

# INTRODUÇÃO À MODELAGEM CONTÍNUA DE PAINÉIS DE CONTRAVENTAMENTO

Prof. Dr. Wesley Melo

**Editora chefe**

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

**Editora executiva**

Natalia Oliveira Scheffer

**Assistente editorial**

Flávia Barão

**Bibliotecária**

Janaina Ramos

**Projeto gráfico**

Nataly Evilin Gayde

Thamires Camili Gayde

Vilmar Linhares de Lara Junior

**Imagens da capa**

iStock

**Edição de arte**

Yago Raphael Massuqueto Rocha

2025 by Atena Editora

Copyright © 2025 Atena Editora

Copyright do texto © 2025, o autor

Copyright da edição © 2025, Atena Editora

Os direitos desta edição foram cedidos à Atena Editora pelo autor.

*Open access publication* by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

A Atena Editora mantém um compromisso firme com a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, assegurando que os padrões éticos e acadêmicos sejam rigorosamente cumpridos. Adota políticas para prevenir e combater práticas como plágio, manipulação ou falsificação de dados e resultados, bem como quaisquer interferências indevidas de interesses financeiros ou institucionais. Qualquer suspeita de má conduta científica é tratada com máxima seriedade e será investigada de acordo com os mais elevados padrões de rigor acadêmico, transparência e ética.

O conteúdo da obra e seus dados, em sua forma, correção e confiabilidade, são de responsabilidade exclusiva do autor, não representando necessariamente a posição oficial da Atena Editora. O download, compartilhamento, adaptação e reutilização desta obra são permitidos para quaisquer fins, desde que seja atribuída a devida autoria e referência à editora, conforme os termos da Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

Os trabalhos nacionais foram submetidos à avaliação cega por pares, realizada pelos membros do Conselho Editorial da editora, enquanto os internacionais passaram por avaliação de pareceristas externos. Todos foram aprovados para publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

## Introdução à modelagem contínua de painéis de contraventamento

**Autor:** Wesley Imperiano Gomes de Melo  
**Revisão:** O autor  
**Capa:** Yago Raphael Massuqueto Rocha  
**Indexação:** Amanda Kelly da Costa Veiga

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)	
M528	<p>Melo, Wesley Imperiano Gomes de  Introdução à modelagem contínua de painéis de  contraventamento / Wesley Imperiano Gomes de  Melo. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2025.</p> <p>Formato: PDF  Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader  Modo de acesso: World Wide Web  Inclui bibliografia  ISBN 978-65-258-3299-9  DOI: <a href="https://doi.org/10.22533/at.ed.999252305">https://doi.org/10.22533/at.ed.999252305</a></p> <p>1. Estruturas de edifícios - paredes, painéis e  contraventamentos. I. Melo, Wesley Imperiano Gomes  de. II. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDD 624.176</p>
Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166	

**Atena Editora**  
Ponta Grossa – Paraná – Brasil  
+55 (42) 3323-5493  
+55 (42) 99955-2866  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

## DECLARAÇÃO DO AUTOR

Para fins desta declaração, o termo 'autor' é utilizado de forma neutra, sem distinção de gênero ou número, salvo indicação em contrário. Da mesma forma, o termo 'obra' refere-se a qualquer versão ou formato da criação literária, incluindo, mas não se limitando a artigos, e-books, conteúdos on-line, acesso aberto, impressos e comercializados, independentemente do número de títulos ou volumes. O autor desta obra declara, para todos os fins, que: 1. Não possui qualquer interesse comercial que constitua conflito de interesses em relação à publicação; 2. Participou ativamente da elaboração da obra; 3. O conteúdo está isento de dados e/ou resultados fraudulentos, todas as fontes de financiamento foram devidamente informadas e dados e interpretações de outras pesquisas foram corretamente citados e referenciados; 4. Autoriza integralmente a edição e publicação, abrangendo os registros legais, produção visual e gráfica, bem como o lançamento e a divulgação, conforme os critérios da Atena Editora; 5. Declara ciência de que a publicação será em acesso aberto, podendo ser compartilhada, armazenada e disponibilizada em repositórios digitais, conforme os termos da Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0). 6. Assume total responsabilidade pelo conteúdo da obra, incluindo originalidade, veracidade das informações, opiniões expressas e eventuais implicações legais decorrentes da publicação.

## DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação está licenciada sob a Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0), que permite copiar, distribuir, exibir, executar, adaptar e criar obras derivadas para quaisquer fins, inclusive comerciais, desde que sejam atribuídos os devidos créditos ao(s) autor(es) e à editora. Esta licença substitui a lógica de cessão exclusiva de direitos autorais prevista na Lei 9610/98, aplicando-se os princípios do acesso aberto; 2. Os autores mantêm integralmente seus direitos autorais e são incentivados a divulgar a obra em repositórios institucionais e plataformas digitais, sempre com a devida atribuição de autoria e referência à editora, em conformidade com os termos da CC BY 4.0.; 3. A editora reserva-se o direito de disponibilizar a publicação em seu site, aplicativo e demais plataformas, bem como de comercializar exemplares impressos ou digitais, quando aplicável. Em casos de comercialização direta (por meio de livrarias, distribuidores ou plataformas parceiras), o repasse dos direitos autorais será realizado conforme as condições estabelecidas em contrato específico entre as partes; 4. Em conformidade com a Lei Geral de Proteção de Dados (LGPD), a editora não cede, comercializa ou autoriza o uso de dados pessoais dos autores para finalidades que não tenham relação direta com a divulgação desta obra e seu processo editorial.

## Conselho Editorial

### Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre  
 Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás  
 Profª Drª Cristina Aledi Felsemburgh – Universidade Federal do Oeste do Pará  
 Prof. Dr. Diogo Peixoto Cordova – Universidade Federal do Pampa, Campus Caçapava do Sul  
 Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia  
 Prof. Dr. Elói Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
 Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro  
 Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
 Prof. Dr. Fabrício Moraes de Almeida – Universidade Federal de Rondônia  
 Profª Drª Glécilla Colombelli de Souza Nunes – Universidade Estadual de Maringá  
 Prof. Dr. Hauster Maximiler Campos de Paula – Universidade Federal de Viçosa  
 Profª Drª Iara Margolis Ribeiro – Universidade Federal de Pernambuco  
 Profª Drª Jéssica Barbosa da Silva do Nascimento – Universidade Estadual de Santa Cruz  
 Profª Drª Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
 Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
 Prof. Dr. Leonardo França da Silva – Universidade Federal de Viçosa  
 Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte  
 Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá  
 Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora  
 Prof. Dr. Marcos Vinicius Winckler Caldeira – Universidade Federal do Espírito Santo  
 Profª Drª Maria Iaponeide Fernandes Macêdo – Universidade do Estado do Rio de Janeiro  
 Profª Drª Maria José de Holanda Leite – Universidade Federal de Alagoas  
 Profª Drª Mariana Natale Fiorelli Fabiche – Universidade Estadual de Maringá  
 Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
 Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
 Profª Drª Priscila Natasha Kinas – Universidade do Estado de Santa Catarina  
 Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas  
 Prof. Dr. Rafael Pacheco dos Santos – Universidade do Estado de Santa Catarina  
 Prof. Dr. Ramiro Picoli Nippes – Universidade Estadual de Maringá  
 Profª Drª Regina Célia da Silva Barros Allil – Universidade Federal do Rio de Janeiro  
 Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí

# PREFÁCIO

---

A presente obra é destinada a discussão de conceitos iniciais sobre a análise estrutural dos painéis de contraventamento em edifícios altos, contemplando o levantamento histórico da vertente contínua de análise. De forma global, este texto parte da análise dos painéis de contraventamento usuais, passa pelos sistemas comuns de travamento por lintéis e tece comentários sobre a competente análise dinâmica.

No capítulo 1 é desenvolvida a análise unidimensional dos núcleos estruturais, também denominados de pilares de paredes finas. A abordagem se dá por duas vertentes: 1. A teoria da Flexo-Torção, unindo as teorias da Torção livre (Saint-Venant) e da Torção de empenamento, e 2. A teoria de Vlassov, consonante com teoria da membrana e abordando os conceitos do esforço de Bimomento e a propriedade Área Setorial da seção transversal.

Já no capítulo 2 é apresentado o histórico da Técnica do Meio Contínuo (TMC) como mecanismo de análise estrutural dos painéis de contraventamento dos edifícios altos usuais, bem como, delineiam-se às análises e caracterizações dos seguintes painéis de contraventamento: 1. Parede de corte, 2. Pórtico Plano de quadro retangular e 3. Núcleo estrutural aberto.

Ao fim, no capítulo 3 é contemplada a análise tridimensional dos núcleos estruturais, estudando-os como a associação de paredes finas e contraventáveis por lintéis, dispostos: 1. Horizontalmente, 2. em Z e 3. em X. Inclusive é procedida análise dinâmica dos pilares em formato de núcleo estrutural C como seção transversal.

*Prof. Dr. Wesley Imperiano Gomes de Melo*  
*Professor Adjunto III da UFRPE*  
*Curso de Engenharia Civil*  
*Estruturas*



# EPÍGRAFE

---

*“Tornar o simples complicado é fácil;  
tornar o complicado simples, isto é a  
CRIATIVIDADE”*

*Charles Mingus*





## SUMÁRIO

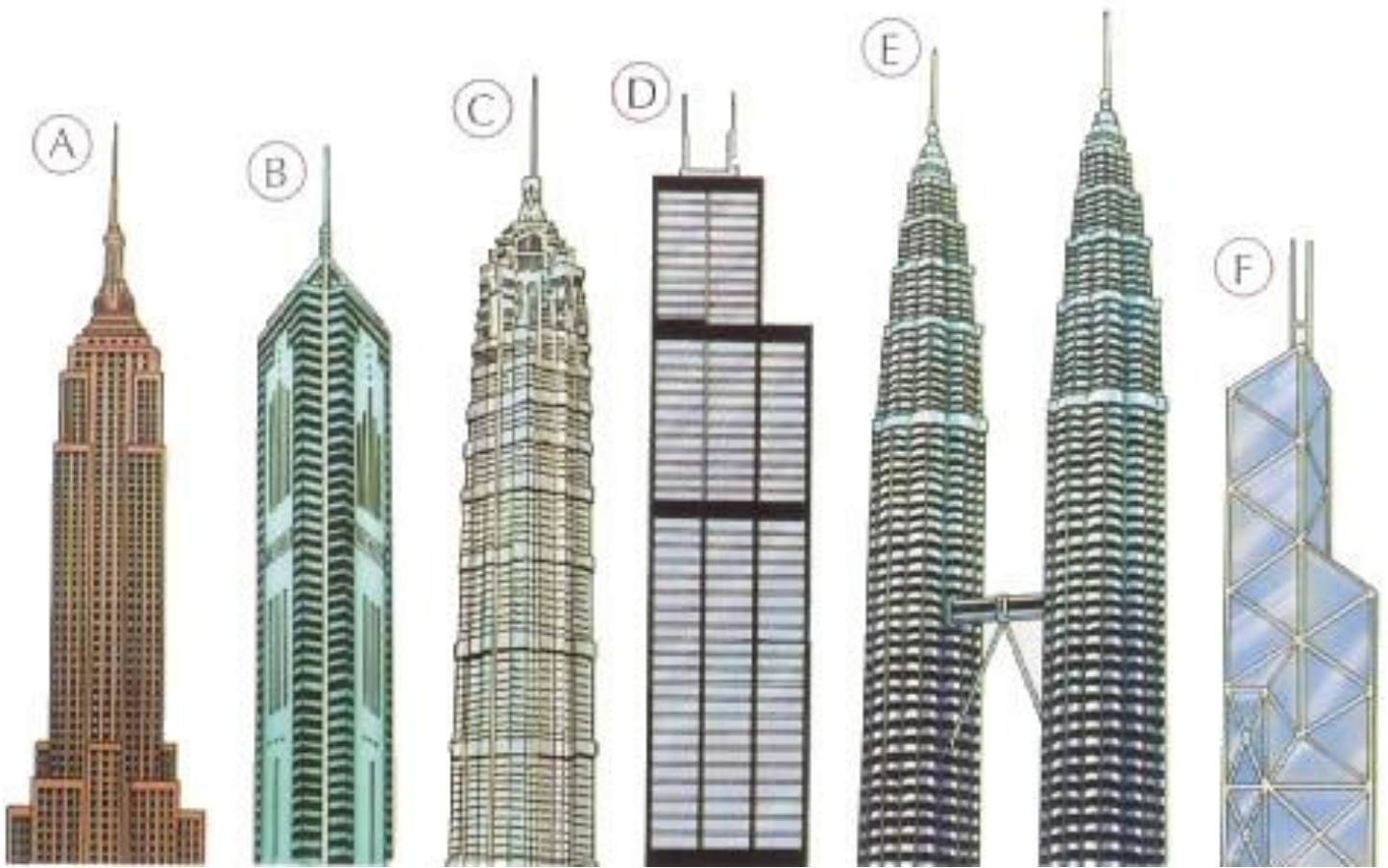
<b>PREFÁCIO .....</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>7</b>
<b>CAPÍTULO 1</b>	
<b>ANÁLISE UNIDIMENSIONAL DE PILARES DE PAREDES FINAS</b>	
<b>1.1. DEFINIÇÕES BÁSICAS .....</b>	<b>9</b>
a) Torção de Saint-Venant .....	9
b) Definição do Centro de Torção .....	10
c) Localização do Centro de Torção .....	12
d) Teoria da Flexo-Torção .....	13
e) Definição de Empenamento .....	24
f) Exemplo de Aplicação .....	24
<b>1.2. LOCALIZAÇÃO DO CENTRO DE TORÇÃO PARA SEÇÃO DE PAREDES FINAS .....</b>	<b>29</b>
a) Hipóteses básicas .....	29
b) Condições para o posicionamento do Centro de Torção .....	31
c) Posicionamento da origem do eixo esqueleto .....	35
d) Determinação geométrica do Centro de Torção .....	36
<b>1.3. FORMULAÇÃO UNIDIMENSIONAL ATRAVÉS DA TEORIA DE MEMBRANA .....</b>	<b>46</b>
a) Analogia de membrana .....	46
b) Resolução da equação diferencial do núcleo estrutural via Teoria de Membrana ...	53
c) Ábacos adimensionais .....	55
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO 1 .....</b>	<b>62</b>
<b>CAPÍTULO 2</b>	
<b>TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO</b>	
<b>2.1. APLICABILIDADE DA TMC EM ESTRUTURAS CIVIS .....</b>	<b>63</b>
a) Contextualização .....	63
b) Hipóteses básicas .....	66

c)	Paredes de Corte .....	67
d)	Pórtico Plano .....	72
e)	Núcleo Estrutural .....	82
<b>2.2.</b>	<b>HISTÓRICO DA TMC EM EDIFÍCIOS ALTOS .....</b>	<b>85</b>
a)	Panorama geral .....	85
b)	Panorama da análise estática .....	87
c)	Panorama da análise dinâmica .....	91
d)	Panorama da resolução da equação diferencial .....	94
<b>2.3.</b>	<b>ANÁLISE UNIDIMENSIONAL DE PÓRTICOS PLANOS .....</b>	<b>95</b>
a)	Projeto proposto .....	95
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO 2 .....</b>	<b>99</b>

## CAPÍTULO 3

### ANÁLISE TRIDIMENSIONAL DE PILARES DE PAREDES FINAS

<b>3.1.</b>	<b>CONTRAVENTAMENTO HORIZONTAL .....</b>	<b>105</b>
a)	Rotulação no centro dos vãos dos lintéis .....	105
b)	Lintéis modelados via equações de Maney .....	106
<b>3.2.</b>	<b>CONTRAVENTAMENTO EM Z .....</b>	<b>108</b>
a)	Equações de correlação .....	112
b)	Equações de equilíbrio dos lintéis .....	113
c)	Translade das reações elásticas .....	115
d)	Reações elásticas nos painéis-parede .....	119
e)	Graus de liberdade via TFT .....	120
f)	Correlação das reações elásticas via TFT .....	121
<b>3.3.</b>	<b>CONTRAVENTAMENTO EM X .....</b>	<b>122</b>
a)	Equações de correlação .....	124
b)	Equações de equilíbrio dos lintéis .....	125
c)	Translade das reações elásticas .....	126
d)	Reações elásticas nos painéis-parede .....	131
<b>3.4.</b>	<b>NÚCLEO C .....</b>	<b>133</b>
a)	Caso simplificado .....	133
b)	Caso via Maney .....	149
c)	Análise dinâmica .....	161
<b>3.5.</b>	<b>NÚCLEO DUPLO T .....</b>	<b>175</b>
a)	Equações diferenciais dos painéis-parede .....	176
b)	Compatibilidade dos deslocamentos nas interseções .....	179
c)	Equilíbrio dos esforços cortantes .....	186
d)	Sistema de equações diferenciais da análise estática .....	189
<b>3.6.</b>	<b>RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS .....</b>	<b>189</b>
a)	Rotina de cálculo .....	192
b)	Grau do polinômio particularizante .....	193
c)	Sistema de coordenadas generalizadas e momento fletor nulo no topo do pilar .....	195
d)	Sistema de coordenadas generalizadas e existência do momento fletor no topo .....	196
<b>3.7.</b>	<b>PROJETO PROPOSTO .....</b>	<b>198</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO 3 .....</b>	<b>200</b>



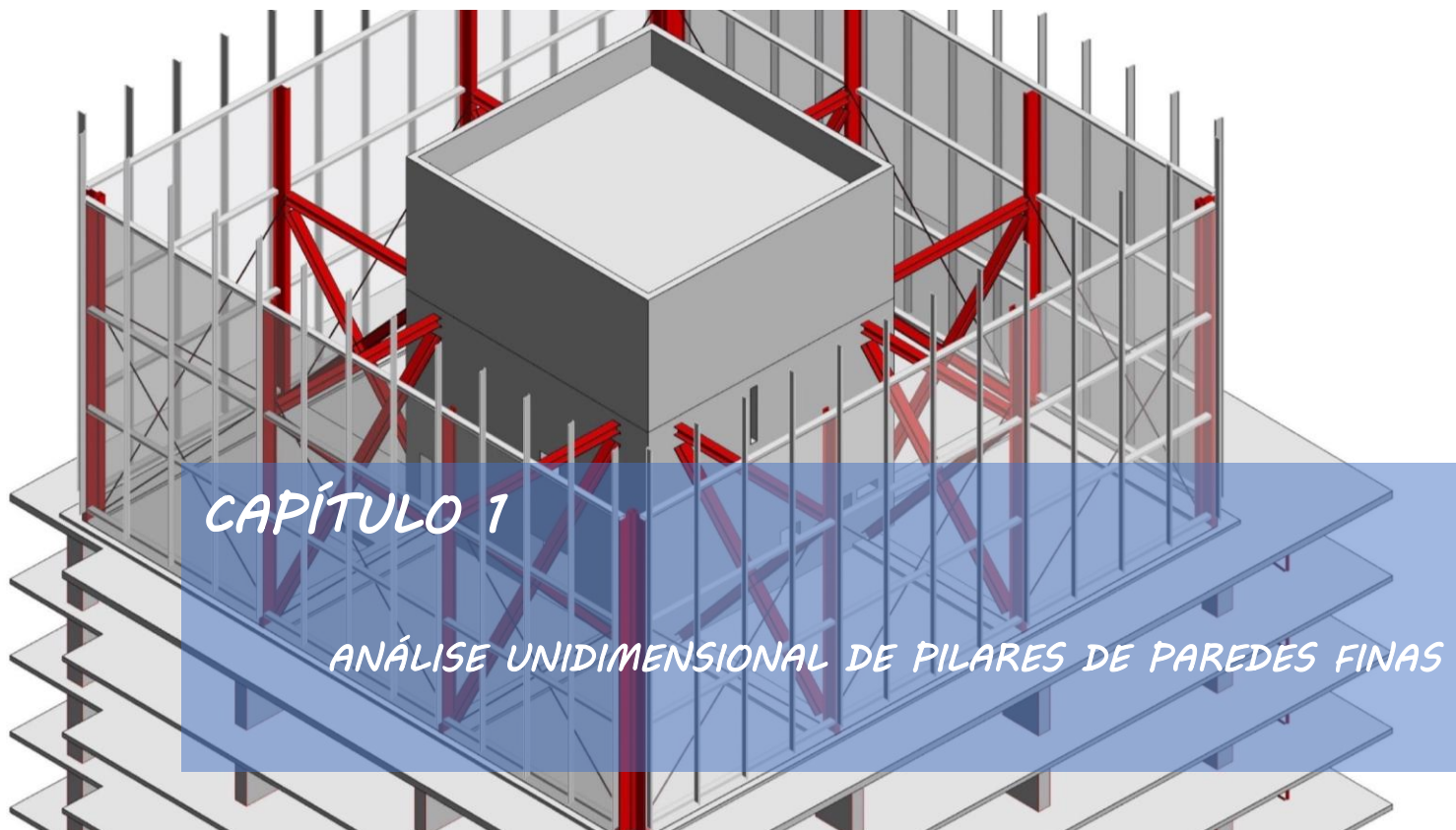
## INTRODUÇÃO

A grande relevância do estudo contínuo de estruturas é a minoração perceptível no número de parâmetros envolvidos e como consequência a brutal simplificação no processamento dos dados. A título ilustrativo têm-se três parâmetros envolvidos na análise tridimensional de edifícios altos, enquanto que ativa apenas um parâmetro na análise unidimensional (realizada nos painéis em separado).

Ademais, este livro contempla o estudo das paredes finas, visando a análise estrutural dos núcleos estruturais do entorno dos elevadores nos edifícios altos. A formulação vai deste a abordagem unidimensional, com a teoria de Flexo-torção, até o estudo da seção propriamente dita com a teoria de Vlassov (consonante à teoria da membrana) e o implemento dos conceitos de: empenamento, bimomento e área setorial.

Por fim, são expostos informações históricas e o equacionamento dos painéis de contraventamento, em separado: 1. Parede de corte, 2. Pórtico plano regular e 3. Núcleo estrutural. São expostas, ainda, as formulações dos sistemas de contraventamento dos painéis, via: 1. Lintéis horizontais, 2. Lintéis em formato de Z e 3. Lintéis em X. Contempla ainda, o procedimento para análise dinâmica dos painéis, desde a obtenção do sistema de equações diferenciais até o seu desacoplamento e exposição da resposta e modos de vibração.



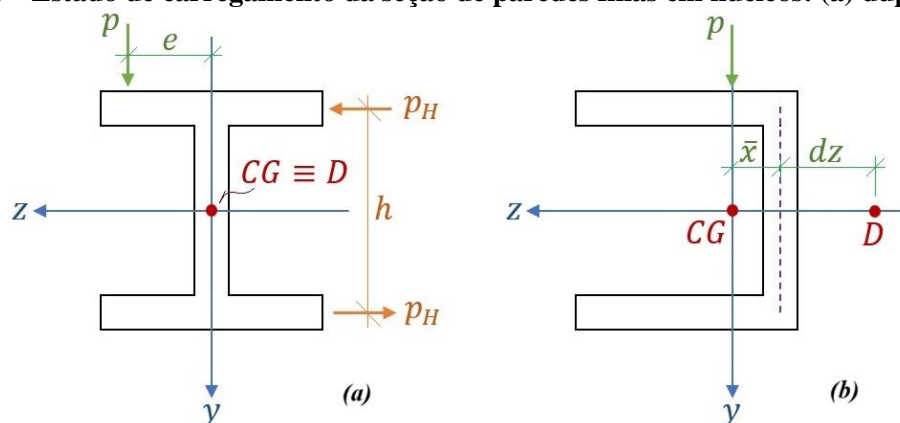


## 1.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

### a) Torção de Saint-Venant

Na Figura 1.1 é apresentado o estado de carregamentos de duas seções de paredes finas, uma com formato duplo T (Fig. 1.1 a) e a outra em formato de C (Fig. 1.1 b). Em ambas são indicados os centros geométricos, sendo o primeiro deles, o *Centro de Gravidade* (CG), e o segundo o *Centro de Torção* (D).

**Figura 1.1 – Estado de carregamento da seção de paredes finas em núcleos: (a) duplo T e (b) C**



Fonte: O Autor (2025)

**Definição de Centro de Gravidade (CG):** É o ponto de aplicação resultante de todos os vetores da força de gravidade que atua sobre o corpo estudado, ou seja, é o ponto de equilíbrio do corpo, evitando o deslizamento ou o tombamento do mesmo.

Em consequência da análise estrutural da Figura 1.1 (a) tem-se a escrita do momento de torção  $T$ , como:

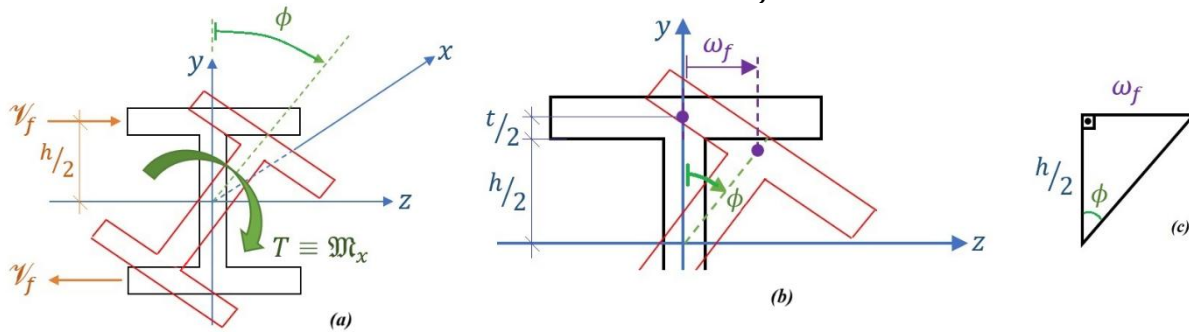
$$T = p_H \cdot h + p \cdot e \quad (eq. 1.1 a)$$

E ainda da Figura 1.1 (b) escreve-se:

$$T = p \cdot (\bar{x} + d_z) \quad (eq. 1.1 b)$$

A seguir, na Figura 1.2 é evidenciado o fenômeno de rotação  $\phi$  da seção transversal, bem como, apresentado o deslocamento lateral  $\omega_f$ .

**Figura 1.2 – Estado deformado da seção de paredes finas duplo T: (a) seção completa, (b) enfoque na parte superior da seção e (c) triângulo retângulo formado pela rotação  $\phi$  em relação ao deslocamento lateral  $\omega_f$**



Fonte: O Autor (2025)

da análise trigonométrica do deslocamento lateral em detrimento da rotação e altura da seção transversal, ver Figura 1.2 (c), exprime-se:

$$\operatorname{tg} \phi \approx \phi = \frac{\omega_f}{\frac{h}{2}} \quad \therefore \quad \omega_f = \phi \cdot \frac{h}{2} \quad (eq. 1.1 c)$$

por conclusão do estudo da *Torção de Saint-Venant*, procede-se a derivação da equação (1.1 c) até a terceira ordem da deflexão lateral, assim detalhado:

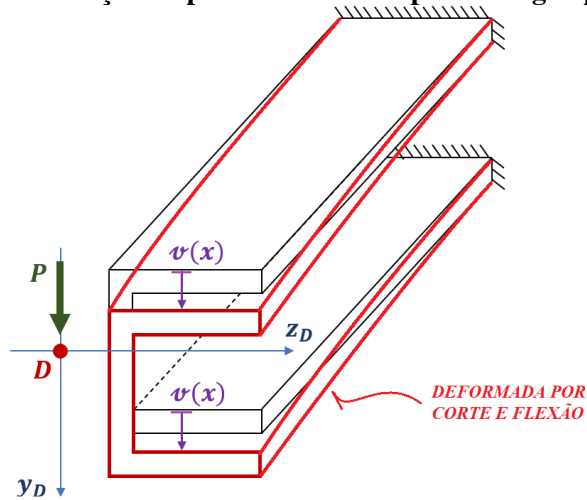
$$\begin{aligned} \frac{d\omega_f}{dx} &\equiv \frac{d}{dx} \left( \phi \cdot \frac{h}{2} \right) \equiv \frac{h}{2} \cdot \frac{d\phi}{dx} \\ \frac{d^2\omega_f}{dx^2} &\equiv \frac{d}{dx} \left( \frac{d\omega_f}{dx} \right) \equiv \frac{d}{dx} \left( \frac{h}{2} \cdot \frac{d\phi}{dx} \right) \equiv \frac{h}{2} \cdot \frac{d^2\phi}{dx^2} \\ \frac{d^3\omega_f}{dx^3} &\equiv \frac{h}{2} \cdot \frac{d^3\phi}{dx^3} \end{aligned} \quad (eq. 1.2)$$

## b) Definição do Centro de Torção

O *Centro de Torção* também pode ser denominado de *Centro de Cisalhamento* ou de *Centro de Corte*, sendo representado por CT ou D. Neste material do curso representar-se-á o centro de torção pela letra D maiúscula.

Desta forma, define-se o Centro de Torção (D) como o ponto onde ao se passar o plano de cargas transversais não se ativa o efeito de torção. Ver Figura 1.3. Este ponto pode, ou não, estar contido na seção transversal, porém será definido com base no formato e dimensões da mencionada seção.

**Figura 1.3 – Flexão e corte da seção de paredes finas ao aplicar carga apenas no centro de torção**

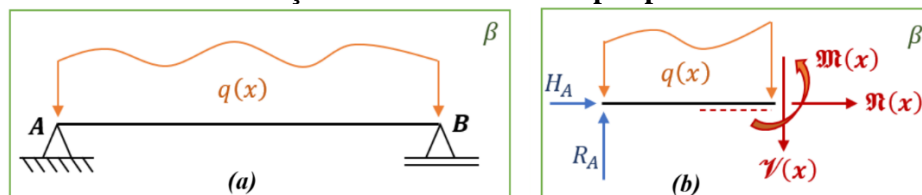


Fonte: O Autor (2025)

Como ficou claro, ao aplicar cargas no *Centro de Torção* ativa-se apenas esforço cortante e momento fletor, logo seria mais lógico a nomenclatura de Centro de Corte, porém é mais recorrente na literatura atualizada a presença do termo *Centro de Torção*, daí a sua adoção neste material didático.

Ademais, faz-se importante o plano de cargas transversais como aquele que contém os carregamentos perpendiculares ao eixo da barra analisada, sendo comumente representado pela letra beta, conforme Figura 1.4.

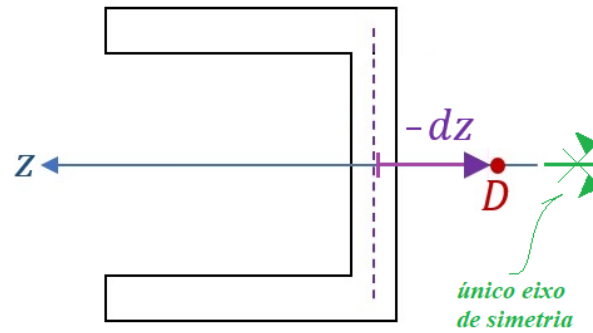
**Figura 1.4 – Representação do plano de carga: (a) no eixo de uma viga biapoiada e (b) detalhe de esforços solicitantes ativados por plano**



Fonte: O Autor (2025)

Neste instante é importante frisar a propriedade de que eixo simetria da seção indica eixo de localização do *Centro de Torção*, porém muito cuidado ao utilizá-la, pois a recíproca não é verdadeira. Assim, uma seção com duplo eixo de simetria, como é o caso de um retângulo, terá o *Centro de Torção* coincidente com o centro de gravidade, o qual se localiza no encontro dos dois eixos de simetria.

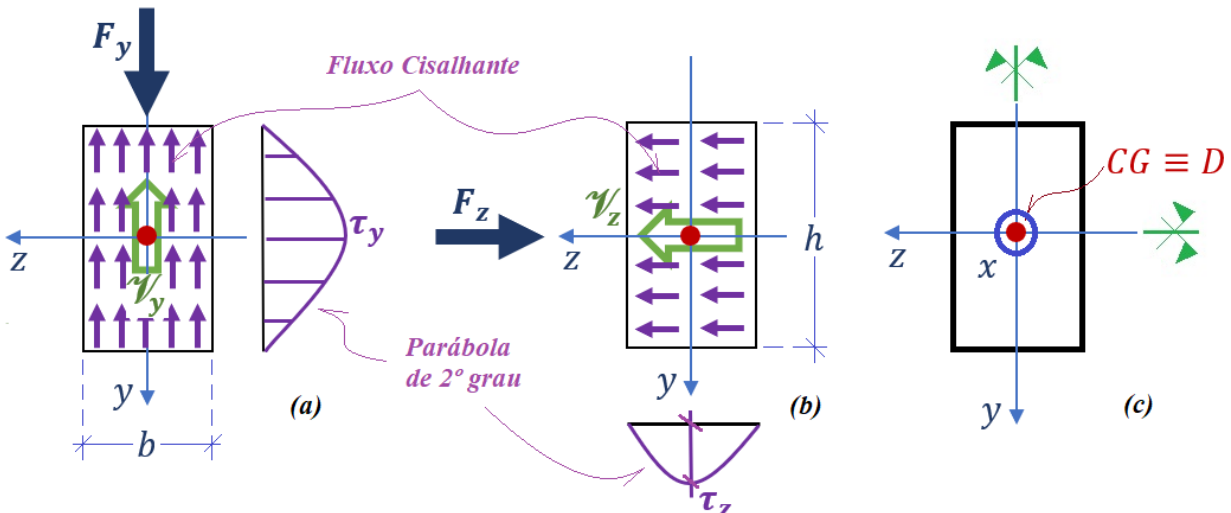
No caso de seções com único eixo de simetria é possível afirmar, de pronto, que o *Centro de Torção* estará localizado por sobre este eixo, sendo apenas preciso proceder o equacionamento para determinar a posição exata. Vide Figura 1.5.

**Figura 1.5 – Representação genérica do centro de torção no único eixo de simetria de uma seção**

Fonte: O Autor (2025)

## c) Localização do Centro de Torção da seção retangular

Na localização do centro de torção procede-se a aplicação de uma força  $F_y$  na direção  $y$  e com isso será ativado um cisalhamento resultante  $\mathcal{V}_y$  do fluxo  $\tau_y$ . Vide Figura 1.6 (a). Em contraposição, ao aplicar a força  $F_z$  na direção  $z$  será ativado o fluxo cisalhante  $\tau_z$  e com resultante  $\mathcal{V}_z$ , conforme ilustra a Figura 1.6 (b).

**Figura 1.6 – Determinação do centro de torção em seção retangular: (a) fluxo e resultante de cisalhamento na direção  $y$ , (b) fluxo e corte resultante na direção  $z$  e (c) condição de simetria**

Fonte: O Autor (2025)

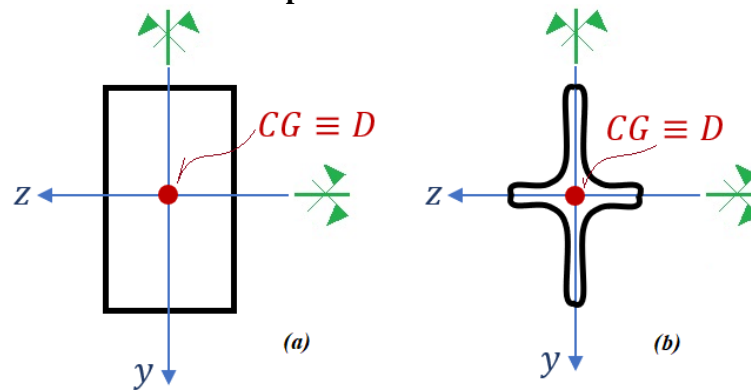
Ademais, ressalta-se que a seção retangular é duplamente simétrica (ver Figura 1.6 c) e que o centro geométrico CG coincide com o cruzamento dos eixos de simetria e principais de inércia, logo os eixos  $y$  e  $z$ .

As resultantes  $\mathcal{V}_y$  e  $\mathcal{V}_z$  são esforços cortantes, isto porque as forças  $F_y$  e  $F_z$  são aplicadas intencionalmente nos eixos principais de inércia ( $y$  e  $z$  respectivamente), visando com isso, a ativação apenas da flexão e corte. Logo não excitando torção na estrutura. Desta forma, conclui-

se que o cruzamento dos eixos  $y$  e  $z$  também definem o *Centro de Torção*, pois atende ao pressuposto fundamental de neste ponto, ao se aplicar cargas, não ocorrer a ativação de torção.

Cabe deixar bem explícito que a origem dos eixos  $y$  e  $z$ , conforme mencionado no parágrafo anterior, definirá o *Centro de Torção* desta seção transversal caracterizada por dupla simetria. **Assim, pode-se estender este conceito e definir que sempre que a seção possuir dupla simetria, o *Centro de Torção* (D) coincidirá com o centro geométrico (CG).** Vide Figura 1.7.

**Figura 1.7 – Posicionamento do Centro de Torção em: (a) seção retangular e (b) seção genérica duplamente simétrica**



Fonte: O Autor (2025)

## d) Teoria da Flexo-Torção

### d.1) breves discussões sobre a Teoria da Flexão

Da Teoria de Flexão dos eixos, segundo Euler-Bernoulli, tem-se a deflexão lateral expressa em termos do momento fletor, como:

$$\frac{d^2 \omega_f}{dx^2} = \frac{-\mathfrak{M}_f}{E \cdot I_f} \quad (eq. 1.3)$$

Ao derivar a equação (1.3) e impor que o esforço cortante equivale a derivada do momento fletor, tem-se:

$$\frac{d^3 \omega_f}{dx^3} = \frac{-\mathcal{V}_f}{E \cdot I_f} \quad (eq. 1.4)$$

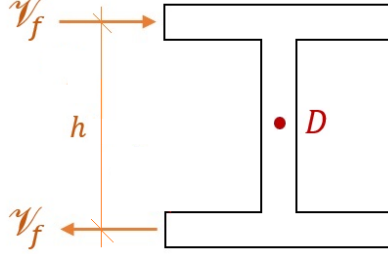
Unindo as equações (1.2) e (1.4) é possível escrever a relação do esforço cortante com a rotação da seção, como:

$$\frac{h}{2} \cdot \frac{d^3 \phi}{dx^3} = \frac{-\mathcal{V}_f}{E \cdot I_f} \quad \therefore \quad \mathcal{V}_f = -E \cdot I_f \cdot \left(\frac{h}{2}\right) \cdot \frac{d^3 \phi}{dx^3} \quad (eq. 1.5)$$

### d.2) Teoria da Flexo-Torção

Na Figura 1.8 é apresentado o binário formado pelo esforço cortante lateral.

**Figura 1.8 – Binário de esforços cortantes laterais  $\mathcal{V}_f$  para a seção de paredes finas em duplo T**



Fonte: O Autor (2025)

Da análise do momento de torção ocasionado binário do esforço cortante  $\mathcal{V}_f$ , escreve-se:

$$\mathfrak{M}_\omega = \mathcal{V}_f \cdot h \quad (eq. 1.6)$$

Impondo a equação (1.6) na equação (1.5), tem-se:

$$\mathfrak{M}_{ft} \equiv \mathfrak{M}_\omega = -E \cdot I_f \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^3 \phi}{dx^3} \equiv -E \cdot C_\omega \cdot \frac{d^3 \phi}{dx^3} \quad (eq. 1.7)$$

sendo:  $C_\omega = I_f \cdot \frac{h^2}{2}$  a constante torsional por empenamento da seção transversal; e

$E \cdot C_\omega$  – a rigidez ao empenamento da seção transversal. E lembrando que o *momento de torção livre* é expresso mediante a rotação diferencial, como:

$$\mathfrak{M}_\ell \equiv \mathfrak{M}_S = G \cdot J \cdot \frac{d\phi}{dx} \quad (eq. 1.8)$$

E, por fim, o momento de torção  $\mathfrak{M}_x$  será expresso por:

$$\mathfrak{M}_x \equiv \mathfrak{M}_S + \mathfrak{M}_\omega = G \cdot J \cdot \frac{d\phi}{dx} - E \cdot C_\omega \cdot \frac{d^3 \phi}{dx^3} \quad (eq. 1.9)$$

Reescrevendo-se a equação (1.9), após divisão pela rigidez ao empenamento ( $E \cdot C_\omega$ ) e deixar o termo de maior ordem de derivação como positivo, constata-se:

$$\frac{d^3 \phi}{dx^3} - \frac{G \cdot J}{E \cdot C_\omega} \cdot \frac{d\phi}{dx} = \frac{-\mathfrak{M}_x}{E \cdot C_\omega} \quad (eq. 1.10)$$

- Equação Diferencial da Flexo-Torção -

### d.3) Teoria de Vlassov

A Teoria de Vlassov para o estudo das seções de paredes foi complementemente exposta em sua tese de doutorado, de referência Vlassov (1962), e considera as seguintes hipóteses de modelagem:

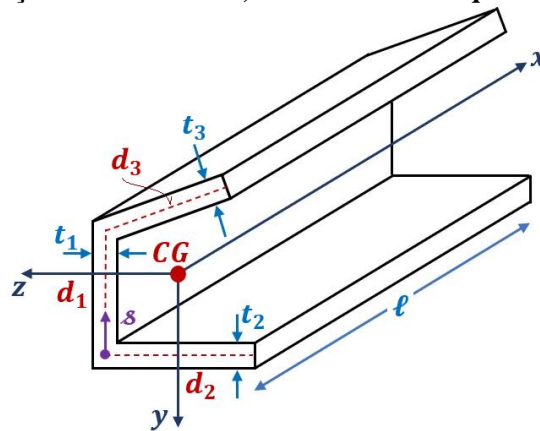
- As barras são de seção transversal aberta e constituídas de paredes finas (delgadas), retas ou curvas;

- A barra será delgada quando a razão da espessura ( $t$ ) pela altura ( $d$ ) da parede não superar 10 %, bem como, se a razão entre a altura ( $d$ ) pelo comprimento ( $\ell$ ), da mencionada parede, seguir a mesma limitação.

Assim:  $\frac{t}{d} \leq 0,1$  e  $\frac{d}{\ell} \leq 0,1$

sendo:  $t$  – espessura;  $d$  – comprimento de um trecho (reto ou curvo) da seção transversal (também denominável de altura da parede fina); e  $\ell$  – comprimento total da barra. Ver Figura 1.9.

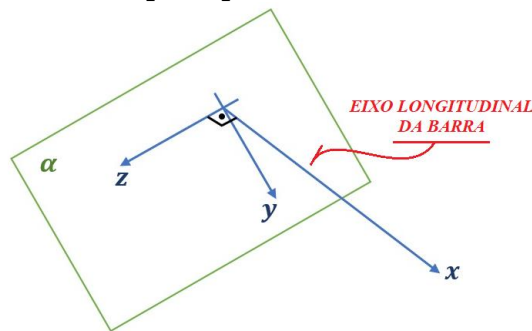
**Figura 1.9 – Esquemática das dimensões, eixos e a linha esqueleto da seção de paredes finas**



Fonte: O Autor (2025)

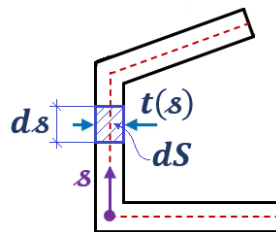
- A seção transversal será substituída pelo equacionamento em linhas que passam no eixo de simetria das paredes finas, cuja denominação é *Linhas de Esqueleto*;
  - Define-se por *Linha de Esqueleto* como a linha imaginária que passa no meio da espessura  $t$  da  $i$ -ésima parede fina.
  - Ainda, tem-se “ $s$ ” como a ordenada local que passa na linha esqueleto, cujo sentido é arbitrado por quem procede a análise estrutural.
- O *Sistema Coordenado de Referências* (SCR) passa pelos centros geométricos, ficando definido o sistema gravitacional se passar no CG e o sistema flexional se passar no centro de torção D;
  - Onde:  $x$  – é o eixo longitudinal da barra; além, de  $y$  e  $z$  – que são os eixos principais de inércia, definidos no plano da seção transversal.
  - Ademais, os eixos  $y$  e  $z$  pertencem ao plano  $\alpha$  perpendicular ao eixo longitudinal da barra, conforme é ilustrado na Figura 1.10.
- A espessura  $t$  dos trechos da seção de paredes finas pode ser variável ao longo da ordenada  $s$ , logo, representada por  $t(s)$ ;
- O elemento diferencial da  $i$ -ésima parede fina, conforme esquema da Figura 1.11, terá:
  - espessura  $t(s)$ ;
  - comprimento  $ds$ ; e
  - área  $dS = t(s) \cdot ds$ .

**Figura 1.10 – Plano  $\alpha$  perpendicular ao eixo longitudinal da barra e que contém os eixos principais de inércia**



Fonte: O Autor (2025)

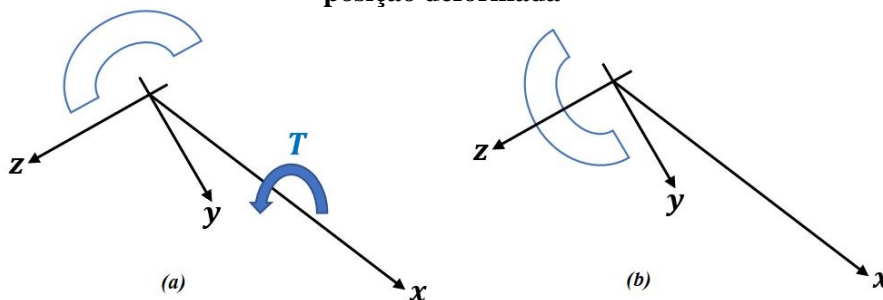
**Figura 1.11 – Elemento diferencial de determinada parede fina**



Fonte: O Autor (2025)

- ✚ Após a deformação na barra, por flexo-torção, conforme apresentado na Figura 1.12, a seção transversal projeta-se indeformada, cuja ocorrência a classifica como rígida no plano  $\bar{y}\bar{z}$ ; e

**Figura 1.12 – Deformação das paredes finas por flexo-torção: (a) estado indeformado e (b) posição deformada**



Fonte: O Autor (2025)

- ✚ Não há distorção no plano  $\bar{y}\bar{z}$ , isto verificando que  $\gamma_{yz} = 0$ , conforme ilustração na Figura 1.13.

**Figura 1.13 – Elemento diferencial submetido ao fenômeno de distorção**



Fonte: O Autor (2025)

- Observação: Não havendo distorção, resta apenas representar os efeitos de translação e de rotação.

#### d.4) Revisão sobre Equação Diferencial Ordinária

##### d.4.1) Equação Diferencial de ordem 3 não homogênea

Da equação (1.10) é procedida a definição do parâmetro  $\lambda$  e reescreve-se a equação diferencial, como:

$$\frac{d^3\phi}{dx^3} - \lambda^2 \cdot \frac{d\phi}{dx} = \frac{-\mathfrak{M}_x}{E \cdot C_\omega} \quad (eq. 1.11)$$

sendo:  $\lambda^2 = \frac{G \cdot J}{E \cdot C_\omega}$ .

A solução da EDO apresentada na equação (1.11) é processada mediante as seguintes etapas:

➤ 1ª Etapa: Solução homogênea



Equação característica:

$$\phi''' - \lambda^2 \cdot \phi' = 0$$

sendo adotada como solução:  $\phi = e^{mx}$ ;

$$\phi' = m \cdot e^{mx};$$

$$\phi''' = m^3 \cdot e^{mx}$$

$$\therefore m^3 \cdot e^{mx} - \lambda^2 \cdot m \cdot e^{mx} = 0$$

$$m_1 = 0 \quad \text{"Solução Trivial"}$$

$$\therefore m \cdot (m^2 - \lambda^2) = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} m_2 = \lambda \\ m_3 = -\lambda \end{matrix}$$



Solução por combinação linear:

$$\phi_h(x) = A_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + A_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + A_3$$

$$\therefore \phi_h(x) = A_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\lambda \cdot x} + A_3$$

Observação: lembrando que a obtenção da solução homogênea passa pela transformação de funções exponenciais na combinação de funções hiperbólicas, logo expressa por:

$$e^{\pm a \cdot x} = \cosh(a \cdot x) \pm \sinh(\lambda \cdot x)$$

do que aplicando no caso concreto fica:

$$\phi_h(x) = A_1 \cdot [\cosh(\lambda \cdot x) + \sinh(\lambda \cdot x)] + A_2 \cdot [\cosh(\lambda \cdot x) - \sinh(\lambda \cdot x)] + A_3$$

ou ainda:  $\phi_h(x) = (A_1 + A_2) \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + (A_1 - A_2) \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + A_3$

por último, exprime-se:  $\phi_h(x) = A \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + B \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + C \quad (eq. 1.12 a)$

sendo:  $A = A_1 - A_2$ ;  $B = A_1 + A_2$ ; e  $C = A_3$ .

➤ 2ª Etapa: Solução particular

Admitindo que o momento de torção  $\mathfrak{M}_x$  é a variável  $[f(x) = \mathfrak{M}_x]$  e pode ser descrita como o termo que é responsável pela caracterização da solução particular. Desta forma, genericamente, a

solução particular  $\phi_p(x)$  pode ser escrita como uma função  $f_1(x)$  semelhante a  $f(x)$ , como:

$$\phi_p(x) = f_1(x) \quad (\text{eq. 1.12 b})$$

**Observação:** Diz que uma função é semelhante a outra se for da mesma natureza, por exemplo, se ambas forem polinomiais, ou trigonométrica, ou hiperbólica e assim sucessivamente.

cujas derivadas, da eq. (1.12 b), são expressas por:

$$\begin{aligned}\phi_p'(x) &= \frac{df_1(x)}{dx} \\ \phi_p''(x) &= \frac{d^2 f_1(x)}{dx^2} \\ \phi_p'''(x) &= \frac{d^3 f_1(x)}{dx^3}\end{aligned}$$

por fim, aplicam-se as derivadas da solução particular na EDO não homogênea, neste caso a equação (1.11), e quantificam-se os coeficientes da solução particular  $\phi_p(x)$ . Disto feito, a substituição pode ser expressa genericamente, como:

$$\begin{aligned}\frac{d^3 \phi_p(x)}{dx^3} - \lambda^2 \cdot \frac{d\phi_p(x)}{dx} &= \frac{-\mathfrak{M}_x}{E \cdot C_\omega} \\ \therefore \frac{d^3 f_1(x)}{dx^3} - \lambda^2 \cdot \frac{df_1(x)}{dx} &= -\frac{1}{E \cdot C_\omega} \cdot f(x) \quad (\text{eq. 1.12 c})\end{aligned}$$

Deste ponto, a caracterização dos coeficientes da função resposta  $f_1(x)$  ocorre pela aplicação do método da igualdade dos termos semelhantes da equação (1.12 c).

#### d.4.2) Equação Diferencial de ordem 4 não homogênea

Visando exemplificar o procedimento de solução geral de uma EDO de ordem 4 não homogênea, procede-se a derivação da equação (1.9) e reescreve-se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left\{ G \cdot J \cdot \frac{d\phi}{dx} - E \cdot C_\omega \cdot \frac{d^3 \phi}{dx^3} \right\} &= \frac{d}{dx} \{ \mathfrak{M}_x \} \\ \therefore G \cdot I_t \cdot \phi'' - E \cdot I_\omega \cdot \phi'''' &= \mathfrak{M}_x' \equiv m \quad (\text{eq. 1.13})\end{aligned}$$

sendo:  $G \cdot I_t$  – a rigidez torsional, logo será a resistência da barra para evitar a rotação por torção;

$E \cdot I_\omega$  – a rigidez ao empenamento, ou seja, é a resistência que a barra oferece ao deslocamento relativo dos bordos livres da seção aberta.

**E lembrar que se adaptou a nomenclatura de:  $I_t \equiv J$  e  $I_\omega \equiv C_\omega$ .**

Agora, dividindo toda a equação (1.13) pela rigidez torsional, a fim de deixar o coeficiente como pré-multiplicador do termo de maior ordem de derivação, escreve-se:

$$\phi'' - \frac{E \cdot I_\omega}{G \cdot I_t} \cdot \phi'''' = \frac{m}{G \cdot I_t} \quad (eq. 1.14)$$

$$\text{onde: } \tau^2 = \sqrt{\frac{E \cdot I_\omega}{G \cdot I_t}} \equiv \sqrt{\frac{\frac{E \cdot I_\omega}{E}}{\frac{2 \cdot (1 - \nu) \cdot I_t}{E}}} \equiv \sqrt{2 \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{I_\omega}{I_t}}$$

Após multiplicar a EDO da equação (1.14), por  $(-1)$ , reescreve-se:

$$\tau^2 \cdot \phi'''' - \phi'' = \frac{-m}{G \cdot I_t} \quad (eq. 1.15)$$

Neste ponto, a solução da equação diferencial apresentada na equação (1.15) é processada através das seguintes etapas:

➤ **1ª Etapa:** Solução homogênea

✚ Equação característica:

$$\tau^2 \cdot \phi_h'''' - \phi_h'' = 0$$

sendo adotada como solução:  $\phi_h = e^{\lambda x}$ ;

$$\phi_h'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x};$$

$$\phi_h'''' = \lambda^4 \cdot e^{\lambda x}$$

$$\therefore \tau^2 \cdot \lambda^4 \cdot e^{\lambda x} - \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} = 0 \quad \text{"Solução Trivial"}$$

$$\nearrow \lambda^1 = 0$$

$$\nearrow \lambda^2 = 0$$

$$\searrow \lambda_2 = 0$$

$$\searrow \tau^2 \cdot \lambda^2 - 1 = 0 \quad \nearrow \lambda_3 = \frac{1}{\tau}$$

$$\searrow \lambda_4 = -\frac{1}{\tau}$$

$$\therefore e^{\lambda x} \cdot \{\lambda^2 \cdot (\tau^2 \cdot \lambda^2 - 1)\} = 0$$

**Observação:** sabe-se que as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  geram os termos  $(C_1)$  e  $(C_2 \cdot x)$ , bem como, a raiz  $\lambda_3$  gera o termo  $(C_3 \cdot e^{\frac{x}{\tau}})$  e a raiz  $\lambda_4$  conduz ao termo  $(C_4 \cdot e^{-\frac{x}{\tau}})$ .

