem está na tensão sobre os diodos que corresponde ao dobro da tensão de cada secundário do transformador, de modo que os diodos utilizados devem suportar valores superiores ao valor da tensão sobre a carga. Além disso, há a necessidade do transformador, o que certamente encarece a topologia.

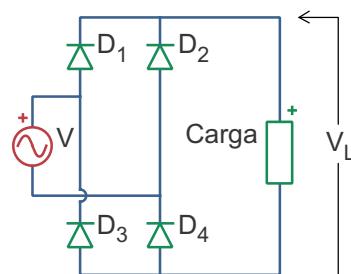
Como pontos positivos, tem-se o isolamento da carga e a possibilidade de escalamento do valor de tensão sobre a mesma, utilizando transformador redutor ou elevador.

Capítulo 3

Retificador Monofásico de Onda Completa em Ponte

A Fig. 3.1 ilustra o retificador monofásico de onda completa à diodo. Inicialmente será feita análise com carga R, puramente resistiva. Este retificador compartilha muitas características com a topologia do retificador monofásico de onda completa com ponto médio à diodo apresentada no capítulo anterior. De maneira geral, neste caso, para o semiciclo positivo o diodo D_1 conduzirá juntamente com o diodo D_4 e para o semiciclo negativo o diodo D_2 conduzirá juntamente com o diodo D_3 . Além disso, este conversor difere pelo fato de que a tensão reversa máxima sobre os diodos corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação. Dessa forma, devido à similaridade entre as topologias, este capítulo somente evidenciará as diferenças entre as estruturas derivadas.

Figura 3.1. Retificador monofásico de onda completa à diodo.

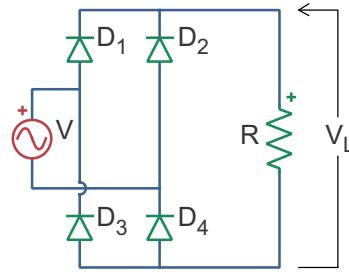


3.1 Carga R

3.1.1 Topologia

O retificador mostrado na Fig. 3.2 é formado por uma fonte de tensão, um diodo e pela carga R. A operação desta topologia é idêntica àquela apresentada em 2.1 exceto pelo que foi comentado anteriormente.

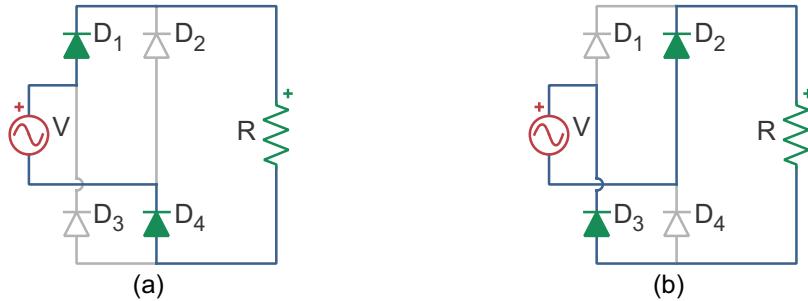
Figura 3.2. Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga R.



3.1.2 Etapas de operação

Para esta topologia o modo de operação é idêntico ao apresentado na seção 2.1.2. A Fig. 3.3(a) ilustra o circuito ativo para o semiciclo positivo da tensão de alimentação e a Fig. 3.3(b) para o semiciclo negativo.

Figura 3.3. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga R.



3.1.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 3.4, a seguir. Observa-se que ambos os semiciclos da tensão de entrada são retificados de modo que somente é aplicada tensão positiva à carga. A corrente através da carga é proporcional à sua tensão.

1 `Figura_WF_2pulsos_para_carga_R();`

3.1.4 Equações para o projeto

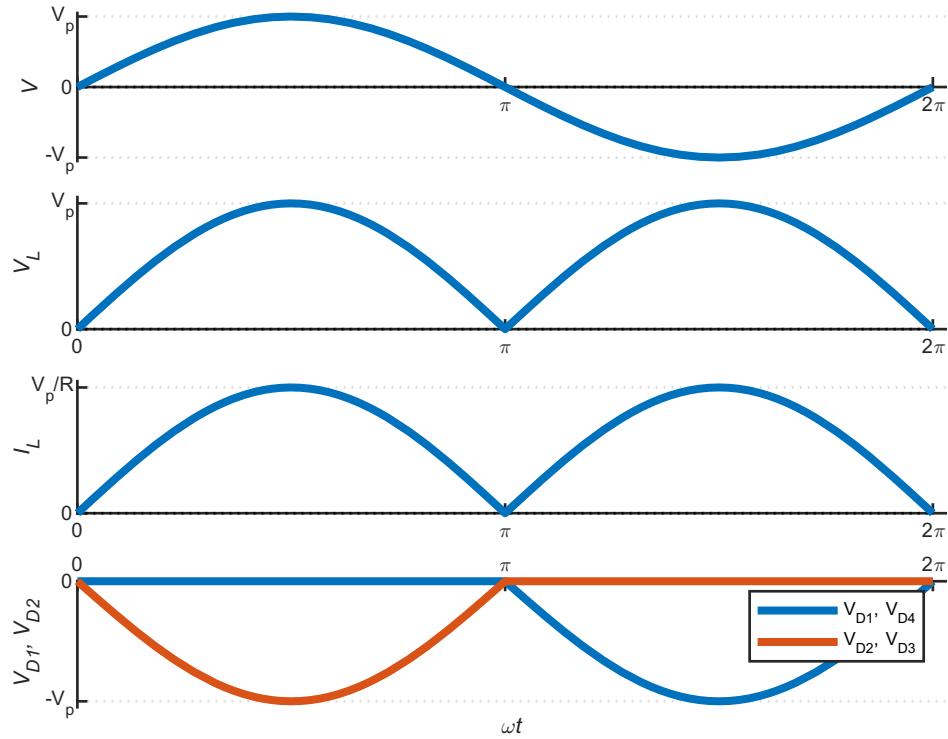
As equações para projeto são idênticas, exceto que a tensão máxima sobre os diodos corresponde à tensão da fonte de alimentação. Dessa forma,

$$V_{D\ Max} = V_p$$

1 `syms V_p`
2 `V_DMax = V_p`

$$V_{D\ Max} = V_p \quad (3.1)$$

Figura 3.4. Principais formas de onda.



3.1.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir. Serão utilizadas as equações 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 3.1 e 2.8.

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3
4 V_LMed = 2*V_p/pi

```

$$V_{L\text{Med}} = 198.0696$$

```

1 I_LMed = 2*V_p/(R*pi)

```

$$I_{L\text{Med}} = 19.8070$$

```

1 V_LRMS = sqrt(2)/2*V_p

```

$$V_{L\text{RMS}} = 220.0000$$

```

1 I_LRMS = (sqrt(2)/2)*V_p/R

```

$$I_{L\text{RMS}} = 22.0000$$

$$1 \quad V_{DMax} = V_p$$

$$V_{DMax} = 311.1270$$

$$1 \quad I_{DMax} = V_p/R$$

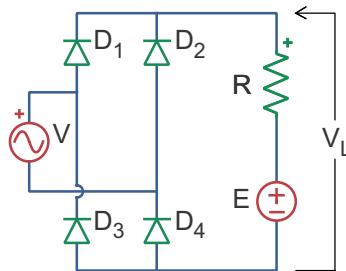
$$I_{DMax} = 31.1127$$

3.2 Carga RE

3.2.1 Topologia

Esta topologia é semelhante à topologia analisada na seção 3.1 exceto que a carga é formada por uma resistência em série com uma fonte de tensão de valor E , conforme ilustrado na Fig. 3.5.

Figura 3.5. Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.



3.2.2 Etapas de operação

Para esta topologia, os diodos D_1 e D_4 conduzem durante o semiciclo positivo enquanto a tensão da fonte de entrada $V(\omega t)$, for maior que a tensão da fonte E (Fig. 3.6(a)). Por sua vez, os diodo D_2 e D_3 conduzem durante o semiciclo negativo quando a tensão negativa da fonte de entrada $-V(\omega t)$, for maior que a tensão da fonte E (Fig. 3.6(b)). Caso contrário, os diodos se encontram bloqueados e assim não há corrente através da carga, de forma que não há nenhuma queda de tensão sobre a resistência R (Fig. 3.6(c)).

Os circuitos equivalentes são mostrados na (Fig. 3.6).

Figura 3.6. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.

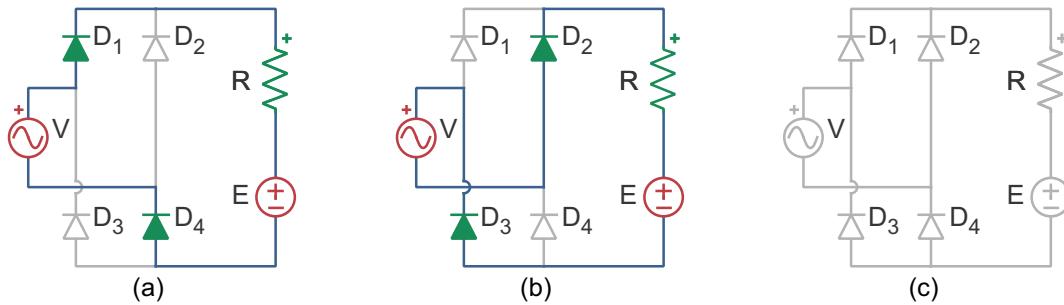
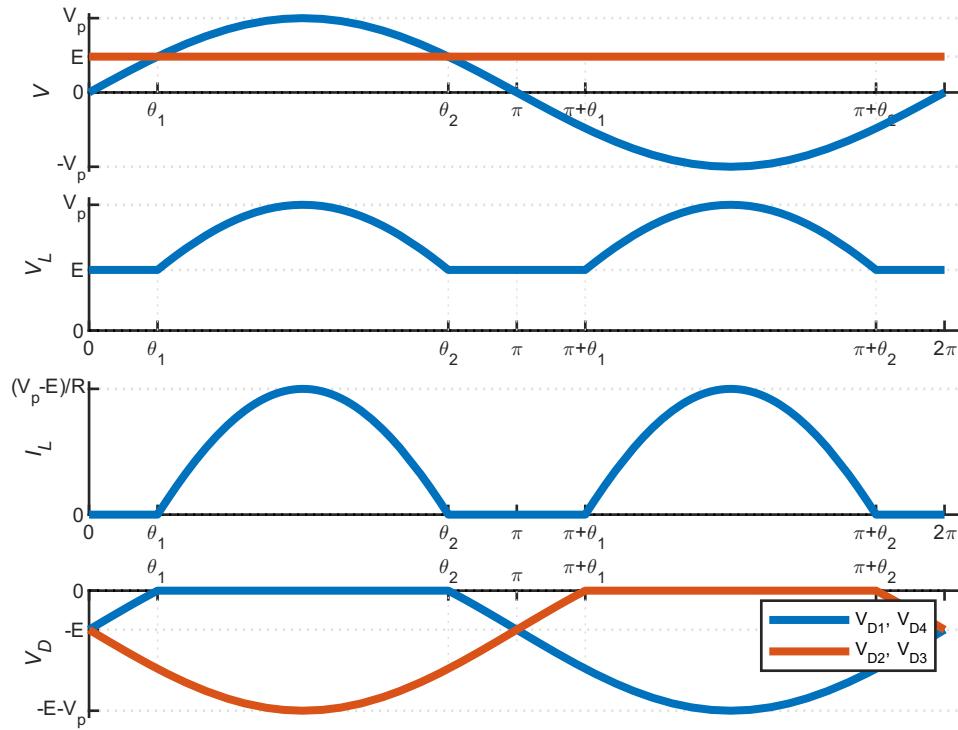


Figura 3.7. Principais formas de onda.



3.2.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 3.7. Observa-se que a interseção entre as formas de onda $V(\omega t)$ e E ocorre para os ângulos θ_1 e θ_2 e se repete para $\pi + \theta_1$ e $\pi + \theta_2$. Durante estes períodos, a tensão na carga é sempre superior à tensão da fonte E . A corrente através da carga é proporcional à tensão sobre a resistência R .

1 Figura_WF_2pulsos_para_carga_RE()

3.2.4 Equações para o projeto

As equações para o projeto deste retificador são idênticas àquelas da seção 2.2.4, exceto para a tensão reversa máxima sobre os diodos, mostrada à seguir e pormenorizada logo após.

$$V_{D\ Max} = V_p + E$$

Tensão sobre os diodos

- Entre θ_1 e θ_2 : o diodo D_1 está conduzindo, logo sua tensão é nula;

$$V_{D1} = 0$$

- Entre $\pi + \theta_1$ e $\pi + \theta_2$ o diodo D_2 está conduzindo; a tensão sobre D_1 será igual à tensão fornecida pela fonte de alimentação;

$$V_{D1} = V_p \sin(\omega t)$$

- Nos intervalos $[0, \theta_1]$, $[\theta_2, \pi + \theta_1]$ e $[\pi + \theta_2, 2\pi]$ nenhum diodo está em condução. Então

$$V_{D1} = V_p \sin(\omega t) - E$$

O mesmo raciocínio é válido para a tensão sobre o diodo D_2 .

Dessa forma,

```
1 syms E V_p
2 V_DMax = V_p + E
```

$$V_{D\ Max} = E + V_p \quad (3.2)$$

3.2.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir por meio das equações 2.11, 2.12, 2.15, 2.16, 3.2 e 2.18.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 f = 60;
4 E = 150;
5 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 theta_1 = asin(E/V_p)
```

$$\theta_1 = 0.5031$$

```
1 theta_2 = pi - asin(E/V_p)
```

$$\theta_2 = 2.6385$$

```
1 V_LMed = (E*(pi + theta_1 - theta_2) + V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)))/pi
```

$$V_{L\text{Med}} = 221.5697$$

```
1 I_LMed = (V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)) + E*(theta_1 - theta_2))/(R*pi)
```

$$I_{L\text{Med}} = 7.1570$$

```
1 V_LRMS = V_LRMS = sqrt(E^2*(pi + theta_1 - theta_2) - ...  
2 0.2500*V_p^2*(2*theta_1 - 2*theta_2 - sin(2*theta_1) + sin(2*theta_2))/pi^0.5
```

$$V_{L\text{RMS}} = 230.4775$$

```
1 sigma1 = 0.250*V_p^2*sin(2*theta_1);  
2 sigma2 = -0.250*V_p^2*sin(2*theta_2);  
3 sigma3 = -E^sym(2)*theta_1;  
4 sigma4 = E^sym(2)*theta_2;  
5 sigma5 = -0.5*V_p^2*theta_1;  
6 sigma6 = 0.5*V_p^2*theta_2;  
7 sigma7 = -2*E*V_p*cos(theta_1);  
8 sigma8 = 2*E*V_p*cos(theta_2);  
9 V_RRMS = sqrt(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + sigma6 + sigma7 + ...  
10 sigma8)/pi^0.5
```

$$V_{R\text{RMS}} = 95.6503$$

```
1 I_LRMS = V_RRMS/R
```

$$I_{L\text{RMS}} = 9.5650$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\text{Max}} = 311.1270$$

```
1 I_DMax = (V_p - E)/R
```

$$I_{D\text{Max}} = 16.1127$$

3.3 Carga Indutiva RL

3.3.1 Topologia

Este retificador é composto por uma fonte de tensão, quatro diodos e pela carga. A carga é indutiva, formada por um resistor e por um indutor conectados em série, conforme a Fig. 3.8.

Figura 3.8. Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva.

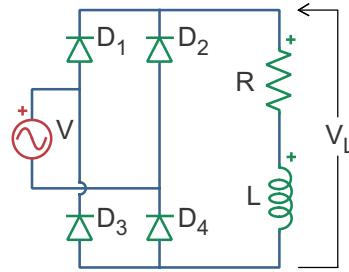
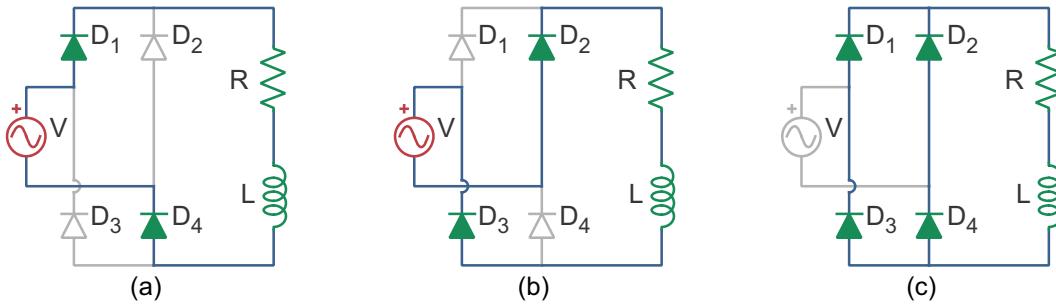


Figura 3.9. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva.



3.3.2 Etapas de operação

Esta topologia opera semelhantemente àquela apresentada na seção 2.3.2. Os modos de operação são mostrados na Fig. 3.9, a seguir. O circuito ativo para o semiciclo positivo pode ser observado na Fig. 3.9(a), enquanto que para o semiciclo negativo, na Fig. 3.9(b).

3.3.3 Formas de onda

As principais formas de onda podem ser vistas na Fig. 3.10, a seguir. Observa-se que a corrente nunca se anula e, portanto, o retificador sempre operará no modo de condução contínua, MCC.

1 Figura_WF_2pulsos_para_carga_RL();

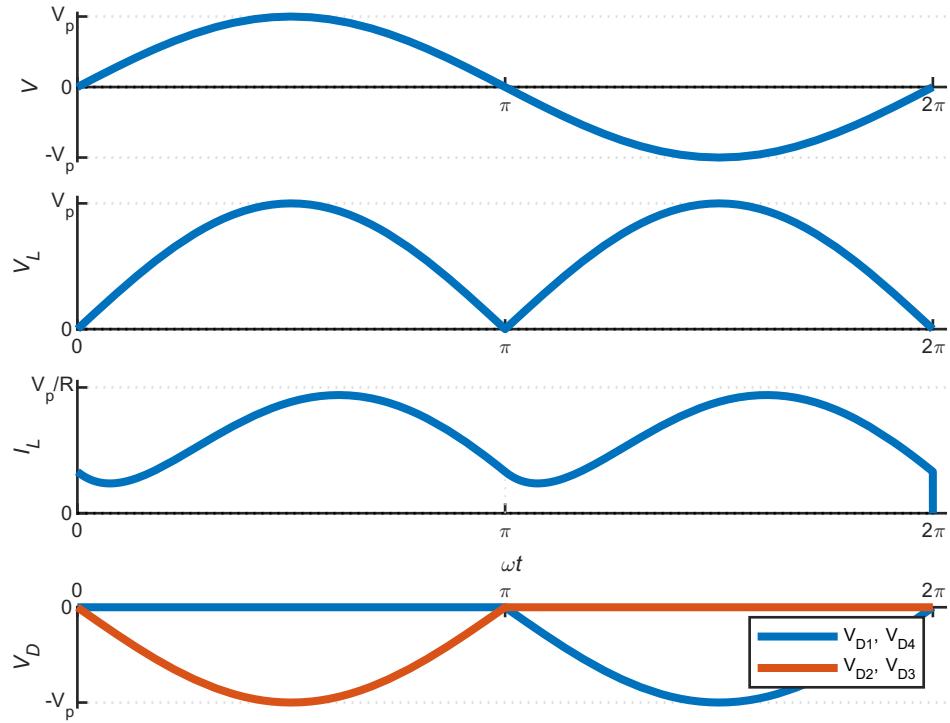
3.3.4 Equações para o projeto

As equações para o projeto são idênticas às da seção 2.3.4, exceto pela tensão máxima sobre os diodos, idêntica à seção 3.1.4.

3.3.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23, 3.1 e 2.25.

Figura 3.10. Principais formas de onda.



```

1 symref('FloatingPointOutput',1);
2 V_p = sqrt(2)*220;
3 R = 10;
4 L = 50e-3;
5 f = 60;
6
7 w = 2*pi*f

```

$$w = 376.9911$$

```

1 omega = w;
2 tau = L/R

```

$$\tau = 0.0050$$

```

1 XL = w*L

```

$$X_L = 18.8496$$

```

1 Z = sqrt(R^2+(XL)^2)

```

$$Z = 21.3379$$

```
1 phi = atan2(XL,R)
```

$$\phi = 1.0830$$

```
1 syms wt
2 i_L(wt) = -V_p*(sin(phi - wt)/Z + (2*exp((pi/(omega*tau)))*sin(phi))/...
3 (Z*(exp(wt/(omega*tau)) - exp((pi/(omega*tau)))*exp((wt/(omega*tau))))))
```

$$i_L(wt) = 31.7598 e^{-0.5305 wt} + 14.5810 \sin(wt - 1.0830)$$

```
1 V_LMed = (2*V_p)/pi
```

$$V_{L\,Med} = 198.0696$$

```
1 I_LMed = (2*V_p)/(R*pi)
```

$$I_{L\,Med} = 19.8070$$

```
1 V_LRMS = (sqrt(2)/2)*V_p
```

$$V_{L\,RMS} = 220.0000$$

```
1 I_LRMS = sqrt(1/(pi)*int((i_L)^2,wt,0,pi))
```

$$I_{L\,RMS} = 19.9528$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{D\,Max} = 311.1270$$

```
1 % Obtendo o ângulo onde a corrente de carga é máxima
2 syms wt_Max
3 eq = diff(subs(i_L(wt),wt,wt_Max))==0
```

$$eq = 14.5810 \cos(wt_{Max} - 1.0830) - 16.8491 e^{-0.5305 wt_{Max}} = 0$$

```
1 % figure
2 % fplot(i_L,[0,2*pi])
3 wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),2*pi/4)
```

$$wt_{Max} = 2.3071$$

```
1 I_LMax = i_L(wt_Max)
```

$$i_{L\,Max} = 23.0527$$

ou menor que

```
1 I_DMax = V_p/R
```

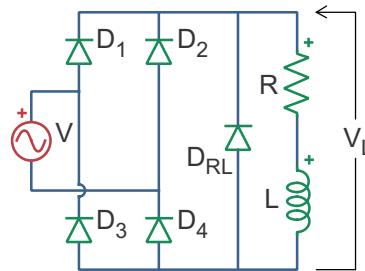
$$I_{D\,Max} = 31.1127$$

3.4 Carga RL com Diodo de Roda Livre

3.4.1 Topologia

Esta topologia opera de maneira semelhante àquela apresentada na seção 3.3.1. O diodo de roda livre, D_{RL} , ajuda a proteger os demais diodos durante os períodos de comutação da corrente entre os mesmos. Esta topologia está ilustrada na Fig. 3.11.

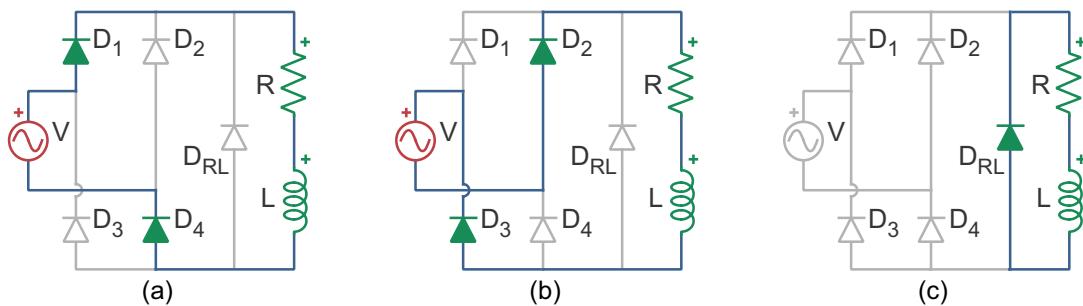
Figura 3.11. Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



3.4.2 Etapas de operação

Os diodos D_1 e D_4 conduzem durante o semiciclo positivo (Fig. 3.12(a)) e os diodos D_2 e D_3 , durante o negativo (Fig. 3.12(b)), conforme comentado anteriormente.

Figura 3.12. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



3.4.3 Formas de onda

As principais formas de onda são idênticas àquelas da seção 3.3.3 e são ilustradas na Fig. 3.10.

3.4.4 Equações para o projeto

As principais equações para o projeto são as mesmas daquelas apresentadas na seção 3.3.4.

3.4.5 Exemplos numéricos

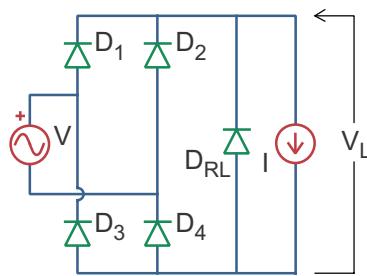
Os exemplos numéricos são idênticos àqueles da seção 3.3.5.

