Gilberto Brito de Almeida Filho
Stéfani Concolato Vieira

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Lógica, Conjuntos e Polinômios

Atena Editora
Ano 2025

Gilberto Brito de Almeida Filho
Stéfani Concolato Vieira

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Lógica, Conjuntos e Polinômios

Atena Editora
Ano 2025

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira Scheffer
Assistente editorial
Flávia Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Nataly Evilin Gayde
Thamires Camili Gayde
Vilmar Linhares de Lara Junior
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Yago Raphael Massuqueto Rocha

2025 by Atena Editora
Copyright © 2025 Atena Editora
Copyright do texto © 2025, o autor
Copyright da edição © 2025, Atena Editora
Os direitos desta edição foram cedidos à Atena Editora pelo autor.
Open access publication by Atena Editora

Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

A Atena Editora mantém um compromisso firme com a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, assegurando que os padrões éticos e acadêmicos sejam rigorosamente cumpridos. Adota políticas para prevenir e combater práticas como plágio, manipulação ou falsificação de dados e resultados, bem como quaisquer interferências indevidas de interesses financeiros ou institucionais. Qualquer suspeita de má conduta científica é tratada com máxima seriedade e será investigada de acordo com os mais elevados padrões de rigor acadêmico, transparência e ética.

O conteúdo da obra e seus dados, em sua forma, correção e confiabilidade, são de responsabilidade exclusiva do autor, não representando necessariamente a posição oficial da Atena Editora. O download, compartilhamento, adaptação e reutilização desta obra são permitidos para quaisquer fins, desde que seja atribuída a devida autoria e referência à editora, conforme os termos da Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

Os trabalhos nacionais foram submetidos à avaliação cega por pares realizada pelos membros do Conselho Editorial da editora, enquanto os internacionais foram avaliados por pareceristas externos. Todos foram aprovados para publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Fundamentos de matemática elementar: lógica, conjuntos e polinômios

Autores:	Gilberto Brito de Almeida Filho Stéfani Concolato Vieira
Revisão:	Os autores
Diagramação:	Thamires Camili Gayde
Capa:	Yago Raphael Massuqueto Rocha
Indexação:	Amanda Kelly da Costa Veiga

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F981 Fundamentos de matemática elementar: lógica, conjuntos e polinômios / Organizador Stéfani Concolato Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2025.

Autores
Gilberto Brito de Almeida Filho
Stéfani Concolato Vieira

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-3569-3
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.693252306

1. Ensino de matemática. I. Vieira, Stéfani Concolato (Organizador). II. Título.

CDD 510.7

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
+55 (42) 3323-5493
+55 (42) 99955-2866
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DO AUTOR

Para fins desta declaração, o termo 'autor' é utilizado de forma neutra, sem distinção de gênero ou número, salvo indicação em contrário. Da mesma forma, o termo 'obra' refere-se a qualquer versão ou formato da criação literária, incluindo, mas não se limitando a artigos, e-books, conteúdos on-line, acesso aberto, impressos e comercializados, independentemente do número de títulos ou volumes. O autor desta obra declara, para todos os fins, que: 1. Não possui qualquer interesse comercial que constitua conflito de interesses em relação à publicação; 2. Participou ativamente da elaboração da obra; 3. O conteúdo está isento de dados e/ou resultados fraudulentos, todas as fontes de financiamento foram devidamente informadas e dados e interpretações de outras pesquisas foram corretamente citados e referenciados; 4. Autoriza integralmente a edição e publicação, abrangendo os registros legais, produção visual e gráfica, bem como o lançamento e a divulgação, conforme os critérios da Atena Editora; 5. Declara ciência de que a obra será publicada sob a Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0), a qual permite o compartilhamento, armazenamento, reprodução, adaptação e disponibilização em repositórios digitais e outras plataformas, desde que sejam devidamente atribuídos a autoria e os créditos à editora; 6. Assume total responsabilidade pelo conteúdo da obra, incluindo originalidade, veracidade das informações, opiniões expressas e eventuais implicações legais decorrentes da publicação.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação está licenciada sob a Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0), que permite copiar, distribuir, exibir, executar, adaptar e criar obras derivadas para quaisquer fins, inclusive comerciais, desde que sejam atribuídos os devidos créditos ao(s) autor(es) e à editora. Trata-se de uma forma alternativa de licenciamento autorizada pela Lei de Direitos Autorais (Lei nº 9.610/98), adotada com base nos princípios do acesso aberto, promovendo a livre circulação e reutilização do conteúdo acadêmico. 2. Os autores mantêm integralmente seus direitos autorais e são incentivados a divulgar esta obra em repositórios institucionais, plataformas digitais e outros meios, desde que haja a devida atribuição de autoria e menção à editora, conforme os termos da Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0). 3. A editora reserva-se o direito de disponibilizar a publicação em seu site, aplicativo e demais plataformas, bem como de comercializar exemplares impressos ou digitais, quando aplicável. Nos casos de comercialização, seja por livrarias, distribuidores ou plataformas parceiras, o repasse dos direitos autorais será efetuado conforme as condições previstas em contrato específico firmado entre as partes. 4. Em conformidade com a Lei Geral de Proteção de Dados, a editora não cede, comercializa ou autoriza o uso de dados pessoais dos autores para finalidades que não tenham relação direta com a divulgação desta obra e seu processo editorial.

Conselho Editorial
Ciências Exatas e da Terra e Engenharias
Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Cristina Aledi Felsemburgh – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof. Dr. Diogo Peixoto Cordova – Universidade Federal do Pampa, Campus Caçapava do Sul
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Fabrício Moraes de Almeida – Universidade Federal de Rondônia
Profª Drª Glécilla Colombelli de Souza Nunes – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Hauster Maximiler Campos de Paula – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Iara Margolis Ribeiro – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Drª Jéssica Barbosa da Silva do Nascimento – Universidade Estadual de Santa Cruz
Profª Drª Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Leonardo França da Silva – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof. Dr. Marcos Vinicius Winckler Caldeira – Universidade Federal do Espírito Santo
Profª Drª Maria Iaponeide Fernandes Macêdo – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Profª Drª Maria José de Holanda Leite – Universidade Federal de Alagoas
Profª Drª Mariana Natale Fiorelli Fabiche – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Priscila Natasha Kinas – Universidade do Estado de Santa Catarina
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Rafael Pacheco dos Santos – Universidade do Estado de Santa Catarina
Prof. Dr. Ramiro Picoli Nippes – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Regina Célia da Silva Barros Allil – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí

APRESENTAÇÃO

A presente obra tem como objetivo oferecer uma introdução rigorosa e acessível à Lógica Matemática e à Teoria de Conjuntos, com foco nas demandas curriculares dos cursos de Engenharia e cursos na modalidade de Ensino a Distância (EAD). Estes dois domínios fundamentais constituem a base para o desenvolvimento do raciocínio lógico-formal, essencial para a formação acadêmica e profissional dos futuros engenheiros e profissionais das ciências exatas.

A Lógica Matemática fornece as ferramentas necessárias para a construção e a análise de argumentos válidos, o desenvolvimento de provas matemáticas e a compreensão de estruturas formais. A Teoria de Conjuntos, por sua vez, estabelece a linguagem universal da matemática moderna, sendo indispensável para o entendimento de conceitos como funções, relações, estruturas algébricas e sistemas numéricos.

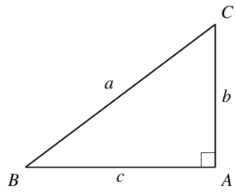
O conteúdo foi organizado de maneira gradual, priorizando a clareza expositiva, a formalização progressiva dos conceitos e a articulação entre teoria e prática. A estrutura dos capítulos contempla definições precisas, resultados, exemplos e cores, favorecendo o aprendizado autônomo — característica essencial no ambiente EAD.

Este livro busca, portanto, não apenas cumprir uma função didática, mas também contribuir para a consolidação de uma formação matemática sólida, crítica e aplicada, alinhada às exigências contemporâneas da educação em Engenharia.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO À LÓGICA

A **Lógica** pode ser entendida como a ciência que estuda os princípios e os métodos que permitem estabelecer as condições de validade e invalidade dos argumentos. Esta teoria permite a construção dos resultados em Matemática, através de **axiomas** (leis básicas) e regras de dedução que demonstram os teoremas.



Por exemplo, o Teorema de Pitágoras: "Num triângulo retângulo o comprimento da hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos."

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Este teorema é válido no plano, pois os **Axiomas de Euclides** são válidos na Geometria Plana. Entretanto, pode não valer o Teorema de Pitágoras num contexto de geometria numa esfera, isto é, é possível obter um triângulo desenhado sob uma esfera cuja a soma dos ângulos internos desse triângulo é maior do que 180º. Portanto é importante conhecer as hipóteses para argumentar resultados.

CÁLCULO PROPOSICIONAL

Como objetivo de argumentar resultados, vamos estudar os conceitos das afirmações e quando estas são verdadeiras ou falsas, e o que isto significa para evitar ambiguidades na Matemática, levando a exatidão desta ciência. A parte da Lógica Matemática responsável em analisar estes conceitos é o **Cálculo Proposicional**.

Definição 1.1.1. *Uma **proposição** ou um **enunciado** é qualquer sentença que afirma uma informação, a qual é necessariamente*

1. *Uma oração, com sujeito e predicado;*
2. *Uma declaração não exclamativa, nem interrogativa;*
3. É verdadeira , denotada por (V), ou é falsa, denotada por (F), podendo ser apenas uma delas.

*Denotaremos uma proposição por uma letra, digamos, **p**. O **valor-verdade** de uma proposição **p** é (V) ou (F).*

Exemplo 1.1.1. Vejamos alguns exemplos.

a. "Tudo bem?" Esta não é uma proposição, pois não assume um valor-verdade. É apenas uma sentença interrogativa.

b. "Minha nossa!" Esta não é uma proposição. É apenas uma sentença exclamativa.

c. "Se eu estudar, então vou aprender." Esta é uma proposição, pois pode ser verdadeira ou falsa.

Perceba que podemos enunciar várias informações em uma mesma proposição. Portanto, apresentamos a seguinte definição.

Definição 1.1.2. *Uma proposição é **simples** se, e somente se, contiver uma única afirmação. Uma proposição é **composta** quando for constituída por uma sequência finita de pelo menos duas proposições simples.*

Vejamos como diferenciar proposições simples de proposições compostas.

a. “Matemática é interessante” é uma **proposição simples**.

b. “Aprender é uma dádiva” é uma **proposição simples**.

c. “Se fizer sol, eu vou à praia” é uma **proposição composta**.

d. **p**: Nove é diferente de cinco ($9 = 5$). Esta é uma **proposição simples**.

e. **p**: Sete é maior que três ($7 > 3$). Esta é uma **proposição simples**.

f. **p**: Dois é um número inteiro ($2 \in \mathbb{Z}$). Esta é uma **proposição simples**.

Princípios da Lógica Clássica

Princípio da não contradição: Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira (V) e falsa (F).

Princípio do Terceiro Excluído: Uma proposição ou é verdadeira (V) ou é falsa (F).

Princípio da Identidade: Toda proposição é idêntica a ela mesma.

Conectivo Negação

Definiremos o conectivo que nos dá a noção de **não**, de forma a obter a noção de negativa das proposições.

Definição 1.2.1.: *Representamos por ~ o conectivo antes de uma proposição **p**, para obtermos uma nova proposição, ~p, denominada **negação** de **p**, com o seguinte valor lógico:*

Valor lógico de Negação: A proposição $\sim p$ assume valor-verdade contrário ao valor-verdade de **p**.

Outra notação utilizada para negação é: $\neg p$

Este conectivo é um conectivo unitário, enquanto os próximos são conectivos a serem definidos serão binários, pois ligam duas proposições obrigatoriamente.

