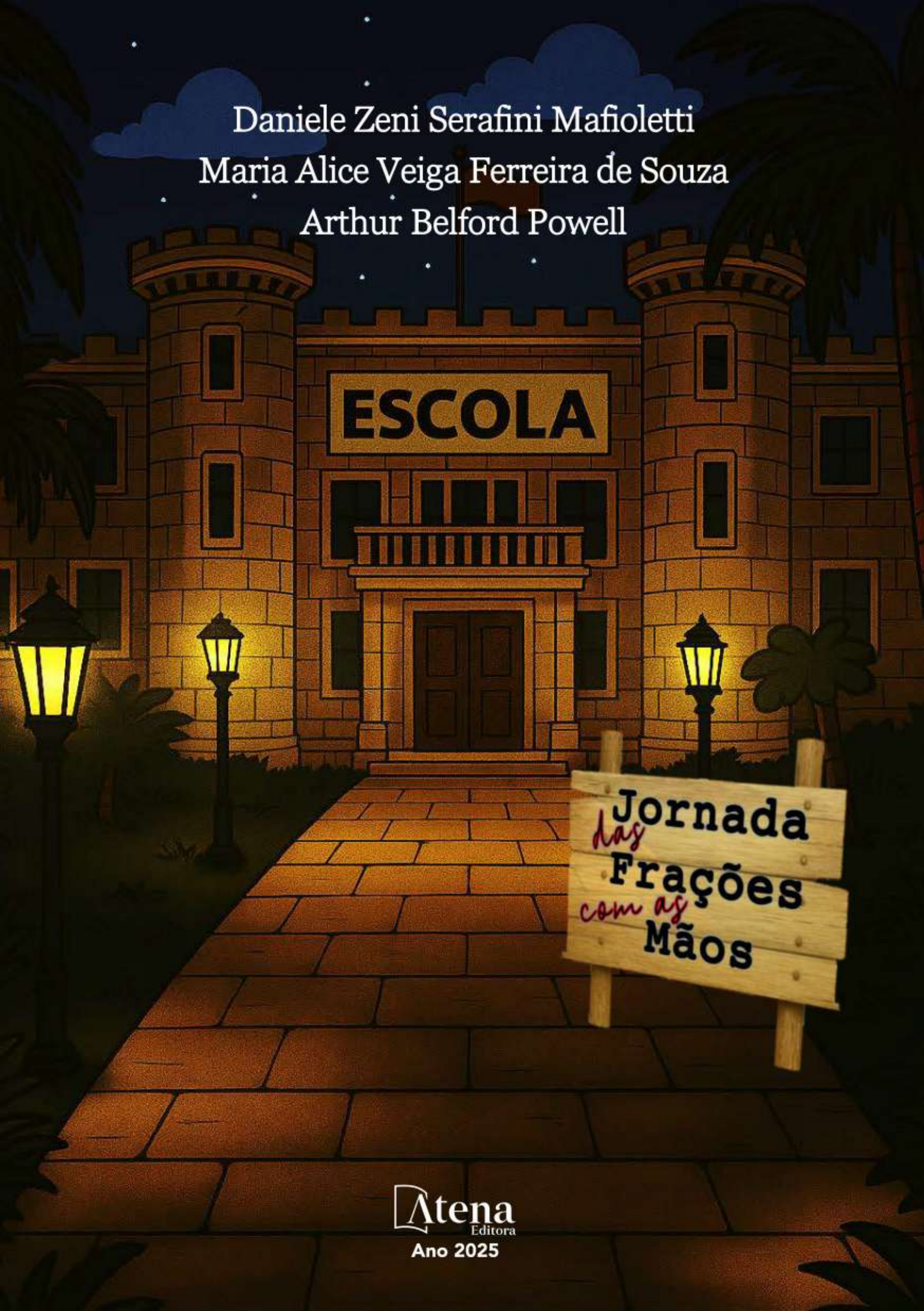
Atena Editora
Ano 2025

Jornada das Frações com as Mãos

Daniele Zeni Serafini Mafioletti
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Arthur Belford Powell

Daniele Zeni Serafini Mafioletti
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Arthur Belford Powell



Jornada das Frações com as Mãos

Atena Editora
Ano 2025

Instituto Federal do Espírito Santo - Brasil
Jadir José Pela

Rutgers University – Newark - USA
Chancellor Tonya Smith-Jackson

Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática
Manuella Villar Amado

Comitê Científico
Prof. Dr. Edmar Reis Thiengo - IFES
Prof. Dr. Luciano Lessa Lorenzoni - IFES
Prof. Dr. Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti - UESB

Editoração Eletrônica
Atena Editora

Revisora de Língua Portuguesa
Katia Cilene Veloso

Capa
Assistente Virtual Luzia

Projeto Gráfico
Daniele Zeni Serafini Mafioletti
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

Diagramação
Maria Victória Lucas Bortolozzo

Geração de Imagens
Artificial Intelligence chatgpt.com
Artificial Intelligence copilot.microsoft.com
Assistente Virtual Luzia

Designer Gráfica - Reedição de Imagens
Maria Victória Lucas Bortolozzo

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira Scheffer
Assistente editorial
Flávia Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos

Jornada das frações com as mãos

Autores: Daniele Zeni Serafini Mafioletti
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Arthur Belford Powell
Revisão: Os autores
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
M187 Mafioletti, Daniele Zeni Serafini Jornada das frações com as mãos / Daniele Zeni Serafini Mafioletti, Maria Alice Veiga Ferreira de Souza, Arthur Belford Powell. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2025. Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-65-258-3600-3 DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.003252409 1. Frações. I. Mafioletti, Daniele Zeni Serafini. II. Souza, Maria Alice Veiga Ferreira de. III. Powell, Arthur Belford. IV. Título. CDD 513.26
Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
+55 (42) 3323-5493
+55 (42) 99955-2866
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Em cada toque, uma nova descoberta.
Com as mãos, a mente se transforma.

Daniele Zeni Serafini Mafioletti

Agradecimentos

A concretização da **Jornada das Frações com as Mãos** é fruto de esforços de muitas pessoas e instituições. A cada indivíduo que, com sua participação, envolvimento e dedicação, contribuiu para a construção deste livro, expressamos nosso mais profundo agradecimento — que corre especialmente às pessoas e entidades a seguir nominadas.

Aos professores Aline Tavares Soares, Camila Augusta do Nascimento Amaral, Geraldo Bull da Silva Júnior, Leonamme Valvides da Costa Teixeira, Marcelo Morello, Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues e Thaís Elisa Abreu Pacheco, pelas valiosas contribuições durante o planejamento do Lesson Study, que foi semente para muitas ideias que aqui estão. Aos professores Adelson Cursuol, Dwane Cecilia Damas, Gislaine Soares Velloso e Marcos Vinicius de Oliveira Reis, registramos nosso reconhecimento pela dedicação ao ensino de matemática a estudantes cegos.

Agradecemos, igualmente, ao Centro Estadual de Educação de Jovens e Adultos "Pedro Antonio Vitali", por acreditar em nossa proposta e colaborar de forma plena para sua realização, particularmente à coordenadora pedagógica Marcella Simonetti Pasolini e à professora Maryule Damas Fazolo — esta última, também pessoa cega — pela participação na formação voltada ao desenvolvimento do conceito de frações sob a perspectiva da medição, e por enriquecerem nossas reflexões com suas experiências e saberes. Ao diretor Rodrigo Tardin Francischetto por garantir a infraestrutura necessária e por promover a inclusão de estudantes com deficiência visual no âmbito da Rede Estadual de Ensino de Colatina.

Reconhecemos, ainda, a valiosa atuação dos professores e pesquisadores da comissão científica, cujas sugestões e críticas construtivas contribuíram significativamente para o aprimoramento do conteúdo desta obra.

Por fim, ao Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat), à Universidade Aberta Capixaba (UnAC) e à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (Fapes) pelo apoio institucional e pelo fomento financeiro que viabilizou o desenvolvimento desta pesquisa.

Daniele Zeni Serafini Mafioletti
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Arthur Belford Powell

Carta ao Professor

No silêncio das cores e no toque do mundo,
há frações que se escondem num traço profundo.
Não são só pedaços, nem partes quebradas —
são medidas de história, em mãos entrelaçadas.

Com barras que contam, sem precisar ver,
com dedos que tocam, com olhos de ser,
faz-se o número vivo, o inteiro a se abrir,
e a parte revela o que está por vir.

Entre o branco e o vermelho, o azul e o marrom,
cada cor é um passo, um gesto, um tom.
Cuisenaire é ponte, é régua, é canção,
que afina o ensino com inclusão.

Não há um caminho que sirva a todos —
mas há caminhos se escutamos seus modos.
Deixe que a régua se torne conversa,
que a fração seja o tempo que a escuta dispersa.

Este livro é convite, é margem e é centro,
pra pensar o ensino com mais sentimento.
Que a matemática, em sua precisão,
seja também encontro, cuidado e visão.

Prefácio

O imanente como território acessível e inclusivo para ensinar e aprender frações no ensino de matemática

---

O livro *"Jornada das Frações com as Mãos"* é um belo e necessário convite às e aos docentes do ensino de matemática a (re)significarem o ensino de frações, fazendo uso das 'barras de *Cuisenaire'*. O livro apresenta processos educativos por meio da adoção de práticas acessíveis, alinhadas à valorização da diversidade e à promoção da equidade.

Com um estilo de escrita ensaístico, trata-se de um convite ao uso de metodologias a partir do uso de material concreto para o *ensino e a aprendizagem* de frações com foco em estudantes cegos, que, também se aplica amplamente aos estudantes videntes. É uma metodologia que, de maneira qualificada, se afasta da antiga tradição ainda presente no ensino de matemática, de fazer uso excessivo e precoce da abstração. Afastando-se dessa tradição, a presente proposta metodológica de ensino e aprendizagem, resultante de trabalho de pesquisa em nível de mestrado, propõe uma experiência empírico-sensorial em dimensão tátil.

A pesquisa, agora disponibilizada para um público mais amplo por meio desta publicação em formato de livro, opera experiências sensoriais que favorecem não apenas práticas de ensino e de aprendizagem acessíveis e inclusivas para estudantes cegos, mas, sobretudo, delineia um processo formativo para docentes promoverem uma educação matemática inclusiva, acessível, concreta e humanizada.

Às pessoas leitoras deste livro será apresentada uma escrita dialógica entrelaçada e consistentemente fundamentada teoricamente. Em outras palavras, estamos diante de um texto imerso na práxis pedagógica e acadêmica de suas autoras e autor. Essas são algumas das qualidades e contribuições perceptíveis neste livro, assinado pelas pesquisadoras Daniele Zeni Serafini Mafioletti e Maria Alice Veiga Ferreira de Souza, e pelo pesquisador Arthur Belford Powell.

São múltiplas as camadas teóricas e metodológicas tecidas nesta obra. Mafioletti, Souza e Powell, nesta "*Jornada das Frações com as Mãos*", nos oferecem, de forma lúdica, processual e concreta, uma rica descrição metodológica das práticas. Por vezes, temos a sensação de que estão presencialmente nos narrando e conduzindo por esta maravilhosa jornada sensorial, ancorada na experiência empírica e na sensibilidade tátil, articulada também ao raciocínio e à linguagem simbólica.

A relevância desta obra se evidencia à medida que é notório o lugar de destaque que a matemática ocupa em todos os processos de escolarização do mundo, sendo comuns os debates entre a matemática empírico-concreta e a matemática teórico-abstrata. Nesse debate, na esteira do pensamento *d' Ambrosio,* entendemos a matemática como um conjunto de habilidades e práticas na busca de explicar e compreender o mundo que nos cerca, sendo múltiplas tanto as técnicas quanto os enfoques cognitivos existentes.

Em "*Jornada das Frações com as Mãos",* as autoras e o autor integram o que antes se apresentava fragmentado em teoria e prática, em abstrato e concreto, superando o paradigma do ensino tradicional de matemática, marcado por uma busca incessante de abstração e distanciamento da realidade imanente-sensível. Aqui reside uma das camadas desta obra, que, com sutileza, enuncia e nos faz cultivar outros elementos ao lado da abstração matemática, revelando o quanto a sensibilidade orienta a produção do conhecimento humano; elegendo o imanente – *onde acontece o real* - como território do pensamento!

A práxis abrigada na proposta metodológica aqui apresentada, ao enfrentar um dos desafios da educação matemática - *o ensino e aprendizagem de frações* –, pauta-se mais na participação do que na observação, mais na corporeidade e menos abstração. Trata-se de uma práxis que incorpora à razão as sensações que nos fazem humanos, oferecendo-nos processos dialógicos entre o concreto e o abstrato, entre a matemática empírica e a matemática dedutiva.

Recuperando as dimensões do sensorial e a partir delas, "*Jornada das Frações com as Mãos*" produz e nos oferece generosamente um belo e necessário texto matemático, explorando situações experienciáveis, atribuindo concretude aos signos abstratos e significados aos sinais simbólicos.

Gustavo Forde

Professor da Universidade Federal do Espírito Santo, doutor em Educação e pesquisador na área Estudos Afro-Brasileiros em Educação, com interesse especial nos campos da História da Educação e do Ensino de Matemática.

Sumário

Sobre o livro

A inclusão de estudantes com deficiência visual em espaços compartilhados com estudantes videntes representa um avanço notável no campo educacional, refletindo o compromisso com a construção de uma escola verdadeiramente democrática. No entanto, tal progresso ainda se vê confrontado por desafios significativos, especialmente no que concerne à adaptação dos conteúdos matemáticos. A escassez de materiais acessíveis, aliada à formação insuficiente de grande parte dos docentes, contribui para a persistência de práticas pedagógicas excludentes, restringindo o pleno direito à aprendizagem desses estudantes.

É nesse cenário desafiador que se insere a **Jornada das Frações com as Mãos**: uma proposta didática, orientada por um compromisso com a construção de uma matemática sensível à diversidade. O conteúdo do livro propõe aos docentes enfrentar um dos maiores obstáculos da educação matemática — o ensino e a aprendizagem de frações —, conteúdo amplamente reconhecido por sua complexidade, para estudantes e professores. Essa dificuldade se acentua quando se trata de estudantes cegos, cuja interação com o mundo ocorre majoritariamente por meio de sentidos como o tato, em contraste com a predominância da visão nas abordagens convencionais. Nesse contexto, métodos centrados em algoritmos e abstrações mostram-se ainda mais restritivos e excludentes.

Jornada das Frações com as Mãos convida docentes a (re)significarem o ensino de frações por meio de uma perspectiva fundamentada na medição, utilizando as barras de Cuisenaire como recurso didático central. Essa estratégia visa a favorecer a construção de significados vinculados à magnitude, à equivalência, à ordem e à comparação entre frações, promovendo uma aprendizagem mais próxima de superação de dificuldades relatadas pela comunidade acadêmica da educação matemática e mais inclusiva — especialmente para estudantes com deficiência visual — por meio da exploração tátil.

Ao longo do livro, o leitor é conduzido por uma trajetória cuidadosamente estruturada, que articula fundamentos epistemológicos, princípios pedagógicos e práticas acessíveis, alinhadas à valorização da diferença e à promoção da equidade. Mais do que um material de apoio, o conteúdo da **Jornada das Frações com as Mãos** configura-se como um instrumento formativo, capaz de inspirar educadores a revisitar suas práticas, adotando perspectivas mais dialógicas, inclusivas e historicamente contextualizadas.

A opção por uma abordagem amparada na medição revela-se, ademais, uma escolha didática estratégica. Permite desmistificar conceitos frequentemente mal compreendidos, como frações impróprias e números mistos — que, sob a ótica de parte-todo, tendem a gerar confusão. O material também enfatiza a relevância de considerar o cotidiano e as experiências dos estudantes como ponto de partida para o ensino, promovendo uma aprendizagem mais contextualizada e engajadora.

Ao oferecer caminhos para o ensino de frações com e para estudantes cegos, **Jornada das Frações com as Mãos** reafirma seu compromisso ético e pedagógico com a inclusão e com a garantia do direito de todos à aprendizagem. Trata-se de uma leitura essencial para educadores comprometidos com o aprimoramento de suas práticas, com o enfrentamento de desafios históricos no ensino da matemática e com a construção de uma escola mais justa, plural e humanizada.

Autores.

A organização do livro

Jornada das Frações com as Mãos resulta de uma pesquisa de mestrado em Educação da primeira autora, coorientada pelos outros dois coautores, voltada à construção do conceito de frações por professores em formação que atuarão com alunos cegos e videntes em ambientes inclusivos. Para tanto, foram planejadas, implementadas e analisadas criticamente sete aulas (ou jornadas), desenvolvidas de forma colaborativa por um grupo de professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática, fundamentados na metodologia Lesson Study[1]. As jornadas, validadas no processo investigativo, estão disponíveis para acesso gratuito no Educapes com título Estudo de Fração pela Perspectiva de Medição Planejado em um Lesson Study: uma adaptação para ensino de estudantes cegos, e também podem ser acessadas diretamente no site da editora.

A organização do material das jornadas reflete as especificidades do Lesson Study e apresenta: (1) registros de ações, observações e orientações ao docente responsável pela condução das aulas; (2) objetivos a serem alcançados em cada jornada; e (3) comentários e reações dos participantes da formação. Os registros dos itens (1) e (3) foram redigidos em linguagem mais próxima da oralidade, típica de protocolos verbais em sala de aula, sem a ênfase com a formalidade de textos acadêmicos. Para facilitar a leitura e evitar sobrecarga de informações, as etapas do modelo 4A Instructional Model[2] foram indicadas em notas de rodapé, e o tempo estimado das atividades foi propositalmente omitido.

[1] Souza e Powell (2023); Takahashi e McDougal (2016); Watanabe, Takahashi e Yoshida (2008).
[2] Powell (2018).

Preto – ações e observações direcionadas ao professor;

Azul – orientações para condução da aula;

Cinza – respostas e reações dos participantes em formação;

Antes da apresentação das sete jornadas, o leitor encontrará uma breve contextualização histórica sobre o surgimento das frações, seguida de orientações sobre o uso das barras de Cuisenaire, recurso didático fundamental para o desenvolvimento das noções abordadas. Ao final de cada jornada, são oferecidas reflexões e sugestões de atividades pós-aula, voltadas ao professor.

Quanto às figuras, as representações das barras de Cuisenaire nem sempre mantêm escala proporcional rigorosa, especialmente em arranjos mais extensos. Recomendamos, portanto, a análise da proporcionalidade dentro de cada imagem, uma vez que podem ocorrer variações entre elas. Além disso, algumas ilustrações não indicam fonte por terem sido produzidas pelos próprios autores; essa opção visa a preservar a clareza visual do material.

Por fim, ressaltamos que a proposta da **Jornada das Frações com as Mãos** não pretende constituir um roteiro fixo ou prescritivo. Ao contrário, busca contribuir com uma agenda escolar e científica por meio de um material que inspire práticas pedagógicas sensíveis às realidades da inclusão. Esperamos que sirva como ponto de partida, permitindo que cada docente, guiado por sua criatividade e experiência, adapte as propostas conforme sua realidade, imprimindo nelas sua identidade profissional.

Boa leitura! Corra, a história vai começar!

Os autores.

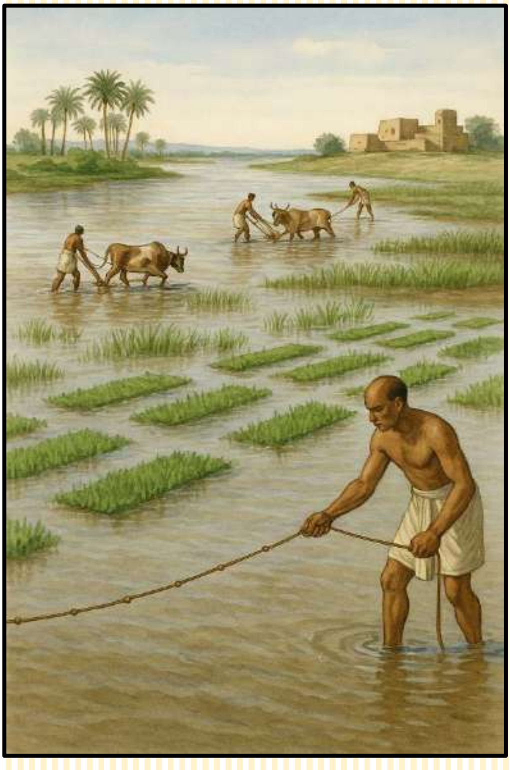

A história vai
começar...


Era uma vez…

...um povo que vivia às margens de um grande rio. Esse povo dependia da terra para plantar, colher e alimentar toda a comunidade. O problema era que o rio — generoso e impiedoso ao mesmo tempo — transbordava em certas épocas do ano, deixando parte das terras submersas.