✚ Solução por combinação linear:

$$\phi_h(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot e^{\frac{x}{\tau}} + C_4 \cdot e^{-\frac{x}{\tau}}$$

$$\text{ou ainda: } \phi_h(x) = C_1 + C_2 \cdot x + \bar{C}_3 \cdot \sinh\left(\frac{x}{\tau}\right) + \bar{C}_4 \cdot \cosh\left(-\frac{x}{\tau}\right) \quad (eq. 1.16 a)$$

sendo:  $\bar{C}_3 = C_3 - C_4$ ; e  $\bar{C}_4 = C_3 + C_4$ .

➤ **2ª Etapa:** Solução particular

Observa-se que o termo particular da EDO, ver equação (1.15), é a constante  $m$ , logo a solução particular pode ser proposta de modo que a derivada pré-multiplicada pela unidade seja uma constante (mesma

natureza do termo particular). Neste caso, adotando-se a derivada segunda constante:

$$\phi_p''(x) = k \quad (\text{eq. 1.16 b})$$

cujas derivadas quarta é:

$$\phi_p''''(x) = 0$$

do que ao substituir na EDO apresentada na equação (1.15), quantifica-se a constante  $k$ , como:

$$\tau^2 \cdot \phi_p'''' - \phi_p'' = \frac{-m}{G \cdot I_t}$$

$$\tau^2 \cdot 0 - k = \frac{-m}{G \cdot I_t}$$

$$k = \frac{m}{G \cdot I_t}$$

✚ Por fim, a escrita da solução particular  $\phi_p(x)$  será procedida pela dupla integração da equação (1.16 b), ficando:

$$\begin{aligned} \phi_p(x) &= \int \left\{ \int k \, dx \right\} dx \equiv \int \left\{ \int \frac{m}{G \cdot I_t} \, dx \right\} dx \\ &\equiv \frac{m}{G \cdot I_t} \cdot \left[ \int \left\{ \int dx \right\} dx \right] \equiv \frac{m}{G \cdot I_t} \cdot \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

➤ **3ª Etapa:** Solução geral, como soma das soluções homogênea e particular

$$\phi(x) = \phi_h(x) + \phi_p(x)$$

$$\therefore \phi(x) = C_1 + C_2 \cdot x + \bar{C}_3 \cdot \sinh\left(\frac{x}{\tau}\right) + \bar{C}_4 \cdot \cosh\left(\frac{x}{\tau}\right) + \frac{m}{2 \cdot G \cdot I_t} \cdot x^2 \quad (\text{eq. 1.17})$$

A solução apresentada na equação (1.17) está em conformidade com o teor apresentado em Mori & Munaier Neto (2017, p. 152). E por fim, esclarece-se que a determinação dos coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\bar{C}_3$  e  $\bar{C}_4$  são obtidos mediante aplicação das condições de contorno da barra na equação (1.17). A seguir são apresentadas e discutidas as condições contorno típicas.

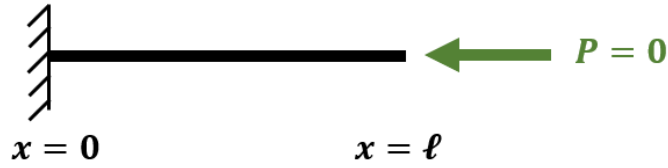
#### d.5) Condições de contorno devido a Teoria da Flexo-Torção (TFT)

Neste material serão apresentados três casos de vinculação, sendo o primeiro para a barra monoengastada, o segundo para o apoio de garfo e, por último, a configuração de aplicação de cargas nas paredes finas de modo a ativar o bimomento ( $B$ ).

##### d.5.1) 1º Caso: Barra engastada – livre (monoengastada)

Na Figura 1.14 é apresentado ao caso da barra com base/início engastado, na abscissa  $x = 0$ , e extremo livre, para a abscissa  $x = \ell$ .

**Figura 1.14 – Primeiro caso de vinculação da barra, caracterizado por engaste no início e extremo final livre sem aplicação de carga axial**



Fonte: O Autor (2025)

Desta forma, no início da barra tem-se as seguintes condições de contorno:

- ✚ Deslocamento axial nulo:  $u(x=0) = 0$
- ✚ Rotação nula:  $\phi(x=0) = 0$
- ✚ Empenamento nulo:  $\phi'(x=0) = 0$
- ✚ Inexistência de momento de torção livre, gerando momento de torção equivalente a derivada do bimomento:

$$\mathfrak{M}_\ell(x=0) = 0 \rightarrow \mathfrak{M}_t = \mathfrak{M}_\ell + \mathfrak{M}_{ft} \rightarrow \mathfrak{M}_t(x=0) = -B'(x=0)$$

E no extremo livre postula-se:

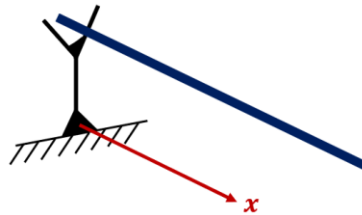
- ✚ Bimomento nulo, em decorrência da nulidade de carga axial no extremo final:

$$P = 0 \rightarrow \sigma_x = \frac{-P}{A} = 0 \quad \therefore \quad 0 \equiv \sigma_x = \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega_{pc} \rightarrow B(x=l) = 0$$

#### **d.5.2) 2º Caso: Vínculo de garfo**

Agora, na Figura 1.15 é apresentado o apoio de garfo, cuja principal função é permitir o empenamento da barra (deslocamentos axiais), porém trava à rotação  $\phi$  em relação ao eixo.

**Figura 1.15 – Desenho esquemático do apoio de garfo**



Fonte: O Autor (2025)

Admitindo-se ainda a não existência de bimomento no ponto de apoio conferido pelo garfo, tem-se as duas condições de contorno:

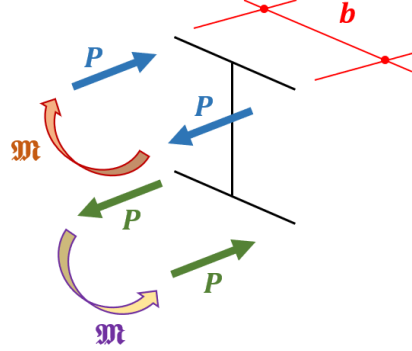
- ✚ Rotação nula:  $\phi = 0$
- ✚ Derivada segunda da rotação como nula:

$$B = E \cdot I_\omega \cdot \phi'' \rightarrow \phi'' = 0$$

#### **d.5.3) 3º Caso: Extremidade livre com aplicação de carga concentradas nas paredes finas**

Na Figura 1.16 é apresentada a atuação de cargas axiais concentradas nas paredes finas de uma seção em formato de núcleo duplo T.

**Figura 1.16 – Configuração de aplicação de cargas axiais centradas na seção de paredes finas em duplo T, a fim de produzir bimomento de convenção positiva**



Fonte: O Autor (2025)

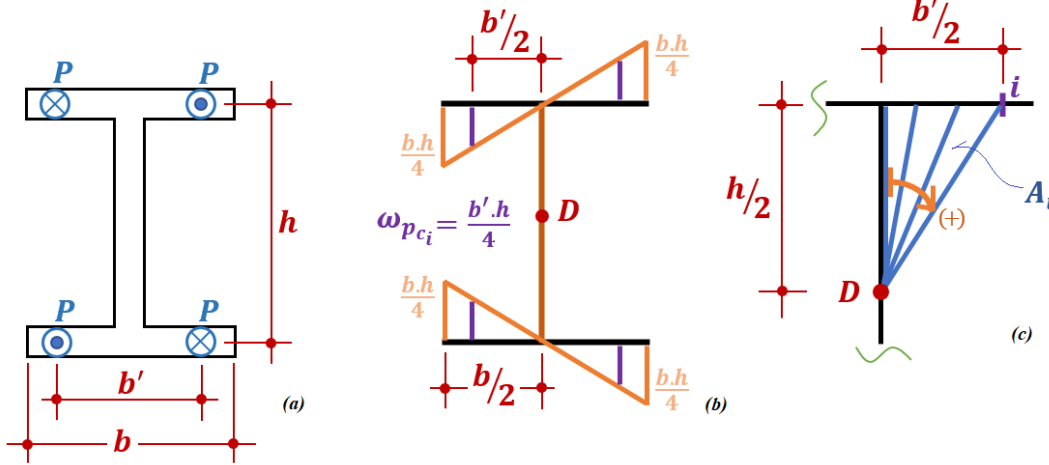
Cuja quantificação do bimomento na seção é procedida via:

$$B = \sum_{i=1}^n B_i \rightarrow B_i = \int_{A_i} \sigma_{x_i} \cdot \omega_{pc_i} dA_i \equiv \int_{A_i} \frac{P_i}{A_i} \cdot \omega_{pc_i} dA_i$$

logo com o devido equacionamento:  $B = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{P_i}{A_i} \cdot \omega_{pc_i} \cdot \int_{A_i} dA_i \right\} \therefore B = \sum_{i=1}^n \{P_i \cdot \omega_{pc_i}\}$

De onde pode-se sintetizar o traçado do diagrama de ordenadas de áreas setoriais  $\omega_{pc}$ , cujo raio de varredura é o próprio *Centro de Torção D*. Vide Figura 1.17.

**Figura 1.17 – Diagrama de Ordenadas de Áreas Setoriais Principais  $\omega_{pc}$ : (a) notação vetorial das cargas, (b) diagrama propriamente dito e (c) sentido positivo de varredura com centro D**



Fonte: O Autor (2025)

Ficando definido  $\omega_{pc_i}$  como as ordenadas (valores) da área setorial no ponto de aplicação da *i*-ésima carga concentrada axialmente. O que neste caso concreto será:

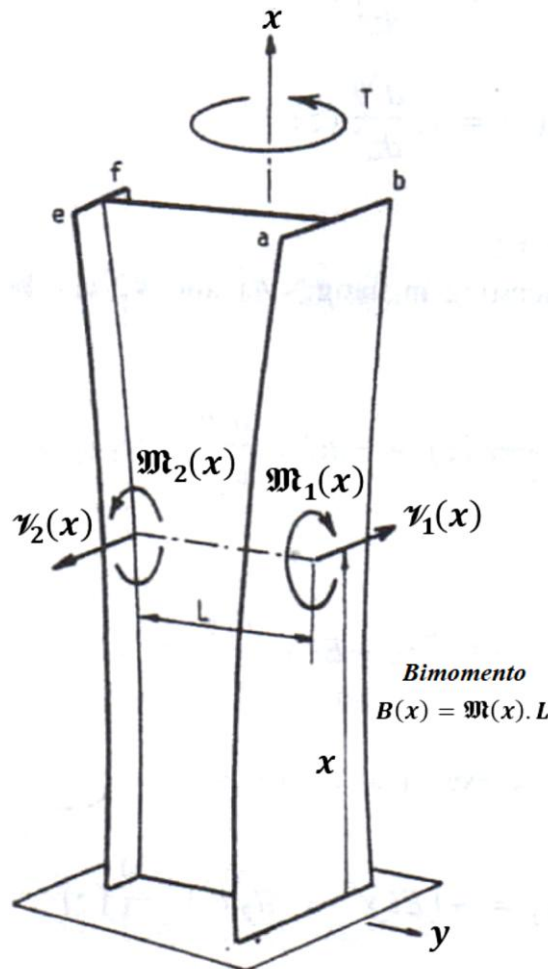
$$dA_i = \frac{d\omega_{pc_i}}{2} \therefore \omega_{pc_i} = 2 \cdot A_i \rightarrow \omega_{pc_i} = 2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{b'}{2} \cdot \frac{h}{2} \right) \right\} \rightarrow \omega_{pc_i} = \frac{b' \cdot h}{4}$$

**Definição de Bimomento:** São os dois momentos fletores evidenciados na Figura 1.16 e que atuam nas duas mesas (aba superior e aba inferior), cujos módulos são iguais e diferem

apenas pelo sentido, sendo um contrário ao outro. Esta definição pode ser encontrada em Vlassov (1962, p. 32 – 33).

Tal conceito pode ser visto também em Smith e Coull (1991, p. 311 e 314), com o entendimento de que o *Bimomento* é o fenômeno de associação de flexão plana das abas paralelas de um núcleo, de modo que a flexão seja de igual intensidade, mas opostas entre si. Ver Figura 1.18.

**Figura 1.18 – Representação dos dois momentos associados que caracterizam o fenômeno de Bimomento em núcleos estruturais**

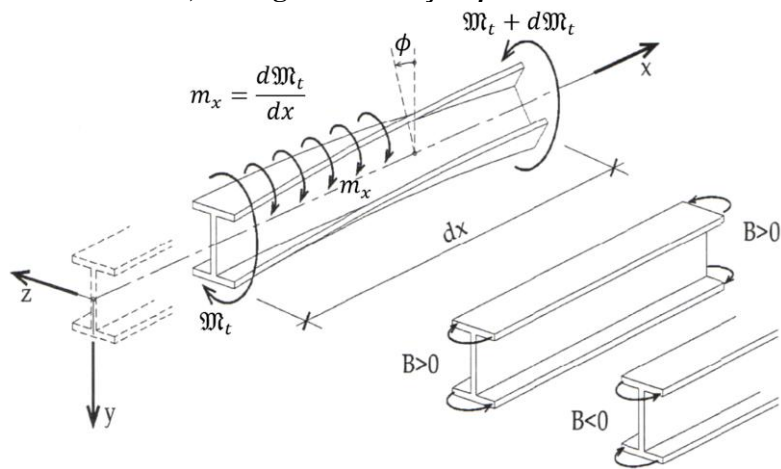


Fonte: Adaptado de (Smith; Coull, 1991)

#### d.6) Convenção de sinais

Tal conceito pode ser visto também em Smith e Coull (1991, p. 311 e 314), com o entendimento de que o *Bimomento* é o fenômeno de associação de flexão plana das abas paralelas de um núcleo, de modo que a flexão seja de igual intensidade, mas opostas entre si. Ver Figura 1.19.

**Figura 1.19 – Convenção positiva para os momentos de torção, uniforme  $m$  e concentrado  $\mathfrak{M}_t$ , bem como, do ângulo de rotação  $\phi$  e do bimomento  $B$**

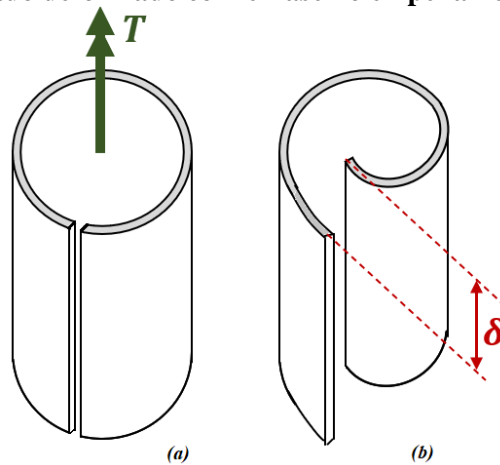


Fonte: Adaptado de (Mori; Munaiar Neto, 2017)

#### e) Definição de Empenamento

**Definição de Empenamento:** É o deslocamento relativo entre os pontos alinhados de uma seção transversal aberta, quando está submetida a um momento de torção. Esta deformação é decorrente da rotação elástica  $\phi$  da seção de paredes finas. Ver Figura 1.20.

**Figura 1.20 – Empenamento de uma seção circular de paredes finas aberta: (a) estado de carregamento e (b) estado deformado com ênfase no empenamento da seção transversal**



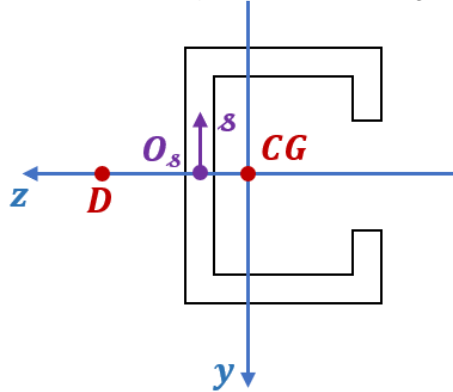
Fonte: O Autor (2025)

#### f) Exemplo de Aplicação

*EXTRAÍDO & ORGANIZADO a partir de (BARBOSA, 1978).* Nesta seção, discutiremos a análise unidimensional do pilar de paredes finas em formato de núcleo estrutural C, cuja geometria e indicação dos eixos é ilustrado na Figura 1.21. Desta forma, pede-se:

- Escrever a Solução Geral da EDO da Flexo-Torção;
- Determinar os coeficientes da Solução Geral; e
- Expressar a rotação da seção em função do eixo longitudinal do pilar, logo, escrever  $\phi(x)$ .

**Figura 1.21: Geometria, eixos e centro geométricos da seção do pilar de paredes finas**



Fonte: O Autor (2025)

### SOLUÇÃO:

a) Inicialmente partindo da EDO expressa na equação (13), procede-se:

A solução da letra “a” é processada em quatro etapas, quais sejam:

➤ **1ª Etapa:** Reajuste da EDO.

$$G \cdot I_t \cdot \phi_x'' - E \cdot I_\omega \cdot \phi_x'''' = m_x \quad (\text{eq. 1.18})$$

Agora simplificando a EDO com a divisão da equação (1.18) pela rigidez ao empenamento da seção, além de multiplicá-la por  $(-1)$  para que o termo de maior ordem de derivação seja positivo, reescreve-se:

$$\phi_x'''' - r^2 \cdot \phi_x'' = \frac{-1}{E \cdot I_\omega} \cdot m_x \quad (\text{eq. 1.19})$$

$$\text{lembrando que: } r^2 = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}} \equiv \sqrt{\frac{\frac{E}{2 \cdot (1 - \nu)} \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}} \equiv \sqrt{\frac{1}{2 \cdot (1 - \nu)} \cdot \frac{I_t}{I_\omega}}$$

bem como, que  $m_x$  - é o momento de torção distribuído uniformemente na altura do pilar.

➤ **2ª Etapa:** Solução Homogênea.



Equação característica:

$$\phi_h'''' - r^2 \cdot \phi_h'' = 0$$

sendo adotada como solução:  $\phi_h = e^{\lambda x}$ ;

$$\phi_h'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x};$$

$$\phi_h'''' = \lambda^4 \cdot e^{\lambda x}$$

$$\therefore \lambda^4 \cdot e^{\lambda x} - r^2 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \therefore e^{\lambda x} \cdot \{\lambda^2 \cdot (\lambda^2 - r^2)\} &= 0 \\
 \nearrow e^{\lambda x} &= 0 \quad \text{"Solução Trivial"} \\
 \nearrow \lambda^2 &= 0 \quad \nearrow \lambda_1 = 0 \\
 \searrow \lambda^2 - r^2 &= 0 \quad \searrow \lambda_2 = 0 \\
 \searrow \lambda^2 - r^2 &= 0 \quad \nearrow \lambda_3 = r \\
 &\quad \searrow \lambda_4 = -r
 \end{aligned}$$

**Observação:** sabe-se que as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  geram os termos  $(C_1)$  e  $(C_2 \cdot x)$ , bem como, a raiz  $\lambda_3$  gera o termo  $(C_3 \cdot e^{r \cdot x})$  e a raiz  $\lambda_4$  conduz ao termo  $(C_4 \cdot e^{-r \cdot x})$ .

✚ Solução por combinação linear:

$$\phi_h(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot e^{r \cdot x} + C_4 \cdot e^{-r \cdot x}$$

$$\text{ou ainda: } \phi_h(x) = C_1 + C_2 \cdot x + \bar{C}_3 \cdot \cosh(r \cdot x) + \bar{C}_4 \cdot \sinh(r \cdot x) \quad (\text{eq. 1.20 a})$$

sendo:  $\bar{C}_3 = C_3 + C_4$ ; e

$$\bar{C}_4 = C_3 - C_4.$$

➤ **3ª Etapa:** Solução Particular.

Observa-se que o termo particular da EDO, ver equação (1.19), é a constante  $m_x$ , logo a solução particular pode ser proposta de modo que a derivada pré-multiplicada pela unidade seja uma constante (mesma natureza do termo particular). Neste caso, adotando-se a derivada segunda constante:

$$\phi_p''(x) = k \quad (\text{eq. 1.20 b})$$

cuja derivada quarta é nula. Assim:  $\phi_p''''(x) = 0$ . Do que ao substituir na EDO apresentada na equação (1.19), quantifica-se a constante  $k$ , como:

$$\begin{aligned}
 \phi_{x_p}'''' - r^2 \cdot \phi_{x_p}'' &= \frac{-1}{E \cdot I_\omega} \cdot m_x \\
 0 - r^2 \cdot k &= \frac{-1}{E \cdot I_\omega} \cdot m_x \\
 k &= \frac{m_x}{r^2 \cdot E \cdot I_\omega}
 \end{aligned}$$

✚ Por fim, a escrita da solução particular  $\phi_p(x)$  será procedida pela dupla integração da equação (20 b), ficando:

$$\begin{aligned}
 \phi_{x_p}(x) &= \int \left\{ \int k \, dx \right\} dx \equiv \int \left\{ \int \frac{m_x}{r^2 \cdot E \cdot I_\omega} \, dx \right\} dx \\
 &\equiv \frac{m_0}{r^2 \cdot E \cdot I_\omega} \cdot \left[ \int \left\{ \int dx \right\} dx \right] \equiv \frac{m_0 \cdot x^2}{2 \cdot r^2 \cdot E \cdot I_\omega}
 \end{aligned}$$

ressalvando que o momento de torção  $m_x$  assume função constante na altura e foi representado na dissertação analisada como:  $m_x \equiv m_0$ .

➤ **4ª Etapa:** Solução Geral, como soma das soluções homogênea e particular.

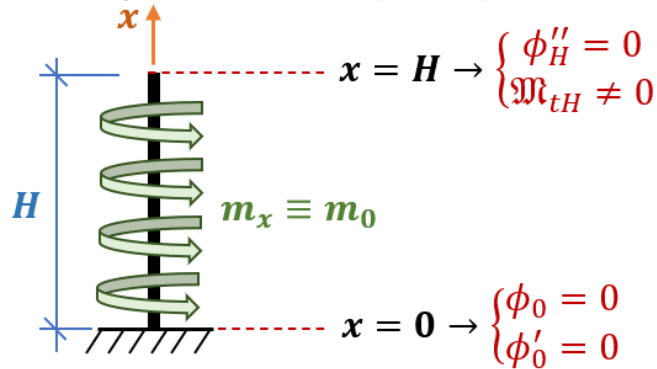
$$\phi(x) = \phi_h(x) + \phi_p(x)$$

$$\therefore \phi(x) = C_1 + C_2 \cdot x + \bar{C}_3 \cdot \cosh(r \cdot x) + \bar{C}_4 \cdot \sinh(r \cdot x) + \frac{m_0 \cdot x^2}{2 \cdot r^2 \cdot E \cdot I_\omega} \quad (\text{eq. 1.21})$$

b) A determinação dos coeficientes presentes na equação (1.21) será procedida via aplicação das condições de contorno

Na Figura 1.22 é apresentado o pilar analisado e evidenciadas as condições de contorno e a atuação do momento de torção distribuído.

**Figura 1.22: Condições de contorno do pilar de paredes finas analisado**



Fonte: O Autor (2025)

Antes de aplicar as condições de contorno, é importante derivar a função  $\phi(x)$ , até a ordem que for necessária, assim:

$$\phi(x) = C_1 + C_2 \cdot x + \bar{C}_3 \cdot \cosh(r \cdot x) + \bar{C}_4 \cdot \sinh(r \cdot x) + \frac{m_0 \cdot x^2}{2 \cdot r^2 \cdot E \cdot I_\omega}$$

$$\phi'(x) = C_2 + \bar{C}_3 \cdot r \cdot \sinh(r \cdot x) + \bar{C}_4 \cdot r \cdot \cosh(r \cdot x) + \frac{m_0 \cdot x}{r^2 \cdot E \cdot I_\omega}$$

$$\phi''(x) = \bar{C}_3 \cdot r^2 \cdot \cosh(r \cdot x) + \bar{C}_4 \cdot r^2 \cdot \sinh(r \cdot x) + \frac{m_0}{r^2 \cdot E \cdot I_\omega}$$

$$\phi'''(x) = \bar{C}_3 \cdot r^3 \cdot \sinh(r \cdot x) + \bar{C}_4 \cdot r^3 \cdot \cosh(r \cdot x)$$

Agora, aplicando-se de fato as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \overset{1}{\Leftrightarrow} \quad \phi'(x=0) \equiv \phi'_0 = 0 \quad \therefore \quad C_2 + \bar{C}_3 \cdot r \cdot \sinh(\mathbf{0}) + \bar{C}_4 \cdot r \cdot \cosh(\mathbf{0}) + \frac{m_0 \cdot \mathbf{0}}{r^2 \cdot E \cdot I_\omega} &= 0 \\ \therefore \quad C_2 + \bar{C}_4 \cdot r &= 0 \quad (\text{eq. 1.22 a}) \end{aligned}$$

$$\overset{2}{\Leftrightarrow} \quad \phi(x=0) \equiv \phi_0 = 0 \quad \therefore \quad C_1 + C_2 \cdot x + \bar{C}_3 \cdot \cosh(\mathbf{0}) + \bar{C}_4 \cdot \sinh(\mathbf{0}) + \frac{m_0 \cdot \mathbf{0}^2}{2 \cdot r^2 \cdot E \cdot I_\omega} = 0$$

$$\therefore \quad C_1 + \bar{C}_3 = 0 \quad (\text{eq. 1.22 b})$$

$$\begin{matrix} 3 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \phi''(x = H) \equiv \phi_H'' = 0 \quad \therefore \quad \bar{C}_3 \cdot r^2 \cdot \cosh(r \cdot H) + \bar{C}_4 \cdot r^2 \cdot \sinh(r \cdot H) + \frac{m_0}{r^2 \cdot E \cdot I_\omega} = 0$$

Para facilitar a notação pode-se recorrer à:  $C_H = \cosh(r \cdot H)$  e  $S_H = \sinh(r \cdot H)$ , escrevendo-se:

$$\therefore \quad \bar{C}_3 \cdot r^2 \cdot C_H + \bar{C}_4 \cdot r^2 \cdot S_H + \frac{m_0}{r^2 \cdot E \cdot I_\omega} = 0 \quad (\text{eq. 1.22 c})$$

$$\begin{matrix} 4 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad -\mathfrak{M}_t(x = H) \equiv -\mathfrak{M}_{t_H} = G \cdot I_t \cdot \phi'(x = H) - E \cdot I_\omega \cdot \phi'''(x = H)$$

$$\therefore \quad -\mathfrak{M}_{t_H} = G \cdot I_t \cdot \left\{ C_2 + \bar{C}_3 \cdot r \cdot S_H + \bar{C}_4 \cdot r \cdot C_H + \frac{m_0 \cdot H}{r^2 \cdot E \cdot I_\omega} \right\}$$

$$- E \cdot I_\omega \cdot \{ \bar{C}_3 \cdot r^3 \cdot S_H + \bar{C}_4 \cdot r^3 \cdot C_H \} \quad (\text{eq. 1.22 d})$$

✚ Resolvendo o sistema de equações algébricas advindo das equações (1.22 a) a (1.22 d), tem-se os coeficientes escritos como:

$$C_1 = \frac{1}{r^4 \cdot E \cdot I_\omega \cdot C_H} \cdot \{ m_0 \cdot (r \cdot H \cdot S_H + 1) + \mathfrak{M}_{t_H} \cdot r \cdot S_H \} \quad (\text{eq. 1.23 a})$$

$$C_2 = - \frac{\mathfrak{M}_{t_H} + m_0 \cdot H}{r^2 \cdot E \cdot I_\omega} \quad (\text{eq. 1.23 b})$$

$$\bar{C}_3 = \frac{1}{r^4 \cdot E \cdot I_\omega \cdot C_H} \cdot \{ -m_0 \cdot (r \cdot H \cdot S_H + 1) - \mathfrak{M}_{t_H} \cdot r \cdot S_H \} \quad (\text{eq. 1.23 c})$$

$$\bar{C}_4 = \frac{\mathfrak{M}_{t_H} + m_0 \cdot H}{r^3 \cdot E \cdot I_\omega} \quad (\text{eq. 1.23 d})$$

### c) Expressão da rotação da seção transversal

Após inserir as equações (1.23) na equação (1.21), escreve-se a expressão da rotação  $\phi(x)$  da seção transversal, como:

$$\begin{aligned} \phi(x) = & - \frac{m_0 \cdot H^4}{E \cdot I_\omega \cdot (r \cdot H)^4} \cdot \left\{ \frac{(r \cdot H \cdot S_H + 1)}{C_H} \cdot [\cosh(r \cdot x) - 1] - r \cdot H \cdot \sinh(r \cdot x) + \right. \\ & \left. + (r \cdot H)^2 \cdot \left[ \frac{x}{H} - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{x}{H} \right)^2 \right] \right\} + \\ & - \frac{\mathfrak{M}_{t_H} \cdot H^3}{E \cdot I_\omega \cdot (r \cdot H)^3} \cdot \{ tg(r \cdot H) \cdot [\cosh(r \cdot x) - 1] - \sinh(r \cdot x) + r \cdot x \} \quad (\text{eq. 1.24}) \end{aligned}$$

E aproveita-se o ensejo para evidenciar a equação de variação do empenamento  $\phi'(x)$  ao longo do eixo longitudinal  $x$  do pilar, por:

$$\begin{aligned} \phi'(x) = & - \frac{m_0 \cdot H^3}{E \cdot I_\omega \cdot (r \cdot H)^3} \cdot \left\{ \frac{(r \cdot H \cdot S_H + 1)}{C_H} \cdot \sinh(r \cdot x) - r \cdot H \cdot \cosh(r \cdot x) + r \cdot H \cdot \left[ 1 - \frac{x}{H} \right] \right\} \\ & - \frac{\mathfrak{M}_{t_H} \cdot H^2}{E \cdot I_\omega \cdot (r \cdot H)^2} \cdot \{ tg(r \cdot H) \cdot \sinh(r \cdot x) - \cosh(r \cdot x) + 1 \} \quad (\text{eq. 1.25}) \end{aligned}$$

## 1.2

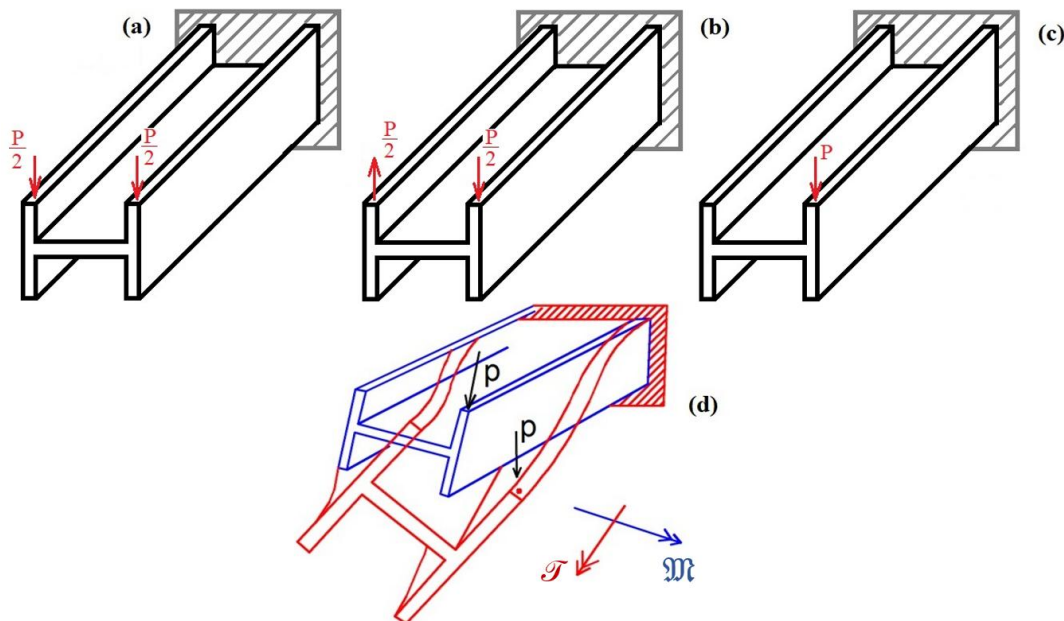
## LOCALIZAÇÃO DO CENTRO DE TORÇÃO PARA SEÇÃO DE PAREDES FINAS

## a) Hipóteses básicas

Na busca de estruturas que é a lei em segurança e economia é que se projeta elementos com seção transversal formada por chapas metálicas, também denominadas de Barras com seção delgada, estes com paredes cada vez mais finas, potencializando o efeito da flexo-torção. *É importante ressaltar que a imposição de paredes finas em pilares altos de pontes é realizada a fim de viabilizá-lo economicamente, em termos custo de material empregado.*

Conforme explicitado por Vlassov (1962), quando há aplicação de cargas não simétricas em seções de paredes finas, são gerados esforços combinados de flexão e de torção, ficando assim caracterizada a flexo-torção. Vide Figura 1.23.

**Figura 1.23 – Núcleo duplo T (paredes finas) submetido à: (a) flexão simples, (b) torção pura, (c) flexo – torção e (d) estado deformado da flexo – torção**



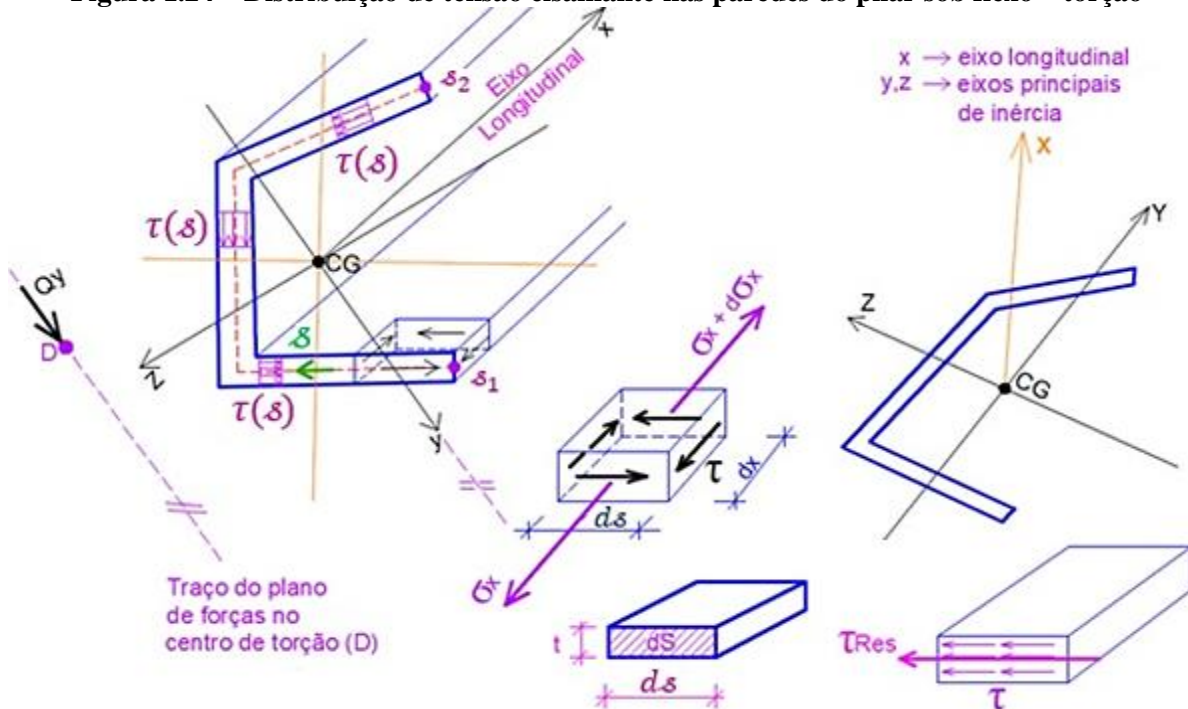
Fonte: Adaptado de (Melo, 2019)

A análise da seção de paredes finas é postulada por Vlassov (1962) e segue as seguintes hipóteses:

- A barra é delgada aberta se a espessura  $t$  for desprezível em detrimento da dimensão  $d$  da parede. Além da irrelevância de  $d$  baseado com o comprimento  $\ell$ . A relação máxima admitida é de um décimo  $\left(\frac{t}{d} \leq 0,1\right)$  e  $\left(\frac{d}{\ell} \leq 0,1\right)$ , conforme indicações na Figura 1.9.

- b) A seção transversal é projetada de modo indeformado (deslocamento de corpo rígido), quando da ação de flexo-torção. Assim, não se verifica distorção e segue o padrão apresentado na Figura 1.12.
- c) O eixo esqueleto  $s$  é definido sobre o eixo das paredes finas componentes da seção em núcleo. Na Figura 1.24 é ilustrada a distribuição de tensões cisalhantes como constante, ao longo do eixo  $s$ , sendo mais realística quanto mais delgada for a parede. Ademais, na citada figura constam: o posicionamento dos centros de gravidade (CG) e de Torção (D), além do Estado Plano de Tensões (EPT), todos da parede fina.

**Figura 1.24 – Distribuição de tensão cisalhante nas paredes do pilar sob flexo – torção**



Fonte: (Melo, 2019)

Para uma seção aberta define-se, como referência, o eixo tracejado situado no centro da espessura  $t$  da seção delgada, de comprimento  $s_1 - s_2$  e representado pela letra  $s$ .

Ao analisar as tensões de cisalhamento, representadas na figura 4, são regidas por:

$$\tau = \frac{Q \cdot M_s}{b \cdot I} \equiv \frac{\mathcal{V} \cdot M_s}{b \cdot I}$$

sendo:  $M_s$  – momento estático de área;

$\mathcal{V} \equiv Q$  – esforço cortante;

$b$  – base; e

$I$  – momento de inércia.

Para espessuras pequenas, adota-se a distribuição das tensões de cisalhamento  $\tau$  ao longo do esqueleto  $s$ , como constante. Quanto mais fina forem as paredes, mais realística ficará esta afirmação.

**Definição de Centro de Torção:** Na posição arbitrária aplicam-se forças transversais, surgindo a ação conjunta da flexão e da torção. Desta forma, define-se como centro de torção  $D$ , ao ponto do plano da seção transversal pelo qual deve passar o plano de aplicação de cargas transversais, de modo que não ocorra a torção e apenas sejam ativados os efeitos da flexão.

## b) Condições para o posicionamento do Centro de Torção

Admitindo-se carregamento  $Q_y$  paralelo ao eixo principal de inércia  $y$  da seção transversal aplicada num ponto  $D$ , a fim de não gerar torção, escreve-se o momento estático de área, como:

$$\begin{cases} Q = Q_y \\ I = I_z \end{cases} \rightarrow M_s = \int_{s_1}^{s_2} y dS \equiv \int_{s_1}^{s_2} y \cdot t ds$$

onde:  $dS$  – área do elemento diferencial;

$ds$  – comprimento do elemento diferencial, na seção transversal;

$t$  – espessura da parede fina; e

$y$  – distância do centro do elemento diferencial até o eixo  $z$  centroidal principal de inércia.

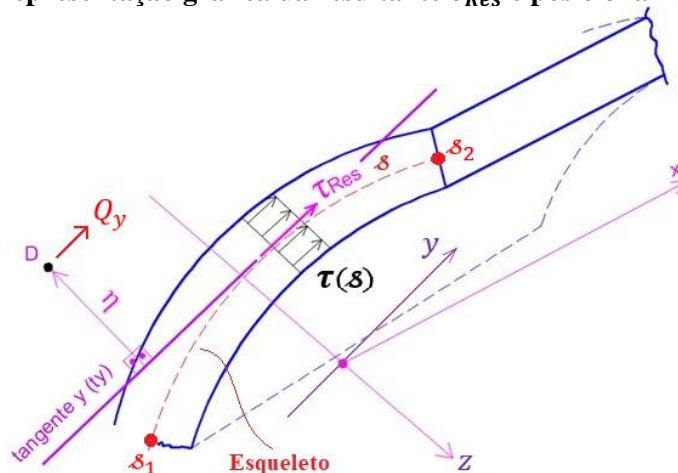
Ficando: 
$$dS = t \cdot ds$$

Para que não haja torção, a soma (integral) de toda a tensão cisalhante deve ser igual a força  $Q_y$  aplicada no centro de torção  $D$ , a resultante cisalhamento será expressa por:

$$\tau_{Res} = \tau \cdot dS$$

Calculando o momento gerado pela tensão cisalhante  $\tau$  em relação ao ponto  $D$ , definindo-se  $\eta$  com a distância perpendicular ao eixo de atuação da resultante  $\tau_{Res}$  até o ponto  $D$ , conforme ilustrado na Figura 1.25.

**Figura 1.25 – Representação gráfica da resultante  $\tau_{Res}$  e posicionamento relativo à  $D$**



Fonte: (Melo, 2019)

Cujo equilíbrio de momento no centro de torção é expresso por:

$$\sum M_D = 0 \quad \rightarrow \quad \int_S \tau(s) \cdot \eta \, dS = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{s_1}^{s_2} \tau(s) \cdot \eta \cdot t \, ds = 0$$

A espessura  $t$  como base da seção transversal e tida como constante, logo ficará por fora da integral ao longo do eixo esqueleto  $s$ , bem como, aplicando-se a tensão cisalhante  $\tau(s)$  em termos da carga  $Q_y$  e o momento estático  $M_s$ , ficando reescrita:

$$t \cdot \int_{s_1}^{s_2} \frac{Q_y \cdot M_s}{t \cdot I_z} \cdot \eta \, ds = 0$$

sendo:  $Q_y$  e  $I_z$  termos constantes ao longo do eixo esqueleto.

Aplicando-se a definição de momento estático  $M_s$ , tem-se:

$$\frac{Q_y}{I_z} \cdot \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \int_{s_1}^s y \, dS \right\} \eta \, ds = 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{Q_y}{I_z}}_{\text{Parcela 1}} \cdot \underbrace{\int_{s_1}^{s_2} \left\{ \int_{s_1}^s y \cdot t \, ds \right\} \eta \, ds}_{\text{Parcela 2}} = 0$$

Como a parcela 1 é para qualquer sessão diferente de zero, caso contrário não existiria tal seção. Resta a nulidade da parcela 2 para que a equação (*equilíbrio de momentos*) seja válida. Assim, escreve-se:

$$\int_{s_1}^{s_2} \underbrace{\left\{ \int_{s_1}^s y \cdot t \, ds \right\}}_u \cdot \underbrace{\eta \, ds}_v = 0$$

Realizando integração por partes  $\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$ , conclui-se:

$$\begin{aligned} u &= \int_{s_1}^s y \cdot t \, ds \quad \rightarrow \quad du = d \int_{s_1}^s y \cdot t \, ds \quad \rightarrow \quad du = y \cdot t \cdot ds \\ dv &= \eta \, ds \quad \rightarrow \quad v = \int ds \quad \rightarrow \quad v = \int_{s_1}^s \eta \, ds \\ \therefore \left[ \left\{ \int_{s_1}^s (y \cdot t) \, ds \right\} \cdot \left\{ \int_{s_1}^s \eta \, ds \right\} \right]_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} \left[ \left\{ \int_{s_1}^s \eta \, ds \right\} \cdot \{(y \cdot t) \cdot ds\} \right] ds &= 0 \end{aligned}$$

Por definição, o momento estático de área  $M_s$  é nulo, concluindo-se a seguinte igualdade:

$$M_s = \int_S y \, dS = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{s_1}^s (y \cdot t) \, ds = 0$$

Resultando em:

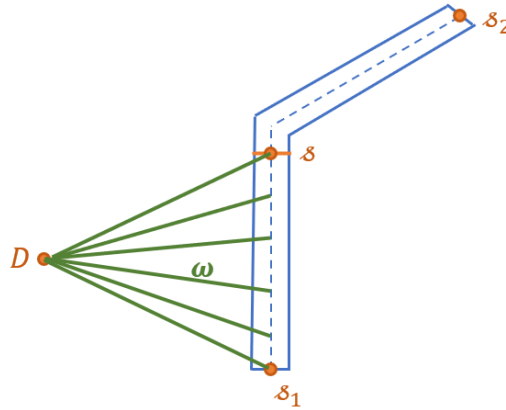
$$- \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \int_{s_1}^s \eta \, ds \right\} \cdot y \cdot t \, ds = 0 \quad (eq. 1.26)$$

Define-se como propriedade geométrica desta(das) seções de paredes finas, a área setorial  $\omega$ , como:

$$\omega = \int_{s_1}^s \eta \, ds \quad (eq. 1.27)$$

**Definição da Área Setorial ( $\omega$ ):** É uma propriedade geométrica definida por Vlassov (1962), conforme a ilustração na Figura 1.26.

**Figura 1.26 – Indicação da área setorial no segmento da parede fina**



Fonte: O Autor (2025)

Desta forma, o equilíbrio apresentado na equação (1.26) fica reescrito pela imposição da equação (1.27), na seguinte forma:

$$- \int_{s_1}^{s_2} \omega \cdot y \cdot t \, ds = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{s_1}^{s_2} \omega \cdot y \, dS = 0 \quad (eq. 1.28)$$

ou simplesmente, o *Lugar Geométrico* do Centro de Torção é caracterizado por:

$$\int_S \omega \cdot y \, dS = 0 \quad (eq. 1.29)$$

A condições de caracterização do lugar geométrico no eixo  $z$  é apresentado na equação (1.29), com a aplicação de  $Q_y$ , no centro de torção. Porém, ao aplicar  $Q_z$  em  $D$  e proceder o equacionamento analogamente, definem-se as condições para definir o posicionamento Centro de Torção  $D$ , como:

$$\boxed{\int_S \omega \cdot y \, dS = 0} \quad ; \quad \boxed{\int_S \omega \cdot z \, dS = 0} \quad \text{CONDIÇÃO (I)}$$

Analisando a relação entre a área  $A$  do setor e a área setorial  $\omega$ , tem-se:

$$dA = \frac{\eta \cdot ds}{2} \rightarrow \text{Área de Triângulo}$$

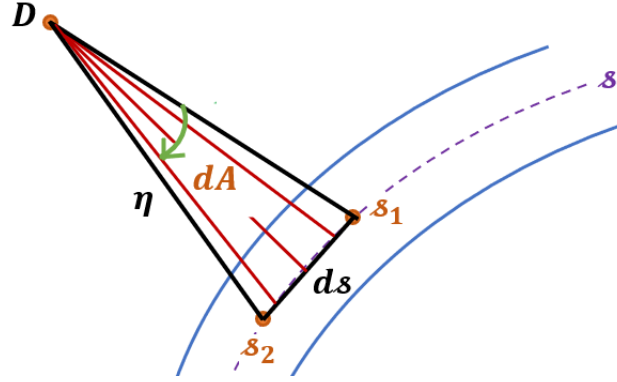
$$d\omega = \eta \cdot ds \rightarrow \text{Área setorial}$$

Agrupando-se, conclui que:

$$dA = \frac{d\omega}{2} \quad (eq. 1.30)$$

**Observação:** Da análise da equação (1.30) percebe-se que a área geométrica  $A$  será igual a metade da área setorial  $\omega$ . Conforme ilustrado na Figura 1.27, onde o sentido horário é positivo.

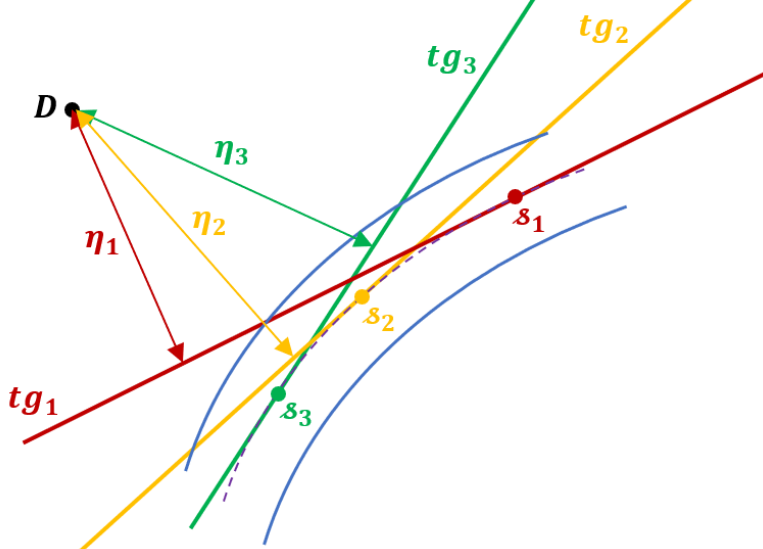
**Figura 1.27 – Indicação da área do setor definida entre os extremos do eixo esqueleto, por trecho**



Fonte: O Autor (2025)

Observa-se ainda que a área setorial  $\omega$  depende da integral, do raio vetor  $\eta$ , ao longo do eixo esqueleto  $s$ . Sabendo que: para raio  $\eta$  constante tem-se  $\omega$  linear, já para raio  $\eta$  de grau  $n$  caracteriza-se a área setorial  $\omega$  como função de grau  $(n + 1)$ . Por fim, o raio  $\eta$  pode ser inclusive de função complexa em relação ao eixo esqueleto, **logo:**  $\eta = \eta(s)$ . Vide Figura 1.28.

**Figura 1.28 – Indicação da área do setor definida entre os extremos do eixo esqueleto, por trecho**



Fonte: O Autor (2025)

### c) Posicionamento da origem do eixo esqueleto

Verifica-se que a área setorial  $\omega$  independe da posição de início do eixo esqueleto, demonstrando-se tal afirmação ao impor incremento  $k$  e reescrevendo:

$$\bar{\omega} = \omega + k$$

sendo:  $\bar{\omega}$  – a área setorial com origem arbitrariamente escolhida; e

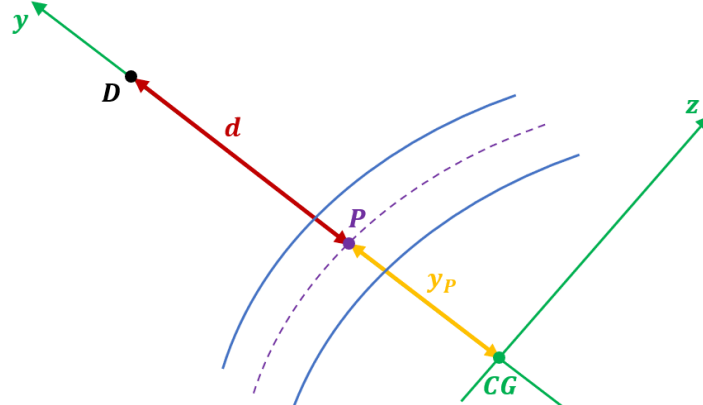
$\omega$  – a área setorial com origem  $O_s$  que satisfaz:

$$\int_S \omega dS = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Verificação: } \int_S \bar{\omega} \cdot y dS &\equiv \int_S (\omega + k) \cdot y dS \equiv \int_S \omega \cdot y dS + \int_S k \cdot y dS \equiv \\ &\equiv \int_S \omega \cdot y dS + k \cdot \underbrace{\int_S y dS}_{M_s = 0} \equiv \int_S \omega \cdot y dS \end{aligned}$$

Por direção de análise, admite-se  $d$  como sendo o posicionamento do centro torção  $D$  em relação ao ponta arbitrário  $P$ , conforme ilustrado na Figura 1.29.