3.5 Carga I com Diodo de Roda-Livre

3.5.1 Topologia

Esta topologia é ilustrada na Fig. 3.13. A carga é formada por uma fonte de corrente ou pode ser uma carga com uma indutância muito alta. Devido à característica indutiva da carga a corrente permanece praticamente constante e é importante que haja um diodo em paralelo com a mesma para proteger os diodos D_1 , D_2 , D_3 e D_4 nos instantes de suas comutações, Fig. 3.13.

Figura 3.13. Retificador monofásico de onda completa à diodo com carga de fonte de corrente.



3.5.2 Etapas de operação

Durante o semiciclo positivo é suprida energia para a carga através dos diodos D_1 e D_4 , enquanto os demais diodos permanecem bloqueados, Fig. 3.14(a). Por sua vez, durante o semiciclo negativo a energia flui para a carga através dos diodos D_2 e D_3 , Fig. 3.14(b).

O modo de operação mostrado na Fig. 3.14(c) somente poderá ocorrer, muito brevemente, nas transições entre os dois modos de operação.

3.5.3 Formas de onda

As principais formas de ondas estão mostradas na Fig. 3.15. Observa-se que a corrente através da carga é contínua e igual a I e que a mesma circula através dos diodos D_1 e D_4 durante o semiciclo positivo e através dos diodos D_2 e D_3 durante o semiciclo negativo, mantendo sempre um valor constante.

Figura 3.14. Etapas de operação do retificador monofásico de onda completa à diodo com carga de fonte de corrente.

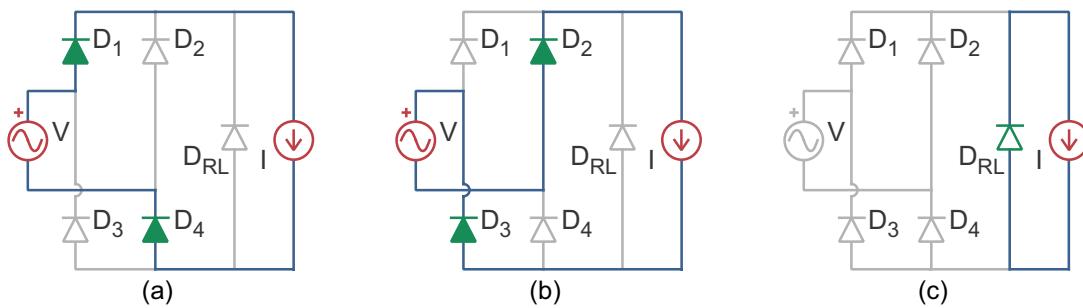
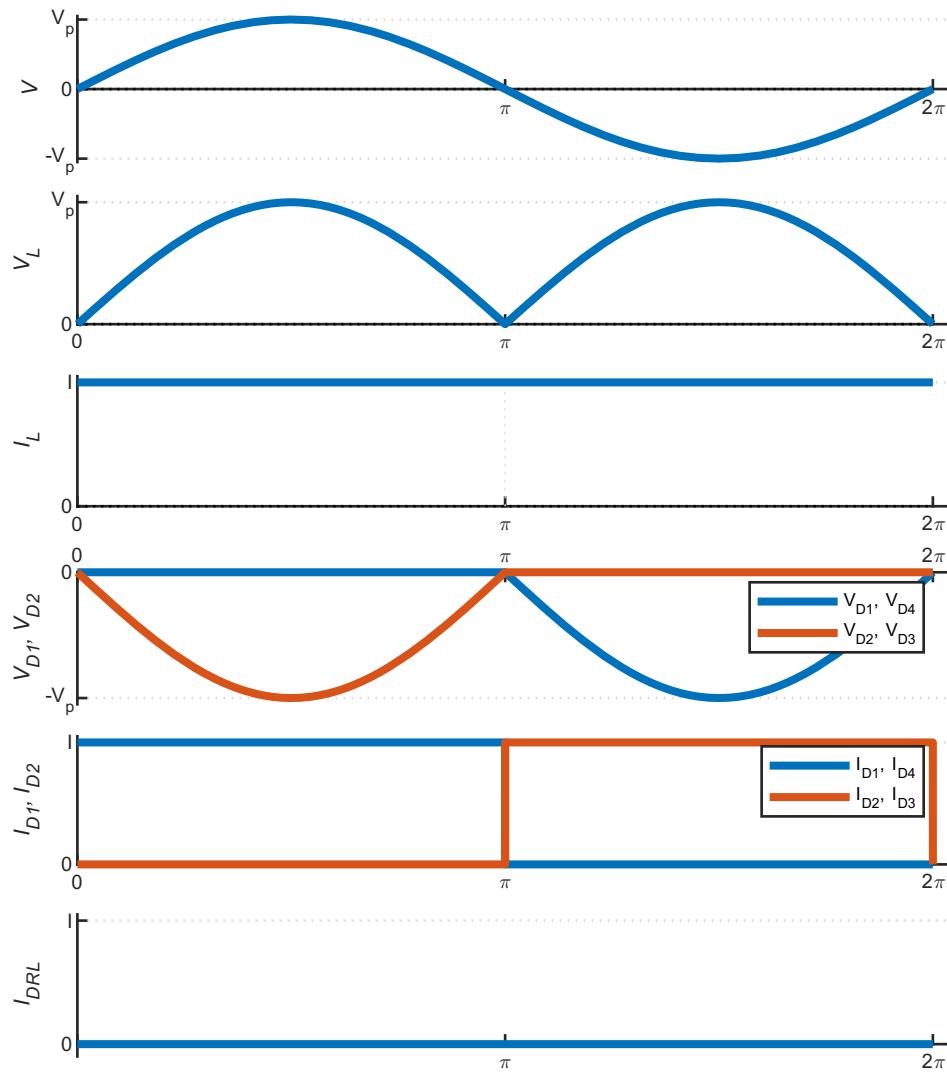


Figura 3.15. Principais formas de onda.



3.5.4 Equações para o projeto

Podem ser utilizadas as equações apresentadas em 2.5.4 para o projeto deste conversor, exceto para a tensão reversa sobre os diodos, que neste caso corresponde ao pico de tensão fornecido pela fonte de alimentação.

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{DMax} = V_p \quad (3.3)$$

3.5.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 2.26, 2.27, 2.28, 2.29, 3.3 e 2.31.

```
1 V_p = sqrt(2)*220;
2 I = 10;
3
4 V_LMed = 2*V_p/pi
```

$$V_{LMed} = 198.0696$$

```
1 I_LMed = I
```

$$I_{LMed} = 10$$

```
1 V_LRMS = (sqrt(2)/2)*V_p
```

$$V_{LRMS} = 220.0000$$

```
1 I_LRMS = I
```

$$I_{LRMS} = 10$$

```
1 V_DMax = V_p
```

$$V_{DMax} = 311.1270$$

```
1 I_DMax = I
```

$$I_{DMax} = 10$$

3.6 Conclusão

Esta topologia se assemelha muito àquela estudada no capítulo 2. Neste capítulo foram evidenciadas as diferenças quanto à sua operação e principalmente quanto aos limites de tensão sobre os diodos.

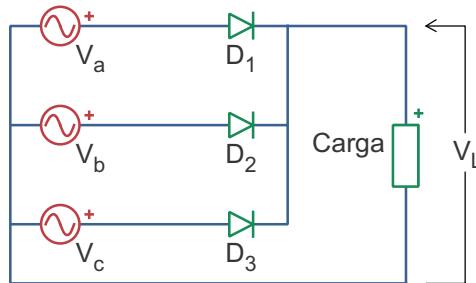
Este retificador não necessita de um transformador para seu funcionamento, no entanto são necessários quatro diodos e a carga não é isolada da fonte de alimentação. Caso seja desejável que haja isolamento ou escalamento de tensão, é possível adicionar um transformador em cascata com a fonte de entrada.

Capítulo 4

Retificador Trifásico de Meia Onda à Diodo

A Fig. 4.1 ilustra o retificador trifásico de meia onda à diodo. Inicialmente será feita análise com carga R, puramente resistiva. Em seguida serão estudadas outras configurações de carga. Este retificador é alimentado por três fontes senoidais trifásicas, defasadas entre si por 120° elétricos ou $2\pi/3$.

Figura 4.1. Retificador trifásico de meia onda à diodo.

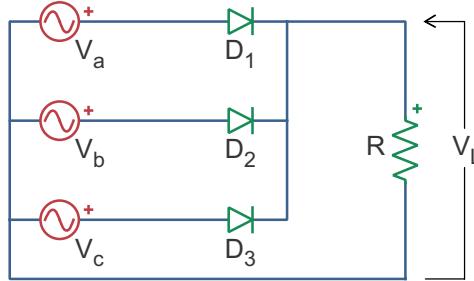


4.1 Carga R

4.1.1 Topologia

O retificador mostrado na Fig. 4.2 é formado por três fontes de tensão, três diodos e pela carga R.

Figura 4.2. Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga R.

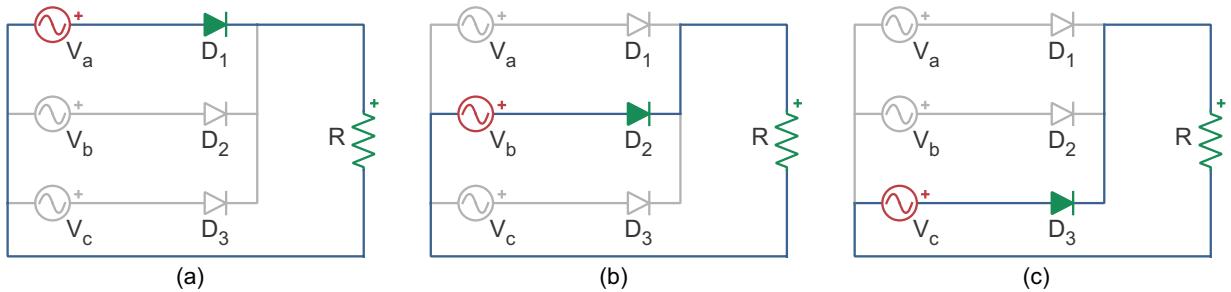


4.1.2 Etapas de operação

Para esta topologia o diodo D_1 conduz entre os ângulos $\pi/6$ e $5\pi/6$ (Fig. 4.3(a)), enquanto os diodos D_2 e D_3 se encontram bloqueados. Durante este período a tensão da fonte V_a é aplicada sobre a Carga R e a corrente flui através da mesma no sentido positivo. Após o ângulo $5\pi/6$ o diodo D_2 entra em condução e os diodos D_3 e D_1 permanecem bloqueados até atingir o ângulo $3\pi/2$, (Fig. 4.3(b)). A tensão através da carga continua positiva porque a fonte V_b é positiva durante este período e o diodo D_2 está em condução. Finalmente, após o ângulo $3\pi/2$ ser atingido, o diodo D_3 conduz enquanto os diodos D_1 e D_2 se encontram bloqueados (Fig. 4.3(c)). Como V_c é positiva, a corrente através da carga continua a fluir no sentido positivo.

Conforme visto, cada uma das fontes de alimentação contribui fornecendo potência para a carga durante um terço do período de operação, da mesma forma que cada um dos diodos conduz pelo mesmo período de tempo.

Figura 4.3. Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga R.



Conforme mencionado, a estrutura é alimentada por um sistema de fontes trifásicas no qual a defasagem entre as fases corresponde a 120° elétricos ou $2\pi/3$. Dessa forma, as tensões que alimentam o circuito V_a , V_b e V_c são definidas conforme abaixo.

$$\begin{cases} V_a = V_p \operatorname{sen}(\omega t) \\ V_b = V_p \operatorname{sen}(\omega t - 2\pi/3) \\ V_c = V_p \operatorname{sen}(\omega t - 4\pi/3) \end{cases}$$

Definem-se as tensões de fase

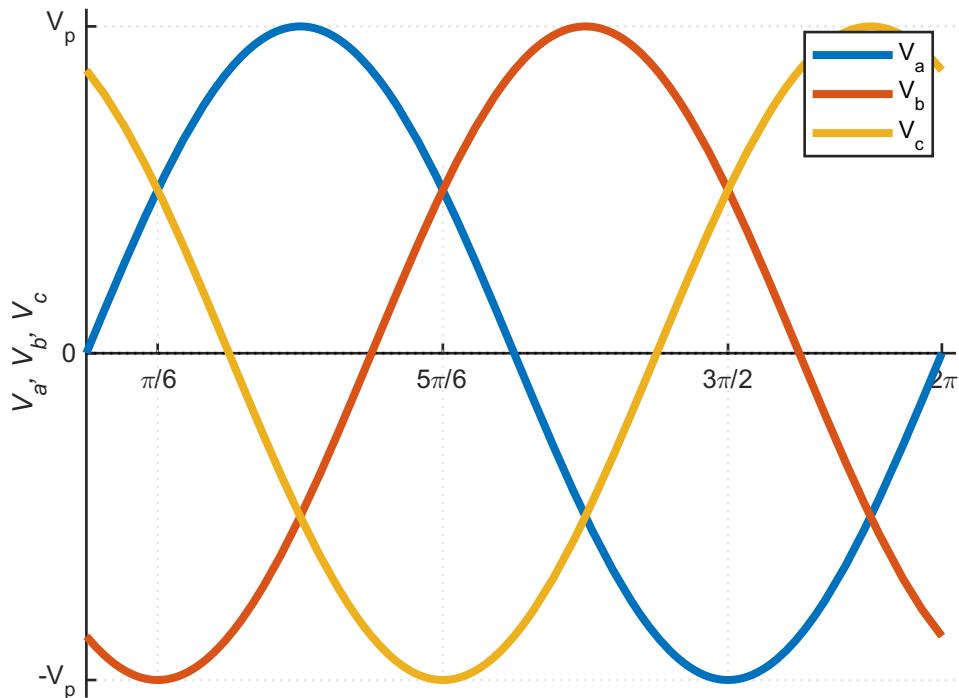
```

1 clearvars
2 syms V_p wt V_D1 V_D2 V_D3
3
4 % Definição das fontes
5 Va = V_p * sin(wt);
6 Vb = V_p * sin(wt-2*pi/3);
7 Vc = V_p * sin(wt-4*pi/3);

```

1 **Figura_WF_Fontes_Trifasicas()**

Figura 4.4. Formas de onda trifásicas.



4.1.2.1 Condução dos diodos

Para determinar se um ou mais diodos está no estado de condução, verificam-se as possibilidades de condução para todos os diodos da topologia. Vale ressaltar que um diodo entra no estado de condução quando a sua tensão ânodo-cátodo, V_{AK} , se torna positiva e bloqueia quando a sua corrente se anula.

Nesse sentido, para verificar as condições em que cada diodo poderá entrar em condução, primeiramente aplica-se a LTK às malhas formadas pelos diodos.

Portanto, aplica-se a lei das tensões de Kirchhoff na malha formada pelas Fontes V_a e V_b ,

1 $eq_{ab} = -Vb + V_{D2} - V_{D1} + Va == 0$

$$eq_{ab} = V_{D2} - V_{D1} - V_p \sin(wt - 2.0944) + V_p \sin(wt) = 0 \quad (4.1)$$

Que pode ser reescrita como:

```

1 % isolando as tensões dos diodos
2 eq_ab = isolate(eq_ab,-V_D2 + V_D1);
3 % simplificando somente o lado direito da igualdade
4 eq_ab = lhs(eq_ab) == simplify(rhs(eq_ab))

```

$$eq_{ab} = V_{D1} - V_{D2} = 1.7321 V_p \cos(\omega t - 1.0472) \quad (4.2)$$

Por sua vez, para a malha formada pelas Fontes V_b e V_c ,

```

1 eq_bc = -Vb + V_D2 - V_D3 + Vc == 0

```

$$eq_{bc} = V_{D2} - V_{D3} - V_p \sin(\omega t - 2.0944) + V_p \sin(\omega t - 4.1888) = 0 \quad (4.3)$$

Reescrevendo:

```

1 eq_bc = isolate(eq_bc,-V_D2 + V_D3);
2 eq_bc = lhs(eq_bc) == simplify(rhs(eq_bc))

```

$$eq_{bc} = V_{D3} - V_{D2} = 1.7321 V_p \cos(\omega t) \quad (4.4)$$

E para a malha formada pelas Fontes V_a e V_c ,

```

1 eq_ca = -Vc + V_D3 - V_D1 + Va == 0

```

$$eq_{ca} = V_{D3} - V_{D1} - V_p \sin(\omega t - 4.1888) + V_p \sin(\omega t) = 0 \quad (4.5)$$

Que pode ser reescrita, de maneira semelhante ao que foi feito anteriormente,

```

1 eq_ca = isolate(eq_ca,-V_D3 + V_D1);
2 eq_ca = lhs(eq_ca) == simplify(rhs(eq_ca))

```

$$eq_{ca} = V_{D1} - V_{D3} = -1.7321 V_p \cos(\omega t + 1.0472) \quad (4.6)$$

Analizando-se as três equações de malha resultantes (4.2, 4.4 e 4.6), percebe-se que dois diodos não podem conduzir simultaneamente porque nesse caso a condução de um diodo implicaria que seria aplicada tensão negativa sobre o outro diodo, bloqueando-o.

Tendo isso em vista, basta determinar os intervalos em que cada um dos diodos não poderá conduzir.

Dessa forma, o diodo D_1 não conduzirá se os diodos D_2 ou D_3 estiverem em condução, pois estes diodos ao conduzirem aplicariam uma tensão negativa sobre D_1 , bloqueando-o. Assim, avaliam-se as equações 4.2 e 4.6, que incluem a tensão V_{D1} , considerando o caso em que D_2 e D_3 conduzem, o que implica em que as tensões V_{D2} e V_{D3} sejam nulas.

A. Condições de condução para o diodo D_1

Considera-se que o diodo D_2 está em condução. Dessa forma, sua tensão será nula, resolvendo 4.2 para V_{D1}

$$1 \quad V_{D1ab} = \text{subs}(\text{eq_ab}, V_{D2}, 0) \geq 0$$

$$V_{D1ab} = 0 \leq (V_{D1} = 1.7321 V_p \cos(\omega t - 1.0472)) \quad (4.7)$$

Agora, considera-se que o diodo D_3 está em condução. Portanto, a sua tensão será nula; resolvendo 4.6 para V_{D1}

$$1 \quad V_{D1ca} = 0 \leq \text{subs}(\text{eq_ca}, V_{D3}, 0)$$

$$V_{D1ca} = 0 \leq (V_{D1} = -1.7321 V_p \cos(\omega t + 1.0472)) \quad (4.8)$$

Dessa forma, o diodo D_1 somente poderá conduzir quando as duas condições anteriores (4.7 e 4.8) forem satisfeitas, isto é, se a sua tensão não for negativa. Caso contrário, D_1 estará bloqueado devido à condução do diodo D_2 ou de D_3 .

As equações 4.7 e 4.8 são ilustradas na Fig. 4.5 a seguir, de onde é possível concluir que para D_1 ambas as condições são satisfeitas no intervalo $\pi/6 \leq \omega t \leq 5\pi/6$, que é o período em que a tensão de D_1 seria positiva caso qualquer um dos outros diodos conduzisse, fazendo com que D_1 entrasse em condução e bloqueando qualquer outro diodo que eventualmente estivesse conduzindo.

$$1 \quad \text{Figura_WF_tensoes_sobre_os_Diodos}()$$

B. Condições de condução para o diodo D_2

De maneira semelhante ao que foi avaliado para o diodo D_1 , pode-se determinar as condições para a condução dos diodos D_2 e D_3 . Resumidamente:

Considera-se que o diodo D_3 está em condução. Dessa forma, sua tensão será nula, resolvendo 4.4 para V_{D2}

$$1 \quad V_{D2bc} = \text{subs}(\text{eq_bc}, V_{D3}, 0) \geq 0$$

$$V_{D2bc} = 0 \leq (-V_{D2} = 1.7321 V_p \cos(\omega t)) \quad (4.9)$$

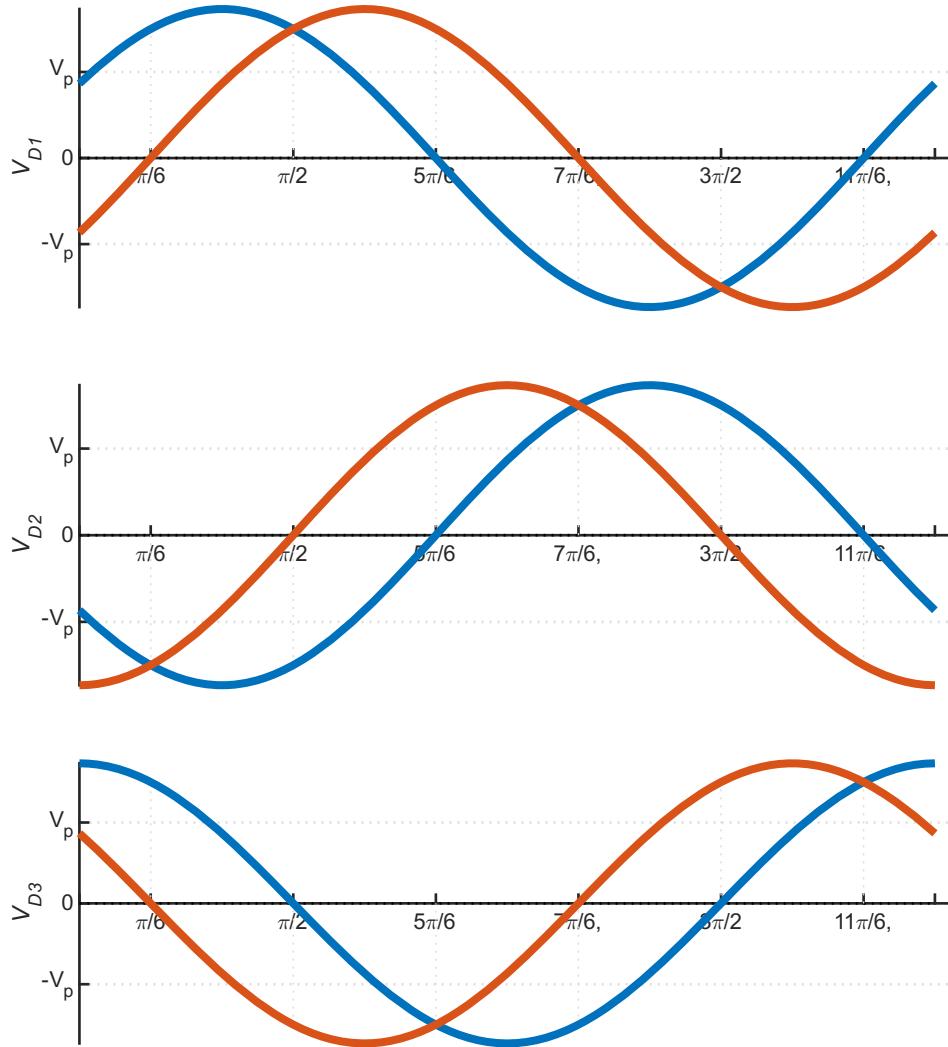
Agora, considera-se que o diodo D_1 está em condução. Portanto, a sua tensão será nula. Resolvendo 4.2 para V_{D2}

$$1 \quad V_{D2ab} = 0 \leq \text{subs}(\text{eq_ab}, V_{D1}, 0)$$

$$V_{D2ab} = 0 \leq (-V_{D2} = 1.7321 V_p \cos(\omega t - 1.0472)) \quad (4.10)$$

Observando-se a Fig. 4.5 conclui-se que o diodo D_2 pode conduzir entre os ângulos $5\pi/6$ e $3\pi/2$.

Figura 4.5. Tensões sobre os diodos.



C. Condições de condução para o diodo D_3

Considera-se que o diodo D_2 está em condução. Dessa forma, sua tensão será nula, resolvendo 4.4 para V_{D3}

```
1 V_D3bc = subs(eq_bc,V_D2,0)>=0
```

$$V_{D3bc} = 0 \leq (V_{D3} = 1.7321 V_p \cos(\omega t)) \quad (4.11)$$

Agora, considera-se que o diodo D_1 está em condução. Portanto, a sua tensão será nula, resolvendo 4.6 para V_{D3}

```
1 V_D3ca = 0 <= subs(eq_ca,V_D1,0)
```

$$V_{D3ca} = 0 \leq (-V_{D3} = -1.7321 V_p \cos(\omega t + 1.0472)) \quad (4.12)$$

Novamente, de acordo com a Fig. 4.5 observa-se que o diodo D_3 poderá conduzir do ângulo $3\pi/2$ até $13\pi/6$, (ou $\pi/6$ quando se considera o primeiro quadrante).