Exemplo 1.2.1. Veja os seguintes exemplos.

1. Considere a proposição simples “Pedro **não** compareceu à prova na data prevista.” Em símbolos, se **p**: Pedro compareceu à prova na data prevista. Assim a proposição dada é $\sim p$.

2. Considere a proposição simples "João **não** gosta de estudar." Seja **p**: João gosta de estudar. Simbolicamente, temos: $\sim p$.
3. Considere a sentença matemática usando a noção de **diferente** como uma negação. Seja **p**: Nove é diferente de três, $(9 \neq 3)$. $\sim p$: Nove é igual a três, $(9 = 3)$
4. Considere a sentença matemática usando a noção de **menor ou igual** como uma negação. Seja **p**: Sete é maior que três, $(7 > 3)$. $\sim p$: Sete é menor ou igual a três, $(7 \leq 3)$.
5. Considere a sentença matemática usando a noção de **não pertence** como uma negação. Seja p: -1 é um número natural, $(-1 \in \mathbb{N})$. $\sim p$: -1 não é um número natural, $(-1 \notin \mathbb{N})$ Neste caso, usando conhecimentos de Álgebra sabemos que $\sim p$ é verdadeira.

Perceba que proposições compostas são composições de várias proposições simples conectadas por elementos específicos: conetivos. A **tabela verdade** é um dispositivo utilizado para aferir o valor lógico de uma proposição. Logo, para descobrir o valor verdade de uma proposição composta, será necessário utilizar a Tabela verdade, onde trabalhamos as possibilidades dos valores verdades das proposições envolvidas.

Por exemplo, a seguir a tabela verdade da negação.

p	$\neg$ **p**
V	F
F	V

CONECTIVO CONJUNÇÃO

Definiremos o conectivo que nos dá a noção de e, de forma a obter a noção de proposições simultâneas.

Definição 1.3.1. *Representamos por* $\wedge$ *o conectivo binário entre duas proposições* ***p*** *e* ***q****, para obtermos uma nova proposição,* ***p***$\wedge$***q****, denominada* ***conjunção das proposições p*** *e* ***q****, com o seguinte valor lógico*

Valor lógico de Conjunção: A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se p e q são ambas verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

Veja a seguir como fica a tabela verdade.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A conjunção é bastante rígida em relação ao valor-verdade Verdadeiro. Note que quando as proposições são genéricas, precisamos partir para a tabela verdade.

Exemplo 1.3.1. Consideremos a proposição composta: “Maria foi à aula de Lógica e José, ao futebol.” Denotando as proposições simples

A: Maria foi à aula de Lógica.

B: José foi ao futebol.

Simbolicamente, temos: **A∧B**.

Exemplo 1.3.2. Vejamos um exemplo onde as proposições que não são genéricas e portanto podemos calcular o valor-verdade de cada uma. Considere as proposições simples

p: $2 > 0$

q: $2 \neq 1$

Assim $p \wedge q$ é verdadeira, pois $2 > 0$ e $2 \neq 1$ são ambas as proposições verdadeiras. Logo, exemplo se enquadra na primeira linha da tabela.

Exemplo 1.3.3. Considere a proposição composta: “O ser humano é um animal mamífero e vertebrado”. Sejam

p: O ser humano é um animal mamífero.

q: O ser humano é um animal vertebrado.

Simbolicamente, a proposição composta é **p∧q**. Esta é verdadeira, pois *p* e *q* ambas são verdadeiras na Biologia.

CONECTIVO DISJUNÇÃO

Definiremos o conectivo que nos dá a noção de ou, de forma a obter a noção de alternativa entre as proposições, permitindo simultaneamente, isto é, uma noção inclusiva.

Definição 1.4.1. *Representamos por* ∨ *o conectivo binário entre duas proposições* ***p*** *e* ***q****, para obtermos uma nova proposição,* $p \vee q$ *, denominada* ***disjunção*** *das proposições* ***p*** *e* ***q****, com o seguinte valor lógico:*

Valor lógico de Disjunção: A proposição **p∨q** será verdadeira, se alguma das proposições for verdadeira. A proposição **p∨q** será falsa, somente se ambas as proposições forem falsas.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo 1.4.1. Vejamos um caso em que as proposições são desigualdades.

p: $3^4 < 2^6$

q: $2^2 < (-3)^5$

Observe que ambas proposições são falsas. Assim, $p \vee q$ é falsa, isto é, $3^4 < 2^6$ ou $2^2 < (-3)^5$ é falsa, pois se enquadra na última linha da tabela.

Exemplo 1.4.2. Considere a proposição composta "Maria foi à aula de Lógica ou ao xadrez."

A: Maria foi à aula de Lógica.

B: Maria foi ao xadrez.

Simbolicamente, temos $A \vee B$. Observe que o valor-verdade de $A \vee B$ será falso apenas quando ambas opções são falsas, isto é, Maria não foi à aula de Lógica e também Maria não foi ao xadrez. O caso em que Maria foi a apenas um dos eventos, ou em ambos resulta em $A \vee B$ verdadeira.

Exemplo 1.4.3. Considere a proposição composta:

"Um animal é vertebrado ou invertebrado". Sejam

p: Um animal é vertebrado.

q: Um animal é invertebrado.

Simbolicamente, a proposição composta é $p \vee q$.

O valor-verdade desta, depende de qual tipo de animal que nos referirmos. Mas sabemos da Biologia que as proposições **p** e **q** não podem ser verdadeiras simultaneamente, isto é, na primeira linha não seria permitida, necessitando de uma alternativa exclusiva. Esta ambiguidade vem da palavra ou, que possui duas opções: inclusivo e exclusivo.

CONECTIVO CONDICIONAL

Definição 1.5.1. *Representamos por → o conectivo binário entre duas proposições p e q, para obtermos uma nova proposição, p → q, denominada* ***condicional*** *das proposições p e q, com o seguinte valor lógico*

Valor lógico do Condicional: O condicional $\mathbf{p \to q}$ é falso somente quando p é verdadeira e q é falsa; caso contrário, $\mathbf{p \to q}$ é verdadeiro.

Lemos: "se p então q". Na condicional p → q, a proposição p é chamada antecedente e q é chamada consequente. Veja a seguir como fica a tabela verdade.

Veja a seguir como fica a tabela verdade.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Obs A proposição $\mathbf{p \to q}$ também é conhecida como:
"p é condição suficiente para q"
"q é condição necessária para p".

Exemplo 1.5.1. "Se Maria passar no exame, ela vai comemorar com sorvete ou chocolate." Sejam as proposições

p: Maria passa no exame.

q: Maria vai comemorar com sorvete ou chocolate.

Assim $p \to q$.

Exemplo 1.5.2. Numa condicional, pode ser que não exista uma conexão real entre a antecedente e a consequente. Por exemplo,

"Se chover amanhã, eu vou ganhar na loteria."

Neste caso, temos

p: Chove amanhã.

q: Eu vou ganhar na loteria.

Não estamos interessados neste tipo de condicional.

Exemplo 1.5.3. Sejam

p: dois é divisor de quatro (2 | 4) (V).

q: quatro é divisor de vinte (4 | 20) (V).

Assim: $p \to q$ se dois é divisor de quatro, então quatro é divisor de vinte ($2 | 4 \to 4 | 20$) é verdadeira, pois se enquadra na primeira linha da tabela.

CONECTIVO BICONDICIONAL

Definiremos o conectivo que nos dá a noção de se, e somente se, de forma a obter a noção de proposições condicionais duplas, isto é, uma troca justa de informações.

Definição 1.6.1. *Representamos por $\leftrightarrow$ o conectivo binário entre duas proposições p e q, para obtermos uma nova proposição, $p \leftrightarrow q$, denominada **bicondicional** das proposições p e q, com o seguinte valor lógico*

Valor lógico do bicondicional: O bicondicional $\leftrightarrow$ é verdadeiro somente quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas; se isso não acontecer, o bicondicional $\leftrightarrow$ é falso.

Leia-se: *" p se, e somente se, q".*

Obs Na bicondicional $p \leftrightarrow q$ também lemos:
"**p** é condição necessária e suficiente para **q**",
"**q** é condição necessária e suficiente para **p**" ou
"se **p** então **q** e, reciprocamente".

Veja a seguir como fica a tabela verdade.

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplo 1.6.1. Considere as proposições

p: $4 \leq 3$

q: $4 * 5 \leq 3 * 5$

Observe que ambas proposições são falsas. Assim

$$p \leftrightarrow q: \qquad 4 \leq 3 \leftrightarrow 4 * 5 \leq 3 * 5$$

é verdadeira, pois se enquadra na última linha da tabela.

GRAU DE PRIORIDADE DOS CONECTIVOS

Para proposições compostas, podemos decompô-la em proposições simples utilizando os conectivos V, Λ, ~, → ou ↔. Com o objetivo de remover ambiguidades da linguagem dentro do Cálculo Proposicional, vamos ordenar o grau de prioridade entre os conectivos e utilizar os parênteses para grau de prioridade máxima como fazemos em outros contextos da Matemática.

1. Negação ~
2. Conjunção Λ e disjunção V
3. Condicional → e bicondicional ↔

Vamos trabalhar apenas com proposições que respeitem esta ordenação de prioridade, salvo quando são utilizados parênteses, e analisar o valor-verdade através do uso de tabelas verdade.

$$\textbf{Números de linhas} = 2^n$$

sendo n o número de proposições simples envolvidas. Vamos classificar as proposições através da tabela-verdade, observando a última coluna.

TAUTOLOGIAS

Seja uma proposição **t** formada a partir de outras proposições simples (p, q, r, ...) e formada por certos conectivos.

Definição 1.8.1. *Dizemos que* ***t*** *é uma* ***tautologia*** *ou proposição logicamente verdadeira quando t tem o valor lógico V (verdadeira) independentemente dos valores lógicos de p, q, ...*

Assim, a tabela verdade de uma tautologia apresenta só V na última coluna.

Exemplo: A proposição ~ (*p* Λ *q*) ↔ (~*p*) V (~*q*) é uma tautologia, conhecida como Lei de Morgan. Veja a tabela verdade.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\sim(p \wedge q) \longleftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

Exemplo 1.8.1. A proposição *p* V (~*p*) é uma tautologia. Esta representa o Princípio do Terceiro Excluído.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Exemplo: A proposição *p* V (~*p*) é uma tautologia. Esta representa o Princípio da não contradição.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

CONTRADIÇÃO

Seja uma proposição **c** formada a partir de outras proposições simples (p, q, r, ...) e formada por conectivos.

Definição 1.9.1. *Dizemos que **c** é uma **contradição** ou **proposição logicamente falsa** quando **c** tem o valor lógico F (falsa) independentemente dos valores lógicos de p, q, ...*

Assim, a tabela verdade de uma tautologia apresenta só valor-verdade (F) na última coluna.

Exemplo 1.9.1. A proposição (*p* Λ *q*) Λ (~ *p* V ~ *q*) é uma contradição.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	F

Definição 1.9.2: *Quando uma proposição não é uma tautologia e nem uma contradição, dizemos que ela será uma **contingência**.*

IMPLICAÇÃO TAUTOLÓGICA

Vamos considerar condicionais $p \rightarrow q$ as quais são tautologias, isto é, quando não temos simultanea mente p verdadeira e q falsa.

Definição 1.10.1. *Dadas as proposições p e q, dizemos que p → q é uma **implicação tautológica** quando p → q é uma tautologia.*

Lemos: "p implica q" e indicamos $p \Rightarrow q$.

Obs Todo teorema é uma implicação tautológica da forma

hipótese $\Rightarrow$ tese

Assim, demonstrar um teorema significa mostrar que não ocorre o caso de a hipótese ser verdadeira e a tese ser falsa.