**Figura 1.29 – Distâncias do CG ao ponto genérico  $P$  e ao centro de torção  $D$**



Fonte: O Autor (2025)

$$\text{Faz-se: } \bar{\omega} = \omega + \omega_c \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega = \bar{\omega} - \omega_c}$$

$$\text{sendo: } \int_S \omega dS = 0 \quad \rightarrow \quad \int_S (\bar{\omega} - \omega_c) dS = 0 \quad \rightarrow \quad \int_S \bar{\omega} dS - \omega_c \cdot \underbrace{\int_S dS}_S = 0$$

$$\boxed{\omega_c = \frac{1}{S} \cdot \int_S \bar{\omega} dS}$$

onde:  $S$  – é a área da seção de paredes finas.

$$\text{Notações Possíveis: } \begin{cases} \omega = \bar{\omega} - \omega_c & \rightarrow \text{ Neste material didático} \\ \omega_{pc} = \omega_{DAG} - \omega_c & \rightarrow \text{ Ver (MORI;MUNAIAR NETO, 2017)} \end{cases}$$

e:  $\omega \equiv \omega_{pc}$  – a área setorial principal, determinada quando se conhece a posição de  $D$  e de  $O_s$ ;

$\omega_c$  – a área setorial arbitrária, determinada quando se conhece  $D$  e arbitra-se a origem  $O_s$ ; e

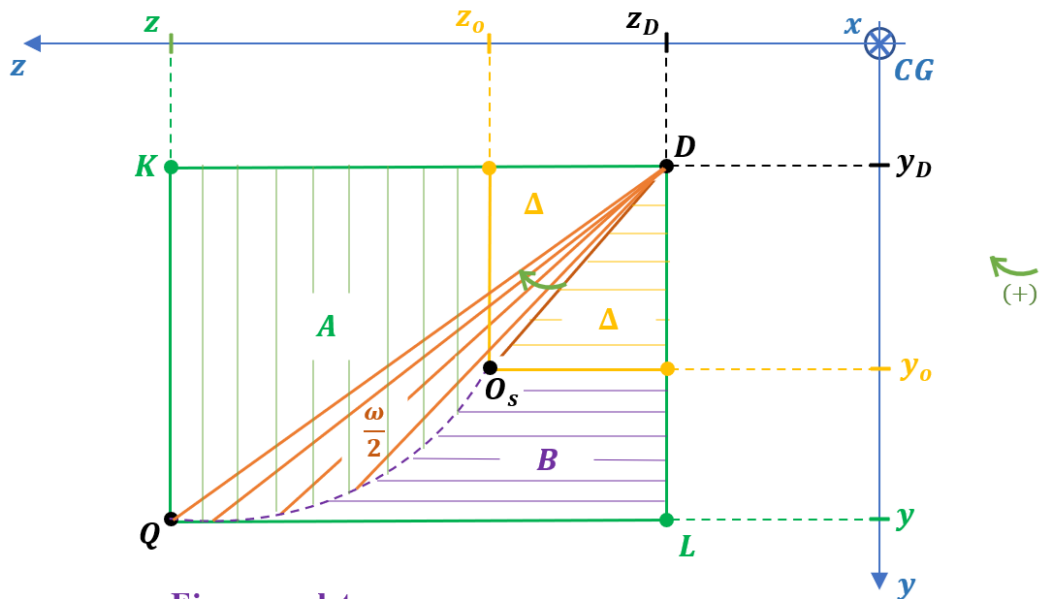
$\bar{\omega} \equiv \omega_{DAG}$  – a área setorial.

#### d) Determinação geométrica do Centro de Torção

##### d.1) Polo admitido no Centro de Torção

Não é possível aplicar de forma direta as **Condições (I)**, pois apresentam complexidade algébrica, desta forma, para não imputar tais dificuldades é que se utiliza uma interpretação geométrica na localização do Centro de Torção. Ver Figura 1.30.

Figura 1.30 – Determinação geométrica do centro de torção via ponto genérico Q



**Legenda:** ----- Eixo esqueleto  $s$

$Q(y, z)$  – Ponto genérico

$D(y_D, z_D)$  – Centro de Torção

Fonte: O Autor (2025)

As áreas delimitadas na Figura 1.30 são expressas por:

- ❖ Triângulo  $MDO_s \equiv NDO_s = \Delta$
- ❖ Polígono  $KMO_sQ = A$

- ❖ Polígono  $LNO_sQ = B$
- ❖ Figura  $QO_sD = \frac{\omega}{2}$ , por definição da área setorial.

resultando nas seguintes áreas:  $DLQ = 2 \cdot \Delta + A + B$  e  $DQL = \frac{\omega}{2} + \Delta + B$

Observação: Como  $\overline{DQ}$  é a diagonal, logo:

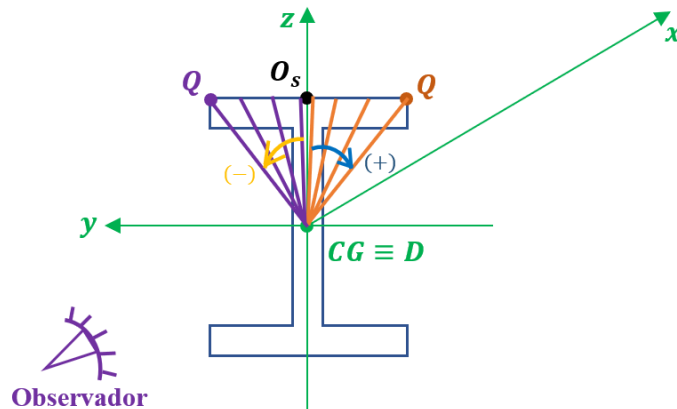
$$\frac{\text{Área } KDLD}{2} = \text{Área } DQL$$

Realizando a soma das áreas, conclui-se:

$$\frac{(2 \cdot \Delta + A + B)}{2} = \left( \frac{\omega}{2} + \Delta + B \right) \quad \therefore \quad \boxed{\omega = A - B}$$

**A convenção positiva de sinais para  $\omega$ :** Adota-se positivo a função  $\omega$  quando o raio vetor  $\eta$ , traçado a partir de  $D$  girar a partir da origem  $O_s$  para um ponto genérico  $Q$ , no sentido horário. Isto para um observador olhando no sentido positivo do eixo longitudinal  $x$ . Vide Figura 1.31.

**Figura 1.31 – Convenção positiva da varredura a partir da origem  $O_s$  em direção ao ponto genérico  $Q$**

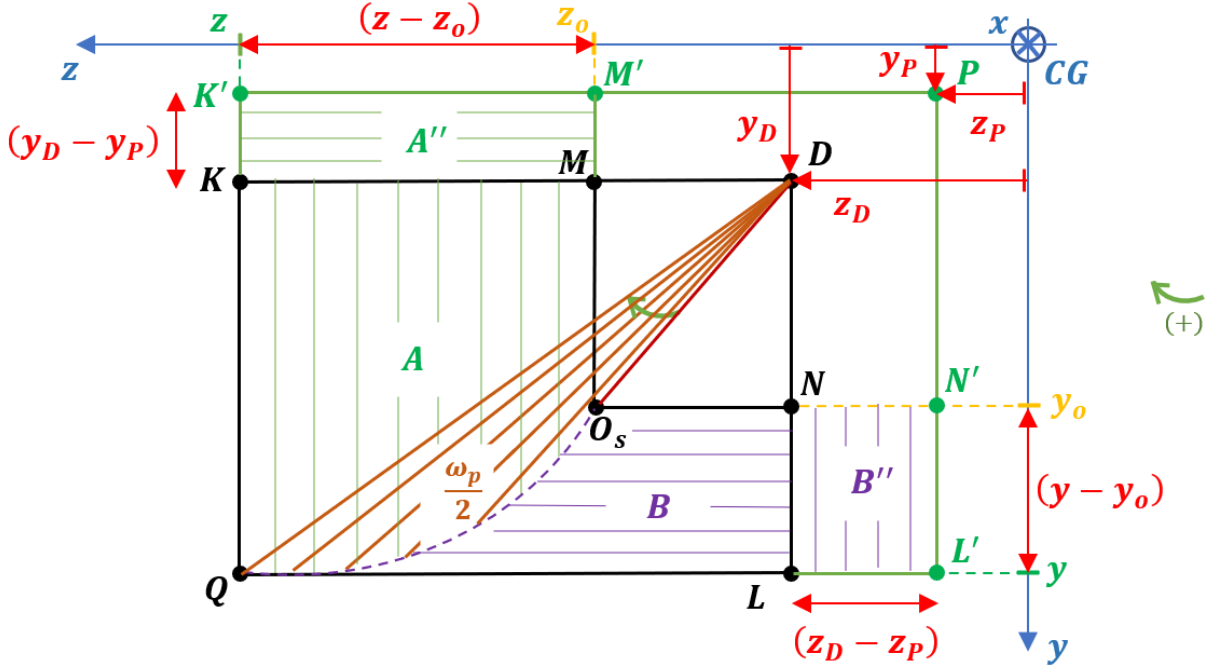


Fonte: O Autor (2025)

#### d.2) Polo em ponto arbitrário

Por fim para determinar as fórmulas procuradas para localizar o centro de torção ( $D$ ), arbitra-se um ponto  $P$ , cuja varredura ocasionará a área setorial com polo provisório e representada por  $\omega_p$ . Conforme ilustrado na Figura 1.32.

**Figura 1.32 – Processo geométrica para posicionar o centro de torção com polo provisório de varredura**



Fonte: Adaptado de (Melo, 2019)

Enquanto que as áreas adicionais, elencadas na Figura 1.32, são expressas por:

$$A'' = (z - z_o) \cdot (y_D - y_P)$$

$$B'' = (y - y_o) \cdot (z_D - z_P)$$

Por analogia ao caso de partir do centro de torção  $D$ , tem-se:

$$\omega = A - B \quad \therefore \quad \boxed{\omega_p = A' - B'}$$

com:  $\begin{cases} A' = A + A'' \\ B' = B + B'' \end{cases}$ , bem como:

$$\begin{aligned} \omega_p = A' - B' &= (A + A'') - (B + B'') = \\ &= [A + (z - z_o) \cdot (y_D - y_P)] - [B + (y - y_o) \cdot (z_D - z_P)] = \end{aligned}$$

aplicando  $\omega = A - B$ , reescreve-se:

$$= \omega + (z - z_o) \cdot (y_D - y_P) - (y - y_o) \cdot (z_D - z_P)$$

además, reorganizando expressa-se a área setorial como:

$$\boxed{\omega = \omega_p + (y - y_o) \cdot (z_D - z_P) - (z - z_o) \cdot (y_D - y_P)} \quad (\text{Condição II})$$

Pelo fato de não se conhecer a localização do centro de torção  $D$  e este ser o objetivo/motivação, de tal estudo, é que agora após a interpretação geométrica de um ponto  $P$  arbitrário, como polo, aplica-se a Condição II na Condição I e daí:

$$\begin{cases} \int_S \omega \cdot y \, dS = 0 \\ \omega = \omega_p + (y - y_0) \cdot (z_D - z_p) - (z - z_0) \cdot (y_D - y_p) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{e: } \omega \cdot y &= [\omega_p + (y - y_0) \cdot (z_D - z_p) - (z - z_0) \cdot (y_D - y_p)] \cdot y = \\ &= \omega_p \cdot y + (y - y_0) \cdot (z_D - z_p) \cdot y - (z - z_0) \cdot (y_D - y_p) \cdot y = \\ &= \omega_p \cdot y + z_D \cdot y^2 - z_p \cdot y^2 - y_0 \cdot z_D \cdot y + y_0 \cdot z_p \cdot y - y_D \cdot z \cdot y + y_p \cdot z \cdot y + z_0 \cdot y_D \cdot y - z_0 \cdot y_p \cdot y \end{aligned}$$

Agora ao fazer a integração, percebe-se que alguns termos serão nulos, por se tratar de momento estático de área e produtos de inércia dos eixos principais de inércia ( $x$  e  $z$ ). Sendo estas nulidades:

<ul style="list-style-type: none"> <li><b><u>Momentos Estáticos:</u></b></li> </ul> $\int_S y \, dS = \int_S z \, dS = 0$	<ul style="list-style-type: none"> <li><b><u>Produto de Inércia:</u></b></li> </ul> $\int_S y \cdot z \, dS = 0$
---	--

Ficando a condição I, combinada com a condição II, reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_S \omega \cdot y \, dS = 0 \quad \therefore \quad \int_S [\omega_p \cdot y + (z_D - z_p) \cdot y^2] \, dS = 0 \quad \therefore \\ \int_S \omega_p \cdot y \, dS + (z_D - z_p) \cdot \underbrace{\int_S y^2 \, dS}_{I_z} = 0 \quad \therefore \quad (z_D - z_p) \cdot I_z = - \int_S \omega_p \cdot y \, dS \\ z_D = z_p - \frac{1}{I_z} \cdot \int_S \omega_p \cdot y \, dS \quad \therefore \quad \boxed{z_D = z_p + d_z} \quad (\text{Condição III}) \end{aligned}$$

Por analogia:

$$y_D = y_p + \frac{1}{I_y} \cdot \int_S \omega_p \cdot z \, dS \quad \therefore \quad \boxed{y_D = y_p + d_y} \quad (\text{Condição III})$$

$$\text{sendo: } d_z = -\frac{1}{I_z} \cdot \int_S (\omega_p \cdot y) \, dS \quad \text{e} \quad d_y = \frac{1}{I_y} \cdot \int_S (\omega_p \cdot z) \, dS.$$

onde:  $d_z$  e  $d_y$  são as distâncias paralelas aos eixos Centroidais  $z_{CG}$  e  $y_{CG}$ , respectivamente. As distâncias são compreendidas entre o centro de torção  $D$  e o polo arbitrário  $P$ . Bem como, elencam-se:  $z_D$  e  $y_D$  são coordenadas do centro de torção  $D$ , logo expresso:

$$D(y_D; z_D)$$

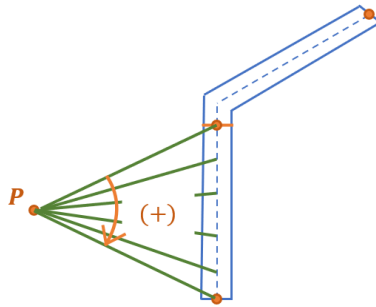
lembrar que se pode representar também o Centro de Torção por  $CT$  ou por  $D$ .

**Observação:**

- ❖ Para varredura no sentido horário, como realizado na dedução matemática, tem-se as condições III para determinar o posicionamento do centro de torção  $D$ , bem como, atrelada a convenção apresentada na Figura 1.33 e o sentido negativo na Figura 1.34, assim:

$$y_D = y_p + \frac{1}{I_y} \cdot \int_S \omega_p \cdot z \, dS$$

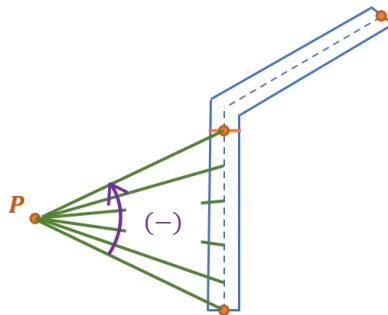
$$z_D = z_p - \frac{1}{I_z} \cdot \int_S \omega_p \cdot y \, dS$$

**Figura 1.33 – Sentido positivo de varredura da área setorial****Fonte: O Autor (2025)**

- ❖ Porém, para a varredura no sentido anti-horário (negativo em convenção), ocorre modificação do sinal na parcela da integral, ficando:

$$y_D = y_p - \frac{1}{I_y} \cdot \int_S \omega_p \cdot z \, dS$$

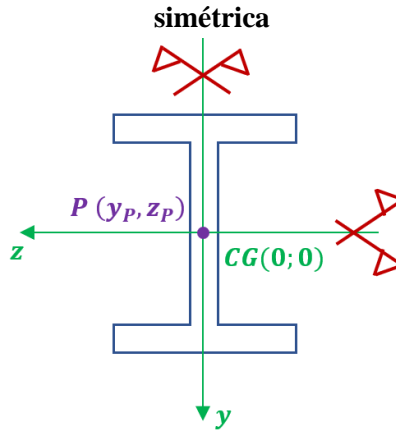
$$z_D = z_p + \frac{1}{I_z} \cdot \int_S \omega_p \cdot y \, dS$$

**Figura 1.34 – Sentido negativo de varredura da área setorial****Fonte: O Autor (2025)**

- ❖ Em caso de eixo de simetria, o(s) referido(s) eixo(s) são/serão lugar(es) geométrico(s) do Centro de Torção. Assim, todo o eixo de simetria contém o  $CT \equiv D$ , pois o(s) momento(s) estático(s) de área  $M_s$  são/serão nulo(s) devido à simetria. Ao posicionar o ponto  $P$  arbitrário sob tal eixo, tem-se  $y_p = 0$  e/ou  $z_p = 0$ , conduzindo a  $y_D$  e/ou  $z_D$  nulo(s).

- ❖ Seção duplamente simétrica, conforme apresentada na Figura 1.35, recorre-se à:

**Figura 1.35 – Posicionamento otimizado do polo provisório P para seções duplamente**



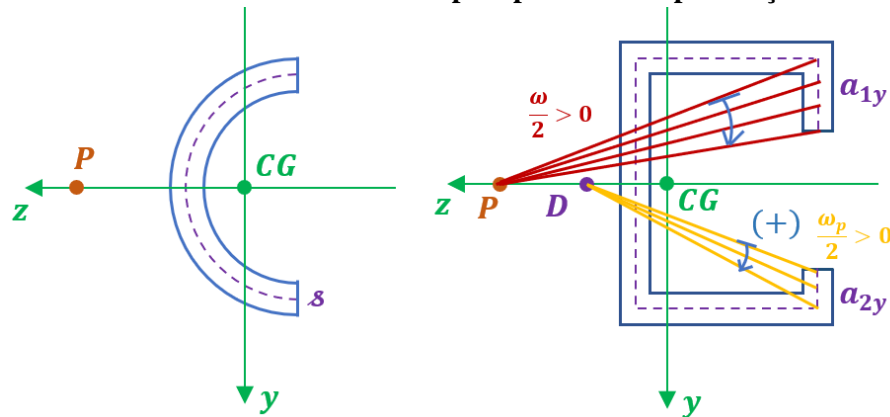
Fonte: O Autor (2025)

$$\int_S y \, dS = 0 \quad ; \quad z_p = 0 \quad \therefore \quad \boxed{z_D = 0}$$

$$\int_S z \, dS = 0 \quad ; \quad y_p = 0 \quad \therefore \quad \boxed{y_D = 0}$$

- ❖ Seção mono simétrica, cuja posição do polo provisório é otimizado ao estar sobre o eixo simétrico, de acordo com a Figura 1.36, zerando a coordenada y do centro de torção, assim:

**Figura 1.36 – Posicionamento otimizado do polo provisório P para seções mono simétrica**



Fonte: Adaptado de (Melo, 2019)

$$\int_S z \, dS = 0 \quad ; \quad y_p = 0 \quad \therefore \quad \boxed{y_D = 0}$$

Do que, para o eixo z sendo de simetria, tem-se:

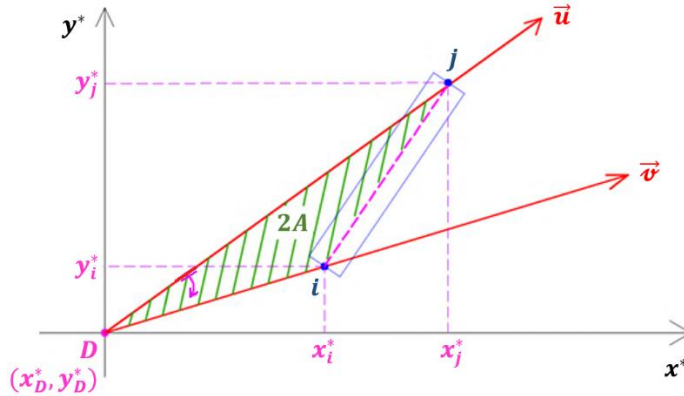
$$y_D = -\frac{y_p}{0} + \frac{\omega_p}{I_y} \cdot \int_S z \, dS$$

0

### d.3) cálculo das Áreas Setoriais

Esta demonstração é destinada à montagem do diagrama de áreas setorial principal  $\omega_{pc}$ , adotando o Centro de Torção  $D$  como polo da varredura, ao longo do trecho da seção da barra, com limites do nó  $i$  ao nó  $j$ . Efetua-se, deste modo, a área mediante cálculo vetorial e parte-se da análise matricial como função de determinantes da matriz que contém as coordenadas  $x^*$  e  $y^*$  dos nós em questão. Vide Figura 1.37.

**Figura 1.37 – Delimitação vetorial da área de varredura do i-ésimo trecho da parede fina**



Fonte: Adaptado de (Melo, 2019)

Vide ideia análoga na página A-18 da dissertação de Jair Alves Barbosa, intitulada “Edifícios com paredes de secção aberta contraventadas, por lintéis sob carga lateral”, do ano de 1978.

$$\begin{aligned} \text{sendo: } \vec{u} &= (x_j^* - x_D^*) \cdot \vec{i} + (y_j^* - y_D^*) \cdot \vec{j} \\ \vec{v} &= (x_i^* - x_D^*) \cdot \vec{i} + (y_i^* - y_D^*) \cdot \vec{j} \end{aligned}$$

O produto vetorial realizado no sentido positivo (horário),  $\vec{u} \times \vec{v}$ , será:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (x_j^* - x_D^*) & (y_j^* - y_D^*) & 0 \\ (x_i^* - x_D^*) & (y_i^* - y_D^*) & 0 \end{vmatrix} = (x_j^* - x_D^*) \cdot (y_i^* - y_D^*) \cdot \vec{k} - (x_i^* - x_D^*) \cdot (y_j^* - y_D^*) \cdot \vec{k}$$

O módulo do produto vetorial,  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ , será o dobro da área da figura delimitada entre tais vetores, assim expresso:

$$\begin{aligned} 2 \cdot A &= \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{[(x_j^* - x_D^*) \cdot (y_i^* - y_D^*) - (x_i^* - x_D^*) \cdot (y_j^* - y_D^*)]^2} \\ 2 \cdot A &= (x_j^* \cdot y_i^* - x_j^* \cdot y_D^* - x_D^* \cdot y_i^* + x_D^* \cdot y_D^*) - (x_i^* \cdot y_j^* - x_i^* \cdot y_D^* - x_D^* \cdot y_j^* + x_D^* \cdot y_D^*) \\ 2 \cdot A &= x_i^* \cdot y_D^* + x_D^* \cdot y_j^* + x_j^* \cdot y_i^* - x_i^* \cdot y_j^* - x_D^* \cdot y_i^* - x_j^* \cdot y_D^* \end{aligned}$$

Agora, substitui-se pela equivalência do determinante da matriz detentora das coordenadas  $x^*$  e  $y^*$  dos pontos  $D$  e os nós  $i$  e  $j$ .

$$2.A = \begin{vmatrix} 1 & x_i^* & y_i^* \\ 1 & x_D^* & y_D^* \\ 1 & x_j^* & y_j^* \end{vmatrix}$$

sendo:  $i$  – o nó inicial do trecho da seção transversal a ser integrado;

$j$  – o nó final do  $i$ -ésimo trecho da parede fina; e

$D$  – o Centro de Torção e origem da varredura.

#### d.4) marcha de cálculo

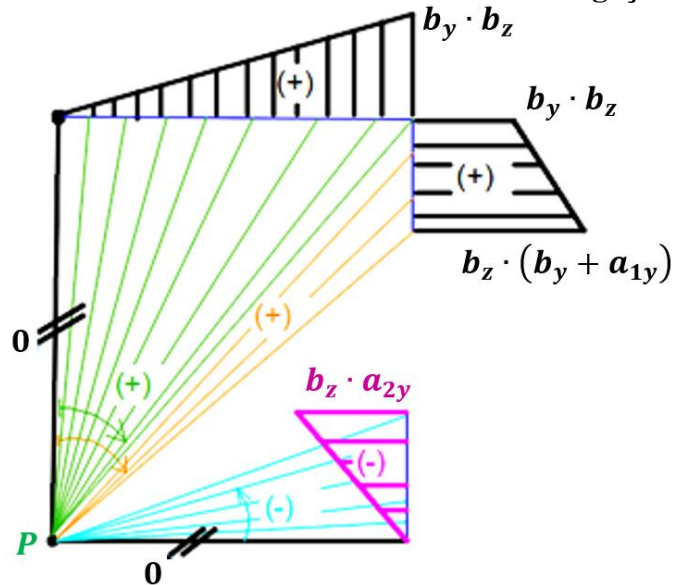
Para a determinação do Centro de Torção, por meio do procedimento geométrico adotando um ponto genérico/arbitrário  $P$  como polo de varredura, basta seguir a seguinte sequência:

- **1ª Etapa:** Definir o polo arbitrário  $P$ , de preferência sobre os prováveis eixos de simetria, ou em qualquer posição sobre o eixo esqueleto  $s$ .

Observação:  $\omega_p$  é nulo para as barras que contenham o polo  $P$ , devido a inexistência de área definida vetorialmente.

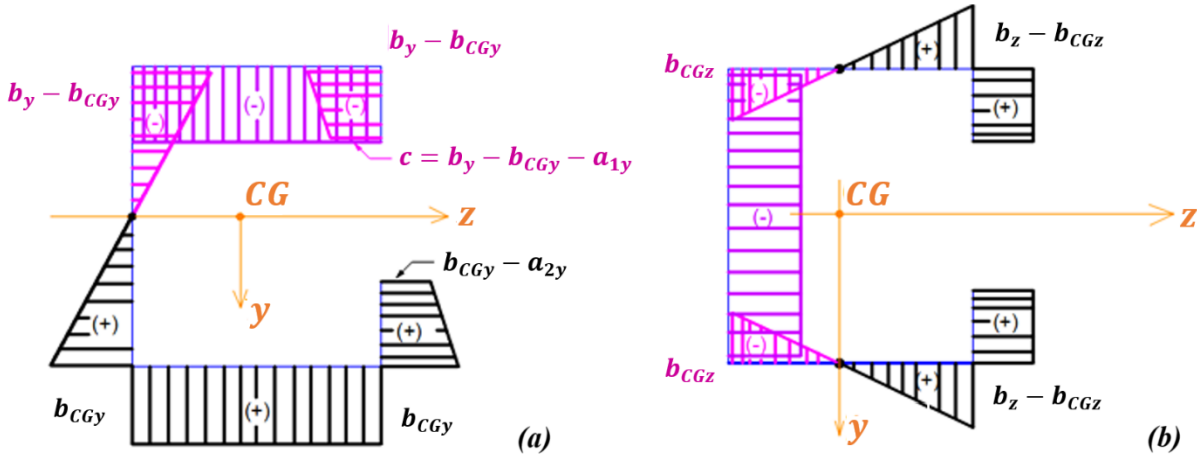
- **2ª Etapa:** Proceder as varreduras e traçar o diagrama de área setorial provisório  $\omega_p$ , semelhante ao ilustrado na Figura 1.38.

**Figura 1.38 – Diagrama de área setorial e Polo Provisório na ligação dos painéis (1) e (3)**



Fonte: Adaptado de (Melo, 2019)

- **3ª Etapa:** Traçar o diagrama de coordenadas  $y$  e  $z$  para as paredes finas da seção transversal, semelhante ao ilustrado na Figura 1.39.

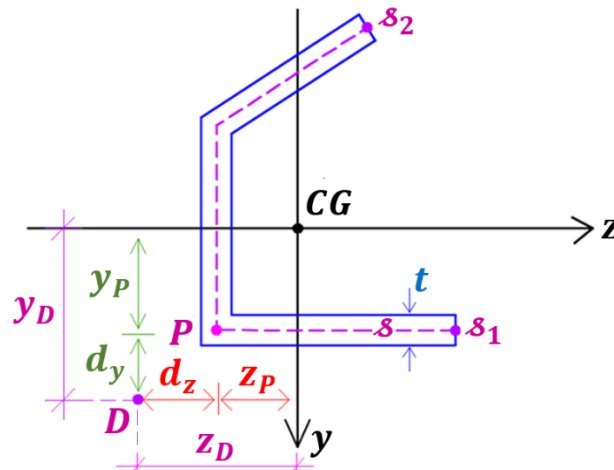
**Figura 1.39 – Diagrama de coordenadas para o núcleo C, segundo o eixo: (a) y e (b) z**

Fonte: Adaptado de (Melo, 2019)

- **4ª Etapa:** Posicionar o centro de gravidade do núcleo e quantificar as propriedades geométricas das seções transversais, a exemplo dos momentos de inércia  $I_z$  e  $I_y$ .
- **5ª Etapa:** Quantificar as distâncias  $d_y$  e  $d_z$  através do emprego da tabela de Kurt – Beyer (CAMPANARI, 1985, vol.3, p. 899) para cálculo das integrais ao longo do esqueleto  $s$ , conforme as distâncias indicadas na Figura 1.40.

$$d_z = -\frac{1}{I_z} \cdot \int_s (\omega_p \cdot y) dS \quad ; \quad d_y = \frac{1}{I_y} \cdot \int_s (\omega_p \cdot z) dS$$

Observação: Utilizar a varredura de acordo com a convenção positiva apresentada nas Figuras 1.31 e 1.36.

**Figura 1.40 – Posicionamento do centro de torção  $D$  para a seção de paredes finas**

Fonte: Adaptado de (Melo, 2019)

- **6ª Etapa:** Posicionar o centro de torção  $D$  através do cálculo das coordenadas  $y_D$  e  $z_D$ :

$$z_D = z_P + d_z; \quad y_D = y_P + d_y$$

Observação: O centro de torção também pode ser denominado de Centro Elástico (CE).

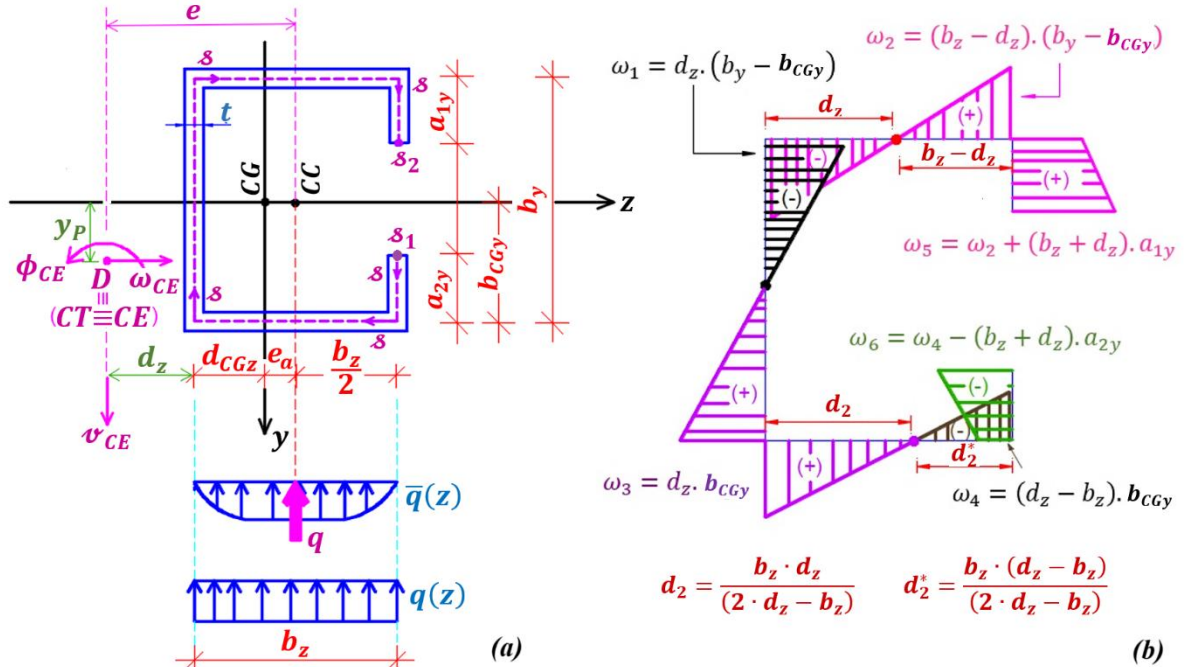
- **7ª Etapa:** Fixar a origem  $O_s$  do eixo esqueleto  $s$ , que pode ser sobre o(s) eixo(s) de simetria – quando existir(em) – ou em qualquer uma das quinas do núcleo, sempre visando facilitar a operacionalização.
- **8ª Etapa:** Traçar o diagrama de ordenadas setoriais principais ( $\omega_{pc}$ ) com o polo de varredura no centro de torção ( $D$ ), conforme decorre da definição.
- **9ª Etapa:** Determinar a Inércia setorial, conforme expresso na eq. (1.31) e sob égide da definição de área diferencial da parede:  $dS = t \cdot ds$ . Assim:

$$I_\omega = \int_s (\omega_{pc})^2 dS = t \cdot \int_s (\omega_{pc})^2 ds \quad (1.31)$$

Observação: O cálculo se dá pelo produto da espessura  $t$  da parede pela integração quadrática de  $\omega_{pc}$ . Usar a tabela de Kurt-Beyer para integrar.

Por fim, ressalta-se que na Figura 1.41 são indicados os graus de liberdade ( $\omega_{CE}$ ,  $v_{CE}$  e  $\phi_{CE}$ ) no centro de torção, bem como as conseguíntes cotas e carregamentos transversais  $q(z)$ . É importante mencionar que no caso de abas simétricas ( $a_{1y} = a_{2y}$ ) tem-se o eixo  $z$  como de simetria e, com isso, o centro de torção se localizará sobre tal acarretando nulidade na distância  $y_D$ .

**Figura 1.41 – Núcleo C: (a) graus de liberdade no centro de torção e (b) diagrama  $\omega_{pc}$**



Fonte: (Melo, 2019)

## 1.3

FORMULAÇÃO UNIDIMENSIONAL ATRAVÉS DA  
TEORIA DE MEMBRANA

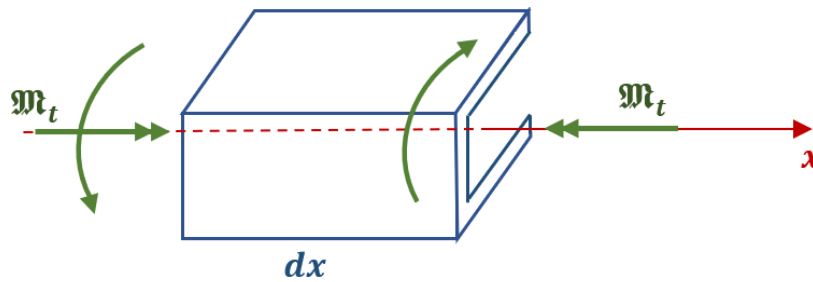
## a) Analogia de membrana

Realizada por PRANDIL no ano de 1903 em contribuição as deduções pertinentes à equação diferencial da torção livre, realizada por Saint-Venant, no ano de 1855, transformando-a coincidente com a equação de equilíbrio de uma membrana.

A relevância de tal analogia é de propiciar resolução via ensaio de membranas, isto para casos de torção de difícil ou Impossível resolução analítica.

Na Figura 1.42 é apresentado o elemento diferencial do núcleo C submetido a torção.

**Figura 1.42 – Elemento diferencial do núcleo C submetido a torção**



Fonte: O Autor (2025)

Assim para o elemento diferencial ilustrado na Figura 1.42, escrevem-se:

$$\phi' = \frac{d\phi}{dx} = \frac{\mathfrak{M}_t}{G \cdot I_t} \quad \therefore \quad d\phi = \frac{\mathfrak{M}_t}{G \cdot I_t} \cdot dx \quad (eq. 1.32)$$

com:  $I_t = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds$

$d\phi$  – Giro relativo das seções transversais separadas por  $dx$ , empenamento;

$t$  – Espessura da parede da seção transversal;

$\mathfrak{M}_t$  – Momento de torção;

$G$  – Módulo de elasticidade transversal do material; e

$I_t$  – Momento de inércia torsional da seção transversal.

sendo a razão  $\frac{\mathfrak{M}_t}{G \cdot I_t}$  constante se o momento de torção for constante ao longo de todo o comprimento. E elenca-se:

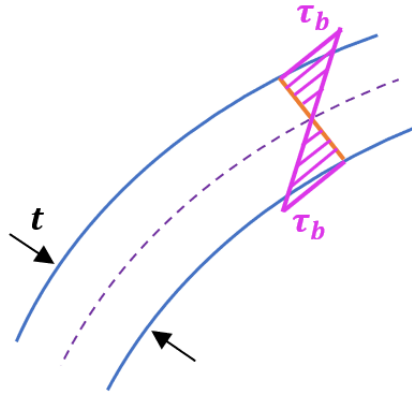
**Observação:** Caso  $t$  seja constante, escreve-se a inércia torsional, como:

$$I_t = \frac{t}{3} \sum s$$

onde:  $s$  – comprimentos dos trechos do eixo esqueleto.

No eixo esqueleto de uma seção transversal de parede fina, com formato qualquer, possui como distribuição de tensões cisalhantes  $\tau$ , com valor máximo nas bordas  $\tau_b$ . Por tratar-se de paredes finas considera-se distribuição linear ao longo da espessura  $t$ . Ver Figura 1.43.

**Figura 1.43 – Distribuição de tensões cisalhantes em seções de paredes finas**



Fonte: O Autor (2025)

No caso de distribuição de tensões apresentada na Figura 1.43, elencam-se as seguintes considerações:

- O módulo resistente à torção ( $W_t$ ) será a razão entre a inércia torsional ( $I_t$ ) e a espessura máxima ( $t_{máx}$ ) para a seção transversal analisada:

$$W_t = \frac{I_t}{t_{máx}} \quad (eq. 1.33)$$

- A tensão cisalhante máxima ( $\tau_{máx}$ ) que ocorre nas extremidades da espessura ( $t$ ) será a razão entre o momento de torção ( $\mathfrak{M}_t$ ) pelo módulo resistente:

$$\tau_{máx} \equiv \tau_b = \frac{\mathfrak{M}_t}{W_t} \quad (eq. 1.34)$$

Ao substituir a equação (1.33) na equação (1.34), tem-se:

$$\tau_b = \frac{\mathfrak{M}_t}{\frac{I_t}{t_{máx}}} \Rightarrow \tau_b = \frac{\mathfrak{M}_t}{I_t} \cdot t \quad (eq. 1.35)$$

sendo relevante mencionar que a espessura será considerada constante no valor  $t$ , ficando expresso que:  $t_{máx} = t$ .

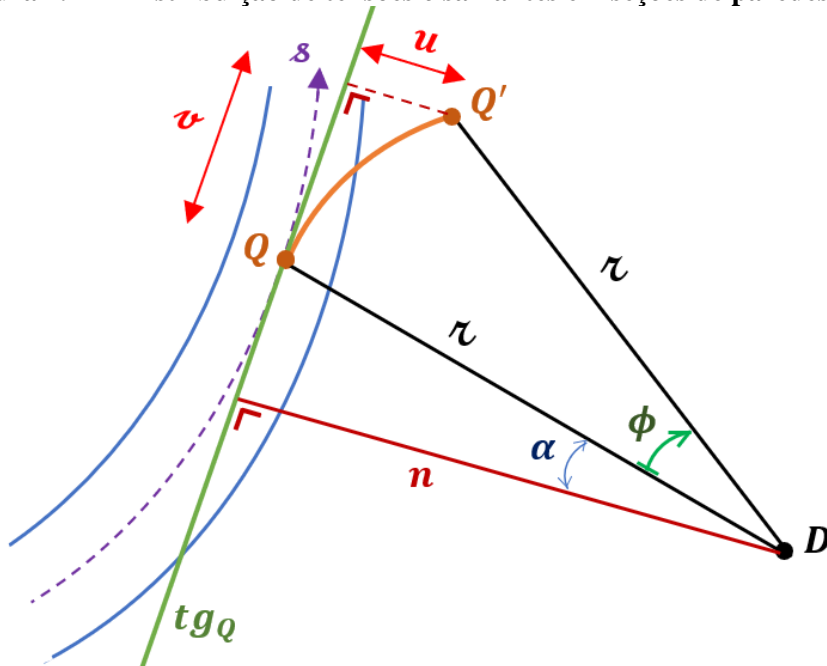
Agora combinando se as equações (1.32) e (1.35), escreve-se a relação entre a tensão cisalhante máxima ( $\tau_b$ ) e da derivada primeira do giro relativo  $\phi'$ , cuja nomenclatura é o “empenamento”, assim:

$$\begin{cases} \phi' = \frac{\mathfrak{M}_t}{G \cdot I_t} \\ \tau_b = \frac{\mathfrak{M}_t}{I_t} \cdot t \end{cases} \Rightarrow \phi' \cdot G = \frac{\tau_b}{t} \Rightarrow \tau_b = G \cdot t \cdot \phi' \quad (eq. 1.36)$$

### a.1) Deslocamento longitudinal em termos do empenamento

Na Figura 1.44 é apresentado o deslocamento longitudinal de um ponto qualquer  $Q$  em detrimento do empenamento e da rotação  $\phi$ .

**Figura 1.44 – Distribuição de tensões cisalhantes em seções de paredes finas**



Fonte: O Autor (2025)

onde:  $\tau$  – é o raio vetor do giro  $\phi$ ;

$u$  – é o deslocamento no eixo da seção transversal de paredes finas; e

$v$  – é o deslocamento na direção da ordenada do eixo esquelito ( $s$ ).

**Definição de Empenamento:** São os deslocamentos longitudinais ( $u$ ) provenientes da rotação ( $\phi$ ) da seção transversal, em torno do centro de torção ( $C.T. \equiv D$ ). Ou ainda, conforme Proença (2009, p. 305), o bimomento é semelhante ao binário de forças, sendo auto – equilibrantes, e sem repercutir esforços internos do tipo normal ou cisalhante

Aplicando o giro  $\phi$  na seção transversal constata-se que o ponto  $Q$  assume a nova posição  $Q'$ . Assumindo a hipótese simplificadora da Teoria das Pequenas Deformações (TPD), tem-se como arco  $QQ' = r \cdot \phi$ . Além do deslocamento  $v$  escrito via semelhança de triângulos, como:

$$\frac{v}{n \cdot \phi} = \frac{n}{n} \Rightarrow v = n \cdot \phi \quad (eq. 1.37)$$

e a consequente derivada fica expressa por:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = n \cdot \frac{d\phi}{dx} \Rightarrow v' = n \cdot \phi' \quad (eq. 1.38)$$

onde:  $v$  – é o deslocamento na direção da ordenada do eixo esqueleto  $s$ ; e

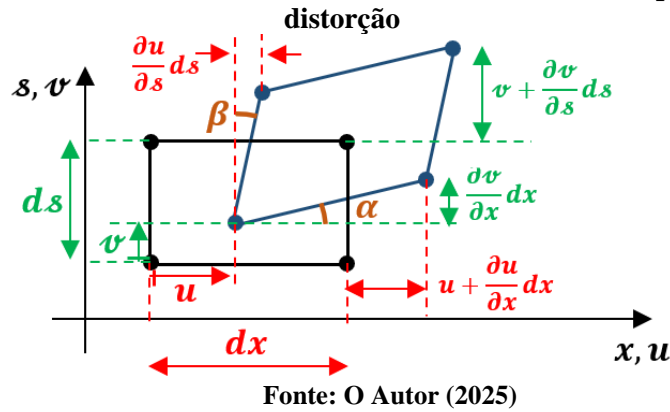
$n$  – é a distância perpendicular entre a tangente ao ponto  $Q$  e o centro de torção  $D$ .

Ressaltando que a rotação  $\phi$  varia com eixo longitudinal  $x$ , enquanto que o deslocamento  $v$  varia com o eixo esqueleto ( $s$ ) e com o eixo longitudinal. Desta forma, ao analisar o ângulo de distorção ( $\gamma$ ) do elemento diferencial, escreve-se:

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} \Rightarrow \gamma = \alpha + \beta$$

em conformidade com o estado deformado ilustrado na Figura 1.45.

**Figura 1.45 – Estado deformado do elemento diferencial na altura do pilar e sob efeito de**



Como nos pontos sobre a linha esqueleto não são computadas deformações transversais (distorção), reescreve-se:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad (eq. 1.39)$$

Agora, combinando-se as equações (1.38) e (1.39), expressa-se:

$$n \cdot \phi' + \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \quad (eq. 1.40)$$

Como os deslocamentos longitudinais  $u$  dependem unicamente do eixo esqueleto  $s$ , reescreve-se a eq. (1.40) por meio de derivada total, como:

$$n \cdot \phi' + \frac{du}{ds} = 0 \quad (eq. 1.41)$$

Ao realizar a integração por partes, da eq. (1.41), ao longo do eixo esqueleto  $s$  e partindo da origem  $O_s$  até o ponto qualquer  $Q$ , escreve-se:

$$\int_{O_s}^Q \frac{du}{ds} ds = - \int_{O_s}^Q (n \cdot \phi') ds$$

$$u = -\phi' \cdot \int_{O_s}^Q n ds \quad \Rightarrow \quad u = -\omega \cdot \phi' \quad (eq. 1.42)$$

sendo a Área Setorial expressa por:  $\omega = \int_{O_s}^Q n ds$ .

Após a definição do centro de torção ( $C.T. = D$ ) e seguindo com a convenção positiva para o deslocamento " $u$ " (também no positivo do eixo axial  $x$  do pilar) e as varreduras, procede-se a obtenção da área setorial principal ( $\omega_{pc}$ ). Deste modo, reescreve-se a equação (1.42), resultando em:

$$u = \omega_{pc} \cdot \phi' \quad (eq. 1.43)$$

### a.2) Introdução ao Bimomento

Introduzido por Vlassov (1962), o denominado Bimomento  $B$ , que atua na flexo-torção analogamente ao momento fletor  $\mathfrak{M}$  que atua na flexão simples. Ficando então expresso por:

$$B = \int_S \sigma_x \cdot \omega_{pc} \cdot dS \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_z = \int_S \sigma_x \cdot y \cdot dS \rightarrow \sigma_x = \frac{\mathfrak{M}_z}{I_z} \cdot y \\ \mathfrak{M}_y = \int_S \sigma_x \cdot z \cdot dS \rightarrow \sigma_x = \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} \cdot z \end{cases} \quad (eq. 1.44)$$

E, em termos da tensão  $\sigma_x = E^* \cdot \varepsilon_x \equiv E \cdot (\omega_{pc} \cdot \phi'')$  advinda da definição da deformação específica  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\omega_{pc} \cdot \phi') = \omega_{pc} \cdot \phi''$  na direção  $x$ , com a derivada parcial do deslocamento  $u$  em relação ao eixo axial  $x$  e em seguida utilizando a Lei de Hooke simplificando ( $E^* = \frac{E}{(1-\nu^2)} \approx E$ ) e substituindo na eq. (1.44) chega-se à:

$$B = \int_S (E \cdot \omega_{pc} \cdot \phi'') \cdot \omega_{pc} dS \equiv \int_S (E \cdot \omega_{pc}^2 \cdot \phi'') dS \quad \Rightarrow \quad B = E \cdot I_\omega \cdot \phi'' \quad (eq. 1.45)$$

onde, o momento de inércia setorial é expresso por:  $I_\omega = \int_S \omega_{pc}^2 dS$ .

Ainda em decorrência da eq. (1.44), considerando-se a tensão  $\sigma_x$  constante na integral ao longo do eixo esquelito  $\mathcal{s}$  e utilizando o artifício de multiplicar e dividir a equação pela área setorial principal  $\omega_{pc}$ , ficando:

$$B = \frac{\sigma_x}{\omega_{pc}} \cdot \int_S \omega_{pc}^2 dS \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\sigma_x}{\omega_{pc}} \cdot I_\omega \quad \Rightarrow \quad \sigma_x = \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega_{pc} \quad (eq. 1.46)$$

### a.3) Equação diferencial da Flexo-Torção, em termos do Bimomento

A tensão axial (longitudinal)  $\sigma_x$  numa barra submetida à esforço normal  $\mathfrak{N}$ , momento fletor  $\mathfrak{M}_y$  e  $\mathfrak{M}_z$ , além do momento de torção acoplada a flexão que resultará no bimomento  $B$ , será expressa por:

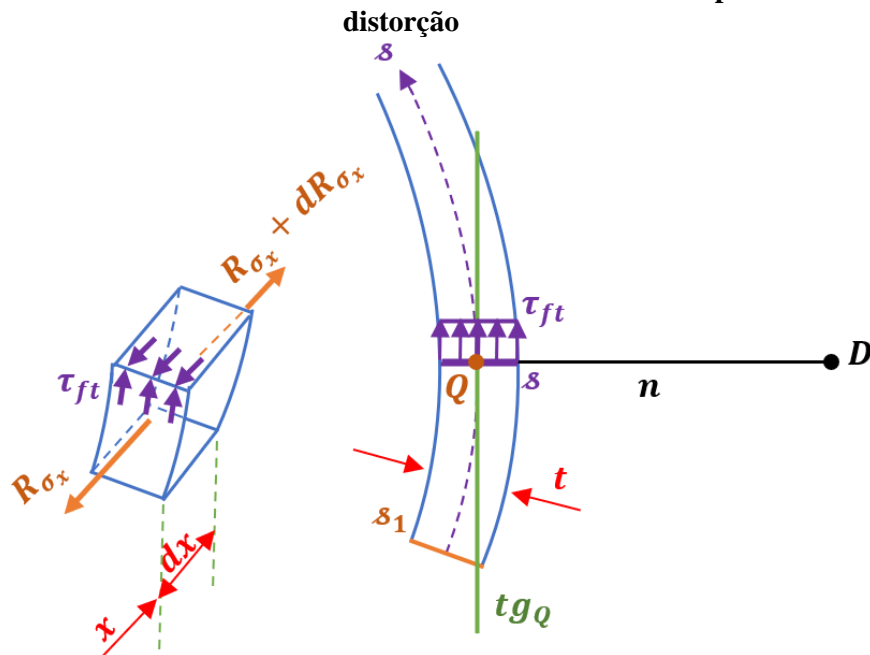
$$\sigma_x = \pm \frac{\mathfrak{N}}{A} \pm \frac{\mathfrak{M}_z}{I_z} \cdot y \pm \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y} \cdot z \pm \frac{B}{I_\omega} \cdot \omega \quad (eq. 1.47)$$

O momento de Flexo-Torção  $\mathfrak{M}_{ft}$  aplicado em conjunto da derivação do bimomento apresentado na equação (1.45), resultará:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_{ft} = -E \cdot I_\omega \cdot \phi''' \\ B' = E \cdot I_\omega \cdot \phi''' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{M}_{ft} = -B' \equiv -\frac{dB}{dx} \quad (eq. 1.48)$$

Analizando também a tensão de cisalhamento  $\tau_{ft}$  gerada pela flexo-torção, considerada uniformemente distribuída ao longo da espessura  $t$  da parede fina, conforme ilustrado na Figura 1.46.

**Figura 1.46 – Estado deformado do elemento diferencial na altura do pilar e sob efeito de distorção**



Fonte: O Autor (2025)

A tensão axial  $\sigma_x$  terá como resultante  $R_{\sigma_x}$  e fica expressa por:

$$R_{\sigma_x} = \int_{S_1}^S \sigma_x dS$$

valendo-se da tensão axial  $\sigma_x$  escrita em termos do giro  $\phi$ , reescreve se a resultante  $R_{\sigma_x}$ , como:

$$R_{\sigma_x} = \int_{S_1}^S \sigma_x dS \equiv \int_{s_1}^s (E \cdot \omega_{pc} \cdot \phi'') t \cdot ds \equiv E \cdot \phi'' \cdot \int_{s_1}^s \omega_{pc} t \cdot ds \equiv E \cdot S_{\omega} \cdot \phi'' \quad (eq. 1.49)$$

onde, o Momento Estático Setorial é expresso por:  $S_{\omega} = \int_{s_1}^s \omega_{pc} t \cdot ds$ .