Além disso, os instantes logo após as intersecções entre as formas de ondas devem ser averiguados para determinar qual diodo conduzirá durante o período até a próxima intersecção.

4.1.2.2 Determinação dos instantes de comutação

Para a determinação dos instantes de comutação pode-se considerar a Fig. 4.3 que ilustra as formas de onda das tensões trifásicas, verificando-se inicialmente a interseção das formas de onda geradas pelas fontes V_c e V_a . Para tanto, comparam-se as duas equações e resolve-se para ωt .

```
1 eq = Vc == Va
```

$$eq = V_p \sin(\omega t - 4.1888) = V_p \sin(\omega t)$$

```
1 theta_1 = solve(eq,wt)
```

$$\theta_1 = 0.5236 \quad (4.13)$$

Então verifica-se a interseção entre V_a e V_b

```
1 eq = Va == Vb
```

$$eq = V_p \sin(\omega t) = V_p \sin(\omega t - 2.0944)$$

```
1 theta_2 = solve(eq,wt)
```

$$\theta_2 = 2.6180 \quad (4.14)$$

E, por último, verifica-se a interseção entre V_b e V_c

```
1 eq = Vb == Vc
```

$$eq = V_p \sin(\omega t - 2.0944) = V_p \sin(\omega t - 4.1888)$$

```
1 theta_3 = solve(eq,wt)
```

$$\theta_3 = 1.5708 \quad (4.15)$$

Como a primeira interseção ocorre quando ambas as fontes são negativas, adiciona-se π à resposta anterior para se obter a interseção positiva.

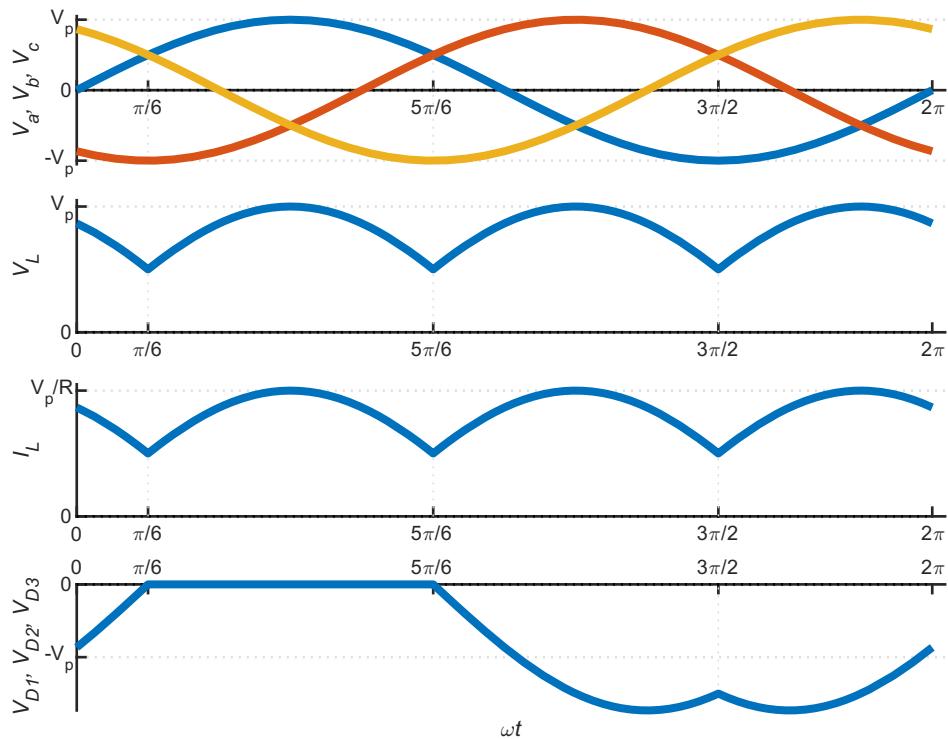
Observando-se os resultados anteriores, conclui-se que, o diodo D_1 conduzirá de $\pi/6$ até $5\pi/6$. O diodo D_2 poderá conduzir entre os ângulos de $5\pi/6$ até $3\pi/2$ e o diodo D_3 , de $3\pi/2$ até $13\pi/6$ (ou $\pi/6$), considerando-se o primeiro ciclo de operação).

4.1.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 4.6, a seguir.

1 Figura_WF_3pulsosM0_para_carga_R();

Figura 4.6. Principais formas de onda.



Observa-se que a tensão sobre a carga, bem como a corrente são sempre positivas. A frequência da tensão da carga é três vezes maior que a frequência das fontes de alimentação. A tensão reversa máxima que os diodos devem suportar é superior às tensões das fontes presentes na topologia, porque estas apresentam conexões do tipo série durante as etapas em que são aplicadas tensões reversas sobre os diodos.

4.1.4 Equações para o projeto

A tensão média sobre a carga é calculada através de

$$V_{L\,Med} = \frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} V_p \operatorname{sen}(\omega t) d(\omega t) \quad (4.16)$$

pois a forma de onda de tensão se repete três vezes durante um período de operação, iniciando em $\pi/6$ e terminando em $5\pi/6$.

```

1 syms V_p wt
2 sympref('FloatingPointOutput',0);
3 V_LMed = 3/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,pi/6,5*pi/6)

```

$$V_{LMed} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{2\pi} \quad (4.17)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```

1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 3/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt)/R,wt,pi/6,5*pi/6)

```

$$I_{LMed} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{2R\pi} \quad (4.18)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através de

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (4.19)$$

```

1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 sympref('FloatingPointOutput',1);
3 V_LRMS = sqrt(3/(2*pi)*int((V_p*sin(wt))^2,wt,pi/6,5*pi/6))

```

$$V_{LRMS} = 0.8407 V_p$$

que corresponde a

```
1 V_LRMS = V_p*sqrt(1/2+3*sqrt(3)/(8*pi))
```

$$V_{LRMS} = 0.8407 V_p \quad (4.20)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

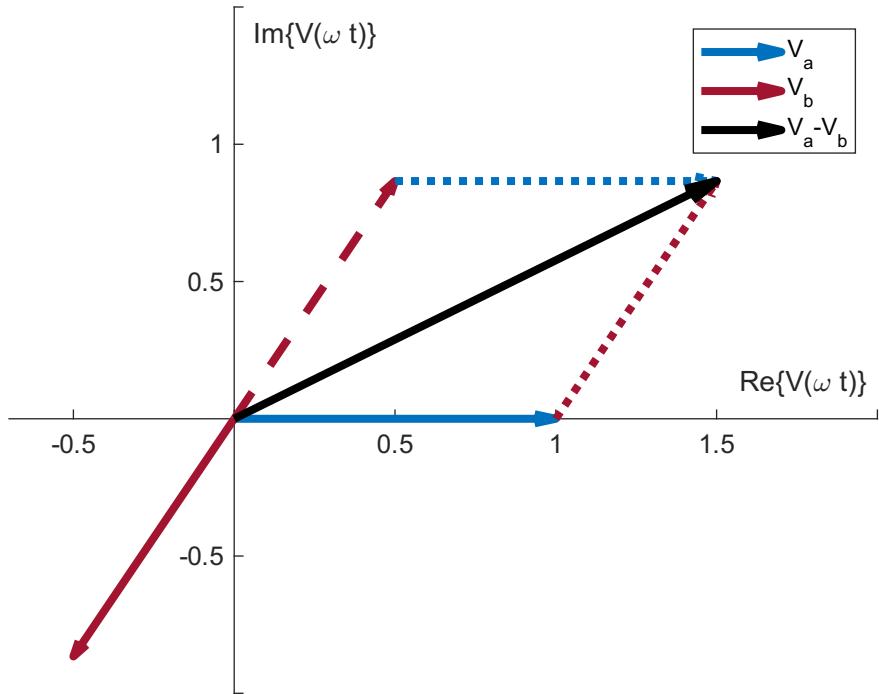
```

1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(3/(2*pi)*int((V_p*sin(wt)/R)^2,wt,pi/6,5*pi/6))

```

$$I_{LRMS} = \frac{0.8407 V_p}{R} \quad (4.21)$$

Figura 4.7. Fasores de tensão sobre os diodos.



A tensão máxima sobre cada diodo corresponde à soma fasorial de duas das fontes de alimentação, pois estas se encontram conectadas em série quando é aplicada tensão reversa sobre cada diodo.

```
1 Figura_WF_3pulsos_Fasores_VDi();
```

Os fasores para as tensões V_a e V_b podem ser definidos conforme abaixo,

```
1 Va = V_p*exp(j*(0));
2 Vb = V_p*exp(j*(-2*pi/3));
```

Aplicando a LTK ao laço formado pelas fontes V_a , V_b e pelos diodos D_1 e D_2 ,

```
1 syms V_D1 V_D2
2 eq = Va - Vb + V_D1 + V_D2 == 0
```

$$eq = V_{D1} + V_{D2} + V_p (1.5000 + 0.8660 i) = 0$$

Supondo que o diodo D_2 esteja em condução, a tensão sobre o mesmo será nula.

```
1 eq = subs(eq, V_D2, 0)
```

$$eq = V_{D1} + V_p (1.5000 + 0.8660 i) = 0$$

Assim, a tensão sobre D_1 é

```
1 V_D1 = solve(eq,V_D1)
```

$$V_{D1} = V_p (-1.5000 - 0.8660i)$$

E seu módulo

```
1 V_D1ABS = abs(V_D1)
```

$$V_{D1\,Abs} = 1.7321 V_p$$

Dessa forma,

$$V_{D\,Max} = \sqrt{3} V_p$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{D\,Max} = 1.7321 V_p \quad (4.22)$$

E a corrente máxima,

$$I_{D\,Max} = V_p/R$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{D\,Max} = \frac{V_p}{R} \quad (4.23)$$

4.1.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir. Serão utilizadas as equações 4.17, 4.18, 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23.

```
1 VS_RMS = 220;
2 V_p = sqrt(2)*220;
3 R = 10;
4
5 V_LMed = 3*sqrt(3)*V_p/(2*pi)
```

$$V_{L\,Med} = 257.2999$$

```
1 I_LMed = 3*sqrt(3)*V_p/(2*pi*R)
```

$$I_{L\text{Med}} = 25.7300$$

```
1 V_LRMS = sqrt(1/2+3*sqrt(3)/(8*pi))*V_p
```

$$V_{LRMS} = 261.5592$$

```
1 I_LRMS = sqrt(1/2+3*sqrt(3)/(8*pi))*V_p/R
```

$$I_{LRMS} = 26.1559$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{DMax} = 538.8877$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{DMax} = 31.1127$$

4.2 Carga RE

4.2.1 Topologia

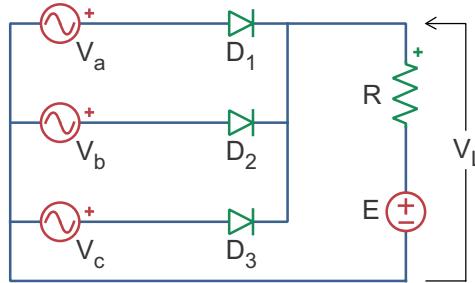
Esta topologia é semelhante à topologia analisada na seção 4.1 exceto que a carga é formada por uma resistência em série com uma fonte de tensão de valor E , conforme ilustrado na Fig. 4.8. Ao longo desta seção a tensão da fonte E sempre é considerada menor que o pico da tensão de entrada e superior à metade desta tensão.

$$V_p > E > \frac{V_p}{2}$$

Caso E seja menor que metade da tensão de pico das fontes de alimentação, ao menos um dos três diodos estará em condução durante todo o ciclo de operação e as formas de onda corresponderão àquelas ilustradas na Fig. 4.6, vista anteriormente. Nesse caso conversor opera da mesma forma que a topologia da seção 4.1.

Por outro lado, quando E é maior que a tensão de pico, nenhum diodo conduzirá durante todo o ciclo de operação e a tensão sobre a carga será igual àquela da fonte E .

Figura 4.8. Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.



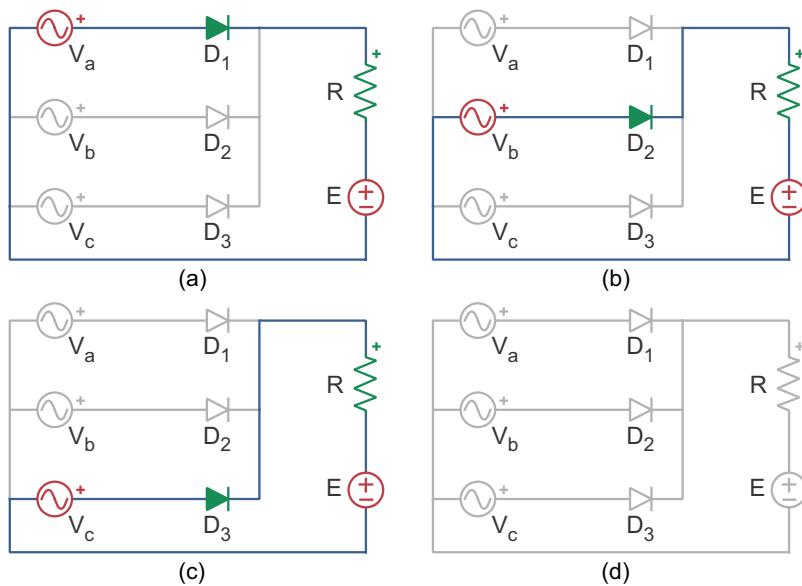
4.2.2 Etapas de operação

Para esta topologia, o diodo D_1 pode conduzir entre os ângulos $\pi/6$ e $5\pi/6$ desde que a tensão da fonte V_a seja maior que a tensão da fonte E (Fig. 4.9(a)). Por sua vez, o diodo D_2 pode entrar em condução após o ângulo $5\pi/6$ e permanecer em condução até atingir o ângulo $3\pi/2$, mas somente se a tensão V_b for maior que a tensão da fonte E (Fig. 4.9(b)). Finalmente, após o ângulo $3\pi/2$ ser atingido, o diodo D_3 poderá conduzir enquanto os diodos D_1 e D_2 se encontram bloqueados (Fig. 4.9(c)). No entanto, D_3 somente conduzirá enquanto que a tensão fornecida por V_c for maior que E .

Quando nenhuma das tensões das fontes V_a , V_b ou V_c é superior à E , nenhum dos diodos se encontra em condução (Fig. 4.9(d)), de forma que não há corrente através da carga, e consequentemente não há nenhuma queda de tensão sobre a resistência R (Fig. 4.9(c)). Portanto, quando nenhum diodo está conduzindo, a tensão $V_L(\omega t)$ corresponde à E .

Os circuitos equivalentes são mostrados na (Fig. 4.9).

Figura 4.9. Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.

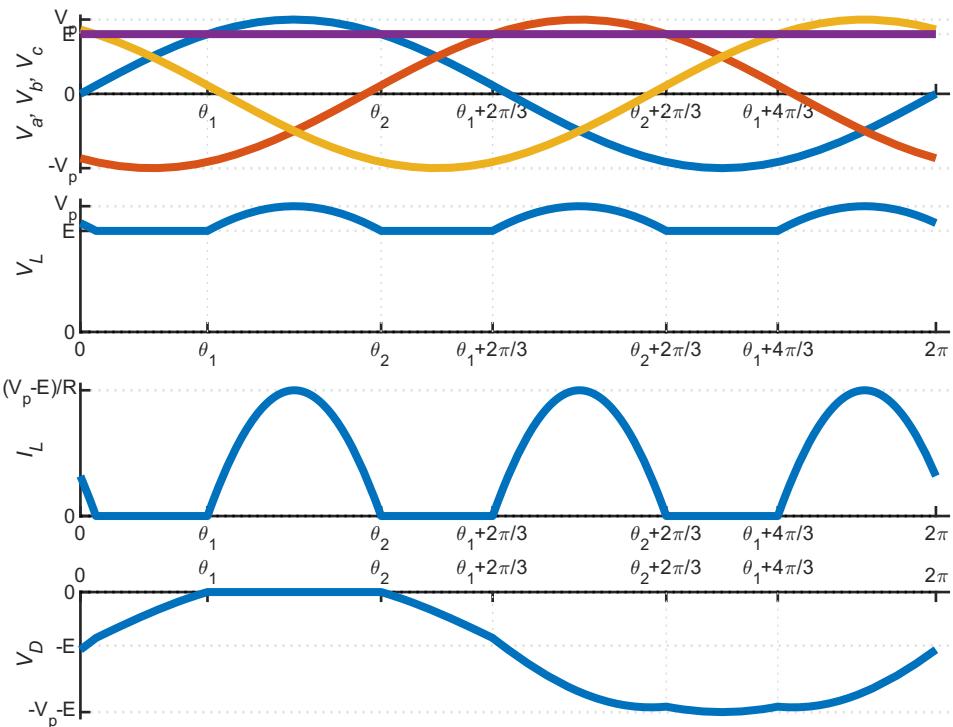


4.2.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 4.10. Nesta figura considera-se que $V_p/2 < E < V_p$. Observa-se que a interseção entre as formas de onda $V_a(\omega t)$ e E ocorre para os ângulos θ_1 e θ_2 e se repete, como comentado anteriormente, para $\theta_1 + n 2\pi/3$ e $\theta_2 + n 2\pi/3$, com $n = 1, 2$. Durante estes períodos, a tensão na carga é sempre superior à tensão da fonte E . A corrente através da carga é proporcional à tensão sobre a resistência R .

1 Figura_WF_3pulsosM0_para_carga_RE()

Figura 4.10. Principais formas de onda.



Primeiramente determina-se a interseção entre as formas de onda das duas fontes.

```
1 clearvars
2 syms V_p wt E R
3
4 % condição de intersecção
5 eq = V_p*sin(wt) == E
```

$$eq = V_p \sin(\omega t) = E$$

1 thetas = solve(eq,wt)

$$\theta_{\text{thetas}} = \begin{bmatrix} \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \\ 3.1416 - \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right) \end{bmatrix}$$

```
1 theta_1 = thetas(1)
```

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right)$$

```
1 theta_2 = thetas(2)
```

$$\theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{E}{V_p}\right)$$

O diodo D_1 conduzirá entre θ_1 e θ_2 . Por sua vez, diodo D_2 conduzirá entre $2\pi/3 + \theta_1$ e $2\pi/3 + \theta_2$ e o diodo D_3 conduzirá entre $4\pi/3 + \theta_1$ e $4\pi/3 + \theta_2$

4.2.4 Equações para o projeto

Tendo em vista que a operação desta estrutura depende dos valores de θ_1 e θ_2 , os mesmos serão utilizados para o projeto deste retificador.

A tensão média sobre a carga pode ser obtida usando

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3}{2\pi} \left[\int_{\pi/6}^{\theta_1} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{5\pi/6} Ed(\omega t) \right] \quad (4.24)$$

Que pode ser simplificada para

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3}{2\pi} \left[\int_{\pi/6+\theta_2}^{\theta_1+5\pi/6} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (4.25)$$

ou seja,

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3}{2\pi} \left[\int_{\theta_2}^{\theta_1+2\pi/3} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (4.26)$$

```
1 syms wt theta_1 theta_2
2
3 V_LMed = 3/(2*sym('pi'))*(int(V_p*sin(wt),wt,theta_1,theta_2)+...
4 int(E,wt,theta_2,2*sym('pi')/3+theta_1))
```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{1.5000 (V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E (0.6667 \pi + \theta_1 - \theta_2))}{\pi} \quad (4.27)$$

```
1 V_RMed = 3/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E),wt,theta_1,theta_2)
```

$$V_{R\text{Med}} = \frac{1.5000 (V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E (\theta_1 - \theta_2))}{\pi}$$

```

1 syms wt theta_1 theta_2
2
3 I_LMed = 3/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E)/R,wt,theta_1,theta_2)

```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{1.5000 \left(\frac{V_p (\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))}{R} + \frac{E (\theta_1 - \theta_2)}{R} \right)}{\pi}$$

```
1 I_LMed = simplifyFraction(I_LMed)
```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{1.5000 (E \theta_1 - E \theta_2 + V_p \cos(\theta_1) - V_p \cos(\theta_2))}{R \pi}$$

```

1 %I_LMed = simplify(I_LMed)
2 I_LMed = collect(I_LMed, {'E', 'V_p', 'R'})

```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{V_p (3 \cos(\theta_1) - 3 \cos(\theta_2)) + E (3 \theta_1 - 3 \theta_2)}{2 R \pi} \quad (4.28)$$

A tensão eficaz sobre a carga pode ser obtida através da equação

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \left[\int_{\pi/6}^{\theta_1} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{5\pi/6} E^2 d(\omega t) \right]} \quad (4.29)$$

Que como visto anteriormente, corresponde a

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \left[\int_{\pi/6+\theta_2}^{\theta_1+5\pi/6} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) \right]} \quad (4.30)$$

```

1 syms V_p wt, assume([V_p, sym('pi')], {'positive', 'real'})
2 V_LRMS = sqrt(3/(2*sym('pi'))*(int((V_p*sin(wt))^2,wt,theta_1,theta_2)+...
3 int((E)^2,wt,theta_2,2*sym('pi')/3+theta_1)))

```

$$V_{LRMS} = \frac{\sqrt{1.5000 E^2 (0.6667 \pi + \theta_1 - \theta_2) - 0.3750 V_p^2 (2 \theta_1 - 2 \theta_2 - \sin(2 \theta_1) + \sin(2 \theta_2))}}{\pi^{0.5}} \quad (4.31)$$

A tensão sobre a resistência da carga é determinada através de

```

1 V_RRMS = sqrt(3/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt)-E)^2,wt,theta_1,theta_2));
2 MostrarEquacoesLongas(V_RRMS,[2,1])

```

$$V_{RRMS} = \frac{\sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8}}{\pi^{0.5}}$$

onde:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0.3750 V_p^2 \sin(2\theta_1) \\ \sigma_2 &= -0.3750 V_p^2 \sin(2\theta_2) \\ \sigma_3 &= -1.5000 E^2 \theta_1 \\ \sigma_4 &= 1.5000 E^2 \theta_2 \\ \sigma_5 &= -0.7500 V_p^2 \theta_1 \\ \sigma_6 &= 0.7500 V_p^2 \theta_2 \\ \sigma_7 &= -3 E V_p \cos(\theta_1) \\ \sigma_8 &= 3 E V_p \cos(\theta_2)\end{aligned}$$

Como a corrente através do circuito auxiliar é proporcional à tensão sobre o resistor,

```
1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sym('V_RRMS')/R
```

$$I_{LRMS} = \frac{V_{RRMS}}{R} \quad (4.32)$$

```
1 % I_LRMS = eval(sqrt(1/(2*sym('pi')))*int(((V_p/R)*sin(wt))^2,wt,0,sym('pi'))))
2 % I_LRMS = eval(I_LRMS)
```

A tensão máxima sobre o diodo corresponde à tensão máxima da fonte de alimentação acrescida da fonte E.

$$V_{DMax} = V_p + E$$

```
1 V_DMax = V_p + E
```

$$V_{DMax} = E + V_p \quad (4.33)$$

E a corrente máxima,

$$I_{DMax} = (V_p - E)/R$$

```
1 I_DMax = (V_p - E)/R
```

$$I_{DMax} = -\frac{E - V_p}{R} \quad (4.34)$$

4.2.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 4.27, 4.28, 4.31, 4.32, 4.33 e 4.34.

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3 f = 60;
4 E = 250;
5 w = 2*pi*f

```

$$w = 376.9911$$

```

1 theta_1 = asin(E/V_p)

```

$$\theta_1 = 0.9332$$

```

1 theta_2 = pi - asin(E/V_p)

```

$$\theta_2 = 2.2084$$

```

1 V_LMed = (1.5*(V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)) + E*((2/3)*pi + theta_1 - theta_2)))/
pi

```

$$V_{L\,Med} = 274.6412$$

```

1 I_LMed = (1.5*((V_p*(cos(theta_1) - cos(theta_2)))/R + (E*(theta_1 - theta_2))/R))/pi

```

$$I_{L\,Med} = 2.4641$$

```

1 V_LRMS = sqrt(1.5*E^2*((2/3)*sym(pi) + theta_1 - theta_2) ...
2 - (3/8)*V_p^2*(2*theta_1 - 2*theta_2 - sin(2*theta_1) + sin(2*theta_2)))/sqrt(pi)

```

$$V_{L\,RMS} = 275.7210$$

```

1 sigma1 = 0.3750*V_p^2*sin(2*theta_1);
2 sigma2 = -0.3750*V_p^2*sin(2*theta_2);
3 sigma3 = -1.5000*E^sym(2)*theta_1;
4 sigma4 = 1.5000*E^sym(2)*theta_2;
5 sigma5 = -0.7500*V_p^2*theta_1;
6 sigma6 = 0.7500*V_p^2*theta_2;
7 sigma7 = -3*E*V_p*cos(theta_1);
8 sigma8 = 3*E*V_p*cos(theta_2);
9 V_RRMS = sqrt(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + sigma6 + sigma7 + ...
10 sigma8)/sym(pi)^0.5

```

$$V_{RRMS} = 34.6622$$

$$1 \quad I_{LRMS} = V_{RRMS}/R$$

$$I_{LRMS} = 3.4662$$

$$1 \quad V_{DMax} = V_p + E$$

$$V_{DMax} = 561.1270$$

$$1 \quad I_{DMax} = (V_p - E)/R$$

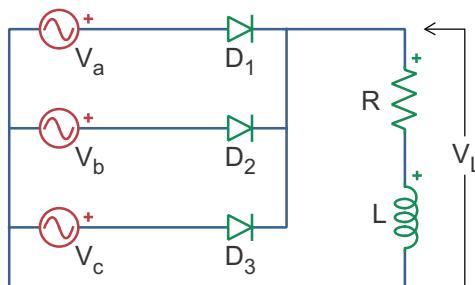
$$I_{DMax} = 6.1127$$

4.3 Carga Indutiva RL

4.3.1 Topologia

Este retificador é semelhante ao estudado na seção 4.1, exceto que agora a carga é indutiva, formada por um resistor e por um indutor conectados em série, conforme a Fig. 4.11.