Quando a água recuava, o solo era fértil. Mas surgia uma nova dificuldade: como medir e distribuir essas terras para o povo se a cheia havia mudado suas formas e tamanhos? As parcelas que antes eram quadradas ou retangulares tornavam-se curvas, truncadas, irregulares. Os antigos métodos de contagem em números inteiros já não bastavam. Foi assim que, diante da necessidade de medir o que não era inteiro, surgiram as frações.

Figura 1 - Agrimensores do Antigo Egito e o uso de cordas na medição de terras



Essas frações não nasceram como pedaços de um bolo, mas como razões entre medidas — entre o que era conhecido e o que se desejava conhecer. Se uma vara de medir cobria por completo uma faixa de terra três vezes, mas ainda sobrava um espaço menor do que uma vara inteira, era preciso nomear essa sobra. Assim surgia, por exemplo, a ideia de "três varas e mais meia vara", o que mais tarde seria escrito como $3\frac{1}{2}$.

Como nos lembra Bento de Jesus Caraça[3], os números não são dados prontos na natureza: são criações humanas, formas simbólicas de resolver problemas concretos. O número fracionário emergiu exatamente como uma criação cultural para lidar com a descontinuidade da realidade — com o não-inteiro, com o irregular, com o que escapa à contagem.

Powell e Frankenstein[4] também ressalta que as frações têm origem em práticas culturais de medida e comparação, e não como simples decomposições de um todo. Para ele, é no uso — na ação de medir, dividir, comparar — que o número ganha significado. A fração é, antes de tudo, um número racional, uma expressão de relação entre duas grandezas.

Alexsandrov[5], por sua vez, observa que o pensamento matemático avançado só floresceu quando o ser humano aprendeu a abstrair relações — como a razão entre duas medidas — e a representá-las. A fração não é um pedaço, é uma relação entre grandezas, uma forma de pensar proporções e variações.

[3] Caraça, 2002.
[4] Powell e Frankestein, 1997.
[5] Alexsandrov, 1994.

Assim, nesse mundo às margens do rio, os números fracionários nasceram da lama e da fertilidade, da necessidade de justiça na partilha e de precisão na medida. Eles foram criados para expressar o que não era inteiro, o que ficava entre os números naturais — uma ponte entre o conhecido e o incerto.

E desse modo, sem que percebessem, aqueles povos que mediam terras criaram os números fracionários. Números que não contavam, mas que relacionavam. Um número que não era parte, mas proporção.

E assim começará nosso conteúdo, mas antes de tudo precisamos conhecer as barras de Cuisenaire – material eleito para desenvolvermos a ideia de fração[6].

---

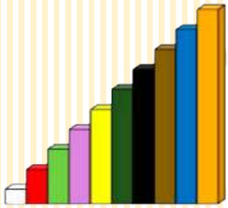
[6] A perspectiva de medição para estudo das frações pode ser realizada com outros materiais como barbantes ou quaisquer outros que permitam comparar medidas e não contagens.


As jornadas
vão começar!

As barras de Cuisenaire...

... foram criadas por Emille Georges Cuisenaire (1891-1975) e são um conjunto de dez barras originalmente construídas em madeira, com o formato de paralelepípedos (Figura 2).

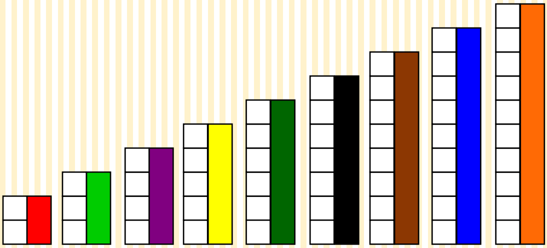
Figura 2 – Barras de Cuisenaire



Cada barra possui um comprimento representado por uma cor padronizada. Todas as barras de mesma cor apresentam o mesmo comprimento e, inversamente, cada comprimento corresponde a uma única cor. A menor barra é representada por um cubo de 1 cm de face e de cor branca. As demais barras correspondem aos comprimentos equivalentes a dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e dez cubos brancos alinhados ponta a ponta, sendo representadas, respectivamente, pelas cores vermelha, verde-clara, lilás, amarela, verde-escura, preta, marrom, azul e laranja.

É assim que o comprimento de cada barra pode ser expresso em unidades de barras brancas, consideradas como a unidade de medida inicial. Por exemplo, uma barra vermelha possui o comprimento equivalente a duas barras brancas organizadas ponta a ponta; uma barra verde-clara, a três barras brancas; e, assim sucessivamente, até a barra laranja, cujo comprimento equivale a dez barras brancas (Figura 3). Essa relação – lida sempre da magnitude da barra esquerda em relação à magnitude da barra da direita - permite explorar ideias fundamentais do conceito de fração, considerando a equivalência entre comprimento e cor como atributos centrais de análise.

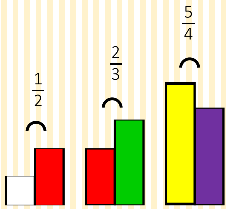
Figura 3 – Magnitude das barras pelo comprimento da barra branca



As barras de Cuisenaire favorecem a construção de noções e imagens mentais fracionárias. Por meio da medição de comprimentos das barras e da identificação de relações multiplicativas entre magnitudes, os professores podem direcionar o olhar dos estudantes para visualizações e construção dos conceitos.

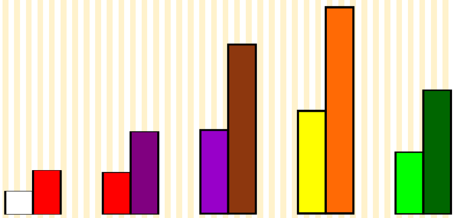
Na perspectiva de medição, consideramos o comprimento ou a cor das barras como atributos de interesse conceitual, permitindo a construção de relações comparativas entre as barras. Por exemplo, a barra branca pode ser concebida como metade do comprimento da barra vermelha; a barra vermelha, como dois terços do comprimento da barra verde-clara; e a barra amarela, como cinco quartos do comprimento da barra lilás (Figura 4). Nessa lógica, a fração é definida como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis de mesma natureza.

Figura 4 – Relações comparativas de medidas entre barras de Cuisenaire



Com as barras também podemos estabelecer a ideia da equivalência de frações. O número fracionário “um meio” pode ser representado com os pares de barras branca e vermelha, vermelha e lilás, lilás e marrom, amarela e laranja, verde-clara e verde-escura (Figura 5).

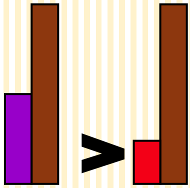
Figura 5 – Equivalência de frações com as barras de Cuisenaire



Para os casos de comparação de frações com o mesmo denominador, ou seja, aqueles cuja maior fração é determinada pela que possui o maior numerador, basta representarmos, lado a lado, as relações de comprimentos que desejamos comparar para verificarmos a que terá o maior comprimento. Essa, então, será a maior fração. Como ilustração, quatro oitavos do comprimento da barra marrom podem ser representados por uma barra lilás (Figura 6 - esquerda), enquanto dois oitavos do comprimento dessa mesma barra podem ser representados por uma barra vermelha

(Figura 6 - direita) e, ao compará-las, lado a lado, é possível concluir que $\frac{4}{8} > \frac{2}{8}$ (Figura 6), tomando-se, nesses casos, como unidade de medida o comprimento da barra marrom para ambos os conjuntos de barras.

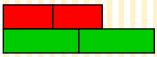
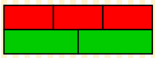
Figura 6 – Representação de $\frac{4}{8}$ com uma barra lilás e uma barra marrom (esquerda); Representação de $\frac{2}{8}$ com uma barra vermelha e uma barra marrom (direita).



Já para os casos de comparação de frações com denominadores diferentes, precisamos encontrar uma fração equivalente com denominadores comuns para cada uma e, aquela que apresentar o maior numerador, terá o maior comprimento. Para isso, é indicado encontrar o mínimo múltiplo comum (MMC) que pode ser determinado por um jogo denominado de "corrida das cores".

O objetivo do jogo é igualar os comprimentos das duas fileiras acrescentando tantas barras de cada cor quantas sejam necessárias dos dois lados até que os comprimentos das duas fileiras sejam iguais. Em seguida, verificamos a quantidade de barras inseridas de cada cor em cada fileira e, sabendo a relação de cada cor de barra com a quantidade de barras brancas, podemos determinar o MMC das duas frações. A Figura 7 mostra o mecanismo para encontrar o MMC entre 2 e 3 (que é 6) pela "corrida das cores", representado por três barras vermelhas ou duas barras verde-claras.

Figura 7 – Etapas do jogo “corrida das cores” para determinação do MMC entre 2 e 3

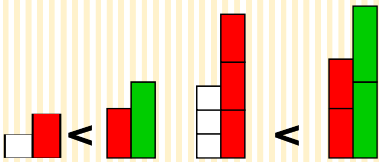
Corrida das cores	Quantidade de barras
	1 vermelha 1 verde-clara
	2 vermelhas 1 verde-clara
	2 vermelhas 2 verde-claras
	3 vermelhas 2 verde-claras

Essa construção ajuda na comparação das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

Vamos detalhar a dinâmica do jogo. Alinhamos uma barra vermelha (representando o denominador 2) e uma barra verde-clara como na primeira linha da Figura 7. Como a barra verde-clara tem maior comprimento do que a vermelha, acrescentamos uma barra vermelha, como na segunda linha da Figura 7. Com isso, a fileira de barras vermelhas ficou com maior magnitude em relação à verde. Acrescentamos uma barra verde-clara, como na terceira linha da Figura 7. Essa nova configuração deixou a fileira de barras verde-claras maiores. Acrescentamos uma barra vermelha à fileira de barras vermelhas e alcançamos a igualdade de magnitudes entre as duas fileiras de barras. Essa igualdade fornece o MMC entre 2 e 3 pela leitura de quaisquer uma das fileiras. Pela fileira vermelha temos 3 barras representando magnitude 2, ou seja, comprimento 6. Pela fileira verde-clara temos 2 barras representando magnitude 3, ou seja, comprimento 6. Logo, o MMC entre 2 e 3 é 6.

Com o MMC, podemos comparar as magnitudes das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$. A fração equivalente a $\frac{1}{2}$ é $\frac{3}{6}$ e, para $\frac{2}{3}$, é $\frac{4}{6}$. Comparamos lado a lado os dois comprimentos com auxílio das barras brancas e vermelhas e declaramos $\frac{3}{6}$ como sendo menor que $\frac{4}{6}$, ou seja, $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ (Figura 8).

Figura 8 – Comparação das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ pelos comprimentos de $\frac{3}{6}$ e $\frac{4}{6}$



Essa breve introdução ao uso das barras de Cuisenaire nos ajudará a desenvolver conceitos acerca das frações com estudantes cegos. Vamos lá!...


ESCOLA
A primeira jornada está destinada para familiaridade com as barras de Cuisenaire.

As atividades propostas durante todo o percurso formativo serão realizadas com os participantes de olhos vendados, a fim de promover a construção de conceitos sem o recurso visual, privilegiando a audição e o tato. A utilização das barras de Cuisenaire exige familiarização prévia com o material, de modo que suas características físicas e potencial pedagógico possam ser plenamente explorados. Esse momento inicial é fundamental para que os participantes estabeleçam relações importantes entre os comprimentos das barras e desenvolvam, por meio do tato, a comparação de distintas magnitudes.

Por isso, a primeira aula contém atividades que incentivam a manipulação das barras, permitindo a exploração das relações entre comprimentos e cores. Os nomes das cores são verbalizados pelo professor, uma vez que a visão está ausente nesses momentos. Essas experiências sensoriais favorecem a identificação das magnitudes relativas e a construção de um repertório que será base para o desenvolvimento do conceito de frações sob a ótica da medição. Portanto, essa primeira aula[7] apresenta o material e prepara o terreno para discussões futuras sobre equivalência, comparação e composição de frações em contextos inclusivos, especialmente voltados a estudantes com deficiência visual.

Concretamente, os objetivos desta primeira aula são:

1. Oportunizar o acesso ao material sem a utilização da visão.
2. Promover familiaridade com o material pedagógico
3. Promover a comunicação e interação entre os participantes.
4. Compreender que barras têm comprimentos variados.
5. Estabelecer memorização do atributo de comprimento com os nomes das cores.
6. Compreender que o comprimento de cada barra é equivalente a certa quantidade de barras brancas.

As próximas páginas mostram como conduzimos os participantes para alcance de nossos objetivos nesta jornada.

---

[7] A etapa de familiaridade com o material é chamada de Ação Atual na abordagem 4A Instructional Model que usaremos por todo o percurso formativo. Essa abordagem pode ser conhecida em Powell (2018). A etapa seguinte é chamada de Ação Virtual quando os estudantes devem mentalizar o que captaram na Ação Atual. No caso de participantes sem visão, essas duas Ações ocorrem concomitantemente.

Ação do professor: disponibilizar aos participantes uma venda para os olhos e, em seguida, distribuir uma barra de Cuisenaire de cada comprimento, para cada um. Pedir que eles manipulem as barras livremente.

Professor: "vocês receberam várias barras. Vamos manipular e conhecer as barras. Formem um desenho sobre a carteira, usando todas as barras. O que vocês desenharam?"

Possíveis respostas dos participantes: "eu desenhei uma casa"; "eu fiz um carrinho"; "eu desenhei um retângulo"; "eu fiz uma escada".

Ação do professor: pedir que os participantes organizem as barras sobre a carteira. Solicitar que expliquem a organização das barras.

Professor: "vamos organizar as barras sobre a carteira. Como vocês organizaram as barras?"

Possíveis respostas dos participantes: "organizei as barras como uma escadinha"; "organizei as barras por tamanho"; "da barra menor para a barra maior"; "da barra maior para a barra menor"; "organizei fazendo um desenho".

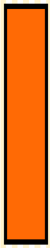
Observação para professor: se os participantes não formarem uma escadinha, será feita a próxima pergunta.

Professor: "peguem a barra de menor comprimento."

Possíveis respostas dos participantes: “esta aqui" [mostram a barra branca].

Professor: “peguem a barra de maior comprimento.”

Possíveis respostas dos participantes: "esta aqui" [mostram a barra laranja].



Professor: “as barras têm comprimentos diferentes? Vamos manusear todas as barras que receberam e ver se conseguimos deixá-las com alguma organização. Como vocês organizaram as barras?”

Possíveis respostas dos participantes: “organizei as barras por tamanho”; “da barra menor para a barra maior”; “da barra maior para a barra menor”; “organizei as barras como uma escadinha”.

Ação do professor: distribuir para cada participante um tabuleiro[8].

Professor: “para ajudar na organização das barras vocês estarão recebendo o tabuleiro.”

[8] O tabuleiro será utilizado para alinhamento, apoio e organização das barras.

Ação do professor: pedir que os participantes organizem as barras como uma escadinha, da barra de menor comprimento para a barra de maior comprimento, usando o tabuleiro. Destacar que a base do material servirá de alinhamento e apoio para a organização das barras.

Professor: "vamos organizar as barras como uma escadinha, da barra de menor comprimento para a barra de maior comprimento, usando o tabuleiro. Agora, usaremos esse material cuja base servirá de alinhamento e apoio para a organização das barras."

Professor: "os comprimentos das barras são iguais?"

Possíveis respostas dos participantes: "os comprimentos não são iguais".

Professor: "quantas barras de comprimentos diferentes vocês têm?"

Possíveis respostas dos participantes: "dez barras de comprimentos diferentes".

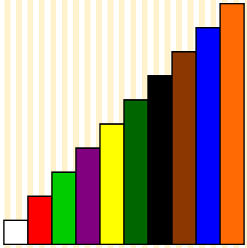
Ação do professor: pedir aos participantes que organizem a escadinha.

Professor: "é possível formar uma escadinha na ordem crescente. Formem uma escadinha novamente."

Ação do professor: entregar para cada participante uma escadinha fixa, com uma barra de Cuisenaire de cada comprimento, para que eles possam manuseá-la sempre que necessário.

Observação para professor: enfatizar para os participantes que a escadinha fixa foi organizada com barras em ordem crescente, com a face maior apoiada sobre a carteira, e que utilizaremos essa disposição para trabalhar com as barras.

Professor: “além das barras que já estão com vocês, há também uma escadinha fixa, com uma barra de Cuisenaire de cada comprimento, para que possam manuseá-la sempre que necessário.”



Professor: “peguem a barra de menor comprimento entre as barras soltas.”
Possíveis respostas dos participantes: “esta aqui" [mostram a barra branca].

Observação para professor: observar se todos os participantes pegaram a barra de menor comprimento.
Ação do professor: explicar que serão atribuídos nomes para representar cada barra de acordo com o seu comprimento e que o nome de cada barra será atribuído de acordo com a sua respectiva cor. As barras recebem nomes de cores.
Professor: “a barra de menor comprimento da escadinha vamos chamar de **branca**.”

Observação para professor: nesse momento a unidade de referência será o comprimento da barra branca.
Ação do professor: distribuir barras brancas em pratos descartáveis para cada participante. Os participantes ficarão com várias barras brancas e com uma barra de cada uma das outras cores.

Professor: **“**nossa unidade de referência será o comprimento da barra branca neste momento. Por isso, receberão várias barras brancas dentro de um prato.”

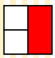
Professor: **“**vamos pegar na escadinha que vocês construíram a segunda barra de menor comprimento.”

Professor: **“**o nome da segunda barra de menor comprimento da escadinha será **vermelha**.”

Ação do professor: pedir aos participantes que façam uma comparação de quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de outras barras sobre a carteira. As barras brancas sempre do lado esquerdo e as outras barras do lado direito.

Professor: **“**represente quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra vermelha sobre a carteira, usando as barras brancas do lado esquerdo e a barra vermelha do lado direito, na posição vertical, com a face maior apoiada sobre a carteira.”

Possível resposta dos participantes:



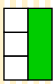
Professor: “quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra vermelha.”

Possível resposta dos participantes: “duas barras brancas”.

Professor: **“**vamos pegar na escadinha que vocês construíram a terceira barra de menor comprimento.”

Professor: “quantas barras brancas são necessárias para ter o mesmo comprimento da terceira barra? Represente sempre as barras brancas do lado esquerdo e na posição vertical.”

Possível resposta dos participantes: “três barras brancas”.



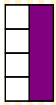
Professor: "o nome da terceira barra de menor comprimento da escadinha será verde-clara."

Professor: "vamos pegar na escadinha a quarta barra de menor comprimento."

Professor: "o nome da quarta barra de menor comprimento da escadinha será lilás."

Professor: "quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento da barra lilás? Represente sempre as barras brancas do lado esquerdo e na posição vertical."

Possível resposta dos participantes: "quatro barras brancas".

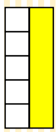


Professor: "vamos pegar na escadinha a quinta barra de menor comprimento."

Professor: "o nome da quinta barra de menor comprimento da escadinha será **amarela**."

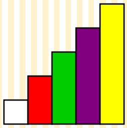
Professor: "quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra amarela? Represente sempre as barras brancas do lado esquerdo e na posição vertical."

Possível resposta dos participantes: "cinco barras brancas".

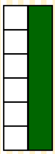


Ação do professor: retornar à escadinha dizendo o nome das cores das barras até aqui. Como se trata de um processo de interiorização da relação do atributo nome com o atributo comprimento, devemos realizar essa tarefa algumas vezes e sempre que oportuno, reforçar essa relação entre atributos.

Professor: "retornem à escadinha**,** falando em voz alta o nome de cada barra na ordem crescente, do menor para o maior comprimento até aqui. Vou falar junto com vocês."
Possíveis respostas dos participantes: "branca"; "vermelha"; "verde-clara"; "lilás"; "amarela".

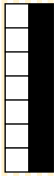


Observação para professor: neste momento a unidade de referência será o comprimento da barra branca**.**
Professor: "vamos relembrar que a nossa unidade de referência será o comprimento da barra branca. As barras brancas sempre do lado esquerdo e as outras barras do lado direito."
Professor: "vamos pegar na escadinha a sexta barra de menor comprimento."
Professor: "o nome da sexta barra de menor comprimento da escadinha será verde-escura."
Possível resposta dos participantes: "seis barras brancas".



Professor: "vamos pegar na escadinha a sétima barra de menor comprimento."
Professor: "represente quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento da sétima barra."

Possível resposta dos participantes: “sete barras brancas”.

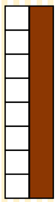


Professor: “o nome da sétima barra de menor comprimento da escadinha será **preta**.”

Professor: “vamos pegar na escadinha a oitava barra de menor comprimento.”