Derivando-se a eq. (1.49), tem-se:

$$\frac{dR_{\sigma_x}}{dx} = E \cdot S_{\omega} \cdot \phi''' \quad (eq. 1.50)$$

Agora, pelo equilíbrio axial do elemento diferencial analisado, tem-se:

$$R_{\sigma_x} - (R_{\sigma_x} + dR_{\sigma_x}) + \tau_{ft} \cdot t \cdot dx = 0$$

$$\tau_{ft} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dR_{\sigma_x}}{dx} \quad \therefore \quad \tau_{ft} = \frac{E \cdot \phi'''}{t} \cdot S_{\omega} \quad (eq. 1.51)$$

Unindo-se a eq. (1.51) com um momento devido à flexo-torção, conclui-se:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_{ft} = -E \cdot I_{\omega} \cdot \phi''' \\ \tau_{ft} = \frac{E \cdot \phi'''}{t} \cdot S_{\omega} \end{cases} \Rightarrow \mathfrak{M}_{ft} = \frac{-I_{\omega} \cdot \tau_{ft} \cdot t}{S_{\omega}} \Rightarrow \tau_{ft} = \frac{-\mathfrak{M}_{ft} \cdot S_{\omega}}{t \cdot I_{\omega}} \quad (eq. 1.52)$$

Aplicando-se a eq. (1.48) na eq. (1.52), tem-se que a tensão tangencial  $\tau_{ft}$  devido à flexo-torção em termos da derivada do momento é expressa por:

$$\tau_{ft} = \frac{B' \cdot S_{\omega}}{t \cdot I_{\omega}} \quad (eq. 1.53)$$

A equação diferencial da flexo-torção possui momentos  $\mathfrak{M}_{ft}$  oriundos da flexo-torção e momentos  $\mathfrak{M}_{\ell}$  provenientes da torção livre, assim:

$$\mathfrak{M}_{\ell} + \mathfrak{M}_{ft} = \mathfrak{M}_t$$

$$G \cdot I_t \cdot \phi' - E \cdot I_{\omega} \cdot \phi''' = \mathfrak{M}_t \quad (eq. 1.54)$$

- Equação Diferencial em rotação -

Porém, para facilitar o equacionamento matemático, aplica-se a equação (1.48) na equação (1.54) e escreve-se o momento  $\mathfrak{M}_{ft}$  devido à flexo-torção, em termos do bimomento  $B$ , reescrevendo-se a equação diferencial, como:

$$\mathfrak{M}_t = G.I_t.\phi' - B' \quad (eq. 1.55)$$

Derivando a equação (1.55), em relação ao eixo axial  $x$ , conclui-se:

$$\frac{d\mathfrak{M}_t}{dx} = G.I_t.\phi'' - B''$$

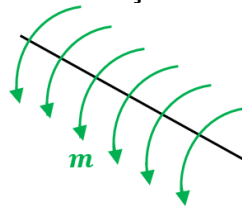
substituindo a derivada segunda da rotação ( $\phi''$ ) pelo bimomento, mediante:

$$\begin{cases} \mathfrak{M}_{ft} = -E.I_\omega.\phi''' \\ \mathfrak{M}_{ft} = -B' \end{cases} \Rightarrow E.I_\omega.\phi''' = B' \quad \therefore \phi'' = \frac{B}{E.I_\omega}$$

concluindo-se:  $\frac{d\mathfrak{M}_t}{dx} \equiv \mathfrak{M}_t' = \left(\frac{G.I_t}{E.I_\omega}\right).B - B'' \quad (eq. 1.56)$

o momento de torção distribuído é expresso por:  $m = \frac{d\mathfrak{M}_t}{dx}$ . Ver Fig. 1.47.

**Figura 1.47 – Momento de torção uniformemente distribuído**



Fonte: O Autor (2025)

Por fim, resultando em:

$$\left(\frac{G.I_t}{E.I_\omega}\right).B - B'' = m \quad (eq. 1.57)$$

**- Equação Diferencial em bimomento -**

Observação: Pode ser nas equações (1.56) e (1.57) a torção é considerada uniforme ao longo do comprimento  $x = \ell$ .

## b) Resolução da equação diferencial do núcleo estrutural via Teoria de Membrana

Inicialmente procede-se a escrita do coeficiente  $\lambda$  destinado a escrita condensada da Equação Diferencial do problema, assim:

$$\lambda = \sqrt{\frac{E \cdot I_{\omega}}{G \cdot I_t}} \equiv \sqrt{\frac{E \cdot I_{\omega}}{\frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \cdot I_t}} \equiv \sqrt{2 \cdot (1 + \nu) \cdot \frac{I_{\omega}}{I_t}}$$

Após tal definição, parte-se para reescrita da EDO apresentada na eq. (z<sub>2</sub>) através da multiplicação de toda a equação por razão escolhida adequadamente, ficando assim expressa:

$$\left[ \left( \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_{\omega}} \right) \cdot B - B'' \right] \cdot - \left( \frac{E \cdot I_{\omega}}{G \cdot I_t} \right) = m \cdot - \left( \frac{E \cdot I_{\omega}}{G \cdot I_t} \right)$$

$$\left( \frac{E \cdot I_{\omega}}{G \cdot I_t} \right) \cdot B'' - B = - \left( \frac{E \cdot I_{\omega}}{G \cdot I_t} \right) \cdot m$$

$$\lambda^2 \cdot B'' - B = -\lambda^2 \cdot m$$

**- Equação Diferencial em bimomento -**

A solução homogênea fica expressa por:

- A Equação Diferencial Homogênea é expressa por:

$$\lambda^2 \cdot B_H'' - B_H = 0$$

- A Solução Homogênea é proposta como:

$$B_H = e^{\lambda \cdot x}$$

$$B_H' = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

$$B_H'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

- Aplicando a Solução Homogênea na Equação Diferencial encontra-se a equação característica:

$$\lambda^2 \cdot B_H'' - B_H = 0 \quad \therefore \quad \lambda^2 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} - e^{\lambda \cdot x} = 0 \quad \therefore \quad \lambda^2 \cdot \lambda^2 - 1 = 0$$

- As raízes da equação característica são:

$$\lambda^2 \cdot \lambda^2 - 1 = 0 \quad \therefore \quad \lambda^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = \frac{1}{\lambda} \\ \searrow \lambda_2 = -\frac{1}{\lambda} \end{matrix}$$

- Ademais, a Solução Homogênea será a combinação linear das raízes da equação característica:

$$B_H = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} \quad \therefore \quad B_H = C_1 \cdot e^{\frac{x}{\lambda}} + C_2 \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

- Utilizando as funções hiperbólicas, reescreve-se a Solução Homogênea, como:

- Relações a substituir na solução homogênea:

$$e^{\pm a \cdot x} = \cosh(a \cdot x) \pm \sinh(a \cdot x)$$

- Substituição:

$$B_H = C_1 \cdot \left[ \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right] + C_2 \cdot \left[ \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \right]$$

- Solução Homogênea reescrita:

$$B_H = A_1 \cdot \text{Senh} \left( \frac{x}{\lambda} \right) + A_2 \cdot \text{Cosh} \left( \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\text{com: } A_1 = C_1 - C_2 \quad \text{e} \quad A_2 = C_1 + C_2.$$

E em seguida, a solução particular é obtida mediante resposta de bimomento constante e suas derivadas nulas, assim:

- Solução Particular proposta:  $B_P = k$  e  $B_P' = B_P'' = 0$
- Aplicação da Solução Particular na EDO:

$$\lambda^2 \cdot B_P'' - B_P = -\lambda^2 \cdot m \quad \therefore \quad \lambda^2 \cdot 0 - k = -\lambda^2 \cdot m \quad \therefore \quad k = \lambda^2$$

- A Solução Particular é expressa por:

$$B_P = \lambda^2 \cdot m$$

Por fim, ao unir as soluções homogênea e particular é possível expressar a solução geral da equação diferencial em tela:

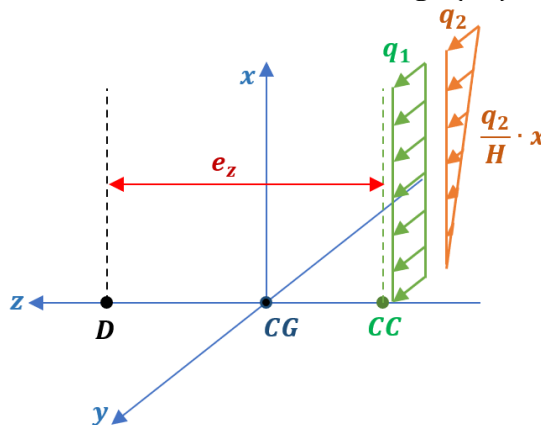
$$B = B_H + B_P \quad \therefore \quad B = A_1 \cdot \text{Senh} \left( \frac{x}{\lambda} \right) + A_2 \cdot \text{Cosh} \left( \frac{x}{\lambda} \right) + \lambda^2 \cdot m$$

- Solução para a Equação Diferencial em bimomento -

### c) Ábacos dimensionais

Na Figura 1.48 é apresentado o estado de carregamento do pilar analisado, através de qual pode-se calcular o momento de torção como uma função do eixo longitudinal  $x$ .

**Figura 1.48 – Braço de alavanca entre o centro de carga (CC) e o centro de torção (D)**



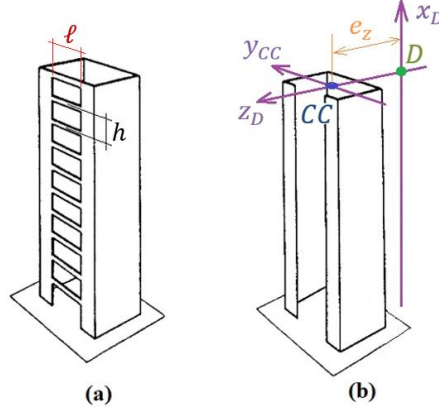
Fonte: O Autor (2025)

Ficando a expressão do momento de torção, negativo por estar vetorialmente apontando na direção interna do pilar, assim escrita como:

$$\mathfrak{M}_t(x) = - \left( q_1 + \frac{q_2}{H} \cdot x \right) \cdot e_z \quad \therefore \quad \mathfrak{M}_t(x) = - (q_1 \cdot e_z) - \left( \frac{q_2}{H} \cdot e_z \right) \cdot x$$

Na Figura 1.49 (a) distingue-se o pilar de seção aberta e contraventada por lintéis, bem como são indicados os eixos de referência no centro de torção, bem como, evidenciado o braço de alavanca já apresentado na Figura 1.49 (b).

**Figura 1.49 – Pilar de paredes finas: (a) com contraventamento por lintéis e (b) sem lintéis (aberto)**



Fonte: Adaptado de (Smith; Coull, 1991)

Ademais, a expressão do momento de torção em termos das derivadas da rotação é expressa por:

$$\mathfrak{M}_t(x) = \left( G \cdot I_t + \frac{k^*}{h} \right) \cdot \phi' - E \cdot I_\omega \cdot \phi'''$$

sendo:  $\ell, I_L$  – comprimento e momento de inércia à flexão do lintel;

$h$  – distância relativa entre dois lintéis;  $A_i$  – área interna ao eixo esqueleto  $\mathcal{S}$ ;

$\alpha = \alpha_1$  – quando do caso de seções de paredes finas aberta (sem lintéis);

$\alpha = \alpha_2$  – para seções de paredes finas contraventada por lintéis;

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}} \quad ; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{G \cdot I_t \cdot h + k^*}{h \cdot E \cdot I_\omega}} \quad ; \quad k^* = \frac{48 \cdot E \cdot I_L \cdot A_i^2}{\ell^3} \quad \text{e} \quad I_L = \frac{e_L \cdot h_L^3}{12}.$$

E invertendo o sinal de toda a equação e dividindo-a pela rigidez ao empenamento ( $E \cdot I_\omega$ ), chega-se à:

$$\phi''' - \left( \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega} + \frac{k^*}{h \cdot E \cdot I_\omega} \right) \cdot \phi' = - \frac{1}{E \cdot I_\omega} \cdot \mathfrak{M}_t(x)$$

Ao derivar, expressa-se a Equação Diferencial em rotação:

$$\phi^{IV} - \alpha^2 \cdot \phi'' = - \frac{1}{E \cdot I_\omega} \cdot \frac{d}{dx} [\mathfrak{M}_t(x)]$$

$$\therefore \quad \phi^{IV} - \alpha^2 \cdot \phi'' = - \frac{m}{E \cdot I_\omega}$$

$$\text{sendo: } \alpha^2 = \left( \frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega} + \frac{k^*}{h \cdot E \cdot I_\omega} \right) \quad \text{e} \quad B = m = \frac{d}{dx} [\mathfrak{M}_t(x)].$$

A solução homogênea fica expressa por:

- A Equação Diferencial Homogênea é expressa por:

$$\phi_H^{IV} - \alpha^2 \cdot \phi_H^{II} = 0$$

- A Solução Homogênea é proposta como:

$$\begin{aligned}\phi_H &= e^{\lambda \cdot x} \\ \phi_H^I &= \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} \\ \phi_H^{II} &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} \\ \phi_H^{III} &= \lambda^3 \cdot e^{\lambda \cdot x} \\ \phi_H^{IV} &= \lambda^4 \cdot e^{\lambda \cdot x}\end{aligned}$$

- Aplicando a Solução Homogênea na Equação Diferencial encontra-se a equação característica:

$$\phi_H^{IV} - \alpha^2 \cdot \phi_H^{II} = 0 \quad \therefore \quad \lambda^4 \cdot e^{\lambda \cdot x} - \alpha^2 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} = 0 \quad \therefore \quad \lambda^2 \cdot (\lambda^2 - \alpha^2) = 0$$

- As raízes da equação característica são:

$$\lambda^2 \cdot (\lambda^2 - \alpha^2) = 0 \quad \therefore \quad \lambda^2 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = 0 \\ \searrow \lambda_2 = 0 \end{matrix} \quad \text{e} \quad \lambda^2 - \alpha^2 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_3 = \alpha \\ \searrow \lambda_4 = -\alpha \end{matrix}$$

- Ademais, a Solução Homogênea será a combinação linear das raízes da equação característica:

$$\phi_H(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot x} + C_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot x}$$

ou

$$\phi_H(x) = A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot x) + A_4 \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot x)$$

E em seguida, a solução particular é obtida mediante imposição do grau do termo particularizante na derivação de menor ordem da EDO, assim faz-se:

- Solução Particular proposta:

$$\begin{aligned}\phi_P &= \int \phi_P^I dx \\ \phi_P^I &= \int \phi_P^{II} dx \\ \phi_P^{II} &= A_5 \quad (\text{constante, conforme termo particularizante}) \\ \phi_P^{III} &= 0 \\ \phi_P^{IV} &= 0\end{aligned}$$

- Aplicação da Solução Particular na EDO:

$$\phi_P^{IV} - \alpha^2 \cdot \phi_P^{II} = -\frac{m}{E \cdot I_\omega} \quad \therefore \quad 0 - \alpha^2 \cdot A_5 = -\frac{m}{E \cdot I_\omega} \quad \therefore \quad A_5 = \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega}$$

- A Solução Particular é expressa por:

$$\phi_P^{II}(x) = A_5 \quad \therefore \quad \phi_P^{II}(x) = \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega}$$

$$\phi_P^I = \int \phi_P^{II} dx = \int \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} dx = \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} \cdot x + A_6$$

$$\phi_P = \int \phi_P^I dx = \int \left[ \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} \cdot x + A_6 \right] dx = \frac{m}{2 \cdot \alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} \cdot x^2 + A_6 \cdot x + A_7$$

Avançando, ao unir as soluções homogênea e particular é possível expressar a solução geral da equação diferencial em tela:

$$\phi(x) = \phi_H(x) + \phi_P(x)$$

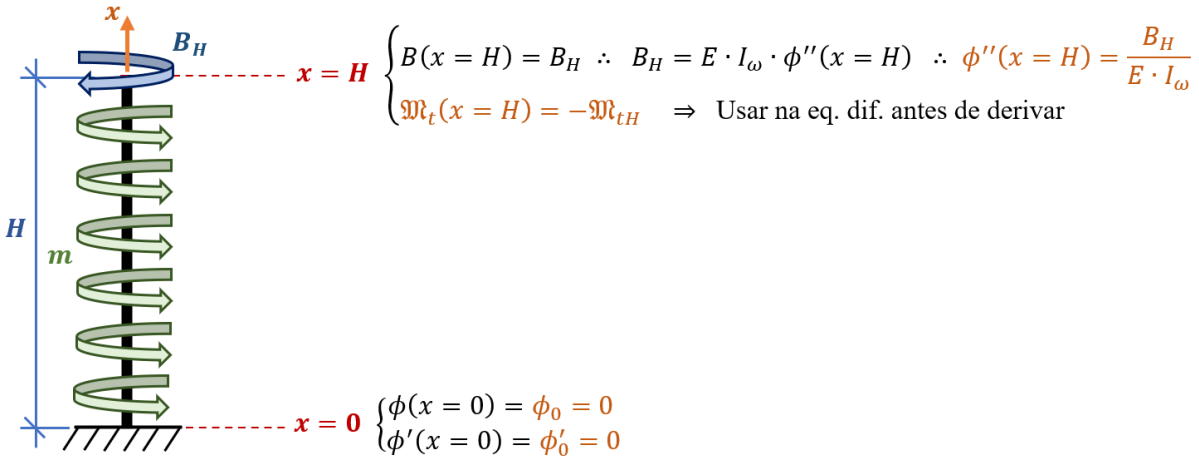
$$\phi(x) = A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot x) + A_4 \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot x) + \frac{m}{2 \cdot \alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} \cdot x^2$$

**- Solução para a Equação Diferencial em rotação da seção transversal -**

**Observação:** Os coeficientes  $A_6$  e  $A_7$  apresentados na equação particular são absorvidas pelos coeficientes  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente.

Após a escrita da solução geral da equação diferencial percebe-se a necessidade de quantificar os coeficientes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e  $A_4$ , via imposição das condições de contorno apresentadas na Figura 1.50.

**Figura 1.50 – Condições de contorno do pilar engastado na base e livre no topo**



Fonte: O Autor (2025)

sendo:  $B_H$ ,  $\mathfrak{M}_{tH}$  – bimomento e momento de torção no topo do pilar de paredes finas.

Deste modo, a função resposta  $\phi(x)$  e suas derivadas são expressas por:

$$\phi(x) = A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot x) + A_4 \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot x) + \frac{m}{2 \cdot \alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} \cdot x^2$$

$$\phi^I(x) = A_2 + A_3 \cdot \alpha \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot x) + A_4 \cdot \alpha \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot x) + \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} \cdot x$$

$$\phi^{II}(x) = A_3 \cdot \alpha^2 \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot x) + A_4 \cdot \alpha^2 \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot x) + \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega}$$

$$\phi^{III}(x) = A_3 \cdot \alpha^3 \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot x) + A_4 \cdot \alpha^3 \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot x)$$

E da aplicação das condições de contorno, quantificam-se:

$$\begin{aligned} \stackrel{1}{\rightsquigarrow} \quad \phi(x=0) \equiv \phi_0 = 0 \quad \therefore \quad A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot \cosh(0) + A_4 \cdot \sinh(0) + \frac{m \cdot 0^2}{2 \cdot \alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} &= 0 \\ \therefore \quad A_1 + A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{eq. 1.58})$$

$$\begin{aligned} \stackrel{2}{\rightsquigarrow} \quad \phi^I(x=0) \equiv \phi_0^I = 0 \quad \therefore \quad A_2 + A_3 \cdot \alpha \cdot \sinh(0) + A_4 \cdot \alpha \cdot \cosh(0) + \frac{m \cdot 0}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} &= 0 \\ \therefore \quad A_2 + A_4 \cdot \alpha &= 0 \end{aligned} \quad (\text{eq. 1.59})$$

$$\begin{aligned} \stackrel{3}{\rightsquigarrow} \quad \phi^{II}(x=H) \equiv \phi_H^{II} = \frac{B_H}{E \cdot I_\omega} \therefore A_3 \cdot \alpha^2 \cdot \cosh(\alpha \cdot H) + A_4 \cdot \alpha^2 \cdot \sinh(\alpha \cdot H) + \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} &= \frac{B_H}{E \cdot I_\omega} \\ \therefore \quad A_3 \cdot \cosh(\alpha \cdot H) + A_4 \cdot \sinh(\alpha \cdot H) &= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \left[ \frac{B_H}{E \cdot I_\omega} - \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} \right] \\ \therefore \quad A_3 \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot H) + A_4 \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot H) &= \frac{(\alpha^2 \cdot B_H - m)}{\alpha^4 \cdot E \cdot I_\omega} \end{aligned} \quad (\text{eq. 1.60})$$

$$\stackrel{4}{\rightsquigarrow} \quad -\mathfrak{M}_t(x=H) \equiv -\mathfrak{M}_{t_H} = \left( G \cdot I_t + \frac{k^*}{h} \right) \cdot \phi^I(x=H) - E \cdot I_\omega \cdot \phi^{III}(x=H)$$

O que reescrito, análogo ao procedido na equação diferencial de rotação, torna-se:

$$\phi_H^{III} - \alpha^2 \cdot \phi_H^I = \frac{\mathfrak{M}_{t_H}}{E \cdot I_\omega}$$

Aplicando  $\phi_H^{III}$  e  $\phi_H^I$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} [A_3 \cdot \alpha^3 \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot H) + A_4 \cdot \alpha^3 \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot H)] \\ - \alpha^2 \cdot \left[ A_2 + A_3 \cdot \alpha \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot H) + A_4 \cdot \alpha \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot H) + \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} \cdot H \right] &= \frac{\mathfrak{M}_{t_H}}{E \cdot I_\omega} \end{aligned}$$

anulando os termos semelhantes e de sinais opostos, quantifica-se o coeficiente  $A_2$ , como:

$$A_2 = - \frac{(\mathfrak{M}_{t_H} + m \cdot H)}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega}$$

e da equação (1.59), expressa-se o coeficiente  $A_4$ , como:

$$A_4 = \frac{(\mathfrak{M}_{t_H} + m \cdot H)}{\alpha^3 \cdot E \cdot I_\omega}$$

bem como, da equação (1.60), quantifica-se o coeficiente  $A_3$ , como:

$$A_3 = \frac{[\alpha^2 \cdot B_H - \alpha \cdot \mathfrak{M}_{t_H} \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot H)] - m \cdot [(\alpha \cdot H) \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot H) + 1]}{\alpha^4 \cdot E \cdot I_\omega \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot H)}$$

e, em último, mediante a equação (1.58), expressa-se o coeficiente  $A_1$ , como:

$$A_1 = \frac{-[\alpha^2 \cdot B_H - \alpha \cdot \mathfrak{M}_{t_H} \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot H)] + m \cdot [(\alpha \cdot H) \cdot \text{Senh}(\alpha \cdot H) + 1]}{\alpha^4 \cdot E \cdot I_\omega \cdot \text{Cosh}(\alpha \cdot H)}$$

Neste ponto, utilizando software de simplificação de expressões matemáticas, reescrevem-se a função resposta e suas derivadas, em termos de funções adimensionais, como:

$$\phi(x) = k_1 \cdot \beta_1 + k_2 \cdot \beta_2 + k_3 \cdot \beta_3 \quad ; \quad \phi^I(x) = k_4 \cdot \beta_4 + k_5 \cdot \beta_5 + k_6 \cdot \beta_6$$

$$\phi^{II}(x) = k_7 \cdot \beta_7 + k_8 \cdot \beta_8 + k_9 \cdot \beta_9 \quad ; \quad \phi^{III}(x) = k_{10} \cdot \beta_{10} + k_{11} \cdot \beta_{11} + k_{12} \cdot \beta_{12}$$

sendo as funções adimensionais  $\beta_i$  dependente da coordenada adimensional  $\xi = \frac{x}{H}$  e  $H$  é a altura do pilar, bem como as curvas  $\alpha H$  variam de zero a seis com incremento de meio. Neste sentido, listam-se os coeficientes  $k_i$  e as funções adimensionais  $\beta_i$ , como:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{-m \cdot H^4}{E \cdot I_\omega \cdot (\alpha \cdot H)^4} & ; & \quad k_2 = \frac{B_H \cdot H^2}{E \cdot I_\omega \cdot (\alpha \cdot H)^2} & ; & \quad k_3 = \frac{-\mathfrak{M}_{t_H} \cdot H^3}{E \cdot I_\omega \cdot (\alpha \cdot H)^3} \\ k_4 &= \frac{-m \cdot H^3}{E \cdot I_\omega \cdot (\alpha \cdot H)^3} & ; & \quad k_5 = \frac{B_H \cdot H}{E \cdot I_\omega \cdot (\alpha \cdot H)} & ; & \quad k_6 = \frac{-\mathfrak{M}_{t_H} \cdot H^2}{E \cdot I_\omega \cdot (\alpha \cdot H)^2} \\ k_7 &= \frac{-m \cdot H^2}{E \cdot I_\omega \cdot (\alpha \cdot H)^2} & ; & \quad k_8 = \frac{B_H}{E \cdot I_\omega} & ; & \quad k_9 = \frac{-\mathfrak{M}_{t_H} \cdot H}{E \cdot I_\omega \cdot (\alpha \cdot H)} \\ k_{10} &= \frac{-m \cdot H}{E \cdot I_\omega \cdot (\alpha \cdot H)} & ; & \quad k_{11} = \frac{B_H \cdot (\alpha \cdot H)}{E \cdot I_\omega \cdot H} & ; & \quad k_{12} = \frac{-\mathfrak{M}_{t_H}}{E \cdot I_\omega} \end{aligned}$$

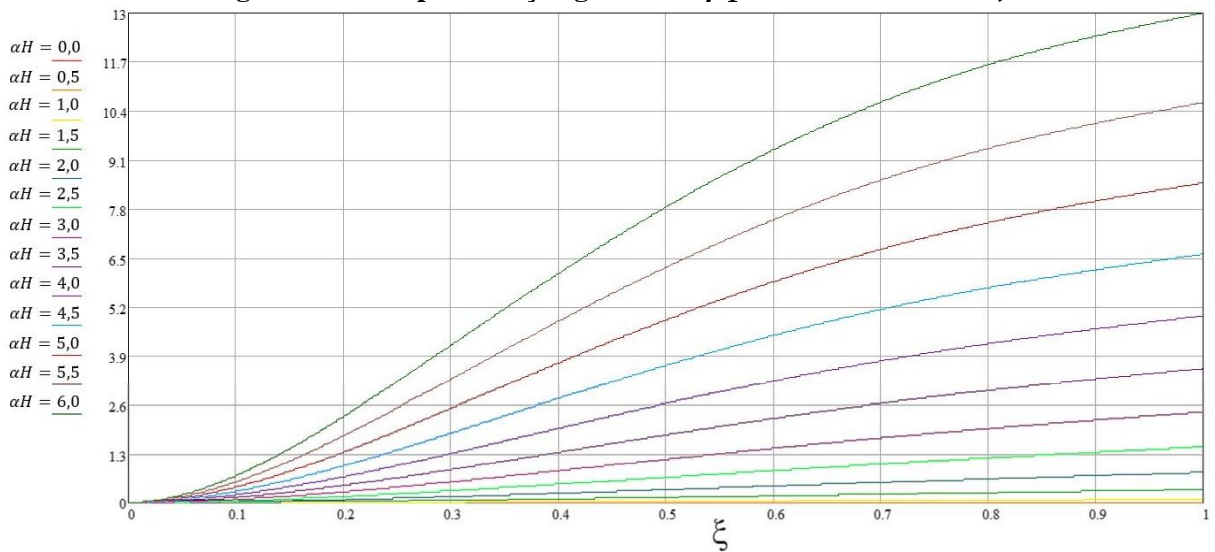
$$\beta_1 = - \left\{ \frac{1 - \cosh(\alpha H \xi)}{\cosh(\alpha H)} + (\alpha H) \cdot \tanh(\alpha H) \cdot [1 - \cosh(\alpha H \xi)] + (\alpha H)^2 \cdot \left[ \frac{\xi^2}{2} - \xi + \frac{\sinh(\alpha H \xi)}{(\alpha H)} \right] \right\}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\cosh(\alpha H)} \cdot [-1 + \cosh(\alpha H \xi)] \quad ; \quad \beta_3 = -[\sinh(\alpha H \xi) - \cosh(\alpha H \xi) \cdot \tanh(\alpha H) - (\alpha H) \cdot \xi]$$

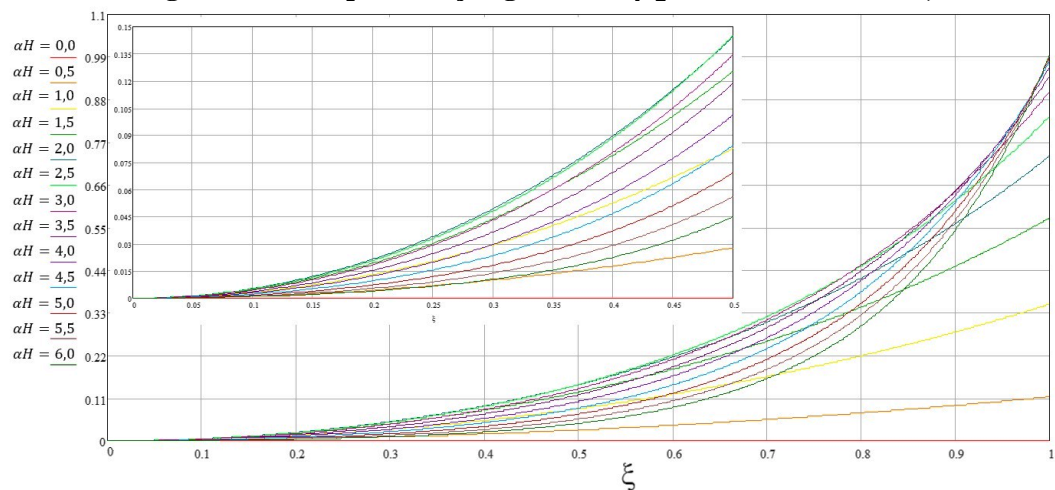
onde:  $\text{Senh}(\alpha \cdot x) \equiv \text{Senh}\left(\alpha \cdot H \cdot \frac{x}{H}\right) \equiv \text{Senh}(\alpha H \xi)$  e  $\text{Cosh}(\alpha \cdot x) \equiv \text{Cosh}(\alpha H \xi)$ .

$$\begin{aligned} \text{bem como: } \beta_4 &= \beta_1^I & ; & \quad \beta_7 = \beta_1^{II} & ; & \quad \beta_{10} = \beta_1^{III} \\ \beta_5 &= \beta_2^I & ; & \quad \beta_8 = \beta_2^{II} & ; & \quad \beta_{11} = \beta_2^{III} \\ \beta_6 &= \beta_3^I & ; & \quad \beta_9 = \beta_3^{II} & ; & \quad \beta_{12} = \beta_3^{III} \end{aligned}$$

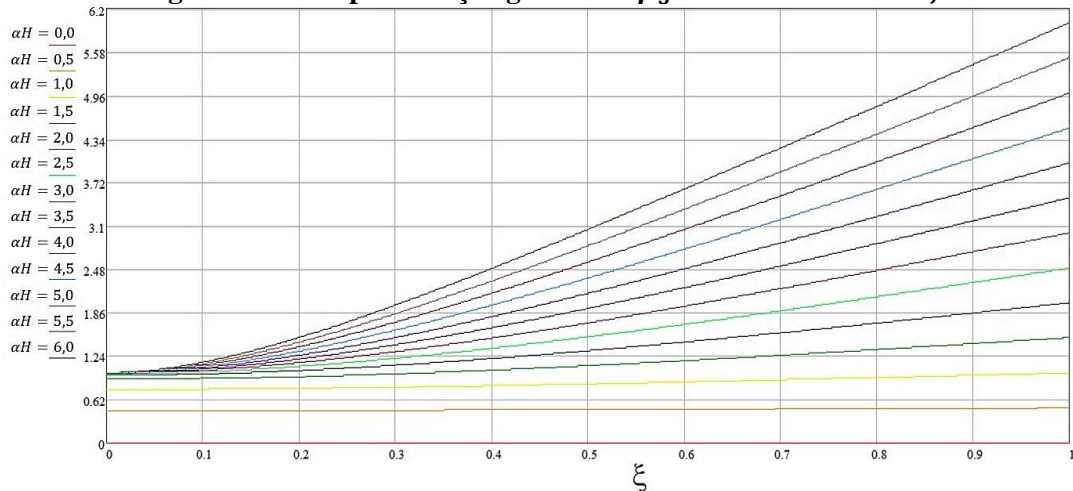
Por fim, nas Figuras 1.51 a 1.53 são apresentados os gráficos das funções adimensionais  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ .

**Figura 1.51 – Representação gráfica de  $\beta_1$  em termos de  $\alpha H$  e  $\xi$** 

Fonte: (Melo, 2019)

**Figura 1.52 – Representação gráfica de  $\beta_2$  em termos de  $\alpha H$  e  $\xi$** 

Fonte: (Melo, 2019)

**Figura 1.53 – Representação gráfica de  $\beta_3$  em termos de  $\alpha H$  e  $\xi$** 

Fonte: (Melo, 2019)

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO 1

BARBOSA, J. A. **Edifícios com paredes de secção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral**. Dissertação de Mestrado. São Carlos: EESC, 1978. Disponível online em: <http://sistemas.set.eesc.usp.br/producao/591>.

CAMPANARI, F.A. **Teoria das estruturas**. Vol. 3. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1985.

MELO, W. I. G. **Contribuições à análise dinâmica da ação do vento em Pilares de Pontes via Técnica do Meio Contínuo e Método dos Elementos Finitos**. Tese de Doutorado. João Pessoa: UFPB, 2019. Disponível online em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/19805>.

MORI, D. D.; MUNAIAR NETO, J. **Flexo-Torção: Barra com seção aberta e paredes delgadas – Teoria e Exemplos**. 2ª ed. São Carlos: EESC/USP, 2017. Disponível online, versão de 2003, em: <http://repositorio.eesc.usp.br/items/0f0c2e4c-4272-4325-a099-f9c55836542f>.

PROENÇA, S.P.B. **Mecânica das estruturas aeronáuticas**. Volume II. São Carlos: EESC/USP, 2009. Disponível online em: <http://repositorio.eesc.usp.br/items/7ea7ad97-b6cd-481d-bab5-a32d51e6525e>

SMITH, B. S.; COULL, A. **Tall Building Structures: Analysis and Design**. New York: John Wiley & Sons, 1991.

VLASSOV, B. Z. **Pièces longues em voiles minces**. Traduite par G. Smirnoff. Paris: Éditions Eyrolles, 1962.



## 2.1 APLICABILIDADE DA TMC EM ESTRUTURAS CIVIS

### a) Contextualização

Ao empregar a técnica contínua para a análise de estruturas é perceptível a simplificação no processamento dos dados, visto a brutal redução no número de parâmetros envolvidos. Em geral, o estudo de estruturas planas é processado com apenas uma incógnita: a deflexão lateral ( $v$ ); já o estudo tridimensional remete a três incógnitas: os três graus de liberdade linearmente independente ( $u$ ,  $v$  e  $\theta$ ). Ver Figura 2.1.

A título informativo, as modelagens discretas de estruturas podem ser processadas via: Método dos Elementos Finitos – MEF – (a exemplo de Brebbia e Ferrante (1975)), Método dos Elementos de Contorno – MEC – (exemplificado por Brebbia, Telles e Wrobel (1984)) e o Método das Diferenças Finitas – MDF – (bem ilustrado e delineado em Guelfond (1963)).

Ademais, a precisão dos resultados obtidos via métodos discretizados dependem principalmente do refinamento da malha, tanto no tamanho do passo discretizado (tamanho do elemento para o MEF e da quantidade de pontos para o MDF, por exemplo), quanto do tipo e grau da função interpoladora.

Para o caso da discretização por MEF pode-se elencar os tipos de elementos finitos, conforme Dhett *et. al* (2005), como: 1. de continuidade  $C^0$ , 2. de continuidade  $C^1$  e 3. de continuidade  $C^2$ . Independente do nível de análise: 1. Unidimensional (1D), 2. Bidimensional (2D) ou 3 Tridimensional (3D).

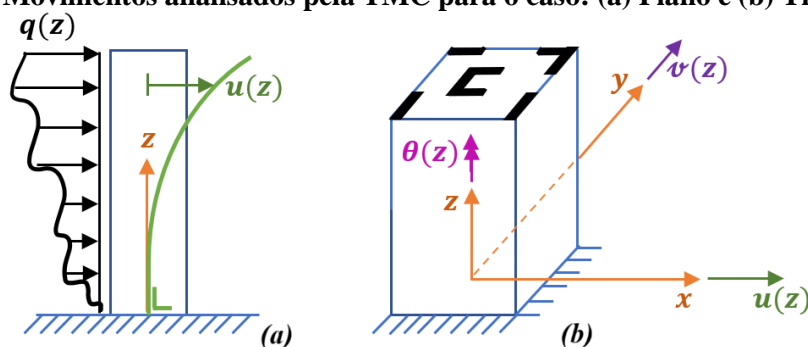
Antes do detalhamento sobre os avanços ocorridos na análise de sistemas de contraventamento pela técnica contínua é imprescindível sua definição formal:

**Definição da Técnica do Meio Contínuo:** É o modelo matemático utilizado para análise aproximada de estruturas, frisando movimento horizontal quando a formulação for plana e o conjunto de deslocamentos na base linearmente independente quando se tratar de problemas tridimensionais. Conforme Laier (2024). Ademais, é usual que a sigla da técnica seja TMC.

Já no caso da modelagem de painéis de contraventamento pela TMC é relevante mencionar que a ligação e travamento, por entre os citados, ocorre através das lajes do edifício. O modelo estrutural da ligação é por meio da transformação dos diafragmas (lajes) em barras biarticuladas ou pela associação apresentadas em Stamato (1971b) e Laier (1984).

Na Figura 2.1 são evidenciados os deslocamentos analisados para os casos plano e tridimensional, sempre expressos por funções contínuas da variável  $z$ , na altura da edificação.

**Figura 2.1 – Movimentos analisados pela TMC para o caso: (a) Plano e (b) Tridimensional**



Fonte: O Autor (2025)

Os mesmos conceitos da TMC são debatidos com mais detalhes em Stamato (1971b) para a formulação estática. Neste sentido, é imprescindível definir os elementos que compõem os painéis de contraventamento, como os seguintes:

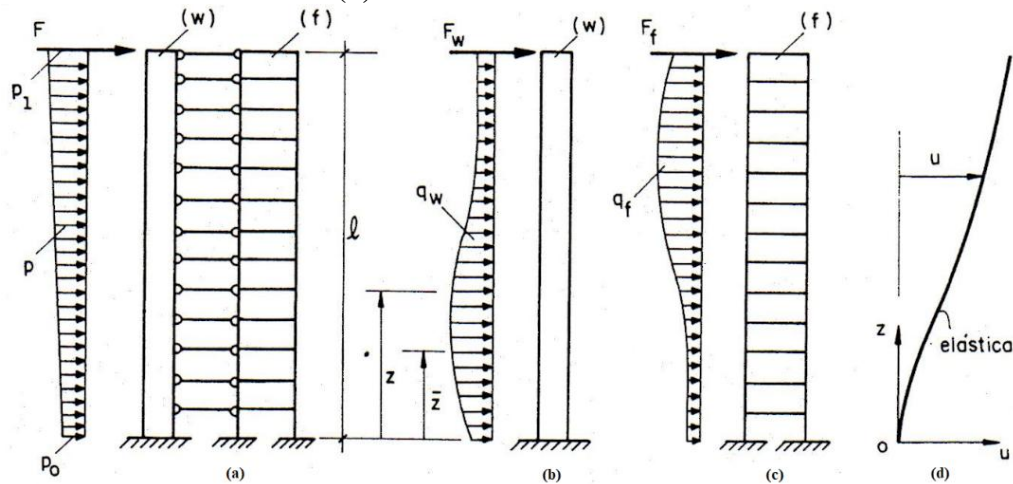
- **Definição do Pannel Parede:** É um pannel plano de contraventamento deformável preponderante à flexão e com elevada rigidez ao corte. Vide a Figura 2.2 (b);
- **Definição do Pannel Pórtico Plano:** É um pannel plano de contraventamento deformável preponderantemente ao corte (esforço cortante) e com elevada rigidez à flexão, conforme ilustrado na Figura 2.2 (c);
- **Definição do Pannel Núcleo:** É um pannel tridimensional de contraventamento e caracterizado pela associação de painéis Parede formando núcleo de seção de paredes finas aberta, em geral no formato de C e de duplo T, de acordo com a Figura 2.20 (a);
- **Definição da Associação Plana (em série):** É a ligação uniforme na altura e por entre os painéis de Pórtico Plano e Parede, em geral, que decorrem do travamento ocasionado pelos diafragmas ou por vigas. A ligação pode se dar por *barras biarticulares* para as lajes e por *lintéis* para as vigas. O modelo desta associação é exemplificado na Figura 2.2 (a), enquanto a deformada consta na Figura 2.2 (d);
- **Definição da Associação Tridimensional:** É a ligação contínua de um conjunto de painéis de contraventamento, não dispostos em um único plano vertical. O travamento ocorre pelos diafragmas, semelhante ao caso de associação plana. Ao final, conclui-se modelagem apenas de: 1. Paredes, 2. Pórticos Planos e 3. Molas de torção. Visto que os núcleos podem ser substituídos por duas paredes perpendiculares e independentes com

mola de torção associada, além de posicionamento no centro de torção do núcleo substituído (ver item e deste 2.1). A Figura 2.4 (c) ilustra este modelo de associação; e

- **Definição de Diafragmas** São as lajes dos Edifícios Altos e que são modeladas como infinitamente rígida em seu plano e flexíveis transversalmente (rigidez transversal desprezível). Permitem a transmissão integral das deformações sofridas ao painel à jusante.

Cabe ainda mencionar que as barras biarticuladas são supostas de rigidez transversal desprezível e infinitamente rígida no plano, de modo a transmitir integralmente as deformações sofridas ao pórtico, isso para Edifícios Altos.

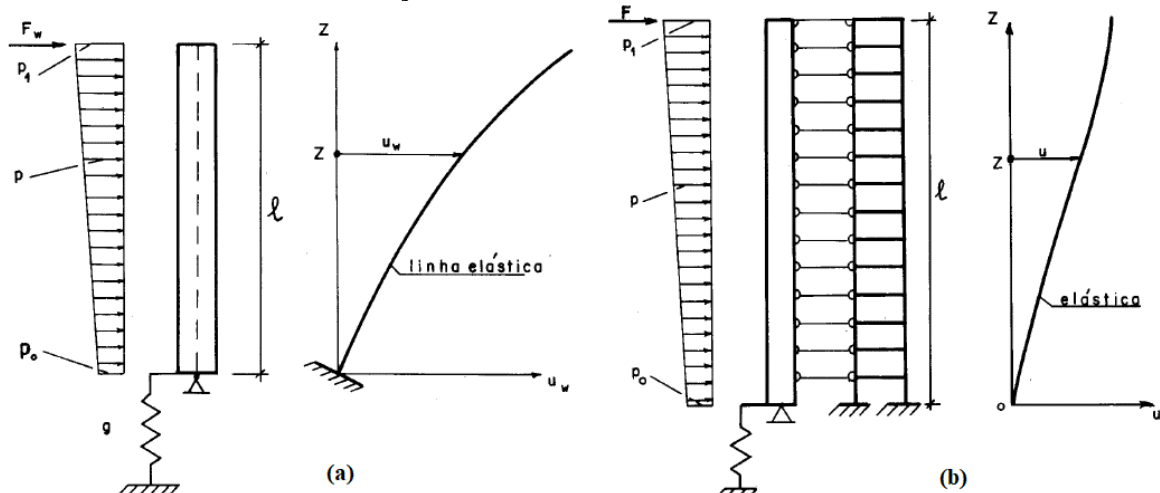
**Figura 2.2 – Painéis planos de contraventamento: (a) Associação em série, (b) Parede, (c) Pórtico e (d) deslocamentos horizontais**



Fonte: (STAMATO, 1971b)

Dos avanços da TMC relativos a modelagem de painéis Parede pode-se Mancini (1972), considerando base engastada elasticamente e inclusive associado aos Pórticos Plano por meio de barras biarticuladas. A modelagem do apoio por engastamento elástico é baseado no momento  $M_0$ , na rotação  $\phi$  do apoio e na rigidez  $g$  do citado engastamento. Vide Figura 2.3.

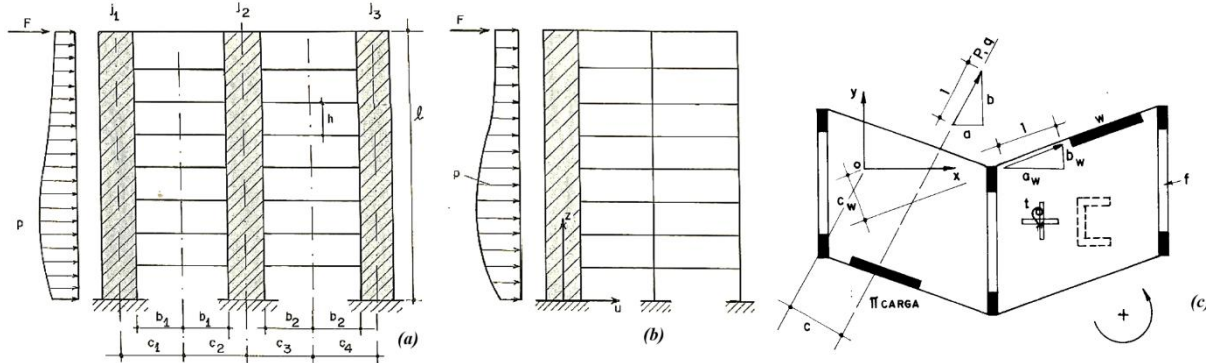
**Figura 2.3 – Painéis planos de contraventamento: (a) Parede com base engastada elasticamente, (b) Associação de Parede com base elástica e Pórtico**



Fonte: (Mancini, 1972)

Já em Mancini (1973) a associação plana dos painéis é realizada pelos lintéis que por sua vez modelam a vinculação das vigas. Na Figura 2.4 (a) é ilustrada a associação plana entre três paredes, enquanto na Figura 2.4 (b) consta a associação plana de Parede com Pórtico Plano, ambas por meio de lintéis uniformemente distribuídos na altura dos painéis. Além disto, constata-se que não existem esforços normais devido a brutal rigidez axial dos Diafragmas.

**Figura 2.4 – Painéis associados em séries com lintéis: (a) Parede, (b) Parede e Pórtico**



Fonte: (Mancini, 1973) e (Proença, 1981)

Enquanto, a solução das equações diferenciais oriundas do processamento via técnica do meio contínuo é realizada pelo método das diferenças finitas, tanto em Mancini (1973) quanto em seus discípulos. No citado trabalho é constatada a utilização do Método das Diferenças Finitas como de boa convergência e de excelentes resultados. De modo geral, a validação numérica dos resultados pode ser realizada por solução exata ou por outros métodos numéricos, a exemplo do Método de Stodola-Vianello.

## b) Hipóteses básicas

Nesta primeira abordagem da TMC serão adotadas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- ❖ Procede-se a substituição dos lintéis, dispostos na altura da edificação, por um meio contínuo de características mecânicas equivalentes, a exemplo de área, momento de inércia, e esforço cortante total;
- ❖ Os lintéis são considerados como barras biengastadas nos painéis – parede adjacentes, porém, na prática, há certa rotabilidade das referidas ligações. Ver Figura 2.5;

**Figura 2.5 – Modelagem das vinculações mais realísticas para os lintéis**



Fonte: O Autor (2025)

- ❖ Procede-se com o estabelecimento das equações de compatibilidade das deformações dos painéis – parede adjacentes aos lintéis;
- ❖ Uma função  $f(x)$  representará o esforço cortante nos lintéis, isso no meio contínuo equivalente;
- ❖ A altura dos pisos é expressa por  $h$  e considerada constante ao longo da edificação;
- ❖ O momento de inércia dos lintéis é desprezível, em relação aos momentos de inércia dos painéis – parede;
- ❖ Os painéis – parede, para edifícios altos, são modelados como engastados na fundação (base).

### c) Paredes de Corte

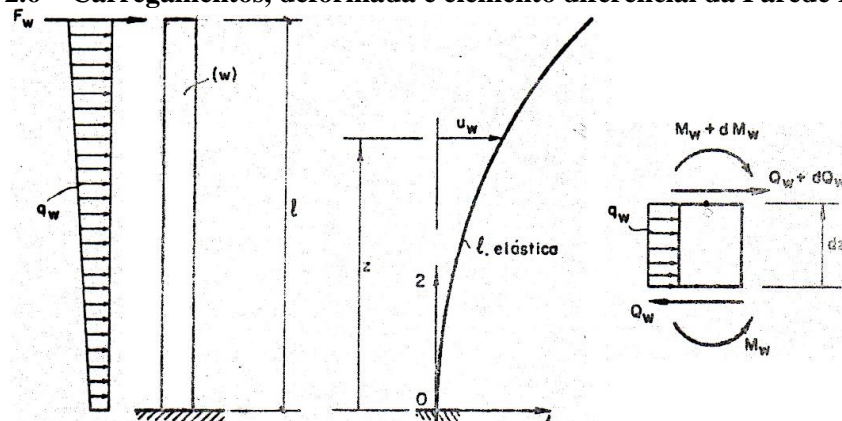
O emprego da Técnica do Meio Contínuo serve muito bem para descrever o comportamento macroscópico da estrutura e, inclusive, reduz bastante o número de parâmetros elásticos e geométricos. Porém cada mudança na geometria e nas propriedades estruturais implicam em uma nova dedução e formulação de outra rotina de cálculo.

Enquanto a utilização de métodos de discretização (MEF, MDF, MEC e etc.) são mais flexíveis e resolvem diversos modelos estruturais sem nova formulação. A exemplo da resolução de edificações pelo mesmo programa em MEF, inclusive com geometria e/ou propriedades elasto-mecânicas diversas. Desta forma, este mecanismo agrega possibilidade de discretização de estruturas com variadas formas, sem necessidade de nova formulação.

#### c.1) Caso usual com base engastada

**Definição de Parede:** Acrescendo a definição já apresentada anteriormente, tem-se que advém do inglês “*Wall*”, sendo um elemento estrutural rígido ao esforço cortante e deformável apenas ao momento fletor. Este elemento estrutural, devido a sua elevada resistência ao corte, pode ser nomeado de **Paredes de Corte**, o que no inglês remete à “*Shear-Wall*”, conforme funcionamento ilustrado na Figura 2.6.

**Figura 2.6 – Carregamentos, deformada e elemento diferencial da Parede Isolada**



FONTE: (Stamato, 1971b)

Os parâmetros analisados são os seguintes:

$u_w$  – Deslocamento na Parede em função da altura  $Z$ ;

$q_w$  – Força horizontal distribuída em forma de trapézio na altura total  $\ell$ ; e

$F_w$  – Força horizontal aplicada no topo da parede.

Iniciando a análise, equilibra-se o elemento diferencial da parede apresentada na Figura 2.6. O equilíbrio ocorre em momento e em forças horizontais, respectivamente expressos por:

$$\frac{dM_w}{dZ} = -Q_w \quad (eq. 2.1 a)$$

$$\frac{dQ_w}{dZ} = -q_w \quad (eq. 2.1 b)$$

com:  $Q_w$  – Esforço cortante da parede em função da altura e do carregamento lateral; e

$M_w$  – Momento fletor da parede em função da altura e do carregamento lateral.

Ao aplicar a eq. (2.1 b) na derivada da eq. (2.1 a) escreve-se a relação do momento fletor com a carga distribuída  $q_w$ , como:

$$\frac{d^2 M_w}{dZ^2} = q_w \quad (eq. 2.2)$$

Admitida a ação do vento pode-se escrever a carga horizontal pela seguinte função:

$$q_w(Z) = \left( \frac{q_1 - q_0}{\ell} \right) \cdot Z + q_0 \quad (eq. 2.3)$$

com:  $q_w$  – a função do carregamento horizontal;

$q_1$  – o valor da carga horizontal distribuída, no topo da parede ( $Z = \ell$ ); e

$q_0$  – o valor da carga horizontal distribuída, para a base da parede ( $Z = 0$ ).

Ao integrar duas vezes a eq. (2.2) explicita-se a função do momento fletor  $M_w$ , como:

$$M_w(Z) = \left( \frac{q_1 - q_0}{\ell} \right) \cdot \frac{Z^6}{6} + q_0 \cdot \frac{Z^2}{2} + C_1 \cdot Z + C_2 \quad (eq. 2.4)$$

O emprego das condições de contorno em esforços solicitantes propicia a determinação dos coeficientes de integração presentes na eq. (2.4). A condição de contorno em momento fletor nulo é aplicada no topo da parede [ $M_w(Z = \ell) = 0$ ], bem como, a segunda condição de nulidade no corte [ $Q_w(Z = \ell) = 0$ ]. Assim, o momento fletor ao longo do eixo da parede é expresso por:

$$M_w(Z) = \left( \frac{q_1 - q_0}{\ell} \right) \cdot \frac{Z^6}{6} + q_0 \cdot \frac{Z^2}{2} - \left[ F_w + (q_0 + q_1) \cdot \frac{\ell}{2} \right] \cdot Z + F_w \cdot \ell + (q_0 + 2 \cdot q_1) \cdot \frac{\ell^2}{6} \quad (eq. 2.5)$$

Agora, partindo da equação diferencial da linha elástica para a teoria de deformação dos eixos, de Euler-Bernoulli (Navier) é possível expressar a deflexão lateral  $u_w(Z)$ , via:

$$(E_w \cdot I_w) \cdot \frac{d^2 u_w(Z)}{dZ^2} = M_w(Z) \quad (eq. 2.6)$$

Inserindo a eq. (2.5) na eq. (2.6), integrando duas vezes e aplicando as condições de contorno de nulidade de deflexão [ $u_w(0) = 0$ ] e de rotação [ $\theta(0) \approx u'_w(0) = 0$ ], sempre na base e obtém-se:

$$(E_w \cdot I_w) \cdot u_w(Z) = (q_1 - q_0) \cdot \frac{Z^5}{120 \cdot \ell} + q_0 \cdot \frac{Z^4}{24} - C_1 \cdot \frac{Z^3}{6} + C_2 \cdot \frac{Z^2}{2} + C_3 \cdot Z + C_4 \quad (eq. 2.7)$$

com:  $C_1 = \left[ F_w + (q_0 + q_1) \cdot \frac{\ell}{2} \right]$ ;  $C_2 = \left[ F_w \cdot \ell + (q_0 + 2 \cdot q_1) \cdot \frac{\ell^2}{6} \right]$  já determinados na eq. (2.5).  
e:  $C_3 = C_4 = 0$ .