Figura 4.11. Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva.



4.3.2 Etapas de operação

Tendo em vista que esta topologia é composta por uma indutância em série com a carga resistiva, então esta carga apresenta uma característica indutiva. O comportamento do circuito é similar ao do retificador da seção 4.1, exceto que a corrente não é proporcional à tensão neste caso. Os diodos conduzem durante os mesmos períodos do conversor apresentado na seção 4.1. As etapas de operação são ilustradas na Fig. 4.12.

Figura 4.12. Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva.

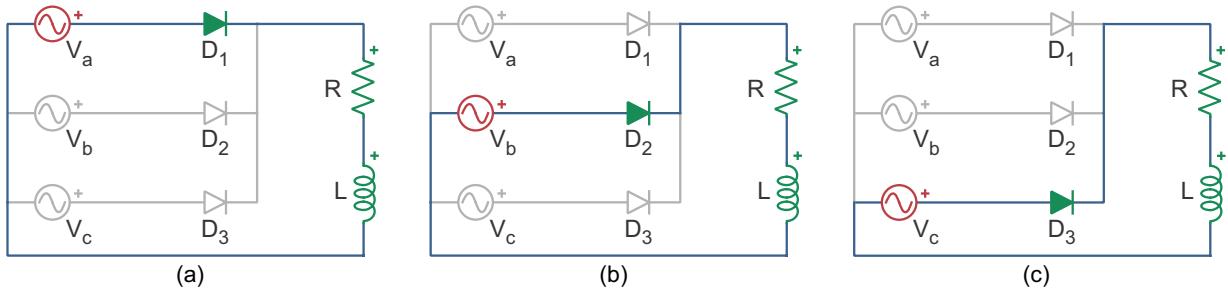
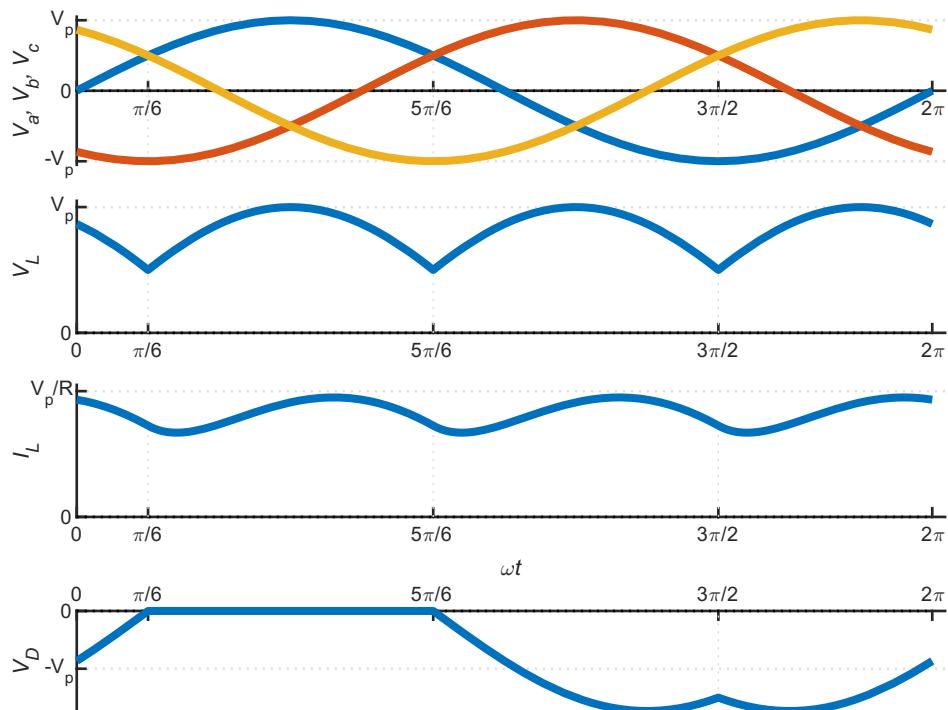


Figura 4.13. Principais formas de onda.



4.3.3 Formas de onda

As principais formas de onda podem ser vistas na Fig. 4.13, a seguir. Observa-se que a corrente através da carga nunca se anula e, portanto, o retificador sempre operará no modo de condução contínua, MCC.

1 `Figura_WF_3pulsosM0_para_carga_RL();`

4.3.3.1 Determinação de $i_L(t)$

Para obter a expressão da corrente através do indutor inicialmente necessita-se definir algumas variáveis simbólicas.

```

1 % inicialização
2 clearvars
3 syms V_o w R L t i_L(t) s V_p X_L tau

```

Na seção 1.3 foi visto que a corrente através da carga para um circuito indutivo alimentado por uma fonte de tensão é dada por 1.36, reproduzida a seguir.

```

1 syms omega phi wt IL_0 Z
2 sympref("FloatingPointOutput",0);
3
4 i_L(wt) = -(V_p*(sin(phi - wt) - exp(-wt/(omega*tau)))*sin(phi))...
5 - IL_0*Z*exp(-wt/(omega*tau)))/Z

```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z}$$

A corrente inicial através do indutor, IL_0 , não é nula, sendo necessário determiná-la, o que será feito a seguir.

A condição de contorno para a determinação de IL_0 é que esta corrente possui valores idênticos no início e no final do período de condução de cada diodo, visto que o circuito opera em regime permanente. Considera-se para esta análise o período de condução do diodo D_1 .

Fazendo-se $i_L(\pi/6) = i_L(5\pi/6)$ pode-se determinar IL_0 .

```

1 sympref('AbbreviateOutput', false);
2 eq = i_L(sym('pi')/6)==i_L(5*sym('pi')/6)

```

$$eq = -\frac{V_p \left(\sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) - e^{-\frac{\pi}{6\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{\pi}{6\omega\tau}}}{Z} = \\ -\frac{V_p \left(\sin \left(\phi - \frac{5\pi}{6} \right) - e^{-\frac{5\pi}{6\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{5\pi}{6\omega\tau}}}{Z}$$

E resolvendo para IL_0

```

1 IL_0 = solve(eq, IL_0)

```

$$IL_0 = -\frac{V_p \sin(\phi) - V_p e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + V_p \sin \left(\phi - \frac{\pi}{6} \right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} - V_p \sin \left(\phi - \frac{5\pi}{6} \right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}}}{Z - Z e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}}}$$

Simplificando,

```

1 %IL_0 = simplifyFraction(IL_0)
2 IL_0 = simplify(expand(IL_0))

```

$$IL_0 = \frac{V_p \left(\sin(\phi) - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + \sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} - \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} \right)}{Z \left(e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)}$$

Usando equivalências trigonométricas é possível transformar o termo $\sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right)$ em $\sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) + \dots$

Como

$$\sin(A) - \sin(B) = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \implies \sin(A) = \sin(B) + 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Dessa forma,

$$\sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{1}{2}\left(\phi - \frac{\pi}{6} + \phi - \frac{5\pi}{6}\right)\right) \sin\left(\frac{1}{2}\left(\phi - \frac{\pi}{6} - \phi + \frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

Então,

```

1 eq = sin(phi - sym('pi')/6) == sin(phi - 5*sym('pi')/6) + ...
2   2*cos((phi - sym('pi')/6 + phi - 5*sym('pi')/6)/2)* ...
3   sin((phi - sym('pi')/6 - phi + 5*sym('pi')/6)/2)

```

$$eq = \sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Substituindo os valores conhecidos,

```

1 eq = subs(eq,sin(sym('pi')/3),sqrt(3)/2)

```

Substituindo em IL_0 ,

$$eq = \sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

```

1 IL_0 = subs(IL_0, lhs(eq), rhs(eq))

```

$$\frac{V_p \left(\sin(\phi) - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) - \sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} + e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} \left(\sin\left(\phi - \frac{5\pi}{6}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) \right) \right)}{Z \left(e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)}$$

```

1 IL_0 = simplify(expand(IL_0))

```

$$IL_0 = \frac{V_p \left(\sin(\phi) - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + \sqrt{3} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} \right)}{Z \left(e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)}$$

Substituindo IL_0 na equação de $i_L(wt)$

```
1 i_L(wt) = subs(i_L(wt), 'IL_0', IL_0)
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - \frac{V_p e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \left(\sin(\phi) - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + \sqrt{3} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} \right)}{e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1}}{Z}$$

Tentando simplificar a equação...

```
1 i_L = simplifyFraction(i_L, "Expand", true)
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - V_p \sin(\phi - wt) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} + \sqrt{3} V_p \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}}}{Z e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - Z e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}}}$$

Agrupando V_p e Z

```
1 i_L = collect(i_L, {'V_p', 'Z'})
```

$$i_L(wt) = \frac{\left(\sin(\phi - wt) e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - \sin(\phi - wt) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} + \sqrt{3} \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}} \right) V_p}{\left(e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right) Z}$$

Agrupando o termo em seno

```
1 i_L = collect(i_L, sym(sin(phi - wt)))
```

$$i_L(wt) = \frac{V_p \left(e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}{\left(e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right) Z} \sin(\phi - wt) + \frac{\sqrt{3} V_p \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}}}{\left(e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right) Z}$$

Como o seno é uma função ímpar

```
1 i_L = subs(i_L, -sin(phi - wt), sin(wt - phi))
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_p \sin(\phi - wt)}{Z} - \frac{\sqrt{3} V_p \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau}}}{Z \left(e^{\frac{wt}{\omega\tau}} - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{wt}{\omega\tau}} \right)}$$

Multiplicando-se manualmente o numerador e o denominador do segundo termo por $e^{\frac{-wt}{\omega\tau}}$ e isolando V_p/Z

$$i_L(\omega t) = \frac{V_p}{Z} \left[-\sin(\phi - wt) - \frac{\sqrt{3} e^{\frac{5\pi}{6\omega\tau} - \frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{1 - e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}}} \right] = \frac{V_p}{Z} \left[\sin(wt - \phi) + \sqrt{3} \sin(\phi) \frac{e^{\frac{-wt+5\pi/6}{\omega\tau}}}{e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1} \right] \quad (4.35)$$

Assim

```
1 i_L = (V_p/Z)*(sin(wt-phi) - sqrt(sym(3))*sin(phi)*(exp((-wt+5*sym(pi)/6)/(omega*tau))
  )/...
2 (1 - exp((2*sym(pi))/(3*omega*tau))))
```

$$i_L(\omega t) = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) - \frac{\sqrt{3} e^{-\frac{wt - \frac{5\pi}{6}}{\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1} \right)}{Z} \quad (4.36)$$

Na Fig. 4.14 é mostrada a forma de onda da corrente $i_L(\omega t)$ e as formas de onda das componentes ($i_{L1}(\omega t)$ e $i_{L2}(\omega t)$) que somadas compõem a corrente através da carga. Observa-se que a frequência das formas de onda na carga corresponde ao triplo da frequência das fontes de alimentação da entrada.

```
1 Figura_IL_3pulsosM0_para_carga_RL();
```

4.3.3.2 Análise utilizando a série de Fourier

A Série de Fourier para a corrente de carga pode ser calculada conforme abaixo. Os argumentos das funções senoidais são multiplicados por três porque as formas de onda se repetem três vezes durante um período da tensão de entrada.

$$v(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(3n\omega t) + b_n \sin(3n\omega t))$$

e a corrente através de

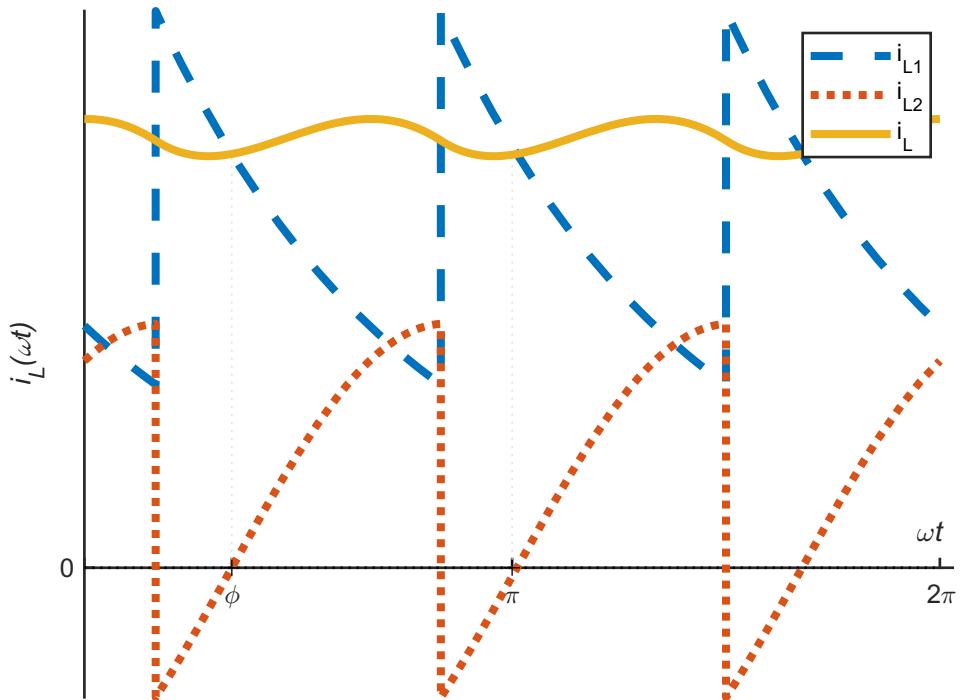
$$i(\omega t) = \frac{a_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(3n\omega t - \phi_n) + b_n \sin(3n\omega t - \phi_n)}{Z_n}$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(\omega t) d(\omega t)$$

```
1 % definição das variáveis
2 syms V_p wt n omega L R simbólicas
3 % definição das restrições
4 assume(n,{'positive', 'integer'})
```

Figura 4.14. Forma de onda da corrente através da carga e de suas componentes.



Como a frequência da forma de onda sobre a carga é o triplo da frequência da entrada, o intervalo a ser considerado inicia em $\pi/6$ e termina em $5\pi/6$, totalizando um terço do período total.

- Limites de integração

```
1 lim_inf = sym('pi')/6;
2 lim_sup = 5*sym('pi')/6;
```

- Período

```
1 T = (2*sym('pi'))/3;
```

Forma de onda durante a condução do diodo D_1

```
1 Va(wt) = V_p*sin(wt);
```

- Determinação dos coeficientes

Determina-se o valor médio da forma de onda

```
1 a_0 = 1/(T)*int(Va,wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_0 = \frac{3 V_p \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right)}{2\pi}$$

```
1 a_0 = subs(a_0, {cos(5*sym('pi')/6),cos(sym('pi')/6)},{-sqrt(3)/2, sqrt(3)/2})
```

$$a_0 = \frac{3\sqrt{3}V_p}{2\pi} \quad (4.37)$$

Determinação de a_n

```
1 a_n(n) = 2/(T)*int(Va*cos(n*3*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_n(n) = -\frac{3 V_p \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi(3n-1)}{6}\right)}{6n-2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi(3n+1)}{6}\right)}{6n+2} - \frac{\cos\left(\frac{5\pi(3n-1)}{6}\right)}{6n-2} + \frac{\cos\left(\frac{5\pi(3n+1)}{6}\right)}{6n+2} \right)}{\pi}$$

```
1 %test(a_n)
2 a_n = simplify(expand(a_n))
```

$$a_n(n) = -\frac{3 V_p \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) + 3n \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 3n \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right) \right)}{\pi(9n^2 - 1)}$$

Sabendo que

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

```
1 a_n(n) = subs(a_n, {cos(5*sym('pi')/6),cos(sym('pi')/6)},{-sqrt(3)/2, sqrt(3)/2});
2 a_n(n) = subs(a_n, {sin(5*sym('pi')/6),sin(sym('pi')/6)},{1/2, 1/2})
```

$$a_n(n) = -\frac{3 V_p \left(\frac{\sqrt{3} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\sqrt{3} \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right)}{2} + \frac{3n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2} - \frac{3n \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right)}{2} \right)}{\pi(9n^2 - 1)}$$

```
1 a_n = simplify(a_n)
```

$$a_n(n) = -\frac{3 V_p \left(\sqrt{3} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) + 3n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 3n \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right) \right)}{2\pi(9n^2 - 1)}$$

Como

$$\cos(A) + \cos(B) = 2 \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\sin(A) - \sin(B) = 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Então tem-se:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{-4n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{6n\pi}{4}\right) = 2 \cos(-n\pi) \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{-4n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{6n\pi}{4}\right) = 2 \sin(-n\pi) \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)$$

Dessa forma

```

1 a_n(n) = subs(a_n, sqrt(sym(3))*cos(n*sym('pi'))/2) + sqrt(sym(3))*cos(5*n*sym('pi'))/2
      ...
2   sqrt(sym(3))*2*cos((-n*sym('pi')))*cos((3*n*sym('pi'))/2))

```

$$a_n(n) = -\frac{3 V_p \left(3 n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 3 n \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right) + 2 \sqrt{3} \cos(n\pi) \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)\right)}{2 \pi (9 n^2 - 1)}$$

```

1 a_n(n) = subs(a_n, 3*n*sin((n*sym('pi'))/2) - 3*n*sin((5*n*sym('pi'))/2), ...
2   3*n*2*sin((-n*sym('pi')))*cos((3*n*sym('pi'))/2))

```

$$a_n(n) = -\frac{3 V_p \left(2 \sqrt{3} \cos(n\pi) \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) - 6 n \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right) \sin(n\pi)\right)}{2 \pi (9 n^2 - 1)}$$

Como para n inteiro

$$\sin(n\pi) = 0$$

```

1 a_n = subs(a_n, sin(n*sym('pi')), 0)

```

$$a_n(n) = -\frac{3 \sqrt{3} V_p \cos(n\pi) \cos\left(\frac{3n\pi}{2}\right)}{\pi (9 n^2 - 1)}$$

Determinação de b_n

```

1 b_n(n) = 2/(T)*int(Va*sin(n*3*wt),wt,lim_inf,lim_sup)

```

$$b_n(n) = -\frac{3 V_p \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi (3 n-1)}{6}\right)}{6 n-2} - \frac{\sin\left(\frac{\pi (3 n+1)}{6}\right)}{6 n+2} - \frac{\sin\left(\frac{5 \pi (3 n-1)}{6}\right)}{6 n-2} + \frac{\sin\left(\frac{5 \pi (3 n+1)}{6}\right)}{6 n+2}\right)}{\pi}$$

```
1 b_n = simplify(expand(b_n))
```

$$b_n(n) = \frac{3 V_p \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right) - 3n \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 3n \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) \right)}{\pi (9n^2 - 1)}$$

Substituindo os termos conhecidos, como feito anteriormente para a_n

```
1 b_n(n) = subs(b_n, {cos(5*sym('pi')/6), cos(sym('pi')/6)}, {-sqrt(3)/2, sqrt(3)/2});
2
3 b_n(n) = subs(b_n, {sin(5*sym('pi')/6), sin(sym('pi')/6)}, {1/2, 1/2})
```

$$b_n(n) = -\frac{3 V_p \left(\frac{3n \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right)}{2} - \frac{3n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\sqrt{3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2} + \frac{\sqrt{3} \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right)}{2} \right)}{\pi (9n^2 - 1)}$$

```
1 b_n = simplify(b_n)
```

$$b_n(n) = -\frac{3 V_p \left(3n \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) - 3n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right) \right)}{2\pi (9n^2 - 1)}$$

Sabendo que

$$\cos(A) + \cos(B) = 2 \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\sin(A) - \sin(B) = 2 \sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Pode se obter

$$\cos\left(\frac{5n\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = -2 \sin\left(\frac{4n\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{6n\pi}{6}\right) = -2 \sin\left(\frac{-2n\pi}{3}\right) \sin(n\pi)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5n\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{6n\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{-4n\pi}{6}\right) = 2 \sin(n\pi) \cos\left(\frac{-2n\pi}{3}\right)$$

Realizando-se estas substituições

```
1 b_n = subs(b_n, 2*n*cos((5*n*sym('pi'))/3) - 2*n*cos((n*sym('pi'))/3), ...
2 2*n*(-2)*sin(-2*n*sym('pi')/3)*sin(n*sym('pi')))
```

$$b_n(n) = -\frac{3 V_p \left(3n \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) - 3n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right) \right)}{2\pi (9n^2 - 1)}$$

```
1 b_n = subs(b_n, sqrt(3)*sin((n*sym('pi'))/3) + sqrt(3)*sin((5*n*sym('pi'))/3), ...
2 sqrt(3)*(2)*sin(n*sym('pi'))*cos(-2*n*sym('pi')/3))
```

$$b_n(n) = -\frac{3 V_p \left(3 n \cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) - 3 n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right) \right)}{2 \pi (9 n^2 - 1)}$$

Sabendo que

$$\frac{5n\pi}{2} = \frac{1n\pi + 4n\pi}{2} = \frac{n\pi}{2} + 2n\pi$$

Portanto, como seno e cosseno são funções cíclicas com período $T = 2\pi$

$$\sin\left(\frac{5n\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{5n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Fazendo a substituições

```
1 b_n = subs(b_n, sin((5*sym('pi'))*n)/2), sin(n*sym('pi')/2));
2 b_n = subs(b_n, cos((5*sym('pi'))*n)/2), cos(n*sym('pi')/2))
```

$$b_n(n) = -\frac{3 \sqrt{3} V_p \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi (9 n^2 - 1)} \quad (4.38)$$

A Fig. 4.15 mostra o gráfico da Série de Fourier obtida para a tensão e para a corrente através da carga, sendo que foi variada a quantidade de termos utilizados para a geração da série. Foram utilizados dois termos para gerar um par de formas de onda e dez termos para gerar o outro par.

Observa-se que mesmo utilizando-se somente dois termos a forma de onda de corrente é idêntica àquela em que são utilizados dez termos.