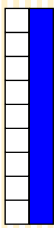
Professor: “o nome da oitava barra de menor comprimento da escadinha será **marrom.** Represente quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento da barra marrom?”

Possível resposta dos participantes: “oito barras brancas”.



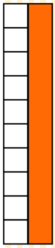
Professor: “vamos pegar na escadinha a nona barra de menor comprimento. O nome da nona barra de menor comprimento da escadinha será **azul.** Represente quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento da barra azul.”

Possível resposta dos participantes: “nove barras brancas”.



Professor: "vamos pegar na escadinha a barra de maior comprimento. O nome da barra de maior comprimento da escadinha será **laranja.** Represente quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento da barra laranja."

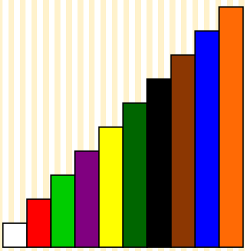
Possível resposta dos participantes: "dez barras brancas".



Ação do professor: pedir que formem a escadinha em ordem crescente, da barra menor para a barra maior de comprimento, dizendo o nome das cores das barras. Como se trata de um processo de interiorização da relação do atributo nome com o atributo comprimento, devemos realizar essa tarefa algumas vezes e sempre que oportuno, reforçar essa relação entre atributos.

Professor: "reorganizem mais uma vez a escadinha em ordem crescente, falando em voz alta o nome de cada barra. Vou falar junto com vocês."

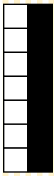
Possível resposta dos participantes: "branca"; "vermelha"; "verde-clara"; "lilás"; "amarela"; "verde-escura"; "preta"; "marrom"; "azul"; "laranja".



Observação para professor: verificar com os participantes o que foi discutido na aula: o comprimento e o nome das cores das barras.

Professor: “agora, entregarei uma barra para cada um de cor diferente. Digam a cor da barra recebida e quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento da barra recebida.”

Possível resposta dos participantes: [representação sobre a carteira. Poderá ter outras representações].



Possível resposta dos participantes: “barra Preta”; “7 barras brancas para obter o mesmo comprimento da barra preta”.

Ação do professor: reforçar a importância da relação do atributo nome com o atributo comprimento para potencializar a formação da escadinha em ordem crescente. Verificar se os participantes ao responderem oralmente a cor da barra recebida e quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento da barra recebida, compreenderam a relação do atributo nome da cor com o atributo comprimento, caso não tenham compreendido o professor deve reestabelecer essas relações. As barras têm dois atributos (qualidades). Um atributo é a cor e outro é o comprimento. A relação do atributo nome da cor com o atributo comprimento potencializa a formação da escadinha em ordem crescente.

Ação do professor: ao término da aula, recolher todos os materiais entregues aos participantes e guardá-los fora do alcance visual. Pedir que retirem as vendas dos olhos.

Conversa com o professor

Após cada aula, recomendamos a realização de uma breve conversa coletiva com os participantes, a fim de refletir sobre a experiência vivenciada. É importante identificar as principais dificuldades e facilidades encontradas, além de discutir possíveis melhorias na dinâmica de apreensão das relações entre os comprimentos das barras e suas respectivas cores. Também indicamos avaliar o papel do tabuleiro no manuseio do material e sua contribuição para o processo de aprendizagem. Por fim, é relevante questionar o que cada participante manteria ou adaptaria dessa experiência em contextos inclusivos, nos quais estudantes cegos e videntes compartilham o mesmo espaço e tempo de aprendizagem. Vamos para a próxima aula!


ESCOLA
A segunda jornada continuará trabalhando a familiaridade com as barras.
E avança para equivalência, comparação e nomenclatura de frações.

A segunda jornada tem como foco a construção do conceito de unidade de medida por meio da equivalência entre o comprimento de cada barra e uma quantidade correspondente de barras brancas. Também são realizadas comparações de magnitude entre barras de diferentes cores, promovendo a observação atenta das variações de comprimento. Para facilitar a comunicação entre professor e estudantes, são introduzidos os termos "trem", "monotrem" e "multitrem". O "trem" refere-se a uma única barra ou a uma sequência de barras unidas ponta a ponta, dispostas horizontal ou verticalmente. O "monotrem" consiste em duas ou mais barras da mesma cor alinhadas, enquanto o "multitrem" é formado por barras de cores distintas, igualmente organizadas em sequência contínua. A seguir, são apresentados os objetivos e o detalhamento das atividades propostas para esta jornada.

1. Oportunizar o acesso ao material sem a utilização da visão.
2. Promover familiaridade com o material pedagógico.
3. Promover a comunicação e interação entre os participantes.
4. Compreender que barras têm comprimentos variados.
5. Estabelecer memorização do atributo de comprimento com os nomes das cores.
6. Compreender que o comprimento de cada barra é equivalente a certa quantidade de barras brancas.
7. Introduzir a nomenclatura de trem, multitrem e monotrem.
8. Compreender que comprimentos de diferentes tamanhos podem ser compostos por duas ou mais barras posicionadas sobre a mesa, ligadas ponta a ponta, como em um trem.

Agora nossa sugestão de condução da segunda jornada.

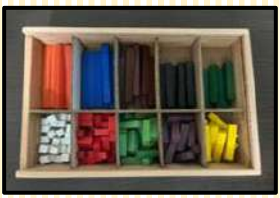
Ação do professor: disponibilizar aos participantes uma venda para os olhos e entregar para cada um a escadinha fixa com as barras em ordem crescente e o tabuleiro. Distribuir uma barra de Cuisenaire de cada comprimento para cada participante.

Professor: "vocês receberam uma escadinha fixa com as barras na ordem crescente, para que possam manuseá-la sempre que necessário e o tabuleiro cuja base servirá para alinhamento e apoio para a organização das barras. Agora, vocês receberão uma barra de cada comprimento**.** Organizem a escadinha com as barras na vertical e em ordem crescente, falando em voz alta o nome de cada barra. Usem o tabuleiro como apoio e organização para barras."

Possíveis respostas dos participantes: "branca"; "vermelha"; "verde-clara"; "lilás"; "amarela"; "verde-escura"; "preta"; "marrom"; "azul"; "laranja".

Ação do professor: distribuir um kit de barras Cuisenaire para cada participante. As barras estarão organizadas por comprimento e cores em uma caixa de madeira com divisórias.

Professor: "vocês receberam um kit de barras que estão dentro de uma caixa de madeira com divisórias. Vamos manusear as barras que estão dentro da caixa."



Professor: "o que vocês observaram ao manusear as barras dentro da caixa?"

Possíveis respostas dos participantes: "as barras foram separadas por tamanho"; "as barras foram separadas por "comprimento"; "as barras foram separadas por cores"; "as barras foram separadas por comprimentos e cores"; "a caixa tem várias divisões".

Professor: "vamos pegar as barras da escadinha formada dentro do tabuleiro e colocar nas divisórias da caixa. Atenção ao comprimento de cada barra."

Ação do professor: observar se todos os participantes estão colocando as barras nas divisórias corretas.

Observação para o professor: explicar para os participantes que a escadinha fixa estará sempre sobre a carteira, para que possam manuseá-la sempre que necessário. Também poderão usar o tabuleiro para organizar a escadinha em ordem crescente, cuja base servirá de alinhamento e apoio para a organização das barras.

Ação do professor: pedir aos participantes para organizarem a escadinha em ordem crescente, usando as barras que estão dentro da caixa.

Professor: "qual a primeira barra que vocês pegarão na caixa para formar a escadinha?"

Possíveis respostas dos participantes: "branca".

Professor: "peguem a barra branca dentro da caixa."

Possíveis respostas dos participantes: "esta aqui" [mostram a barra branca].

□

Observação do professor: observar se todos os participantes pegaram a barra branca na caixa. Se os participantes não pegarem a barra branca na caixa, pedir que recorram à escadinha fixa.

Professor: “vamos retornar a escadinha fixa e comparar se a barra que pegaram foi a branca.”

Possíveis respostas dos participantes: “branca" [mostram a barra branca].

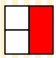
Professor: “peguem a barra vermelha dentro da caixa.”

Possíveis respostas dos participantes: “esta aqui"; “peguei” [mostram a barra vermelha].

Professor: “quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra vermelha?”

Possíveis respostas dos participantes: “Duas barras brancas”.

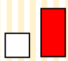
Professor: “representem quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra vermelha sobre a carteira, usando as barras brancas do lado esquerdo e a ~~vermel~~ha do lado direito.”



Observação para o professor: observar se todos os participantes representaram que duas barras brancas têm o mesmo comprimento de uma barra vermelha e se as barras brancas foram posicionadas do lado esquerdo e a outra barra do lado direito.

Observação para o professor: reforçar nesse momento que a unidade de referência será o comprimento da barra branca.

Professor: “vamos colocar a barra vermelha na escadinha que estamos formando.”

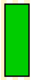


Professor: "qual a cor da terceira barra da escadinha?"

Possíveis respostas dos participantes: "verde-clara".

Professor: "peguem a barra verde-clara dentro da caixa."

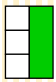
Possíveis respostas dos participantes: "esta aqui"; "esta" [mostram a barra verde-clara].



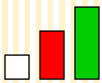
Professor: "quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento da barra verde-clara?"

Possíveis respostas dos participantes: "três barras brancas".

Professor: "representem quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra verde-clara sobre a carteira."



Professor: "vamos colocar a barra verde-clara na escadinha que estamos formando."



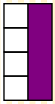
Professor: "qual a cor da quarta barra da escadinha?"

Possíveis respostas dos participantes: "lilás".

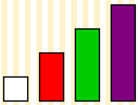
Professor: "peguem a barra lilás dentro da caixa."

Possíveis respostas dos participantes: "esta aqui"; "peguei esta" [mostram a barra lilás].

Professor: “quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento da barra lilás?”
Possíveis respostas dos participantes: “quatro barras brancas”.
Professor: “representem quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra lilás sobre a carteira.”



Professor: “vamos colocar a barra lilás na escadinha que estamos formando.”

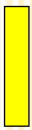


Professor: “qual a cor da quinta barra da escadinha?”

Possíveis respostas dos participantes: “amarela”.

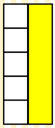
Professor: “peguem a barra amarela dentro da caixa.”

Possíveis respostas dos participantes: “peguei”; “esta aqui" [mostram a barra amarela].

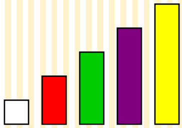


Professor: “quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra amarela?”
Possíveis respostas dos participantes: “cinco barras brancas”.

Professor: "representem quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra amarela sobre a carteira."



Professor: "vamos colocar a barra amarela na escadinha que estamos formando."



Ação do professor: retornar à caixa dizendo o nome das cores das barras até aqui. Como se trata de um processo de interiorização da relação do atributo nome com o atributo comprimento, devemos realizar essa tarefa algumas vezes e sempre que oportuno, reforçar essa relação entre atributos.

Professor: "retornem à caixa**,** falando o nome de cada barra organizada até aqui. Vou falar junto com vocês."

Possíveis respostas dos participantes: "branca"; "vermelha"; "verde-clara"; "lilás"; "amarela".

Professor: "qual a cor da sexta barra da escadinha?"

Possíveis respostas dos participantes: "verde-escura".

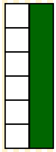
Professor: "peguem a barra verde-escura dentro da caixa."

Possíveis respostas dos participantes: "esta aqui"; "esta" [mostram a barra amarela].

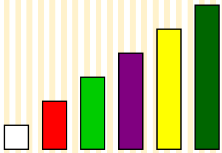
Professor: “quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra verde-escura?”

Possíveis respostas dos participantes: “seis barras brancas”.

Professor: **“**representem quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra verde-escura sobre a carteira.”



Professor: **“**vamos colocar a barra verde-escura na escadinha que estamos formando.”



Professor: **“**qual a cor da sétima barra da escadinha?”

Possíveis respostas dos participantes: “preta”.

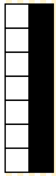
Professor: **“**peguem a barra preta dentro da caixa.”

Possíveis respostas dos participantes: “peguei”; “esta aqui" [mostram a barra preta].

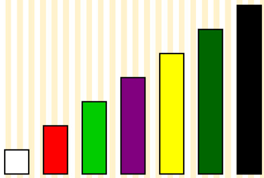
Professor: “quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra preta?”

Possíveis respostas dos participantes: “sete barras brancas”.

Professor: **“**representem quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra preta sobre a carteira.”



Professor: **“**vamos colocar a barra preta na escadinha que estamos formando.”



Professor: **“**qual a cor da oitava barra da escadinha?”

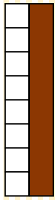
Possíveis respostas dos participantes: “marrom”.

Professor: **“**peguem a barra marrom dentro da caixa.”

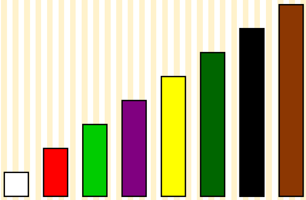
Possíveis respostas dos participantes: “esta" [mostram a barra marrom].

Professor: “quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra marrom?”
Possíveis respostas dos participantes: “oito barras brancas”.

Professor: "representem quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra marrom sobre a carteira."



Professor: "vamos colocar a barra marrom na escadinha que estamos formando."

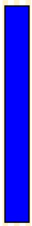


Professor: "qual a cor da nona barra da escadinha?"

Possíveis respostas dos participantes: "azul".

Professor: "peguem a barra azul dentro da caixa."

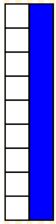
Possíveis respostas dos participantes: "esta aqui"; "peguei" [mostram a barra azul].



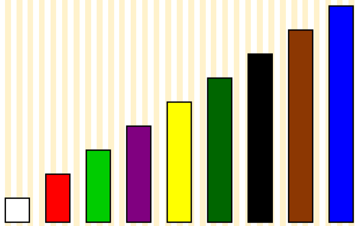
Professor: "quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra azul?"

Possíveis respostas dos participantes: "nove barras brancas".

Professor: "representem quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra azul sobre a carteira."



Professor: "vamos colocar a barra azul na escadinha que estamos formando."

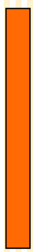


Professor: "qual a cor da maior barra da escadinha?"

Possíveis respostas dos participantes: "laranja".

Professor: "peguem a barra laranja dentro da caixa."

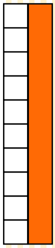
Possíveis respostas dos participantes: "esta aqui" [mostram a barra laranja].



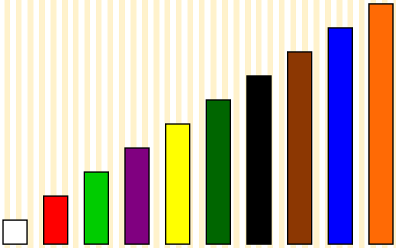
Professor: "quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra laranja?"

Possíveis respostas dos participantes: “dez barras brancas”.

Professor: “representem quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra laranja sobre a carteira.”



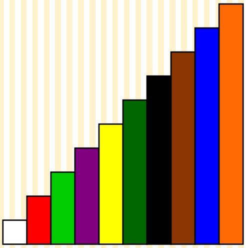
Professor: “vamos colocar a barra laranja na escadinha que estamos formando.”



Ação do professor: retornar à escadinha dizendo o nome das cores das barras.

Professor: “agora, vamos retornar à escadinha**,** falando o nome da cor de cada barra na ordem crescente.”

Possíveis respostas dos participantes: “branca”; “vermelha”; “verde-clara”; “lilás”; “amarela”; “verde-escura”; “preta”; “marrom”; “azul”; “laranja”.



Ação do professor: retornar com as barras da escadinha para a caixa, falando em voz alta o nome da cor de cada barra na ordem crescente.

Professor: “vamos retornar com as barras da escadinha para a caixa, falando o nome da cor de cada barra na ordem crescente.”

Possíveis respostas dos participantes: “branca”; “vermelha”; “verde-clara”; “lilás”; “amarela”; “verde-escura”; “preta”; “marrom”; “azul”; “laranja”.

Professor: “quantos comprimentos diferentes temos na caixa?”

Possíveis respostas dos participantes: “dez comprimentos”.

Professor: “quantas cores diferentes temos na caixa?”

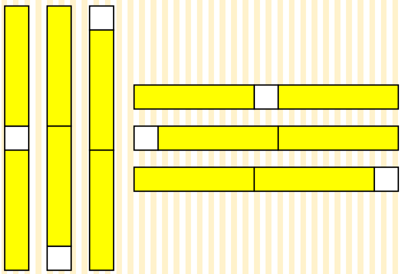
Possíveis respostas dos participantes: “dez cores”.

Ação do professor: introduzir a nomenclatura de trem.

Observação para o professor: destacar para os participantes que usarão o tabuleiro para alinhamento e apoio para a organização das barras, durante a execução das tarefas.

Professor: "peguem duas barras amarelas e uma barra branca e as alinhem ponta a ponta sobre a carteira."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira do alinhamento ponta a ponta das barras].



Observação para o professor: observar se todos os participantes pegaram as barras solicitadas e as alinharam corretamente ponta a ponta.

Observação para o professor: se os participantes não pegaram as barras amarelas e a branca na caixa, pedir que recorram à escadinha fixa.

Professor: "vamos retornar à escadinha fixa e comparar se as barras que pegaram são as amarelas e a branca."

Observação para o professor: sempre que os participantes apresentarem dificuldade em associar o nome da cor ao comprimento da barra, pedir que retornem à escadinha fixa falando o nome das cores das barras.

Professor: "vocês juntaram uma barra a outra ponta a ponta?"

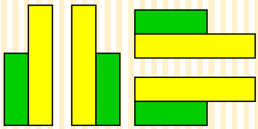
Possíveis respostas dos participantes: "sim".

Professor: **"**vocês formaram um trem**.** Um trem é uma única barra ou uma barra ligada a outra ponta a ponta. Pode ser na horizontal e na vertical."

Ação do professor: mostrar o que NÃO é um trem.

Professor: **"**peguem uma barra verde-clara e uma barra amarela. Agora, coloquem uma ao lado da outra."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira das barras uma ao lado da outra].



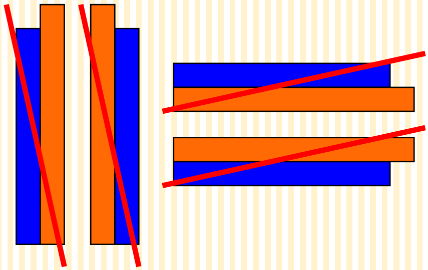
Professor: **"**vocês formaram um trem? Explique sua afirmação."

Possíveis respostas dos participantes: "não; porque um trem é uma única barra ou uma barra ligada a outra ponta a ponta. Pode ser na horizontal e na vertical". "Não; porque as barras estão uma do lado da outra". "Sim; as barras estão uma do lado da outra".

Professor: "um trem é uma única barra ou uma barra ligada a outra de ponta a ponta. Pode ser na horizontal e na vertical."

Professor: "peguem uma barra azul e uma barra laranja. Agora, coloquem uma ao lado da outra."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira das barras uma ao lado da outra].

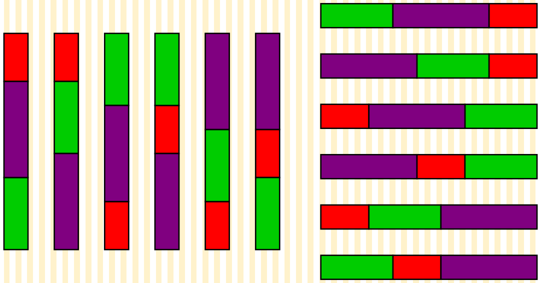


Professor: "vocês formaram um trem? Explique sua afirmação."

Possíveis respostas dos participantes: "não; porque um trem é uma única barra ou uma barra ligada a outra ponta a ponta. Pode ser na horizontal e na vertical". "Não; porque as barras estão uma do lado da outra".

Professor: "peguem uma barra verde-clara, uma barra lilás e uma barra vermelha; e as alinhem ponta a ponta sobre a carteira."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira do alinhamento ponta a ponta das barras].



Professor: "vocês formaram um trem? Explique sua afirmação."

Possíveis respostas dos participantes: "sim; porque um trem é uma única barra ou uma barra ligada a outra ponta a ponta. Pode ser na horizontal e na vertical".

Observação para o professor: caso os participantes não entenderem o conceito de trem, será feito o próximo questionamento.

Professor: "organizem um trem, dizendo o nome das cores das barras."

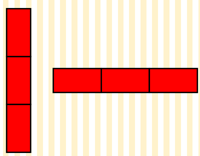
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira de um trem].

Ação do professor: introduzir a nomenclatura de monotrem.