Exemplo 1.10.1. O Teorema de Pitágoras pode ser escrito como uma implicação tautológica da forma $p \Rightarrow q$. O enunciado desse teorema é: Se o triângulo é um triângulo retângulo então o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Considere:

Hipótese: p: O triângulo é um triângulo retângulo.

Tese: q: O quadrado da hipotenusa do triângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Exemplo 1.10.2. O Teorema Fundamental da Álgebra também pode ser escrito como uma implicação tautológica $p \Rightarrow q$. Este teorema afirma que: Se o polinômio é não constante com coeficientes complexos então possui pelo menos uma raiz complexa. Escrevemos:

Hipótese: p: O polinômio é não constante com coeficientes complexos.

Tese: q: O polinômio possui pelo menos uma raiz complexa.

Exemplo 1.10.3. Vamos verificar que a proposição $p \wedge q \Rightarrow p$ é uma tautologia, isto é, a proposição é uma implicação tautológica.

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Vejamos um exemplo de proposições matemáticas em que podemos calcular o valor-verdade de cada uma.

Exemplo 1.10.4. Seja x um número inteiro. Considere

p: x^2 é um número par.

q: x é um número par.

Observamos que **p** não é condição necessária para que **q** ocorra. Basta considerar $x = -1$ então **p** é verdadeiro mas **q** é falso. Logo $p \rightarrow q$ não é uma implicação tautológica.

Exemplo 1.10.5. Considere as proposições:

p: 2 é um divisor de 4.

q: 2 é um divisor de $4 * 5$.

A condicional $p \rightarrow q$ é tautológica, isto é, $2|4 \Rightarrow 2|4 * 5$ o que significa "se 2 é divisor de 4, então 2 é divisor de $4 * 5$" é verdadeiro.

EQUIVALÊNCIA TAUTOLÓGICA

Vamos considerar condicionais $p \leftrightarrow q$ as quais são tautologias, isto é, quando não temos simultaneamente p e q valores-verdade distintos.

Definição 1.11.1. Dadas as proposições p e q, dizemos que $p \leftrightarrow q$ é uma **equivalência tautológica** quando $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia. Lemos: "p é equivalente a q" e indicamos $p \Leftrightarrow q$

Obs Todo teorema cujo recíproco também é verdadeiro é uma equivalência.

hipótese $\Leftrightarrow$ tese

Exemplo 1.11.1. O **Teorema de Critério de divisibilidade por 3** pode ser escrito como uma equivalência tautológica $p \Leftrightarrow q$. O enunciado deste é: Um número inteiro n é divisível por 3 se, e somente se, a soma dos seus dígitos é divisível por 3. Escrevemos:

p: Um número inteiro n é divisível por 3.

q: Um número inteiro n cuja soma dos seus dígitos é divisível por 3.

Exemplo 1.11.2. Vamos verificar que a proposição $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ é uma equivalência tautológica.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Exemplo 1.11.3. A proposição $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ é uma equivalência tautológica.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$	$(p \rightarrow q) \longleftrightarrow (\neg q) \rightarrow (\neg p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Exemplo 1.11.4. A proposição $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$ não é uma equivalência tautológica.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Exemplo 1.11.5. A proposição (p → q) ↔ (¬p → ¬q) não é uma equivalência tautológica.

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \to \sim q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\sim p \to \sim q)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V

SENTENÇAS ABERTAS, QUANTIFICADORES

Algumas afirmações, o valor-verdade depende dos valores atribuídos. Em alguns casos, é necessário informações adicionais como quantificadores e variáveis para expressar com mais precisão as informações. Em geral, este assunto é estudado dentro do Cálculo de Predicados.

Exemplo 1.12.1. Em Matemática existem afirmações que contêm variáveis, como

a. $p : x + 2 = 5$

b. $q : x > -4$

c. $r : y^3 = 9\ y^2$

e cujo valor-verdade vai depender do valor atribuído à variável. Nos exemplos citados, temos:

a. p é verdadeira apenas para x = 3 e é falsa para qualquer outro valor diferente de 3;

b. q é falsa para uma infinidade de valores, por exemplo, para $x = -5$, e q é verdadeira para uma infinidade de valores, por exemplo para $x = -3$;

c. r é verdadeira apenas para y = 0 e y = 9 e é falso para uma infinidade de valores, por exemplo para o valor de $x = 1$.

Observe que nestes exemplos uma notação mais apropriada, a qual vamos utilizar de agora em diante:

a. $\mathbf{P}x : x + 2 = 5$

b. $\mathbf{Q}x : x > -4$

c. $\mathbf{R}y : y^3 = 9\ y^2$

onde x e y denotam as variáveis, também chamadas de **termos**.

Definição 1.12.1. Definimos

- o **termo**: pode ser entendido como o sujeito da sentença declarativa;
- Ω um conjunto de termos;
- o **predicado**: o que se declara a respeito do termo. Em geral, denotamos por uma **letra maiúscula** do alfabeto latino

- uma **função proposicional** em Ω é um predicado P associado a um termo x em Ω, onde o valor-verdade de Px depende de x.

Podemos transformar as sentenças abertas da forma Px em proposições:

- Quando atribuímos valores à variável x;
- Quando utilizamos quantificadores, isto é, quando restringimos as funções proposicionais de forma universal ou existencial.

Definição 1.12.2. *O **quantificador universal** é indicado pelo símbolo $\forall$, que se lê: "qualquer que seja", "para todo", "para cada". Vamos escrever o quantificador universal à esquerda, da seguinte forma:*

$$\forall x\ (Px)$$

e lemos "para todo x temos Px".

Exemplo 1.12.2:

1. $(\forall x)\ (2x + 1 = 7)$, que se lê: "qualquer que seja o número x, temos $2x + 1 = 7$". (F)
2. $(\forall y)\ (5y^2 + 3 > 0)$, que se lê: "para todo número y, temos $5y^2 + 3$ positivo". (V)

Definição 1.12.3.: *O **quantificador existencial** é indicado pelo símbolo $\exists$, que se lê: "existe", "existe pelo menos um" ou "existe um". Vamos escrever o quantificador existência à esquerda, da seguinte forma:*

$$\exists x\ (Px)$$

e lemos "existe x temos Px".

Exemplo 1.12.3.

1. $(\exists x)\ (2x + 1 = 7)$, que se lê: "existe um número x tal que $2x + 1 = 7$". (V)
2. $(\exists y)\ (5y^2 + 3 \leq 0)$, que se lê: "existe um número (real) y tal que $5y^2 + 3$ não positivo. (F)

Equivalência entre os quantificadores

Equivalência 1.	$\sim \exists x\ (P(x))$ é equivalente a $\forall x \sim P(x)$
Equivalência 2.	$\sim \forall x\ (P(x))$ é equivalente a $\exists x \sim P(x)$

Exemplo 1.12.4. Considere x funcionário de certa empresa. Seja Px: x recebe 10 mil reais por mês. Assim se queremos mostrar que não existe funcionário que receba 10 mil reais por mês, isto é o mesmo que mostrar que

$$\sim \exists x\ (Px)$$

é verdadeiro. Usando a equivalência 1, teríamos que mostrar que

$$\forall x \sim (Px)$$

é verdadeiro, isto é, mostrar que todos os funcionários não recebem 10 mil reais por mês.

Exemplo 1.12.5. Considere x um número inteiro. Seja Px: x é um número par.

Assim $\sim \exists x\ (Px)$: não existe um número inteiro x tal que x seja par é equivalente a $\forall x \sim (Px)$ para todo número inteiro x, não é verdade que x seja par".

TEORIA DOS CONJUNTOS

Com o objetivo de categorizar objetos para um estudo mais aprofundado de alguma área é necessário classificar. Para este fim, o estudo da Teoria de Conjuntos se faz necessário. Desde o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos, a história da Matemática enfrentou uma das suas mais significativas “crises” filosóficas. Esta crise foi desencadeada pelo surgimento do conceito de infinitude, introduzido pelo matemático russo Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor no final do século XIX. A Teoria dos Conjuntos investiga as propriedades dos conjuntos, as relações entre eles, as relações entre os elementos e os próprios conjuntos. Ao explorarmos os conjuntos, torna-se essencial o uso de símbolos matemáticos para representar situações específicas entre conjuntos e elementos.

CONJUNTOS

Definição 2.1.1. *Um **conjunto** é uma coleção qualquer de objetos. Os objetos de um conjunto são ditos **elementos**.*

Em geral, um conjunto é denotado por uma letra maiúscula do alfabeto: A, B, C, ..., Z; e um elemento de um conjunto é denotado por uma letra minúscula do alfabeto: a, b, c, ..., z.

Alguns exemplos de conjuntos.

Exemplo 2.1.1.

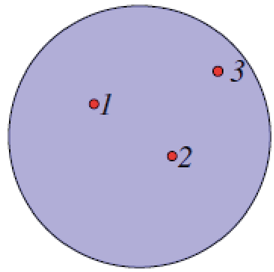
1. Conjunto dos estados da região Centro-Oeste do Brasil.
2. Conjunto dos animais mamíferos.
3. Conjunto de todas as universidades federais do Brasil.
4. Conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais.

Exemplo 2.1.2. Alguns exemplos de elementos.

1. Mato Grosso é um elemento do conjunto dos estados da região centro-oeste do Brasil.
2. O número 2 é um elemento do conjunto dos números primos.
3. 14 é um elemento do conjunto dos números reais que satisfaz a equação x-3= 17.

A descrição de um conjunto **por extensão** ocorre quando o número de seus elementos é finito e é relativamente pequeno, possibilitando a enumeração direta de todos os elementos. Nesse caso, os elementos são listados entre chaves e separados por vírgulas. Outra forma de representação de um conjunto é o **diagrama de Venn**. Esta é uma representação gráfica que ilustra a relação entre conjuntos, em geral, por círculos que se sobrepõem parcialmente ou totalmente

Exemplo 2.1.3. Representação do conjunto A pelo diagrama de Venn é a figura a seguir e sua representação por extensão: $A = \{1, 2, 3\}$



Exemplo 2.1.4. Vejamos alguns exemplos de representação por extensão

1. Conjunto das vogais: $A = \{a, e, i, o, u\}$.
2. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
3. Conjunto dos Números Naturais maiores que 2 e menores que 7: $B = \{3, 4, 5, 6\}$.
4. Conjunto dos Números Naturais maiores que 0 e menores ou iguais a 500: $C = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 499, 500\}$.
5. Conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{...., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Note que podemos ter 3 tipos de conjuntos: um conjunto com uma quantidade pequena de elementos (item 1 e 2), um conjunto com uma quantidade grande de elementos e usamos o símbolo ”...” como no item 4 e um conjunto com uma quantidade infinita de elementos e usamos o símbolo ”...” como no item 3.

PERTINÊNCIA

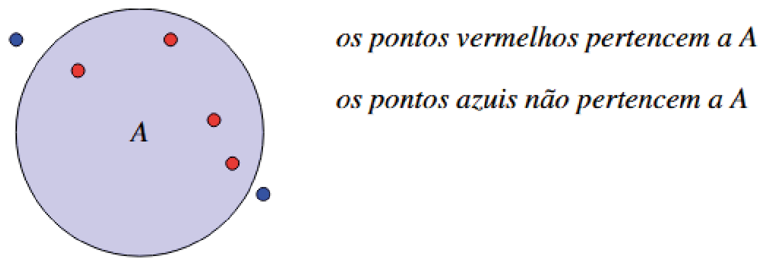
Em respeito aos objetos e um conjunto, podemos analisar a relação de pertinência entre tais. Isto é, se tal objeto é um elemento de um conjunto.