```
1 Figura_VL_IL_3pulsosM0_para_carga_RL_Serie_Fourier;
```

4.3.4 Equações para o projeto

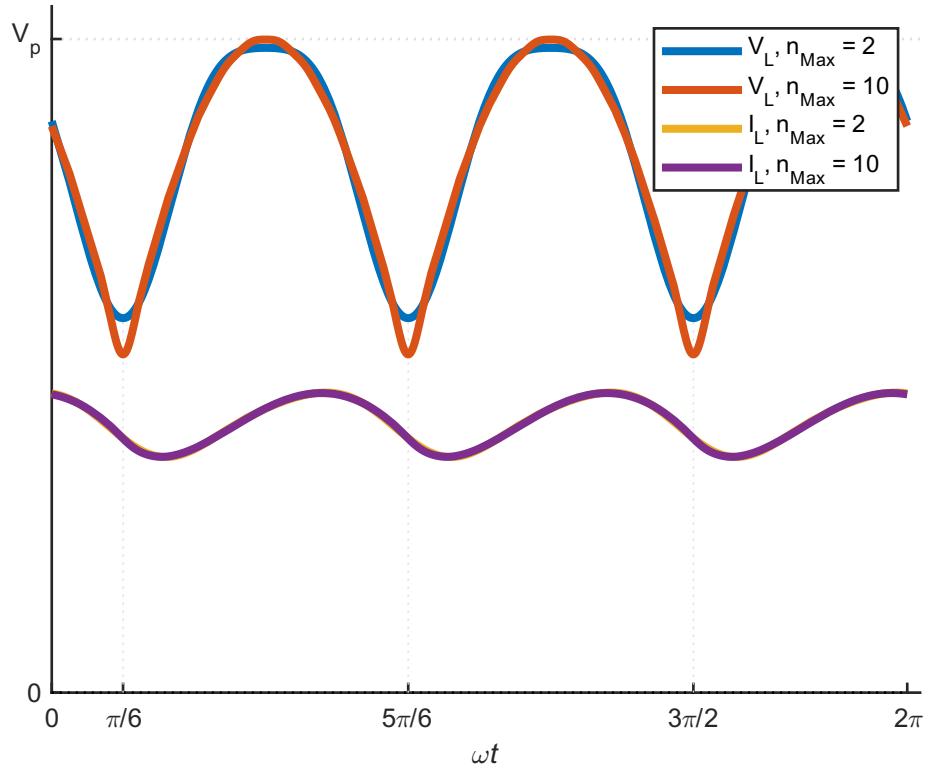
As equações das tensões $V_{L\text{Med}}$, $V_{L\text{RMS}}$ e de $V_{D\text{Max}}$ são as mesmas da seção 4.1.4, pois as formas de onda de tensão são idênticas.

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (4.39)$$

```
1 syms V_p wt
2 V_LMed = 3/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,pi/6,5*pi/6)
```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3 \sqrt{3} V_p}{2 \pi} \quad (4.40)$$

Figura 4.15. Forma de onda da corrente através da carga para o MCC



I_{LMed} pode ser obtida através do termo a_0 da série de Fourier, dividido pela resistência, conforme comentado anteriormente.

```

1 syms V_p wt R
2 I_LMed = (3*sqrt(sym(3))*V_p)/(2*sym(pi)*R)

```

$$I_{LMed} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{2R\pi} \quad (4.41)$$

A tensão eficaz sobre a carga é determinada a partir de

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (4.42)$$

```

1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(3/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt))^2,wt,pi/6,5*pi/6))

```

$$V_{LRMS} = V_p \sqrt{\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{8\pi}} \quad (4.43)$$

A corrente eficaz através da carga é calculada através da equação

$$I_{LRMS} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (i_L(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (4.44)$$

```

1 %clearvars
2 syms V_p phi wt tau Z, assume([V_p, Z], 'positive')
3 i_L = -V_p*(sin(phi - wt)/Z + (2*exp((sym('pi')/(omega*tau)))*sin(phi))/...
4   (Z*(exp(wt/(omega*tau)) - exp((sym('pi')/(omega*tau)))*exp((wt/(omega*tau))))));
5 i_L = -(V_p*(sin(phi - wt) - (sqrt(sym(3))*exp((-6*wt - 5*sym(pi))/(6*omega*tau))...
6   *sin(phi))/(exp((2*sym(pi))/(3*omega*tau)) - 1)))/Z

```

$$i_L = -\frac{V_p \left(\sin(\phi - wt) - \frac{\sqrt{3} e^{-\frac{6wt - 5\pi}{6\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1} \right)}{Z}$$

```

1 I_LRMS = sqrt(1/(sym('pi'))*int((i_L)^2,wt,sym('pi')/6,5*sym('pi')/6));

```

Como o resultado obtido é bastante complexo, não será reproduzido aqui. Sugere-se determinar I_{LRMS} numericamente ou através de simulação.

A tensão máxima sobre o diodo corresponde à tensão de linha.

```

1 V_DMax = sqrt(3)*V_p

```

$$V_{DMax} = \sqrt{3} V_p \quad (4.45)$$

A corrente máxima pode ser obtida derivando-se a equação da corrente e igualando a zero,

```

1 % Por exemplo:
2 eq = diff(i_L,wt)==0

```

$$eq = \frac{V_p \left(\cos(\phi - wt) - \frac{\sqrt{3} e^{-\frac{6wt - 5\pi}{6\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau \left(e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)} \right)}{Z} = 0$$

multiplica-se por Z/V_p para simplificar e substitui-se ωt por t_{Max}

```

1 % Por exemplo:
2 eq = subs(eq*Z/V_p,wt, sym('t_Max'))

```

$$eq = \cos(\phi - t_{Max}) - \frac{\sqrt{3} e^{-\frac{6t_{Max} - 5\pi}{6\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau \left(e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)} = 0$$

Como t_{Max} é argumento de um cosseno e é também da função exponencial, não é possível obter seu valor algébrico. Dessa forma, encontra-se t_{Max} numericamente e substitui-se em $i_L(\omega t)$. Um palpite inicial para a raiz é $T/4$.

```
1 % Por exemplo:
2 % t_Max = vpasolve(eq, sym('t_Max'), 1/(4*f))
3 % I_LMax = i_L(t_Max)
```

Em termos práticos, o valor máximo que a corrente de carga poderá atingir é dado por

$$I_{DMax} = V_p/R$$

```
1 I_DMax = V_p/R
```

$$I_{DMax} = \frac{V_p}{R} \quad (4.46)$$

4.3.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 4.40, 4.41, 4.43, 4.44, 4.45 e 4.46.

```
1 sympref("FloatingPointOutput", 1);
2 V_p = sqrt(2)*220;
3 R = 10;
4 L = 50e-3;
5 f = 60;
6
7 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 omega = w;
2
3 tau = L/R
```

$$\tau = 0.0050$$

```
1 X_L = w*L
```

$$X_L = 18.8496$$

```
1 Z = sqrt(R^2+(XL)^2)
```

$$Z = 21.3379$$

```
1 phi = atan2(XL,R)
```

$$\phi = 1.0830$$

```
1 i_L(wt) = -(V_p * (sin(phi-wt) - (sqrt(3)*exp((-6*wt-5*pi)/(6*omega*tau)))*...
2 sin(phi))/(exp((2*pi)/(3*omega*tau)) - 1))/Z
```

$$i_L(wt) = 10.9484 e^{1.3889-0.5305 wt} + 14.5810 \sin(wt - 1.0830)$$

```
1 V_LMed = (3*sqrt(3)*V_p)/(2*pi)
```

$$V_{L\,Med} = 257.2999$$

```
1 I_LMed = (3*sqrt(3)*V_p)/(2*pi*R)
```

$$I_{L\,Med} = 25.7300$$

```
1 V_LRMS = V_p*sqrt((4*pi + 3*sqrt(3))/(8*pi))
```

$$V_{L\,RMS} = 261.5592$$

```
1 I_LRMS = sqrt(3/(2*pi)*int((i_L)^2,wt,pi/6,5*pi/6))
```

$$I_{L\,RMS} = 25.7424$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{D\,Max} = 538.8877$$

```
1 syms wt_Max
2 eq = diff(subs(i_L(wt),wt,wt_Max))==0
```

$$eq = 14.5810 \cos(wt_{Max} - 1.0830) - 5.8083 e^{1.3889-0.5305 wt_{Max}} = 0$$

```
1 % Pode-se confirmar as formas de onda através de
2 % figure
3 % fplot(i_L,[0,2*pi])
```

```
1 wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),2*pi/4)
```

$$wt_{Max} = 2.1028$$

```
1 I_LMax = i_L(wt_Max)
```

$$I_{L\,Max} = 26.8124$$

ou menor que

```
1 I_DMax = V_p/R
```

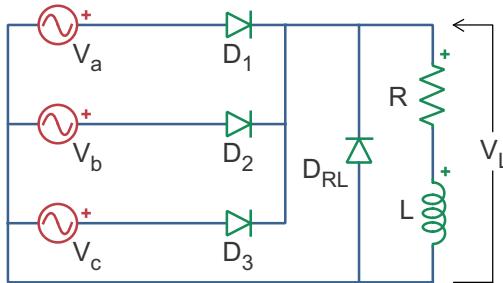
$$I_{D\,Max} = 31.1127$$

4.4 Carga RL com diodo de Roda Livre

4.4.1 Topologia

Esta topologia opera de maneira semelhante àquela apresentada na seção 4.3. O diodo de roda livre, D_{RL} , ajuda a proteger os demais diodos no instante da comutação da corrente entre os mesmos. Essa topologia está ilustrada na Fig. 4.16.

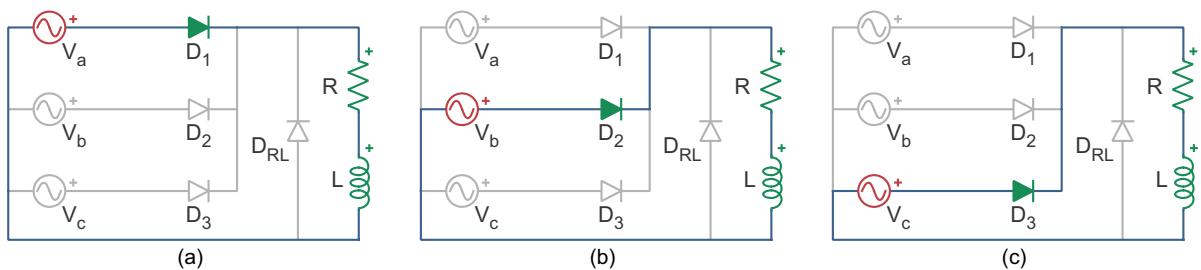
Figura 4.16. Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



4.4.2 Etapas de operação

A operação desta estrutura é idêntica à da estrutura sem diodo de roda livre apresentada na seção 4.3.2. As etapas estão ilustradas na 4.17.

Figura 4.17. Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



4.4.3 Formas de onda

As principais formas de onda são idênticas àquelas da seção 4.3.3 e são ilustradas na Fig. 4.13.

4.4.4 Equações para o projeto

As principais equações para o projeto são as mesmas daquelas apresentadas seção 4.3.4. O diodo de roda-livre pode ser projetado como segue.

$$V_{DRL\ Max} = V_p$$

4.4.5 Exemplos numéricos

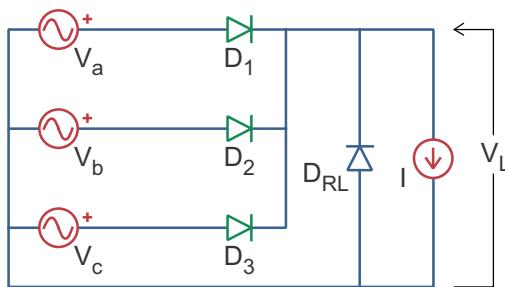
Os exemplos numéricos são idênticos àqueles da seção 4.3.5.

4.5 Carga I com Diodo de Roda-Livre

4.5.1 Topologia

A carga conectada à esta topologia é uma fonte de corrente ou pode ser uma carga com uma indutância muito alta. Devido à característica indutiva da carga, a corrente permanece praticamente constante e é importante que haja um diodo em paralelo com a mesma para proteger os diodos D_1 , D_2 e D_3 nos instantes de suas comutações, Fig. 4.18.

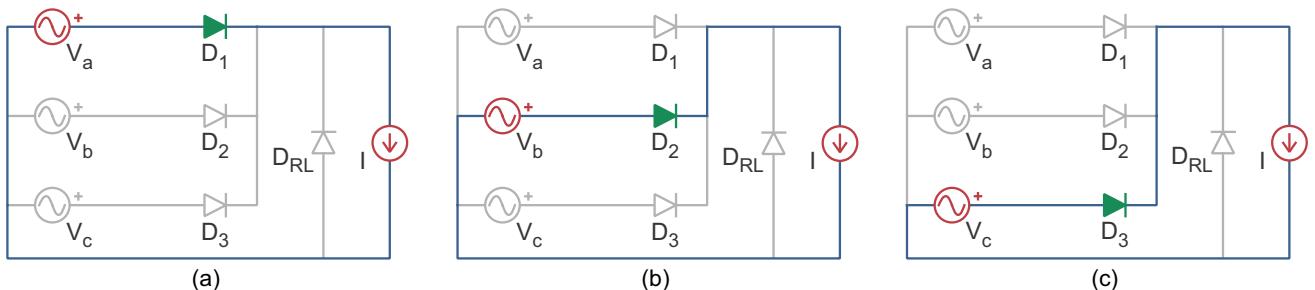
Figura 4.18. Retificador trifásico de meia onda à diodo com carga de fonte de corrente.



4.5.2 Etapas de operação

Esta estrutura opera de maneira semelhante àquela da seção 4.1. A diferença é que a corrente através dos diodos D_1 , D_2 e D_3 não varia senoidalmente neste caso devido à fonte de corrente I em série com os mesmos quando estes estão em condução, Fig. 4.19.

Figura 4.19. Etapas de operação do retificador trifásico de meia onda à diodo com carga de fonte de corrente.

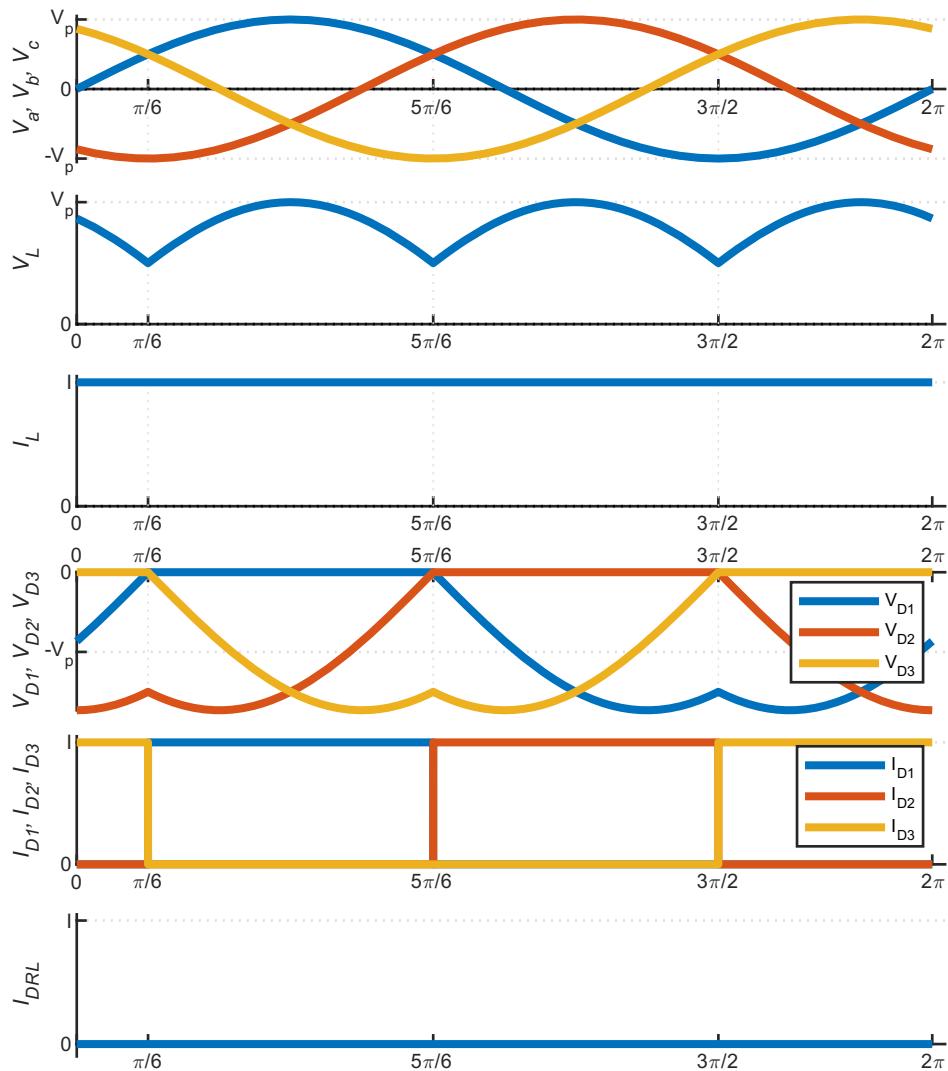


4.5.3 Formas de onda

As principais formas de ondas estão mostradas na Fig. 4.20. Observa-se que a corrente através da carga é contínua e igual a I e que a mesma circula através do diodo D_1 entre os ângulos $\pi/6$ e $5\pi/6$, através do diodo D_2 após o ângulo $5\pi/6$ e até atingir o ângulo $3\pi/2$ e então através do diodo D_3 de $3\pi/2$ até que o diodo D_1 volte a conduzir.

1 | **Figura_WF_3pulsosM0_para_carga_I()**

Figura 4.20. Principais formas de onda.



4.5.4 Equações para o projeto

Como as formas de onda de tensão são idênticas àquelas da seção 4.1.4, as equações das tensões $V_{L\text{Med}}$, $V_{L\text{RMS}}$ e de $V_{D\text{Max}}$ também são as mesmas.

A tensão média sobre a carga pode ser determinada por

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (4.47)$$

```
1 syms V_p wt
2 V_LMed = 3/(2*sym('pi'))*int(V_p*sin(wt),wt,pi/6,5*pi/6)
```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{2\pi} \quad (4.48)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

```
1 syms V_p wt R I
2 I_LMed = 1/(sym('pi'))*int(I,wt,0,sym('pi'))
```

$$I_{L\text{Med}} = I \quad (4.49)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{3}{2\pi} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (4.50)$$

```
1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(3/(2*sym('pi'))*int((V_p*sin(wt))^2,wt,pi/6,5*pi/6))
```

$$V_{LRMS} = V_p \sqrt{\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{8\pi}} \quad (4.51)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

```
1 syms V_p wt R, assume([I, sym('pi')], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(1/(2*sym('pi'))*int(I^2,wt,0,2*sym('pi')))
```

$$I_{LRMS} = I \quad (4.52)$$

A tensão máxima sobre os diodos D_1 , D_2 e D_3 corresponde à soma fasorial de duas fontes de alimentação.

$$V_{D\text{Max}} = \sqrt{3}V_p$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{D\text{Max}} = 1.7321 V_p \quad (4.53)$$

E sobre o diodo de roda livre

$$V_{DRL Max} = V_p$$

1 **V_DRLMax = V_p**

$$V_{DRL Max} = V_p$$

E a corrente máxima,

$$I_{D Max} = I_{DRL Max} = I$$

1 **I_DMax = I**

$$I_{D Max} = I \quad (4.54)$$

4.5.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 4.48, 4.49, 4.51, 4.52, 4.53 e 4.54.

1 **V_p = sqrt(2)*220;**
 2 **I = 10;**
 3
 4 **V_LMed = 3*sqrt(3)*V_p/(2*pi)**

$$V_{L Med} = 257.2999$$

1 **I_LMed = I**

$$I_{L Med} = 10$$

1 **V_LRMS = sqrt(1/2+3*sqrt(3)/(8*pi))*V_p**

$$V_{L RMS} = 261.5591$$

1 **I_LRMS = I**

$$I_{L RMS} = 10$$

1 **V_DMax = sqrt(3)*V_p**

$$V_{D Max} = 538.8877$$

1 **I_DMax = I**

$$I_{D Max} = 10$$

4.6 Conclusão

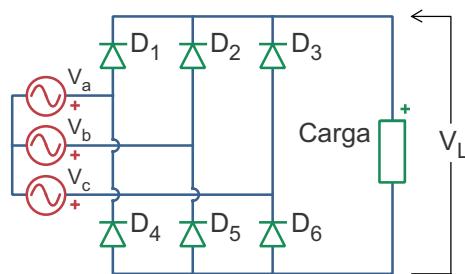
Esta topologia aproveita parcialmente as fontes de alimentação trifásicas. As tensões e correntes através da carga têm suas frequências multiplicadas por três. A corrente da carga nunca se anula, de modo que a topologia sempre opera no modo de condução contínua. De fato, a mesma é aproximadamente constante até mesmo para pequenas indutâncias, conforme verificado pelas séries de Fourier. Idealmente o diodo de roda livre, quando presente, não deverá entrar em condução.

Capítulo 5

Retificador Trifásico de Onda Completa à Diodo

A Fig. 5.1 ilustra o retificador trifásico de onda completa à diodo. Inicialmente será feita análise com carga R, puramente resistiva. Em seguida serão estudadas outras configurações de carga. Este retificador é alimentado por três fontes senoidais trifásicas, defasadas entre si por 120° elétricos ou $2\pi/3$. A forma de onda de tensão na carga é composta por seis pulsos, devido à ação conjunta dos grupos retificadores positivo (D_1, D_2 e D_3) e negativo (D_4, D_5 e D_6).

Figura 5.1. Retificador trifásico de onda completa à diodo.



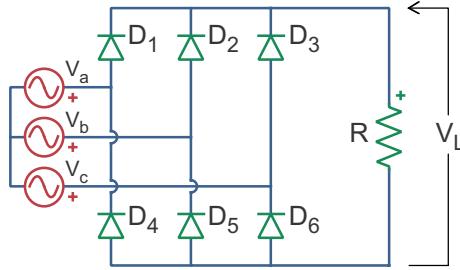
5.1 Carga R

5.1.1 Topologia

O retificador mostrado na Fig. 5.2 é formado por três fontes de tensão, seis diodos e pela carga R, puramente resistiva.

5.1.2 Etapas de operação

As tensões das fontes de alimentação são definidas na equação 5.1.

Figura 5.2. Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga R .

Para esta topologia a fonte V_a apresenta o maior valor positivo entre os ângulos $\pi/3$ e π , possibilitando que o diodo D_1 esteja em condução, enquanto os diodos D_2 e D_3 se encontram bloqueados. Durante este período é aplicada a tensão desta fonte sobre a carga R e a corrente flui através da mesma no sentido positivo. Entre os ângulos $\pi/3$ e $2\pi/3$ a corrente retorna pelo diodo D_5 , pois a fonte V_b apresenta o valor mais negativo (Fig. 5.3(b)) e entre os $2\pi/3$ e π a corrente retorna pelo diodo D_6 , em virtude da fonte V_c apresentar o valor mais negativo, (Fig. 5.3(c)).

Após o ângulo π o diodo D_2 entra em condução e os diodos D_3 e D_1 permanecem bloqueados até atingir-se o ângulo $5\pi/3$. A tensão através da carga também é positiva porque a fonte V_b é positiva durante este período e o diodo D_2 está em condução. A corrente retorna através do diodo D_6 entre os ângulos π e $4\pi/3$ (Fig. 5.3(d)) e através do diodo D_4 entre os ângulos $4\pi/3$ e $5\pi/3$, (Fig. 5.3(e)).

Finalmente, após o ângulo $5\pi/3$ ser atingido, o diodo D_3 conduz enquanto os diodos D_1 e D_2 se encontram bloqueados. Como V_c é positiva, a corrente através da carga continua a fluir no sentido positivo. Entre os ângulos $5\pi/3$ e 2π a corrente retorna através do diodo D_4 , (Fig. 5.3(f)), enquanto que a partir de 2π (0 no primeiro quadrante) até $7\pi/3$ (ou $\pi/3$ para o primeiro ciclo de operação) a corrente retorna pelo diodo D_5 , (Fig. 5.3(a)).

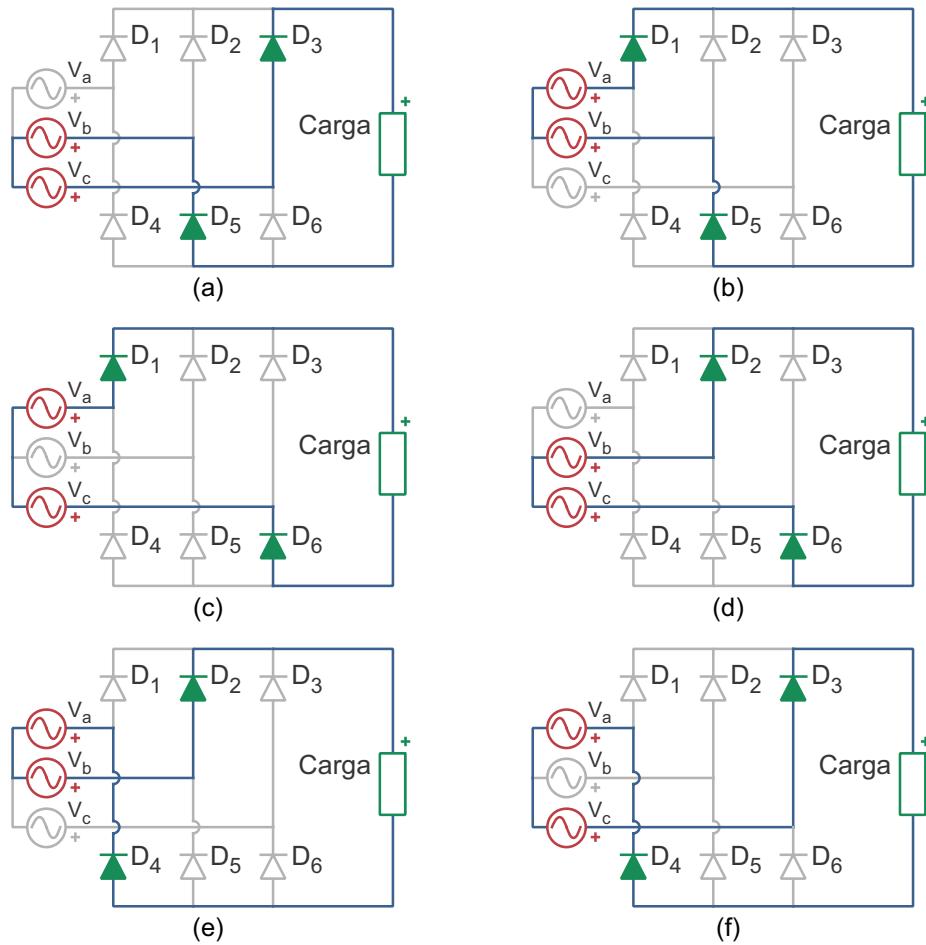
Conforme visto, cada uma das fontes de alimentação está conectada à carga durante um terço do período de operação através de seu terminal positivo por meio dos diodos D_1 , D_2 e D_3 . De maneira semelhante, cada uma destas fontes está conectada à carga durante um terço do período de operação por meio de seu terminal negativo através dos diodos D_4 , D_5 e D_6 ou seja, a tensão que é aplicada sobre a carga é dada pela soma fasorial da tensão de duas fontes, sendo uma tensão de linha.

Conforme já comentado, a estrutura é alimentada por um conjunto de fontes trifásicas com defasagem entre as fases correspondente a 120° elétricos ou $2\pi/3$. Estas tensões V_a , V_b e V_c são definidas conforme abaixo, sendo que foram atrasadas 30° elétricos para facilitar os cálculos que serão desenvolvidos a seguir, 5.4.

$$\begin{cases} V_a = V_p \sin(\omega t - \pi/6) \\ V_b = V_p \sin(\omega t - 5\pi/6) \\ V_c = V_p \sin(\omega t - 3\pi/2) \end{cases} \quad (5.1)$$

Definem-se as tensões de fase, conforme a seguir:

Figura 5.3. Etapas de operação do retificador trifásico de onda completa à diodo com carga R .