Observação para o professor: sempre que os participantes apresentarem dificuldade em associar o nome da cor ao comprimento da barra, pedir que retornem à escadinha fixa falando o nome das cores das barras.

Professor: "peguem três barras vermelhas e alinhem ponta a ponta sobre a carteira."

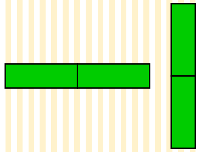
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira do alinhamento ponta a ponta das barras].



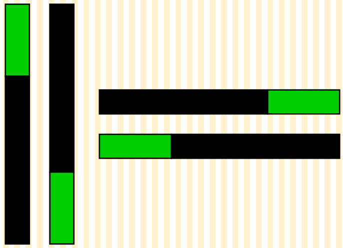
Professor: "vocês formaram um monotrem. Um monotrem possui duas ou mais barras da mesma cor enfileiradas; Um monotrem possui duas ou mais barras da mesma cor alinhadas ponta a ponta."

Professor: "peguem duas barras verde-claras e alinhem ponta a ponta sobre a carteira."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira do alinhamento ponta a ponta das barras].



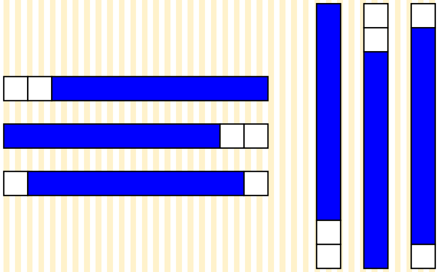
Professor: "vocês formaram um monotrem? Explique sua afirmação."
Possíveis respostas dos participantes: "sim; um monotrem possui duas ou mais barras da mesma cor enfileiradas"; "Sim; um monotrem possui duas ou mais barras da mesma cor alinhadas ponta a ponta".
Professor: "qual a diferença entre o trem anterior para esse que construíram agora?"
Possíveis respostas dos participantes: "o trem anterior possui duas ou mais barras de cores diferentes alinhadas ponta a ponta. Esse possui duas ou mais barras da mesma cor alinhadas ponta a ponta."
Observação para o professor: caso os participantes não entenderem o conceito de monotrem, será feito o próximo questionamento.
Professor: "organizem um monotrem, dizendo o nome das cores das barras?"
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira de um monotrem].
Ação do professor: introduzir a nomenclatura de multitrem.
Professor: "peguem uma barra verde-clara e uma barra preta e alinhem ponta a ponta sobre a carteira."
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira do alinhamento ponta a ponta das barras].



Professor: **“**vocês formaram um multitrem. Um multitrem possui duas ou mais barras de cores diferentes enfileiradas. Um multitrem possui duas ou mais barras de cores diferentes alinhadas ponta a ponta.”

Professor: “peguem uma barra azul e duas barras brancas e alinhem ponta a ponta sobre a carteira.”

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira do alinhamento ponta a ponta das barras].



Professor: **“**vocês formaram um multitrem? Explique sua afirmação.”

Possíveis respostas dos participantes: “sim; “um multitrem possui duas ou mais barras de cores diferentes enfileiradas”; “um multitrem possui duas ou mais barras de cores diferentes alinhadas ponta a ponta”.

Observação para o professor: caso os participantes não entenderem o conceito de multitrem, será feito o próximo questionamento.

Professor: "organizem um multitrem, dizend~~o o nom~~e das cores das barras."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira de um multitrem].

Ação do professor: identificar se os participantes entenderam a nomenclatura de monotrem e multitrem.

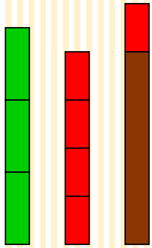
Professor: "agora, organizem um monotrem e um multitrem sobre a carteira. Qual a diferença entre eles?"

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira de um monotrem e um multitrem].

Possíveis respostas dos participantes: "um monotrem possui duas ou mais barras das mesmas cores enfileiradas ou alinhadas pontas a ponta"; "Um multitrem possui duas ou mais barras de cores diferentes enfileiradas ou alinhadas ponta a ponta".

Professor: "durante a aula de hoje discutimos sobre trem, monotrem e multitrem. Vimos que as barras alinhadas ponta a ponta podem formar um trem, monotrem ou multitrem. Sobre a carteira temos exemplos de trem, monotrem e multitrem. Identifiquem se é um trem, monotrem ou multitrem e diga o nome das cores das barras que formam cada um."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira de um trem, monotrem e um multitrem].



Possíveis respostas dos participantes: "um trem formado por três barras verde-claras alinhadas ponta a ponta"; "um monotrem formado por quatro barras vermelhas alinhadas ponta a ponta"; "um multitrem formado por uma barra vermelha e uma barra marrom".

Professor: "caso os participantes ainda tenham dúvida em identificar um trem, monotrem e multitrem, destacar que o comprimento e o nome das cores das barras favorecem a identificação do conceito de trem, monotrem e multitrem. O processo de interiorização da relação do atributo nome com o atributo comprimento potencializam o processo de ensino desses conceitos."

Ação do professor: no término da aula recolher todos os materiais entregues a cada participante. Após, pedir que retirem as vendas.

Conversa com o professor

Encerrando esta etapa, sugerimos a realização de um diálogo em grupo, como forma de refletir coletivamente sobre a experiência vivenciada. Esse momento é fundamental para consolidar as aprendizagens e aprimorar as práticas pedagógicas.

Incentive os participantes a compartilharem como compreenderam que o comprimento de cada barra corresponde a determinada quantidade de barras brancas, e quais estratégias se mostraram mais eficazes nesse processo. Verifique também a compreensão dos termos “trem”, “monotrem” e “multitrem” e se contribuíram para facilitar a comunicação e a comparação entre os comprimentos. Caso esses termos não tenham sido úteis, que alternativas os participantes propõem?

Averigue, ainda, se o uso do tabuleiro auxiliou na organização e no alinhamento das barras, favorecendo a relação entre os comprimentos e os nomes das cores, e se houve colaboração entre os colegas, especialmente em contextos que valorizam a inclusão. Avalie se o atributo de comprimento associado a cada cor foi memorizado ao longo das atividades.

Por fim, promova breve discussão sobre o que pode ser mantido ou ajustado para a próxima aula, sempre com o intuito da construção de um ambiente de aprendizagem acolhedor e estimulante para todos. Com isso, seguimos confiantes rumo à próxima etapa da nossa jornada!


ESCOLA
Comparações, termos, simbologias e representações de frações é o conteúdo da terceira jornada.

Nesta etapa da formação, esperamos que os participantes já tenham consolidado a compreensão dos principais atributos das barras de Cuisenaire, especialmente o comprimento e sua associação com cores específicas. Com base nesse conhecimento prévio, a jornada propõe o aprofundamento do conceito de frações por meio de atividades que explorem múltiplas formas de representação.

As tarefas envolvem comparações entre comprimentos, utilizando os símbolos matemáticos de relação — "maior que", "menor que", "igual a" e "diferente de" — e incentivam a nomeação correta das frações representadas. A intenção é articular a experiência tátil com a linguagem simbólica, promovendo compreensão mais ampla do conceito de fração.[9]

A manipulação dos materiais concretos, aliada à mediação verbal, é valorizada como recurso essencial para a construção do conhecimento e a consolidação de significados matemáticos. Os objetivos específicos desta jornada são apresentados a seguir.

1. promover a comunicação e interação entre os participantes.
2. compreender que barras têm comprimentos variados.
3. estabelecer a memorização do atributo de comprimento e dos nomes das cores.
4. compreender que o comprimento de cada barra é equivalente a certa quantidade de barras brancas.
5. compreender que barras de mesma cor têm o mesmo comprimento e, barras de mesmo comprimento têm a mesma cor.
6. discutir e apresentar verbalmente as produções desenvolvidas na aula.

[9] A ação de escrita de sentenças matemáticas é denominada Ação Escrita na abordagem do 4A Instructional Model.

7. reforçar a importância do material físico para o desenvolvimento e contextualização da aula.
8. introduzir a nomenclatura de trem, multitrem e monotrem.
9. compreender que comprimentos, de diferentes tamanhos, podem ser compostos por uma ou mais barras posicionadas sobre a mesa, ligada ponta a ponta, como em um trem.
10. introduzir ou reforçar a simbologia de ‘maior que’, ‘menor que’, ‘igual a’ e ‘diferente de’.
11. comparar o comprimento das barras com a simbologia de ‘maior que’, ‘menor que’, ‘igual a’ e ‘diferente de’.
12. elaborar sentenças com >, <, =, ≠ ao compararem os comprimentos das barras
13. compreender a comutatividade nas sentenças.
14. introduzir ou reforçar a nomenclatura das frações (um meio, um terço, um quarto, e outras).
15. compreender frações próprias e impróprias.

Acompanhe o leitor nossa sugestão de condução da terceira jornada.

Ação do professor: disponibilizar aos participantes uma venda para os olhos. Entregar para cada um o kit de barras Cuisenaire, a escadinha fixa e o tabuleiro.

Observação para o professor: sempre que os participantes apresentarem dificuldade em associar o nome da cor ao comprimento da barra, pedir que retornem à escadinha fixa falando o nome das cores das barras. Destacar para os participantes que a escadinha fixa foi formada com barras na ordem crescente, sempre com a face maior apoiada sobre a carteira e na vertical. E usaremos essa formação para trabalharmos com as barras. Reforçar nesse momento que a unidade de referência será o comprimento da barra branca.

Professor: "sabemos o que é trem, monotrem e multitrem. Agora, organizem um trem. Um monotrem. E um multitrem sobre a carteira".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira de um trem, um monotrem e um multitrem].

Observação para o professor: solicitar aos participantes que organizem um de cada vez, observando se a formação de cada um está correta.

Professor: "dentro do kit temos várias barras. Peguem uma barra branca e uma laranja. Que relações vocês observam?"

Possíveis respostas dos participantes: "a barra branca é menor que a barra laranja"; "A barra laranja é maior que a barra branca"; "As barras são diferentes"; "As barras têm tamanhos diferentes".

Professor: "podemos representar essa sentença usando símbolos matemáticos".

Ação do professor: apresentar aos participantes os sinais de igual, diferente, maior que, e menor que. Os sinais irão ajudar na representação de sentenças matemáticas.

Professor: "vocês estão recebendo o sinal de **igual** (=) ou de equivalência. O que vocês observam ao manusear o sinal?"

Possíveis respostas dos participantes: "são dois traços"; "são dois palitos"; "Um traço em cima e outro embaixo"; "São dois palitos na horizontal"; "são duas linhas paralelas".

Professor: "o símbolo [igual] (=) é utilizado na matemática com o significado de [é igual a] e define uma igualdade ou equivalência. É representado por dois traços paralelos."

=

(igual)

Professor: “vocês estão recebendo o sinal de **diferente** (≠). O que vocês observam ao manusear o sinal?”

Possíveis respostas dos participantes: “parece com o sinal de igual”; “São dois traços como o de igual e tem outro traço no meio”; “São dois palitos na horizontal e outro na vertical”; “Um traço em cima e outro embaixo e outro traço no meio”.

Professor: “o símbolo [diferente] (≠) é utilizado na matemática com o significado de [é diferente de] e define uma diferença. É representado por dois traços paralelos cortados por um traço na vertical.”

≠

(diferente)

Professor: “estou entregando para vocês o sinal de **maior que** (>). A depender do contexto esse sinal pode ter o significado de **menor que** (<). O que estão observando ao manusear o sinal?”

Possíveis respostas dos participantes: “parece com a letra “v”; **“**São dois traços ligados pela ponta”; “São dois palitos ligados”.

Professor: “para identificar o símbolo [maior que] (>) e [menor que] (<) a abertura fica sempre para o lado do maior elemento. Como exemplo podemos citar que a barra amarela é maior (>) que a barra vermelha. E a barra marrom é menor (<) que a barra azul. Desta forma, é mais fácil de lembrar.”

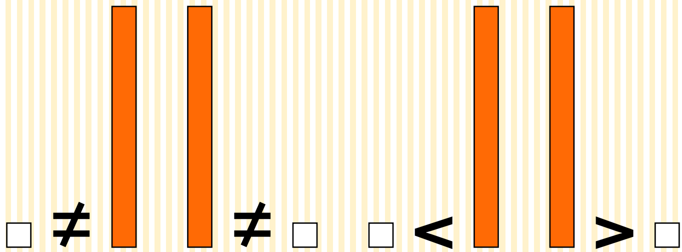
< >

(menor) (maior)

Observação para o professor: sempre que os participantes apresentarem dificuldade em associar o símbolo maior que (>) e menor que (<) relembrar que a abertura fica sempre para o lado do maior elemento.

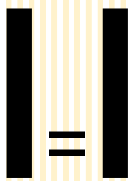
Professor: "vocês pegaram uma barra branca e uma laranja dentro da caixa. Podemos representar essa sentença usando símbolos. Agora, sobre a carteira represente essa sentença usando símbolos."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira da sentença através de símbolos].



Professor: "peguem agora duas barras pretas. Podemos representar essa sentença usando símbolos. Agora, sobre a carteira represente essa sentença usando símbolos."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira da sentença através de símbolos].

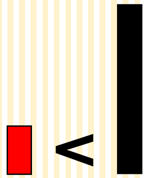


Professor: "peguem uma barra vermelha e uma barra preta. O comprimento da barra vermelha é maior ou menor em relação ao comprimento da barra preta?"

Possíveis respostas dos participantes: "menor".

Professor: “sobre a carteira represente essa sentença usando barras e símbolos.”

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira da sentença através de símbolos].



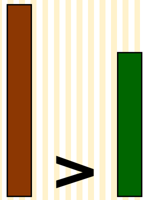
Professor: “peguem uma barra marrom e uma barra verde-escura.”

Professor: “o comprimento da barra marrom é maior ou menor em relação ao comprimento da barra verde-escura?”

Possíveis respostas dos participantes: “maior”.

Professor: “agora, sobre a carteira represente essa sentença usando barras e símbolos.”

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira da sentença através de símbolos].



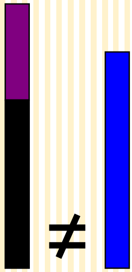
Professor: “o comprimento do multitrem preto mais lilás é igual ou diferente em relação ao comprimento da barra azul?”

Possíveis respostas dos participantes: “diferente”; “igual”.

Observação para o professor: se os participantes não compreenderem a diferença, pedir que representem a sentença sobre a carteira.

Professor: “como podemos representar essa sentença sobre a carteira?”

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira da sentença através de barras e símbolos].



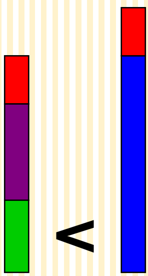
Professor: "o comprimento do multitrem verde claro, lilás e vermelho é maior, menor, igual ou diferente em relação ao comprimento do multitrem azul mais vermelho?"

Possíveis respostas dos participantes: "menor"; "maior"; "igual".

Observação para o professor: se os participantes não compreenderem que o comprimento é menor, pedir que representem a sentença sobre a carteira.

Professor: "agora, sobre a carteira, representem essa sentença usando símbolos."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira da sentença através de símbolos].



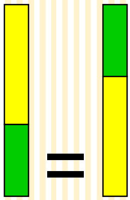
Professor: “o comprimento do multitrem amarelo mais verde claro é maior, menor ou igual em relação ao comprimento do multitrem verde claro mais amarelo?”

Possíveis respostas dos participantes: “igual”.

Observação para o professor: se os participantes não compreenderem a igualdade, pedir que representem a sentença sobre a carteira.

Professor: “representem essa sentença usando símbolos.”

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira da sentença através de símbolos].



Professor: “o que podemos concluir?”

Possíveis respostas dos participantes: “que os comprimentos são os mesmos independentemente da ordem como as barras estão dispostas”.

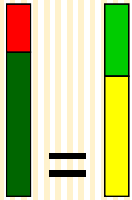
Professor: “o comprimento do multitrem vermelho mais verde escuro é maior, menor ou igual em relação ao comprimento das barras verde-clara mais amarela?”

Possíveis respostas dos participantes: “maior”; “menor”; “igual”.

Observação para o professor: se os participantes não compreenderem a igualdade, pedir que representem a sentença sobre a carteira.

Professor: “agora, sobre a carteira representem essa sentença usando símbolos.”

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira da sentença através de símbolos].



Ação do professor: pedir aos participantes que façam uma comparação de quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de outras barras sobre a carteira. As barras brancas sempre do lado esquerdo e as outras barras do lado direito.

Professor: "peguem a barra preta dentro da caixa."

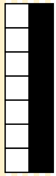
Possíveis respostas dos participantes: "peguei"; "esta aqui" [mostram a barra preta].

Professor: "quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra preta?"

Possíveis respostas dos participantes: "sete barras brancas".

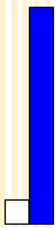
Professor: "representem quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento de uma barra preta sobre a carteira."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



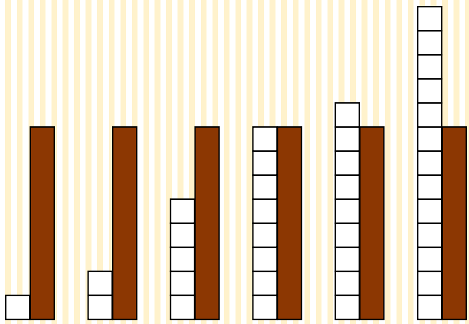
Professor: "o comprimento de uma barra branca é **um sétimo** em relação ao comprimento de uma barra preta."

Professor: "quantas barras brancas você precisa para ter o mesmo comprimento de uma barra azul?"
Possíveis respostas dos participantes: "nove barras brancas".
Professor: "o comprimento de uma barra branca é um nono em relação ao comprimento de uma barra azul."



Ação do professor: fazer o mesmo questionamento para cada uma das barras restantes: 1 décimo, 1 quarto, 1 sétimo, 1 quinto, 1 sexto, 1 terço, 1 meio.

Professor: "quantas barras brancas são necessárias para ter o mesmo comprimento da barra marrom?"
Possíveis respostas dos participantes: "oito".
Professor: "o comprimento de uma barra branca é qual medida em relação ao comprimento da barra marrom?"
Possíveis respostas dos participantes: "um oitavo".
Professor: "e duas barras brancas?"
Possíveis respostas dos participantes: "dois oitavos".
Professor: "e cinco barras brancas?"
Possíveis respostas dos participantes: "cinco oitavos".
Professor: "e oito barras brancas?"
Possíveis respostas dos participantes: "oito oitavos ou um inteiro".
Professor: "e nove barras brancas?"
Possíveis respostas dos participantes: "nove oitavos".
Professor: "e treze barras brancas?"
Possíveis respostas dos participantes: "treze oitavos".



Professor: "o comprimento de uma barra branca é qual medida em relação ao comprimento da barra amarela?"
Possíveis respostas dos participantes: "um quinto".
Professor: "e duas barras brancas?"
Possíveis respostas dos participantes: "dois quintos".

Professor: "e três barras brancas?"

Possíveis respostas dos participantes: "três quintos".

Professor: "e quatro barras brancas?"

Possíveis respostas dos participantes: "quatro quintos".

Professor: "o comprimento de cinco barras brancas é qual medida em relação ao comprimento da barra amarela?"

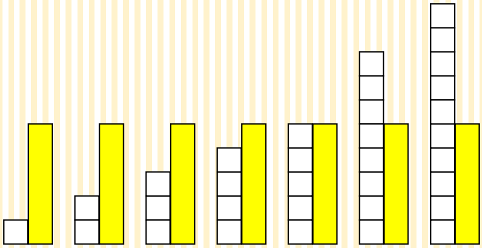
Possíveis respostas dos participantes: "cinco quintos"; "um inteiro".

Professor: "e oito barras brancas?"

Possíveis respostas dos participantes: "oito quintos".

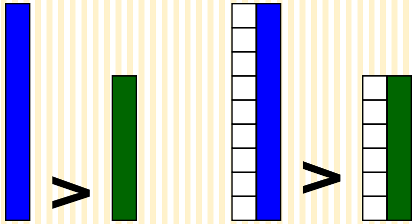
Professor: "e dez barras brancas?"

Possíveis respostas dos participantes: "dez quintos"; "dois inteiros".



Professor: "agora, entregarei uma barra de cor diferente para cada um de vocês. Digam a cor da barra recebida e quantas barras brancas são necessárias para obter o mesmo comprimento da barra recebida. Depois, em duplas façam comparações entre as barras recebidas e representem sobre a carteira usando sentenças matemáticas."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira. Poderá ter outras representações].



Possíveis respostas dos participantes: "são necessárias nove barras brancas para obter o mesmo comprimento da barra azul"; "São necessárias seis barras brancas para obter o mesmo comprimento da barra verde-escura"; "A barra azul é maior que a barra verde-escura".