A expressão da deflexão lateral da parede com base engastada e submetida à ação do vento, apresentada na Figura 2.6, é expressa como:

$$u_w(Z) = \frac{1}{(E_w \cdot I_w)} \cdot \left\{ (q_1 - q_0) \cdot \frac{Z^5}{120 \cdot \ell} + q_0 \cdot \frac{Z^4}{24} - C_1 \cdot \frac{Z^3}{6} + C_2 \cdot \frac{Z^2}{2} \right\} \quad (eq. 2.8)$$

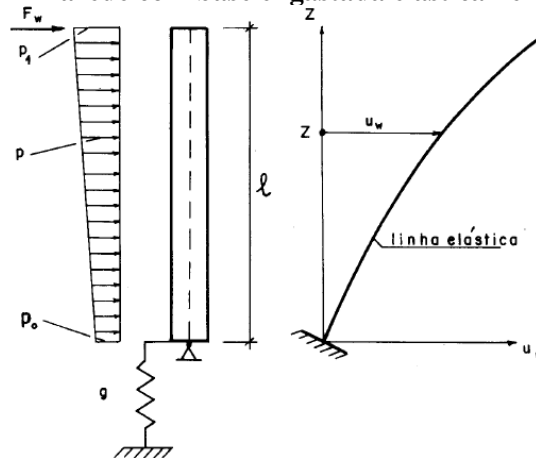
Ao adotar a simplificação da não aplicação de carga concentrada [ $F_w = 0$ ] no topo da parede, além de carga do vento uniformemente distribuída na altura, escreve-se a expressão da deflexão lateral  $u_w(Z)$ , como:

$$u_w(Z) = \frac{q_w \cdot \ell^4}{24 \cdot (E_w \cdot I_w)} \cdot \left[ \left( 1 - \frac{Z}{\ell} \right)^4 + 4 \cdot \frac{Z}{\ell} - 1 \right] \quad (eq. 2.9)$$

### c.2) Caso especial, com base elástica e formulação simplificada

A consideração da base elástica por mola modifica apenas o coeficiente  $C_3$ , do processo da eq. (2.1) até a eq. (2.7). Dito isto, na Figura 2.7 é apresentada a parede com base elástica, bem como sua deformada e caracterizada rotação da base ser função do coeficiente  $g$  de mola e do momento fletor nulo [ $M_w(0) = 0$ ] na base.

**Figura 2.7 – Parede com base engastada elasticamente e sua deformada**



Fonte: (Mancini, 1972)

O momento fletor na base é reescrito a partir da eq. (2.5) ao impor a simplificação de ação do vento no formato uniformemente distribuído na altura [ $F_w = 0$  e  $q_w = Cte$ ], como:

$$M_w(Z = 0) = \frac{q_w \cdot \ell^2}{2} \quad (\text{eq. 2.10 a})$$

sendo a rotação da base admitida como:

$$\theta(0) \approx \left. \frac{du_w(Z)}{dZ} \right|_{Z=0} = \frac{M_w(Z = 0)}{g} = \frac{q_w \cdot \ell^2}{2 \cdot g} \quad (\text{eq. 2.10 b})$$

A eq. (2.10 b) é condição de contorno necessária e suficiente para determinar o coeficiente  $C_3$  de integração, como:

$$u_w(Z) = \frac{q_w \cdot \ell^4}{24 \cdot (E_w \cdot I_w)} \cdot \left[ \left(1 - \frac{Z}{\ell}\right)^4 + 4 \cdot \frac{Z}{\ell} - 1 \right] + \frac{q_w \cdot \ell^2}{2 \cdot g} \quad (\text{eq. 2.11})$$

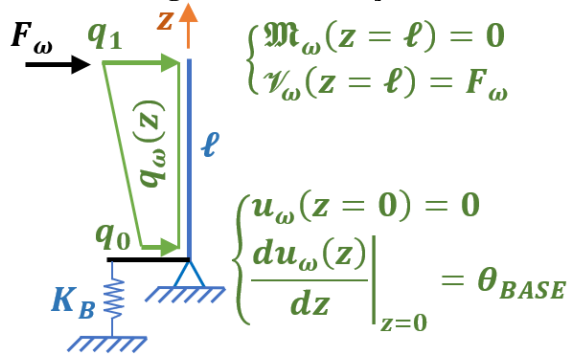
com:  $C_3 = (E_w \cdot I_w) \cdot \frac{q_w \cdot \ell^2}{2 \cdot g}$ .

**Observação:** O coeficiente  $C_4$  de integração é determinado a partir da nulidade da deflexão lateral na base [ $u_w(0) = 0$ ], sendo assim nulo [ $C_4 = 0$ ].

### c.3) Caso especial, com base elástica e formulação completa

Agora obtendo a função do deslocamento horizontal  $u_\omega(z)$  para o caso especial apresentado na Figura 2.8 e com a formulação isenta das simplificações expostas anteriormente.

**Figura 2.8 – Caso de carregamento e condições de contorno para o caso especial**



Fonte: O Autor (2025)

Dito isto, em forma de etapas dedutivas elencam-se as seguintes:

✓ **Expressão do Momento Fletor:**

$$\mathfrak{M}_\omega(z) = \frac{(q_1 - q_0)}{6 \cdot \ell} \cdot z^3 + \frac{q_0}{2} \cdot z^2 - \left[ F_\omega + (q_0 + q_1) \cdot \frac{\ell}{2} \right] \cdot z + \left[ F_\omega \cdot \ell + (2 \cdot q_1 + q_0) \cdot \frac{\ell^2}{2} \right] \quad (\text{eq. 2.12})$$

✓ **Momento Fletor na parede de corte:**

$$\mathfrak{M}_{\omega_{BASE}} \equiv \mathfrak{M}_\omega(z = 0) = F_\omega \cdot \ell + (2 \cdot q_1 + q_0) \cdot \frac{\ell^2}{2} \quad (\text{eq. 2.13})$$

✓ **Rotação na base da parede de corte:**

Através da definição básica de molas é possível expressar, como:

$$\mathfrak{M}_{\omega_{BASE}} = K_B \cdot \theta_{BASE} \quad \therefore \quad \theta_{BASE} = \frac{1}{K_B} \cdot \left[ F_{\omega} \cdot \ell + (2 \cdot q_1 + q_0) \cdot \frac{\ell^2}{2} \right] \quad (eq. 2.14)$$

✓ **Equação da linha elástica:**

$$(E_{\omega} \cdot I_{\omega}) \cdot \frac{d^2 u_{\omega}(z)}{dz^2} = \mathfrak{M}_{\omega}(z) \quad (eq. 2.15)$$

↪ Integrando a eq. (2.15), tem-se:

$$(E_{\omega} \cdot I_{\omega}) \cdot \frac{du_{\omega}(z)}{dz} = \frac{(q_1 - q_0)}{24 \cdot \ell} \cdot z^4 + \frac{q_0}{6} \cdot z^3 - \left[ F_{\omega} + (q_0 + q_1) \cdot \frac{\ell}{2} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot z^2 + \left[ F_{\omega} \cdot \ell + (2 \cdot q_1 + q_0) \cdot \frac{\ell^2}{2} \right] \cdot z + C_3 \quad (eq. 2.16)$$

↪ Aplicando a condição de contorno de rotação na base:

$$\theta_{BASE} \cong \left. \frac{du_{\omega}(z)}{dz} \right|_{z=0} = \frac{0 + 0 - 0 + 0 + C_3}{(E_{\omega} \cdot I_{\omega})}$$

↪ utilizando a expressão definida na eq. (14), constata-se:

$$C_3 = \frac{(E_{\omega} \cdot I_{\omega})}{K_B} \cdot \left[ F_{\omega} \cdot \ell + (2 \cdot q_1 + q_0) \cdot \frac{\ell^2}{2} \right] \quad (eq. 2.17)$$

↪ Integrando a eq. (2.16), tem-se:

$$(E_{\omega} \cdot I_{\omega}) \cdot u_{\omega}(z) = \frac{(q_1 - q_0)}{120 \cdot \ell} \cdot z^5 + \frac{q_0}{24} \cdot z^4 - \left[ F_{\omega} + (q_0 + q_1) \cdot \frac{\ell}{2} \right] \cdot \frac{1}{6} \cdot z^3 + \left[ F_{\omega} \cdot \ell + (2 \cdot q_1 + q_0) \cdot \frac{\ell^2}{2} \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot z^2 + C_3 \cdot z + C_4 \quad (eq. 2.18)$$

↪ Aplicando a condição de contorno de deslocamento lateral nulo na base:

$$0 \equiv u_{\omega}(z = 0) = 0 + 0 - 0 + 0 + C_3 \cdot 0 + C_4 \quad \therefore \quad C_4 = 0 \quad (eq. 2.19)$$

✓ **Expressão da deflexão lateral e horizontal:**

Impor na eq. (2.18) os coeficientes de integração,  $C_3$  e  $C_4$ , apresentados nas eq.'s (2.17) e (2.19):

$$u_{\omega}(z) = \frac{\ell^4}{120 \cdot J_{\omega}} \cdot \left\{ A \cdot \left( 1 + \frac{z}{\ell} \right)^5 + B \cdot \left( \frac{z}{\ell} \right)^4 + C \cdot \left( \frac{z}{\ell} \right)^3 + D \cdot \left( \frac{z}{\ell} \right)^2 + E \cdot \left( \frac{z}{\ell} \right) + F \right\} \quad (eq. 2.20)$$

$$\text{sendo: } J_{\omega} = E_{\omega} \cdot I_{\omega} \quad ; \quad J_B = \frac{K_B \cdot \ell}{J_{\omega}}$$

$$A = q_1 - q_0 \quad ; \quad B = -5 \cdot (q_1 - 2 \cdot q_0)$$

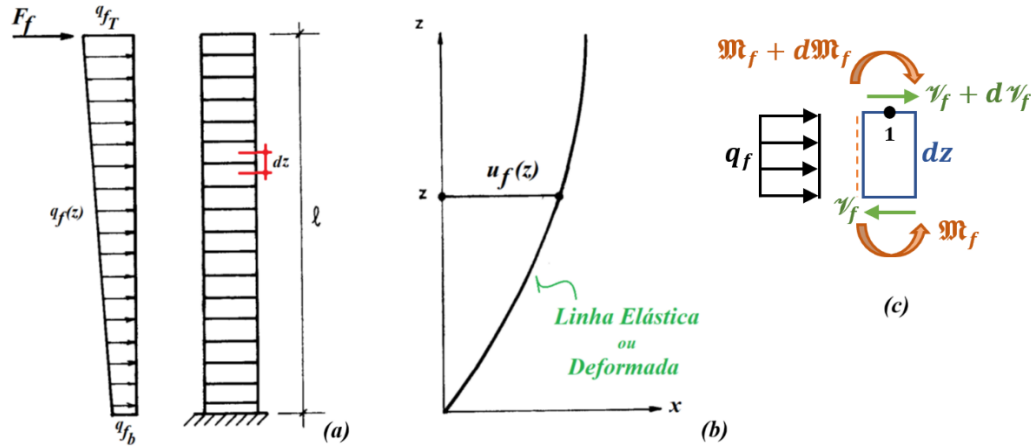
$$C = -20 \cdot \left( q_1 + \frac{F_{\omega}}{\ell} \right) \quad ; \quad D = 10 \cdot \left( q_1 + 2 \cdot q_0 + 6 \cdot \frac{F_{\omega}}{\ell} \right)$$

$$F = -A \quad ; \quad E = q_1 \cdot \left( \frac{40}{J_B} - 5 \right) + q_0 \cdot \left( \frac{20}{J_B} + 5 \right) + \frac{120}{J_B} \cdot \frac{F_{\omega}}{\ell}$$

## d) Pórtico Plano

Os Pórticos Planos, do inglês “Frames”, é um elemento estrutural com nó de ligação entre os pilares e vigas/lintéis rigidizados por sistema rígido. Cabe ainda mencionar que os pórticos com pilares muito robustos em relação aos lintéis podem ser modelados como associação de Paredes de Corte “*Shear Wall*”. Ver o modelo de pórtico plano na Figura 2.9, com pilares com seção transversal da mesma ordem de grandeza dos lintéis.

**Figura 2.9 – Modelo de pórtico plano: (a) geometria, carregamentos e definição do comprimento diferencial, (b) deformada lateral do pórtico e (c) elemento diferencial da coluna esquerda**



FONTE: Adaptado de (Mancini, 1972)

Equilibrando o elemento diferencial apresentado na Figura 2.9 (c), concluem-se as seguintes relações diferenciais:

$$\sum_{\rightarrow(+)} F_H = 0 \quad \therefore \quad -Q_f + (Q_f + dQ_f) + q_f \cdot dz = 0 \quad \therefore \quad \frac{dQ_f}{dz} = -q_f \quad (eq. 2.21 a)$$

$$\sum_{\rightarrow(+)} M_1 = 0 \quad \therefore \quad (M_f + dM_f) - M_f + Q_f \cdot dz - \frac{q_f \cdot dz^2}{2} = 0 \quad \therefore \quad \frac{dM_f}{dz} = -Q_f \quad (eq. 2.21 b)$$

Deriva-se a equação (2.21 b) e após aplicação na equação (2.21 a), tem-se a relação diferencial entre o momento fletor e carga distribuída  $q_f$ , expressa por:

$$\frac{d^2 M_f}{dz^2} = q_f \quad (eq. 2.22)$$

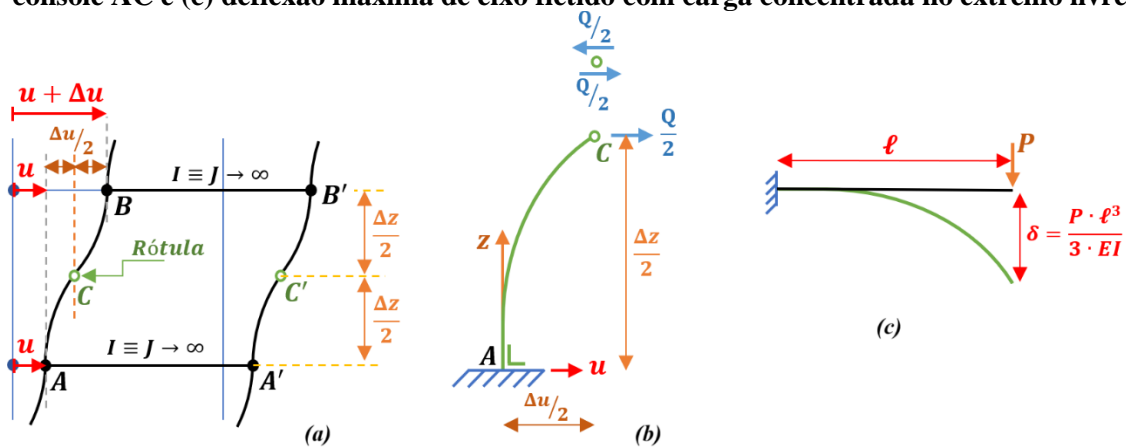
A fim de obter um coeficiente  $s_f$  de rigidez para um pórtico/quadro formado por dois pilares iguais e vigas com rigidez à flexão infinita, tem-se as seguintes hipóteses:

- Despreza-se o efeito de deformação axial dos pilares;
- Os centros dos vãos dos pilares são pontos de momento fletor nulo, logo pontos de inflexão, onde se impõe o esforço cortante em caso de análise particionada (ver Figura 2.10 b);

- Não haverá rotação dos nós; e
- As vigas sofrem deformação de corpo rígido, deslizando simplesmente na horizontal, devido a consideração da rigidez à flexão ( $I \equiv J = \infty$ ) da viga como infinita.

Na Figura 2.10 (a) é apresentado o estado deformado de um quadro formado entre duas vigas/lintéis consecutivos, bem como, na Figura 2.10 (b) é ilustrado o funcionamento do console AC em detrimento da deformação máxima canonizada nas cátedras de Resistência dos Materiais, presente na Figura 2.10 (c).

**Figura 2.10 – Deformação do quadro formado entre dois lintéis consecutivos: (a) indicação das rotações e deslocamentos à flexão nos pilares e de corpo rígido nos lintéis, (b) deformada do console AC e (c) deflexão máxima de eixo fletido com carga concentrada no extremo livre**



FONTE: O Autor (2025)

Da análise, conclui-se:

$$\delta = \frac{P \cdot \ell^3}{3 \cdot EI} \leftrightarrow \begin{cases} \delta = \frac{\Delta u}{2} \\ P = \frac{Q}{2} \\ \ell = \frac{\Delta z}{2} \end{cases}$$

Ficando: 
$$\frac{\Delta u}{2} = \frac{1}{3 \cdot EI} \cdot \frac{Q}{2} \cdot \left(\frac{\Delta z}{2}\right)^3 \quad \therefore \quad \Delta u = \frac{Q \cdot \Delta z^3}{24 \cdot EI}$$

Agora: 
$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{Q \cdot \Delta z^2}{24 \cdot EI} \quad (eq. 2.23)$$

Cujo coeficiente de rigidez, por definição, é expresso por:

$$P = k \cdot \delta$$

sendo:  $P$  – a carga aplicada;

$k$  – o coeficiente de rigidez, o que neste caso remete ao coeficiente  $k_f$ ; e

$\delta$  – o deslocamento do ponto de inflexão.

e da análise da equação (2.23), tem-se:

$$Q = 24 \cdot \frac{EI}{\Delta z^2} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta z} \quad \leftrightarrow \quad Q_f = s_f \cdot \frac{du}{dz} \quad (\text{eq. 2.24 a})$$

onde a rigidez do console é expressa por:  $s_f = 24 \cdot \frac{EI}{\Delta z^2}$  (eq. 2.24 b)

enquanto que a rigidez do nó de pórtico, considerando a ligação do pilar com os lintéis, é escrita como:

$$s_f = \frac{12 \cdot E}{h} \sum_n \left\{ k_p \cdot \frac{\sum_v k}{\sum_b k} \right\} \quad (\text{eq. 2.25})$$

sendo:  $E$  – Módulo de elasticidade longitudinal, das barras (pilares e lintéis);

$h$  – O pé-direito dos andares, ou seja, a distância vertical de eixo a eixo de dois lintéis consecutivos;

$k$  – A relação entre o momento de inércia pelo vão, no caso de lintel, e pela altura para os pilares;

$n$  – O somatório em todos os nós do andar considerado;

$v$  – O somatório de todos os tramos de vigas que concorrem ao nó; e

$b$  – O somatório de todos os tramos de pilares que concorrem ao nó analisado.

#### **d.1) Análise Estática via equação do carregamento uniforme e desprezando a carga concentrada no topo**

Antes do início do equacionamento, faz-se relevante mencionar que a consideração de cargas concentradas pode ser realizada mediante implementação de funções de Macaulay, a exemplo do procedido em Alvarez (1981, p. XX.16 a XX.18). Assim, para o caso em tela, derivando a equação (2.24 a) e aplicando a equação (2.21 a) escreve-se a EDO do problema estático, como:

$$\begin{cases} \frac{dQ_f}{dz} = s_f \cdot \frac{d^2u}{dz^2} \\ \frac{dQ_f}{dz} = -q_f \end{cases} \quad \therefore \quad s_f \cdot \frac{d^2u}{dz^2} = -q_f$$

Ou ainda, reescrita como:  $\frac{d^2u(z)}{dz^2} = -\frac{1}{s_f} \cdot q_f(z)$  (eq. 2.26)

**- EDO do problema estático de pórticos planos com duas prumadas -**

sendo:  $q_f(z) = q_{fb} - (q_{fT} - q_{fb}) \cdot \frac{z}{H}$  – o termo particularizante da EDO e representativo do carregamento lateral apresentado na Figura 28 (a).

Por último:

$$s_f \cdot \frac{d^2u(z)}{dz^2} = -q_{fb} - \frac{(q_{fT} - q_{fb})}{H} \cdot z \quad (\text{eq. 2.27})$$

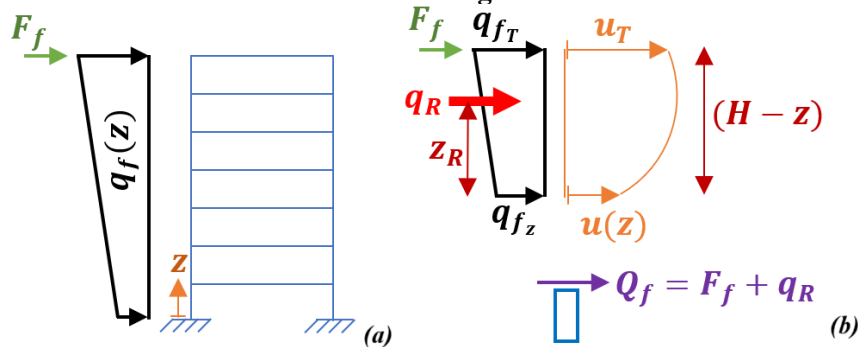
- EDO não homogênea e de ordem 2 -

### d.2) Análise Estática via esforço cortante

Outra forma de determinar a equação diferencial do problema estático de pórtico é via equilíbrio de esforços cortantes, interno e externo, ressaltando que o esforço cortante externo será produto da ação do carregamento e será recalculado a cada tipo/fonte de carregamento. Já o esforço cortante interno será oriundo do equacionamento apresentado no item “V” letra “c”, mais especificamente na equação (2.24 a).

Desta forma, na Figura 2.11 é apresentado o procedimento de determinação da expressão do esforço cortante devido à ação do carregamento externo.

**Figura 2.11 – Pórtico Plano modelado via TMC: (a) carregamento e (b) determinação do esforço cortante na cota genérica  $z$**



FONTE: O Autor (2025)

Deste modo, o esforço cortante externo é expresso por:

$$Q_f = F_f + (q_{fT} + q_{fz}) \cdot \frac{(H - z)}{2} \quad (\text{eq. 2.28})$$

$$\text{sendo: } q_R = (q_{fT} + q_{fz}) \cdot \frac{(H - z)}{2}; \quad z_R = \frac{(H - z)}{3} \cdot \frac{(2 \cdot q_{fT} + q_{fz})}{(q_{fT} + q_{fz})}.$$

E em consequência, para que o pórtico plano analisado esteja em equilíbrio faz-se necessária a equivalência do esforço cortante externo (eq. 2.28) com o esforço cortante interno (eq. 2.24 a). Do que, escreve-se:

$$s_f \cdot \frac{du(z)}{dz} = F_f + (q_{fT} + q_{fz}) \cdot \frac{(H - z)}{2} \quad (\text{eq. 2.29})$$

Agora substituindo  $q_{fz}$  em termos do eixo  $z$  e dos valores de carga na base, expresso por  $q_{fb}$ , e no topo do pórtico, expresso por  $q_{fT}$ , tem-se:

$$s_f \cdot \frac{du(z)}{dz} = F_f + \left[ q_{fT} + q_{fb} + (q_{fT} - q_{fb}) \cdot \frac{z}{H} \right] \cdot \frac{(H - z)}{2}$$

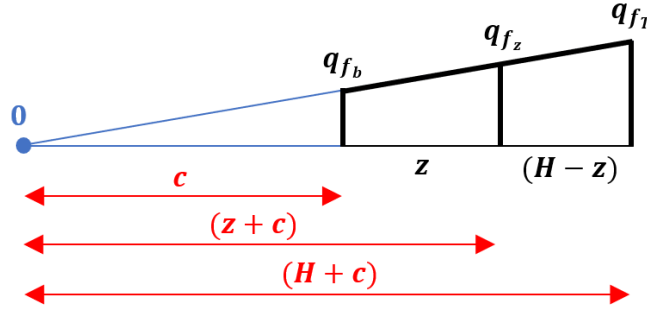
$$s_f \cdot \frac{du(z)}{dz} = F_f + q_{fT} \cdot \frac{H}{2} + q_{fb} \cdot \frac{H}{2} + (q_{fT} - q_{fb}) \cdot \frac{z}{2} - q_{fT} \cdot \frac{z}{2} - q_{fb} \cdot \frac{z}{2} - (q_{fT} - q_{fb}) \cdot \frac{z^2}{2 \cdot H}$$

$$s_f \cdot \frac{du(z)}{dz} = \left\{ \left[ F_f + \frac{H}{2} \cdot (q_{f_T} + q_{f_b}) \right] - q_{f_b} \cdot z - \frac{(q_{f_T} - q_{f_b})}{2 \cdot H} \cdot z^2 \right\} \quad (\text{eq. 2.30})$$

- EDO de 1ª ordem -

**Observação:** Expressar o valor de carga em coordenada genérica em termos dos valores dos extremos. Na Figura 2.12 é apresentada análise geométrica da função  $q_f(z)$  através de semelhanças de triângulo, utilizando-se do centro de convergência entre o eixo horizontal e a função.

**Figura 2.12 – Análise da convergência da função de carga até o ponto O**



FONTE: O Autor (2025)

De qual, escrevem-se as seguintes semelhanças:

$$\begin{aligned} \frac{q_{f_b}}{c} &= \frac{q_{f_T}}{H+c} \quad \therefore \quad c = \frac{q_{f_b}}{(q_{f_T} - q_{f_b})} \cdot H \\ \frac{q_{f_b}}{c} &= \frac{q_{f_z}}{z+c} \quad \therefore \quad \frac{\frac{q_{f_b}}{(q_{f_T} - q_{f_b})} \cdot H}{\frac{q_{f_b}}{(q_{f_T} - q_{f_b})} \cdot H} = \frac{q_{f_z}}{z + \frac{q_{f_b}}{(q_{f_T} - q_{f_b})} \cdot H} \end{aligned}$$

Concluindo-se que:

$$q_{f_z} = q_{f_b} + (q_{f_T} - q_{f_b}) \cdot \frac{z}{H} \quad (\text{eq. 2.31})$$

### d.3) Análise dinâmica

A partir das equações a seguir:

$$M_f^I = -Q_f \quad \rightarrow \quad M_f^{II} = -Q_f^I \quad (\text{eq. 2.32})$$

$$Q_f^I = m \cdot \ddot{u}_f \quad (\text{eq. 2.33})$$

$$u_f^I = \frac{Q_f}{s_f} \quad \rightarrow \quad u_f^{II} = \frac{Q_f^I}{s_f} \quad (\text{eq. 2.34})$$

Combinando as equações (2.32) e (2.34), pode-se expressar a derivada segunda do deslocamento lateral do pórtico plano, como:

$$M_f^{II} = -s_f \cdot u_f^{II} \quad (\text{eq. 2.35})$$

Ademais, lembrando da equação (2.32) inicial, ou seja, que a derivada do momento equivale ao esforço cortante em determinado ponto, é que se aplica a equação (2.33) na eq. (2.35) e chega-se a:

$$\begin{aligned} -Q_f^I &= -s_f \cdot u_f^{II} \\ -m \cdot \ddot{u}_f &= -s_f \cdot u_f^{II} \end{aligned} \quad \therefore \quad s_f \cdot u_f^{II} - m \cdot \ddot{u}_f = 0 \quad (\text{eq. 2.36})$$

Por fim, a equação diferencial parcial do problema dinâmico do pórtico plano com duas prumadas é expressa por:

$$u_f^{II} - \frac{m}{s_f} \cdot \ddot{u}_f = 0 \quad (\text{eq. 2.37 a})$$

O que pode ser reescrita sob a seguinte nomenclatura:

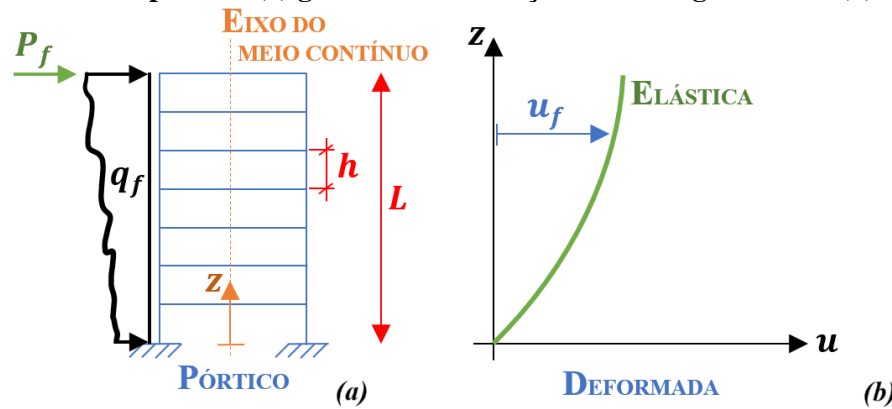
$$\frac{\partial^2 u_f(z, t)}{\partial z^2} - \frac{m}{s_f} \cdot \frac{\partial^2 u_f(z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{eq. 2.37 b})$$

**- EDP de ordem 2 para o Problema Dinâmico de Pórticos Planos com duas prumadas -**

#### d.4) Relação da elástica com o corte

Os painéis pórticos usuais são: i. Pórticos planos regulares; e ii. Painéis treliçados com diagonais bastante deformáveis, conforme exemplificação da Figura 2.13 para o primeiro caso.

**Figura 2.13 – Pánel pórtico: (a) geometria com a ação dos carregamentos e (b) deformada**



FONTE: O Autor (2025)

Além de deterem as seguintes características:

- ✓ Deformável perponderantemente por esforço cortante;
- ✓ Possui rigidez transversal desprezível;
- ✓ A deformação por momento fletor é insignificante;
- ✓ Pórticos planos são regulares e com rigidez dos pilares não supera exageradamente a rigidez das vigas.

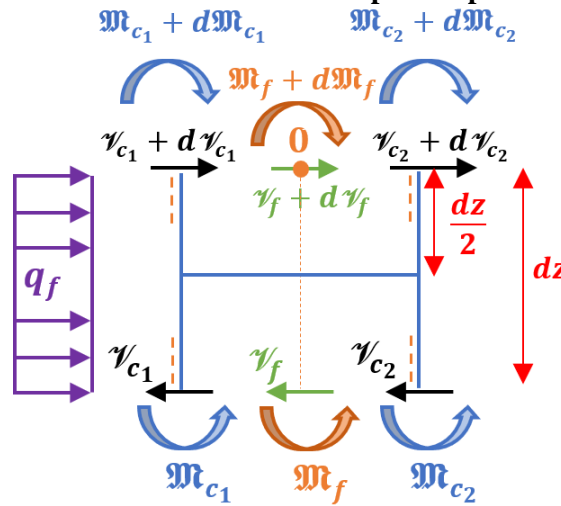
As hipóteses simplificadoras da TMC são elencadas como:

- ✓ Assimilar o pórtico a um consolo vertical contínuo;

- ✓ As vigas, de todos os andares, são tidas como idênticas;
- ✓ As colunas são supostas idênticas;
- ✓ A condições de equilíbrio do elemento de pórtico plano são semelhantes às verificadas na parede, visto independentemente do comportamento elástico;
- ✓ O momento fletor é nulo no centro dos vãos das colunas e das vigas; e
- ✓ As equações da rigidez e da relação da elástica com o esforço cortante advém da consideração de momentos fletores nulos nos centros dos vãos das vigas e das colunas. Com as seguintes repercussões:
  - *Implicações:* Discrepâncias de comportamento na base e no topo do painel pórtico, devido as descontinuidades já existentes; e
  - *Solução:* Aplicar as equações de Maney para quantificar o coeficiente de rigidez do Nó e do elemento de pórtico, daí não se precisa impor momento fletor nos centros dos vãos das vigas e das colunas.

Na Figura 2.14 é apresentado o elemento diferencial do pórtico plano regular, ressaltando que os esforços solicitantes do elemento de pórtico plano absorvem os efeitos das colunas, em separado.

**Figura 2.14 – Esforços solicitantes no elemento de pórtico plano e enfatizando as colunas**



FONTE: O Autor (2025)

Cujas condições de equilíbrio são:

$$\sum_{\sim}^{(+)} M(0) = 0$$

$$\therefore (\mathfrak{M}_f + d\mathfrak{M}_f) - \mathfrak{M}_f + \mathcal{V}_f \cdot dz - q_f \cdot \frac{dz^2}{2} = 0 \quad \therefore \quad \frac{d\mathfrak{M}_f}{dz} = -\mathcal{V}_f \quad (eq. 2.38)$$

$$\sum_{\rightarrow}^{(+)} F_H = 0 \quad \therefore \quad q_f \cdot dz + (\mathcal{V}_f + d\mathcal{V}_f) - \mathcal{V}_f = 0 \quad \therefore \quad \frac{d\mathcal{V}_f}{dz} = -q_f \quad (eq. 2.39)$$

$$\text{sendo: } \mathcal{V}_f = \mathcal{V}_{c1} + \mathcal{V}_{c2} \quad ; \quad \mathcal{V}_f + d\mathcal{V}_f = \mathcal{V}_{c1} + d\mathcal{V}_{c1} + \mathcal{V}_{c2} + d\mathcal{V}_{c2}$$

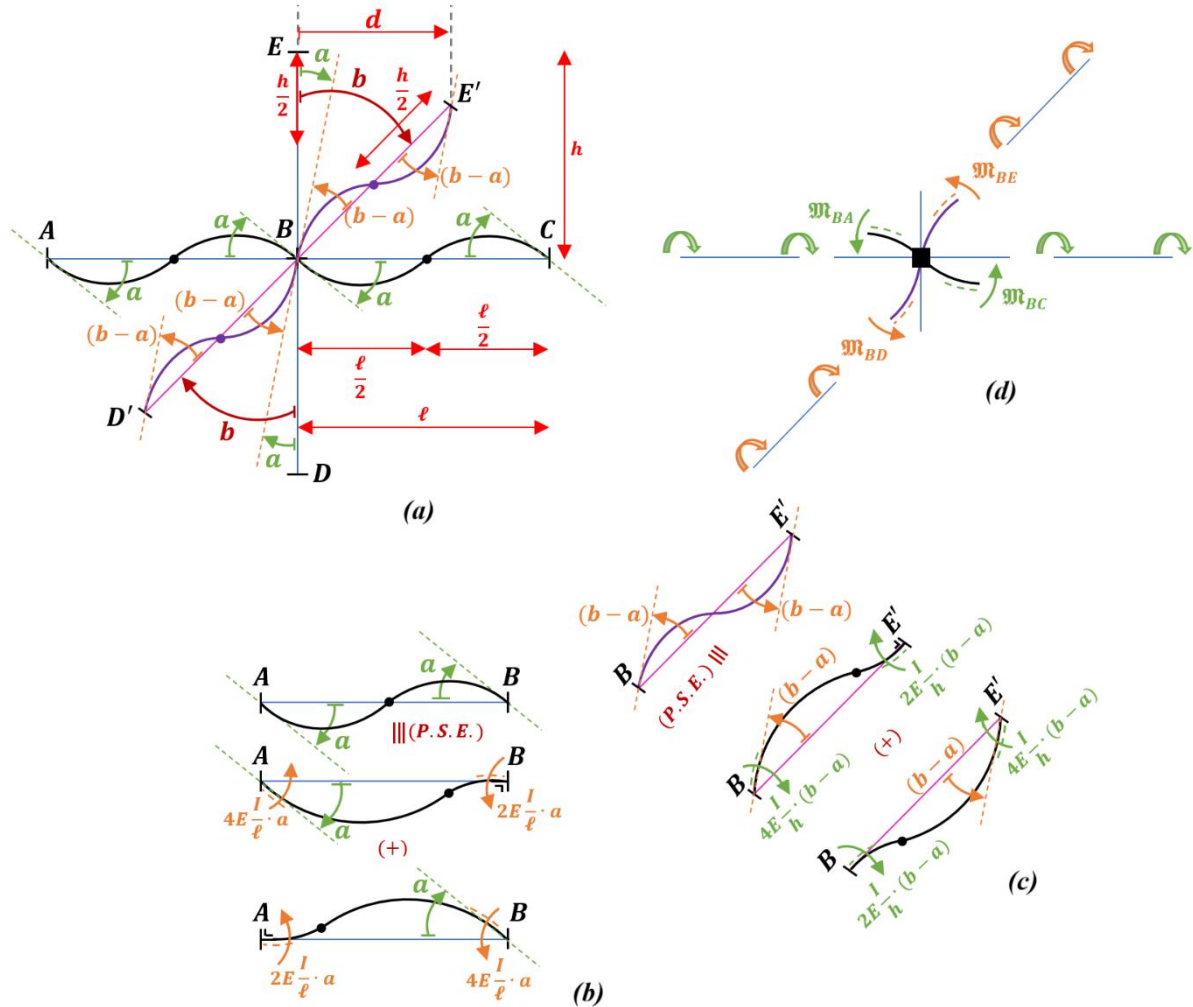
$$\mathfrak{M}_f = \mathfrak{M}_{c1} + \mathfrak{M}_{c2} \quad ; \quad \mathfrak{M}_f + d\mathfrak{M}_f = \mathfrak{M}_{c1} + d\mathfrak{M}_{c1} + \mathfrak{M}_{c2} + d\mathfrak{M}_{c2}$$

com o termo de alta ordem tido como nulo ( $dz^2 \approx 0$ ).

Já a relação da elástica (deformada) com o esforço solicitante é ilustrada na Figura 2.15 e obtida via análise da deformada das vigas e colunas no entorno do Nó de Pórtico Plano.

No processo de deformação aplica-se o giro  $\alpha$  ao nó  $B$ , no sentido horário, conforme elencado os trechos deformados de vigas, na Figura 2.15 (a). Além de ocasionar o giro  $\beta$  nas colunas  $BE$  e  $BD$ , fazendo com que a reta  $BE$  assuma a nova posição  $BE'$  e a reta  $BD$  passe para  $BD'$ , bem como, desencadeando também a deformada reativa (curvas) das citadas colunas.

**Figura 2.15 – Deformada: (a) do Nó B e barras no entorno, (b) decomposta na viga AB, (c) decomposta na coluna BE, (d) com indicação dos momentos fletores em torno do Nó B**



FONTE: O Autor (2025)

Aplicando o Princípio da Superposição dos Efeitos (P.S.E.) nas vigas AB e BC, tem-se:

$$\mathfrak{M}_{AB} = 6 \cdot E \cdot \frac{I_V^{Esq}}{\ell} \cdot a \quad \rightarrow \quad \mathfrak{M}_{AB} = 6 \cdot E \cdot k_V^{*Esq} \cdot a \quad (eq. 2.40 a)$$

$$\mathfrak{M}_{BC} = 6 \cdot E \cdot \frac{I_V^{Dir}}{\ell} \cdot a \quad \rightarrow \quad \mathfrak{M}_{BC} = 6 \cdot E \cdot k_V^{*Dir} \cdot a \quad (eq. 2.40 b)$$

$$\text{com: } k_V^* = \frac{I_V}{\ell}.$$

Agora, aplicando o P.S.E. nas colunas, tem-se:

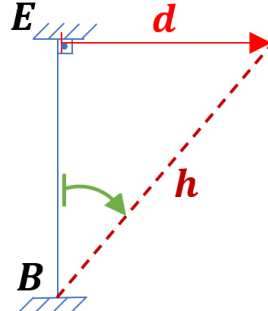
$$\mathfrak{M}_{BE} = -6 \cdot E \cdot \frac{I_C^{Sup}}{h} \cdot (b - a) \quad \rightarrow \quad \mathfrak{M}_{BE} = -6 \cdot E \cdot k_C^{*Sup} \cdot (b - a) \quad (eq. 2.41 a)$$

$$\mathfrak{M}_{BD} = -6 \cdot E \cdot \frac{I_C^{Inf}}{h} \cdot (b - a) \quad \rightarrow \quad \mathfrak{M}_{BD} = -6 \cdot E \cdot k_C^{*Inf} \cdot (b - a) \quad (eq. 2.41 b)$$

com:  $k_C^* = \frac{I_C}{h}$ .

Na Figura 2.16 consta a geometria para a quantificação do ângulo  $b$ .

**Figura 2.16 – Análise geométrica do ângulo  $b$**



**FONTE: O Autor (2025)**

Valendo-se da Teoria das Pequenas Deformações (T.P.D.), escreve-se:

$$tg(b) = \frac{d}{h} \quad \rightarrow \quad b = \frac{d}{h} \quad (eq. 2.41 c)$$

Determinando o ângulo  $a$ , via equilíbrio do Nó B:

$$\begin{aligned} \stackrel{(+)}{\sim} \sum M(B) = 0 \quad \therefore \quad \mathfrak{M}_{AB} + \mathfrak{M}_{BC} + \mathfrak{M}_{BE} + \mathfrak{M}_{BD} &= 0 \\ \therefore \quad 6 \cdot E \cdot (k_V^{*Esq} + k_V^{*Dir}) \cdot a - 6 \cdot E \cdot (k_C^{*Sup} + k_C^{*Inf}) \cdot (b - a) &= 0 \\ \therefore \quad (k_V^{*Esq} + k_V^{*Dir} + k_C^{*Sup} + k_C^{*Inf}) \cdot a &= (k_C^{*Sup} + k_C^{*Inf}) \cdot b \\ \therefore \quad a &= \frac{\sum_C k^*}{\sum_t k^*} \cdot b \end{aligned} \quad (eq. 2.42)$$

sendo:  $\sum_C k^*$  - Somatório das rigidezas relativas das colunas que se concentram ao Nó B; e

$\sum_t k^*$  - Somatório das rigidezas relativas de todas as vigas e colunas que se concentram ao Nó B.

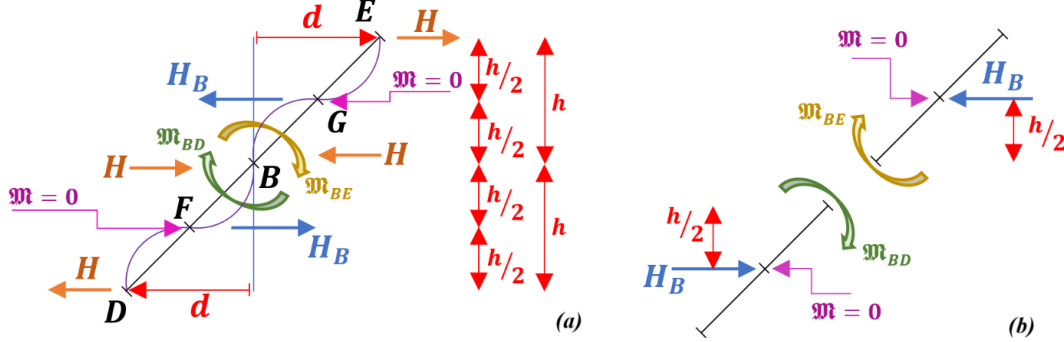
Determinando o ângulo  $(b - a)$ , via junção das equações (8 c) e (9):

$$\begin{aligned} b - a &\equiv \frac{d}{h} - \frac{\sum_C k^*}{\sum_t k^*} \cdot b \equiv \frac{d}{h} - \frac{\sum_C k^*}{\sum_t k^*} \cdot \frac{d}{h} \\ &\equiv \left\{ \frac{\sum_t k^* - \sum_C k^*}{\sum_t k^*} \right\} \cdot \frac{d}{h} \equiv \left\{ \frac{(\sum_V k^* + \sum_C k^*) - \sum_C k^*}{\sum_t k^*} \right\} \cdot \frac{d}{h} \equiv \frac{\sum_V k^*}{\sum_t k^*} \cdot \frac{d}{h} \end{aligned} \quad (eq. 2.43)$$

sendo:  $\sum_V k^*$  - Somatório das rigidezes relativas das vigas que se concentram ao Nó B.

Na Figura 2.17 consta a trajetória de análise do esforço cortante da coluna, via ponto de inflexão.

**Figura 2.17 – Colunas BD e BE: (a) Deformada e (b) Ponto de inflexão por coluna**



FONTE: O Autor (2025)

Do equilíbrio do trecho BD, que é análogo ao trecho BE, obtém-se:

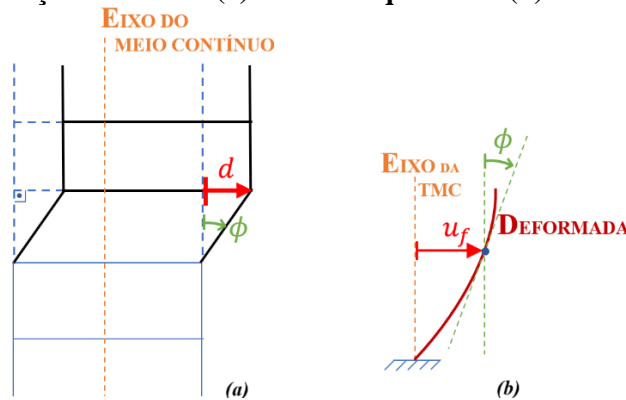
$$\begin{aligned} \sum M(F) = 0 \quad \therefore \quad \mathfrak{M}_{BD} &= H_B \cdot \frac{h}{2} \\ \therefore \quad 6 \cdot E \cdot k_C^{*Inf=Sup} \cdot (b-a) &= H_B \cdot \frac{h}{2} \quad \therefore \quad H_B = \left( \frac{12 \cdot E}{h} \right) \cdot k_C^* \cdot (b-a) \end{aligned}$$

↪ Substituindo a equação (2.43), reescreve-se:

$$H_B = \left( \frac{12 \cdot E}{h} \right) \cdot k_C^* \cdot \left\{ \frac{\sum_V k^*}{\sum_t k^*} \cdot \frac{d}{h} \right\} \quad (eq. 2.44)$$

Na Figura 2.18 consta o estado deformado do andar e também no eixo arbitrado para a Técnica do Meio Contínuo.

**Figura 2.18 – Distorção do andar: (a) visão dos quadros e (b) na deformada contínua**



FONTE: O Autor (2025)

Da análise do triângulo retângulo evidenciado na Figura 2.18 (a), escreve-se:

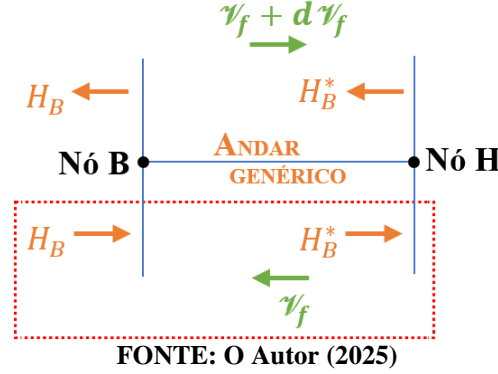
$$tg(\phi) = \frac{d}{h} \quad \begin{matrix} TPD \\ \rightarrow \end{matrix} \quad \phi = \frac{d}{h} \quad (eq. 2.45)$$

Via simplificação de admitir paridade entre a distorção  $\phi$  e a rotação da seção transversal da elástica do pórtico plano modelado como console (Fig. 2.18 b), estabelece-se:

$$\phi \approx \frac{du_f}{dz} \quad (eq. 2.46)$$

Na Figura 2.19 é apresentado o elemento de pórtico plano retangular.

**Figura 2.19 – Elemento de pórtico plano retangular e o balanço de esforço cortante**



Considerando todos os nós do andar e não apenas um único nó (Nó B), rastreia-se o *coeficiente de rigidez* do elemento de pórtico plano e a *relação da elástica com o corte*:

$$\begin{aligned} \sum F_H = 0 \quad \therefore \quad v_f = \sum_{n.a} \{H_B\} \quad & \xrightarrow{eq. (11)} \quad v_f = \frac{12 \cdot E}{h} \cdot \sum_{n.a} \left\{ k_c^* \cdot \frac{\sum_V k^*}{\sum_t k^*} \right\} \cdot \frac{d}{h} \\ & \hookrightarrow \text{Substituindo as equações (12) e (13), reescreve-se:} \\ \therefore v_f = \frac{12 \cdot E}{h} \cdot \sum_{n.a} \left\{ k_c^* \cdot \frac{\sum_V k^*}{\sum_t k^*} \right\} \cdot \frac{du_f}{dz} \quad & \therefore \quad v_f = s_f \cdot \frac{du_f}{dz} \quad \therefore \quad \frac{du_f}{dz} = \frac{v_f}{s_f} \quad (eq. 2.47) \end{aligned}$$

com:  $s_f = \frac{12 \cdot E}{h} \cdot \sum_{n.a} \left\{ k_c^* \cdot \frac{\sum_V k^*}{\sum_t k^*} \right\}$  - a rigidez do elemento de pórtico plano retangular; e  
 $n.a$  – Simboliza a soma no andar inteiro.

## e) Núcleo Estrutural

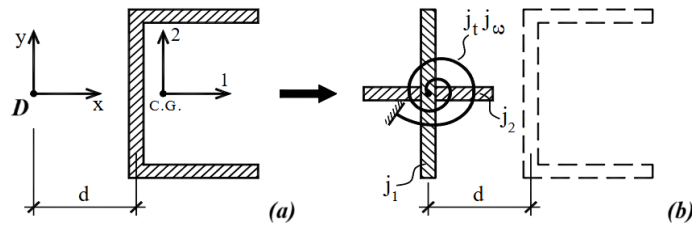
Os núcleos estruturais são modelados por sua substituição em duas paredes de corte centradas no centro de torção (D) da seção inicial e acrescidas de uma mola de torção, conforme é ilustrado na Figura 2.20. A formulação atual pode ser vista em Laier (2024), Laier (1984), Stamato e Mancini (1972), Proença (1981) e dentre outros.

As hipóteses aceitas atualmente são as seguintes:

- ✓ Admite-se que a substituição obedece à Teoria de Saint-Venant e à Teoria de Vlassov, compondo à Teoria de Flexo-Torção;
- ✓ Admite-se elementos de rigidezes constantes ao longo da altura; e

- ✓ A substituição do núcleo é por um sistema equivalente formado por duas paredes perpendiculares e independentes, associadas com uma mola de torção.

**Figura 2.20 – Modelagem do núcleo estrutural de edifício alto: (a) localização do centro de torção além da definição dos eixos principais de inércia e (b) substituição pelas paredes independentes, orientadas nas direções principais e acrescidas da mola de torção**



FONTE: Adaptado de (Laier, 2024)

Daí, são elencadas as decorrentes constatações:

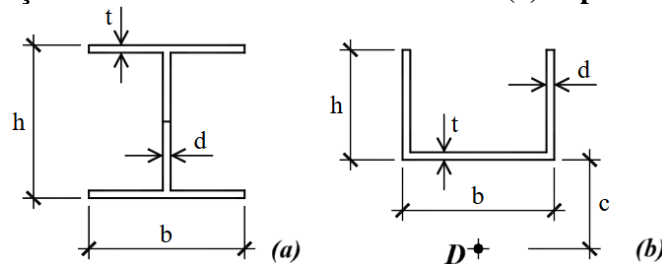
- ✓ O núcleo é uma das espécies (tipo) de painel tridimensional;
- ✓ A equivalência da substituição ocorre para:
  - A equivalência à *Flexão* ocorre ao propor paredes independentes com às mesmas rigidezas do núcleo, segundo os eixos principais de inércia; e
  - A equivalência à *Torção* ocorre ao considerar a mola de torção com as rigidezes  $j_t$  (Saint-Venant) e  $j_\omega$  (Vlassov) iguais às do núcleo.
- ✓ A associação tridimensional dos painéis de contraventamento pode ser realizada apenas por: 1. Paredes de corte; 2. Molas de torção; e 3. Pórticos planos, visto que os núcleos são modelados como a associação dos dois primeiros elencados.

Já o procedimento de modelagem do núcleo estrutural via TMC é delineado como:

- ✓ **1ª Etapa:** Localizar o Centro de Torção (D) do núcleo. Ver Figura 2.20 (a);
- ✓ **2ª Etapa:** Calcular às rigidezes principais à flexão:  $j_1$  e  $j_2$ . Com:  $j = E \cdot I$ ;
- ✓ **3ª Etapa:** Substituir o núcleo pelas duas paredes perpendiculares, independentes e posicionadas no Centro de Torção (D), sendo cada uma orientada em uma das direções principais de inércia;
- ✓ **4ª Etapa:** Acrescer uma mola de torção no Centro de Torção (D), com às rigidezes  $j_t = G \cdot I_t$  (Saint-Venant) e  $j_\omega = E \cdot I_\omega$  (Vlassov). Ver Fig. 2.20 (b).

Na Figura 2.21 constam as inércias de torção livre (Saint-Venant) e de empenamento (Vlassov) para os perfis U e duplo T.