R Se um elemento pertence a um conjunto, utilizamos o símbolo $\in$ que se lê: “pertence”. Por exemplo: $a \in A$. Para representar a negação da pertinência, simbolizamos com o símbolo $\notin$.

Exemplo 2.2.1. Alguns exemplos de pertinência.

1. Mato Grosso pertence ao conjunto dos estados da região Centro-Oeste do Brasil.
2. São Paulo não pertence ao conjunto dos estados da região centro-oeste do Brasil.
3. O número 3 pertence ao conjunto dos números primos.
4. O número 4 não pertence ao conjunto dos números primos.

Exemplo 2.2.2. Na figura abaixo ilustramos a noção de pertinência.



Exemplo 2.2.3. Para dizer que 5 pertence ao conjunto dos números naturais, escrevemos $5 \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.2.4. Por exemplo, para dizer que *-9* não é um número natural, ou que *-9* não pertence ao conjunto dos números naturais, escrevemos $-9 \notin \mathbb{N}$.

Conjunto universo e conjunto vazio

Definição 2.3.1. *O* ***conjunto universo*** *é um conjunto que contém todos os elementos do contexto no qual estamos trabalhando e também contém todos os conjuntos desse contexto. O conjunto universo é geralmente representado por uma letra U.*

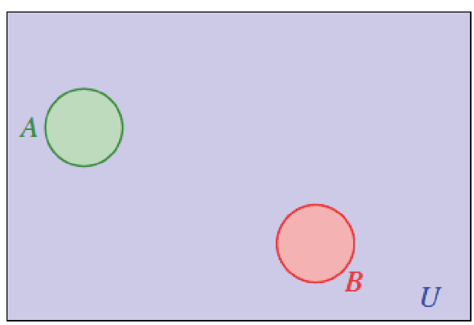


Diagrama de Venn: Conjunto Universo U

É fundamental definirmos o conjunto universo que estamos considerando quando o conjunto se relaciona a cálculos matemáticos.

Exemplo 2.3.1. Alguns exemplos utilizando soluções de equações

1. O conjunto das soluções reais da equação $2x + 1 = 4$. Aqui o conjunto universo é o conjunto de todos os números reais.
2. Se U é o conjunto dos números naturais, então a equação $3x + 7 = 5$ não tem solução
3. Se U é o conjunto dos números reais, então a equação $3x + 7 = 5$ tem solução.

Já apresentamos a representação por extensão no início deste capítulo. Agora, vejamos outra forma de representar um conjunto.

Definição 2.3.2. Um conjunto é **representado por propriedade** (ou **compreensão**) quando é enunciada uma ou mais propriedades características de seus elementos

Exemplo 2.3.2. Alguns exemplos de representação por propriedade

1. $A = \{$*letras do alfabeto*$\}$;
2. $B = \{a$ é *uma vogal*$\}$;
3. $C = \{x$ é *primo*$\}$;
4. D = $\{x$ é um número natural par$\}$.

Obs Em geral, a forma de escrever um conjunto por uma propriedade é da seguinte forma.

$$\{a \in U |\ \text{descrição da propriedade}\}$$

onde U é o conjunto universo. Lemos: " é o conjunto formado por todos elementos a pertencente a U tais que satisfazem a propriedade".

Exemplo 2.3.3. O conjunto $\mathbb{Q}=\{a/b \mid a,b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0\}$ é o conjunto das frações.

Exemplo 2.3.4. Ainda podemos descrever um conjunto através de propriedades, como a seguir.

1. $A = \{x \mid$ *é um número natural ímpar menor que* $5\}$, logo $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
2. $B = \{x\ \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$, logo $B = \{-1, 1\}$
3. $C = \{x \mid 2n + 1 = x,\ n \in \mathbb{N}\}$, logo $C = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$
4. $B' = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\}$ logo $B' = \{1\}$.

Note que neste caso é necessário dizer a qual conjunto universo o elemento pertence. Os conjuntos B e B' têm a mesma propriedade, mas tomam seus elementos em conjuntos universos diferentes.

Definição 2.3.3. **Conjunto vazio** é um conjunto que não possui elementos. É representado por $\emptyset$.

Exemplo 2.3.5. Por exemplo:

1. $A = \{x \mid x$ *é um número natural ímpar menor que* $0\}$, logo $A = \emptyset$.

2. $A = \{x \mid x < 0\ e\ x > 0\}$, logo $A = \emptyset$.

3. $A = \{\}$, logo $A = \emptyset$.

CONJUNTOS IGUAIS

Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A. Em símbolos lógicos:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Exemplo 2.4.1. Veja a seguir os exemplos.

1. $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\}$
2. $\{1, 3, 5, 7, 9, ...\} = \{x \mid x \text{ é inteiro, positivo e ímpar}\}$
3. $\{x \mid 2x + 1 = 5\} = \{2\}$

SUBCONJUNTOS

Definição 2.5.1. *Dados os conjuntos A e B, diz-se que A* ***está contido em*** *B, denotado por* A ⊂ B, *se todos os elementos de A também estão em B. Em símbolos lógicos:*

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

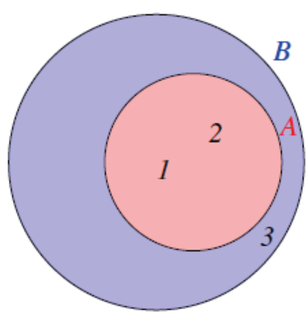
O conjunto A é denominado ***subconjunto*** *de B .*

Algumas vezes diremos que um conjunto A **está propriamente contido** em B quando o conjunto B, além de conter os elementos de A, contém também outros elementos e A é denominado **subconjunto próprio** de B.

Obs Notação: $A \subsetneq B$. Lemos: "*A* está contido propriamente em *B*".

Em símbolos lógicos,

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow [(\forall\ x)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)] \wedge [(\exists\ y)(y \in B \wedge y \notin A)]$$



Exemplo 2.5.1. Representamos os conjuntos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ por diagrama de Venn. Todo elemento de A é elemento de B, logo $A \subset B$. Neste caso, A é um subconjunto próprio de B, pois $3 \in B$ e $3 \notin A$.

Obs Indicaremos o caso de não inclusão de conjunto por: $\not\subset$ e lemos "Não está contido em". Por exemplo: $A \not\subset B$.

Exemplo 2.5.2. Alguns exemplos de inclusão de conjuntos

1. $B = \{a, b, c, d, e\}$ e $D = \{a, c, e\}$, então $D \subset B$
2. $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $D = \{x, v, t\}$, então $D \not\subset B$.
3. $A = \{-1, 15\}$ e $D = \{-1, 2, 3, 10, 15\}$, então $A \subset D$, pois $-1 \in D$ e $15 \in D$.

Perceba pelos exemplos acima que $A \subset B$ implica dizer que ***TODOS*** os elementos de A estão em B, ***MAS*** não podemos afirmar o contrário.

Propriedades da inclusão

Sendo A, B e C três conjuntos arbitrários, valem as seguintes propriedades:

1ª) $\emptyset \subset A$ (o conjunto vazio está contido em todos os conjuntos)

2ª) $A \subset A$ (reflexiva)

3ª) $(A \subset B$ e $B \subset A) \Rightarrow A = B$ (anti simétrica)

4ª) $(A \subset B$ e $B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ (transitiva)

Igualdade de conjuntos

Usando a definição de subconjuntos podemos dar uma nova maneira para verificar se dois conjuntos são **iguais**, isto é, $A \subset B$ e $B \subset A$. Em símbolos lógicos, temos

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$$

Assim, para provarmos que $A = B$, devemos provar que $A \subset B$ e $B \subset A$.

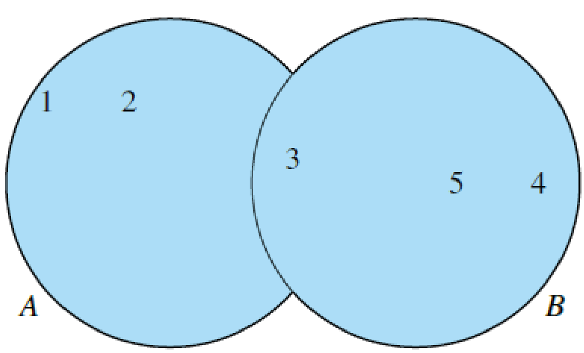
UNIÃO

Definição 2.6.1. Dados dois conjuntos A e B, chama-se união de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou pertencem a B. Denotamos por $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Obs O conjunto $A \cup B$ lemos "A união B".

Exemplo 2.6.1. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Assim $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Exemplo 2.6.2. Alguns exemplos de união de conjuntos.

1. $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
2. $\{a, b\} \cup \{a, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
3. $\{1, 5, 9\} \cup \{-5, -14, 10\} = \{-14, -5, 1, 5, 9, 10\}$

Note pelo exemplo anterior que na união não listamos o elemento duas vezes, mesmo que esteja em ambos os conjuntos.

Propriedades da reunião

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1ª) $A \cup A = A$ (idempotente)

2ª) $A \cup \emptyset = A$ (elemento neutro)

3ª) $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)

4ª) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

Exemplo 2.6.1. Demonstrar que a união dos conjuntos A e B é igual à união dos conjuntos B e A, ou seja, $A \cup B = B \cup A$.

Prova. Para mostrar que $A \cup B = B \cup A$, devemos mostrar que todo elemento em $A \cup B$ também está em $B \cup A$, e vice-versa. Seja x um elemento em $A \cup B$. Isso significa que x está em A ou x está em B (ou ambos). Se x está em A, então x também está em $B \cup A$, pois $B \cup A$ contém todos os elementos de A, além de quaisquer elementos adicionais em B. Da mesma forma, se x está em B, então x também está em $A \cup B$, pois $A \cup B$ contém todos os elementos de B, além de quaisquer elementos adicionais em A. Portanto, concluímos que $A \cup B$ está contido em $B \cup A$ e $B \cup A$ está contido em $A \cup B$, e assim $A \cup B = B \cup A$.

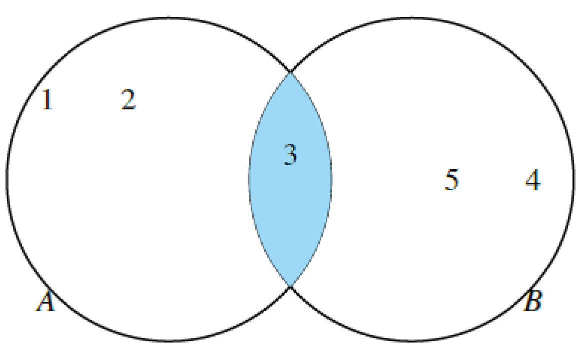
INTERSEÇÃO

Definição 2.7.1. *Dados dois conjuntos A e B, chamamos interseção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B, simultaneamente. Denotamos por . Em símbolos lógicos*

$$A \cap B = \{x | x \in A \land x \in B\}$$

O conjunto lê-se "A inter B" ou " A interseção B".

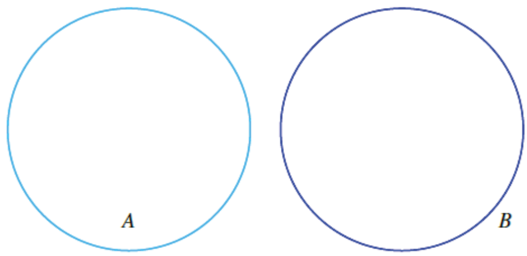
Exemplo 2.7.1. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Assim $A \cap B = \{3\}$



Exemplo 2.7.2. Vejamos alguns exemplos.