```

1 clearvars
2 syms V_p V_pL wt V_D1 V_D2 V_D3
3
4 % Definição das fontes
5 Va = V_p * sin(wt-pi/6);
6 Vb = V_p * sin(wt-5*pi/6);
7 Vc = V_p * sin(wt-3*pi/2);

```

5.1.3 Formas de onda

Tendo em vista os intervalos de condução definidos na seção anterior, bem como as formas de onda exibidas na Fig. 5.4, obtém-se a Tabela 5.1:

Com esta tabela, pode-se representar as tensões fasoriais, conforme a Fig. 5.4, bem como as formas de onda das tensões de linha resultantes. Observa-se que a amplitude das tensões de linha corresponde a:

Figura 5.4. Formas de onda trifásicas.

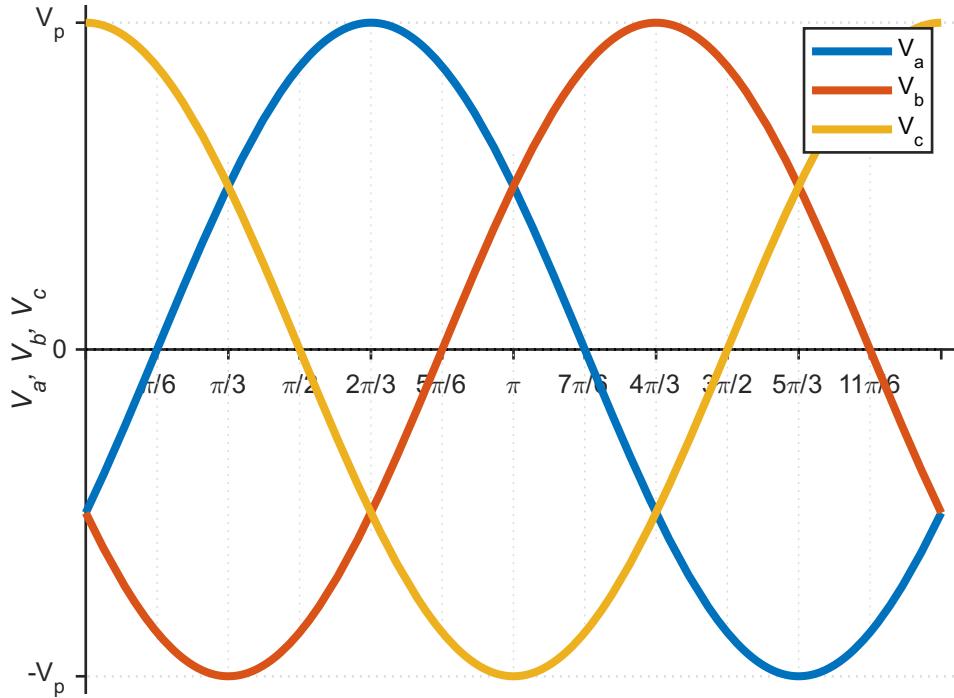


Tabela 5.1. Intervalos de condução.

Intervalo	Diodo +	Diodo -	V_L	Figura
$0..π/3$	D_3	D_5	V_{cb}	Fig. 5.3(a)
$π/3..2π/3$	D_1	D_5	V_{ab}	Fig. 5.3(b)
$2π/3..π$	D_1	D_6	V_{ac}	Fig. 5.3(c)
$π..4π/3$	D_2	D_6	V_{bc}	Fig. 5.3(d)
$4π/3..5π/3$	D_2	D_4	V_{ba}	Fig. 5.3(e)
$5π/3..2π$	D_3	D_4	V_{ca}	Fig. 5.3(f)

```
1 V_pL = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{pL} = 1.7321 V_p$$

```
1 Figura_WF_Diagrama_Fasorial_6P()
```

```
1 Figura_WF_Fontes_Trifasicas_6P_2()
```

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 5.7, a seguir.

```
1 Figura_WF_6pulsosM0_para_carga_R();
```

Observa-se que a tensão sobre a carga, bem como a corrente são sempre positivas. A frequência da tensão da carga é seis vezes maior que a frequência das fontes de alimentação. A tensão reversa máxima que os diodos devem suportar é superior às tensões das fontes presentes na topologia, porque estas apresentam conexões do tipo série durante algumas etapas.

Figura 5.5. Diagrama fasorial

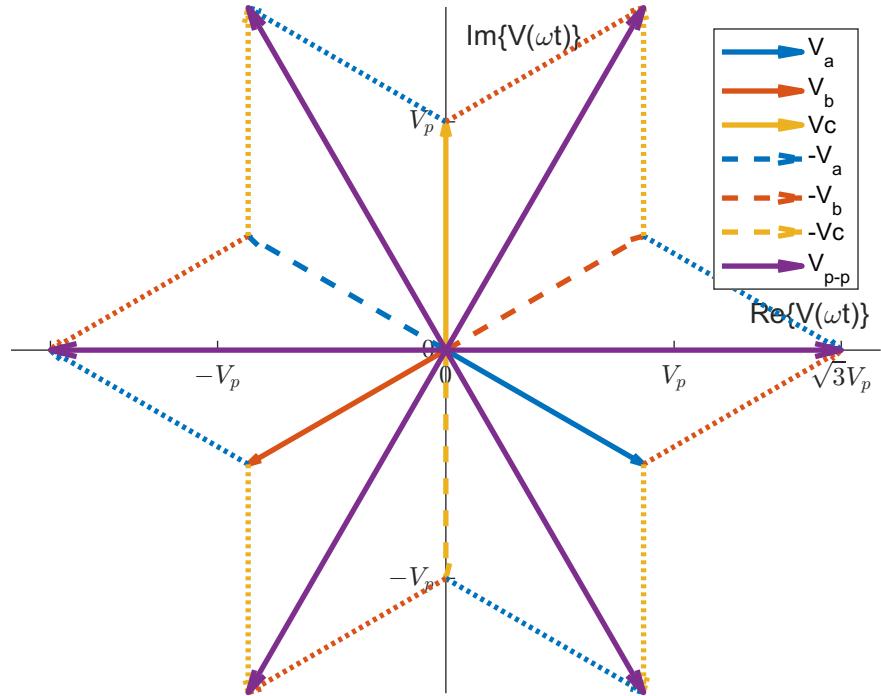
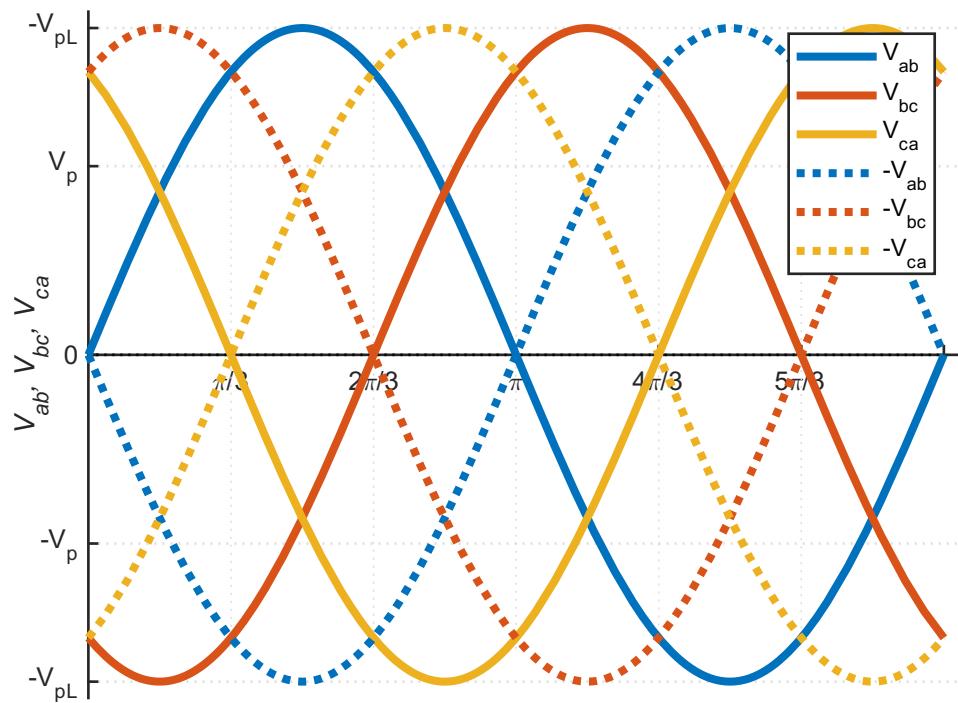


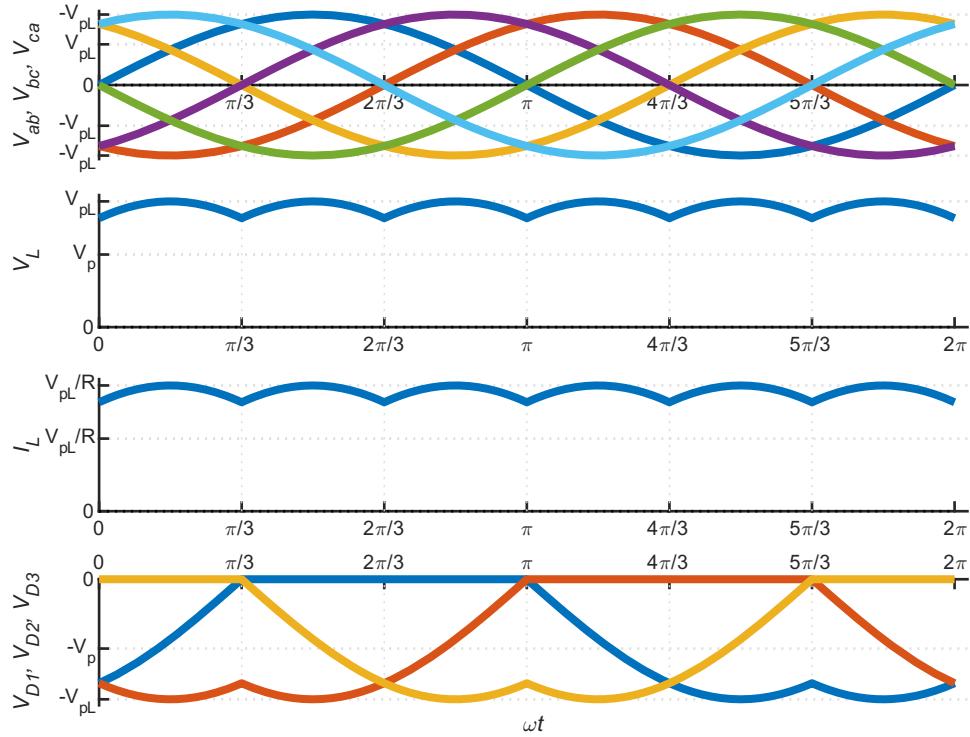
Figura 5.6. Formas de onda das tensões de linha.



5.1.4 Equações para o projeto

A tensão média sobre a carga é calculada através de:

Figura 5.7. Principais formas de onda.



$$V_{L\text{Med}} = \frac{6}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{3}V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (5.2)$$

pois a forma de onda de tensão se repete seis vezes durante um período de operação, iniciando em $\pi/3$ e terminando em $2\pi/3$.

```

1 syms V_p wt
2 sympref('FloatingPointOutput',0);
3 V_LMed = 6/(2*sym('pi'))*sqrt(3)*int(V_p*sin(wt),wt,pi/3,2*pi/3)

```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{\pi} \quad (5.3)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```

1 syms V_p wt R
2 I_LMed = 6/(2*sym('pi'))*sqrt(3)*int(V_p*sin(wt)/R,wt,pi/3,2*pi/3)

```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{R\pi} \quad (5.4)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através de

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{6}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (\sqrt{3}V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (5.5)$$

```

1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 sympref('FloatingPointOutput',1);
3 V_LRMS = sqrt(6/(2*pi)*int((sqrt(3)*V_p*sin(wt))^2,wt,pi/3,2*pi/3))

```

$$V_{LRMS} = 1.6554 V_p$$

que corresponde a

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{6\pi + 9\sqrt{3}}{4\pi}} \quad (5.6)$$

```

1 V_LRMS = V_p*sqrt((6*pi + 9*sqrt(3))/(4*pi))

```

$$V_{LRMS} = 1.6554 V_p \quad (5.7)$$

Como a corrente é proporcional à tensão,

```

1 syms V_p wt R, assume([V_p, R], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(6/(2*pi)*int((sqrt(3)*V_p*sin(wt)/R)^2,wt,pi/3,2*pi/3))

```

$$I_{LRMS} = \frac{1.6554 V_p}{R} \quad (5.8)$$

A tensão máxima sobre cada diodo corresponde à soma fasorial de duas das fontes de alimentação, da mesma forma que ocorre para o retificador de três pulsos, pois estas fontes se encontram conectadas em série quando é aplicada tensão reversa sobre cada diodo.

Dessa forma,

$$V_{DMax} = \sqrt{3} V_p$$

```

1 V_DMax = sqrt(3)*V_p

```

$$V_{DMax} = 1.7321 V_p \quad (5.9)$$

Como a corrente através da carga é proporcional à sua tensão.

```

1 I_DMax = V_p*L/R

```

$$I_{DMax} = 1.7321 \frac{V_p}{R} \quad (5.10)$$

A corrente média através de cada diodo corresponde à terça parte da corrente média na carga, de forma que,

```

1 I_DMed = I_LMed/3

```

$$I_{DMed} = \frac{1.7321 V_p}{R \pi}$$

5.1.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir. Serão utilizadas as equações 5.3, 5.4, 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10.

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 R = 10;
3
4 V_LMed = 6*sqrt(3)*V_p/(2*pi)

```

$$V_{LMed} = 514.5999$$

```

1 I_LMed = 6*sqrt(3)*V_p/(2*pi*R)

```

$$I_{LMed} = 51.4600$$

```

1 V_LRMS = V_p*sqrt((6*sym(pi) + 9*sqrt(3))/(4*pi))

```

$$V_{LRMS} = 515.0528$$

```

1 I_LRMS = V_p*sqrt((6*sym(pi) + 9*sqrt(3))/(4*pi))/R

```

$$I_{LRMS} = 51.5053$$

```

1 V_DMax = sqrt(3)*V_p

```

$$V_{DMax} = 538.8877$$

```

1 I_DMax = sqrt(3)*V_p/R

```

$$I_{DMax} = 53.8888$$

5.2 Carga RE

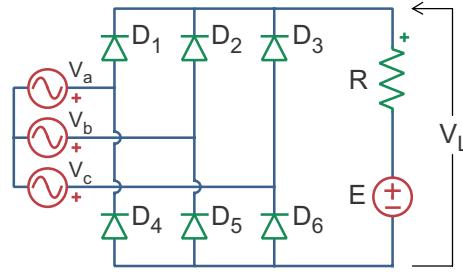
5.2.1 Topologia

Esta topologia é semelhante à topologia analisada na seção 5.1 exceto que a carga é formada por uma resistência em série com uma fonte de tensão de valor E, conforme ilustrado na Fig. 5.8.

As discussões contidas nesta seção consideram que

$$\frac{\sqrt{3}V_{pL}}{2} < E < V_{pL} \quad (5.11)$$

Figura 5.8. Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga resistiva e fonte de tensão.



5.2.2 Etapas de operação

Para esta topologia, o diodo D_1 pode conduzir entre os ângulos $\pi/3$ e π desde que a soma das tensões da fonte V_a com V_b ou V_c seja maior que a tensão da fonte E (Fig. 5.3(b) e 5.3(c)). Por sua vez, o diodo D_2 pode entrar em condução após o ângulo π e permanecer em condução até atingir o ângulo $5\pi/3$, mas somente se a tensão V_b (somada à V_a ou V_c) for maior que a tensão da fonte E (Fig. 5.3(d) e 5.3(e)). Finalmente, após o ângulo $5\pi/3$ ser atingido, o diodo D_3 poderá conduzir enquanto os diodos D_1 e D_2 se encontram bloqueados (Fig. 5.3(f) e 5.3(a)). No entanto D_3 somente conduzirá enquanto que a tensão fornecida por V_c (somada à V_a ou V_b) for maior que E . O diodo D_3 conduzirá até $7\pi/3$ (ou $\pi/3$ no primeiro quadrante).

Quando a soma das tensões das fontes V_a , V_b e V_c aos pares e em módulo é inferior à E , 5.12, nenhum dos diodos se encontra em condução, de forma que não há corrente através da carga, e consequentemente não há nenhuma queda de tensão sobre a resistência R (Fig. 5.16(c)). Portanto, quando nenhum diodo está conduzindo, a tensão $V_L(\omega t)$ corresponde a E .

$$\begin{cases} |V_a + V_b| & \text{ou} \\ |V_b + V_c| & \text{ou} \\ |V_c + V_a| \end{cases} \Rightarrow v_L(\omega t) = E \quad (5.12)$$

Por sua vez, os diodos D_4 , D_5 e D_6 operam de maneira semelhante aos diodos D_1 , D_2 e D_3 , porém defasados pelo ângulo π .

Os circuitos equivalentes são os mesmos daqueles mostrados na (Fig. 5.3), exceto que a carga é formada por uma resistência em série com a fonte de tensão E . Além disso, quando nenhuma das tensões de linha é maior que E , nenhum diodo conduz e a tensão sobre a carga corresponde à E .

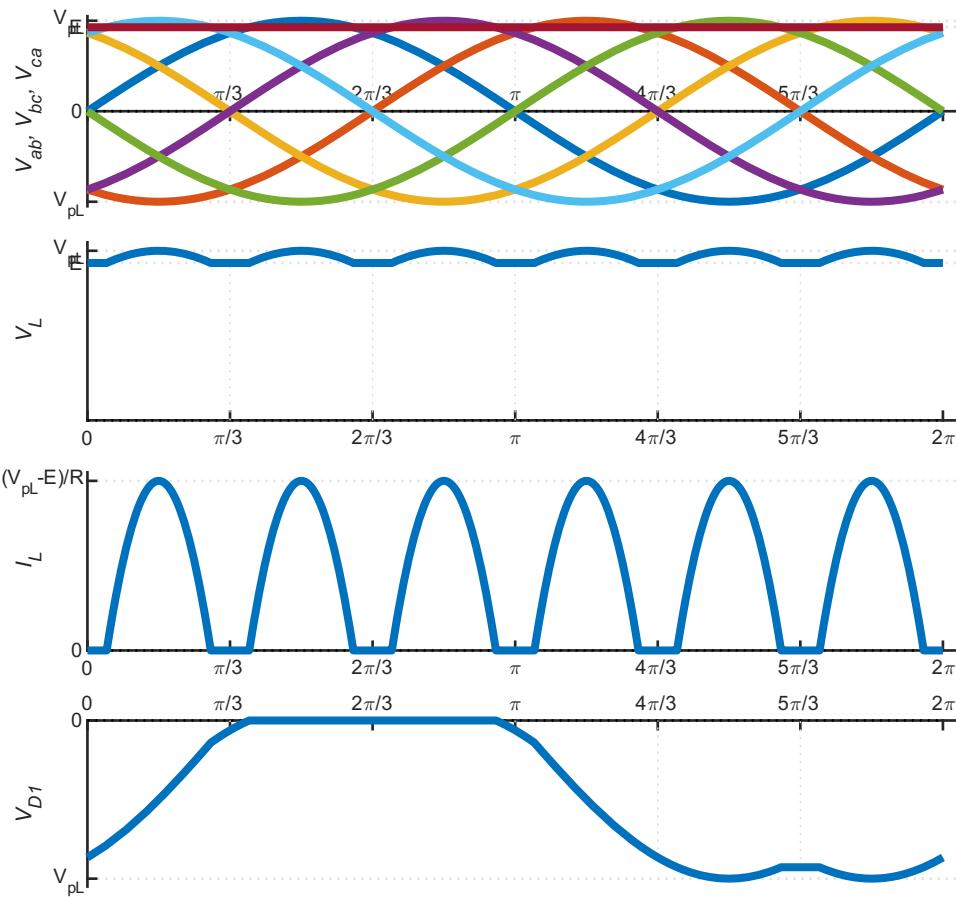
5.2.3 Formas de onda

As principais formas de onda são mostradas na Fig. 5.9. Observa-se que a interseção entre as formas de onda $V_{ab}(\omega t)$ e E ocorre para os ângulos θ_1 e θ_2 e se repete para $\theta_1 + n 2\pi/6$ e $\theta_2 + n 2\pi/6$. Durante estes períodos, a tensão na carga é sempre superior à tensão da fonte E . A corrente através da carga é proporcional à tensão sobre a resistência R .

As formas de onda ilustradas na Fig. 5.9 consideram $\sqrt{3}V_{pL}/2 < E < V_{pL}$. Caso E seja menor que $\sqrt{3}V_{pL}/2$, dois diodos estarão sempre em condução durante todo o ciclo de operação e as formas de onda corresponderão àquelas ilustradas na Fig. 5.7, mostrada anteriormente. Por outro lado, quando E é maior que a tensão de pico de linha (V_{pL}), nenhum diodo conduzirá durante o ciclo de operação e a tensão sobre a carga será igual àquela da fonte E .

1 | **Figura_WF_6pulsosM0_para_carga_RE()**

Figura 5.9. Principais formas de onda.



Primeiramente determina-se a interseção entre as formas de onda das duas fontes.

```
1 clearvars
2 syms V_pL wt E R
3
4 eq = V_pL*sin(wt) == E
```

$$eq = V_{pL} \sin(wt) = E$$

```
1 thetas = solve(eq,wt)
```

$$thetas = \begin{bmatrix} \arcsin\left(\frac{E}{V_{pL}}\right) \\ \pi - \arcsin\left(\frac{E}{V_{pL}}\right) \end{bmatrix}$$

```
1 theta_1 = thetas(1)
```

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{E}{V_{pL}}\right)$$

```
1 theta_2 = thetas(2)
```

$$\theta_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{E}{V_{pL}}\right)$$

O diodo D_1 conduzirá nos intervalos $[\theta_1 .. \theta_2]$ e $[\theta_1 + \pi/3 .. \theta_2 + \pi/3]$. Por sua vez, diodo D_2 conduzirá nos intervalos $[\theta_1 + 2\pi/3 .. \theta_2 + 2\pi/3]$ e $[\theta_1 + \pi .. \theta_2 + \pi]$ e o diodo D_3 conduzirá nos intervalos $[\theta_1 + 4\pi/3 .. \theta_2 + 4\pi/3]$ e $[\theta_1 + 5\pi/3 .. \theta_2 + 5\pi/3]$. Os diodos D_4 , D_5 e D_6 conduzirão π rad (180°) apóis D_1 , D_2 e D_3 .