**Figura 2.21 – Seções transversais de núcleo estrutural: (a) duplo T e (b) seção U e C**



FONTE: Adaptado de (Laier, 2024)

as fórmulas para a determinação das rigidezas torcionais são:

▪ **Para a seção C // Perfil U:**

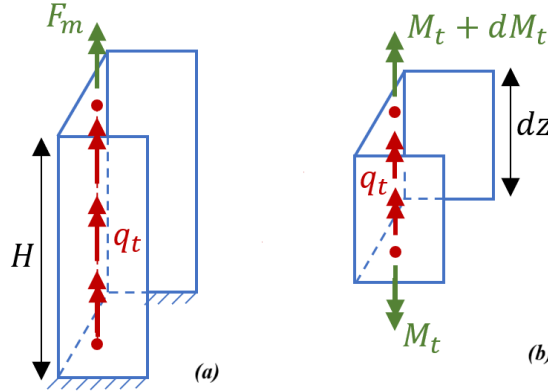
$$c = \frac{3 \cdot h}{6 + \frac{b}{h}} \quad ; \quad I_t = \frac{1}{3} \cdot (b \cdot t^3 + 2 \cdot h \cdot d^3) \quad ; \quad I_\omega = \frac{b^2 \cdot h^3 \cdot d \cdot (3 \cdot h \cdot d + 2 \cdot b \cdot t)}{12 \cdot (6 \cdot h \cdot d + b \cdot t)}$$

▪ **Para seção em duplo T:**

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot b \cdot t^3 + h \cdot d^3) \quad ; \quad I_\omega = \frac{h^2 \cdot b^3 \cdot t}{24}$$

De acordo com as discussões em Stamato (1971b), Stamato e Mancini (1972) e Laier (2024) é possível estabelecer o elemento diferencial de núcleo estrutural, conforme apresentado na Figura 2.22.

**Figura 2.22 – Núcleo estrutural C: (a) Carregamentos e (b) Elemento diferencial**



FONTE: O Autor (2025)

Procedendo o equilíbrio de momentos de torção:

$$\sum T = 0 \quad \therefore \quad (M_t + dM_t) - M_t + q_t \cdot dz = 0 \quad \therefore \quad \frac{dM_t}{dz} = -q_t \quad (\text{eq. 2.48 a})$$

$$\therefore \quad q_t = -M_t' \quad (\text{eq. 2.48 b})$$

Considerando a rigidez à torção livre através do momento de torção ( $M_\ell$ ) de Saint-Venant e à torção de empenamento pelo momento da flexo-torção ( $M_{ft}$ ), além de soma-los para quantificar o momento de torção global ( $M_t$ ):

$$M_t = M_\ell + M_{ft} \quad \therefore \quad M_t = [(G \cdot I_t) \cdot \theta_z'] + [(E \cdot I_\omega) \cdot \theta_z''']$$

$$\therefore \quad M_t = j_t \cdot \theta_z' + j_\omega \cdot \theta_z''' \quad (\text{eq. 2.49 a})$$

$$\hookrightarrow \text{derivando:} \quad \frac{M_t}{dz} \equiv m_z = j_t \cdot \theta_z'' + j_\omega \cdot \theta_z^{IV} \quad (\text{eq. 2.49 b})$$

Por fim, a equação diferencial do problema de flexo-torção para o núcleo estrutural é expressa por:

$$\theta_z^{IV} - \alpha^2 \cdot \theta_z'' = \frac{m_z}{j_\omega} \quad (2.50)$$

$$\text{com: } \alpha = \sqrt{\frac{j_t}{j_\omega}} \equiv \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}}.$$

## 2.2 HISTÓRICO DA TMC EM EDIFÍCIOS ALTOS

### a) Panorama geral

A modelagem de estruturas por técnicas contínuas é encontrada em grande número na literatura, principalmente até primeira metade da década de 1990. Dentre os textos técnicos, advindos de pesquisadores estrangeiros, podem-se ser evidenciados os seguintes como precursores:

- i) O trabalho de Chitty (1947) com a análise estática de uma estrutura aporticada composta por duas prumadas longitudinais travadas transversalmente por barras e com carregamento lateral uniforme no eixo longitudinal;
- ii) A publicação de Beck (1962) abordando a associação de duas paredes de corte através de lintéis horizontais, também realizando análise estática. Diferindo do pórtico plano apenas pela elevada rigidez característica das citadas paredes. A associação é submetida a carregamento transversal também uniforme;
- iii) No caso do texto de Coull e Choudhury (1967) há a abordagem do funcionamento estático da associação de paredes de corte, porém para carregamento lateral triangularmente distribuído na altura das paredes e com máximo valor no topo delas, além da imposição de carga concentrada lateral com ponto de aplicação no topo da estrutura;
- iv) Em Rosman (1963) ocorre a análise da associação de pórticos planos e paredes de corte, atuantes na mesma direção de contraventamento, como o *Modelo de Trem* de ligação entre os citados painéis. As hipóteses básicas foram as seguintes:

iv.1. Hipótese 1: Admite-se que as Paredes se deformam apenas à flexão e são rígidas ao corte (esforço cortante);

iv.2. Hipótese 2: Admite-se que o Pórtico Plano se deforma apenas ao corte e não à flexão, porém, em geral, existem esforços cortantes e momentos fletores nas barras componentes do painel do tipo pórtico;

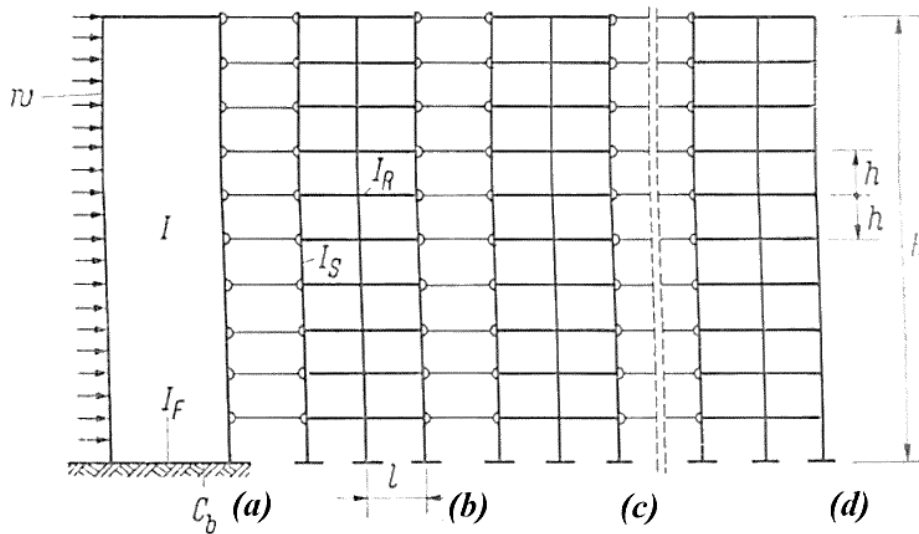
iv.3. Hipótese 3: Admite-se que as seções transversais são prismáticas, tanto para as paredes quanto as barras dos pórticos planos;

iv.4. Hipótese 4: Admite-se que a associação (ligação) dos painéis de contraventamento se dá por meio de barras horizontais biarticuladas; e

iv.5. Hipótese 5: Admite-se que as forças horizontais advindas do modelo de associação dos painéis têm distribuição contínua ao longo da altura da edificação, configurando um meio contínuo equivalente.

O Modelo de Trem é apresentado na Figura 2.23.

**Figura 2.23 – Modelo de Trem para associação plana entre os painéis dos tipo Parede de Corte e Pórtico Plano: (a) 1º painel, (b) 2º painel, (c) 3º painel e (d) enésimo painel de contraventamento**

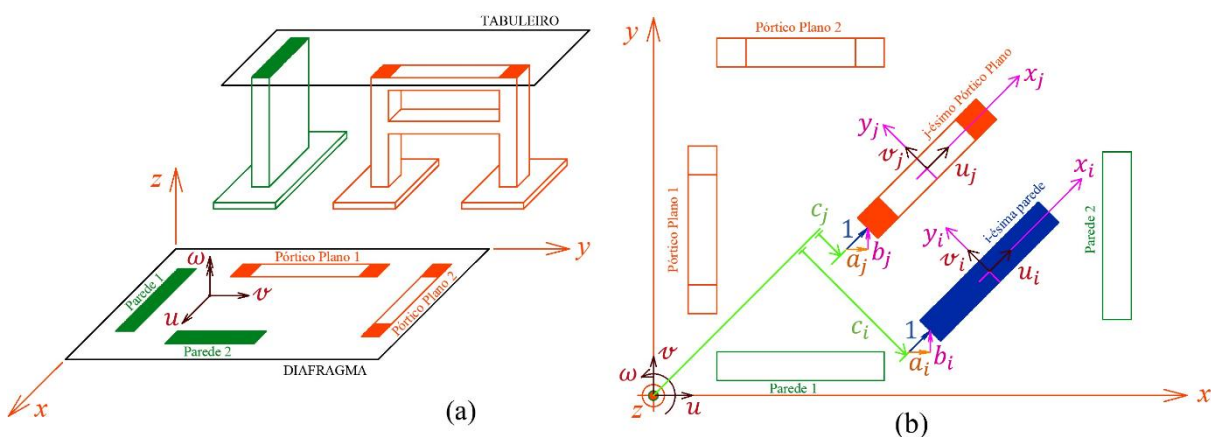


Fonte: (Rosman, 1963)

O procedimento plano apresentado na citada publicação é estendido em Stamato (1971a) para a associação tridimensional, substituindo-se as barras biarticuladas de ligação, entre os painéis, por *Diafragmas Rígidos* em seus planos e sem rigidez transversal.

Os Diafragmas são as lajes dos Edifícios Altos e possuem por incógnitas: os deslocamentos no plano XY da geometria, logo  $u$  e  $v$ , bem como a rotação no eixo  $z$ , conforme ilustrado na Figura 2.23.

**Figura 2.23 – Diafragmas Rígidos: (a) representação 3D da associação dos painéis pelos diafragmas e (b) lei de transformação de coordenadas do Sistema Local de Coordenadas (SLC) dos painéis para o Sistema Global de Coordenadas (SGC) do sistema de contraventamento**



Fonte: O Autor (2025)

- v) Já em Rosman (1974) consta a análise dinâmica da associação, por barras biarticuladas, de parede de corte com um pórtico plano através da simplificação por substituição do pórtico por uma parede com rigidez à flexão equivalente.

Em geral, as análises de estruturas pela Técnica do Meio Contínuo (TMC) partem do pressuposto de expressão de esforços/deformações ou deslocamentos válidas em todo o domínio, trocando o problema real por um meio equivalente com propriedades elasto-mecânicas e ações/solicitações uniformizadas.

O caso mais clássico é a análise de deflexões em eixos mediante o equilíbrio do elemento diferencial. Em termos gerais, o mencionado equacionamento gera equações diferenciais que por sua resposta expressaram parâmetros elásticos, quantificáveis em qualquer coordenada da estrutura, a exemplo de: - deflexões; - rotações; - esforços solicitantes; - modos de vibração; e até mesmo - carga de flambagem.

No âmbito da comunidade acadêmica da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), cita-se o docente e pesquisador Miguel Carlos Stamato como precursor dos estudos de pórticos planos pela Técnica do Meio Contínuo, cujas contribuições mais relevantes são Stamato (1971b) e Stamato (1972), sempre versando no campo da análise estática de estruturas formadas pela associação de painéis destinadas ao de contraventamento de edifícios altos.

Antes de mais nada, cabe a definição de painel como todo e qualquer elemento estrutural que detenha resistência lateral significativa, a exemplo do(a)s: paredes de corte, pórticos planos, pórticos espaciais, pilares, treliças planas e espaciais.

Em linhas gerais, a continuidade das contribuições à TMC ocorreu na EESC, após o falecimento do professor Miguel Carlos Stamato, através dos esforços e orientações procedidos pelos docentes: Eddie Mancini, Walter Savassi e José Elias Laier, este último no campo das análises dinâmicas e os demais procedendo análises estritamente estáticas.

## b) Panorama da análise estática

Das produções e orientações do prof. Eddie Mancini podem ser elencadas as seguintes contribuições para a análise estática de pórticos planos pela TMC:

- i) Em Mancini (1972) é procedida a análise estática dos esforços solicitantes nos painéis de contraventamento de edifícios altos, considerando as seguintes hipóteses simplificadoras:
  - i.1. As paredes de corte são rígidas ao esforço cortante e deformável ao momento fletor;
  - i.2. Os pórticos são rígidos ao momento fletor e deformáveis ao cortante, bem como, despreza a deformabilidade axial das barras verticais;
  - i.3. As paredes são modeladas com fundação elasticamente engastada na base; e
  - i.4. Os pórticos são engastados na fundação.são analisados os seguintes painéis de contraventamento:
  - a. Parede de Corte;
  - b. Pórtico Plano com duas prumadas;

- c. Associação plana de parede de corte com pórtico de duas prumadas via barras biarticuladas, denominado de Painel Geral;
  - d. Associação plana de duas paredes de corte via barras biarticuladas; e
  - e. Associação tridimensional dos painéis.
- ii) Em Baffa (1982) consta a análise dos pórticos planos normais às paredes de corte;
- iii) Em Carvalho (1982) são analisadas diversas configurações entre painéis de contraventamento, dentre eles:
  - iii.1. Associações planas de duas a quatro paredes de corte sobre base elástica;
  - iii.2. Associação plana de parede de corte com pórtico plano de duas prumadas, por barra biarticulada e por lintéis, sempre sobre base engastada;
  - iii.3. Associação tridimensional de paredes e pórticos
- iv) Em Rosa Neto (1984) é realizada a análise da relevância da Teoria de Bernoulli para a modelagem da deformada das paredes de corte, das barras do pórtico plano, bem como, da associação destes dois tipos de painéis;
- v) Em Souza (1986) são analisados alguns painéis de contraventamento submetidos a mobilização das bases, podendo ser empregados em pórticos planos, mesmo que no citado trabalho tenha sido restrito a demais tipos de painéis;
- vi) Em Pascual (1987) são apresentados parâmetros, elásticos e geométricos, para correta classificação das barras verticais como pilares de pórtico ou como paredes de corte;
- vii) Em Battistelle (1991) consta a análise estática de painéis planos considerando a deformação axial dos pilares, bem como, os efeitos de 2ª ordem das cargas verticais. A citada obra aplica as considerações nos seguintes painéis:
  - vi.1. Parede de corte;
  - vi.2. Pórtico plano com duas prumadas;
  - vi.3. Painel Geral (Associação plana de parede com pórtico ligado por barras biarticuladas); e
  - vi.4. Associação plana de duas paredes.
- viii) Já em Xavier (1994) são analisados pórticos planos gerais contendo “n” prumadas para pilares prismáticos e escalonados por trechos, considerando: 1. Deformação axial dos pilares, 2. Deformação por corte das vigas e 3. Os nós são rígidos;

Enquanto nos demais trabalhos de orientação do Prof. Eddie Mancini, já elencados, as constatações abordaram o funcionamento cinemático global dos painéis de contraventamento. Pode-se ressaltar que a verificação da distribuição de forças laterais e de esforços solicitantes, por painéis do sistema de contraventamento, é localizada em Stamato (1966).

No caso das orientações do prof. Walter Savassi, bem como, de suas produções em conjunto com o Prof. Eddie Mancini, elencam-se as seguintes contribuições:

- i) Em Mancini (1973) é realizada a análise estática de diversas configurações de painéis de contraventamento pela TMC, considerando a rotulação plástica no meio dos vãos dos lintéis e das barras das prumadas dos pórticos. Os painéis analisados foram:
  - i.1. Painei Parede de Corte;
  - i.2. Pórtico Plano com duas prumadas;
  - i.3. Associação de Parede de Corte e Pórtico Plano através de barras biarticuladas, denominada de PAINEL GERAL;
  - i.4. Associação Plana de Parede de Corte com Pórtico Plano por lintéis;
  - i.5. Associação Plana de três Paredes de Corte ligadas por lintéis; e
  - i.6. Associação Tridimensional dos Painéis Gerais.
- ii) Em Oliveira Filho (1990) ocorre o estudo comparativo do comportamento cinemático dos seguintes painéis de contraventamento:
  - ii.1. Parede de Corte;
  - ii.2. Pórtico Plano com duas prumadas;
  - ii.3. Painei Geral;
  - ii.4. Associação Plana de três Paredes de Corte através de lintéis, considerando, ou não, a deformabilidade axial das paredes; e
  - ii.5. Pórticos Planos considerando, ou não, a deformabilidade axial dos pilares.
- iii) Em Mancini e Savassi (1985) ocorre a análise comparativa do comportamento cinemático do Pórtico Plano com duas prumadas, sob os seguintes modelos:
  - iii.1. Modelo 1: Colunas com deformação axial desprezada;
  - iii.2. Modelo 2: Considerando a deformação axial das colunas;
  - iii.3. Modelo 3: Nós de comprimento finito; e
  - iii.4. Modelo 4: Nós pontuais.
- iv) Em Mancini e Savassi (1999) consta a Análise Plana da associação de duas Paredes de Corte por meio de lintéis horizontais e sob carregamento lateral constante. Analisa, ainda, o Pórtico Plano com duas prumadas e com vigas analisadas pela teoria dos eixos de Euler-Bernoulli, além da deformação axial das colunas. Concluindo pela associação da Parede de Corte com o Pórtico Plano de duas prumadas, agora, por meio de barras horizontais biarticuladas;
- v) Em Mancini e Savassi (2001) é apresentada a Análise Espacial, publicizando a sistematização da associação tridimensional de Pórticos Planos, acarretando na análise do Pórtico Espacial via TMC;
- vi) Em Mancini e Savassi (2005) consta a associação plana de Parede de Corte com Pórtico Plano de duas prumadas via lintéis, considerando a deformação por corte e por flexão;
- vii) Em Mancini, Savassi e Xavier (2006) são instados os coeficientes de rigidez para os seguintes tipos de painéis, com formulação advinda de Ferreira (1975), quais sejam:
  - vii.1. Nó rígido de Pórtico Plano;
  - vii.2. Ligação na associação de duas Paredes de Corte através de lintéis horizontais;

- vii.3. Ligação na associação plana de duas Paredes externas a um pilar de pórtico central, unidos sempre por lintéis; e
- vii.4. Na ligação Pórtico Plano com Parede de Corte via lintéis horizontais.

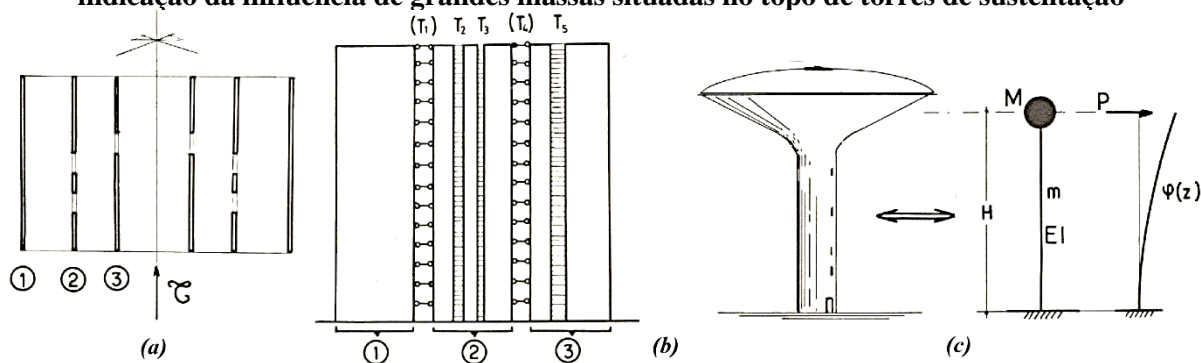
Por fim, faz a aplicação da teoria apresentada e procede o cálculo dos deslocamentos laterais para o Painei Geral (Associação de duas Paredes com um Pórtico Plano via lintéis).

O trabalho com fórmulas pinçadas e instadas no texto citado acima, no caso, Ferreira (1975), foi procedido sob orientação do Prof. Tioeturo Yagui, considerando a transmissão de cargas laterais, por entre os painéis de contraventamento, através dos diafragmas rígidos. Os diafragmas são considerados sem rigidez transversal e infinitamente rígidos horizontalmente. Além de versar sobre a análise do estado deformado dos seguintes elementos de ligação, apresentando as rigidezes correspondentes, para o andar genérico:

- i. De Pórtico Plano;
- ii. Da Associação Plana de duas Paredes de Corte;
- iii. Da Associação Plana Parede-Pilar-Parede; e
- iv. Da Associação Plana de Pórtico Plano com Parede de Corte através de lintéis horizontais.

Torna-se imperativo discriminar a utilização típica de associação por meio de ligações por lintéis quando da ocorrência de vigas ligando os painéis de contraventamento, bem como, da associação através ligações por barras horizontais biarticuladas rígidas, apenas, axialmente, conforme ilustrado em Laredo (1977) e apresentado na Figura 2.25 (a) e (b).

**Figura 2.25 – Sistema de Contraventamento: (a) planta baixa de edifício com indicação de pórticos planos e paredes de corte, (b) associação plana dos painéis de contraventamento diferenciando lintéis e as barras advindas da modelização dos Diafragmas Rígidos e (c) indicação da influência de grandes massas situadas no topo de torres de sustentação**



Fonte: (Laredo, 1977)

Antes de prosseguir com o detalhamento histórico das contribuições, da EESC-USP, é relevante ressaltar que as grandes massas concentradas no topo de painéis de contraventamento interferem no modo deformado e de vibração, principalmente quando extrapolam as projeções, em planta, do sistema de contraventamento, conforme é ilustrado na Figura 2.25 (c).

### c) Panorama da análise dinâmica

Enquanto na linha de desenvolvimento do presente Pós-Doutorado tem-se as valiosas contribuições do Prof. José Elias Laier, permitindo a extensão e consolidação da TMC para o equacionamento dinâmico de pórticos planos. Assim, elencam-se as seguintes contribuições:

- i) Em Laier (1978) já são incrementados os princípios da dinâmica das estruturas na TMC e realiza-se a análise das vibrações livres em Edifícios Altos, tanto para os painéis de forma isolada, quanto para as associações entre os painéis.

Nesta publicação foram analisados:

- a. Parede de corte;
  - b. Pórtico plano com duas prumadas;
  - c. Associação de pórtico plano de duas prumadas com parede de corte via barras biarticuladas;
  - d. Associação de duas paredes de corte através de lintéis;
  - e. Associação do item “c” trocando as barras biarticuladas por lintéis; e
  - f. A associação tridimensional dos painéis elencados anteriormente.
- ii) Em Laier (1984, p. 8) acentua que as acelerações na estrutura quando da ordem de 5% da aceleração da gravidade ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ) já geram desconforto nos usuários, além de se tornarem intoleráveis ao atingir o patamar de 15% de  $g$ .

Desta forma, a análise dinâmica das estruturas torna-se primordial para evitar ativação do Estado Limite de Serviço à Vibrações Excessivas, recorrendo-se, pela Teoria das Vibrações, as seguintes etapas:

ii.1. Formulação do sistema de equações do movimento, em geral, Equações Diferenciais Parciais (E.D.P.'s), uma vez que a equação básica do movimento é caracterizada como função de duas variáveis, sendo elas:

ii.1.1. variável espacial, representada pela letra  $x$ ; e

ii.1.2. variável temporal, representada pela letra  $t$ .

ii.2. Aplicação de um método capaz de separar as variáveis, espacial e temporal, denominado de Método da Separação de Variáveis, do qual detalha-se:

ii.2.1. Ocorre a decomposição do movimento  $v(x, t)$ , escrito como função de duas variáveis, para função espacial  $u(x)$  e função temporal  $T(t)$ ;

ii.2.2. A separação de variáveis só é possível devido à ortogonalidade dos modos de vibração da estrutura.

ii.3. Resolução das EDO's desacopladas na etapa 2 (ii.2), podendo existir:

ii.3.1. Solução numérica, ou seja, aproximada; ou

ii.3.2. Solução exata.

Ademais, após leitura apurada do citado texto, há que se frisar que a análise discreta de estruturas envolve número elevado de incógnitas e parâmetros

a analisar, tanto quanto seja mais refinada a discretização. Porém, a recorrência a modelagem pela Técnica do Meio Contínuo implica na redução drástica das incógnitas e dos parâmetros a processar, uma vez que as solicitações e propriedades elasto-mecânicas da estrutura são adotadas distribuídas uniformemente em um meio contínuo equivalente.

Neste texto é realizada a análise dinâmica dos seguintes painéis:

- a. Parede de corte;
- b. Pórtico plano com duas prumadas;
- c. Associação de pórtico plano de duas prumadas com parede de corte via barras biarticuladas;
- d. Associação Geral (3D) dos painéis, particularizando também:
  - d.1. na disposição simétrica; e
  - d.2. na disposição geral.

Em geral, os Edifícios Altos tem distribuição uniforme dos elementos de ligação, os quais propiciam a associação entre os painéis de contraventamento, facilitando e muito a adoção de meio contínuo com poucos, ou quase nenhum, pontos de refinamento.

- iii) Em Laier (1989) é evidenciada a problemática da excessiva deformabilidade estrutural com a crescente busca de estruturas cada vez mais esbeltas e otimizadas. Neste sentido, na citada publicação é apresentada uma vertente requintada da Técnica do Meio Contínuo, proporcionando a análise dos efeitos de 2ª ordem em três modelos basilares de pórticos planos, sempre aplicados à Edifícios Altos.

O citado melhoramento na performance da TMC foi publicizado para a comunidade científica internacional por Laier (2008). Ademais, torna-se relevante apontar as seguintes considerações quanto ao funcionamento cinemático global em detrimento da relação entre as rigidezes das colunas e vigas dos modelos adotados, quais sejam:

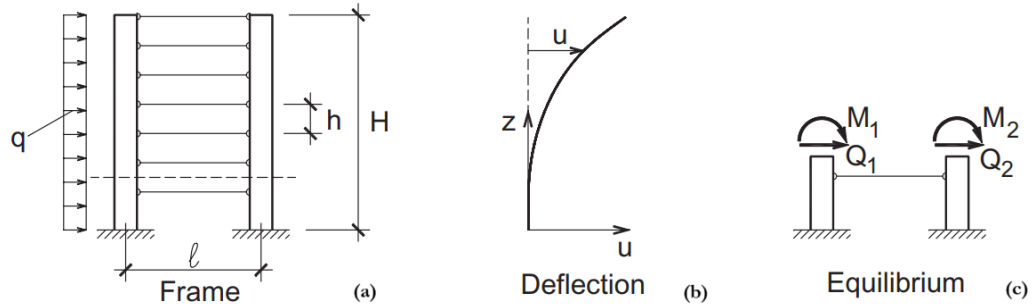
iii.1. Pórtico Plano com vigas de apenas rigidez axial considerável: Neste modelo são desprezadas às rigidezes a flexão e ao corte, sendo denominado de Modelo A, neste plano.

Neste modelo prevalece a deformada global do pórtico plano como se fosse de uma parede solicitada ao corte e a flexão, decorrendo das condições de rigidezes dos travamentos horizontais conferidos pelas barras biarticuladas, conforme é apontada na Figura 2.26.

iii.2. Pórtico Plano Ideal: Neste modelo é desprezada a deformação axial dos pilares, além das vigas de travamento deterem rigidez superior à das colunas, proporcionando deslocamento de corpo rígido das vigas atrelado à flexão dos andares. A geometria descrita é denominada de modelo B, neste plano.

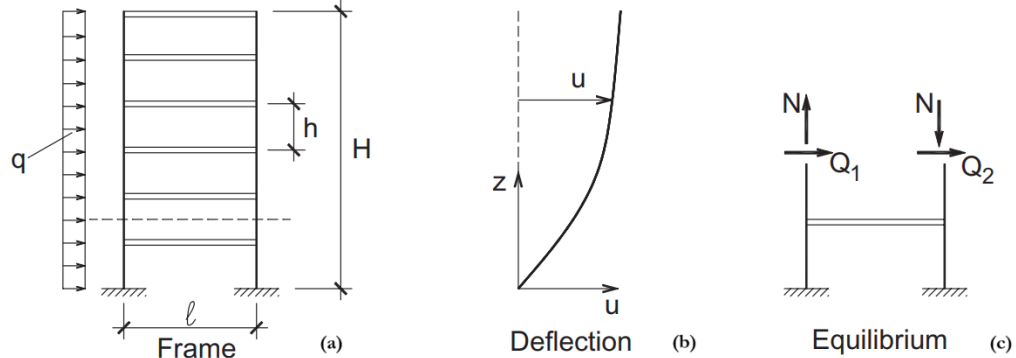
A deformação dos andares ocorre preponderantemente por corte e a deformada global é caracterizada por concavidade para fora do pórtico, de acordo com a Figura 2.27.

**Figura 2.26 – Modelo A: (a) configuração inicial do pórtico plano, (b) funcionamento cinemático global e (c) configuração de solicitação nos elementos estruturais do pórtico**



Fonte: Adaptado de (Laier, 1989)

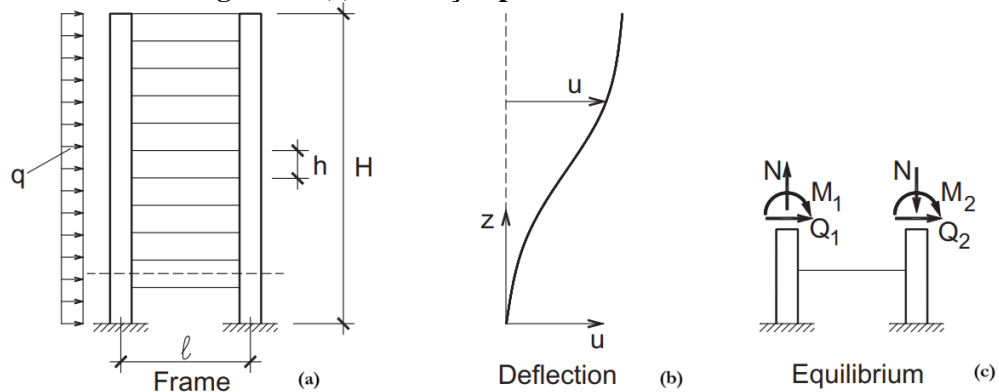
**Figura 2.27 – Modelo B: (a) configuração inicial do pórtico plano, (b) funcionamento cinemático global e (c) configuração de solicitação**



Fonte: Adaptado de (Laier, 1989)

iii.3. Pórtico Plano Geral: Este é o modelo que a relação entre as rigidezes das colunas e das vigas assume valores intermediários aos obtidos nos modelos A e B, denominando-se este de modelo C.

**Figura 2.28 – Modelo C: (a) configuração inicial do pórtico plano, (b) funcionamento cinemático global e (c) solicitação por elemento estrutural**



Fonte: Adaptado de (Laier, 1989)

O funcionamento global será misto, entre os modelos A e B, verificando-se concavidade para dentro do pórtico, no entorno da sua base, além de

concavidade para fora ao aproximar-se do topo. Ademais, percebe-se que a solicitação do momento total é resultante da superposição do efeito de momento do binário de esforços normais e do momento fletor das colunas, vide Fig. 2.28.

- iv) Em Martins (1998) existe valorosa contribuição ao equacionamento dinâmico de eixos com deformação por corte sendo admitida, o que é importante indicador da relevância da utilização de teorias de altas ordens no equacionamento de eixos como os lintéis e pilares;
- v) Em Llerena (2009) é realizada a análise sísmica de edifícios altos via TMC, conduzindo a consideração de laje como diafragmas rígidos à deformação no plano da geometria desta e deformável apenas transversalmente; e
- vi) Donneys (2015) também realiza a análise sísmica de edifícios altos pela TMC.

na análise estática dos painéis de contraventamento é imprescindível listar:

- i) Em Laier (1975) é utilizada a Técnica do Meio Contínuo para a análise estática de pórticos planos de Edifícios Altos sob atuação de variação térmica;
- ii) No trabalho de Yoshida (1989) consta a distribuição das ações horizontais do vento por entre os painéis de contraventamento, também de Edifícios Altos, considerando a deformabilidade das lajes no plano da sua geometria. A modelagem da deformabilidade lateral das lajes é realizada via modelo de viga contínua apoiada elasticamente nas prumadas dos pórticos; e
- iii) Bottura (1991) realiza a análise da deformabilidade da laje no seu plano, mantendo os painéis com as seguintes deformabilidades: ao esforço cortante para a parede de corte e para o pórtico, e ao momento fletor para as lajes.

#### d) Panorama da resolução da equação diferencial

Além de várias contribuições a resolução das equações diferenciais resultantes da análise estrutural pela TMC, sendo a primeira com solução exata e as demais com soluções numéricas, assim elencadas como:

- i) Em Coelho (1987) procede-se o desacoplamento dos sistemas de equações diferenciais, para a análise estática, dos seguintes casos:
  - a. Associação tridimensional contendo apenas paredes de corte;
  - b. Associação tridimensional contendo apenas pórticos;
  - c. Associação tridimensional contendo paredes e pórticos, no caso não degenerado (quando os conjuntos dos dois tipos de painéis podem receber carregamentos em qualquer direção e posição, separadamente);
  - d. Associação tridimensional contendo parede e pórticos, porém para o caso degenerado.
- ii) Das soluções numéricas das equações dinâmicas advindas da TMC podem ser listadas as seguintes contribuições:
  - ii.1. Em Seixas (1981) pelo Método de Stodola-Vianello;
  - ii.2. Em Ataíde (1981) pelo Método de Ritz-Galerkin;

- ii.3. Em Proença (1981) pelo Método das Diferenças Finitas;
- ii.4. Em Oliveira (1982) pelo Método de Rayleigh-Ritz;
- ii.5. Em Ramalho (1983) pelo Método dos Polinômios Interpoladores;
- iii) Já em Hassan (1987) ocorre a apresentação sistematizada da resolução da equação do movimento para sistemas de um grau de liberdade, por se tratar de equação basilar para a utilização do Método da Superposição Modal em sistemas dinâmicos complexos. Na citada sistematização consta a abordagem dos seguintes métodos:
  - a. Integração Numérica no Tempo, via:
    - a.1. Método das Diferenças Finitas; e
    - a.2. Métodos de Newmark, de Wilson e da Convolução.
  - b. Integração Numérica no Domínio da Frequência, através de:
    - b.1. Transformada rápida de Fourier; e
    - b.2. Transformadas rápida modificada e inversa.
- iv) No caso de Bottura (1997) é desenvolvida uma nova família hermitiana de algoritmo com passos simples e de aniquilamento assintótico destinado a resolução da equação do movimento;
- v) Noronha Neto (2003) faz a integração numérica da equação do movimento, após a filtragem de Butterworth, via algoritmo de quadratura de alta ordem; e
- vi) Em Müller Junior (2003) consta a integração da equação do movimento através da Transformada de Fourier, utilizando ponderadores de ordem elevada.

## 2.3 ANÁLISE UNIDIMENSIONAL DE PÓRTICOS PLANOS

### a) Projeto Proposto

Com base nas discussões apresentadas no item 2.1 (d), pede-se para o pórtico plano apresentado na Figura 2.29:

- a) Escrever uma função de carregamento lateral  $q_f(z)$  parabólica, conforme Tabela 2.1.

**Tabela 2.1 – Valores da carga lateral de acordo com a cota  $z$  em metros**

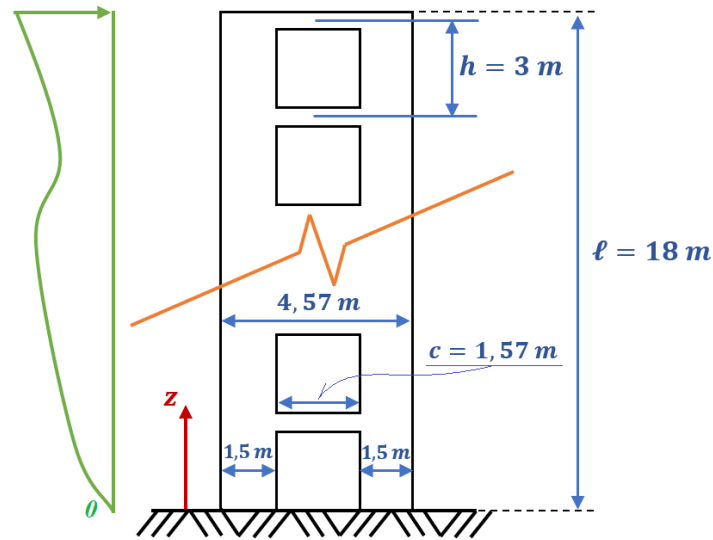
$z$ [m]	1	3	6	9	12	15	18
$q_f(z)$ [kN/m]	0,227	0,454	0,567	0,794	0,794	0,908	0,454

Fonte: (Souza; Jeary e Sparks, 1980)

- b) Determinar a função do esforço cortante externo  $Q_f(z)$ .
- c) Expressar e resolver a EDO (Equação Diferencial Ordinária) da análise estática via equação do carregamento  $q_f(z)$ , quando da resolução geral da EDO.
- d) Expressar e resolver a EDO da análise estática via condição de equilíbrio de esforço cortante, também, quando da resolução geral da EDO.
- e) Escrever a EDP (Equação Diferencial Parcial) do problema dinâmico.

**Figura 2.29 – Pórtico plano com duas prumadas e submetido a carga lateral**

$$q_f(z) = A \cdot z^2 + B \cdot z + C$$

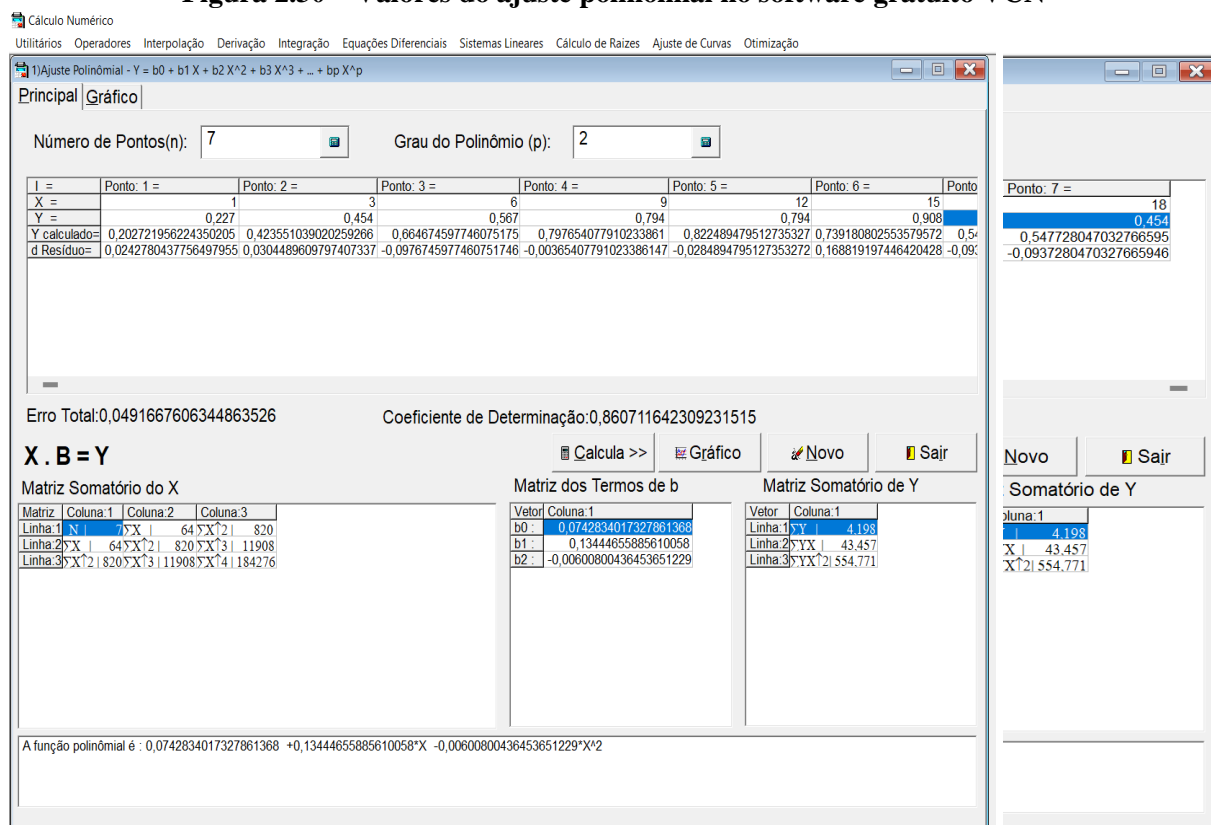


Fonte: O Autor (2025)

**GABARITO**

- a) Via software gratuito VCN, ver Fig. 2.30, tem-se a curva de interpolação expressa por:

$$q_f(z) = -0,00601 \cdot z^2 + 0,13445 \cdot z + 0,07428$$

**Figura 2.30 – Valores do ajuste polinomial no software gratuito VCN**

Fonte: O Autor (2025)

- b) Através dos conceitos trabalhados na apostila, escreve-se o esforço cortante pela função:

$$Q_f(z) = F_f + q_R$$

Lembrando que a carga aplicada no topo é nula nesta aplicação. Assim:  $F_f = 0$ . Bem como, que  $q_R$  é a resultante de carga devido ao carregamento lateral sob distribuição parabólica, nesta adoção e assim escrita:

$$q_R = \int_0^{(H-z)} (-0,00601 \cdot z^2 + 0,13445 \cdot z + 0,07428) dz$$

$$q_R = -0,00601 \cdot \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^{(H-z)} + 0,13445 \cdot \left[ \frac{z^2}{2} \right]_0^{(H-z)} + 0,07428 \cdot [z]_0^{(H-z)}$$

Simplificando a expressão, tem-se:

$$\begin{aligned} q_R = & (0,00200\bar{3}) \cdot z^3 + (0,067225 - 0,00601 \cdot H) \cdot z^2 + \\ & + (0,00601 \cdot H^2 - 0,13445 \cdot H - 0,07428) \cdot z + \\ & + (-0,00200\bar{3} \cdot H^3 + 0,067225 \cdot H^2 + 0,07428 \cdot H) \end{aligned}$$

Implicando em:

$$\therefore \quad Q_f(z) = (0,00200\bar{3}) \cdot z^3 + (0,067225 - 0,00601 \cdot H) \cdot z^2 + (0,00601 \cdot H^2 - 0,13445 \cdot H - 0,07428) \cdot z + (-0,00200\bar{3} \cdot H^3 + 0,067225 \cdot H^2 + 0,07428 \cdot H)$$

Observação: A simplificação da expressão de  $q_R$  pode ser obtida pela aplicação dos comandos: **Symbolics** → **Expand** & **Symbolics** → **Collect** (z) no Mathcad.

- c) A EDO via equação do carregamento fica expressa por:

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} = -\frac{1}{s_f} \cdot q_f(z)$$

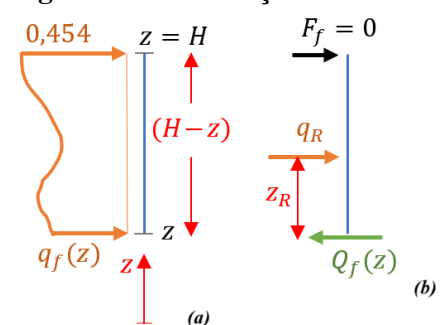
$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} = -\frac{1}{s_f} \cdot (-0,00601 \cdot z^2 + 0,13445 \cdot z + 0,07428)$$

- EDO não homogênea de ordem 2 e termo particularizante expresso por polinômio de grau 2 -

Já a resolução desta EDO é simples, bastando apenas integrar duas vezes e impor duas condições de contorno:

$$\begin{aligned} \frac{du(z)}{dz} &= \int \frac{d^2 u(z)}{dz^2} dz \\ &\equiv -\frac{1}{s_f} \cdot \left\{ -0,00601 \cdot \left[ \frac{z^3}{3} \right] + 0,13445 \cdot \left[ \frac{z^2}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + 0,07428 \cdot [z] \right\} + C_1 \end{aligned}$$

**Figura 2.31 – Balanço de corte**



Fonte: O Autor (2025)

$$u(z) = \int \frac{du(z)}{dz} dz$$

$$\equiv -\frac{1}{s_f} \cdot \left\{ -0,00601 \cdot \left[ \frac{z^4}{12} \right] + 0,13445 \cdot \left[ \frac{z^3}{6} \right] + 0,07428 \cdot \left[ \frac{z^2}{2} \right] \right\} + C_1 \cdot z + C_2$$

Aplicando as condições de contorno:

(1)

$$\Leftrightarrow u(z=0) = 0$$

$$\therefore 0 = -\frac{1}{s_f} \cdot \left\{ -0,00601 \cdot \left[ \frac{0^4}{12} \right] + 0,13445 \cdot \left[ \frac{0^3}{6} \right] + 0,07428 \cdot \left[ \frac{0^2}{2} \right] \right\} + C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$\therefore \boxed{C_2 = 0}$$

(2)

$$\Leftrightarrow u'(z=H) = \frac{Q_f(z=H)}{s_f} \equiv \frac{0}{s_f}$$

$$\therefore 0 = -\frac{1}{s_f} \cdot \left\{ -0,00601 \cdot \left[ \frac{H^3}{3} \right] + 0,13445 \cdot \left[ \frac{H^2}{2} \right] + 0,07428 \cdot [H] \right\} + C_1$$

$$\therefore \boxed{C_1 = \frac{1}{s_f} \cdot \left\{ -0,00601 \cdot \left[ \frac{H^3}{3} \right] + 0,13445 \cdot \left[ \frac{H^2}{2} \right] + 0,07428 \cdot [H] \right\}}$$

**Observação:** O esforço cortante no topo é nulo, pois não existe carga lateral concentrada em tal posição. Assim é possível escrever:  $Q_H \equiv Q_f(z=H) = 0$ .

Por fim, a solução da EDO é escrita como:

$$u(z) = -\frac{1}{s_f} \cdot \left\{ -0,00601 \cdot \left[ \frac{z^4}{12} \right] + 0,13445 \cdot \left[ \frac{z^3}{6} \right] + 0,07428 \cdot \left[ \frac{z^2}{2} \right] + \right.$$

$$\left. - \left( -0,00601 \cdot \left[ \frac{H^3}{3} \right] + 0,13445 \cdot \left[ \frac{H^2}{2} \right] + 0,07428 \cdot [H] \right) \cdot z \right\}$$

d) Já a EDO em termos da equação do esforço cortante é escrita como

$$s_f \cdot \frac{du(z)}{dz} = Q_f$$

$$s_f \cdot \frac{du(z)}{dz} = (0,00200\bar{3}) \cdot z^3 + (0,067225 - 0,00601 \cdot H) \cdot z^2 +$$

$$+ (0,00601 \cdot H^2 - 0,13445 \cdot H - 0,07428) \cdot z +$$

$$+ (-0,00200\bar{3} \cdot H^3 + 0,067225 \cdot H^2 + 0,07428 \cdot H)$$

- EDO não homogênea de ordem 1 e termo particularizante expresso por polinômio de grau 2 -

Já a resolução desta EDO é simples, bastando apenas integrar uma vez e impor uma condição de contorno:

$$\begin{aligned}
 u(z) &= \int \frac{du(z)}{dz} dz \equiv \\
 &\equiv \frac{1}{s_f} \cdot \left\{ 0,00200\bar{3} \cdot \left[ \frac{z^4}{4} \right] + (0,067225 - 0,00601 \cdot H) \cdot \left[ \frac{z^3}{3} \right] \right. \\
 &\quad + (0,00601 \cdot H^2 - 0,13445 \cdot H - 0,07428) \cdot \left[ \frac{z^2}{2} \right] \\
 &\quad \left. + (-0,00200\bar{3} \cdot H^3 + 0,067225 \cdot H^2 + 0,07428 \cdot H) \cdot [z] \right\} + D_1
 \end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &\Leftrightarrow u(z=0) = 0 \quad \therefore \quad \boxed{D_1 = 0}
 \end{aligned}$$

Por fim, a solução da EDO é escrita como:

$$\begin{aligned}
 u(z) &= \frac{1}{s_f} \cdot \left\{ 0,00200\bar{3} \cdot \left[ \frac{z^4}{4} \right] + (0,067225 - 0,00601 \cdot H) \cdot \left[ \frac{z^3}{3} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + (0,00601 \cdot H^2 - 0,13445 \cdot H - 0,07428) \cdot \left[ \frac{z^2}{2} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + (-0,00200\bar{3} \cdot H^3 + 0,067225 \cdot H^2 + 0,07428 \cdot H) \cdot [z] \right\}
 \end{aligned}$$

- e) E por fim a EDP do problema dinâmico é a mesma apresentada no item 2.1 (d.3). Assim:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u_f(z, t)}{\partial z^2} - \frac{m}{s_f} \cdot \frac{\partial^2 u_f(z, t)}{\partial t^2} = 0}$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO 2

ALVAREZ, R. A. **Calculo de estructuras**. Tomo II. Escuela Tecnica Superior de Ingenieros de Montes: Madrid, 1981.

ATAIDE, M.O.P. **Aplicação do método de ritz-galerkin à análise de estruturas de edifícios altos pela técnica do meio contínuo**. 1981. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1981. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/620?search=ATAIDE>.

BAFFA, I.M.P.D. **Efeito do vento em edifícios altos – Pórticos normais às paredes (Método da Energia)**. 1982. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1982. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/634?search=BAFFA>.

BATTISTELLE, R.A.G. **Cálculo dos deslocamentos laterais de painéis planos considerando as deformações axiais dos pilares e o efeito de 2ª ordem**. 1991. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/756?search=BATTISTELLE>.

BECK, H. Contribution to the analysis of coupled shear walls. **Journal of the American concrete institute**, v. 59, n. 8, p. 1055-1070, 1962.

BOTTURA, H.M. **Estudo sobre o efeito da deformabilidade das lajes na distribuição dos esforços horizontais nos painéis de contraventamento**. 1991. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/762?search=BOTTURA>.

BOTTURA, H.M. **Uma família de algoritmos hermitianos para a integração direta das equações de dinâmica das estruturas**. 1997. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/297?search=BOTTURA>.

BREBBIA, C.A.; FERRANTE, A.J. **The finite elemento technique**. Porto Alegre: Editora UFRGS, 1975.

CARVALHO, F.A.C. **Efeitos de cargas verticais em estruturas de edifícios altos**. 1982. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1982. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/637?search=CARVALHO>.

CHITTY, L. On the cantilever composed of a number of parallel beams interconnected by cross bars. **Philosophical Magazine and Journal of Science**, Vol. 38, p. 685 – 699, 1947.

COELHO, I.R. **Desacoplamento das equações da técnica do meio contínuo: análise de estruturas de edifícios altos**. 1987. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/695?search=Desacoplamento%20das%20equa%C3%A7%C3%B5es%20da%20t%C3%A9cnica>.

COULL, A.; CHOUDHURY, J. R. Analysis of coupled shear walls. **ACI Journal**, Vol. 64, issue 9, p. 587 – 593, 1967.

DHATT, G.; TOUZOT, G.; LEFRANÇOIS, E. **Méthode des éléments finis**. Paris: Lavoisier, 2005.

DONNEYS, C.A.O. **Análise de estruturas de edifício alto submetidas a carregamento sísmico pela técnica do meio contínuo**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/1111?search=DONNEYS>.

FERREIRA, L.F.O. **Associação plana de pórticos com pilares paredes**. 1975. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1975. Disponível online em:

<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/577?search=Associa%C3%A7%C3%A3o%20plana%20de%20p%C3%B3rticos%20com%20pilares%20parede>.

GUELFOND, A.O. **Calcul des differences finies**. Paris: Dunod, 1963.

HASSAN, J.C.M. **Sobre o emprego dos métodos numéricos na solução da equação diferencial da dinâmica das estruturas**. 1987. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987. Disponível online em:

<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/696?search=Sobre%20o%20emprego%20dos%20m%C3%A9todos%20num%C3%A9ricos%20na%20solu%C3%A7%C3%A3o%20da%20equa%C3%A7%C3%A3o>.

LAIER, J.E. **Análise tridimensional dos efeitos de temperatura em edifícios altos**. 1975. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1975. Disponível online em:

<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/576?search=laier>.

LAIER, J.E. **Análise das vibrações livres de edifícios pela técnica do meio contínuo**. 1978. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1978. Disponível online em:

<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/592?search=laier>.

LAIER, J.E. **Estudo do comportamento dinâmico de estruturas de edifícios altos pela técnica do meio contínuo**. 1984. Tese (Livre-Docência em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1984.

LAIER, J.E. **Efeitos de segunda ordem em pórticos de edifícios altos**. EESC-USP: Publicação do Departamento de Estruturas, 1989.

LAIER, J.E. An improved continuous medium technique for structural frame analysis. **The Structural Design of Tall and Special Buildings**, Vol. 17, p. 25 – 38, 2008.

LAIER, J.E. **Análise de estruturas de Edifícios Altos pela Técnica do Meio Contínuo**. São Carlos: EESC/USP, 2024. Disponível online em:

<https://www.livrosabertos.abcd.usp.br/portaldelivrosUSP/catalog/book/1301>.