1. $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
2. $\{a, b\} \cap \{a, c, d\} = \{a\}$
3. $\{-14, 1, 5, 9, 10\} \cap \{-5\ -14, 1, 10\} = \{-14, 1, 10\}$
4. $\{-3, -2, -1, 0, 1\} \cap \{-7, -2, -1\} = \{-2, -1\}$
5. $\{M, D, T, s, u\} \cap \{O, M, E, S, u, d\} = \{M, U\}$
6. $\{\square, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \cap \{\spadesuit, \clubsuit\} = \{\spadesuit, \clubsuit\}$

Obs Dizemos que os conjunto A e B são **conjuntos disjuntos** quando $A \cap B = \emptyset$, isto é, quando os conjuntos A e B não têm elemento comum. Caso de interseção de conjuntos disjuntos, na representação do diagrama de Venn.



Exemplo 2.7.3. Sejam A e B conjuntos. Então

a. $A \cap B \subseteq A$

b. $A \cap B \subseteq B$.

Demonstração. Se $A \cup B = \emptyset$ *então como* $\emptyset$ *é um subconjunto de qualquer conjunto, segue* $A \cap B = \emptyset \subset B$ *e* $A \cap B = \emptyset \subset A$.

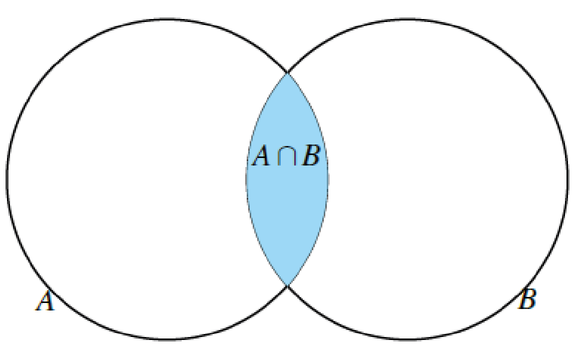
Suponha $A \cap B \neq \emptyset$.

a) Seja $x \in A \cap B$ *então* $x \in A \wedge x \in B$ *então* $x \in A$. *Logo* $A \cap B \subset A$.

b) Seja $y \in A \cap B$ *então* $y \in A \wedge y \in B$ *então* $y \in B$. *Logo* $A \cap B \subset B$.

Exemplo 2.7.4. Caso de interseção de conjuntos não disjuntos, na representação do diagrama de Venn.

- Quando A∩B é um subconjunto próprio de A e de B.



Propriedades da interseção

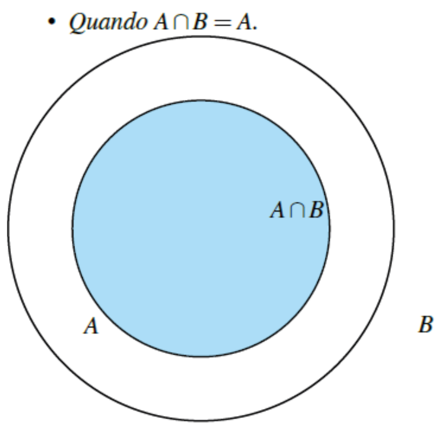
Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1ª) $A \cap A = A$ (idempotente)

2ª) $A \cap \emptyset = \emptyset$

3ª) $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)

4ª) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativa)



Definição 2.7.5. Dizemos que os conjunto A e B são conjuntos **disjuntos** quando $A \cap B = \emptyset$, isto é, quando os conjuntos A e B não têm elemento comum. Caso de interseção de conjuntos disjuntos, na representação do diagrama de Venn.

Exemplo 2.7.5. Demonstrar que a interseção dos conjuntos A e B é igual à interseção dos conjuntos B e A, ou seja, $A \cap B = B \cap A$.

Proof. Para mostrar que $A \cap B = B \cap A$, devemos mostrar que todo elemento em $A \cap B$ também está em $B \cap A$, e vice-versa. Seja x um elemento em $A \cap B$. Isso significa que x está em A e x está em B. Portanto, x está em B e x está em A, e assim x está em $B \cap A$. Da mesma forma, se x está em $B \cap A$, então x está em B e x está em A, e portanto x está em $A \cap B$. Portanto, concluímos que $A \cap B$ está contido em $B \cap A$ e $B \cap A$ está contido em $A \cap B$ e assim $A \cap B = B \cap A$.

COMPLEMENTAR

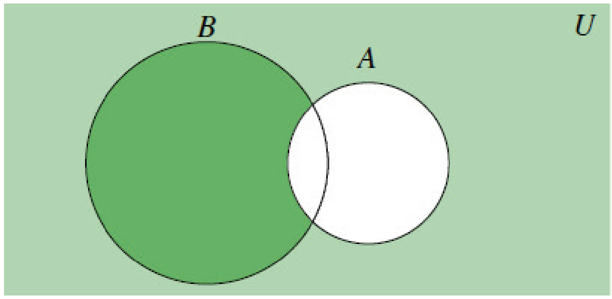
Definição 2.8.1. *Dados os conjuntos A e B de um Universo U qualquer. Definimos a* ***diferença*** *de B por A, notação B - A, como o conjunto de todos os pontos que estão em B e não estão em A.*

Em símbolos lógicos,

$$B - A = \{x \in U \mid (x \in B) \wedge (x \notin A)\}.$$

No diagrama de Venn abaixo, a região verde escuro indica $B - A$

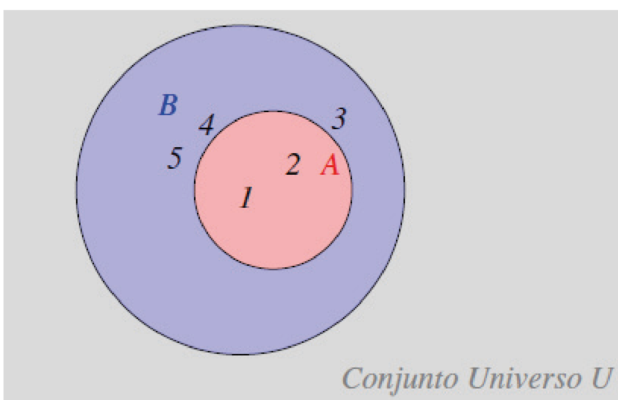
Exemplo 2.8.1. Seja o conjunto Universo U contendo o conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e o conjunto $A = \{1, 3\}$, então $B - A = \{0, 2, 4, 5\}$.



Definição 2.8.2. *Dados os conjuntos A e B de um Universo U qualquer, com $A \subset B$. Chamamos* ***complementar de A em relação a B*** *o conjunto formado pelos elementos de B que não pertencem a A e indicamos por C_B^A.*

Em símbolos lógicos, $C_B^A = \{x \in B |\ x \notin A\}$.

Exemplo 2.8.3. Considere um conjunto Universo U contendo o conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e o conjunto $A = \{1, 2\}$, então o complementar de A em relação a B é $C_B^A = \{3, 4, 5\}$. Vejamos o diagrama da figura a seguir.



Exemplo 2.8.4. Demonstrar que o complemento do complemento de um conjunto A em um universo U é igual a A, ou seja, $(A^c)^c = A$. Para facilitar use a notação $C_B^A = A^c$.

Demonstração. Vamos provar a dupla inclusão $A \subseteq (A^c)^c$ e $(A^c)^c \subseteq A$.

($\subseteq$): Seja $x \in A$. Então, $x \notin A^c$, o que significa que $x \in (A^c)^c$.

($\supseteq$): Seja $y \in (A^c)^c$. Então $y \notin A^c$, o que por sua vez implica que $y \in A$. ∎

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os números surgiram da necessidade de contagem do ser humano e, à medida que a sociedade evoluiu, os números também evoluíram, sendo organizados em conjuntos. A compreensão dos conjuntos numéricos deriva do entendimento básico de um conjunto. Nesse contexto, os conjuntos numéricos são definidos como agrupamentos de números que compartilham características semelhantes. Neste texto, exploraremos a concepção desses conjuntos, visando compreender os elementos que os constituem.

Temos, então, os seguintes conjuntos numéricos:

- Conjunto dos números Naturais ($\mathbb{N}$).
- Conjunto dos números Inteiros ($\mathbb{Z}$).
- Conjunto dos números Racionais ($\mathbb{Q}$).
- Conjunto dos números Reais ($\mathbb{R}$).

Assim temos as inclusões próprias $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

Definição 2.10.1. *O **conjunto dos números naturais** é representado pela letra maiúscula $\mathbb{N}$, este conjunto abrange todos os números $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ positivos, incluindo o zero. Então este conjunto forma uma sucessão infinita, na qual dizemos que o 2 é o sucessor do 1, o 3 é o sucessor do 2, e assim por diante. Dessa forma, o $n + 1$ é o sucessor de n.*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n, n + 1, ...\}$$

Obs Os pontos de reticência dão a ideia de infinidade, pois os conjuntos numéricos são infinitos.

Nesse conjunto são definidas duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação, que apresentam as seguintes propriedades:

Propriedades 2.10.1. Veja as seguintes propriedades.

A.1) Associativa da adição: $(a + b) = c = a + (b + c)$ para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$.

A.2) Comutativa da adição $a + b = b + a$ para todos $a, b \in \mathbb{N}$.

A.3) Elemento neutro da adição: $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

M.1) Associativa da multiplicação: $(ab)\,c = a\,(bc)$ para todos $a, b, c \in \mathbb{N}$.

M.2) Comutativa da multiplicação: $ab = ba$ para todos $a, b \in \mathbb{N}$.

M.3) Elemento neutro da multiplicação: $a1 = a$ para todos $a, b \in \mathbb{N}$.

A.M) Distributiva da multiplicação relativamente à adição: $a\,(b + c) = ab + ac$ para todo $a \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.10.1. Observe que da propriedade A.1 temos que: $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$. Isto significa que podemos calcular cada lado da igualdade e o valor é o mesmo.

Lado esquerdo: $(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$.

Lado direito: $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$.

Exemplo 2.10.2. A propriedade M2 para números naturais nos garante que a ordem dos fatores não altera o produto. Por exemplo: $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$.

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Definição 2.11.1. *Representado pela letra $\mathbb{Z}$, o conjunto dos* ***números inteiros*** *é formado por todos os números que pertencem ao conjunto dos Números Naturais mais os seus respectivos opostos negativos.*

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Subconjuntos importantes.

- $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- $\mathbb{Z}_- = \{..., -4, -3, -2, -1, \}$
- $\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\}$

No conjunto $\mathbb{Z}$ são definidas também as operações de adição e multiplicação que apresentam, além de [A.1], [A.2], [A.3], [M.1], [M.2], [M.3] e [AM], a propriedade:

A.4) Simétrico (ou oposto) para a adição: Para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a + (- a) = 0$$

Devido à propriedade [A.4], podemos definir em a operação de subtração, estabelecendo que

$$a + (- b) = a - b$$

para todos $a, b \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2.11.1. Observe os sinais das operações.

1. $11 - 8 = 3$
2. $-5 -9 = -14$
3. $12 - 33 = -11$

Adição

Na adição de números inteiros:

1. Para números inteiros positivos, é realizada da mesma forma que a soma de números naturais.

Por exemplo, $(+ 3) + (+ 4) = + 7$, o que representa a soma de dois créditos.

2. Para números inteiros negativos, é realizada adicionando os números naturais e atribuindo o sinal "-", indicando débitos.

Por exemplo, (- 2) + (- 6) = - 8, o que representa a soma de dois débitos.

Multiplicação

Na multiplicação de números inteiros:

1. Quando multiplicamos dois números inteiros positivos é o mesmo que multiplicar em números naturais, e como os números naturais são fechados em relação à multiplicação, então o produto de dois inteiros positivos é um inteiro positivo.

Por exemplo

$(+5) \times (+2) = (+2) + (+2) + (+2) + (+2) + (+2) = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 = 5 \times 2$.