Professor: "caso os participantes tenham dúvida em fazer comparações entre as barras ou o professor sinta necessidade de reafirmar o que foi trabalhado, reforçar que as barras têm comprimentos diferentes. E podemos comparar o comprimento das barras com a simbologia de "maior que", "menor que", "igual a" e "diferente de"."

Conversa com o professor

Na terceira jornada, é fundamental que os participantes se atentem a aspectos centrais do conteúdo relacionado às frações. Acompanhe se a associação entre o comprimento das barras e as cores foi mantida ao longo das atividades, bem como a compreensão de que barras da mesma cor possuem comprimentos equivalentes.

Observe se houve segurança na nomeação das frações e se a transição entre a manipulação física e a linguagem simbólica — com o uso dos símbolos matemáticos — favoreceu a construção dos conceitos. Reforce a importância da mediação verbal durante as atividades, como forma de atribuir significado à experiência tátil e apoiar a expressão formal das ideias matemáticas.

Valorize, também, a socialização das produções e estratégias, promovendo um ambiente pautado na escuta ativa, na interação entre os participantes e na valorização da diversidade de pensamentos. Tais elementos são essenciais para o aprofundamento da aprendizagem e para tornar o conhecimento matemático mais inclusivo.

Com essas reflexões, avançamos com entusiasmo rumo à próxima jornada da nossa caminhada formativa!


ESCOLA
Na quarta jornada há representação de frações e múl-tiplos.

A quarta jornada inaugura uma abordagem mais aprofundada do conceito de fração, com foco na representação por meio da manipulação das barras de Cuisenaire. As atividades propostas visam a favorecer a compreensão das relações entre as partes e o todo, a partir de diferentes unidades de referência.

Por exemplo, uma barra vermelha posicionada à esquerda de uma barra marrom pode representar a fração $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$, conforme a unidade adotada. Do mesmo modo, a fração $\frac{3}{9}$ pode ser expressa com uma barra verde-clara ao lado de uma azul, demonstrando que a mesma fração pode ter múltiplas representações dependendo do inteiro considerado.

Ao longo da aula, os participantes são incentivados a compreender o conceito de unidade como referência central para a construção de frações e suas múltiplas formas de expressão. Dessa maneira, promovemos compreensão mais ampla do conteúdo, articulando representação, manipulação e raciocínio conceitual.

Os objetivos para esta jornada são:

1. promover familiaridade com o material pedagógico.
2. discutir e apresentar verbalmente as produções desenvolvidas na aula.
3. compreender que comprimentos de diferentes tamanhos podem ser compostos por uma ou mais barras posicionadas sobre a mesa, ligadas ponta a ponta, como em um trem.
4. introduzir ou reforçar a nomenclatura das frações (um meio, um terço, um quarto, e outras).
5. compreender frações próprias e impróprias.

6. compreender que uma mesma fração pode ter diferentes modos de representar, a depender da unidade de referência estabelecida.
7. representar frações nas barras a partir de determinada unidade de referência.
8. compreender o sentido de unidade como inteiro.
9. identificar que algumas barras têm um número par associado ao seu comprimento e outras têm um número ímpar associado ao seu comprimento.
10. identificar que algumas barras têm comprimento múltiplo de outras (por exemplo: vermelha, lilás, verde-escura, marrom, laranja; verde-clara, verde-escura, azul; amarela, laranja).
11. compreender a equivalência de frações, ou seja, que duas ou mais frações podem ser escritas de maneiras diferentes, porém apresentando a mesma relação de medida.

Passemos à condução da quarta jornada.

Ação do professor: disponibilizar aos participantes uma venda para os olhos. Entregar para cada participante o kit de barras Cuisenaire, a escadinha fixa, o tabuleiro e os sinais matemáticos.

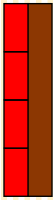
Observação para o professor: a unidade de referência será a comparação multiplicativa entre duas grandezas medidas pela mesma unidade. Incentivar os participantes a utilizarem o tabuleiro como suporte para alinhar e organizar verticalmente as barras durante a execução das tarefas.

Professor: "quantas barras vermelhas são necessárias para ter o mesmo comprimento da barra marrom?"

Possíveis respostas dos participantes: "quatro".

Professor: "represente sobre a carteira."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "o comprimento de uma barra vermelha é qual medida em relação ao comprimento da barra marrom?"

Possíveis respostas dos participantes: "dois oitavos"; "um quarto".

Professor: "represente sobre a carteira."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

Professor: "por que responderam dois oitavos?"

Possíveis respostas dos participantes: "dois oitavos porque o comprimento da barra vermelha é dois e o comprimento da barra marrom é oito."

Professor: "quando responderam dois oitavos, que unidade de medida utilizaram?"

Possíveis respostas dos participantes: "o comprimento da barra branca."

Professor: "quando responderam um quarto, que unidade de medida utilizaram?"

Possíveis respostas dos participantes: “o comprimento da barra vermelha.”

Observação para o professor: se os participantes não responderem “um quarto”, o professor deverá perguntar se há outra forma de representar essa expressão.

Professor: “e se ao invés de pensarmos na barra branca, utilizarmos a barra vermelha como unidade de medida, o comprimento da barra vermelha representaria que medida em relação ao comprimento da barra marrom?”

Possíveis respostas dos participantes: “um quarto”.

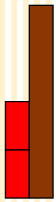
Professor: “por que responderam um quarto?”

Possíveis respostas dos participantes: “porque a barra marrom tem quatro comprimentos de uma barra vermelha.”

Professor: “o comprimento de duas barras vermelhas é qual medida em relação ao comprimento da barra marrom?”

Possíveis respostas dos participantes: “dois quartos”.

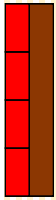
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



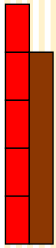
Professor: “o comprimento de quatro barras vermelhas é qual medida em relação ao comprimento da barra marrom?”

Possíveis respostas dos participantes: “quatro quartos ou um inteiro”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

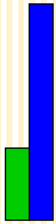


Professor: "e o comprimento de cinco barras vermelhas em relação ao comprimento da barra marrom?"
Possíveis respostas dos participantes: "cinco quartos."
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "peguem uma barra verde-clara e posicione ao lado esquerdo de uma barra azul. O comprimento da barra verde-clara é qual medida em relação ao comprimento da barra azul?"
Possíveis respostas dos participantes: "três nonos"; "Um terço".
Professor: "represente sobre a carteira."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "que unidade de medida usaram quando responderam três nonos?"

Possíveis respostas dos participantes: "o comprimento da barra branca."

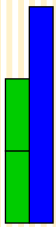
Professor: "que unidade de medida usaram quando responderam um terço?"

Possíveis respostas dos participantes: "o comprimento da barra verde-clara".

Professor: "e o comprimento de duas barras verde-claras e qual medida em relação ao comprimento da barra azul?"

Possíveis respostas dos participantes: "dois terços".

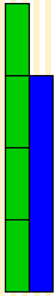
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



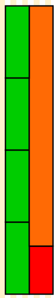
Professor: "o comprimento de quatro barras verde-claras é qual medida em relação ao comprimento da barra azul?"

Possíveis respostas dos participantes: "quatro terços".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "faça um multitrem com uma barra vermelha e com uma barra laranja. Vamos chamar esse multitrem de VARANJA (vermelho com laranja). Quantas barras verde-claras são necessárias para ter o mesmo comprimento do multitrem varanja?"
Possíveis respostas dos participantes: "quatro".
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



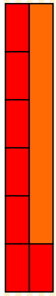
Professor: "o comprimento de uma barra verde-clara é qual medida em relação ao comprimento do multitrem varanja?"
Possíveis respostas dos participantes: "um quarto".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

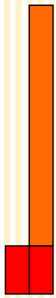
Professor: “o comprimento de duas barras verde-claras é qual medida em relação ao comprimento do multitrem varanja?”
Possíveis respostas dos participantes: “dois quartos”.
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

Professor: “represente o multitrem varanja. Quantas barras vermelhas vocês precisam para ter o mesmo comprimento de uma barra varanja?”
Possíveis respostas dos participantes: “seis”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



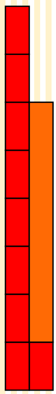
Professor: "o comprimento de uma barra vermelha é qual medida em relação ao comprimento de um multitrem varanja?"
Possíveis respostas dos participantes: "um sexto".
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "e o comprimento de duas barras vermelhas é qual medida em relação ao comprimento de um multitrem varanja?"
Possíveis respostas dos participantes: "dois sextos".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

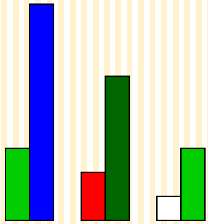
Professor: "o comprimento de oito barras vermelhas é qual medida em relação ao comprimento de um multitrem varanja?"
Possíveis respostas dos participantes: "oito sextos".
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Ação do professor: pedir que os participantes mostrem diferentes modos de representação de uma fração sobre a carteira.

Professor: "vamos representar sobre a carteira $\frac{1}{3}$ com as barras e dizer qual unidade de medida e de referência usada para cada representação."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

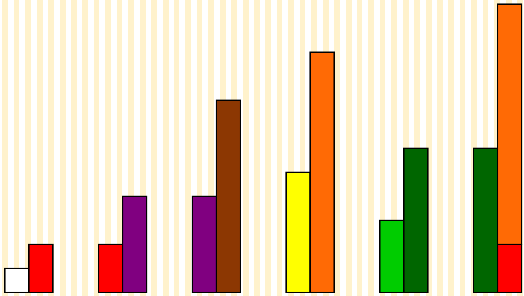


Possíveis respostas dos participantes: "1 verde-clara-1 azul (unidade de medida o comprimento da barra verde-clara e unidade de referência o comprimento da barra azul)"; "1 vermelha-1 verde-escura (unidade de medida o comprimento da barra vermelha e unidade de referência o comprimento da barra verde-escura)"; "1 branca-1 verde-clara (unidade de medida o comprimento da barra branca e a unidade de referência o comprimento da barra verde-clara)".

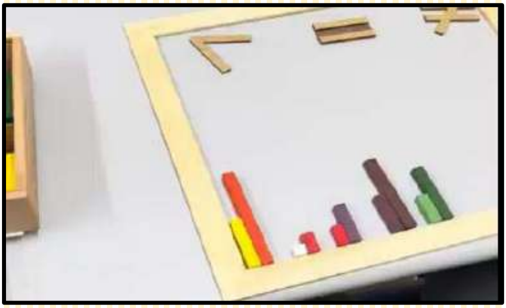
Ação do professor: pedir que os participantes mostrem diferentes modos de representação sobre a carteira.

Professor: "vamos representar sobre a carteira $\frac{1}{2}$ com as barras e dizer qual unidade de medida e unidade de referência usada para cada representação."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Possíveis respostas dos participantes: "1 branca-1 vermelha (unidade de medida o comprimento da barra branca e unidade de referência o comprimento da barra vermelha)"; "1 vermelha-1 lilás (unidade de medida o comprimento da barra vermelha e unidade de referência o comprimento da barra lilás)"; "1 lilás-1 marrom (unidade de medida o comprimento da barra lilás e unidade de referência o comprimento da barra marrom)"; "1 amarela-1 laranja (unidade de medida o comprimento da barra amarela e unidade de referência o comprimento da barra laranja)"; "1 verde-clara- 1verde-escura (unidade de medida o comprimento da barra verde-clara e unidade de referência o comprimento da barra verde-escura)"; "1 verde-escura- 1 varanja (unidade de medida o comprimento da barra verde-escura e unidade de referência o comprimento da barra varanja)".

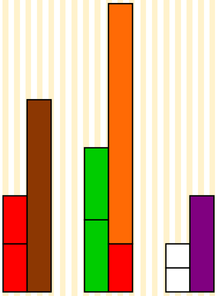


Ação do professor: pedir que os participantes mostrem diferentes modos de representação sobre a carteira.

Professor: "como vocês podem representar sobre a carteira $\frac{2}{4}$ com as barras?"

Possíveis respostas dos participantes: "2 vermelhas-1 marrom"; "2 verde-claras-1 varanja"; "2 brancas-1 lilás".

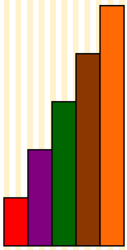
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



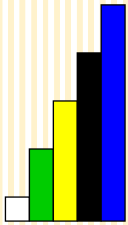
Professor: "quais barras podem ter o mesmo comprimento de um monotrem formado somente com barras vermelhas?"

Possível resposta dos participantes: "vermelha"; "lilás"; "verde-escura"; "marrom"; "laranja".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

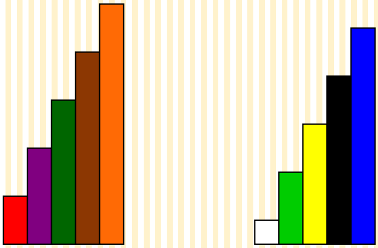


Professor: "quais barras NÃO podem ter o mesmo comprimento de um monotrem formado somente com vagões vermelhos?"
Possível resposta dos participantes: "branca"; "verde-clara"; "amarela"; "preta"; "azul".
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Ação do professor: pedir para os participantes discutirem semelhanças entre os dois grupos formados.
Professor: "o que perceberam nesses dois grupos formados?"
Possível resposta dos participantes: "Que o primeiro grupo é formado por números múltiplos de 2 (ou pares) e o outro por números não múltiplos de 2 (ou ímpares)".
Observação para o professor: se os participantes não incluírem o trem vermelho em suas respostas, o professor deverá questioná-los:
Professor: "tem alguma barra sem grupo?"
Possível resposta dos participantes: "Sim, a vermelha".
Professor: "em qual grupo a vermelha entra?"
Possível resposta dos participantes: "no primeiro grupo".
Professor: "por quê?"
Possível resposta dos participantes: "porque 2 é múltiplo de 2"; "porque 2 é par".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Observação para o professor: se os participantes não reconhecerem que algumas barras têm comprimento par e outros têm comprimento ímpar, o professor deverá voltar com a atividade de "quantas barras brancas as barras de outras cores possuem para ter o mesmo comprimento" até que eles reconheçam cada grupo como sendo de barras com comprimento par e o outro com comprimento ímpar e questionar:

Professor: "por que esse grupo de barras é par? O que caracteriza o número ser par?"

Possível resposta dos participantes: "ser divisível por 2".

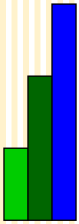
Professor: "por que esse grupo de barras é ímpar? O que caracteriza o número ser ímpar?"

Possível resposta dos participantes: "Não ser divisível por 2".

Professor: "quais barras podem ter o mesmo comprimento de um monotrem formado somente com barras verde-claras?"

Possível resposta dos participantes: "verde-clara"; "verde-escura"; "azul".

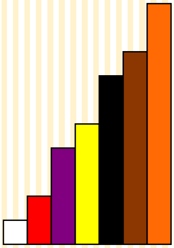
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "quais barras NÃO podem ter o mesmo comprimento de um monotrem formado somente com barras verde-claras?

Possível resposta dos participantes: "branca"; "vermelha"; "lilás"; "amarela"; "preta"; "marrom"; "laranja".

Possível resposta dos participantes: [representação sobre a carteira].



Ação do professor: pedir para os participantes discutirem semelhanças entre os dois grupos formados.

Professor: "o que perceberam nesses dois grupos de barras?"

Possível resposta dos participantes: "que o primeiro grupo é formado por números múltiplos de 3 e o outro por números não múltiplos de 3".

Observação para o professor: se os participantes não incluírem a barra verde-clara em suas respostas, o professor deverá questioná-los:

Professor: “tem alguma barra sem grupo?”

Possível resposta dos participantes: “sim, a verde-clara”.

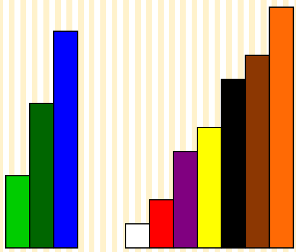
Professor: “qual grupo a verde-clara entra?”

Possível resposta dos participantes: “no primeiro grupo”.

Professor: “por quê?”

Possível resposta dos participantes: “porque 3 é múltiplo de 3”.

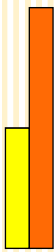
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



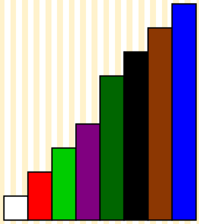
Professor: “quais barras podem ter o mesmo comprimento de um monotrem formado somente com barras amarelas?”

Possível resposta dos participantes: “amarela”; “laranja”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

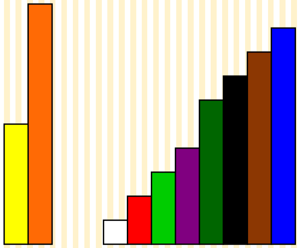


Professor: "quais barras NÃO podem ter o mesmo comprimento de um monotrem formado somente com barras amarelas?"
Possível resposta dos participantes: "branca"; "vermelha"; "verde-clara"; "lilás"; "verde-escura"; "preta"; "marrom"; "azul".
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "o que perceberam nesses dois grupos de barras?"
Possível resposta dos participantes: "que o primeiro grupo é formado por números múltiplos de 5 e o outro por números não múltiplos de 5".
Observação para o professor: se os participantes não incluírem a barra amarela em suas respostas, o professor deverá questioná-los:
Professor: "tem alguma barra sem grupo?"
Possível resposta dos participantes: "sim, a amarela".
Professor: "qual grupo a amarela entra?"
Possível resposta dos participantes: "no primeiro grupo".
Professor: "por quê?"
Possível resposta dos participantes: **"**porque 5 é múltiplo de 5".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "nessa aula trabalhamos representações de frações com várias unidades de referência. O que vocês compreenderam sobre unidade de referência?"

Possíveis respostas dos participantes: "é a barra inteira que estamos usando como base para comparar as outras barras"; "É o todo que estamos utilizando como padrão para medir partes menores"; "O denominador indica em quantas partes iguais a unidade de referência foi dividida".

Professor: "isso mesmo, uma mesma fração pode ter diferentes medidas a depender da unidade de referência estabelecida. Reforçar a importância da unidade de referência sendo a comparação multiplicativa entre duas grandezas medidas pela mesma unidade."

Ação do professor: no término da aula recolher todos os materiais entregues a cada participante. Após, guardar todo o material, pedir que os participantes retirem as vendas.

Conversa com o professor

Ao final da aula, recomendamos que seja promovido um momento de socialização das produções e das estratégias desenvolvidas pelos participantes. O compartilhamento de experiências é essencial para consolidar aprendizagens e verificar se o grupo foi capaz de representar frações a partir de diferentes unidades de referência — compreendendo que uma mesma fração pode assumir distintas representações, a depender da barra considerada como unidade.

Outro aspecto central a ser explorado é a compreensão do conceito de unidade como inteiro, bem como a identificação de padrões numéricos associados às barras, como a distinção entre números pares e ímpares e as relações de múltiplos presentes entre elas. Encoraje, ainda, a reflexão sobre o conceito de frações equivalentes, destacando que diferentes escritas podem expressar uma mesma relação de magnitude. Esses elementos contribuem significativamente para o fortalecimento da base conceitual necessária à construção de um ensino mais inclusivo e significativo.

Com esse passo, seguimos juntos na construção de uma trajetória formativa cada vez mais consistente e inspiradora!


ESCOLA
Na quinta jornada você verá frações equivalentes e comparação de frações com denominadores iguais.

Na quinta jornada, as atividades concentram-se na introdução ao conceito de frações equivalentes, permitindo que os participantes identifiquem diferentes representações de uma mesma quantidade. Em seguida, trabalha-se a comparação de frações com denominadores iguais, enfatizando que, nesse caso, a fração com numerador maior corresponde ao maior valor.

As barras de Cuisenaire continuam sendo utilizadas como recurso manipulativo, auxiliando na visualização das relações entre numeradores e denominadores. Além disso, os participantes são estimulados a construir sentenças matemáticas que expressem essa propriedade, articulando a manipulação tátil à linguagem simbólica e promovendo mais uma compreensão conceitual das frações.

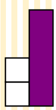
Para a quinta jornada, os objetivos são:

1. discutir e apresentar oralmente as produções desenvolvidas na aula.
2. destacar o papel do material físico para o desenvolvimento e contextualização da aula.
3. comparar o comprimento das barras com a simbologia de “maior que”, “menor que”, “igual a” e “diferente de”.
4. elaborar sentenças matemáticas com >, <, =, ≠ ao compararem os comprimentos das barras.
5. compreender que uma mesma fração pode ter diferentes representações equivalentes a depender da unidade estabelecida.
6. representar frações com as barras a partir de determinada unidade de referência.
7. compreender o sentido de unidade de referência como inteiro.