5.2.4 Equações para o projeto

Tendo em vista que a operação desta estrutura depende dos valores de θ_1 e θ_2 , os mesmos serão utilizados para o projeto deste retificador.

A tensão média sobre a carga pode ser obtida usando

$$V_{LMed} = \frac{6}{2\pi} \left[\int_{\pi/3}^{\theta_1} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{3}V_p \sin(\omega t) d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{2\pi/3} Ed(\omega t) \right] \quad (5.13)$$

Que pode ser simplificada para

$$V_{LMed} = \frac{6}{2\pi} \left[\int_{\pi/3+\theta_2}^{\theta_1+2\pi/3} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{3}V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (5.14)$$

ou seja,

$$V_{LMed} = \frac{3}{\pi} \left[\int_{\theta_2}^{\theta_1+\pi/3} Ed(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{3}V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (5.15)$$

```
1 syms wt theta_1 theta_2 V_pL
2
3 V_LMed = 6/(2*sym('pi'))*(int(V_pL*sin(wt),wt,theta_1,theta_2)+...
4 int(E,wt,theta_2,sym('pi')/3+theta_1))
```

$$V_{L\text{Med}} = \frac{3(V_{pL}(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E(0.3333\pi + \theta_1 - \theta_2))}{\pi} \quad (5.16)$$

```
1 V_RMed = 6/(2*sym('pi'))*int((V_pL*sin(wt)-E),wt,theta_1,theta_2)
```

A tensão média sobre a resistência pode ser definida por

$$V_{R\text{Med}} = \frac{3(V_{pL}(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2)) + E(\theta_1 - \theta_2))}{\pi}$$

```
1 syms wt theta_1 theta_2
2
3 I_LMed = 6/(2*sym('pi'))*int((V_pL*sin(wt)-E)/R,wt,theta_1,theta_2)
```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{3\left(\frac{V_{pL}(\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))}{R} + \frac{E(\theta_1 - \theta_2)}{R}\right)}{\pi}$$

```
1 I_LMed = simplifyFraction(I_LMed)
```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{3(E\theta_1 - E\theta_2 + V_{pL}\cos(\theta_1) - V_{pL}\cos(\theta_2))}{R\pi}$$

```
1 I_LMed = collect(I_LMed, {'E', 'V_pL', 'R'})
```

$$I_{L\text{Med}} = \frac{V_{pL}(3\cos(\theta_1) - 3\cos(\theta_2)) + E(3\theta_1 - 3\theta_2)}{R\pi} \quad (5.17)$$

A tensão eficaz sobre a carga pode ser obtida através da equação

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{6}{2\pi} \left[\int_{\pi/3}^{\theta_1} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sqrt{3}V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) + \int_{\theta_2}^{2\pi/3} E^2 d(\omega t) \right]} \quad (5.18)$$

Que como visto anteriormente, corresponde a

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{3}{\pi} \left[\int_{\pi/3+\theta_2}^{\theta_1+2\pi/3} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sqrt{3}V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) \right]} \quad (5.19)$$

Ou seja,

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{3}{\pi} \left[\int_{\theta_2}^{\theta_1+\pi/3} E^2 d(\omega t) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\sqrt{3}V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t) \right]} \quad (5.20)$$

```

1 syms V_p wt, assume([V_p, sym('pi')], {'positive','real'})
2 V_LRMS = sqrt(3/(sym('pi'))*(int((V_p*sin(wt))^2,wt,theta_1,theta_2)+...
3 int((E)^2,wt,theta_2,sym('pi')/3+theta_1)))

```

$$V_{LRMS} = \frac{1.7321 \sqrt{E^2 (0.3333 \pi + \theta_1 - \theta_2) - 0.2500 V_{pL}^2 (2 \theta_1 - 2 \theta_2 - \sin(2 \theta_1) + \sin(2 \theta_2))}}{\pi^{0.5}} \quad (5.21)$$

E a tensão sobre a resistência pode ser determinada através de

```

1 V_RRMS = sqrt(6/(2*sym('pi'))*int((V_pL*sin(wt)-E)^2,wt,theta_1,theta_2));
2 MostrarEquacoesLongas(V_RRMS,[3,1])

```

$$V_{RRMS} = \frac{1.7321 \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8}}{\pi^{0.5}}$$

onde:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0.2500 V_{pL}^2 \sin(2 \theta_1) \\ \sigma_2 &= -0.2500 V_{pL}^2 \sin(2 \theta_2) \\ \sigma_3 &= -E^2 \theta_1 \\ \sigma_4 &= E^2 \theta_2 \\ \sigma_5 &= -0.5000 V_{pL}^2 \theta_1 \\ \sigma_6 &= 0.5000 V_{pL}^2 \theta_2 \\ \sigma_7 &= -2 E V_{pL} \cos(\theta_1) \\ \sigma_8 &= 2 E V_{pL} \cos(\theta_2)\end{aligned}$$

Como a corrente através do circuito auxiliar é proporcional à tensão sobre o resistor,

```
1 I_LRMS = V_RRMS/R
```

$$I_{LRMS} = \frac{V_{RRMS}}{R} \quad (5.22)$$

A tensão máxima sobre os diodos corresponde à tensão de linha máxima.

$$V_{DMax} = V_{pL}$$

```
1 V_DMax = V_pL
```

$$V_{DMax} = V_{pL} \quad (5.23)$$

E a corrente máxima,

$$I_{DMax} = (V_{pL} - E)/R$$

```
1 I_DMax = (V_pL - E)/R
```

$$I_{DMax} = -\frac{E - V_{pL}}{R} \quad (5.24)$$

5.2.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 5.16, 5.17, 5.20, 5.22, 5.23 e 5.24.

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 V_pL = sqrt(3)*sqrt(2)*220;
3 R = 10;
4 f = 60;
5 E = 500;
6 w = 2*pi*f

```

$$w = 376.9911$$

```

1 theta_1 = asin(E/V_pL)

```

$$\theta_1 = 1.1886$$

```

1 theta_2 = pi - asin(E/V_pL)

```

$$\theta_2 = 1.9530$$

```

1 V_LMed = (3*(V_pL*(cos(theta_1) - cos(theta_2)) + E*(pi/3 + theta_1 - theta_2)))/pi

```

$$V_{L\text{Med}} = 518.8789$$

```

1 I_LMed = (V_pL*(3*cos(theta_1) - 3*cos(theta_2)) + E*(3*theta_1 - 3*theta_2))/(R*pi)

```

$$I_{L\text{Med}} = 1.8879$$

```

1 V_LRMS = (sqrt(3)*sqrt(E^2*(pi/3 + theta_1 - theta_2) - ...
2 V_pL^2*(2*theta_1 - 2*theta_2 - sin(2*theta_1) + sin(2*theta_2))/4))/pi^0.5

```

$$V_{L\text{RMS}} = 519.1008$$

```

1 sigma1 = V_pL^2*sin(2*theta_1)/4;
2 sigma2 = -V_pL^2*sin(2*theta_2)/4;
3 sigma3 = -E^sym(2)*theta_1;
4 sigma4 = E^sym(2)*theta_2;
5 sigma5 = -V_pL^2*theta_1/2;
6 sigma6 = V_pL^2*theta_2/2;
7 sigma7 = -2*E*V_pL*cos(theta_1);
8 sigma8 = 2*E*V_pL*cos(theta_2);
9
10 V_RRMS = (sqrt(3)*sqrt(sigma1 + sigma2 + sigma3 + sigma4 + sigma5 + sigma6 + ...
11 sigma7 + sigma8))/pi^0.5

```

$$V_{RRMS} = 24.2222$$

$$1 \quad I_{LRMS} = V_{RRMS}/R$$

$$I_{LRMS} = 2.4222$$

$$1 \quad V_{DMax} = V_{pL}$$

$$V_{DMax} = 538.8877$$

$$1 \quad I_{DMax} = (V_{pL} - E)/R$$

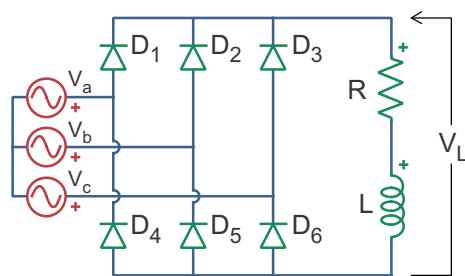
$$I_{DMax} = 3.8888$$

5.3 carga indutiva RL

5.3.1 Topologia

Este retificador é semelhante ao estudado na seção 5.1, exceto que agora a carga é indutiva, formada por um resistor e por um indutor conectados em série, conforme a Fig. 5.10.

Figura 5.10. Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga indutiva.



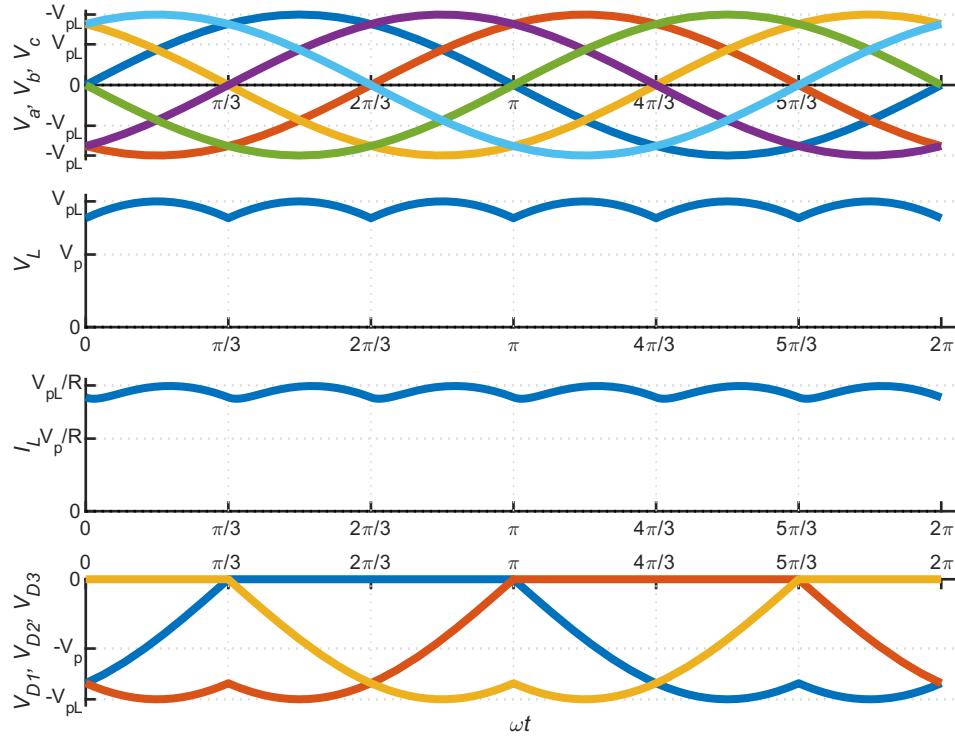
5.3.2 Etapas de operação

Esta carga apresenta uma característica indutiva devido à indutância em série com a carga resistiva. O comportamento do circuito é similar ao do retificador da seção 5.1, exceto que a corrente deixa de ser proporcional à tensão neste caso. Os diodos conduzem durante os mesmos períodos do conversor apresentado na seção 5.1, sendo que as etapas de operação foram ilustradas na Fig. 5.3.

5.3.3 Formas de onda

As principais formas de onda podem ser vistas na Fig. 5.11, a seguir. Observa-se que a corrente através da carga nunca se anula e, portanto, o retificador somente pode operar no modo de condução contínua, MCC.

Figura 5.11. Principais formas de onda.



5.3.3.1 Determinação de $i_L(t)$

Para obter a expressão da corrente através do indutor inicialmente necessita-se definir algumas variáveis simbólicas

```
1 syms omega phi wt I_L0 Z
2 sympref('FloatingPointOutput',0);
```

Foi visto na seção 1.3 que a corrente através da carga para um circuito indutivo alimentado por uma fonte de tensão é dada por 1.36, reproduzida a seguir. Aqui o valor de V_L será alterado para V_{pL} a fim de refletir que a tensão sobre a carga corresponde à tensão de linha.

```
1 i_L(wt) = -(V_pL*(sin(phi - wt) - exp((-wt/(omega*tau)))*sin(phi))...
2 - I_L0*Z*exp((-wt/(omega*tau))))/Z
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_{pL} \left(\sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z}$$

A corrente inicial através do indutor, IL_0 , não é nula, sendo necessário determiná-la, conforme segue.

A condição de contorno para a determinação de IL_0 é que esta corrente possui valores idênticos no início e no final do período de condução de cada par de diodos, visto que o circuito opera em regime permanente.

Por exemplo, fazendo-se $i_L(\pi/3) = i_L(2\pi/3)$ pode-se determinar IL_0

```
1 sympref('AbbreviateOutput', false);
2 eq = i_L(sym('pi')/3)==i_L(2*sym('pi')/3)
```

$$eq = -\frac{V_{pL} \left(\sin \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right) - e^{-\frac{\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{\pi}{3\omega\tau}}}{Z} = \\ -\frac{V_{pL} \left(\sin \left(\phi - \frac{2\pi}{3} \right) - e^{-\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - IL_0 Z e^{-\frac{2\pi}{3\omega\tau}}}{Z}$$

E resolvendo para IL_0

```
1 I_L0 = solve(eq, I_L0)
```

$$IL_0 = -\frac{V_{pL} \sin(\phi) - V_{pL} e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + V_{pL} \sin \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - V_{pL} \sin \left(\phi - \frac{2\pi}{3} \right) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}}}{Z - Z e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}}}$$

Simplificando,

```
1 I_L0 = simplify(expand(I_L0))
```

$$IL_0 = \frac{V_{pL} \left(\sin(\phi) - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + \sin \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - \sin \left(\phi - \frac{2\pi}{3} \right) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \right)}{Z \left(e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)}$$

Usando equivalências trigonométricas é possível transformar o termo $\sin \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right)$ em $\sin \left(\phi - \frac{2\pi}{3} \right) + (\dots)$.

Como

$$\sin(A) - \sin(B) = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) \Rightarrow \sin(A) = \sin(B) + 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

Dessa forma,

$$\sin \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(\phi - \frac{2\pi}{3} \right) + 2 \cos \left(\frac{1}{2} \left(\phi - \frac{\pi}{3} + \phi - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \sin \left(\frac{1}{2} \left(\phi - \frac{\pi}{3} - \phi + \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

Definindo a equivalência.

```
1 eq = sin(phi - sym('pi')/3) == sin(phi - 2*sym('pi')/3) + ...
2 2*cos((phi - sym('pi')/3 + phi - 2*sym('pi')/3)/2)* ...
3 sin((phi - sym('pi')/3 - phi + 2*sym('pi')/3)/2)
```

$$eq = \sin \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(\phi - \frac{2\pi}{3} \right) + 2 \cos \left(\phi - \frac{\pi}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

Como,

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

```
1 | eq = subs(eq,sin(sym('pi')/6),1/2)
```

$$eq = \sin\left(\phi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Além disso,

$$\cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\phi)$$

```
1 | eq = subs(eq,cos(phi - sym('pi')/2),sin(phi))
```

$$eq = \sin\left(\phi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(\phi)$$

Substituindo na equação de IL_0 ,

```
1 | I_L0 = subs(I_L0, lhs(eq), rhs(eq))
```

$$IL_0 = \frac{V_{pL} \left(\sin(\phi) - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) - \sin\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} + e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \left(\sin\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(\phi) \right) \right)}{Z \left(e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)}$$

Que pode ser simplificado para

```
1 | I_L0 = simplify(expand(I_L0))
```

$$IL_0 = \frac{V_{pL} \sin(\phi) \left(e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} + 1 \right)}{Z \left(e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)}$$

Substituindo IL_0 na equação de $i_L(wt)$

```
1 | i_L(wt) = subs(i_L(wt), 'I_L0', I_L0)
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_{pL} \left(\sin(\phi - wt) - e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right) - \frac{V_{pL} e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \sin(\phi) \left(e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} + 1 \right)}{e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1}}{Z}$$

Tentando simplificar a equação...

```
1 i_L = simplifyFraction(i_L,"Expand",true)
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_{pL} e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + V_{pL} \sin(\phi - \omega\tau) e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}} - V_{pL} \sin(\phi - \omega\tau) e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}}}{Z e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}} - Z e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}}}$$

```
1 %Agrupando V_pL e Z
2 i_L = collect(i_L,{V_pL, Z})
```

$$i_L(wt) = \frac{\left(e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi) + \sin(\phi - \omega\tau) e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}} - \sin(\phi - \omega\tau) e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}}\right) V_{pL}}{\left(e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}} - e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}}\right) Z}$$

```
1 i_L = collect(i_L,sym(sin(phi - wt)))
```

$$i_L(wt) = \frac{V_{pL} \left(e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}}\right)}{\left(e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}} - e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}}\right) Z} \sin(\phi - \omega\tau) + \frac{V_{pL} e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{\left(e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}} - e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}}\right) Z}$$

Como o seno é uma função ímpar,

```
1 i_L = subs(i_L,-sin(phi - wt),sin(wt - phi))
```

$$i_L(wt) = -\frac{V_{pL} \sin(\phi - \omega\tau)}{Z} - \frac{V_{pL} e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z \left(e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}}\right)}$$

```
1 i_L = collect(i_L,{V_pL})
```

$$i_L(wt) = \left(-\frac{\sin(\phi - \omega\tau)}{Z} - \frac{e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{Z \left(e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}} - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} e^{\frac{\omega\tau}{3\omega\tau}}\right)}\right) V_{pL}$$

Esta equação ainda pode ser simplificada manualmente isolando-se Z e multiplicando-se o numerador e o denominador da segunda parcela por $e^{-\frac{\omega\tau}{3}}$.

$$i_L(wt) = \left(-\sin(\phi - \omega\tau) - \frac{e^{\frac{-\omega\tau}{3}} e^{\frac{2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{\left(1 - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}}\right)}\right) \frac{V_{pL}}{Z}$$

Então

$$i_L(wt) = \left(-\sin(\phi - \omega\tau) - \sin(\phi) \frac{e^{\frac{-\omega\tau+2\pi/3}{3}}}{1 - e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}}}\right) \frac{V_{pL}}{Z}$$

Ou seja,

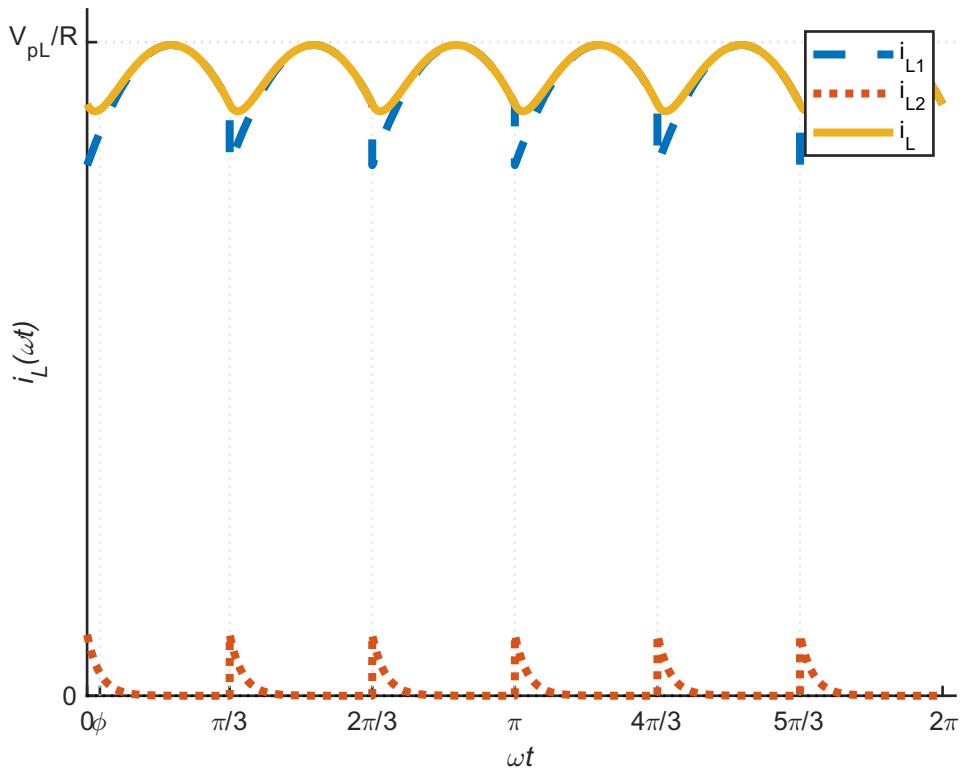
```
1 i_L = (-sin(phi - wt) - exp((-3*wt + 2*sym(pi))/(3*omega*tau))*sin(phi)/(1 - exp(sym(pi)/(3*omega*tau))))*(V_pL/Z)
```

$$i_L = -\frac{V_pL \left(\sin(\phi - wt) - \frac{e^{-\frac{3wt-2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1} \right)}{Z}$$

Na Fig. 5.12 é mostrada a forma de onda da corrente $i_L(\omega t)$ e as formas de onda das componentes ($i_{L1}(\omega t)$ e $i_{L2}(\omega t)$) que somadas compõem a corrente através da carga. Observa-se que a frequência das formas de onda na carga é seis vezes a frequência das fontes que alimentam a estrutura.

```
1 Figura_IL_6pulsosM0_para_carga_RL();
```

Figura 5.12. Forma de onda da corrente através da carga e de suas componentes.



5.3.3.2 Análise utilizando a Série de Fourier

A série de Fourier para a corrente de carga pode ser calculada conforme abaixo.

$$v(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(6n\omega t) + b_n \sin(6n\omega t))$$

e a corrente através da seguinte definição.

$$i(\omega t) = \frac{a_0}{Z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(6n\omega t - \phi_n) + b_n \sin(6n\omega t - \phi_n)}{Z_n}$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(\omega t) d(\omega t)$$

Observa-se que a frequência das senoides corresponde ao sétuplo da frequência de entrada.

```

1 % definição das variáveis simbólicas
2 syms V_pL wt n omega L R
3 % definição das restrições
4 assume(n,{'positive', 'integer'})
```

Tendo em vista a multiplicação da frequência da forma de onda sobre a carga, o intervalo a ser considerado inicia em $\pi/3$ e termina em $2\pi/3$.