LAREDO, M. **Grands Batiments: Contreventements, Dynamique des Structures & Calcul Automatique**. Paris: Éditions Eyrolles, 1977.

LLERENA, C.A.E. **Análise de edifícios altos submetidos a terremotos pela técnica do meio contínuo**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009. Disponível online em:

<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/927?search=LLERENA>.

MANCINI, E. **Associação contínua tridimensional de pórticos e paredes com engastamentos elásticos**. 1972. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1972. Disponível online em:

<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/564?search=mancini>.

MANCINI, E. **Análise contínua de estruturas de edifícios elevados sujeitas à ação do vento**. 1973. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1973. Disponível online em:

<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/568?search=mancini>.

MANCINI, E.; SAVASSI, W. Breve estudo comparativo sobre o comportamento de porticos planos sob ação de cargas horizontais. **Mecânica Computacional: Structural Dynamics**, Vol. I, Number 2, p. 49 – 63, 1985.

MANCINI, E.; SAVASSI, W. Tall buildings structures unified plane panels behaviour. **The Structural Design of Tall Buildings**, Vol. 8, p. 155 – 170, 1999.

MANCINI, E.; SAVASSI, W. Three-dimensional association of bending moment and shear force deformable panels. **The Structural Design of Tall Buildings**, Vol. 10, p. 27 – 42, 2001.

MANCINI, E.; SAVASSI, W. Plane association of bending moment and shear force deformable panels: shear wall-frame plane association. **Proceedings of the XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE 2005)**, paper CIL 04-1036, 2005.

MANCINI, E.; SAVASSI, W.; XAVIER, M.A.P. **Distribuição das forças devidas ao vento entre os painéis de contraventamento: Avaliação dos deslocamentos laterais de painéis planos gerais de edifícios altos sujeitos às forças horizontais utilizando a técnica do meio contínuo**. EESC-USP: Compêndio de artigos e contribuições, São Carlos, 2006. Disponível online em: <http://repositorio.eesc.usp.br/items/ee7d1b56-b86a-4608-a91a-73119a41bc25>.

MARTINS, J.F. **Influência da inércia de rotação e da força cortante nas frequências naturais e na resposta dinâmica de estruturas de barras**. 1998. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998. Disponível online em:

<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/273?search=Influ%C3%Aancia%20da%20in%C3%A9rcia%20de%20rota%C3%A7%C3%A3o%20e%20da%20for%C3%A7a%20cortante>.

MÜLLER JUNIOR, A.C. **Integração da equação do movimento através da transformada de Fourier com uso de ponderadores de ordem elevada**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003. Disponível online em:

<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/102?search=M%C3%9CCLLER%20JUNIOR>.

NORONHA NETO, C.C. **Integração das equações diferenciais do filtro digital de butterworth mediante algoritmo de quadratura numérica de ordem elevada**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003. Disponível online em:

<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/83?search=NORONHA%20NETO>.

OLIVEIRA, D.S. **Aplicação do método de Rayleigh-ritz na integração numérica das equações da técnica do meio contínuo**. 1982. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1982. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/626?search=Aplica%C3%A7%C3%A3o%20do%20m%C3%A9todo%20de%20Rayleigh-ritz>.

OLIVEIRA FILHO, J. **Estudo comparativo sobre painéis estruturais planos, sob carga horizontal**. 1990. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1990. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/746?search=Estudo%20comparativo%20sobre%20pain%C3%A9is%20estruturais>.

PASCUAL, C.A.Q. **Parâmetros característicos para a definição de um modelo estático: “pilare de pórtico” ou “pilare-parede”**. 1987. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/683?search=Par%C3%A2metros%20caracter%C3%ADsticos%20para%20a%20defini%C3%A7%C3%A3o%20de%20um%20modelo%20est%C3%A1tico>.

PROENÇA, S.P.B. **Diferenças finitas na integração das equações de técnica do meio contínuo**. 1981. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1981. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/621?search=proen%C3%A7a>.

RAMALHO, M.A. **Integração das equações da técnica do meio contínuo por polinômios de interpolação**. 1983. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1983. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/643?search=Integra%C3%A7%C3%A3o%20das%20equa%C3%A7%C3%B5es%20da%20t%C3%A9cnica%20do%20meio%20cont%C3%ADnuo>.

ROSA NETO, J. P. **Associações de pórticos com paredes deformáveis por momento fletor e força cortante**. EESC/USP – Publicação 036/84: São Carlos, 1984. Disponível online em: <http://repositorio.eesc.usp.br/items/71eccf11-4bf5-4709-b856-15287a46111a>.

ROSMAN, R. Beitrag zur Untersuchung des Zusammenwirkens von waagrecht belasteten Wänden und Stockwerkrahmen bei Hochbauten. **Beton-und Stahlbetonbau**, issue 2, p. 36 – 40, 1963.

ROSMAN, R. Stability and Dynamics of Shear-Wall Frame Structures. **Buildings Science**, v. 9, p. 55-63, 1974.

SEIXAS, R.S. **Integração das equações da técnica do meio contínuo pelo método stodolaviano**. 1981. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1981. Disponível online em:

<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/614?search=Integra%C3%A7%C3%A3o%20das%20equa%C3%A7%C3%B5es%20da%20t%C3%A9cnica%20do%20meio%20cont%C3%ADnuo%20pelo.>

SOUZA, V. C. M.; JEARY, A. P.; SPARKS, P. R. Considerações sobre o comportamento dinâmico de edifícios pré-moldados. **Revista Brasileira de Tecnologia**, Volume 11, p. 219 – 231, 1980.

STAMATO, M.C. Associação contínua de paredes e pórticos planos. **XV<sup>as</sup> Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural**, Vol. 1, p. 139 – 158, 1971a.

STAMATO, M.C. **Associação contínua de painéis de contraventamento**. EESC-USP: Publicação N° 157, 1971b e reimpressão em 1980.

STAMATO, M.C. **Distribuição das cargas do vento entre os painéis de contraventamento**. São Carlos: EESC-USP, 1966. Disponível online em:  
<http://repositorio.eesc.usp.br/items/67cd702b-6202-49e4-8ce5-4ac1aaed9406>.

STAMATO, M.C. **Estado Atual da análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos**. EESC-USP: Publicação N° 163, 1972. Disponível online em:  
<http://repositorio.eesc.usp.br/items/4b8f882b-52aa-4773-b2be-2e70a7cea931>.

STAMATO, M.C.; MANCINI, E. Paredes de seção aberta associadas e pórticos planos. **Revista Brasileira de Tecnologia**, Vol. 3, p. 139 – 146, 1972.

SOUZA, J.C.A.O. **Um estudo de perturbações devidas a engastamento elástico em estruturas de edifícios altos com a técnica contínua de análise**. 1986. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1986. Disponível online em:  
<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/672?search=Um%20estudo%20de%20perturba%C3%A7%C3%B5es%20devidas%20a%20engastamento%20el%C3%A1stico.>

XAVIER, M.A.P. **Análise do comportamento estático de painéis planos de edifícios altos utilizando a técnica contínua**. 1994. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994. Disponível online em:  
<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/812?search=An%C3%A1lise%20do%20comportamento%20est%C3%A1tico%20de%20pain%C3%A9is%20planos.>

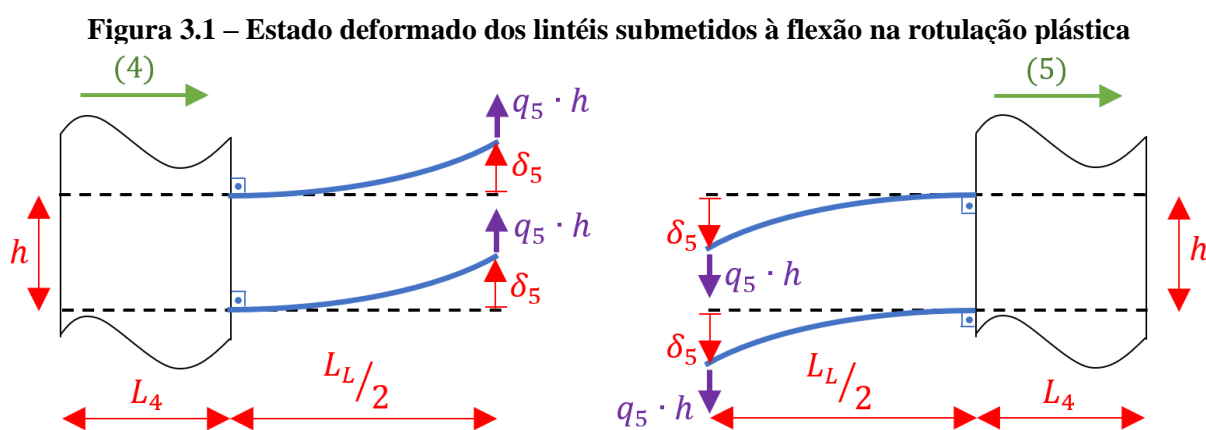
YOSHIDA, S. **Análise do efeito do vento em estruturas de edifícios com lajes deformáveis**. 1989. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1989. Disponível online em:  
<https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/727?search=An%C3%A1lise%20do%20efeito%20do%20vento%20em%20estruturas.>



### 3.1 CONTRAVENTAMENTO HORIZONTAL

#### a) Rotulação no centro dos vãos dos lintéis

Para a consideração da formação da rotulação dos lintéis sempre no meio dos vãos é realizada a análise estrutural da metade do lintel como viga monoengastada, conforme é ilustrado na Figura 3.1.

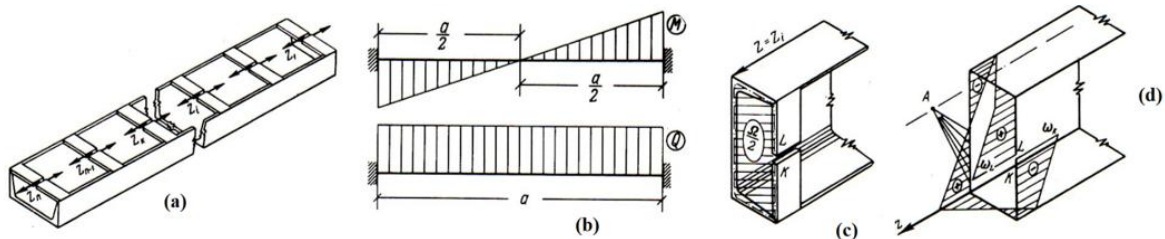


Em seguida, o deslocamento vertical do extremo livre,  $\delta_5$  (adotado positivo para baixo), surgido com a rotulação é calculado através do Princípio dos Trabalhos Virtuais, como:

$$|\delta_5| = \int_0^{L_L/2} \left( \begin{array}{c} (+) \\ q_5 \cdot h \cdot \frac{L_L}{2} \end{array} x \begin{array}{c} (+) \\ 1 \cdot \frac{L_L}{2} \end{array} \right) \frac{ds}{E \cdot I_L} = \frac{\frac{L_L}{2}}{3 \cdot (E \cdot I_L)} \cdot q_5 \cdot h \cdot \frac{L_L}{2} \cdot \frac{L_L}{2} = \frac{q_5 \cdot h}{3 \cdot (E \cdot I_L)} \cdot \left( \frac{L_L}{2} \right)^3$$

Esta formulação advém dos debates e postulações em Vlassov (1962) e percebe-se a simplificação em considerar a formação de rotulações plásticas unicamente no meio dos vãos dos lintéis de contraventamento dos Painéis – Parede, independente do posicionamento do lintel ao longo da altura do pilar, conforme é ilustrado na Figura 3.2.

**Figura 3.2 – Núcleo estrutural C: (a) formação de rótulas plásticas no meio do vão dos lintéis, (b) diagramas de momento fletor e esforço cortante nos lintéis, (c) área setorial interna e (d) Diagrama de Ordenadas Setoriais principais  $\omega_{pc}$  com o ponto A sendo o Centro de Torção D**



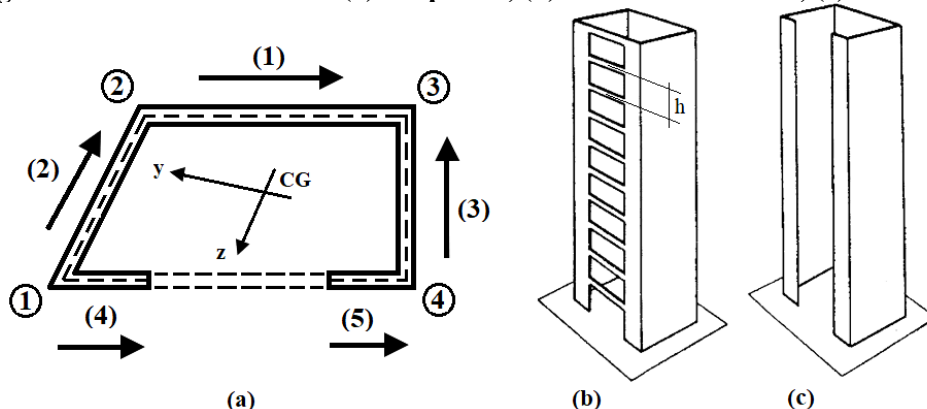
Fonte: (Vlassov, 1962)

## b) Lintéis modelados via equações de Maney

A definição dos painéis – parede é proposta por Barbosa (1980, p. II-55), sendo também denominados simplesmente de paredes. O painel – parede é, então, um painel plano com deformabilidade ao momento fletor e com rigidez elevada ao corte; e caracterizado por seção transversal constante ao longo do eixo axial e com vinculação por engaste na base.

Vide na Figura 3.3 a disposição da seção de paredes finas e a possibilidade de contraventamento por lintéis.

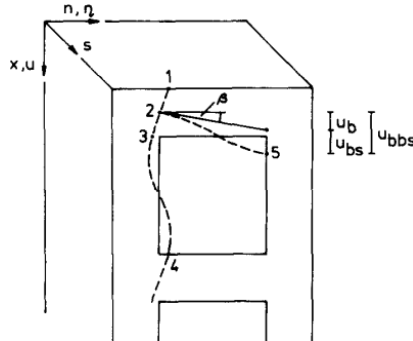
**Figura 3.3 – Pilar em núcleo: (a) em planta, (b) não contraventado, (c) sem lintéis**



Fonte: Adaptado de (Smith; Coull, 1991)

Na Figura 3.4 visualiza-se a deformada do lintel horizontal e dos Painéis – Parede que o suportam, concluindo-se um funcionamento plano.

**Figura 3.4 – Deformadas planas dos lintéis horizontais e dos Painéis-Parede de sustentação**

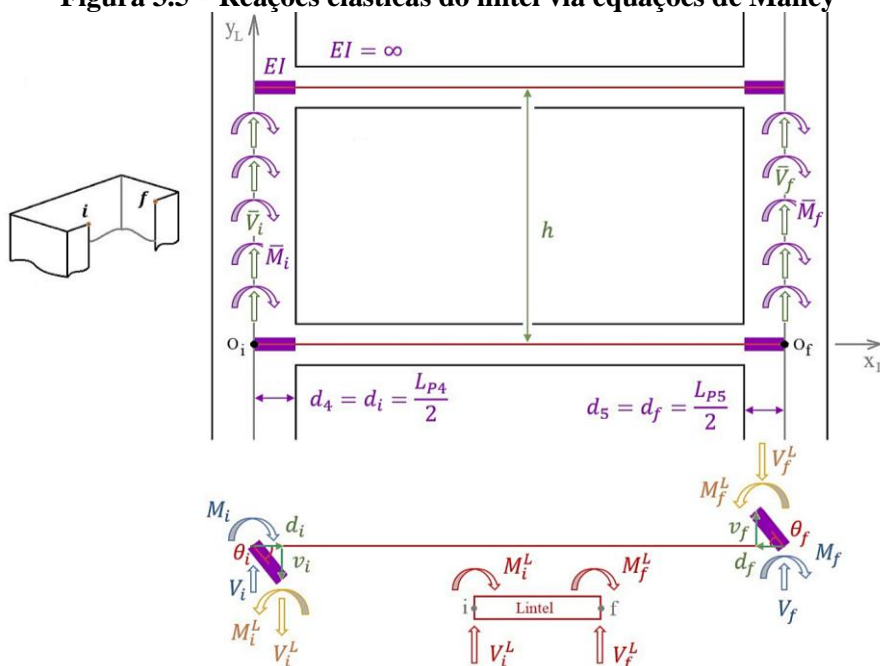


Fonte: (Roberts; Yeung, 1992)

O processo de translação das reações elásticas do lintel, da face da parede para o seu eixo, é apresentado na Figura 3.5. Admite-se que o trecho de superposição dos lintéis com as paredes são infinitamente rígidos à flexão ( $EI \approx \infty$ ). As reações elásticas dos lintéis são:  $V_i^L$ ,  $M_i^L$ ,  $V_f^L$  e  $M_f^L$ . Em seguida, as reações  $V$  e  $M$  são uniformizadas ao longo da altura das paredes, como:  $\bar{V}_i = \frac{V_i^L}{h}$ ,  $\bar{M}_i = \frac{M_i^L}{h}$ ,  $\bar{V}_f = \frac{V_f^L}{h}$  e  $\bar{M}_f = \frac{M_f^L}{h}$ .

As análises serão procedidas via Parcel e Maney (1944) possibilitando o funcionamento viga do lintel e não impor a hipótese de rotulação plástica obrigatoriamente no meio do vão. Tal hipótese de rotulação foi adotada por Smith e Taranath (1972) e seguida por diversos autores, dos quais citam-se: Mancini (1972), Barbosa (1980) e Xavier (1987). Ver também as formulações de Szerémi (1977, p. 209).

**Figura 3.5 – Reações elásticas do lintel via equações de Maney**



Fonte: O Autor (2025)

Transladam-se as reações elásticas do lintel para o eixo dos painéis – parede, mediante equilíbrio dos nós inicial e final ( $O_i, O_f$ ), obtendo matricialmente:

$$\{M\} = [R_L] \cdot \{M_L\} \quad (eq. 3.1)$$

com;  $\{M\}^T = \{M_i \ M_f \ V_i \ V_f\}$  sendo o vetor de reações elásticas no CG dos painéis – parede;  $\{M_L\}^T = \{M_i^L \ M_f^L \ V_i^L \ V_f^L\}$  o vetor de reações elásticas nas extremidades do lintel e  $[R_L]$  a matriz de correlação.

Ficando as reações elásticas do lintel, expressas por:

$$\begin{pmatrix} M_i^L \\ M_f^L \\ V_i^L \\ V_f^L \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_i^L & a^L & -b_i^L & b_i^L \\ a^L & k_f^L & -b_f^L & b_f^L \\ -b_i^L & -b_f^L & t^L & -t^L \\ b_i^L & b_f^L & -t^L & t^L \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_i^L \\ \phi_f^L \\ v_i^L \\ v_f^L \end{pmatrix} \quad (eq. 3.2)$$

onde:  $k_{c_L}, e_L, h_L$  e  $I_L$  é o fator de forma, a base, a altura e o momento de inércia (respectivamente) para a seção transversal do lintel. Será admitido que a rigidez à flexão dos painéis – parede como infinita. Resultando nas reações elásticas no CG dos painéis – parede, em reações elásticas distribuídas ( $\bar{M}_i, \bar{V}_i, \bar{M}_f$  e  $\bar{V}_f$ ) na distância  $h$  entre os lintéis, como:

$$\bar{M}_i = \frac{M_i}{h} = \frac{k_i \cdot \theta_i + a_i \cdot \theta_f - b_i \cdot v_i + b_i \cdot v_f}{h} \quad (eq. 3.3 a)$$

$$\bar{V}_i = \frac{V_i}{h} = \frac{-b_i \cdot \theta_i + b_f^* \cdot \theta_f + t \cdot v_i - t \cdot v_f}{h} \quad (eq. 3.3 b)$$

$$\bar{M}_f = \frac{M_f}{h} = \frac{a_f \cdot \theta_i + k_f \cdot \theta_f - b_f \cdot v_i + b_f \cdot v_f}{h} \quad (eq. 3.3 c)$$

$$\bar{V}_f = \frac{V_f}{h} = \frac{b_i \cdot \theta_i + b_f \cdot \theta_f - t \cdot v_i + t \cdot v_f}{h} \quad (eq. 3.3 d)$$

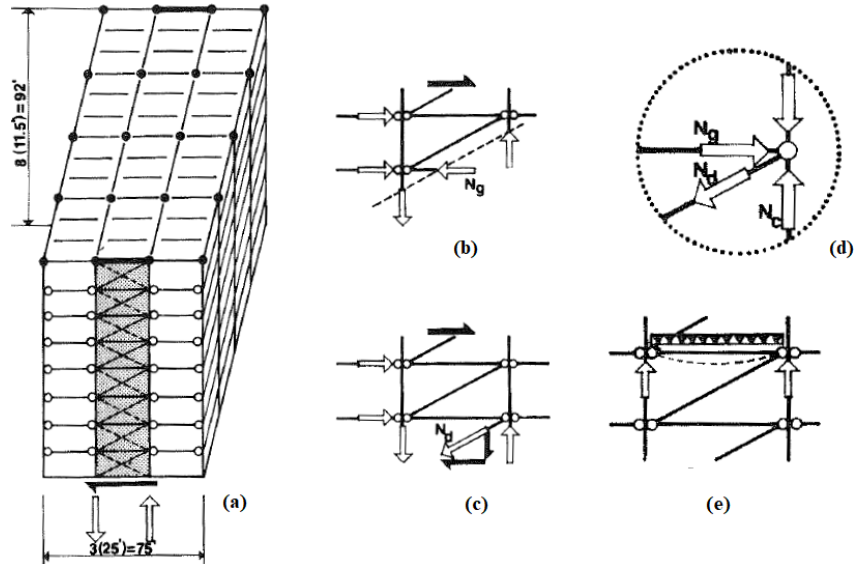
com:  $v_i = \omega_i \cdot \phi'$  e  $v_f = \omega_f \cdot \phi'$  (advindo da teoria de Vlassov para seção de paredes finas). Pela geometria conclui-se:  $\theta_i = v_i / d_4 = 2 \cdot \omega_i \cdot \phi' \cdot (L_4)^{-1}$  e  $\theta_f = v_f / d_5 = 2 \cdot \omega_f \cdot \phi' \cdot (L_5)^{-1}$ ;  $\omega_i$  é a ordenada setorial de  $\omega_{pc}$  (ver Fig. 1.41 (b) para o núcleo C, por exemplo) no ponto  $i$  (ver Fig. 3.5) e  $\omega_f$  é a ordenada de  $\omega_{pc}$  no ponto  $f$ .

## 3.2 CONTRAVENTAMENTO EM Z

Partindo dos conceitos de contraventamento em pórticos planos mediante lintéis inclinados cruzando os andares de Edifícios Altos, conforme percebe-se em Pubal (1988) e em

Schueller (1990, p. 518), constata-se o contraventamento em Z como modelo de redistribuição das cargas laterais. Vide Figura 3.6.

**Figura 3.6 – Contraventamento por lintel inclinado: (a) posicionamento no pórtico, (b) determinação de esforços via Método das Seções, (c) esforço normal no lintel inclinado, (d) distribuição de cargas nodais e (e) funcionamento estrutural do lintel horizontal**

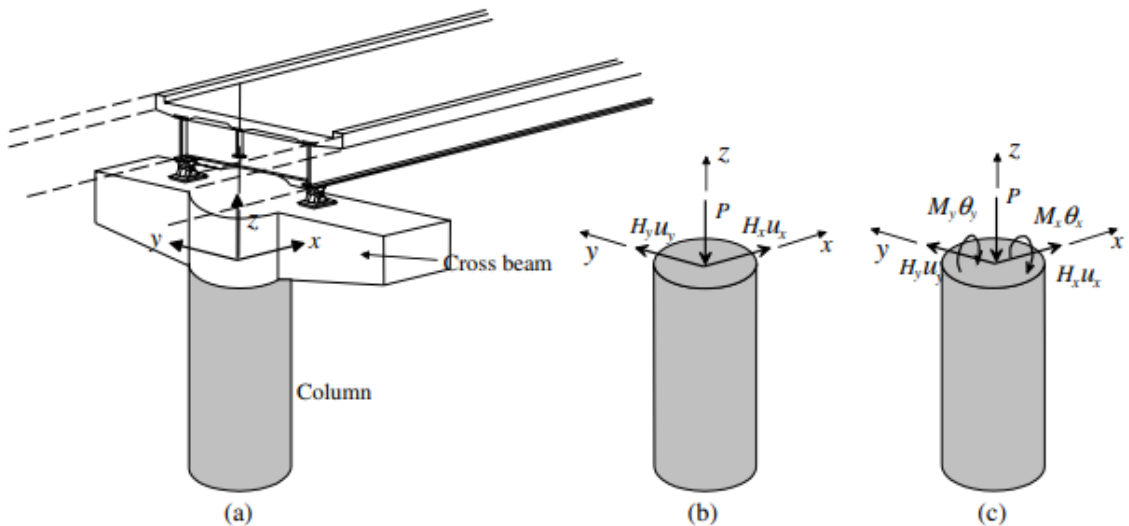


Fonte: (Schueller, 1990)

E ainda, seguindo as formulações de Goto et al. (2015); Roberts & Yeung (1992); Zalka (2000, p. 218 – 230); e MacLeod (1990, p. 124 – 127) pode-se aplicar os conceitos do contraventamento em Z do pórtico plano, apresentado na Figura 3.6. Isso para o sistema de contraventamento do pilar de pontes em paredes finas, considerando a subdivisão da estrutura tridimensional do Núcleo em Painéis – Parede.

Observa-se assim, na Figura 3.7 o funcionamento de um pilar de ponte, além de seus carregamentos típicos.

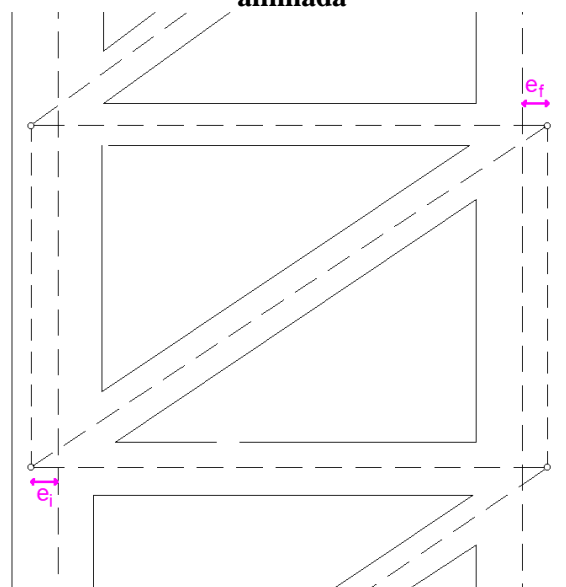
**Figura 3.7 – Sistema Tabuleiro de ponte - Pilar: (a) geometria e eixos, (b) cargas atuantes no topo do pilar e (c) momentos atuantes no topo do pilar**



Fonte: (Goto et al., 2015)

E na Figura 3.8 verifica-se que o *Sistema de Contraventamento em Z*, acima descrito, fica com excentricidade de aplicação das cargas dos lintéis, admitindo-se para tal que as seções extremas dos lintéis, inclinados e horizontais ficam alinhadas.

**Figura 3.8 – Excentricidade  $e_i$  e  $e_f$  geradas ao modelar os extremos dos lintéis de forma alinhada**

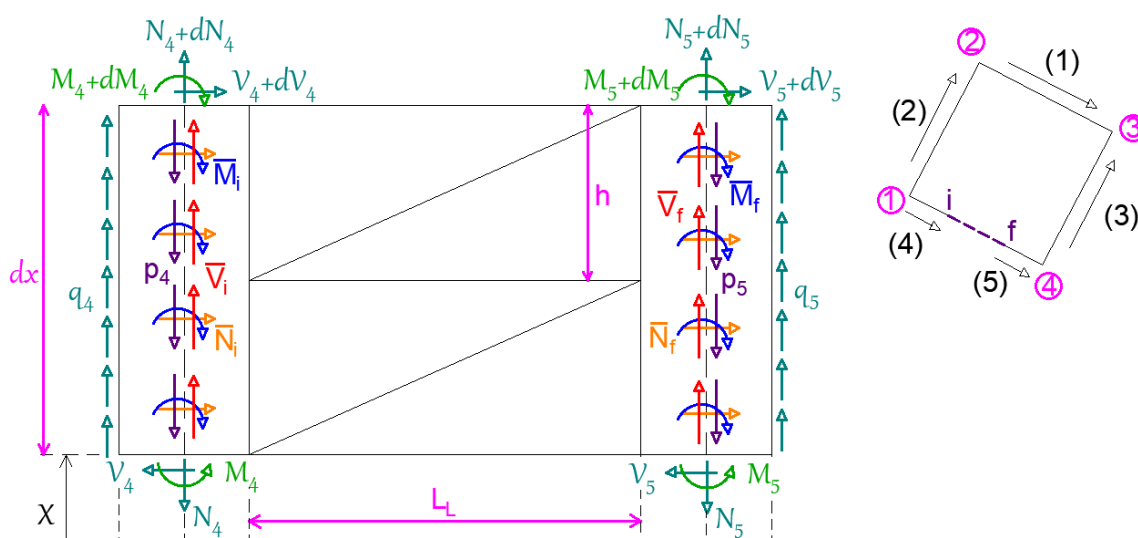


Fonte: O Autor (2025)

Partindo da Teoria dos Painéis – Parede (TPP), bem como adotando-se os procedimentos de análise estrutural preconizados em Laredo (1969, p. 309 – 312); Laredo (1973, p. 112); Barbosa (1978, p. II-60 a II-64); e Melo (2019, p. 93 – 98), postula-se o elemento de contraventamento por lintéis em Z.

E na Figura 3.9 é apresentado o referido sistema de contraventamento com a sustentação dos lintéis através dos Painéis – Parede (4) e (5).

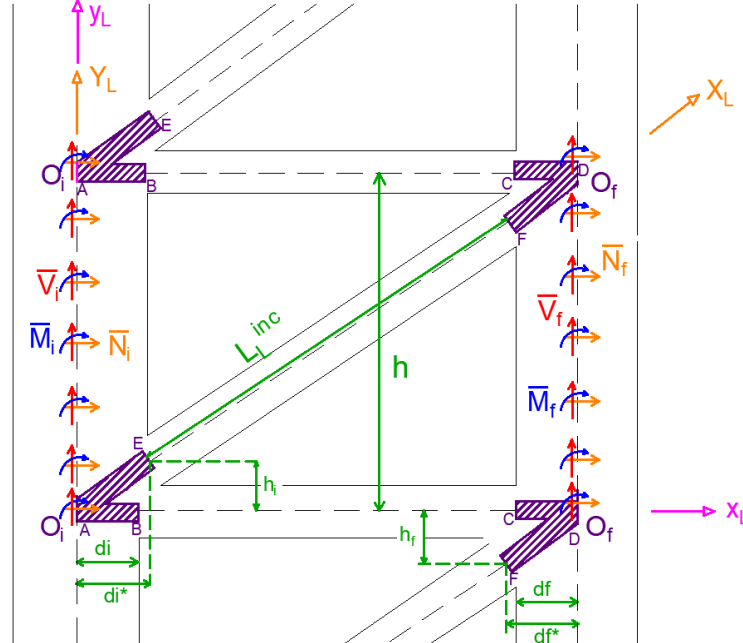
**Figura 3.9 – Elemento do Sistema de Contraventamento em Z**



Fonte: (Melo et al., 2021)

E por fim, mediante adaptações da formulação postulada para a interação dos lintéis com os Painéis – Parede, ver MacLeod (1973) e Szerémi (1977, p. 209), adotam-se trechos de rigidez à flexão infinita, nos aludidos segmentos de interação. Vide Figura 3.10.

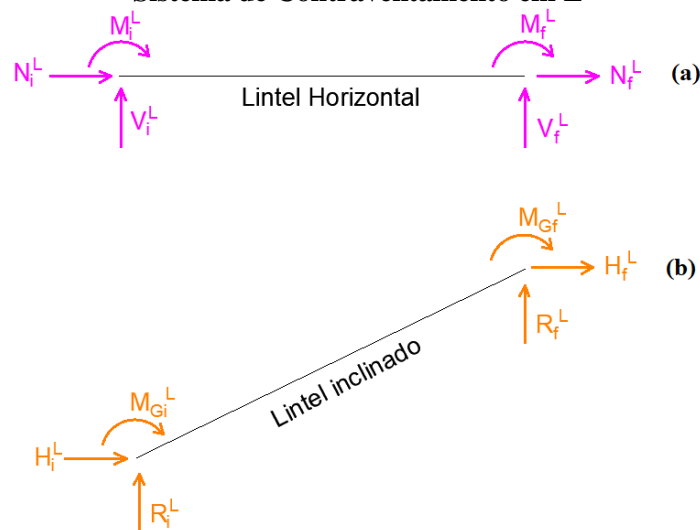
**Figura 3.10 – Modelagem do sistema estrutural da interseção Lintéis em Z – Painéis-Parede**



Fonte: (Melo et al., 2021)

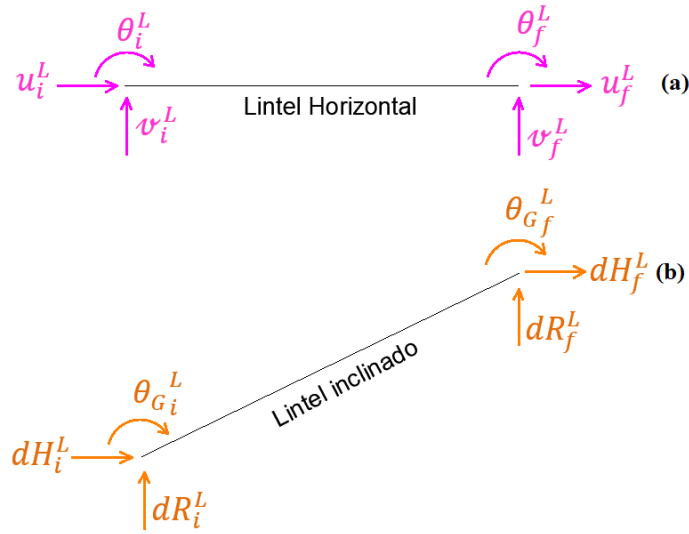
Em último, admitindo-se a modelagem dos lintéis através das equações de equilíbrio em esforços solicitantes, preconizada por George Alfred Maney no ano de 1915, e amplamente difundidas por: Maney (1915); Parcel & Maney (1944); Hoit (1995, p. 89 – 149); e Megson (2005) e dentre outros. Postulam-se assim, na Figura 3.11 as reações elásticas para os lintéis horizontais e inclinados.

**Figura 3.11 – Reações elásticas para: (a) os lintéis horizontais e (b) os lintéis inclinados, do Sistema de Contraventamento em Z**



Fonte: (Melo et al., 2021)

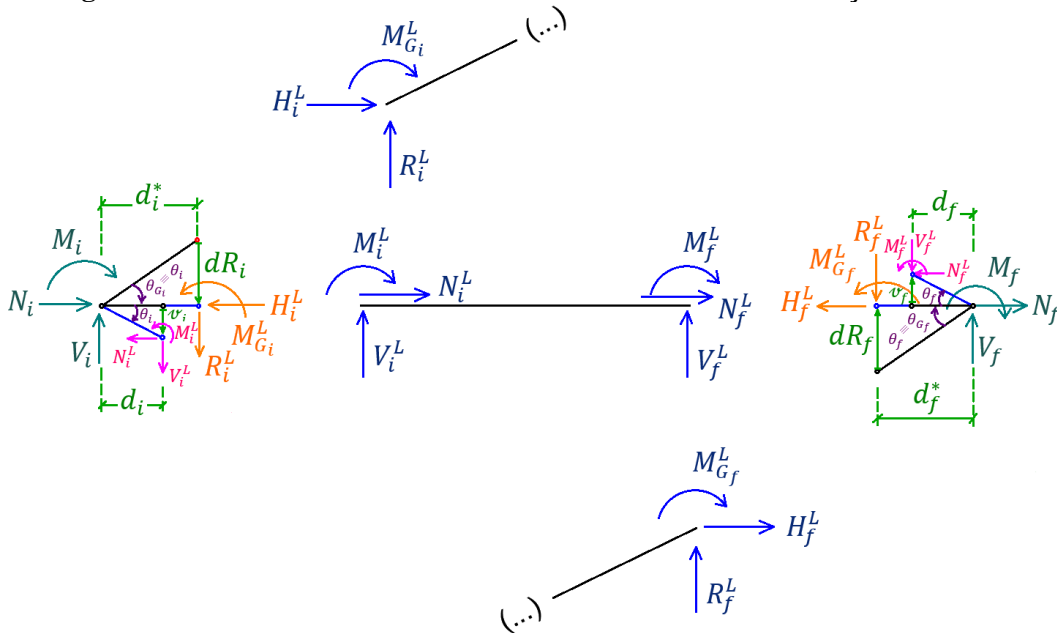
cujos Graus de liberdade dos lintéis são indicados na Figura 3.12.

**Figura 3.12 – Graus de liberdade nos lintéis: (a) horizontais e (b) inclinados**

Fonte: (Melo et al., 2021)

**a) Equações de correlação**

Na Figura 3.13 constam as reações dos lintéis e das paredes (nos pontos de convergência  $O_i$  e  $O_f$ ), além de ilustrar o estado deformado no trecho de superposição ( $EI \approx \infty$ ), sempre em consonância com os graus de liberdade elencados na Figura 3.12.

**Figura 3.13 – Estado deformado dos lintéis e as decorrentes reações elásticas**

Fonte: (Melo et al., 2021)

e ao realizar o equilíbrio dos pontos de convergência  $O_i$  e  $O_f$ , tem-se:

$$\begin{matrix} (+) \\ \rightarrow \end{matrix} \sum F_H(O_i) = 0 \quad \therefore \quad N_i = N_i^L + H_i^L \quad (eq. 3.4 a)$$

$$\begin{matrix} (+) \\ \rightarrow \end{matrix} \sum F_V(O_i) = 0 \quad \therefore \quad V_i = V_i^L + R_i^L \quad (eq. 3.4 b)$$

$$\begin{matrix} (+) \\ \curvearrowright \end{matrix} \sum M(O_i) = 0 \quad \therefore \quad M_i = M_i^L - V_i^L \cdot d_i - N_i^L \cdot v_i + M_{G_i}^L - R_i^L \cdot d_i^* - H_i^L \cdot (h_i - dR_i) \quad (eq. 3.4 c)$$

$$\begin{matrix} (+) \\ \rightarrow \end{matrix} \sum F_H(O_f) = 0 \quad \therefore \quad N_f = N_f^L + H_f^L \quad (eq. 3.4 d)$$

$$\begin{matrix} (+) \\ \rightarrow \end{matrix} \sum F_V(O_f) = 0 \quad \therefore \quad V_f = V_f^L + R_f^L \quad (eq. 3.4 e)$$

$$\begin{matrix} (+) \\ \curvearrowright \end{matrix} \sum M(O_f) = 0 \quad \therefore \quad M_f = M_f^L + V_f^L \cdot d_f + N_f^L \cdot v_f + M_{G_f}^L + R_f^L \cdot d_f^* - H_f^L \cdot (h_f - dR_f) \quad (eq. 3.4 f)$$

As eq. (3.4 a – f) correlacionam as reações elásticas nos pontos de convergência com as dos núcleos e são agrupadas matricialmente, como:

$$\{M\} = [R_L^{hor}] \cdot \{M_L^{hor}\} + [R_L^{inc}] \cdot \{M_L^{inc}\} \quad (eq. 3.5)$$

$$\text{com: } \{M_L^{hor}\}^T = \{N_i^L \quad V_i^L \quad M_i^L \quad N_f^L \quad V_f^L \quad M_f^L\};$$

$$\{M_L^{inc}\}^T = \{H_i^L \quad R_i^L \quad M_{G_i}^L \quad H_f^L \quad R_f^L \quad M_{G_f}^L\};$$

$$[R_L^{hor}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v_i & -d_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_f & d_f & 1 \end{bmatrix}; \quad [R_L^{inc}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_i^* & -d_i^* & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_f^* & d_f^* & 1 \end{bmatrix};$$

$$\{M\}^T = \{N_i \quad V_i \quad M_i \quad N_f \quad V_f \quad M_f\}; \quad v_i^* = (v_i - h_i); \quad v_f^* = (v_f - h_f).$$

sendo:  $[R_L^{hor}]$  – a matriz de correlação entre os lintéis horizontais e os pontos de convergência;

$[R_L^{inc}]$  – a matriz de correlação entre os lintéis inclinados e os pontos de convergência;

$\{M\}$  – o vetor de reações elásticas nos pontos de convergência;

$\{M_L^{hor}\}$  – o vetor de reações elásticas nos lintéis horizontais; e

$\{M_L^{inc}\}$  – o vetor de reações elásticas nos lintéis inclinados.

## b) Equações de equilíbrio dos lintéis

As equações de equilíbrio dos lintéis são estabelecidas pelo emprego das equações de Maney do elemento finito, horizontal e inclinado, para as convenções apresentadas nas Figuras 3.11 e 3.13, como:

$$\{M_L^{hor}\} = [k_L^{hor}].\{d_L^{hor}\} \quad (eq. 3.6 a)$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} N_i^L \\ V_i^L \\ M_i^L \\ N_f^L \\ V_f^L \\ M_f^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r^L & 0 & 0 & -r^L & 0 & 0 \\ 0 & t^L & -b_i^L & 0 & -t^L & -b_f^L \\ 0 & -b_i^L & k_i^L & 0 & b_i^L & a^L \\ -r^L & 0 & 0 & r^L & 0 & 0 \\ 0 & -t^L & b_i^L & 0 & t^L & b_f^L \\ 0 & -b_f^L & a^L & 0 & b_i^L & k_f^L \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_f \\ v_f \\ \theta_f \end{Bmatrix}$$

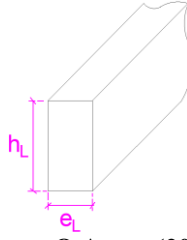
sendo:  $k_i^L = k_f^L = k^L = \frac{4.E.I_L}{L_L} \cdot \frac{1 + \varphi_{c_L}}{1 + 4.\varphi_{c_L}}$ ;  $a^L = \frac{2.E.I_L}{L_L} \cdot \frac{1 - 2.\varphi_{c_L}}{1 + 4.\varphi_{c_L}}$ ;

$r^L = \frac{E.A_L}{L_L}$ ;  $b_i^L = b_f^L = b^L = \frac{k^L + a^L}{L_L}$ ;  $t^L = \frac{2.b^L}{L_L}$ ;

$\varphi_{c_L} = \frac{3.E.I_L}{G.A_L.(L_L)^3} \cdot k_c$ ;  $A_L = e_L \cdot h_L$ ;  $I_L = \frac{e_L \cdot (h_L)^3}{12}$ ;

$k_c = \frac{6}{5}$  fator de forma para seções retangulares e conforme lintel apresentado na Figura 3.14.

**Figura 3.14 – Seção transversal dos lintéis horizontais**



**Fonte: O Autor (2025)**

$$\{M_L^{inc}\} = [k_L^{inc}].\{d_L^{inc}\} \quad (eq. 3.6 b)$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} H_i^L \\ R_i^L \\ M_{Gi}^L \\ H_f^L \\ R_f^L \\ M_{Gf}^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{inc} & r^{*inc} & b_i^{*inc} & -r^{inc} & -r^{*inc} & b_f^{*inc} \\ r^{*inc} & t^{inc} & -b_i^{inc} & -r^{*inc} & -t^{inc} & -b_f^{inc} \\ b_i^{*inc} & -b_i^{inc} & k_i^{inc} & -b_i^{*inc} & b_i^{inc} & a^{inc} \\ -r^{inc} & -r^{*inc} & -b_i^{*inc} & r^{inc} & r^{*inc} & -b_f^{inc} \\ -r^{*inc} & -t^{inc} & b_i^{inc} & r^{*inc} & t^{inc} & b_f^{inc} \\ b_f^{*inc} & -b_f^{inc} & a^{inc} & -b_i^{*inc} & b_f^{inc} & k_f^{inc} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_f \\ v_f \\ \theta_f \end{Bmatrix}$$

com:  $k_i^{inc} = k_f^{inc} = k^{inc} = \frac{4.E.I_L^{inc}}{L_L^{inc}} \cdot \frac{1 + \varphi_{c_L}^{inc}}{1 + 4.\varphi_{c_L}^{inc}}$ ;  $a^{inc} = \frac{2.E.I_L^{inc}}{L_L^{inc}} \cdot \frac{1 - 2.\varphi_{c_L}^{inc}}{1 + 4.\varphi_{c_L}^{inc}}$ ;

$r^{inc} = r^L \cdot \cos^2(\gamma_c) + t^L \cdot \sin^2(\gamma_c)$ ;  $t^{inc} = r^L \cdot \sin^2(\gamma_c) + t^L \cdot \cos^2(\gamma_c)$ ;

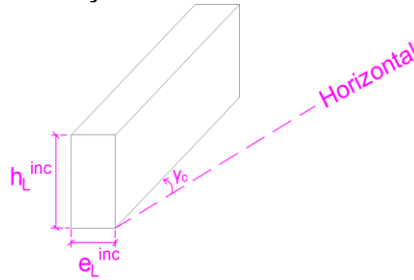
$b_i^{inc} = b_i^L \cdot \cos(\gamma_c)$ ;  $b_f^{inc} = b_f^L \cdot \cos(\gamma_c)$ ;  $b_i^{*inc} = b_i^L \cdot \sin(\gamma_c)$ ;  $I_L^{inc} = \frac{e_L^{inc} \cdot (h_L^{inc})^3}{12}$

$b_f^{*inc} = b_f^L \cdot \sin(\gamma_c)$ ;  $r^{inc} = \frac{E.A_L^{inc}}{L_L^{inc}}$ ;  $r^{*inc} = (r^L - t^L) \cdot \sin(\gamma_c) \cdot \cos(\gamma_c)$ ;  $A_L^{inc} = e_L^{inc} \cdot h_L^{inc}$

$b_i^L = b_f^L = b^L = \frac{k^{inc} + a^{inc}}{L_L^{inc}}$ ;  $t^L = \frac{2.b^L}{L_L^{inc}}$ ;  $\varphi_{c_L} = \frac{3.E.I_L^{inc}}{G.A_L^{inc} \cdot (L_L^{inc})^3} \cdot k_c$ ;  $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$

$k_c = \frac{6}{5}$  fator de forma para seções retangulares e conforme lintel apresentado na Figura 3.15.

**Figura 3.15 – Seção transversal dos lintéis inclinados**



Fonte: O Autor (2025)

Por fim, vale ressaltar a igualdade nos deslocamentos:

$$u_i^L = dH_i^L \equiv u_i \quad (eq. 3.6 c)$$

$$v_i^L = dR_i^L \equiv v_i \quad (eq. 3.6 d)$$

$$\theta_i^L = \theta_{G_i}^L \equiv \theta_i \quad (eq. 3.6 e)$$

$$u_f^L = dH_f^L \equiv u_f \quad (eq. 3.6 f)$$

$$v_f^L = dR_f^L \equiv v_f \quad (eq. 3.6 g)$$

$$\theta_f^L = \theta_{G_f}^L \equiv \theta_f \quad (eq. 3.6 h)$$

### c) Translade das reações elásticas

Em seguida serão realizadas três mudanças de referencial, visando a transferência das reações elásticas dos lintéis até os pontos de convergência ( $O_i$  e  $O_f$ ).

#### c.1) Primeira Transformação

A primeira transformação de referencial consiste em transladar o vetor com os graus de liberdade dos lintéis,  $\{d^L\}$ , para o mesmo referencial dos graus de liberdade  $\{d\}$  nos pontos de convergência. Da compatibilidade tem-se a correlação via matriz identidade de ordem 6.

Parte-se do vetor deslocamento  $\{d^L\}$  nos extremos dos lintéis, em direção ao vetor de deslocamentos nos pontos de convergência. Escrevendo-se:

$$\{d^L\} = \{d_L^{hor}\} \equiv \{d_L^{inc}\}$$

$$\text{do que para se manter o equilíbrio estrutural, exprime-se:} \quad \{d\} = [I] \cdot \{d^L\} \quad (eq. 3.7 a)$$

$$\text{com: } \{d_L^{hor}\}^T = \{u_i^L \quad v_i^L \quad \theta_i^L \quad u_f^L \quad v_f^L \quad \theta_f^L\};$$

$$\{d_L^{inc}\}^T = \{dH_i^L \quad dR_i^L \quad \theta_{G_i}^L \quad dH_f^L \quad dR_f^L \quad \theta_{G_f}^L\}; \text{ e}$$

$$\{d^L\}^T = \{d\}^T = \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_f \quad v_f \quad \theta_f\}.$$

sendo:  $\{d\}$  – vetor com os graus de liberdade nos pontos de convergência;

$\{d^L\}$  – vetor com os graus de liberdade nos lintéis; e

$\{d_L^{hor}\}$ ;  $\{d_L^{inc}\}$  – vetores dos graus de liberdade dos lintéis horizontais e dos inclinados, respectivamente.

### c.2) Segunda Transformação

A segunda transformação representa a mudança dos graus de liberdade do referencial dos lintéis para o referencial global do sistema de contraventamento. Assim, três etapas serão definidas:

- **1ª Etapa:** Na primeira etapa será definido o Sistema Global de Coordenadas (SGC) do sistema de contraventamento, nos pontos pontos de convergência ( $O_i$  e  $O_f$ ). Deste modo, escreve-se o vetor  $\{D\}$  como:

$$\{D\}^T = \{\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{u}_f \quad \bar{v}_f \quad \bar{\theta}_f\}$$

sendo:  $\{D\}$  – o vetor com os graus de liberdade do sistema de contraventamento em Z, no SGC, conforme é ilustrado na Figura 3.16.

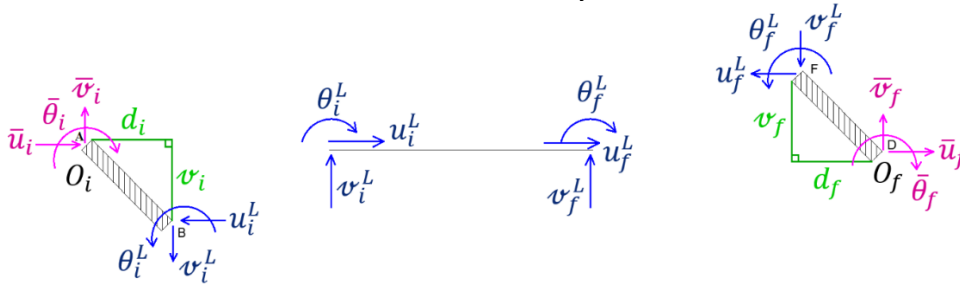
**Figura 3.16 – Graus de Liberdade do contraventamento em Z no SGC**



Fonte: O Autor (2025)

- **2ª Etapa:** A segunda etapa consiste em transladar os graus de liberdade  $\{d_L^{hor}\}$  dos lintéis horizontais para o sistema global, no formato  $\{D\}$ , mediante os deslocamentos de corpo rígido ( $v_i$  e  $v_f$ ) e gerando a matriz de transferência  $[R_L^{hor}]$ . Na Figura 3.17 é ilustrado a etapa em comento.