8. compreender a equivalência de frações, ou seja, que duas ou mais frações podem ser escritas de maneiras diferentes, porém apresentando a mesma relação de medida.
9. generalizar a propriedade: dadas duas frações com o mesmo denominador, aquela com maior numerador, terá maior medida (1ª propriedade).

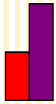
Vamos para o que planejamos para a quinta jornada.

Ação do professor: disponibilizar aos participantes uma venda para os olhos e entregar o kit de barras Cuisenaire, a escadinha fixa, o tabuleiro e os sinais matemáticos.
Observação para o professor: nossa unidade de referência será a comparação multiplicativa entre duas grandezas medidas pela mesma unidade. Incentivar os participantes a utilizarem o tabuleiro como suporte para alinhamento e organização vertical das barras durante a execução das tarefas.
Ação do professor: utilizando as barras, pedir que os participantes representem frações sobre as carteiras.
Professor: "quais barras representam $\frac{2}{4}$ do comprimento da barra lilás? Represente essa relação sobre a carteira."
Possíveis respostas dos participantes: "2 brancas".
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

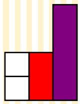


Professor: "e qual barra representa $\frac{1}{2}$ do comprimento da barra lilás? Represente essa relação sobre a carteira."

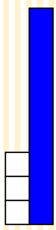
Possíveis respostas dos participantes: "1 vermelha".
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "coloquem 1 barra vermelha ao lado direito de 2 barras brancas ao lado esquerdo de 1 barra lilás."
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "o que podemos dizer sobre o comprimento de duas barras brancas e o comprimento de uma barra vermelha em relação ao comprimento de uma barra lilás?"
Possíveis respostas dos participantes: "que são iguais".
Professor: "quais barras representam $\frac{3}{9}$ do comprimento da barra azul?"
Possíveis respostas dos participantes: "3 brancas".
Professor: "vamos representar $\frac{3}{9}$ do comprimento da barra azul sobre a carteira."
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

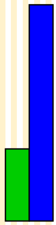


Professor: “e qual barra representa $\frac{1}{3}$ do comprimento da barra azul?”

Possíveis respostas dos participantes: “1 verde-clara”.

Professor: “vamos representar $\frac{1}{3}$ do comprimento da barra azul sobre a carteira.”

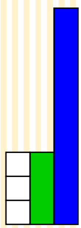
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: “coloquem 1 barra verde-clara ao lado direito de 3 barras brancas ao lado esquerdo de 1 barra azul. Observando essas barras, o que podemos dizer sobre o comprimento de 3 barras brancas e o comprimento de uma barra verde-clara em relação ao comprimento de uma barra azul?”

Possíveis respostas dos participantes: “que são iguais”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

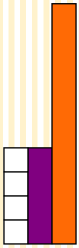


Professor: “quais barras representam $\frac{4}{10}$ do comprimento da barra laranja?”

Possíveis respostas dos participantes: “4 brancas ou 1 lilás”.

Professor: "representem sobre a carteira $\frac{4}{10}$ do comprimento da barra laranja."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "ao representarem essa relação, que unidade de referência usaram?"

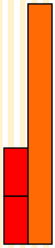
Possíveis respostas dos participantes: "barra laranja"; "10".

Professor: "e qual barra representa $\frac{2}{5}$ do comprimento da barra laranja?"

Possíveis respostas dos participantes: "2 vermelhas".

Professor: "representem sobre a carteira do comprimento da barra laranja."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



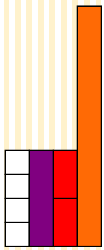
Professor: quando representaram $\frac{2}{5}$, que unidade de referência usaram?"

Possíveis respostas dos participantes: “o comprimento da barra laranja”.

Professor: “coloquem 4 barras brancas ao lado esquerdo de 2 barras vermelhas ao lado esquerdo de 1 barra laranja. Observando essas barras, o que podemos dizer sobre o comprimento de 4 barras brancas e o comprimento de 2 barras vermelhas em relação ao comprimento de 1 barra laranja?”

Possíveis respostas dos participantes: “que são iguais”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

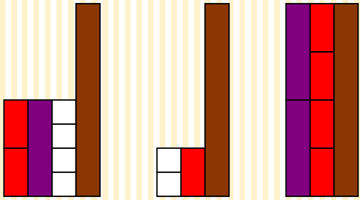


Ação do professor: pedir que os participantes mostrem todos os diferentes modos de representação sobre a carteira.

Professor: “agora, representem sobre a carteira outras equivalências cuja unidade de referência seja o comprimento da barra marrom Depois cada um deve dizer a sua representação e os colegas responderão se está correto ou não.”

Possíveis respostas dos participantes: “2 vermelhas ($\frac{2}{4}$ da marrom) e 1 lilás ($\frac{1}{2}$ da marrom) e 4 brancas ($\frac{4}{8}$ da marrom)”; “2 brancas ($\frac{2}{8}$ da marrom) e 1 vermelha ($\frac{1}{4}$ da marrom)”; “2 lilases ($\frac{2}{2}$ da marrom) e 4 vermelhas ($\frac{4}{4}$ da marrom)” e “1 marrom ($\frac{1}{1}$ da marrom)”.

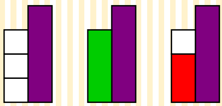
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira da igualdade].



Professor: "como vocês podem representar $\frac{3}{4}$ em relação ao comprimento da barra lilás com as barras? Representem sobre a carteira."

Possíveis respostas dos participantes: "3 brancas"; "1 verde-clara"; "1 vermelha + 1 branca".

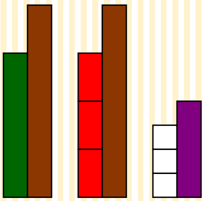
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "Representem sobre a carteira $\frac{3}{4}$ usando outras barras."

Possíveis respostas dos participantes: "1 verde-escura-1 marrom"; "3 vermelhas-1 marrom"; 3 brancas-1 lilás" e "outras".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "a barra amarela é qual medida em relação ao comprimento da barra preta?"

Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{5}{7}$".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

Professor: "a barra preta é qual medida em relação ao comprimento da barra amarela?"

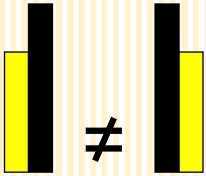
Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{7}{5}$".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

Observação para o professor: se os participantes responderem $\frac{5}{7}$ para esta pergunta, o professor questionará se a medida da barra amarela em relação ao comprimento da barra preta é igual ou diferente da medida da barra preta em relação ao comprimento da barra amarela.

Professor: "a medida da barra amarela em relação ao comprimento da barra preta é igual ou diferente da medida da barra preta em relação ao comprimento da barra amarela? Represente sobre a carteira usando a simbologia matemática."

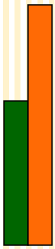
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "a barra verde-escura é qual medida em relação ao comprimento da barra laranja?"

Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{6}{10}$".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "a barra laranja é qual medida em relação ao comprimento da barra verde-escura?"

Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{10}{6}$".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

Professor: “a barra branca é qual medida em relação ao comprimento da barra branca?”

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{1}{1}$ ou 1 inteiro”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

Professor: “a barra vermelha é qual medida em relação ao comprimento da barra vermelha?”

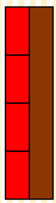
Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{2}{2}$ ou 1 inteiro”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

Professor: “quatro barras vermelhas é qual medida em relação ao comprimento da barra marrom?”

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{4}{4}$ ou 1 inteiro”.

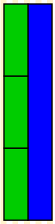
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: “três barras verde-claras é qual medida em relação ao comprimento da barra azul?”

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{3}{3}$ ou 1 inteiro”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



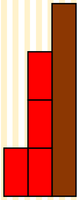
Professor: “qual barra representa $\frac{1}{4}$ do comprimento da barra marrom?”

Possíveis respostas dos participantes: “vermelha”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

Professor: “posicionem uma barra vermelha ao lado esquerdo de três barras vermelhas ao lado esquerdo de uma barra marrom.”

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: “uma barra vermelha é qual medida em relação ao comprimento de uma barra marrom?”

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{1}{4}$”.

Professor: “e três barras vermelhas é qual medida em relação ao comprimento de uma barra marrom?”

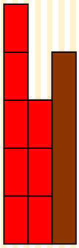
Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{3}{4}$”.

Professor: “qual é menor, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$?”

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{1}{4}$”.

Professor: “posicionem cinco barras vermelhas ao lado esquerdo de três barras vermelhas ao lado esquerdo de uma barra marrom.”

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



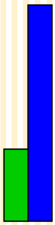
Professor: “agora quem é maior, $\frac{5}{4}$ ou $\frac{3}{4}$?”

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{5}{4}$”.

Professor: “qual barra representa $\frac{1}{3}$ do comprimento da barra azul?”

Possíveis respostas dos participantes: “verde-clara”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: “posicionem uma barra verde-clara ao lado esquerdo de duas barras verde-claras ao lado esquerdo de uma barra azul. Uma barra verde-clara é qual medida em relação ao comprimento de uma barra azul?”

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{1}{3}$”.

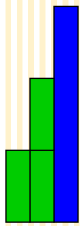
Professor: “e duas barras verde-claras é qual medida em relação ao comprimento de uma barra azul?”

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{2}{3}$”.

Professor: “qual é maior, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$?”

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{2}{3}$”.

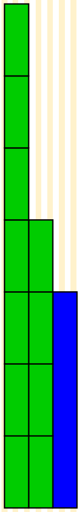
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: “agora quem é menor, $\frac{7}{3}$ ou $\frac{4}{3}$?”

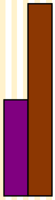
Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{4}{3}$”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "peguem duas barras de comprimentos diferentes, posicionando-as lado a lado. Que medida a barra da esquerda representa em relação à da direita?”

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira tendo várias possibilidades, como, por exemplo quatro oitavos].

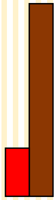


Professor: “qual foi sua unidade de referência?”

Possíveis respostas dos participantes: “o comprimento da barra marrom”.

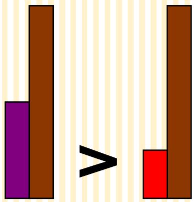
Professor: "agora, sem desfazer a primeira representação, pegue outra barra qualquer. Que medida essa barra representa em relação à unidade de referência escolhida anteriormente? Represente sobre a carteira essa relação."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira tendo várias possibilidades, como por exemplo dois oitavos].



Professor: "compare as duas medidas e represente sobre a carteira usando a simbologia matemática."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "o que precisamos fazer para comparar frações com a mesma unidade de referência?"

Possíveis respostas dos participantes: "comparar as diferentes medidas para saber se são =, > ou <."

Professor: "a unidade de referência nós vamos passar a chamar denominador. E a que está sendo comparada com a unidade de referência é conhecida como numerador."

Professor: "$\frac{6}{9}$ é >, < ou = a $\frac{2}{9}$?"

Possíveis respostas dos participantes: "maior (>)".

Professor: "$\frac{11}{5}$ é <, > ou = a $\frac{8}{5}$?"

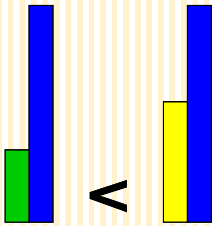
Possíveis respostas dos participantes: "maior (>)".

Professor: "$\frac{4}{7}$ é >, < ou = a $\frac{13}{7}$?"

Possíveis respostas dos participantes: "menor (<)".

Professor: "representem sobre a carteira sentenças com a mesma unidade de referência ou com denominadores iguais. Comparem as diferentes medidas com >, <, =. Depois, cada um deve dizer a sua representação em voz alta. Vocês entenderam a representação do colega?"

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira. Poderá ter outras representações].



Ação do professor: no término da aula, recolher todos os materiais e guardá-los em local não visível pelos participantes. Após, pedir que retirem as vendas.

Conversa com o professor

Na quinta jornada, avançamos na consolidação do conceito de frações equivalentes e na comparação entre frações com denominadores iguais. É fundamental verificar se a compreensão da unidade de referência foi suficientemente clara para que os participantes reconhecessem que diferentes representações podem expressar a mesma quantidade — reforçando, assim, o entendimento das frações equivalentes.

Também é relevante refletir sobre a eficácia das estratégias adotadas para generalizar a ideia de que, em frações com denominadores iguais, o numerador maior representa a maior medida. Esta aula oferece oportunidade para fortalecer as conexões entre a representação física, a linguagem simbólica e o raciocínio envolvido com as barras.

Sugerimos retomar as produções dos participantes, promover a discussão sobre como a equivalência foi percebida pelos participantes e explorar possibilidades de aplicação desses conceitos em contextos inclusivos — nos quais o tato, a escuta atenta e o diálogo assumem papel central.

Reflita, ainda, sobre outras situações que possam ampliar e aprofundar essas ideias com seu grupo. Seguimos juntos, passo a passo, construindo uma trilha de aprendizagens significativas!


ESCOLA
Vamos comparar frações com denominadores distintos.
Lembra da corrida das cores? Vamos usá-la na sexta jornada!

Em continuidade ao estudo da comparação de frações, a sexta jornada trata da segunda propriedade: a comparação entre frações com numeradores e denominadores distintos. Para isso, os participantes são orientados a encontrar frações equivalentes com denominadores comuns, o que permite determinar qual representa a maior medida, identificando-se aquela com maior numerador.

Nesse processo, os participantes devem elaborar sentenças matemáticas que explicitem os procedimentos utilizados, favorecendo a articulação entre raciocínio e linguagem simbólica. Como estratégia de apoio, utilizamos a "corrida das cores", que facilita a identificação de múltiplos comuns por meio da comparação tátil dos comprimentos das barras. Essa atividade consiste em dispor, lado a lado, fileiras formadas por diferentes barras até que seus comprimentos se igualem, permitindo visualizar a equivalência e apoiar a comparação entre as frações.

Os objetivos para a sexta jornada são:

1. compreender que o comprimento de cada barra é equivalente a certa quantidade de barras brancas.
2. discutir e apresentar em voz alta as produções desenvolvidas na aula.
3. reforçar a importância do material físico para o desenvolvimento e contextualização da aula.
4. compreender que comprimentos, de diferentes tamanhos, podem ser compostos por uma ou mais barras posicionadas sobre a mesa, ligada ponta a ponta, como em um trem.
5. comparar o comprimento das barras com a simbologia de "maior que", "menor que", "igual a" e "diferente de".

6. elaborar sentenças com >, <, =, ≠ ao compararem os comprimentos das barras.
7. compreender que uma fração pode ter diferentes representações, a depender da unidade estabelecida.
8. representar frações nas barras a partir de determinada unidade.
9. compreender a equivalência de frações, ou seja, que duas ou mais frações podem ser escritas de maneiras diferentes, porém apresentando a mesma relação de medida.
10. generalizar a propriedade: dadas duas frações com o mesmo denominador, aquela que tiver o maior numerador, terá a maior medida (1ª propriedade).
11. encontrar o denominador comum entre duas frações pela “corrida das cores”.
12. generalizar a propriedade: dadas duas frações com numeradores e denominadores diferentes, encontre uma fração equivalente para cada uma com denominadores comuns. Aquela que tiver o maior numerador terá a maior medida (2ª propriedade).

Vamos para o que planejamos para a sexta jornada.

Ação do professor: disponibilizar aos participantes uma venda para os olhos e entregar para cada o kit de barras Cuisenaire, a escadinha fixa, o tabuleiro e os sinais matemáticos.
Observação para o professor: a unidade de referência será a comparação multiplicativa entre duas grandezas medidas pela mesma unidade. Incentivar os participantes a utilizarem o tabuleiro como suporte para alinhar e organizar verticalmente as barras durante a execução das tarefas.

Ação do professor: pedir que os participantes comparem barras sobre as carteiras.

Professor: "representem $\frac{5}{7}$ sobre a carteira."

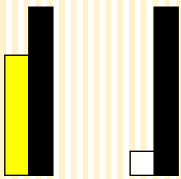
Possíveis respostas dos participantes: [Representação sobre a carteira].

Professor: "qual foi sua unidade de referência?"

Possíveis respostas dos participantes: "o comprimento da barra preta".

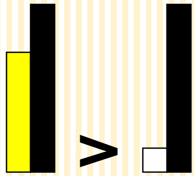
Professor: "agora, sem desfazer a relação $\frac{5}{7}$, pegue outra barra qualquer e compare com a mesma unidade de referência. Que medida essa barra representa em relação a unidade de referência escolhida anteriormente? Represente sobre a carteira essa relação."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira tendo várias possibilidades, como por exemplo $\frac{1}{7}$].



Professor: "compare as duas medidas e represente sobre a carteira usando a simbologia matemática."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira tendo várias possibilidades, como por exemplo $\frac{5}{7} > \frac{1}{7}$].



Professor: "o que há em comum nessas comparações?"

Possíveis respostas dos participantes: "a mesma unidade de referência"; "os denominadores são iguais".

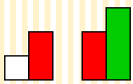
Professor: "se os denominadores forem iguais, o que podemos concluir sobre as comparações?"

Possíveis respostas dos participantes: "se os denominadores ou a unidade de referência forem iguais, basta comparar os numeradores".

Professor: "representem $\frac{1}{2}$ com as barras branca e vermelha; e $\frac{2}{3}$ com as barras vermelha e verde-clara. $\frac{1}{2}$ é menor ou maior que $\frac{2}{3}$?"

Possíveis respostas dos participantes: "maior"; "menor".

Possíveis respostas dos participantes: [Representação sobre a carteira].



Ação do professor: pedir aos participantes que representem as frações sobre a carteira. Se algum participante conseguir representar corretamente, pedir para que ele apresente seu raciocínio para os demais colegas, caso contrário, seguir com os questionamentos.

Professor: “o que difere esse exemplo dos vistos anteriormente que dificulta dizer qual fração é menor ou maior?”

Possíveis respostas dos participantes: “os denominadores são diferentes”; “não possuem a mesma unidade de referência”.

Professor: “o que precisamos fazer para comparar frações com unidades de referência distintas?”

Possíveis respostas dos participantes: “igualar as unidades de referência”; “igualar os denominadores”.

Ação do professor: introduzir a “corrida das cores” com intuito de igualar as unidades de referência.

Professor: “vamos desenvolver a “corrida das cores” com o objetivo de igualar as unidades de referência ou os denominadores.”

Professor: “que unidade de referência usou quando representou $\frac{1}{2}$?”

Possíveis respostas dos participantes: “a barra vermelha”.

Professor: “que unidade de referência usou quando representou $\frac{2}{3}$?”

Possíveis respostas dos participantes: “a barra verde-clara”.

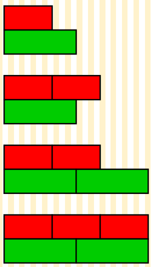
Professor: “com quais barras faremos a corrida das cores?”

Possíveis respostas dos participantes: “vermelha e verde-clara”; “branca e vermelha”.

Ação do professor: se os participantes responderem branca e vermelha pedir que retornem na representação sobre a carteira e questionar qual a unidade de referência usada.

Professor: “a corrida das cores consiste em colocar duas barras lado a lado das unidades de referências. O objetivo é então, igualar os comprimentos das duas fileiras acrescentando tantas barras de cada cor quantas sejam necessárias dos dois lados até que os comprimentos das duas fileiras sejam iguais.”

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

Corrida das cores	Quantidade de barras
	1 vermelha 1 verde-clara 2 vermelhas 1 verde-clara 2 vermelhas 2 verde-claras 3 vermelhas 2 verde-claras

Professor: “cada um de vocês formou dois monotrens representando o mesmo número. Que número é esse?”

Possíveis respostas dos participantes: “6”.

Professor: “quantas barras vermelhas foram necessárias para atingir esse número?”

Possíveis respostas dos participantes: “3”.

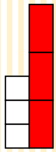
Professor: “quantas barras verde-claras foram necessárias para atingir esse número?”

Possíveis respostas dos participantes: “2”.

Professor: “ao lado esquerdo do monotrem contendo três barras vermelhas posicionem essa mesma quantidade de barras brancas. Qual medida o monotrem branco representa do monotrem vermelho?”

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{3}{6}$”.

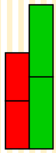
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "ao lado esquerdo do monotrem contendo duas barras verde-claras posicionem essa mesma quantidade de barras vermelhas. Qual medida o monotrem vermelho representa do monotrem verde claro?"

Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{4}{6}$".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

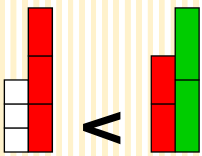


Ação do professor: pedir aos participantes para demonstrarem essas duas frações sobre a carteira, logo abaixo das duas anteriores.

Professor: "$\frac{3}{6}$ é menor ou maior que $\frac{4}{6}$?"