Limites de integração:

```

1 lim_inf = sym('pi')/3;
2 lim_sup = 2*sym('pi')/3;
```

Período:

```
1 T = (2*sym('pi'))/6;
```

Forma de onda durante a condução do diodo D_1

```
1 Va(wt) = V_pL*sin(wt);
```

Determinação dos coeficientes

```
1 a_0 = 1/(T)*int(Va,wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_0 = \frac{3 V_{pL} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)}{\pi}$$

Para se obter o valor numérico de a_0 ,

```
1 a_0 = subs(a_0, {cos(sym('pi')/3),cos(2*sym('pi')/3)},{1/2,-1/2})
```

$$a_0 = \frac{3 V_{pL}}{\pi} \quad (5.25)$$

Determinação de a_n :

```
1 a_n(n) = 2/(T)*int(Va*cos(n*6*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$a_n(n) = -\frac{6 V_{pL} \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi(6n-1)}{3}\right)}{12n-2} - \frac{\cos\left(\frac{\pi(6n+1)}{3}\right)}{12n+2} - \frac{\cos\left(\frac{2\pi(6n-1)}{3}\right)}{12n-2} + \frac{\cos\left(\frac{2\pi(6n+1)}{3}\right)}{12n+2} \right)}{\pi}$$

```
1 %test(a_n)
2 a_n = simplify(expand(a_n));
3 MostrarEquacoesLongas(a_n,[3])
```

$$a_n(n) = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4}{\pi(36n^2 - 1)}$$

onde:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 6 V_{pL} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2n\pi) \\ \sigma_2 &= -6 V_{pL} \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - 1 \right) \left(2 \cos(2n\pi)^2 - 1 \right) \\ \sigma_3 &= 36 V_{pL} n \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(2n\pi) \\ \sigma_4 &= -144 V_{pL} n \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2n\pi) \sin(2n\pi)\end{aligned}$$

Sabendo que

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(2n\pi) = 0$$

$$\cos(2n\pi) = 1$$

```
1 a_n(n) = subs(a_n, {cos(sym('pi'))/3}, {1/2, -1/2});
2 a_n(n) = subs(a_n, {sin(sym('pi'))/3}, {sqrt(3)/2, sqrt(3)/2})
3 a_n(n) = subs(a_n, {cos(2*n*sym('pi'))}, {1, 0})
```

$$a_n(n) = -\frac{6 V_{pL}}{\pi(36n^2 - 1)} \quad (5.26)$$

Determinação de b_n :

```
1 b_n(n) = 2/(T)*int(Va*sin(n*6*wt),wt,lim_inf,lim_sup)
```

$$b_n(n) = -\frac{6 V_{pL} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi(6n-1)}{3}\right)}{12n-2} - \frac{\sin\left(\frac{\pi(6n+1)}{3}\right)}{12n+2} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi(6n-1)}{3}\right)}{12n-2} + \frac{\sin\left(\frac{2\pi(6n+1)}{3}\right)}{12n+2} \right)}{\pi}$$

```
1 b_n = simplify(expand(b_n));
2
3 MostrarEquacoesLongas(b_n,[3],0)
```

$$b_n(n) = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4}{\pi(36n^2 - 1)}$$

onde:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 6 V_{pL} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin(2n\pi) \\ \sigma_2 &= -36 V_{pL} n \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos(2n\pi) \\ \sigma_3 &= -12 V_{pL} \cos(2n\pi) \sin(2n\pi) \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - 1\right) \\ \sigma_4 &= 72 V_{pL} n \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \left(2 \cos(2n\pi)^2 - 1\right)\end{aligned}$$

Substituindo os termos conhecidos, como feito anteriormente para a_n

```
1 b_n(n) = subs(b_n, {cos(sym('pi'))/3,cos(2*sym('pi'))/3},{1/2, -1/2});
2 b_n(n) = subs(b_n, {sin(sym('pi'))/3,sin(2*sym('pi'))/3},{sqrt(3)/2, sqrt(3)/2})
3 b_n(n) = subs(b_n, {cos(2*n*sym('pi'))},sin(2*n*sym('pi'))},{1,0})
```

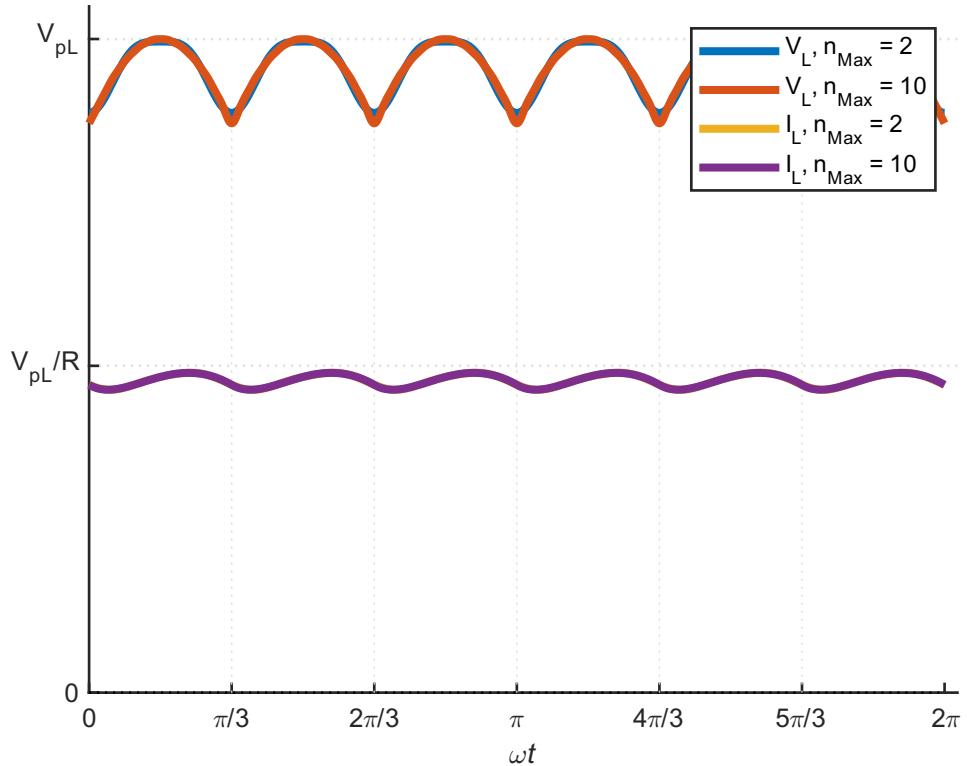
$$b_n(n) = 0 \quad (5.27)$$

A Fig. 5.13 mostra o gráfico da Série de Fourier obtida para a tensão e também para a corrente através da carga, sendo que foi variada a quantidade de termos utilizados para a geração da série. Foram utilizados dois termos para gerar um par de formas de onda e dez termos para gerar o outro par, para vias de comparação.

Observa-se que mesmo utilizando-se somente dois termos a forma de onda de corrente é idêntica àquela em que são utilizados dez termos.

```
1 Figura_VL_IL_6pulsosM0_para_carga_RL_Serie_Fourier;
```

Figura 5.13. Forma de onda da corrente através da carga.



5.3.4 Equações para o projeto

As equações das tensões V_{LMed} , V_{LRMS} e de V_{DMax} são as mesmas da seção 5.1.4, pois as formas de onda de tensão são idênticas.

```

1 syms V_p wt
2 V_LMed = 6/(2*sym('pi'))*int(V_p*sqrt(3)*sin(wt),wt,pi/3,2*pi/3)

```

$$V_{LMed} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{\pi} \quad (5.28)$$

O valor de I_{LMed} pode ser obtido através do termo a_0 da série de Fourier, dividido pela resistência, conforme já demonstrado.

```

1 syms V_p wt R
2 I_LMed = (6*sqrt(sym(3))*V_p)/(2*sym(pi)*R)

```

$$I_{LMed} = \frac{3\sqrt{3}V_p}{R\pi} \quad (5.29)$$

```

1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(6/(2*sym('pi'))*int((V_p*sqrt(3)*sin(wt))^2,wt,pi/3,2*pi/3))

```

$$V_{LRMS} = \frac{V_p \sqrt{\frac{3\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{4}}}{\sqrt{\pi}} \quad (5.30)$$

A corrente eficaz através da carga é calculada através da equação

$$I_{LRMS} = \sqrt{\frac{6}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (i_L(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (5.31)$$

```
1 %clearvars
2 syms V_p phi wt tau Z, assume([V_p, Z], 'positive')
3 i_L = (-sin(phi - wt) - ...
4 exp(-3*wt + 2*pi)/(3*omega*tau))*sin(phi)/(1 - exp(pi/(3*omega*tau)))*(V_pL/Z)
```

$$i_L = -\frac{V_{pL} \left(\sin(\phi - wt) - \frac{e^{-\frac{3wt-2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1} \right)}{Z}$$

```
1 I_LRMS = sqrt(6/(2*sym('pi'))*int((i_L)^2,wt,sym('pi')/6,5*sym('pi')/6));
2 I_LRMS = simplify(expand(eval(I_LRMS)));
```

Como o resultado obtido é bastante longo/complexo, não será reproduzido aqui. Sugere-se determinar I_{LRMS} numericamente ou através de simulação.

A tensão máxima sobre os diodos foi discutida na seção 5.1.4.

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{DMax} = \sqrt{3} V_p \quad (5.32)$$

A corrente máxima pode ser obtida derivando-se a equação da corrente e igualando a zero,

```
1 % Por exemplo:
2 eq = diff(i_L,wt)==0
```

$$eq = \frac{V_{pL} \left(\cos(\phi - wt) - \frac{e^{-\frac{3wt-2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau \left(e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1 \right)} \right)}{Z} = 0$$

multiplica-se por Z/V_p para simplificar e substitui-se ωt por t_{Max} .

```
1 % Por exemplo:
2 eq = subs(eq*Z/V_pL,wt, sym('t_Max'))
```

$$eq = \cos(\phi - t_{\text{Max}}) - \frac{e^{-\frac{3t_{\text{Max}}-2\pi}{3\omega\tau}} \sin(\phi)}{\omega\tau(e^{\frac{\pi}{3\omega\tau}} - 1)} = 0$$

Como t_{Max} é argumento de um cosseno e também expoente da função exponencial, não é possível obter seu valor algébrico. Dessa forma, encontra-se t_{Max} numericamente e substitui-se em $i_L(\omega t)$. Um palpite inicial para a raiz é $T/4$.

```
1 % Por exemplo:
2 % t_Max = vpasolve(eq,sym('t_Max'),1/(4*f))
3 % I_LMax = i_L(t_Max)
```

Em termos práticos, o valor máximo que a corrente de carga poderá atingir é dado por

$$I_{D\text{Max}} = V_{pL}/R$$

```
1 I_DMax = V_pL/R
```

$$I_{D\text{Max}} = \frac{V_{pL}}{R} \quad (5.33)$$

5.3.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32 e 5.33.

```
1 syms wt
2 sympref("FloatingPointOutput",1);
3 V_p = sqrt(2)*220;
4 R = 10;
5 L = 50e-3;
6 f = 60;
7
8 w = 2*pi*f
```

$$w = 376.9911$$

```
1 omega = w;
2
3 tau = L/R
```

$$\tau = 0.0050$$

```
1 XL = w*L
```

$$X_L = 18.8496$$

```
1 Z = sqrt(R^2+(XL)^2)
```

$$Z = 21.3379$$

```
1 phi = atan2(XL,R)
```

$$\phi = 1.0830$$

```
1 i_L(wt) = (-sin(phi - wt) - exp((-3*wt + 2*sym(pi))/(3*omega*tau))*...
2 sin(phi)/(1 - exp(sym(pi)/(3*omega*tau))))*(V_p*sqrt(3)/Z)
```

$$i_L(wt) = 30.0304 e^{1.1111 - 0.5305 wt} + 25.2550 \sin(wt - 1.0830)$$

Que pode ser ilustrada através de

```
1 % figure
2 % fplot(i_L(wt),[0,2*pi])
```

A tensão média na carga é definida por:

```
1 V_LMed = (6*sqrt(3)*V_p)/(2*pi)
```

$$V_{L\,Med} = 514.5999$$

```
1 I_LMed = (6*sqrt(3)*V_p)/(2*pi*R)
```

$$I_{L\,Med} = 51.4600$$

```
1 V_LRMS = V_p*sqrt((3*(2*pi + 3*sqrt(3)))/(4*pi))
```

$$V_{L\,RMS} = 515.0528$$

```
1 I_LRMS = sqrt(6/(2*pi)*int((i_L)^2,wt,pi/3,2*pi/3))
```

$$I_{L\,RMS} = 51.4603$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{D\,Max} = 538.8877$$

```
1 syms wt_Max
2 eq = diff(subs(i_L(wt),wt,wt_Max))==0
```

$$eq = 25.2550 \cos(wt_{Max} - 1.0830) - 15.9316 e^{1.1111 - 0.5305 wt_{Max}} = 0$$

```
1 wt_Max = vpasolve(eq,sym('wt_Max'),2*pi/4)
```

$$wt_{Max} = 1.8559$$

```
1 I_LMax = i_L(wt_Max)
```

$$I_{L Max} = 51.7136$$

Assim

```
1 I_DMax = i_L(wt_Max)
```

$$I_{D Max} = 51.7136$$

ou menor que

```
1 I_DMax = sqrt(3)*V_p/R
```

$$I_{D Max} = 53.8888$$

5.4 Carga RL com Diodo de Roda Livre

5.4.1 Topologia

Esta topologia opera de maneira semelhante àquela apresentada na seção 5.3. O diodo de roda livre, D_{RL} , ajuda a proteger os demais diodos quando ocorrem as comutações de corrente entre os mesmos. Essa topologia está ilustrada na Fig. 5.14.

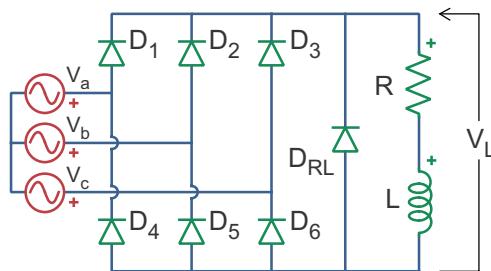
5.4.2 Etapas de operação

A operação desta estrutura é idêntica à da estrutura sem diodo de roda livre apresentada na seção 5.3.2. As etapas de operação são idênticas àquelas da Fig. 5.3.

5.4.3 Formas de onda

As principais formas de onda são idênticas àquelas da seção 5.3.3 e são ilustradas na Fig. 5.11.

Figura 5.14. Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga indutiva e diodo de roda-livre.



5.4.4 Equações para o projeto

As principais equações para o projeto são as mesmas daquelas apresentadas seção 5.3.4. O diodo de roda-livre pode ser projetado como segue.

$$V_{DRL\ Max} = V_{pL}$$

5.4.5 Exemplos numéricos

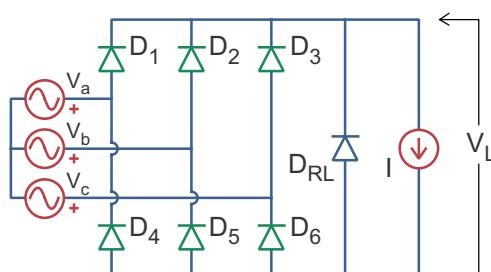
Os exemplos numéricos são idênticos àqueles da seção 5.3.5.

5.5 Carga I com Diodo de Roda-Livre

5.5.1 Topologia

A carga conectada à esta topologia é uma fonte de corrente ou pode ser uma carga com uma indutância muito alta. Devido à característica indutiva da carga, a corrente permanece praticamente constante e é importante que haja um diodo em paralelo com a mesma para proteger os diodos D_1 - D_6 nos instantes de suas comutações, Fig. 5.15.

Figura 5.15. Retificador trifásico de onda completa à diodo com carga de fonte de corrente.



5.5.2 Etapas de operação

Esta estrutura opera de maneira semelhante àquela da seção 5.1, a diferença é que a corrente através dos diodos D_1-D_6 não varia senoidalmente, devido à fonte de corrente I em série com os mesmos quando estes estão em condução, Fig. 5.15. As etapas de operação são as mesmas da topologia estudada em 5.1.2 e não serão repetidas aqui.

5.5.3 Formas de onda

As principais formas de ondas estão mostradas na Fig. 5.16. Observa-se que a corrente através da carga é contínua e igual a I e que a mesma circula através do diodo D_1 entre os ângulos $\pi/3$ e π , através do diodo D_2 após o ângulo π e até atingir o ângulo $5\pi/3$ e então através do diodo D_3 de $5\pi/3$ até que o diodo D_1 volte a conduzir. Por sua vez, o diodo D_5 conduz entre os ângulos 0 e $2\pi/3$, então o diodo D_6 conduz até atingir o ângulo $4\pi/3$ e finalmente o diodo D_5 conduz até o ângulo 2π .

1 Figura_WF_6pulsosM0_para_carga_I()

5.5.4 Equações para o projeto

A tensão média sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{LMed} = \frac{6}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sqrt{3}V_p \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (5.34)$$

1 syms V_pL wt I
2 V_LMed = 6/(2*sym('pi'))*int(V_pL*sin(wt),wt,sym(pi)/3,2*sym(pi)/3)

$$V_{LMed} = \frac{3V_pL}{\pi} \quad (5.35)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

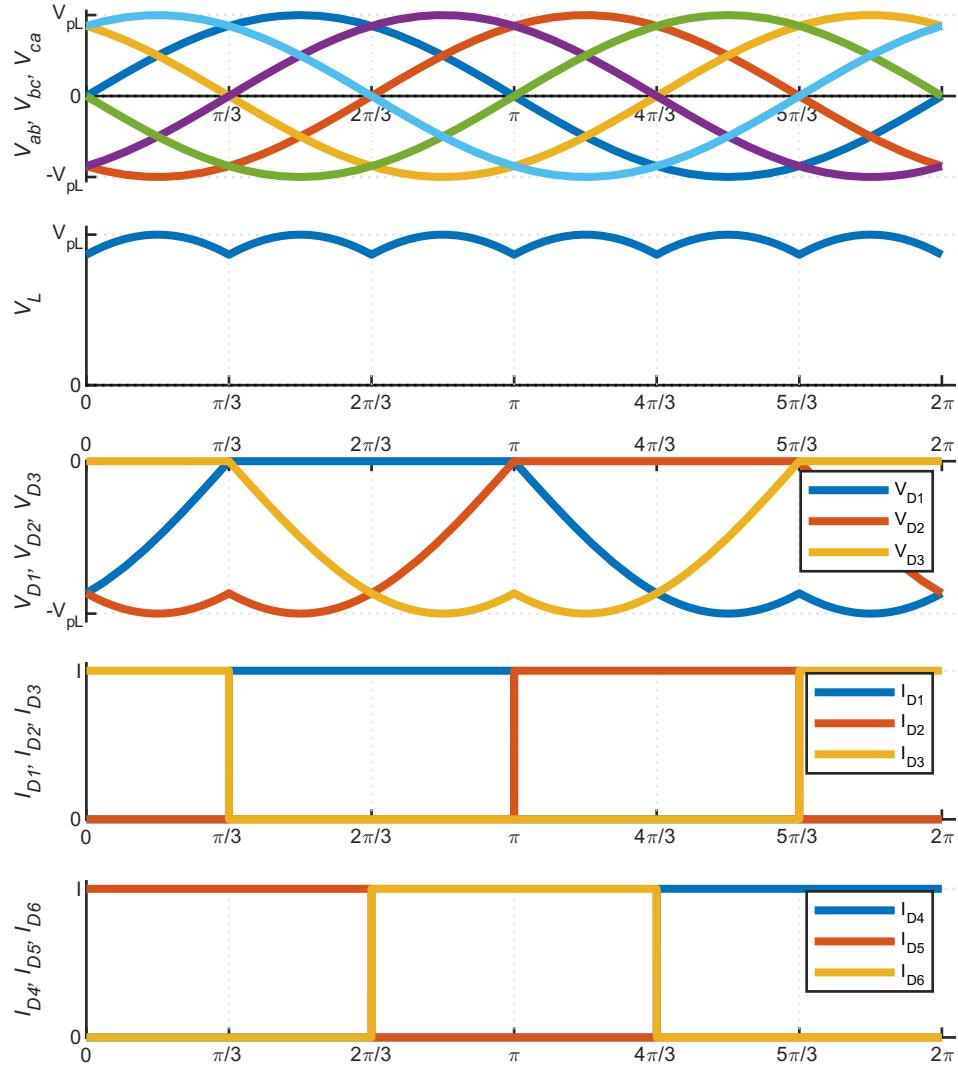
1 syms V_pL wt R
2 I_LMed = 6/(2*sym('pi'))*int(I,wt,sym('pi')/3,2*sym('pi')/3)

$$I_{LMed} = I \quad (5.36)$$

A tensão eficaz sobre a carga é calculada através da equação

$$V_{LRMS} = \sqrt{\frac{6}{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (\sqrt{3}V_p \sin(\omega t))^2 d(\omega t)} \quad (5.37)$$

Figura 5.16. Principais formas de onda.



```

1 syms V_p wt, assume(V_p, 'positive')
2 V_LRMS = sqrt(6/(2*sym('pi'))*int((V_pL*sin(wt))^2,wt,sym('pi')/3,2*sym('pi')/3))

```

$$V_{LRMS} = \frac{\sqrt{0.2500 V_{pL}^2 (2\pi + 3 \sin(0.6667\pi) - 3 \sin(1.3333\pi))}}{\pi^{0.5000}}$$

Como

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

```

1 V_LRMS = subs(V_LRMS, {sin(2*sym('pi')/3),sin(4*sym('pi')/3)},{sqrt(3)/2, -sqrt(3)/2})

```

$$V_{LRMS} = \frac{\sqrt{0.2500 V_{pL}^2 (2\pi + 5.1962)}}{\pi^{0.5}}$$

Que corresponde a

$$V_{LRMS} = V_{pL} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}} \quad (5.38)$$

A corrente é constante através da carga. Então,

```
1 syms V_p wt R, assume([I, sym('pi')], 'positive')
2 I_LRMS = sqrt(6/(2*sym('pi'))*int(I^2,wt,sym('pi')/3,2*sym('pi')/3))
```

$$I_{LRMS} = I \quad (5.39)$$

A tensão máxima sobre os diodos D_1-D_6 corresponde à soma fasorial de duas fontes de alimentação.

$$V_{DMax} = \sqrt{3}V_p$$

```
1 V_DMax = sqrt(3)*V_p
```

$$V_{DMax} = 1.7321 V_p \quad (5.40)$$

E sobre o diodo de roda livre

$$V_{DRLMax} = V_{pL}$$

```
1 V_DRLMax = V_pL
```

$$V_{DRLMax} = V_{pL}$$

E a corrente máxima,

$$I_{DMax} = I_{DRLMax} = I$$

```
1 I_DMax = I
```

$$I_{DMax} = I \quad (5.41)$$

5.5.5 Exemplos numéricos

As principais grandezas para este retificador serão calculadas numericamente a seguir, 5.35, 5.36, 5.38, 5.39, 5.40 e 5.41.

```

1 V_p = sqrt(2)*220;
2 V_pL = sqrt(3)*sqrt(2)*220;
3 I = 10;
4
5 V_LMed = 3*V_pL/pi

```

$$V_{L\,Med} = 514.5999$$

```

1 I_LMed = I

```

$$I_{L\,Med} = 10$$

```

1 V_LRMS = V_pL*sqrt(1/2+3*sqrt(3)/(4*pi))

```

$$V_{L\,RMS} = 515.0528$$

```

1 I_LRMS = I

```

$$I_{L\,RMS} = 10$$

```

1 V_DMax = sqrt(3)*V_p

```

$$V_{D\,Max} = 538.8877$$

```

1 I_DMax = I

```

$$I_{D\,Max} = 10$$

5.6 Conclusão

Esta topologia aproveita de maneira mais eficaz as fontes de alimentação trifásicas. As tensões e correntes através da carga têm suas frequências multiplicadas por seis. A corrente da carga nunca se anula, de modo que a topologia sempre opera no modo de condução contínua. De fato, a mesma é aproximadamente contante para até mesmo pequenas indutâncias. Idealmente o diodo de roda livre não deverá entrar em condução.

Anexo 1: Demonstração

A equação pode ser simplificado, conforme demonstrado a seguir.

$$i_{L,E1,MCC} = -\frac{e^{-\frac{wt}{\omega\tau}} \left(e^{\frac{wt}{\omega\tau}} (V_p \sin(\phi-wt) - V_p \sin(\phi-wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}) + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) \right)}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Multiplica-se o numerador pelo termo $e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}$.

$$i_{L,E1,MCC} = -\frac{(V_p \sin(\phi-wt) - V_p \sin(\phi-wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}) + V_p e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{Z - Z e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Coloca-se V_p/Z em evidência.

$$i_{L,E1,MCC} = -\frac{V_p}{Z} \frac{(\sin(\phi-wt) - \sin(\phi-wt) e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}) + e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{1 - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Coloca-se $\sin(\phi - wt)$ em evidência.

$$i_{L,E1,MCC} = -\frac{V_p}{Z} \frac{\sin(\phi-wt) (1 - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}) + e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{1 - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}}$$

Separase a fração da direita em dois termos.

$$i_{L,E1,MCC} = -\frac{V_p}{Z} \left[\sin(\phi - wt) + \frac{e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} \sin(\phi) e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{1 - e^{\frac{\pi}{\omega\tau}}} \right]$$

Agrupam-se os termos exponenciais no numerador

$$i_{L,E1,MCC} = -\frac{V_p}{Z} \left[\sin(\phi - wt) + \frac{\sin(\phi) e^{-\frac{wt}{\omega\tau}}}{e^{\frac{\pi}{\omega\tau}} - 1} \right]$$

Redefinindo $i_{L,E1,MCC}$

```
1 i_L_E1_MCC = -V_p/Z*(sin(phi - wt) + sin(phi)*exp(-wt/(omega*tau))/(exp((-sym('pi'))/(omega*tau)) - 1))
```

ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETIFICADORAS À DIODO

- 🌐 www.atenaeditora.com.br
- ✉️ contato@atenaeditora.com.br
- ⌚ [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
- FACEBOOK www.facebook.com/atenaeditora.com.br

ANÁLISE DE ESTRUTURAS RETIFICADORAS À DIODO

- 🌐 www.atenaeditora.com.br
- ✉️ contato@atenaeditora.com.br
- ⌚ [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
- FACEBOOK www.facebook.com/atenaeditora.com.br