Da mesma forma, $4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 20$. Portanto, $(+) \times (+) = +$.

2. Quando multiplicamos um número positivo por um número negativo, o resultado deve ser um número negativo, pois estaremos somando várias vezes um mesmo número negativo.

Por exemplo, $(+4) \times (-2) = 4 \times (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = -8$.

Da mesma forma, $(+4) \times (-5) = 4 \times (-5) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20$.

Portanto, $(+) \times (-) = -$.

3. Quando multiplicamos um número negativo por um número negativo, o resultado será um número positivo para manter a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, a associativa por exemplo.

Divisibilidade

Definição 2.11.2. *Dizemos que um número inteiro a é **divisível** por um número inteiro b se existe um número inteiro c tal que $a = b \cdot c$. Neste caso, escrevemos $b|a$ e dizemos que b é um **divisor** de a. Caso contrário, dizemos que b não divide a e denotamos por $b \nmid a$*

Exemplo 2.11.2. Vejamos alguns exemplos.

1. Note que $2 \mid 6$, pois existe $c = 11$ tal que $6 = 2 \cdot 3$.
2. Note que $5 \mid 55$, pois existe $c = 11$ tal que $55 = 5 \cdot 11$.
3. Note que $4 \nmid 7$, pois não existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $7 = 4 \cdot c$.
4. Note que $9 \nmid -32$, pois não existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $-32 = 9 \cdot c$.

Se $b|a$, também dizemos que a é um **múltiplo** de b e que b é um **fator** de a.

Obs Se $b \mid a$, também dizemos que a é um **múltiplo** de b e que b é um **fator** de a.

Definição 2.11.3. *Dizemos que um número inteiro α é **ímpar** se não é divisível por 2. Logo podemos escrever todo número inteiro ímpar como 2n + 1, para algum $n \in \mathbb{Z}$*

Exemplo 2.11.3. Vejamos alguns exemplos.

1. $3 = 2 \cdot 1 + 1$
2. $25 = 2 \cdot 12 + 1$

Definição 2.11.4. *Dizemos que um número inteiro α é **par** se é divisível por 2. Logo, podemos escrever todo número inteiro par como 2n, para algum $n \in \mathbb{Z}$.*

Exemplo 2.11.4. Vejamos alguns exemplos.

1. $4 = 2 \cdot 2$
2. $28 = 2 \cdot 14$

Definição 2.11.5.: *Dizemos que um número inteiro α é **primo** se é maior que* 1 *e seus únicos divisores positivos são* ± 1*, a e - a.*

Obs Os primeiros números primos são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97.

Exemplo 2.11.5. O número 20 não é primo, pois possui divisores diferentes de 1 e de 20. Os números 2, 4, 5 e 10 são divisores de 20. Perceba que ele pode ser expresso como um produto de dois ou mais divisores:

$$20 = 2 * 10 = 4 * 5 = 2 * 2 * 5$$

Teorema 2.11.1 (Algoritmo da Divisão). Sejam a e b dois números inteiros, com b > 0. Então existem números inteiros q e r tais que $a = bq + r$, onde $0 \leq r < b$

Perceba que neste tipo de resultado, os números a e b são dados, mas devemos ser capazes de encontrar o quociente e o resto.

Assim, dizemos que bla se o resto da divisão é zero e $b \nmid a$ se o resto é diferente de zero.

Exemplo 2.11.5.

1. Note que 2l6, pois existe $c = 3$ tal que $6 = 2 \cdot 3 + 0$ ($q = 3$ e $r = 0$).
2. Note que 5l55, pois existe $c = 11$ tal que $55 = 5 \cdot 11 + 0$ $q = 11$ e $r = 0$).
3. Note que $4 \nmid 7$, pois $7 = 4 \cdot 1 + 3$ $q = 1$ e $r = 3$).
4. Note que $9 \nmid -32$, pois $-32 = 9 \cdot (-4) + 4$ $q = -4$ e $r = 4$).

Teorema 2.11.2. *Todo número natural n maior do que 1, não primo, pode ser decomposto como produto de números primos. Essa decomposição é única, a menos da ordem dos fatores.*

Teorema 2.11.3. *Existem infinitos números primos.*

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Considere a seguinte situação: medir a quantidade de maçãs em uma cesta usando a unidade de medida 'dúzia' significa determinar quantas dúzias de maçãs há na cesta. Assim, se a cesta contém 90 maçãs, então 90 ÷ 12 é a quantidade de dúzias de laranjas na cesta. Portanto, 90 ÷ 12 = 7 + 1/2 significa que há 7 dúzias e 1/2 de uma dúzia; ou, de forma equivalente, 100 laranjas correspondem a 7 dúzias mais 6 maçãs.

Definição 2.12.1. Representado pela letra $\mathbb{Q}$, o **conjunto dos Números Racionais** formado por todos os números inteiros $\mathbb{Z}$, os números decimais finitos e os números decimais infinitos periódicos, ou seja, todos aqueles que podemos escrever na forma $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \; e \; b \in \mathbb{Z} \right\}$$

A seguir apresentamos propriedades muito úteis para operar números racionais.

Propriedades 2.12.1. Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

1ª) **Igualdade**: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$;

2ª) **Adição**: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$;

3ª) **Multiplicação**: $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;

4ª) **Divisão**: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$;

No conjunto dos racionais destacamos os subconjuntos:

- $\mathbb{Q}_+$ (conjunto dos racionais não negativos);
- $\mathbb{Q}_-$ (conjunto dos racionais não positivos);
- $\mathbb{Q}^*$ (conjunto dos racionais não nulos).

Exemplo 2.12.1. Alguns exemplos

1. $\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2*4+5*3}{3*4} = \frac{23}{12}$
2. $\frac{-4}{7} + \frac{9}{2} = \frac{(-4)*2+9*7}{7*2} = \frac{55}{14}$
3. $\frac{5}{3} - \frac{13}{6} = \frac{5*6-3*13}{3*6} = \frac{-9}{18}$
4. $\frac{2}{3} * \frac{5}{6} = \frac{2*5}{3*6} = \frac{10}{18}$

Representação decimal

Notamos que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Passa-se um número racional $\frac{a}{b}$ para a forma de número decimal dividindo o inteiro a pelo inteiro b. Na passagem de uma notação para outra podem ocorrer dois casos:

1°) o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, diferentes de zero, isto é, é uma decimal exata.

$$\frac{1}{2} = 0,5,\ \frac{27}{1000} = 0,027 \text{ e } \frac{3}{4} = 0,75$$

2°) o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, é uma dízima periódica:

$$\frac{1}{3} = 0,333... \text{ e } \frac{11}{6} = 1,8333... = 1,8\overline{3}.$$

Quando a decimal é exata, podemos transformá-la em uma fração cujo numerador é o numeral decimal sem a vírgula e cujo denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do número dado.

Exemplo 2.12.2.

1. $0,27 = \frac{27}{100}$
2. $3,198 = \frac{3198}{1000}$
3. $71,5428 = \frac{715428}{10000}$

NÚMEROS IRRACIONAIS

Definição 2.13.1. *Os **números irracionais** são todos os números decimais infinitos não-periódicos.*

Obs Em símbolos: o conjunto dos números irracionais é igual a $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

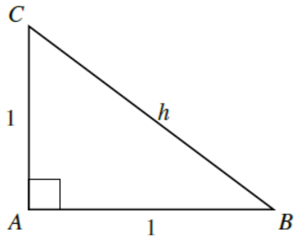
Exemplo 2.13.1. O número π, é aproximadamente igual a 3, 14159265..., é irracional. Este número é o resultado da divisão entre uma circunferência de um círculo e seu diâmetro.

Precisamos mesmo saber sobre números irracionais? Sim , pois os números irracionais aparecem naturalmente nos problemas do dia-a-dia. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 2.13.2. $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Pense na seguinte situação: desejamos construir uma rampa em formato triangular onde a altura e a base formam um ângulo reto e suas medidas são 1 metro. Qual seria o comprimento da rampa?

A figura a seguir ilustra a situação



Usando o Teorema de Pitágoras e chamando h o comprimento da rampa, temos que

$$h^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Assim, $h = \sqrt{2}.$

Assim, $h = \sqrt{2}$ que é um número irracional.

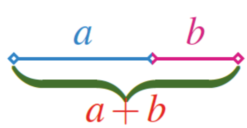
Exemplo 2.13.3. O número de Euler, denotado por e, é aproximadamente de 2, 71828. Este número é muito utilizado em cálculo, análise matemática, probabilidade e teoria dos números, e é o valor da série infinita:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

onde $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \ldots 2 \cdot 1.$

Exemplo 2.13.4. O número de ouro φ, é aproximadamente 1, 61803. Este número é proveniente de uma razão entre segmentos: Quando dividimos uma linha em dois segmentos de comprimentos a e b, com 0 < b < a, ao dividirmos de tal forma que a parte maior a pela parte menor b é igual dividirmos o comprimento total a+b é para a parte maior a.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$$



Algebricamente $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ e é uma raiz da equação do 2º grau $x^2 - x - 1 = 0$.

CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Definição 2.14.1. *Chama-se* ***conjunto dos números reais****, denotado por* $\mathbb{R}$*, o conjunto formado por todos os números com representação decimal, isto é, os números racionais e os números irracionais.*

Obs Dessa forma temos as inclusões

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Destacamos $\mathbb{R}$ em três outros subconjuntos:

- $\mathbb{R}_+$: conjunto dos reais não negativos;
- $\mathbb{R}_-$: conjunto dos reais negativos;
- $\mathbb{R}^*$: conjunto dos reais não nulos.

Intervalos

Outro tipo de subconjunto de $\mathbb{R}$ são os intervalos

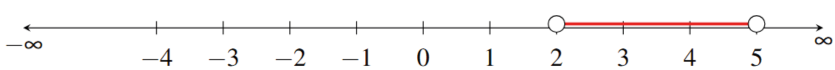
Definição 2.14.2. *Dados dois números reais a e b, com $a \neq b$, definimos:*

1. ***intervalo aberto*** *de extremos a e b é o conjunto* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
2. ***intervalo fechado*** *de extremos a e b é o conjunto* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
3. ***intervalo fechado à esquerda*** *(ou aberto à direita) de extremos a e b é o conjunto* $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
4. ***intervalo fechado à direita*** *(ou aberto à esquerda) de extremos a e b é o conjunto* $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

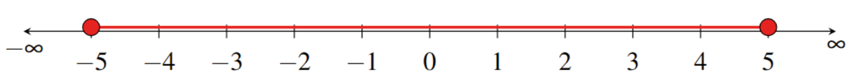
Os números reais a e b são denominados, respectivamente, ***extremo inferior*** *e* ***extremo superior*** *do intervalo.*

Exemplo 2.14.1. Por exemplo, vamos verificar os seguintes intervalos.

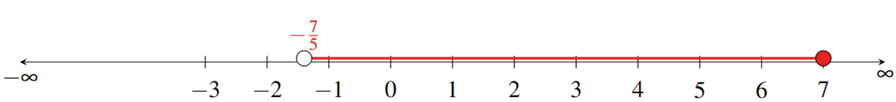
1. $]\,2, 5\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ é intervalo aberto.



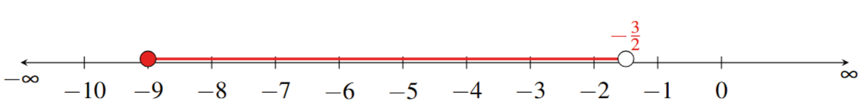
2. $[-5, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 5\}$ é intervalo fechado.