Possíveis respostas dos participantes: "menor".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Ação do professor: pedir aos participantes para demonstrarem essas duas frações sobre a carteira, logo abaixo das duas anteriores.

Professor: "$\frac{3}{6}$ equivalem a qual das medidas representadas anteriormente?"

Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{1}{2}$".

Professor: "e $\frac{4}{6}$ equivalem a qual das medidas representadas anteriormente?"

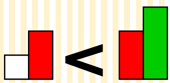
Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{2}{3}$".

Professor: "então, $\frac{1}{2}$ é menor ou maior que $\frac{2}{3}$? Represente sobre a carteira usando a simbologia matemática."

Possíveis respostas dos participantes: "menor".

Ação do professor: pedir aos participantes para colocarem o sinal de menor entre as frações.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



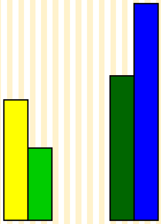
Professor: "e $\frac{2}{3}$ é menor ou maior que $\frac{1}{2}$? Represente sobre a carteira usando a simbologia matemática."

Possíveis respostas dos participantes: "maior".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

Professor: "representem $\frac{5}{3}$ com as barras amarela e verde-clara; e $\frac{6}{9}$ com as barras verde-escura e azul. $\frac{1}{2}$ é menor ou maior que $\frac{2}{3}$?"

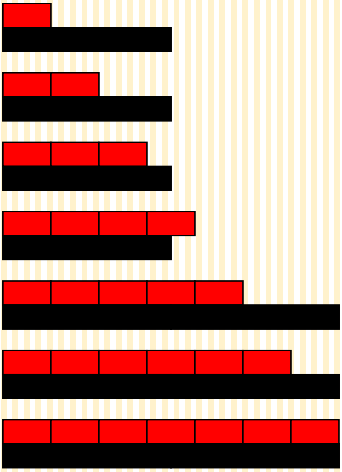
Possíveis respostas dos participantes: “maior”; “menor”.
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: “o que precisamos fazer para conseguir comparar essas duas medidas?”
Possíveis respostas dos participantes: “igualar os denominadores”; “Igualar as unidades de referência”.
Professor: “e como fazemos isso?”
Possíveis respostas dos participantes: “com a corrida das cores”.
Professor: “com quais barras faremos a corrida das cores?”
Possíveis respostas dos participantes: “vermelha e preta”.

Ação do professor: deixar que os participantes realizem a corrida das cores com as barras vermelha e preta.

Corrida das cores



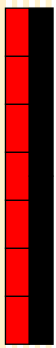
Quantidade de barras

1 vermelha
1 preta
2 vermelhas
1 preta
3 vermelhas
1 preta
4 vermelhas
1 preta
5 vermelhas
2 pretas
6 vermelhas
2 pretas
7 vermelhas
2 pretas

Professor: "qual foi o número obtido?"

Possíveis respostas dos participantes: "14".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "quantas barras vermelhas foram necessárias para atingir esse número?"

Possíveis respostas dos participantes: “7”.

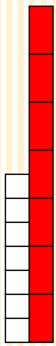
Professor: “quantas barras pretas foram necessárias para atingir esse número?”

Possíveis respostas dos participantes: “2”.

Professor: “ao lado esquerdo do monotrem contendo sete barras vermelhas posicionem essa mesma quantidade de barras brancas. Qual medida o monotrem branco representa do monotrem vermelho?”

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{7}{14}$”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: “ao lado esquerdo do monotrem contendo duas barras pretas posicionem essa mesma quantidade de barras lilás. Qual medida o monotrem lilás representa do monotrem preto?”

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{8}{14}$”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

Ação do professor: pedir aos participantes para demonstrarem essas duas frações sobre a carteira, logo abaixo das duas anteriores.

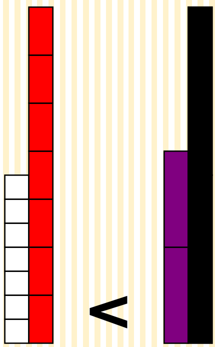
Professor: "$\frac{7}{14}$ é menor ou maior que $\frac{8}{14}$?"

Possíveis respostas dos participantes: "menor".

Ação do professor: pedir aos participantes para colocarem o sinal de menor entre as frações

Professor: "vamos colocar o sinal de menor entre as frações."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "$\frac{7}{14}$ equivalem a qual das medidas representadas anteriormente?"

Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{1}{2}$".

Professor: "e $\frac{8}{14}$ equivale qual das medidas representadas anteriormente?"

Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{4}{7}$".

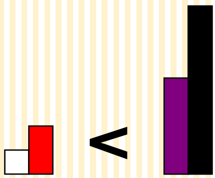
Professor: "então $\frac{1}{2}$ é menor ou maior que $\frac{4}{7}$? Represente sobre a carteira usando a simbologia matemática."

Possíveis respostas dos participantes: "menor".

Ação do professor: pedir aos participantes para colocarem o sinal de menor entre as frações.

Professor: "vamos colocar o sinal de menor entre as frações."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

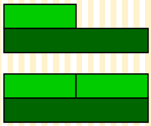


Ação do professor: representar sobre a carteira algumas sentenças. Comparar as medidas através da corrida das cores.

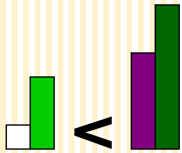
Professor: "$\frac{1}{2}$ é >, < ou = a $\frac{4}{5}$?"

Possíveis respostas dos participantes: "<"; "menor".

Ação do professor: deixar que os participantes realizem a corrida das cores com as barras verde-clara e verde-escura.

Corrida das cores	Quantidade de barras
	1 verde-clara 1 verde-escura 2 verde-claras 1 verde-escura

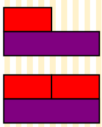
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



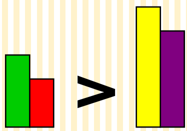
Professor: "$\frac{3}{2}$ é <, > ou = a $\frac{5}{4}$?"

Possíveis respostas dos participantes: ">"; "maior".

Ação do professor: deixar que os participantes realizem a corrida das cores com as barras vermelha e lilás.

Corrida das cores	Quantidade de barras
	1 vermelha 1 lilás 1 vermelha 2 lilases

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

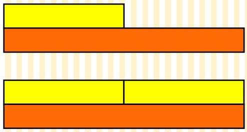


Professor: "$\frac{3}{4}$ é >, < ou = a $\frac{6}{10}$?"

Possíveis respostas dos participantes: "="; "igual".

Ação do professor: deixar que os participantes realizem a corrida das cores com as barras amarela e laranja.

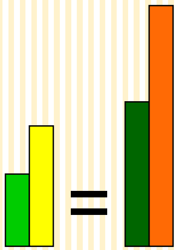
Corrida das cores



Quantidade de barras

1 amarela
1 laranja
2 amarelas
1 laranja

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

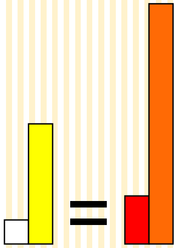


Professor: "o que precisamos fazer para comparar frações com unidade de referência diferentes ou denominadores diferentes?"

Possíveis respostas dos participantes: "igualar os denominadores"; "Fazer a corrida das cores"; "Igualar as unidades de referência".

Professor: "represente sobre a carteira uma sentença com denominadores diferentes. Agora, eu irei repassar sua sentença para o colega comparar se as medidas são >, <, =. Depois, cada um irá apresentar oralmente a representação que recebeu. Nesse momento, perguntar se eles entenderam a representação do colega."

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira. Poderá ter outras representações].



Professor: "caso os participantes não entenderem a representação do colega, reforçar que para comparar frações com a unidade de referência diferentes ou com denominadores diferentes é só realizar a corrida das cores e comparar os numeradores."

Ação do professor: ao término da aula recolher todos os materiais e guardá-los em local não visível pelos participantes. Após, pedir que retirem as vendas.

Conversa com o professor

Na sexta jornada, os participantes foram convidados a aprofundar a comparação entre frações, desta vez envolvendo numeradores e denominadores distintos. A atividade "corrida das cores" foi utilizada como estratégia didática para apoiar esse processo.

É importante retomar, junto ao grupo, de que forma essas experiências contribuíram para a compreensão de que frações com termos diferentes podem, ainda assim, representar a mesma medida. Avalie como os participantes mobilizaram as estratégias propostas, e em que medida se apropriaram da linguagem simbólica para consolidar os saberes construídos e orientar os próximos passos.

Este é um momento oportuno para refletir sobre o uso dos materiais físicos, a colaboração entre os pares e os processos de aprendizagem envolvidos. Avançar com intencionalidade, respeitando os diferentes tempos, ritmos e formas de aprender, é essencial para o fortalecimento de práticas pedagógicas inclusivas e significativas.

Com essa base, seguimos confiantes rumo à próxima jornada do nosso percurso formativo!


ESCOLA
A sétima aula compara frações com o mesmo numerador e denominadores distintos.

A sétima e última jornada aborda a terceira propriedade de comparação de frações: entre duas frações com o mesmo numerador, aquela com menor denominador representa a maior medida. Para aprofundar essa compreensão, os participantes realizam atividades com as barras de Cuisenaire, explorando a relação entre numerador fixo e variações no denominador.

Como parte do processo formativo, os participantes são incentivados a construírem sentenças matemáticas que expressem simbolicamente os conceitos trabalhados, integrando a manipulação tátil dos materiais à linguagem formal da Matemática.

Os objetivos para a sétima jornada são:

1. compreender que comprimentos de diferentes tamanhos podem ser compostos por uma ou mais barras posicionadas sobre a mesa, ligadas ponta a ponta, como em um trem.
2. comparar o comprimento das barras com a simbologia de “maior que”, “menor que”, “igual a” e “diferente de”.
3. elaborar sentenças com >, <, =, ≠ ao compararem os comprimentos das barras.
4. Representar frações nas barras a partir de determinada unidade.
5. compreender a equivalência de frações, ou seja, que duas ou mais frações podem ser escritas de maneiras diferentes, porém apresentando a mesma relação de medida.
6. encontrar o denominador comum entre duas frações dadas pela “corrida das cores”.
7. generalizar a propriedade: dadas duas frações com numeradores e denominadores diferentes, encontre uma fração equivalente para cada uma com denominadores comuns. Aquela que tiver o maior numerador terá a maior medida (2ª propriedade).

8. generalizar a propriedade: dadas duas frações com o mesmo numerador, aquela que tiver menor denominador, terá a maior medida (3ª propriedade).

Vamos para o que planejamos para a sétima jornada.

Ação do professor: disponibilizar aos participantes uma venda para os olhos e entregar o kit de barras Cuisenaire, a escadinha fixa, o tabuleiro e os sinais matemáticos.

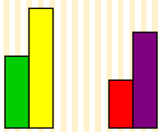
Observação para o professor: a unidade de referência será a comparação multiplicativa entre duas grandezas medidas pela mesma unidade. Incentivar os participantes a utilizarem o tabuleiro como suporte para alinhar e organizar verticalmente as barras durante a execução das tarefas.

Ação do professor: representar sobre a carteira algumas sentenças. Comparar as medidas através da corrida das cores.

Professor: "representem $\frac{3}{5}$ com as barras verde-claras e amarelas; e $\frac{2}{4}$ com as barras vermelhas e lilás. $\frac{3}{5}$ é menor ou maior que $\frac{2}{4}$?"

Possíveis respostas dos participantes: "maior"; "menor".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "o que precisamos fazer para conseguir comparar essas duas medidas?"

Possíveis respostas dos participantes: "igualar os denominadores"; "Igualar as unidades de referência".

Professor: "e como fazemos isso?"

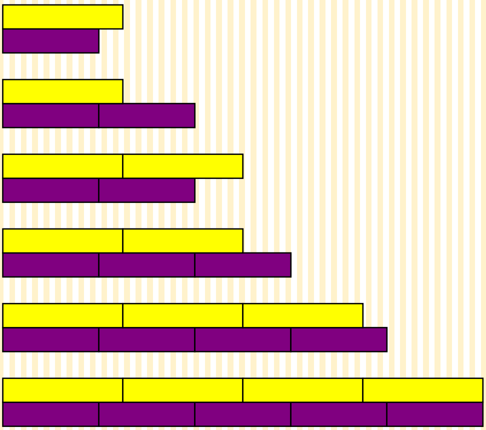
Possíveis respostas dos participantes: "com a corrida das cores".

Professor: "com quais barras faremos a corrida das cores?"

Possíveis respostas dos participantes: "Amarela e lilás".

Ação do professor: deixar que os participantes realizem a corrida das cores com as barras amarela e lilás.

Corrida das cores



Quantidade de barras

1 amarela
1 lilás
1 amarela
2 lilases
2 amarelas
2 lilases
2 amarelas
3 lilases
3 amarelas
4 lilases
4 amarelas
5 lilases

Professor: "qual foi o número obtido?"

Possíveis respostas dos participantes: "20".

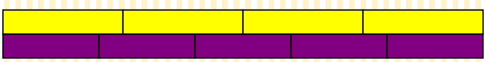
Professor: "quantas barras amarelas foram necessárias para atingir esse número?"

Possíveis respostas dos participantes: "4".

Professor: "quantas barras lilás foram necessárias para atingir esse número?"

Possíveis respostas dos participantes: "5".

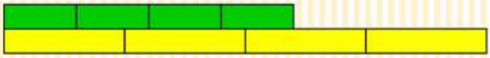
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "ao lado esquerdo do monotrem contendo quatro barras amarelas posicionem essa mesma quantidade de barras verde-claras. Qual medida o monotrem verde claro representa do monotrem amarelo?"

Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{12}{20}$".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "ao lado esquerdo do monotrem contendo barras lilás posicionem essa mesma quantidade de barras vermelhas. Qual medida o monotrem vermelho representa do monotrem lilás?"

Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{10}{20}$".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].

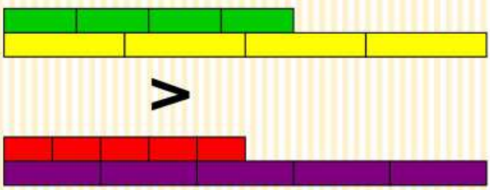
Ação do professor: pedir aos participantes para demonstrarem essas duas frações sobre a carteira, logo abaixo das duas anteriores.

Professor: "$\frac{12}{20}$ é menor ou maior que $\frac{10}{20}$?"

Possíveis respostas dos participantes: "maior".

Ação do professor: pedir aos participantes para colocarem o sinal de maior entre as frações.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "$\frac{12}{20}$ equivale a qual das medidas representadas anteriormente?"

Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{3}{5}$".

Professor: "e $\frac{10}{20}$ equivale a qual das medidas representadas anteriormente?"

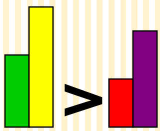
Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{2}{3}$".

Professor: "então $\frac{3}{4}$ é menor ou maior que $\frac{2}{4}$? Represente sobre a carteira usando a simbologia matemática".

Possíveis respostas dos participantes: "maior".

Ação do professor: pedir aos participantes para colocarem o sinal de maior entre as frações.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "o que foi preciso fazer antes de iniciar a comparação?"

Possíveis respostas dos participantes: "igualar os denominadores"; "Igualar as unidades de referência"; "Fazer a corrida das cores".

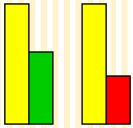
Professor: "o que precisamos fazer para comparar frações com denominadores diferentes?"

Possíveis respostas dos participantes: "para comparar frações com denominadores diferentes é só realizar a corrida das cores e comparar os numeradores."

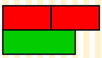
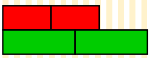
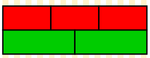
Professor: “representem $\frac{5}{3}$ com as barras amarela e verde-clara; e $\frac{5}{2}$ com as barras amarela e vermelha. $\frac{5}{3}$ é menor ou maior que $\frac{5}{2}$?”

Possíveis respostas dos participantes: “maior”; “menor”.

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



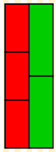
Ação do professor: deixar que os participantes realizem a corrida das cores com as barras verde-claras e vermelhas.

Corrida das cores	Quantidade de barras
	1 vermelha 1 verde-clara
	2 vermelhas 1 verde-clara
	2 vermelhas 2 verde-claras
	3 vermelhas 2 verde-claras

Professor: “qual foi o número obtido?”

Possíveis respostas dos participantes: “6”.

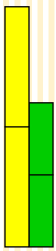
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "quantas barras verde-claras foram necessárias para atingir esse número?"
Possíveis respostas dos participantes: "2".

Professor: "quantas barras vermelhas foram necessárias para atingir esse número?"
Possíveis respostas dos participantes: "3".

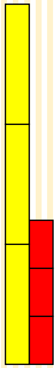
Professor: "ao lado esquerdo do monotrem contendo duas barras verde-claras posicionem essa mesma quantidade de barras amarelas. Qual medida o monotrem amarelo representa do monotrem verde claro?"
Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{10}{6}$".
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "ao lado esquerdo do monotrem com três barras vermelhas, posicionem essa mesma quantidade de barras amarelas. Qual medida o monotrem amarelo representa do monotrem vermelho?"

Possíveis respostas dos participantes: “$\frac{15}{6}$”.

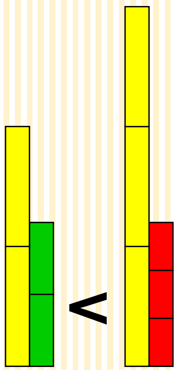
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: “$\frac{10}{6}$ é menor ou maior que $\frac{15}{6}$?”

Possíveis respostas dos participantes: “menor”.

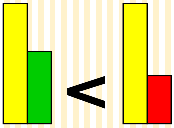
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: “então $\frac{5}{3}$ é menor ou maior que $\frac{5}{2}$? Represente sobre a carteira usando a simbologia matemática”

Possíveis respostas dos participantes: “menor”.

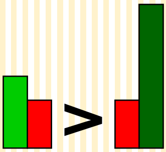
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



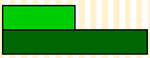
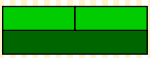
Professor: "representem $\frac{2}{3}$ com as barras vermelha e verde-clara; e $\frac{2}{6}$ com as barras vermelha e verde-escura. $\frac{2}{3}$ é menor ou maior que $\frac{2}{6}$?"

Possíveis respostas dos participantes: "maior".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



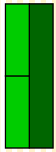
Ação do professor: deixar que os participantes realizem a corrida das cores com as barras verde-claras e verde-escuras.

Corrida das cores	Quantidade de barras
	1 verde-clara 1 verde-escura
	2 verde-claras 1 verde-escura

Professor: "qual foi o número obtido?"

Possíveis respostas dos participantes: "6".

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "quantas barras verde-claras foram necessárias para atingir esse número?"

Possíveis respostas dos participantes: "2".

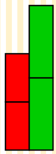
Professor: "quantas barras verdes escuras foram necessárias para atingir esse número?"

Possíveis respostas dos participantes: "1".

Professor: "ao lado esquerdo do monotrem contendo duas barras verde-claras posicionem essa mesma quantidade de barras vermelhas. Qual medida o monotrem vermelho representa do monotrem verde claro?"

Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{4}{6}$".

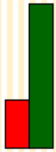
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "ao lado esquerdo do monotrem contendo uma barra verde-escura posicionem essa mesma quantidade de barras vermelhas. Qual medida o monotrem vermelho representa do monotrem verde escuro?"

Possíveis respostas dos participantes: "$\frac{2}{6}$".

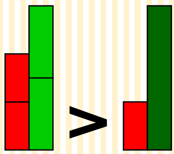
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



Professor: "então $\frac{2}{3}$ é menor ou maior que $\frac{2}{6}$? Represente sobre a carteira usando a simbologia matemática."

Possíveis respostas dos participantes: "maior".

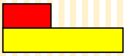
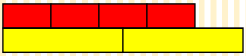
Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira].



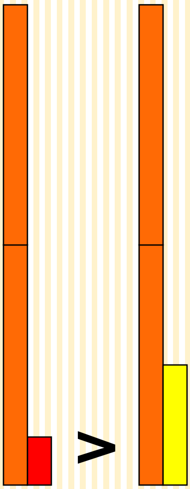
Professor: "representem $\frac{20}{2}$ com as barras laranja e vermelha; e $\frac{20}{5}$ com as barras laranja e amarela. $\frac{20}{2}$ é menor ou maior que $\frac{20}{5}$?"

Possíveis respostas dos participantes: "maior".

Ação do professor: deixar que os participantes realizem a corrida das cores com as barras vermelha e amarela.