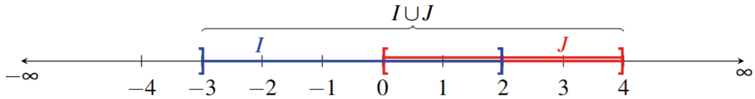
3. $]-\frac{7}{5}, 7] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{5} < x \leq 7\}$ é intervalo fechado à esquerda.



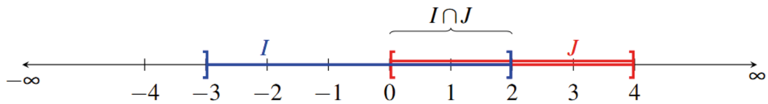
4. $[-9, -\frac{3}{2}[= \{x \in \mathbb{R} \mid -9 \leq x < -\pi\}$ é intervalo fechado à direita.



Exemplo 2.14.2. Por exemplo $I = [-3, 2]$ e $J = (0, 4]$.
Assim $I \cup J = [-3, 4]$.



Logo $I \cap J = (0, 2]$.



Note que a representação visual de cada intervalo usamos "bola aberta" para intervalo aberto (condicionado ao uso do símbolo < ou >) e usamos "bola fechada" para intervalo fechado (condicionado ao uso do símbolo ≤ ou ≥)

Obs Note que o conjunto $\{1,3\}$ é diferente do intervalo $[1,3]$.

Definição 2.14.3. *Seja $a \in \mathbb{R}$. Definimos os **Intervalos infinitos** do tipo*

1. ***aberto à direita** sendo o conjunto*

$$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

ou fechado à direita sendo o conjunto

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

2. ***aberto à esquerda** sendo o conjunto*

$$]b, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid b < x\}$$

ou fechado à esquerda sendo o conjunto

$$[b, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid b < x\}$$

Exemplo 2.14.3. Exemplos de intervalos infinitos:

- Intervalo aberto à esquerda: $(-\infty, 0)$
- Intervalo aberto à direita: $(0, \infty)$
- Intervalo semiaberto à esquerda: $(-\infty, 1]$
- Intervalo semiaberto à direita: $[1, \infty)$
- Intervalo fechado à esquerda: $(-\infty, \infty)$
- Intervalo infinito em ambas as direções: $(-\infty, \infty)$.

INTRODUÇÃO AOS POLINÔMIOS

O estudo de polinômios é fundamental para a análise de modelagem de problemas. Suas propriedades algébricas são base para os cursos de exatas, como nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Teoria dos Números. Neste capítulo iremos apresentar os resultados principais e conceitos necessários para um primeiro contato com este tema.

MONÔMIOS

Definição 3.1.1. Um produto de números reais e variáveis, recebe o nome de monômio.

Exemplo 3.1.1. Por exemplo:

1. $3x^2$
2. $-35t^7$
3. $102a^3$

Note que todo monômio é composto por duas partes: o coeficiente numérico e a parte literal (formada por letras).

Exemplo 3.1.2. No caso do exemplo anterior:

1. 3 é o coeficiente numérico e x^2 a parte literal
2. -35 é o coeficiente numérico e t^7 a parte literal
3. 102 é o coeficiente numérico e a^3 a parte literal

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MONÔMIOS

Definição 3.2.1. Somente podemos somar ou subtrair monômios semelhantes e para isso conservamos a parte literal comum e adicionamos ou subtraímos os coeficientes numéricos.

Por exemplo:

1. $2b + 3b = 5b$
2. $-5t + t = -4t$
3. $12A - 7A + 10r + 1 = 5A + 10r + 1$

MULTIPLICAÇÃO DE MONÔMIOS

Ao multiplicar monômios, devemos seguir os seguintes passos:

1° Passo: realizar a regra de sinal, quando necessário.

2° Passo: multiplicar os coeficientes numéricos.

3° Passo: quando houver parte literal igual, devemos conservá-la e somar os expoentes. Ou seja, devemos aplicar a propriedade da multiplicação de expoentes com bases iguais.

Exemplo 3.3.1. Por exemplo:

1. $2w * 4w = 8w^2$
2. $7t * 5a * 3t^2 = 21t^3 * 5a$
3. $\frac{2}{3}x * \frac{4}{5}x = \frac{8}{15}x^2$

DIVISÃO DE MONÔMIOS

Ao dividir monômios, devemos seguir os seguintes passos:

1° passo: realizar a regra de sinal, quando necessário.

2° passo: dividir os coeficientes numéricos.

3° passo: quando houver parte literal igual, devemos conservá-la e diminuir os expoentes. Ou seja, devemos aplicar a propriedade da divisão de bases iguais,

Exemplo 3.4.1. Por exemplo:

1. $4x^5 \div 2x^5 = 2x^3$
2. $\frac{15a^2}{5a^6} = \frac{3}{a^4}$

INTRODUÇÃO AOS POLINÔMIOS

Definição 3.5.1. *Um **polinômio** é uma expressão algébrica de dois ou mais termos. Da seguinte forma.*

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde os termos $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ *são chamados de **coeficientes** do polinômio, o termo* $a_n \neq 0$ *é chamado **coeficiente líder** e* $n \in \mathbb{N}$ *é chamado de **grau** do polinômio, denotado por gr(p)=n.*

Obs Não definimos grau para o polinômio nulo.

O polinômio nulo é aquele em que todos os seus coeficientes são nulos.

Exemplo 3.5.1. Alguns exemplos de polinômios

1. $7x - 1$ é um polinômio de grau 1.
2. $\sqrt{5}x^2 - 3x + 9$ é um polinômio de grau 2.
3. $4x^5 - 2x^4 + 8x^2 - x + \pi$ é um polinômio de grau 5.

Obs Polinômios não admitem potências $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Por exemplo, $\sqrt{x}$ e $\frac{1}{x}$ são não polinômios.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Adição

Sejam os polinômios $p(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ com $1 \leq n \leq m$. Assim definimos a soma de p(x) e q(x) como o polinômio

$$c_m x^m + ... + c_1 x + c_0$$

cujos os coeficientes c_1 que acompanha o grau $i \in \{0, 1, ..., m\}$ sendo

$$c_i = b_i,\ se\ i > n \text{ ou } c_i = b_i + a_i,\ se\ i \leq n$$

Isto é, somamos os coeficientes de grau i de $p(x) + q(x)$ é a soma do coeficiente de grau i de p(x) com o coeficiente de grau i de q(x)

Exemplo 3.6.1. Considere os polinômios

$P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x + 4$ e $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 7$. A soma dos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ é:

$P(x) + Q(x) = (3x^3 + 2x^3) + (5x^2 - 4x^2) + (- 2x + 3x) + (4 -7) = 5x^3 + x^2 + x - 3$.

Exemplo 3.6.2. Considere a soma de polinômios $(- 2x^2 = 5x - 2) + (- 3x^3 + 2x - 1)$.

Operando os sinais, temos $- 2x^2 + 5x - 2 - 3x^3 + 2x - 1 = - 3x^3 - 2x^2 + 7x - 3$.

Subtração

Sejam os polinômios $P(x) - a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e com $1 \leq n \leq m$. Assim definimos a **diferença** de q(x) e p(x) como o polinômio

$$c_m x^m + ... + c_1 x + c_0$$

cujos os coeficientes c_i que acompanha o grau $i \in \{0, 1, ..., m\}$ sendo

$$c_1 = b_1,\ se\ i > n \qquad \text{e} \qquad c_i = b_i - a_i,\ se\ i \leq n$$

Isto é, somamos os coeficientes de grau i de q(x)– p(x) é a diferença do coeficiente de grau i de q(x) com o coeficiente de grau i de q(x).

Exemplo 3.6.3. Considere os polinômios $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 6$ e $Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 2$.

A subtração dos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ é:

$$P(x) - Q(x) = \left(4x^3 + 3x^2 - x + 6\right) - \left(2x^3 - 5x^2 + 4x - 2\right)$$

$$= 4x^3 + 3x^2 - x + 6 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 2$$

$$=\left(4x^3 - 2x^3\right) + \left(3x^2 + 5x^2\right) + (-x - 4x) + (6 + 2)$$

$$= 2x^3 + 8x^2 - 5x + 8.$$

Exemplo 3.6.4. Considere a diferença de polinômios $(-2x^2 + 5x - 2) - (-3x^3 + 2x - 1)$. Para remover os parênteses, devemos lembrar que a operação de subtração satisfaz a propriedade distributiva com todos os termos do segundo parênteses, assim:

$-2x^2 + 5x - 2 + 3x^3 - 2x + 1 = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$

Multiplicação de polinômios

Para efetuarmos a multiplicação de um polinômio por outro polinômio devemos utilizar a propriedade distributiva.

$$(ax+b)(cx+d) \overset{1}{\underset{2}{}} = acx^2 + adx + bcx + bd = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

Exemplo 3.6.5.

$$(x-2)(x-5) \overset{1}{\underset{2}{}} = (x)(x) + (x)(-5) + (-2)(x) + (-2)(-5) = x^2 - 7x + 10$$

Exemplo 3.6.6.

$$\left(x+\tfrac{3}{2}\right)(x-2) \overset{1}{\underset{2}{}} = (x)(x) + (x)(-2) + \left(\frac{3}{2}\right)(x) + \left(\frac{3}{2}\right)(-2) = x^2 + \left(\frac{3}{2} - 2\right)x - 3 = x^2 - \frac{1}{2}x - 3$$

Uma outra forma que podemos fazer a multiplicação em geral para polinômios.

Definição 3.6.1. Considere os polinômios $p = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ e $q = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$. Então o produto $p * q$ é dado pela fórmula

$$p * q = c_{m+n} x^{m+n} + \ldots + c_1 x + c_0 = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^i$$

onde $c_i = \sum_{r=0}^{i} a_r * b_{i-r}$ para $i \in \{0, 1, \ldots, m+n\}$.

Exemplo 3.6.7. Sejam $p(x) = 3x^2 + x + 2$ e $q(x) = 4x - 5$. O polinômio $p(x)\ q(x)$ tem grau 3. Considere

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2, & b_0 &= -5, \\
a_1 &= 1, & b_1 &= 4, \\
a_2 &= 3, & b_2 &= 0 \\
a_3 &= 0, & b_3 &= 0
\end{aligned}
$$

assim

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \sum_{r=0}^{0} a_r \cdot b_{0-r} = a_0 b_0 = 2(-5) = -10 \\
c_1 &= \sum_{r=0}^{1} a_r \cdot b_{1-r} = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-5) = 8 - 5 = 3 \\
c_2 &= \sum_{r=0}^{2} a_r \cdot b_{2-r} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 2(0) + 1(4) + 3(-5) = 4 - 15 = -11 \\
c_3 &= \sum_{r=0}^{3} a_r \cdot b_{3-r} = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = 2(0) + 1(0) + 3(4) + 0(-5) = 12
\end{aligned}
$$

assim $p(x) \cdot q\ (x) = c_2\ x^2 + c_1\ x + c_0 = 12x^3 - 11x^2 + 3x - 10$. O resultado também pode ser obtido através da distributividade.

$$
\begin{aligned}
(3x^2 + (x+2))(4x - 5) &= (3x^2)(4x) + (3x^2)(-5) + (x+2)(4x) \ + (x+2)(-5) \\
&= 12x^3 - 15x^2 + (4x^2 + 8x) + (-5x - 10) \\
&= 12x^3 - 11x^2 + 3x - 10
\end{aligned}
$$

Produtos notáveis

A seguir destacamos algumas das vantagens dos Produtos notáveis.

- **Simplificação de Cálculos**: Produtos notáveis permitem simplificar expressões algébricas complexas de maneira rápida e eficiente.
- **Facilidade na Resolução de Equações**: O uso de produtos notáveis facilita a resolução de equações algébricas.
- **Desenvolvimento do Raciocínio Algébrico**: Trabalhar com produtos notáveis ajuda no desenvolvimento do raciocínio algébrico e na habilidade de reconhecer padrões, habilidades que são úteis em todas as áreas da matemática.