Corrida das cores	Quantidade de barras
	1 vermelha 1 amarela
	2 vermelhas 1 amarela
	3 vermelhas 1 amarela
	4 vermelhas 2 amarelas
	5 vermelhas 2 amarelas

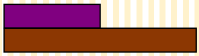
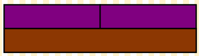
Professor: "então $\frac{20}{2}$ é menor ou maior que $\frac{20}{5}$? Represente sobre a carteira usando a simbologia matemática."



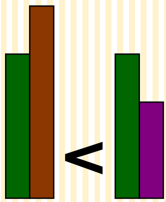
Professor: "representem $\frac{6}{8}$ com as barras verde-escura e marrom; e $\frac{6}{4}$. com as barras verde-escura e lilás. $\frac{6}{8}$ é menor ou maior que $\frac{6}{4}$?"

Possíveis respostas dos participantes: “menor”.

Ação do professor: deixar que os participantes realizem a corrida das cores com as barras lilás e marrom.

Corrida das cores	Quantidade de barras
	1 lilás 1 marrom
	2 lilases 2 marrons

Professor: “então $\frac{6}{8}$ é menor ou maior que $\frac{6}{4}$? Represente sobre a carteira usando a simbologia matemática.”



Professor: “o que essas relações têm em comum?”

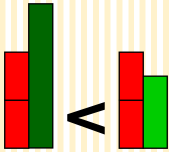
Possíveis respostas dos participantes: “que os numeradores são iguais”.

Professor: “nesses casos, há alguma relação entre os denominadores e o resultado das comparações?”

Possíveis respostas dos participantes: “que a fração com o maior denominador se tornou a menor medida e a fração com o menor denominador se tornou a maior medida”.

Professor: “represente sobre a carteira uma sentença com numeradores iguais. Agora, eu irei repassar sua sentença para o colega comparar se as medidas são >, <, =. Depois, cada um irá apresentar oralmente a representação que recebeu. Nesse momento, perguntar se eles entenderam a representação do colega.”

Possíveis respostas dos participantes: [representação sobre a carteira. Poderá ter outras representações].



Professor: "caso os participantes não entenderem a representação do colega, reforçar que para comparar frações com numeradores iguais, a fração com o maior denominador terá a menor medida e a fração com o menor denominador a maior medida."
Ação do professor: no término da aula recolher todos os materiais e guardá-los em local não visível aos participantes. Após, pedir que retirem as vendas.

Conversa com o professor

Na última jornada, aprofundamos a compreensão da comparação entre frações, explorando a relação segundo a qual, entre duas frações com o mesmo numerador, aquela com menor denominador representa a maior medida. É essencial investigar, junto aos participantes, como essa relação se manifesta fisicamente por meio da manipulação das barras de Cuisenaire, favorecendo a percepção intuitiva da variação da unidade conforme o denominador.

Ao propor a construção de sentenças matemáticas, incentive a articulação entre a linguagem simbólica e a experiência tátil, promovendo a integração entre diferentes formas de representação. Retomar e conectar conceitos trabalhados ao longo das aulas contribui para a consolidação dos saberes construídos.

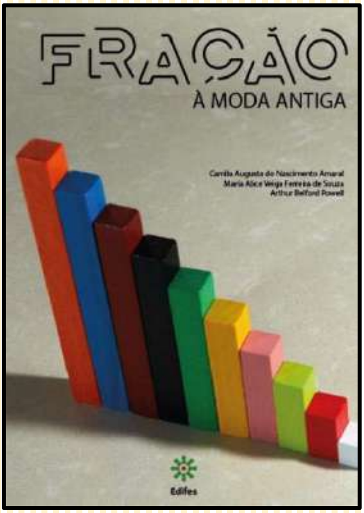
Dê atenção especial à observação das estratégias utilizadas pelos participantes, especialmente nas atividades como a “corrida das cores”, buscando compreender como cada um avançou na generalização dos conceitos.

O encerramento desta etapa representa uma valiosa oportunidade para fortalecer a conexão entre a manipulação tátil, a abstração conceitual e a comunicação matemática — pilares fundamentais para um ensino mais compreensível e inclusivo.


ESCOLA
E agora?
Como continuar?

Acabou? Ainda não...

É com satisfação que encerramos o percurso proposto por **Jornada das Frações com as Mãos**, um material pensado para contribuir com a formação de professores capazes de conduzir, com intencionalidade pedagógica e sensibilidade didática, o ensino de frações para estudantes cegos e videntes que compartilham do mesmo espaço e tempo de sala de aula. Essa proposta é uma adaptação do livro Frações à Moda Antiga[10], cujo foco foi a construção conceitual das frações a partir de situações históricas e práticas. **Jornada das Frações com as Mãos** ressignifica esse material original, orientando-o para os princípios da inclusão e da acessibilidade, sem renunciar ao rigor conceitual e nem da riqueza didática.

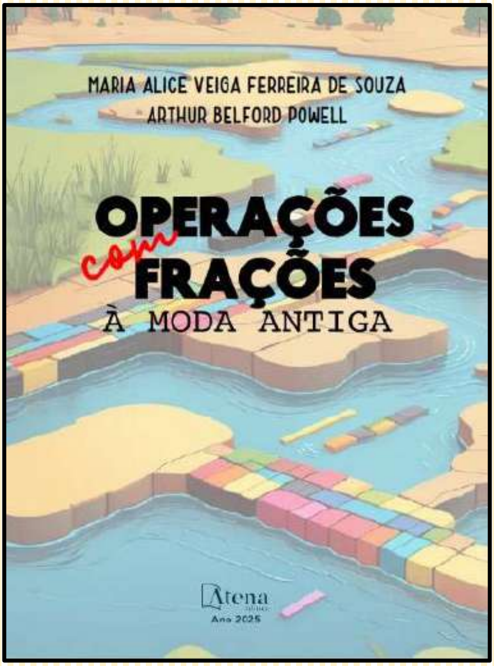


[10] Fração à Moda Antiga. Autores: Camila Augusta do Nascimento Amaral, Maria Alice Veiga Ferreira de Souza e Arthur Belford Powell. http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/602100

Ao longo da **Jornada das Frações com as Mãos**, reafirmamos que o ensino de frações deve partir de sua emergência histórica e funcional: a necessidade de medir porções de terra que não podiam ser expressas por números inteiros. Esse contexto revela a importância da unidade de referência como elemento estruturante para o entendimento das frações, sendo ela o parâmetro que permite comparar, classificar e operar com essas expressões numéricas. Reconhecer e trabalhar essa unidade é condição para avançar na compreensão de conceitos como equivalência, comparação e, mais adiante, as operações aritméticas.

Jornada das Frações com as Mãos foi organizado em etapas que respeitam a progressão do pensamento matemático e favorecem a construção do conhecimento a partir da experiência tátil e simbólica. Iniciamos com um breve fio histórico da emergência das frações, seguida de orientações sobre o uso das barras de Cuisenaire como recurso didático sensorial, acessível e conceitualmente potente. Em seguida, apresentamos sete jornadas estruturadas sob a lógica do Lesson Study e inspiradas no modelo instrucional 4A, que desenvolveram, passo a passo, as ideias centrais do conceito de fração: desde a representação e nomeação, passando pelas comparações entre frações com numeradores e denominadores iguais ou diferentes, até a exploração da equivalência com o apoio da estratégia "corrida das cores" para identificação do mínimo múltiplo comum.

É importante dizer que estas sete jornadas não representam um ponto final, mas uma base sobre a qual outros saberes devem ser construídos. O trabalho com frações não se esgota na comparação; pelo contrário, amplia-se com a introdução e aprofundamento das operações aritméticas. Para essa continuidade, sugerimos estudo do teor do livro Operações com Frações à Moda Antiga[11], que desenvolve, com o mesmo cuidado conceitual e metodológico, os significados das operações básicas fundamentais com frações.



Assim, **Jornada das Frações com as Mãos** não pretende ser um roteiro rígido ou fechado, mas um ponto de partida. Esperamos que suas ideias sirvam de inspiração para que professores adaptem os conteúdos às realidades, interesses e necessidades específicas de seus estudantes, criando ambientes de aprendizagem acessíveis, instigantes e intelectualmente desafiadores. Que este

[11] Operações com Frações à Moda Antiga. Autores: Maria Alice Veiga Ferreira de Souza e Arthur Belford Powell. https://atenaeditora.com.br/catalogo/ebook/operacoes-com-fracoes-a-moda-antiga

material ajude a formar educadores que ensinem com as mãos, com os olhos, com a escuta atenta — e sobretudo, com o compromisso ético de fazer da Matemática uma linguagem verdadeiramente para todos.

Os autores.


ESCOLA
Operações com Frações à Moda Antiga
Jornada 7
Jornada 6
Jornada 5
Jornada 4
Jornada 3
Jornada 2
Jornada 1
História das frações; barras de Cuisenaire


ESCOLA

Para você, Professor!

No silêncio do olhar que não vê,
desperta o mundo onde o tato é rei.
Na palma estendida, o saber floresce,
e o que era inteiro, agora se tece.

Em cada toque, uma nova descoberta,
frações que dançam sob a ponta dos dedos.
Metades, terços — ideias despertas,
no compasso sensível dos seus enredos.

A régua, o copo, o fio, o som,
são pontes erguidas num gesto bom.
Medição que ensina e encanta,
quando a escuta do tato se levanta.

Professor, tua mão é guia e caminho,
na partilha serena, nunca sozinho.
Tu revelas o mundo com afeto e razão,
transformando frações em compreensão.

Segue, pois, com coragem e ternura,
teu ensino é luz que segura
o invisível saber, com alma e calma:
com as mãos, a mente se transforma.

Sucesso!

Declaração do uso de Inteligências Artificiais em Jornada das Frações com as Mãos

Jornada das Frações com as Mãos contou com o apoio de diferentes inteligências artificiais (IA) exclusivamente em duas situações: na confecção dos personagens e capa, e, eventualmente, na revisão ortográfica de alguns textos da parte introdutória do livro. Quanto aos personagens e capa, houve geração inicial de imagens emersas da inteligência artificial https://copilot.microsoft.com e do assistente virtual https://www.luzia.com. Essas ilustrações iniciais, em sua forma bruta, não corresponderam integralmente aos anseios imagéticos desejados por nós e, por isso, elas foram encaminhadas à designer gráfica digital Srta. Maria Victória Lucas Bortolozzo para redesenhos e adaptações que as tornassem alinhadas às demandas do livro.

Quanto aos textos introdutórios do livro, nenhum foi inteiramente construído ou redigido de forma autônoma por essas ferramentas artificiais. Contamos, no entanto, com auxílio esporádico do https://chat.openai.com que colaborou no processo de revisão e edição de trechos do manuscrito, conforme diretrizes de publicação, permanecendo os autores responsáveis pelo conteúdo integral do livro, garantindo que o texto se mantivesse livre de inserções impertinentes ou acréscimos automáticos que pudessem desviar dos propósitos da obra. Todo o material foi criteriosamente revisado e ajustado, resguardando a autoria, a responsabilidade intelectual e a coerência com os conhecimentos técnicos dos autores no campo da Matemática e da Educação Matemática.

Os autores.

Fontes que apoiaram nosso estudo para a construção das aulas

Alexandrov, A. D. (1994). *Matemática: seu conteúdo, métodos e significado.* 3. ed. Brasília: Editora da UnB.

Amaral, C. A. N., Souza, M. A. V. F., & Powell, A. B. (2021). *Fração à moda antiga*. Vitória: Edifes.

Amaral, C. A. N. (2021). *Conceito de fração pela perspectiva de medição: uma abordagem baseada no 4A-Instructional Model utilizando as barras de Cuisenaire e conduzida por um lesson study*. [Dissertação de mestrado, Instituto Federal do Espírito Santo].

Caraça, B. J. (2002). *Conceitos fundamentais da Matemática*. (Edição revista). Gradiva.

Cuisenaire, G. (1984). *Os números em cores.* São Paulo: Ática.

Del Campo, J. E. F. (1996). *La enseñanza de la matemática a los ciegos*. Madri: ONCE.

Escolano, R. V. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente.* [Tese de doutorado, Universidad de Zaragoza].

Fernandes, S. H. A., & Healy, L. (2010). A inclusão de alunos cegos nas aulas de matemática: explorando área, perímetro e volume através do tato. *Boletim de Educação Matemática*, *23*(37), 1111-1135.

Fernandes, S. H. A., & Healy, L. (2007). Ensaio sobre a inclusão na Educação Matemática. *Unión-revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *3*(10), 59-76.

Gattegno, Caleb. (1988). *Matemática com significado: o uso das barras Cuisenaire*. São Paulo: Ática.

Nacarato, A. M. & Fiorentini, D. (2005). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática: investigando e teorizando a partir da prática.* São Paulo: Musa Editora.

Nacarato, A. M. (2005) Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, 9, (9-10), 1-6.

Oliveira, R. G. de. (1996). *Aprendizagem de frações: uma análise comparativa de dois processos diferentes de ensino na 5a. serie do 1o. grau* [Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas].

Powell, A. B. (2023). Enhancing students' fraction magnitude knowledge: A study with students in early elementary education. *Journal of Mathematical Behavior, 70*, 1-14.

Powell, A. B. (2018). Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. *Perspectiva*, *36*(2), 399-420.

Powell, A. B., & Frankenstein, M. (Eds.). (1997). *Ethnomathematics: challenging eurocentrism in mathematics education.* Albany: State University of New York Press.

Scheffer, N. F., & Powell, A. B. (2019). Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *Revemop*, *1*(3), 476-503.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, *23*(7), 691-697.

Silveira, E., Souza, M. A. V. F., & Powell, A. B. (2024). Estudo de frações: superficialidades, parcialidades ou equívocos. *Bolema*, *38*, 1-23.

Souza, M. A. V. F., & Powell, A. B. (2021). How do textbooks from Brazil, United States and Japan deal with fractions? *Acta Scientiae*, *23*(4), 77-111.

Souza, M. A. V. F., & Powell, A. B. (2023) Kyozaikenkyu: essential lesson planning in Japanese lesson study. *Caminhos da Educação Matemática em Revista,* 13(1), 1-24.

Souza, M. A. V. F., & Powell, A. B. (2025). *Operações com frações à moda antiga.* Paraná: Atena Editora.

Takahashi, A., & McDougal, T. (2016). Collaborative lesson research: maximizing the impact of lesson study. *ZDM Mathematics Education*, *48*, 513-526.

Watanabe, T., Takahashi, A., & Yoshida, M. (2008). Kyozaikenkyu: A critical step for conducting effective lesson study and beyond. *Association of Mathematics Teacher Educators*, 131–142.

Witt, C. (2018). *O ensino das frações por meio de jogos e aplicativos digitais.* [Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização), Universidade Tecnológica Federal do Paraná].

Minicurrículo dos autores

Daniele Zeni Serafini Mafioletti é brasileira, mestre em Educação pelo Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) pelo Instituto Federal do Espírito Santo. Licenciada em Matemática, Pedagogia e Administração. Professora de Matemática da rede municipal (aposentada) e Pedagoga da rede estadual, localizada no Centro Estadual de Educação de Jovens e Adultos "Pedro Antonio Vitali". Tem interesse em ensino e pesquisa ligados à Formação de Professores de Matemática e Educação Inclusiva.

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza é brasileira, com pós-doutorado em Resolução de Problemas pela Universidade de Lisboa

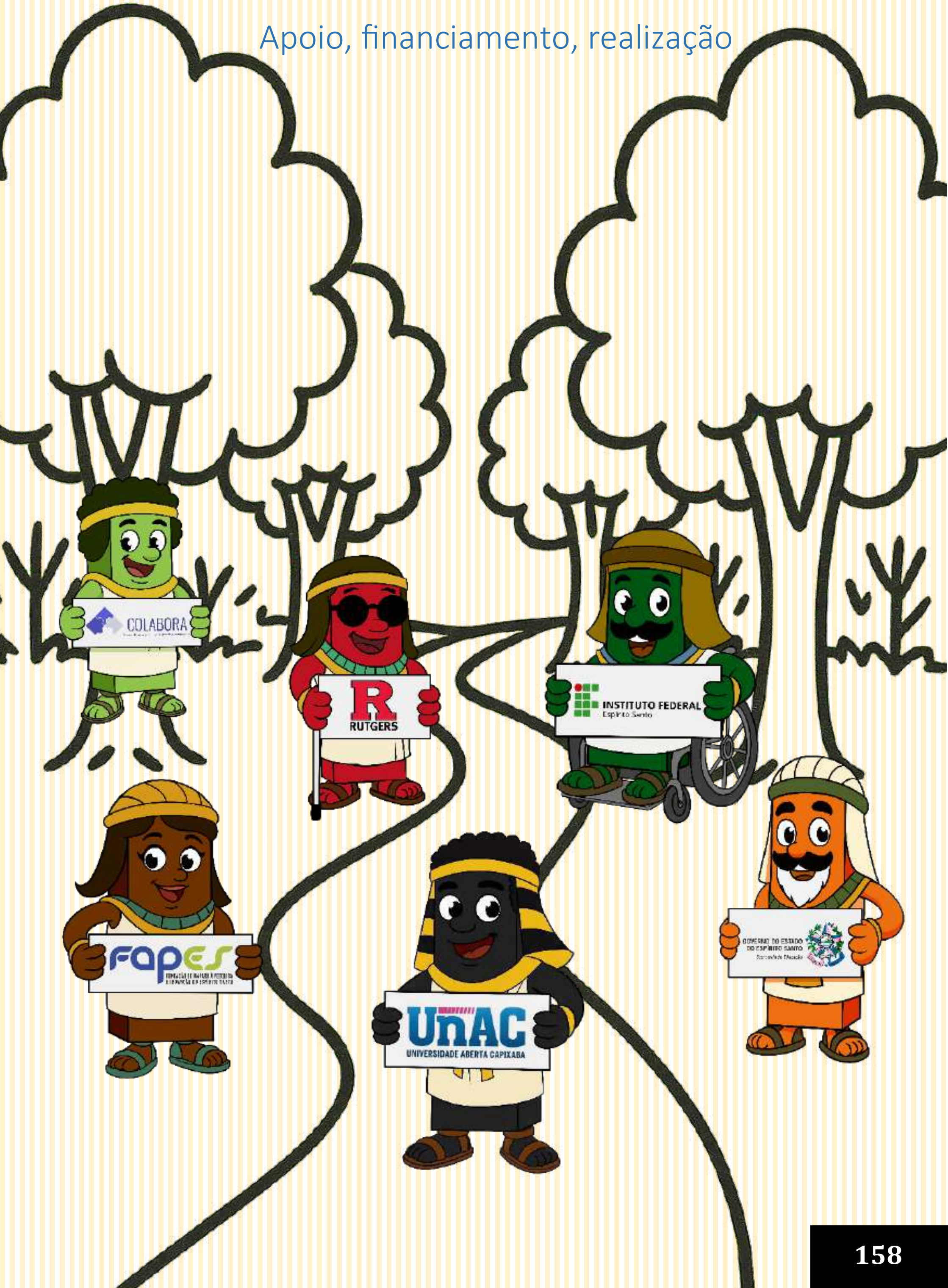
(2014), em Ensino de Números Racionais pela Rutgers University – Newark – United States of America (2018) e, em Frações pela Perspectiva de Medição pela Rutgers University – Newark – United States

(2024), doutora em Psicologia da Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (2007), mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (2001), graduada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (1995). É professora titular do Instituto Federal do Espírito Santo, onde trabalha, principalmente, na Pós-graduação Strictu Senso em Educação em Ciências e Matemática. Tem interesse em ensino, pesquisa e extensão ligados à formação de professores que ensinam matemática, em Resolução de Problemas, Lesson Study, Psicologia Cognitiva ligada ao processo de pensamento matemático, aplicações estatísticas e matemáticas na área da Educação, Ciências, Matemática e Engenharias.

Arthur Belford Powell é estadunidense, doutor em Educação Matemática pela Rutgers University (2003), mestre em Matemática pela University of Michigan (1977), graduado em Matemática e Estatística pela Hampshire College (1976). Atualmente é professor de Educação Matemática na Rutgers University (New Jersey). É diretor associado e pesquisador do Robert B. Davis Institute for Learning of the Graduate School of Education. Coordena o Grupo de Pesquisa sobre Comunicação, Tecnologia e Aprendizagem Matemática da Rutgers University. É diretor interino do Programa de Política Educacional e Sistemas Urbanos (Program in

Educational Policy, Urban Systems). Está profundamente engajado em projetos de colaboração internacional entre educadores matemáticos da Rutgers University e do hemisfério Sul (Moçambique, África do Sul, Brasil e Haiti). Tem interesse em pesquisas ligadas à Aprendizagem Matemática, Etnomatemática, desenvolvimento das ideias, raciocínio e heurística matemáticos, formação de professores de Matemática e resolução de problemas em Matemática de modo colaborativo e com tecnologia.

Apoio, financiamento, realização



FIM