Alguns produtos notáveis.

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas.

1. Produto de uma soma e uma diferença: $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$.
2. Quadrado de uma soma de dois termos: $(u + v)^2 = u^2 + 2\,uv + v^2$.
3. Quadrado de uma diferença de dois termos: $(u - v)^2 = u^2 - 2\,uv + v^2$.
4. Cubo de uma soma de dois termos: $(u + v)^3 = u^3 + 3\,u^2 v - 3\,uv^2 + v^3$.
5. Cubo de uma diferença de dois termos: $(u - v)^3 = u^3 - 3\,u^2 v + 3\,uv^2 - v^3$.

Divisão de Polinômios

Definição 3.6.2. *O* ***algoritmo de divisão****: Sejam p(x) e f(x) polinômios. Então existe um polinômio q(x) e um polinômio r(x) tais que*

$$p(x) = f(x)q(x) + r(x) \qquad (3.3)$$

onde $0 \leq gr(r) < gr(f)$ *ou* $r(x) = 0$

Assim como a divisão de números naturais, a divisão de polinômios é composta por dividendo, divisor, quociente e resto. O polinômio q(x) é conhecido como **quociente** e r(x) conhecido como **resto,** em (3.3).

Exemplo 3.6.8. Acompanhe o exemplo resolvido pelo método da chave:

$(x^2 - 5x - 13) \div (x - 4)$

Inicialmente, devemos escrevê-lo na seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x - 13 & x - 4 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Iremos dividir o termo de maior grau pelo termo de maior grau do divisor, isto é, $x^2 \div x = x$. O resultado encontrado irá multiplicar o polinômio x–4. O resultado desse produto deverá ser subtraído do polinômio $x^2 - 5x - 13$. Juntando os termos semelhantes e abaixando o –13:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x - 13 & x - 4 \\ \cline{2-2} -(x^2 - 4x) & x \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \cancel{x^2} - 5x - 13 & x - 4 \\ \cline{2-2} -(\cancel{x^2} - 4x) & x - 1 \\ \hline -x - 13 & \end{array}$$

Agora, considerando o polinômio $-x - 13$, iremos repetir o processo, dividindo $-x \div x$. Novamente, o resultado desse produto deverá ser subtraído pelo polinômio que sobrou no dividendo 3x–12.

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x - 13 & x - 4 \\ \cline{2-2} -(x^2 - 4x) & x - 1 \\ \hline -x - 13 & \\ -(-x + 4) & \end{array}$$

Resumindo

$$
\begin{array}{rl}
x^2 - 5x - 13 & \big| \; x - 4 \\
-x^2 + 4x & \big| \; \overline{x - 1} \\
\hline
-x - 13 & \\
x \; - 4 & \\
\hline
-17 &
\end{array}
$$

Assim, (x^2 - 5 - 13) = (x - 4) (x - 1) - 17 e o resto é - 17.

Exemplo 3.6.9. Vamos dividir o polinômio x^3 - 2x^2 - 5x + 6 pelo polinômio x–1, usando o método da chave.

$$
\begin{array}{rl}
x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & \big| \; x - 1 \\
-x^3 \; + x^2 & \big| \; \overline{x^2 - x - 6} \\
\hline
-x^2 - 5x & \\
x^2 \; - x & \\
\hline
-6x + 6 & \\
6x - 6 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Neste caso, a divisão é exata pois o resto é igual a zero. Assim

x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x^2 - x - 6) (x - 1)

Exemplo 3.6.10. Vamos dividir o polinômio x^3 - 2x^2 - 5x/2 + 7 pelo polinômio x–3, usando o método da chave.

$$
\begin{array}{rl}
x^3 - 2x^2 - \frac{5}{2}x + 7 & \big| \; x - 3 \\
-x^3 + 3x^2 \phantom{- \frac{5}{2}x + 7} & \big| \; \overline{x^2 + x + \frac{1}{2}} \\
\hline
x^2 - \frac{5}{2}x & \\
-x^2 + 3x & \\
\hline
\frac{1}{2}x + 7 & \\
-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \\
\hline
\frac{17}{2} &
\end{array}
$$

Portanto x^3 - 2x^2 - 5x/2 + 7 = (x - 3) (x^3 - 2x^2 - 5x/2 + 7) + 17/2.

TEOREMA DO RESTO E TEOREMA DE D'ALEMBERT

Vamos apresentar alguns resultados que caracterizam o resto da divisão de polinômios por binômios.

Teorema 3.7.1. (Teorema do Resto). Seja $a \neq 0$. O resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio ax+b é igual ao valor numérico $P(-\frac{b}{a})$

Exemplo 3.7.1.

a. Vamos calcular o resto da divisão de $P(x) = x^2 + 5x - 1$ por $B(x) = x + 1$, usando o Teorema do Resto.

Neste caso temos $a = 1$ e $b = 1$, logo o resto da divisão é .

$$P\left(-\frac{1}{1}\right) = P(-1) = (-1)^2 + 5(-1) - 1 = 1 - 5 - 1 = -5.$$

b. Vamos calcular o resto da divisão de $P(x) = x^2 + 2x - 3$ por $B(x) = 2x - 1$, usando o Teorema do Resto.

Neste caso temos $a = 2$ e $b = -1$, logo o resto da divisão é

$$P\left(-\frac{(-1)}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{4} + 1 - 3 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{2}.$$

O teorema a seguir é um caso particular do Teorema do Resto, isto é, quando estamos interessados em divisão exata.

Teorema 3.7.2. (Teorema de D'Alembert). Seja $a \neq 0$. O polinômio $P(x)$ é divisível pelo binômio $ax + b$ se, e somente se, $P(-\frac{b}{a}) = 0$.

Exemplo 3.7.2.

1. Vamos mostrar que $P(x) = x^2 + 2x + 1$ é divisível por $B(x) = x + 1$, usando o Teorema de D'Alembert. Neste caso temos $a = 1$ e $b = 1$, logo

$$P\left(-\frac{1}{1}\right) = P(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

2. Vamos mostrar que $P(x) = x^2 + 2x + 1$ não é divisível por $B(x) = x - 1$, usando o Teorema de D'Alembert.

Neste caso temos $a = 1$ e $b = -1$, logo $P\left(-\frac{(-1)}{1}\right) = P(1) = (1)^2 + 2(1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4.$ Logo, o polinômio $P(x)$ não é divisível por $B(x)$.

DIVISÃO DE POLINÔMIOS PELO MÉTODO DE BRIOT-RUFFINI

O método de Briot-Ruffini é um algoritmo para encontrar o quociente e o resto da divisão de polinômios de certo formato. Sejam $P(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$ e $Q(x) = x - u$, onde $u \in \mathbb{R}$. Vamos dividir o polinômio $P(x)$ e $Q(x)$ usando o método de Briot-Ruffini. Escrevemos os coeficientes na forma a seguir.

u	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_{n-1}	a_n

1º passo: Repita o coeficiente a1 na linha abaixo

u	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
	a_1					

2º passo: Multiplique o coeficiente a_1 por u e some a a_2. Coloque este resultado abaixo do coeficiente a_2.

$$\begin{array}{c|ccccc|c} u & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \hline & a_1 & a_1u+a_2 & & & & \end{array}$$

3º passo: Multiplique o coeficiente $a_1u + a_2$ por u e soma a_3. Coloque este resultado abaixo do coeficiente a_3.

$$\begin{array}{c|ccccc|c} u & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \hline & a_1 & a_1u+a_2 & (a_1u+a_2)\cdot u+a_3 & & & \end{array}$$

4º passo: Repetir o argumento até preenchimento da entrada abaixo do coeficiente a_n, o qual chamamos de r.

$$\begin{array}{c|ccccc|c} u & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \hline & a_1 & a_1u+a_2 & (a_1u+a_2)u+a_3 & \dots & ((((a_1u+a_2)\cdot u+a_3)u+a_4)\dots+a_{n-1})u+a_{n-1} & \mathbf{r} \end{array}$$

assim

5º passo: o resultado da divisão é

$$a_1x^{n-1}+(a_1u+a_2)x^{n-2}+((a_1u+a_2)\cdot u+a_3)x^{n-3}+\dots$$

com resto r.

Exemplo 3.8.1. Vamos dividir o polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ dividido por $Q(x) = x - 2$ usando o método de Briot Ruffini. Aqui $u = 2$.

1° *Passo*

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline & 1 & & & \end{array}$$

2° *Passo*

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline & 1 & 1\cdot 2-6 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & & \end{array}$$

3° *Passo*

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & -4\cdot 2+11 & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \end{array}$$

4° *Passo*

2	1	-6	11	-6
	1	-4	3	$3 \cdot 2 - 6$

2	1	-6	11	-6
	1	-4	3	**0**

Resumindo

	1	-6	11	-6
2		2	-8	6
	1	-4	3	0

logo

2	1	-6	11	-6
	1	-4	3	**0**

Portanto o quociente da divisão é $x^2 - 4x + 3$ e o resto é zero.

Exemplo 3.8.2. Vamos dividir o polinômio $x^3 + 1$ por x+1, usando o método de Briot-Ruffini. Neste caso u = −1.

	1	*0*	*0*	*1*
-1		*-1*	*1*	*-1*
	1	*-1*	*1*	*0*

Resumindo

-1	1	0	0	1
	1	-1	1	**0**

Portanto o quociente da divisão $x^2 - x + 1$ e resto 0.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Marcos Antonio. *Introdução à lógica matemática para acadêmicos*. Curitiba: Editora Intersaberes, 2017. 130 p. ISBN 9788559723250.

BISPO, Carlos Alberto F.; CASTANHEIRA, Luiz B.; SOUZA FILHO, Oswaldo Melo. *Introdução à lógica matemática*. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 1 recurso online. ISBN 9788522115952.

BONETTO, Giácomo Augusto; MUROLO, Afrânio Carlos. *Fundamentos de matemática para engenharias e tecnologias*. São Paulo: Cengage Learning, 2018. 1 recurso online. ISBN 9788522126705.

DEMANA, Franklin D. *Pré-cálculo*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar 1: conjuntos e funções*. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar 3: trigonometria*. 6. ed. São Paulo: Atual, 1992. v. 3.

HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de matemática elementar 5: combinatória, probabilidade*. 4. ed. São Paulo: Atual, 1983.

SOUZA, Jeferson Afonso Lopes de (Org.). *Fundamentos matemáticos*. São Paulo: Pearson, 2020. 190 p. ISBN 9788543025216.

SOBRE A ORGANIZADORA

STÉFANI CONCOLATO VIEIRA: é docente na Universidade Federal de Rondônia (UNIR), onde atua na formação de futuros matemáticos e no desenvolvimento de pesquisas em matemática pura. Doutora em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), é também Mestra (2015) e Bacharela (2013) em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (UFES).

Sua trajetória acadêmica é marcada por uma sólida produção científica, com ênfase em curvas maximais sobre corpos finitos — tema central de sua pesquisa atual. Possui ainda experiência relevante em topologia geral e topologia algébrica. Em reconhecimento à qualidade de seu trabalho, foi agraciada com a medalha de bronze pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) durante as Jornadas Nacionais de Iniciação Científica.

No livro Fundamentos de Matemática Elementar: Lógica, Conjuntos e Polinômios, a autora alia rigor conceitual à clareza didática, oferecendo ao leitor uma introdução acessível e bem fundamentada aos pilares da matemática elementar, fruto de sua experiência docente e paixão pelo ensino.

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Lógica, Conjuntos e Polinômios

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora

Ano 2025

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Lógica, Conjuntos e Polinômios

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora

Ano 2025