**Figura 3.17 – Deslocamentos  $v_i$  e  $v_f$  no lintel horizontal**



Fonte: (Melo et al., 2021)

Ao realizar o equilíbrio dos trechos infinitamente rígidos à flexão, escrevem-se:

$$\begin{aligned}\bar{u}_i &= u_i^L \equiv u_i & ; & \quad \bar{v}_i = v_i^L \equiv v_i \\ \bar{\theta}_i &= \theta_i^L - (v_i) \cdot u_i^L - (d_i) \cdot v_i^L \equiv \theta_i - v_i \cdot u_i - d_i \cdot v_i \\ \bar{u}_f &= u_f^L \equiv u_f & ; & \quad \bar{v}_f = v_f^L \equiv v_f \\ \bar{\theta}_f &= \theta_f + v_f \cdot u_f + d_f \cdot v_f\end{aligned}$$

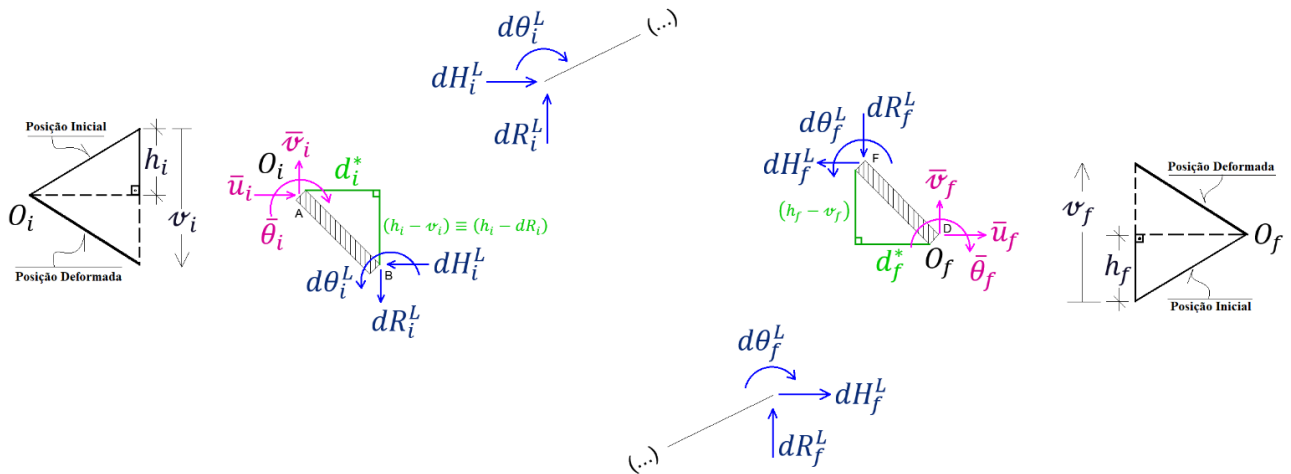
o que matricialmente fica expresso por:  $\{D\} = [R_L^{hor}] \cdot \{d_L^{hor}\}$  (eq. 3.7 b)

sendo:  $[R_L^{hor}]$  apresentada na equação (3.5). E por fim, invertendo-se a eq. (3.7 b), tem-se:

$$\{d_L^{hor}\} = [R_L^{hor}]^T \cdot \{D\} \quad (\text{eq. 3.7 c})$$

- **3ª Etapa:** A terceira etapa é análoga a segunda, porém aplicada ao translação dos graus de liberdade  $\{d_L^{inc}\}$  dos lintéis inclinados, de acordo com a Fig. 3.18.

**Figura 3.18 – Deslocamentos  $v_i$  e  $v_f$  no lintel inclinado**



Fonte: (Melo et al., 2021)

do equilíbrio dos trechos infinitamente rígidos à flexão decorrem:

$$\begin{aligned}\bar{u}_i &= dH_i^L \equiv u_i & ; & \quad \bar{v}_i = dR_i^L \equiv v_i \\ \bar{\theta}_i &= d\theta_i^L - (h_i - v_i) \cdot dH_i^L - (d_i^*) \cdot dR_i^L \equiv d\theta_i^L + (v_i - h_i) \cdot dH_i^L - d_i^* \cdot dR_i^L \\ \bar{u}_f &= dH_f^L \equiv u_f & ; & \quad \bar{v}_f = dR_f^L \equiv v_f \\ \bar{\theta}_f &= d\theta_f^L + (v_f - h_f) \cdot dH_f^L + d_f^* \cdot dR_f^L\end{aligned}$$

o que matricialmente fica expresso por:  $\{D\} = [R_L^{inc}] \cdot \{d_L^{inc}\}$  (eq. 3.7 d)

sendo:  $[R_L^{inc}]$  – a matriz de transferência dos lintéis inclinados e apresentada na eq. (3.5). Do que, por fim, invertendo-se a eq. (3.17 d), conclui-se:

$$\{d_L^{inc}\} = [R_L^{inc}]^T \cdot \{D\} \quad (eq. 3.17 e)$$

### c.3) Terceira Transformação

A terceira transformação decorre da mudança da rigidez local (nos lintéis) para a rigidez do sistema de contraventamento em Z, na escrita da equação de correlação. Ao aplicar as equações (3.6 a) e (3.6 b) na eq. (3.5), tem-se:

$$\{M\} = [R_L^{hor}] \cdot [k_L^{hor}] \cdot \{d_L^{hor}\} + [R_L^{inc}] \cdot [k_L^{inc}] \cdot \{d_L^{inc}\} \quad (eq. 3.8 a)$$

Ao impor as equações (3.7 c) e (3.7 e) na eq. (3.8 a) tem-se a equação de correlação para o sistema global, escrita como:

$$\{M\} = [R_L^{hor}] \cdot [k_L^{hor}] \cdot [R_L^{hor}]^T \cdot \{D\} + [R_L^{inc}] \cdot [k_L^{inc}] \cdot [R_L^{inc}]^T \cdot \{D\} \quad (eq. 3.8 b)$$

reorganizando a eq. (3.8 b), tem-se:

$$\{M\} = [K] \cdot \{D\} \quad (eq. 3.8 c)$$

com:  $[K] = [K^{hor}] + [K^{inc}]$ ;

$[K^{hor}] = [R_L^{hor}] \cdot [k_L^{hor}] \cdot [R_L^{hor}]^T$ ; e

$[K^{inc}] = [R_L^{inc}] \cdot [k_L^{inc}] \cdot [R_L^{inc}]^T$ .

sendo:  $[K]$  – a matriz de rigidez do sistema de contraventamento em Z, no SGC;

$[K^{hor}]$  – a matriz de rigidez do lintel horizontal, no SGC; e

$[K^{inc}]$  – a matriz de rigidez do lintel inclinado, no SGC.

E por fim, utilizando o MathCAD Prime 5.0 procede-se o produto das equações (3.8 e) e (3.8 f), além de realizar a soma apontada na eq. (3.8 d), exprimindo-se a *Matriz de Rigidez*  $[K]$  do *Sistema de Contraventamento em Z*, como:

$$[K] = \begin{bmatrix} r & r^{*inc} & b_i^* & -r & -r^{*inc} & -b_f^* \\ r^{*inc} & t & -b_i & -r^{*inc} & -t & -b_f \\ b_i^* & -b_i & k_i & -b_i^* & b_i & a \\ -r & -r^{*inc} & -b_i^* & r & r^{*inc} & b_f^* \\ -r^{*inc} & -t & b_i & r^{*inc} & t & b_f \\ -b_f^* & -b_f & a & b_f^* & b_f & k_f \end{bmatrix}$$

e:  $r = r^L + r^{inc}$ ;  $t = t^L + t^{inc}$ ;  $b_i = t^L \cdot d_i + b_i^L - r^{inc} \cdot (v_i - h_i) + t^{inc} \cdot d_i^* + b_i^{inc}$ ;

$b_f = t^L \cdot d_f + b_f^L + r^{inc} \cdot (v_f - h_f) + t^{inc} \cdot d_f^* + b_f^{inc}$ ;

$b_i^* = r^{*inc} \cdot (v_i - h_i) - r^{*inc} \cdot d_i^* + b_i^{*inc} - r^L \cdot v_i$ ;

$b_f^* = r^{*inc} \cdot (v_f - h_f) + r^{*inc} \cdot d_f^* - b_f^{*inc} + r^L \cdot v_f$ ;

$k_i = r^L \cdot (v_i)^2 + (\bar{b}_i^L + b_i^L) \cdot d_i + k_i^L + (\bar{b}_i^{*inc} + b_i^{*inc}) \cdot (v_i - h_i) + (\bar{b}_i^{inc} + b_i^{inc}) \cdot d_i^* + k_i^{inc}$ ;

$k_f = r^L \cdot (v_f)^2 + (\bar{b}_f^L + b_f^L) \cdot d_f + k_f^L + (\bar{b}_f^{*inc} - b_f^{*inc}) \cdot (v_f - h_f) + (\bar{b}_f^{inc} + b_f^{inc}) \cdot d_f^* + k_f^{inc}$ ;

$$a = r^L \cdot v_i \cdot v_f + \bar{b}_i^L \cdot d_f + b_f^L \cdot d_i + a^L - \bar{b}_i^{*inc} \cdot (v_f - h_f) + \bar{b}_i^{inc} \cdot d_f^* + b_f^{*inc} \cdot (v_i - h_i) + b_f^{inc} \cdot d_i^* + a^{inc}$$

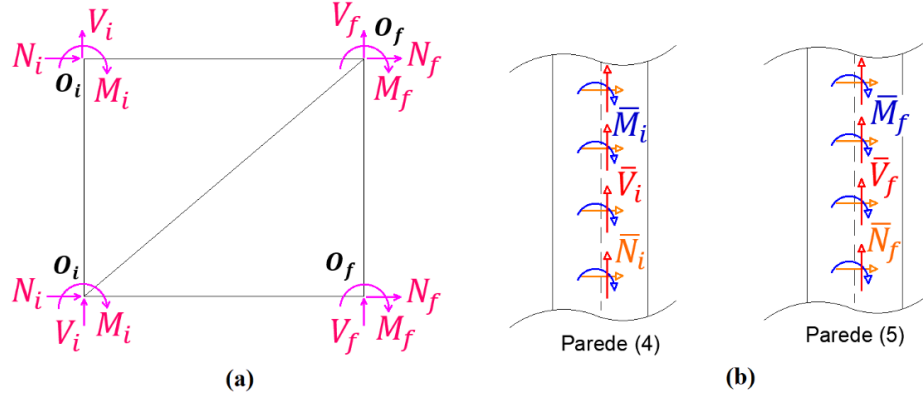
#### d) Reações elásticas nos painéis-parede

Mediante a equação (3.8 c), tem-se as reações elásticas nos pontos de convergência expressas por:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_f \\ V_f \\ M_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r & r^{*inc} & b_i^* & -r & -r^{*inc} & -b_f^* \\ r^{*inc} & t & -b_i & -r^{*inc} & -t & -b_f \\ b_i^* & -b_i & k_i & -b_i^* & b_i & a \\ -r & -r^{*inc} & -b_i^* & r & r^{*inc} & b_f^* \\ -r^{*inc} & -t & b_i & r^{*inc} & t & b_f \\ -b_f^* & -b_f & a & b_f^* & b_f & k_f \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_f \\ v_f \\ \theta_f \end{Bmatrix} \quad (eq. 3.9)$$

A seguir faz-se necessária a uniformização das reações elásticas, nos pontos  $O_i$  e  $O_f$ , para o meio contínuo equivalente, conforme é ilustrado na Figura 3.19.

**Figura 3.19 – Reações elásticas: (a) nos pontos de convergência  $O_i$ ;  $O_f$  e (b) Meio Contínuo**



Fonte: (Melo et al., 2021)

as reações elásticas uniformizadas no *Meio Contínuo* são expressas por:

$$\bar{N}_i = \frac{N_i}{h} \equiv \frac{r \cdot u_i + r^{*inc} \cdot v_i + b_i^* \cdot \theta_i - r \cdot u_f - r^{*inc} \cdot v_f - b_f^* \cdot \theta_f}{h} \quad (eq. 3.10 a)$$

$$\bar{V}_i = \frac{V_i}{h} \equiv \frac{r^{*inc} \cdot u_i + t \cdot v_i - b_i \cdot \theta_i - r^{*inc} \cdot u_f - t \cdot v_f - b_f \cdot \theta_f}{h} \quad (eq. 3.10 b)$$

$$\bar{M}_i = \frac{M_i}{h} \equiv \frac{b_i^* \cdot u_i - b_i \cdot v_i + k_i \cdot \theta_i - b_i^* \cdot u_f + b_i \cdot v_f + a \cdot \theta_f}{h} \quad (eq. 3.10 c)$$

$$\bar{N}_f = \frac{N_f}{h} \equiv \frac{-r \cdot u_i - r^{*inc} \cdot v_i - b_i^* \cdot \theta_i + r \cdot u_f + r^{*inc} \cdot v_f + b_f^* \cdot \theta_f}{h} \quad (eq. 3.10 d)$$

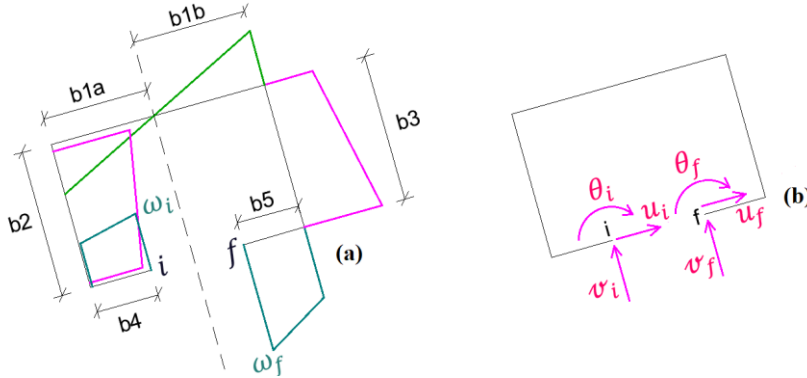
$$\bar{V}_f = \frac{V_f}{h} \equiv \frac{-r^{*inc} \cdot u_i - t \cdot v_i + b_i \cdot \theta_i + r^{*inc} \cdot u_f + t \cdot v_f + b_f \cdot \theta_f}{h} \quad (eq. 3.10 e)$$

$$\bar{M}_f = \frac{M_f}{h} \equiv \frac{-b_f^* \cdot u_i - b_f \cdot v_i + a \cdot \theta_i + b_f^* \cdot u_f + b_f \cdot v_f + k_f \cdot \theta_f}{h} \quad (eq. 3.10 f)$$

sendo:  $\bar{N}_i$ ,  $\bar{V}_i$ ,  $\bar{M}_i$ ,  $\bar{N}_f$ ,  $\bar{V}_f$  e  $\bar{M}_f$  – as reações elásticas do sistema de contraventamento Z para o meio contínuo equivalente.

Através da Figura 3.20 exprime-se as deformações  $u_i$ ;  $u_f$ ;  $v_i$ ;  $v_f$ ;  $\theta_i$  e  $\theta_f$ , em termos da *Teoria da Flexo – Torção*, explicitando-se cálculo das ordenadas setoriais  $\omega_i$  e  $\omega_f$ .

**Figura 3.20 – Núcleo C e a indicação: (a) cálculo das ordenadas setoriais e (b) graus de liberdade**



Fonte: (Melo et al., 2021)

#### e) Graus de liberdade via TFT

Da *Teoria da Flexo – Torção* quantificam-se os graus de liberdade  $v_i$  e  $v_f$ , como:

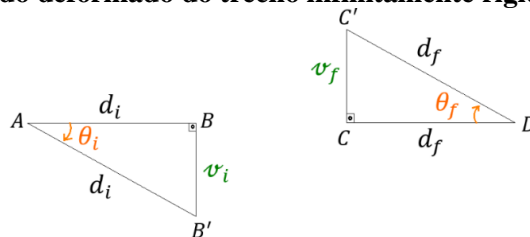
$$v_i = \omega_i \cdot \phi' \quad (eq. 3.11 a)$$

$$v_f = \omega_f \cdot \phi' \quad (eq. 3.11 b)$$

sendo:  $\omega_i$ ;  $\omega_f$  as ordenadas setoriais nos pontos  $i$  e  $f$ , respectivamente. E  $\phi'$  é o empenamento da seção de paredes finas.

E valendo-se da Teoria das Pequenas Deformações (TPD) pode-se exprimir as rotações  $\theta_i$  e  $\theta_f$  unicamente em termos dos deslocamentos  $v_i$  e  $v_f$ , conforme a relação de triângulos exposta graficamente na Figura 3.21.

**Figura 3.21 – Estado deformado do trecho infinitamente rígido: (a) AB e (b) CD**



Fonte: O Autor (2025)

$$\begin{aligned} \text{escrevendo-se:} \quad \quad \quad \text{tg } \theta_i \approx \theta_i = \frac{v_i}{d_i} \quad \quad \quad \therefore \quad \quad \quad \theta_i = \frac{\omega_i \cdot \phi'}{d_i} \quad \quad \quad (\text{eq. 3.11 c}) \\ \text{tg } \theta_f \approx \theta_f = \frac{v_f}{d_f} \quad \quad \quad \therefore \quad \quad \quad \theta_f = \frac{\omega_f \cdot \phi'}{d_f} \quad \quad \quad (\text{eq. 3.11 d}) \end{aligned}$$

com:  $2 \cdot d_i = b_4$  e  $2 \cdot d_f = b_5$ .

E ainda, recorrendo-se a Vlassov (1962, p. 278) exprime-se os graus de liberdade  $u_i$  e  $u_f$ , com a devida consideração do *Diagrama de Ordenadas Setoriais Principais*  $\omega_{pc}$  apresentado na Figura 3.20 (a), como:

$$u_i = -\omega_i \cdot \phi' \quad (\text{eq. 3.11 e})$$

$$u_f = -\omega_f \cdot \phi' \quad (\text{eq. 3.11 f})$$

já, a explicação de tal fato reside na consideração de distorção  $\gamma$  entre os deslocamentos  $v$  (na direção longitudinal do pilar) e  $u$  (na direção axial do lintel) como nula. Assim:

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma \approx 0 \quad \quad \quad \therefore \quad \quad \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial s}$$

onde:  $s$  é o *Eixo Esqueleto do Pilar de Paredes Finas*. E por último, conhecendo-se o deslocamento  $v$ , das eq.'s (3.11 a) e (3.11 b), conclui-se:

$$u = -\omega \cdot \phi'$$

## f) Correlação das reações elásticas via TFT

Substituindo na equação (3.10 a) os coeficientes de rigidez apresentados na eq. (3.8 c), observa-se o produto dos graus de liberdades:  $v_i \cdot \theta_i$  e  $v_f \cdot \theta_f$ . Escrevendo-se:

$$\begin{aligned} \bar{N}_i = & \frac{r \cdot u_i + r^{*inc} \cdot v_i + [(r^{*inc} - r^L) \cdot v_i - r^{*inc} \cdot (d_i^* + h_i) + b_i^{*inc}] \cdot \theta_i - r \cdot u_f}{h} + \\ & + \frac{-r^{*inc} \cdot v_f - [(r^{*inc} + r^L) \cdot v_f + r^{*inc} \cdot (d_f^* + h_f) + b_f^{*inc}] \cdot \theta_f}{h} \end{aligned}$$

e ao analisar o produto  $v_i \cdot \theta_i$  mediante imposição das equações (3.11 a) e (3.11 c), conclui-se que:  $v_i \cdot \theta_i = \theta_i^2 \cdot d_i$ . E pela TPD tem-se a rotação  $\theta_i$  como pequena, e em conseguinte seu quadrado é considerável nulo, assim adota-se:  $v_i \cdot \theta_i \approx 0$ . O mesmo se verifica no produto:  $v_f \cdot \theta_f \approx 0$ . Reescrevendo-se a reação elástica  $\bar{N}_i$ , como:

$$\bar{N}_i = \frac{r \cdot u_i + r^{*inc} \cdot v_i + b_i^{**} \cdot \theta_i - r \cdot u_f - r^{*inc} \cdot v_f - b_f^{**} \cdot \theta_f}{h} \quad (\text{eq. 3.12 a})$$

com:  $b_i^{**} = -r^{*inc} \cdot (d_i^* + h_i) + b_i^{*inc}$  ;  $b_f^{**} = r^{*inc} \cdot (d_f^* + h_f) + b_f^{*inc}$ .

Procedendo-se de forma análoga, reescrevem-se as demais reações elásticas no *Meio Contínuo*, como:

$$\bar{V}_i = \frac{r^{*inc}.u_i + t.v_i - b_i^{***}.\theta_i - r^{*inc}.u_f - t.v_f - b_f^{***}.\theta_f}{h} \quad (eq. 3.12 \ b)$$

$$\bar{M}_i = \frac{b_i^{**}.u_i - b_i^{***}.v_i + k_i^*.\theta_i - b_i^{**}.u_f + b_i^{***}.v_f + a^*.\theta_f}{h} \quad (eq. 3.12 \ c)$$

$$\bar{N}_f = \frac{-r.u_i - r^{*inc}.v_i - b_i^{**}.\theta_i + r.u_f + r^{*inc}.v_f + b_f^{**}.\theta_f}{h} \quad (eq. 3.12 \ d)$$

$$\bar{V}_f = \frac{-r^{*inc}.u_i - t.v_i + b_i^{***}.\theta_i + r^{*inc}.u_f + t.v_f + b_f^{***}.\theta_f}{h} \quad (eq. 3.12 \ e)$$

$$\bar{M}_f = \frac{-b_f^{**}.u_i - b_f^{***}.v_i + a^*.\theta_i + b_f^{**}.u_i + b_f^{***}.v_f + k_f^*.\theta_f}{h} \quad (eq. 3.12 \ f)$$

sendo:  $b_i^{***} = t^L.d_i + b_i^L + r^{*inc}.h_i + t^{*inc}.d_i^* + b_i^{*inc}$ ;  
 $b_f^{***} = t^L.d_f + b_f^L + r^{*inc}.h_f + t^{*inc}.d_f^* + b_f^{*inc}$ ;  
 $k_i^* = (t^L.d_i + 2.b_i^L).d_i + k_i^L + 2.(r^{*inc}.d_i^* - b_i^{*inc}).h_i + t^{*inc}.(d_i^*)^2 + 2.b_i^{*inc}.d_i^* + k_i^{*inc}$ ;  
 $k_f^* = (t^L.d_f + 2.b_f^L).d_f + k_f^L + 2.(r^{*inc}.d_f^* - b_f^{*inc}).h_f + t^{*inc}.(d_f^*)^2 + 2.b_f^{*inc}.d_f^* + k_f^{*inc}$ ;  
 $a^* = (t^L.d_i + b_i^L).d_f + b_f^L.d_i + a^L + r^{*inc}.(h_i.d_f^* - h_f.d_i^*) + b_i^{*inc}.h_f - b_f^{*inc}.h_i + t^{*inc}.d_i^*.d_f^* + b_i^{*inc}.d_f^* + b_f^{*inc}.d_i^* + a^{*inc}$ .

### 3.3 CONTRAVENTAMENTO EM X

Na Figura 3.22 é apresentado o Sistema de Contraventamento em X, ilustrando: os trechos infinitamente rígidos à flexão, o sistema local de coordenadas (SLC), as cotas e as reações elásticas uniformizadas no meio contínuo equivalente.

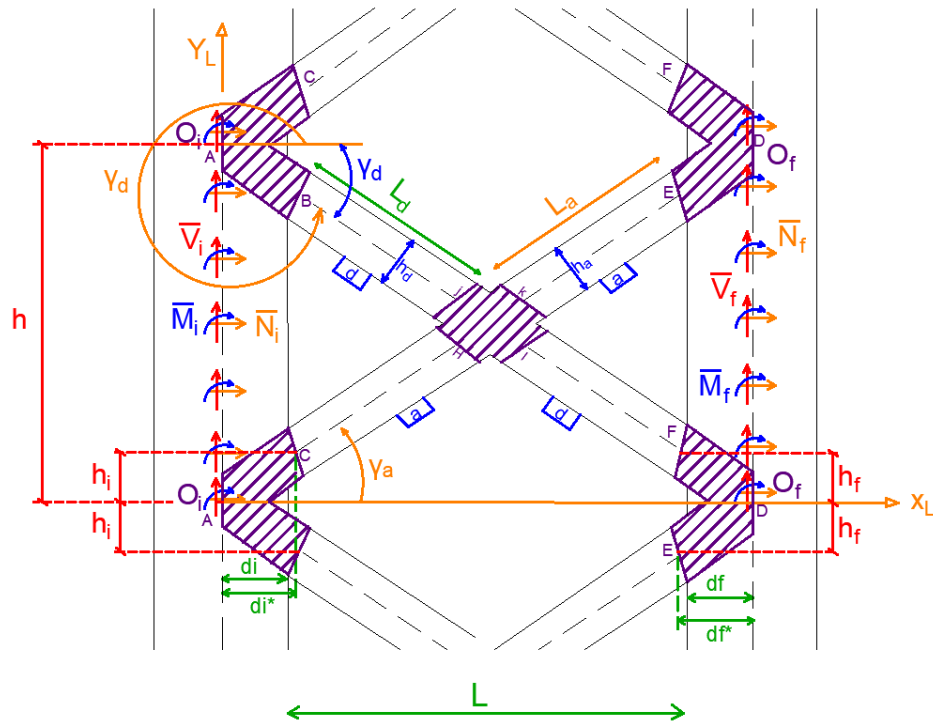
Enquanto na Figura 3.23 são apresentados: as reações elásticas dos lintéis em X (dupla diagonal opostas) e os correspondentes graus de liberdade sob a convenção das equações de Maney.

Já, os comprimentos dos lintéis são expressos por:

$$\ell_a = \frac{\ell}{2.\cos(\gamma_a)} - \frac{h_d}{2} - \frac{h_a}{tg(\gamma_a)} \quad (eq. 3.13 \ a)$$

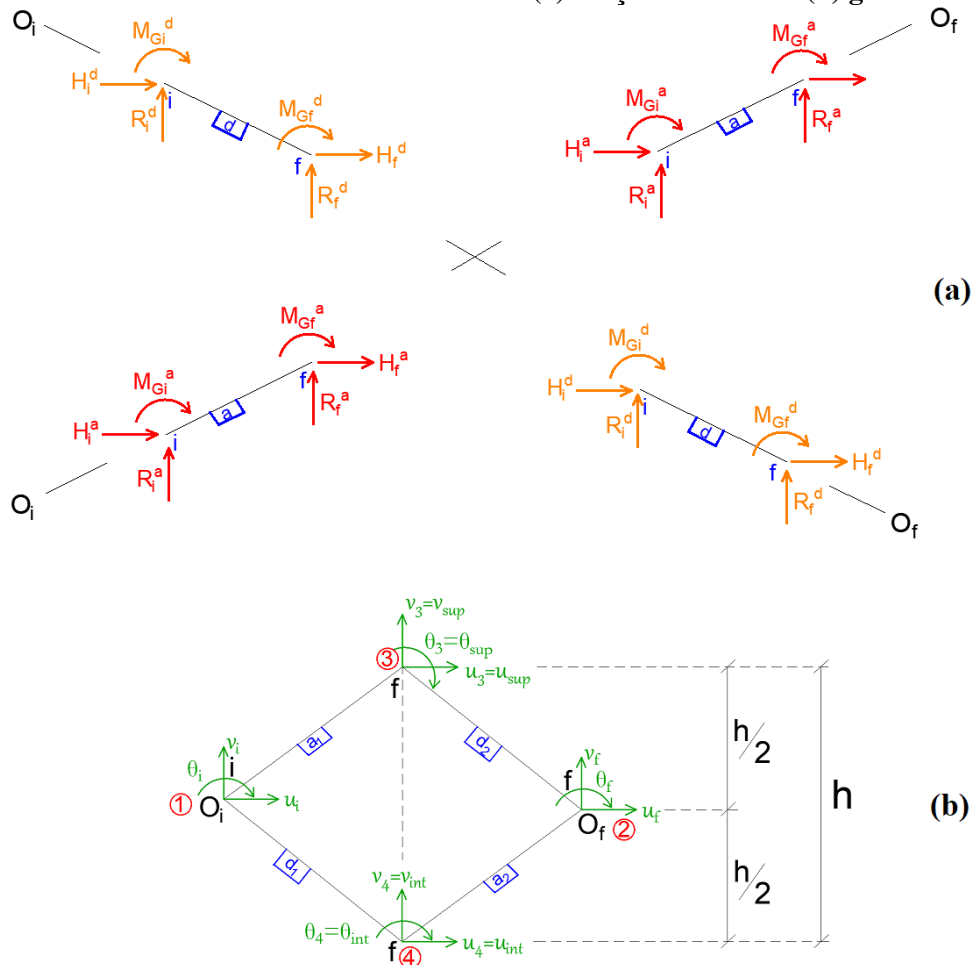
$$\ell_d = \frac{\ell}{2.\cos(\gamma_d)} - \frac{h_a}{2} + \frac{h_d}{tg(\gamma_d)} \quad (eq. 3.13 \ b)$$

Figura 3.22. Sistema de contraventamento em X e os lintéis ascendentes e descendentes



Fonte: (Melo et al., 2021)

Figura 3.23. Sistema de contraventamento em X: (a) reações elásticas e (b) graus de liberdade

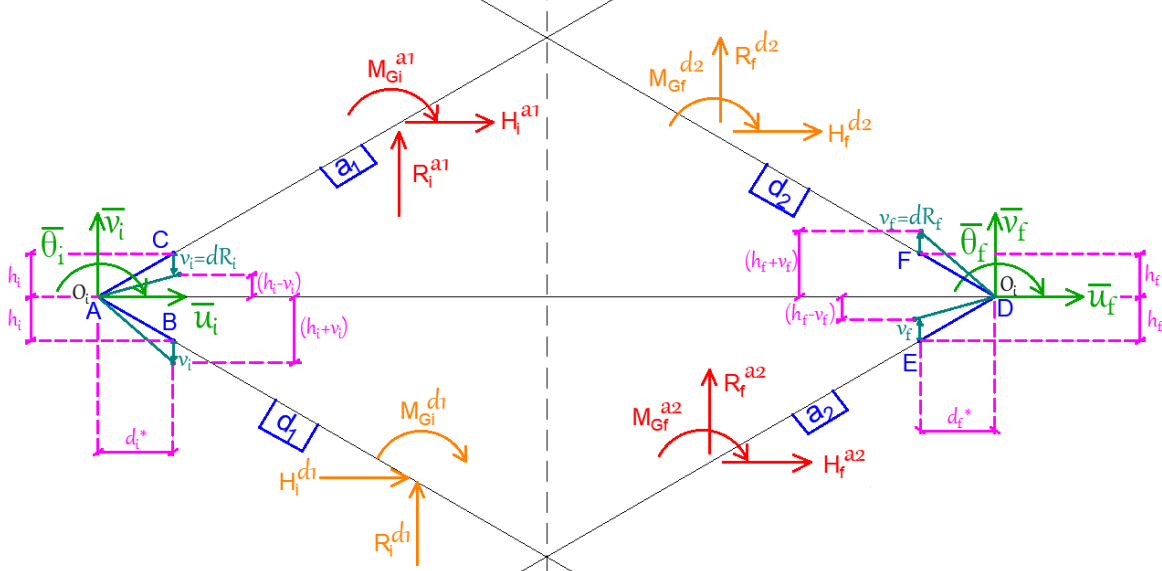


Fonte: (Melo et al., 2021)

## a) Equações de correlação

Na Figura 3.24 são apresentadas as deslocabilidades de corpo rígido para os trechos infinitamente rígidos à flexão, além de ressaltar as reações elásticas dos lintéis no SGC.

**Figura 3.24. Reações elásticas e o estado deformado dos lintéis em X**



Fonte: (Melo et al., 2021)

o equilíbrio das reações elásticas (Figura 3.24) é expressa matricialmente, como:

$$\{M\} = [R_L^a] \cdot \{M_L^a\} + [R_L^d] \cdot \{M_L^d\} \quad (eq. 3.14)$$

$$\text{com: } \{M\}^T = \{N_i \quad V_i \quad M_i \quad N_f \quad V_f \quad M_f\}; \quad \{M_L^a\} = \begin{Bmatrix} \{M_{L_i}^{a1}\} \\ \{M_{L_f}^{a2}\} \end{Bmatrix}; \quad \{M_L^d\} = \begin{Bmatrix} \{M_{L_i}^{d1}\} \\ \{M_{L_f}^{d2}\} \end{Bmatrix};$$

$$\{M_{L_i}^{a1}\}^T = \{H_i^{a1} \quad R_i^{a1} \quad M_{G_i}^{a1}\}; \quad \{M_{L_i}^{d1}\}^T = \{H_i^{d1} \quad R_i^{d1} \quad M_{G_i}^{d1}\};$$

$$\{M_{L_f}^{a2}\}^T = \{H_f^{a2} \quad R_f^{a2} \quad M_{G_f}^{a2}\}; \quad \{M_{L_f}^{d2}\}^T = \{H_f^{d2} \quad R_f^{d2} \quad M_{G_f}^{d2}\};$$

$$[R_L^a] = \begin{bmatrix} [R_{L_i}^a]_{3 \times 3} & [0] \\ [0] & [R_{L_f}^a]_{3 \times 3} \end{bmatrix}; \quad [R_L^d] = \begin{bmatrix} [R_{L_i}^d]_{3 \times 3} & [0] \\ [0] & [R_{L_f}^d]_{3 \times 3} \end{bmatrix};$$

$$h_i = d_i \cdot \tan(\gamma_a) - \frac{h_a}{2} \cdot \cos(\gamma_a); \quad h_f = -d_f \cdot \tan(\gamma_d) - \frac{h_d}{2} \cdot \cos(\gamma_d);$$

$$[R_{L_i}^a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (h_i - v_i) & -d_i^* & 1 \end{bmatrix}; \quad [R_{L_f}^a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(h_f - v_f) & d_f^* & 1 \end{bmatrix};$$

$$[R_{L_i}^d] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(h_i - v_i) & -d_i^* & 1 \end{bmatrix}; \quad [R_{L_f}^d] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (h_f + v_f) & d_f^* & 1 \end{bmatrix}.$$

## b) Equações de equilíbrio dos lintéis

Ao impor as equações de Maney, para barras inclinadas, nos lintéis apresentados nas Figuras 3.22 e 3.23, é possível estabelecer as seguintes correlações:

$$\{M_L^{a_1}\} = [k_L^a] \cdot \{d_L^{a_1}\} \quad (eq. 3.15 a)$$

$$\{M_L^{d_1}\} = [k_L^d] \cdot \{d_L^{d_1}\} \quad (eq. 3.15 b)$$

$$\{M_L^{a_2}\} = [k_L^a] \cdot \{d_L^{a_2}\} \quad (eq. 3.15 c)$$

$$\{M_L^{d_2}\} = [k_L^d] \cdot \{d_L^{d_2}\} \quad (eq. 3.15 d)$$

$$\text{com: } \{d_L^{a_1}\}^T \equiv \{d_L^{d_1}\}^T = \{u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_f^x \quad v_f^x \quad \theta_f^x\};$$

$$\{d_L^{a_2}\}^T \equiv \{d_L^{d_2}\}^T = \{u_i^x \quad v_i^x \quad \theta_i^x \quad u_f \quad v_f \quad \theta_f\};$$

$$\{M_L^{a_1}\}^T = \{H_i^{a_1} \quad R_i^{a_1} \quad M_{G_i}^{a_1} \quad H_f^{a_1} \quad R_f^{a_1} \quad M_{G_f}^{a_1}\};$$

$$\{M_L^{a_2}\}^T = \{H_i^{a_2} \quad R_i^{a_2} \quad M_{G_i}^{a_2} \quad H_f^{a_2} \quad R_f^{a_2} \quad M_{G_f}^{a_2}\};$$

$$\{M_L^{d_1}\}^T = \{H_i^{d_1} \quad R_i^{d_1} \quad M_{G_i}^{d_1} \quad H_f^{d_1} \quad R_f^{d_1} \quad M_{G_f}^{d_1}\};$$

$$\{M_L^{d_2}\}^T = \{H_i^{d_2} \quad R_i^{d_2} \quad M_{G_i}^{d_2} \quad H_f^{d_2} \quad R_f^{d_2} \quad M_{G_f}^{d_2}\};$$

$$[k_L^a] = \begin{bmatrix} r^a & r^{*a} & b_i^{*a} & -r^a & -r^{*a} & b_f^{*a} \\ r^{*a} & t^a & -b_i^a & -r^{*a} & -t^a & -b_f^a \\ b_i^{*a} & -b_i^a & k_i^a & -b_i^{*a} & b_i^a & a^a \\ -r^a & -r^{*a} & -b_i^{*a} & r^a & r^{*a} & -b_f^{*a} \\ -r^{*a} & -t^a & b_i^a & r^{*a} & t^a & b_f^a \\ b_f^{*a} & -b_f^a & a^a & -b_i^{*a} & b_f^a & k_f^a \end{bmatrix};$$

$$[k_L^d] = \begin{bmatrix} r^d & r^{*d} & b_i^{*d} & -r^d & -r^{*d} & b_f^{*d} \\ r^{*d} & t^d & -b_i^d & -r^{*d} & -t^d & -b_f^d \\ b_i^{*d} & -b_i^d & k_i^d & -b_i^{*d} & b_i^d & a^d \\ -r^d & -r^{*d} & -b_i^{*d} & r^d & r^{*d} & -b_f^{*d} \\ -r^{*d} & -t^d & b_i^d & r^{*d} & t^d & b_f^d \\ b_f^{*d} & -b_f^d & a^d & -b_i^{*d} & b_f^d & k_f^d \end{bmatrix}.$$

onde os coeficientes de Maney são expressos na eq. (3.10 b), fazendo as seguintes substituições para compor a matriz  $[k_L^a]$ : trocar  $L_L^{inc}$  por  $\ell_a$  e o ângulo  $\gamma_c$  por  $\gamma_a$ . E na composição da matriz  $[k_L^d]$  utilizam-se  $\ell_d$  e  $\gamma_d$ , de forma análoga. E por último, adotam-se com dimensões da seção transversal:  $e_L^a$  e  $h_L^a \equiv h_a$  para os lintéis ascendentes, além de:  $e_L^d$  e  $h_L^d \equiv h_a$  no caso dos lintéis descendentes.

E por fim, para manter o equilíbrio estrutural, exprimem-se os graus de liberdade nos extremos  $O_i$  e  $O_f$  como:

$$u_i = dH_i^{a_1} \equiv dH_i^{d_1} \quad (eq. 3.16 a)$$

$$v_i = dR_i^{a_1} \equiv dR_i^{d_1} \quad (eq. 3.16 b)$$

$$\theta_i = \theta_{G_i}^{a_1} \equiv \theta_{G_i}^{d_1} \quad (eq. 3.16 c)$$

$$u_f = dH_f^{a_2} \equiv dH_f^{d_2} \quad (eq. 3.16 d)$$

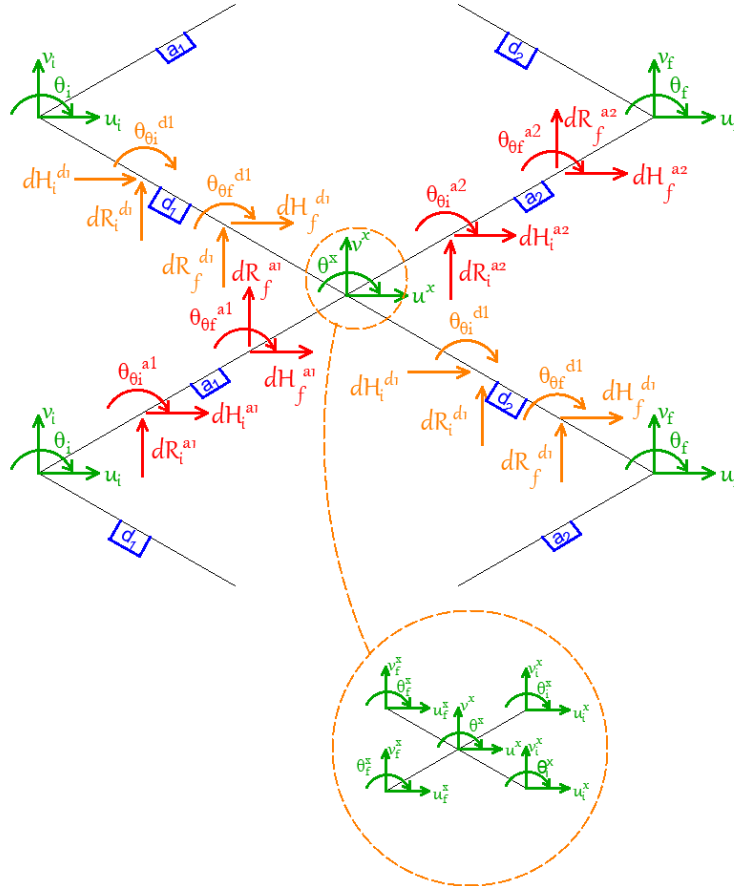
$$v_f = dR_f^{a_2} \equiv dR_f^{d_2} \quad (eq. 3.16 e)$$

$$\theta_f = \theta_{G_f}^{a_2} \equiv \theta_{G_f}^{d_2} \quad (eq. 3.16 f)$$

### c) Translade das reações elásticas

Procede-se o translade das reações elásticas dos extremos dos lintéis para os pontos de convergência ( $O_i$  e  $O_f$ ), valendo-se do elemento finito apresentado na Figura 3.25.

**Figura 3.25. Elemento finito do sistema de contraventamento em X com os graus de liberdade, cotas e incidências indicadas**



Fonte: O Autor (2025)

#### c.1) Primeira Transformação

Ocorre de forma análoga ao realizado para o contraventamento Z e consiste no traslado dos graus de liberdade lintéis para o sistema referenciado nos pontos de convergência. As correlações são expressas por:

$$\{d_L^{a_1}\} = \begin{bmatrix} [I]_3 & [0] \\ [0] & [0]_3 \end{bmatrix} \cdot \{d\} \quad (eq. 3.17 a)$$

$$\{d_L^{a_2}\} = \begin{bmatrix} [0]_3 & [0] \\ [0] & [I]_3 \end{bmatrix} \cdot \{d\} \quad (eq. 3.17 b)$$

$$\{d_L^{d_1}\} = \begin{bmatrix} [I]_3 & [0] \\ [0] & [0]_3 \end{bmatrix} \cdot \{d\} \quad (eq. 3.17 c)$$

$$\{d_L^{d_2}\} = \begin{bmatrix} [0]_3 & [0] \\ [0] & [I]_3 \end{bmatrix} \cdot \{d\} \quad (eq. 3.17 d)$$

### c.2) Segunda Transformação

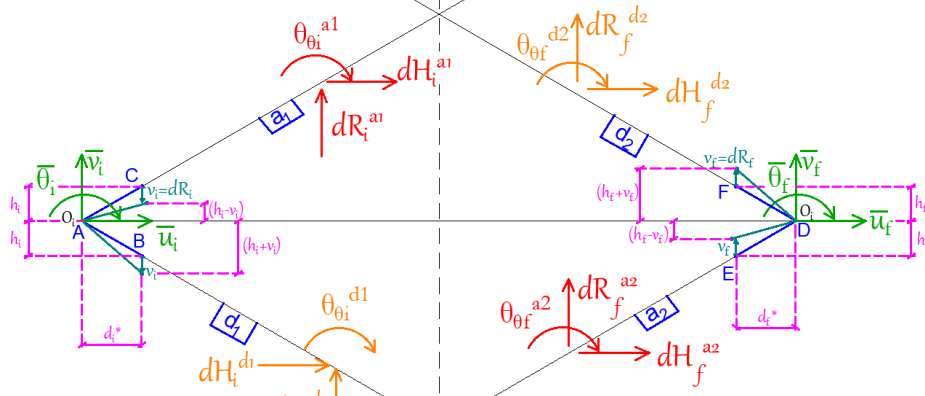
Nesta transformação transladam-se os graus de liberdade nos extremos dos lintéis para os pontos de convergência, no SGC e este procedimento é elencado nas duas etapas a seguir:

- **1ª Etapa:** Elencar o SGC dos graus de liberdade nos pontos de convergência que coincidem com os graus de liberdade dos lintéis (Figura 3.25). Ademais, na Figura 3.16 ilustram-se os referidos graus de liberdade, ficando o vetor  $\{D\}$  expresso por:

$$\{D\}^T = \{\bar{u}_i \quad \bar{v}_i \quad \bar{\theta}_i \quad \bar{u}_f \quad \bar{v}_f \quad \bar{\theta}_f\} \quad (eq. 3.17 e)$$

- **2ª Etapa:** Estabelecer a transferência dos graus de liberdade  $\{d_L\}$  dos lintéis para os graus de liberdade para o sistema global e nos pontos de convergência, o vetor  $\{D\}$ . Na Figura 3.26 apresenta-se a configuração com os deslocamentos de corpo rígido aplicáveis, no caso:  $v_i$  e  $v_f$ .

**Figura 3.26. Graus de liberdade e o estado deformado dos lintéis em X**



Fonte: (Melo et al., 2021)

ao promover o equilíbrio nos trechos AC; AB; DE e DF deformados, escreve-se:

$$\bar{u}_i = dH_i^{a_1} + dH_i^{d_1} \quad (eq. 3.17 f)$$

$$\bar{v}_i = dR_i^{a_1} + dR_i^{d_1} \quad (eq. 3.17 g)$$

$$\bar{\theta}_i = \theta_{G_i}^{a_1} + dH_i^{a_1} \cdot (h_i - v_i) - dR_i^{a_1} \cdot d_i^* + \theta_{G_i}^{d_1} - dH_i^{d_1} \cdot (h_i + v_i) - dR_i^{d_1} \cdot d_i^* \quad (eq. 3.17 h)$$

$$\bar{u}_f = dH_f^{a_2} + dH_f^{d_2} \quad (eq. 3.17 i)$$

$$\bar{v}_f = dR_f^{a_2} + dR_f^{d_2} \quad (eq. 3.17 j)$$

$$\bar{\theta}_f = \theta_{G_f}^{a_2} - dH_f^{a_2} \cdot (h_f - v_f) + dR_f^{a_2} \cdot d_f^* + \theta_{G_f}^{d_2} + dH_f^{d_2} \cdot (h_f + v_f) + dR_f^{d_2} \cdot d_f^* \quad (eq. 3.17 k)$$

organizando matricialmente as equações (3.17 f) a (3.17 k), escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} \{D_i\} \\ \{D_f\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R_{L_i}^a]_{3 \times 3} & [0] \\ [0] & [R_{L_f}^a]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d_{L_i}^{a_1}\} \\ \{d_{L_i}^{a_2}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [R_{L_i}^d]_{3 \times 3} & [0] \\ [0] & [R_{L_f}^d]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d_{L_i}^{d_1}\} \\ \{d_{L_i}^{d_2}\} \end{Bmatrix} \quad (eq. 3.17 l)$$

$$\text{com: } \{D_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \end{Bmatrix}; \quad \{D_f\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_f \\ \bar{v}_f \\ \bar{\theta}_f \end{Bmatrix}; \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} \{D_i\} \\ \{D_f\} \end{Bmatrix}; \quad \{d_{L_i}^{a_1}\} = \begin{Bmatrix} dH_i^{a_1} \\ dR_i^{a_1} \\ \theta_{G_i}^{a_1} \end{Bmatrix}; \quad \{d_f^{a_2}\} = \begin{Bmatrix} dH_f^{a_2} \\ dR_f^{a_2} \\ \theta_{G_f}^{a_2} \end{Bmatrix};$$

$$\{d_{L_i}^{d_1}\} = \begin{Bmatrix} dH_i^{d_1} \\ dR_i^{d_1} \\ \theta_{G_i}^{d_1} \end{Bmatrix}; \quad \{d_f^{d_2}\} = \begin{Bmatrix} dH_f^{d_2} \\ dR_f^{d_2} \\ \theta_{G_f}^{d_2} \end{Bmatrix}; \quad \{d_L^a\} = \begin{Bmatrix} \{d_{L_i}^{a_1}\} \\ \{d_{L_i}^{a_2}\} \end{Bmatrix}; \quad \{d_L^d\} = \begin{Bmatrix} \{d_{L_i}^{d_1}\} \\ \{d_{L_i}^{d_2}\} \end{Bmatrix}.$$

ou ainda da equação (3.17 l) exprimem-se:

$$\{D_i\} = [R_{L_i}^a] \cdot \{d_{L_i}^{a_1}\} + [R_{L_i}^d] \cdot \{d_{L_i}^{d_1}\} \quad (eq. 3.17 m)$$

$$\{D_f\} = [R_{L_f}^a] \cdot \{d_{L_f}^{a_2}\} + [R_{L_f}^d] \cdot \{d_{L_f}^{d_2}\} \quad (eq. 3.17 n)$$

O que mediante a uniformização no *Meio Contínuo*, faz-se:

$$\{D\} = [R_L^a] \cdot \{d_L^a\} + [R_L^d] \cdot \{d_L^d\} \quad (eq. 3.17 o)$$

$$\text{com: } \{d_f^{a_2}\} \equiv \{d_f^{a_1}\} \text{ e } \{d_f^{d_2}\} \equiv \{d_f^{d_1}\}.$$

E aplicando o Princípio da Superposição de Efeitos, expressam-se:

$$\{d_L^a\} = [R_L^a]^T \cdot \{D\} \quad (eq. 3.18 a)$$

$$\{d_{L_i}^{a_1}\} = [R_{L_i}^a]^T \cdot \{D_i\} \quad (eq. 3.18 b)$$

$$\{d_{L_f}^{a_2}\} = [R_{L_f}^a]^T \cdot \{D_f\} \quad (eq. 3.18 c)$$

$$\{d_L^d\} = [R_L^d]^T \cdot \{D\} \quad (eq. 3.18 d)$$

$$\{d_{L_i}^{d_1}\} = [R_{L_i}^d]^T \cdot \{D_i\} \quad (eq. 3.18 e)$$

$$\{d_{L_f}^{d_2}\} = [R_{L_f}^d]^T \cdot \{D_f\} \quad (eq. 3.18 f)$$

e por fim, das equações (3.17 a) a (3.17 d) reescrevem-se ainda:

$$\{d_{L_i}^{a_1}\} = [I]_3 \cdot \{d_i\} \quad (eq. 3.18 a)$$

$$\{d_{L_f}^{a_2}\} = [I]_3 \cdot \{d_f\} \quad (eq. 3.18 b)$$

$$\{d_{L_i}^{d_1}\} = [I]_3 \cdot \{d_i\} \quad (eq. 3.18 c)$$

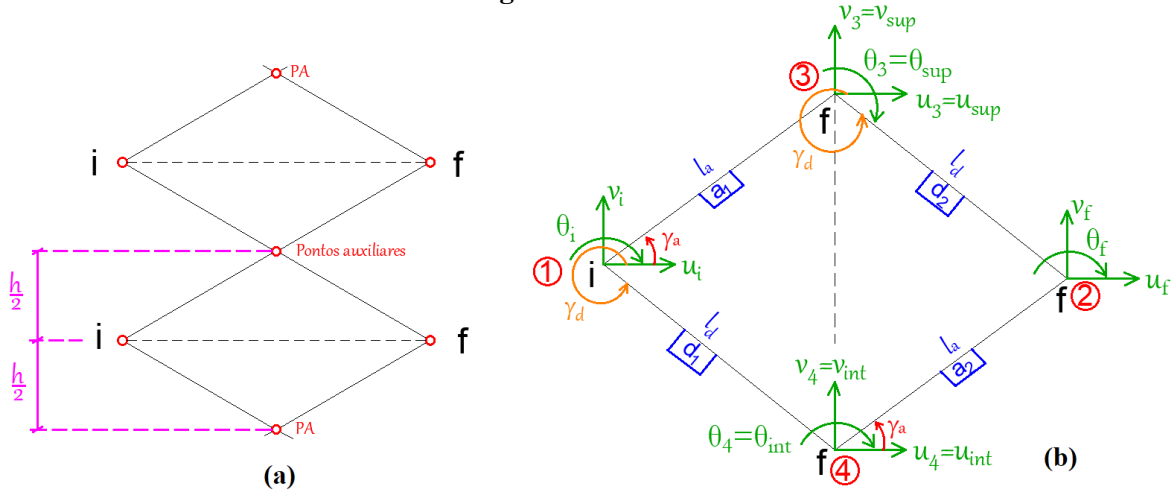
$$\{d_{L_f}^{d_2}\} = [I]_3 \cdot \{d_f\} \quad (eq. 3.18 d)$$

### c.3) Terceira Transformação

Na terceira transformação passa-se do SLC para o SGC e escreve-se a matriz de rigidez do sistema de contraventamento em X. Além de considerar as incidências dos lintéis e segue as quatro etapas elencadas, como:

- **1ª Etapa:** Marcar os pontos auxiliares, além de formular para o contraventamento X (ver Figura 3.27). Assim estabelecem-se:

**Figura 3.27. Sistema de contraventamento em X: (a) delimitação do EF e (b) EF com a indicação dos graus de liberdade.**



Fonte: O Autor (2025)

✚ Matrizes de rigidez por barra no SLC: Basta observar as equações (3.15).

✚ Matrizes de Incidência dos elementos finitos caracterizados pelos lintéis:

$$[\beta^{a_1}] = \begin{bmatrix} [I]_{3 \times 3} & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [I]_{3 \times 3} & [0] \end{bmatrix}_{6 \times 12} \quad (eq. 3.20 a)$$

$$[\beta^{a_2}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [I]_{3 \times 3} \\ [0] & [I]_{3 \times 3} & [0] & [0] \end{bmatrix}_{6 \times 12} \quad (eq. 3.20 b)$$

$$[\beta^{d_1}] = \begin{bmatrix} [I]_{3 \times 3} & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [I]_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{6 \times 12} \quad (eq. 3.20 c)$$

$$[\beta^{d_2}] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [I]_{3 \times 3} & [0] \\ [0] & [I]_{3 \times 3} & [0] & [0] \end{bmatrix}_{6 \times 12} \quad (eq. 3.20 d)$$

✚ Matrizes de rigidez para compor o sistema global: Utilizando a AME (Análise Matricial de Estruturas) escrevem-se as rigidezes, via matrizes de incidência, como:

$$[k_L^{a_1}]^* = [\beta^{a_1}]^T \cdot [k_L^a] \cdot [\beta^{a_1}] \quad (eq. 3.21 a)$$

$$[k_L^{a_2}]^* = [\beta^{a_2}]^T \cdot [k_L^a] \cdot [\beta^{a_2}] \quad (eq. 3.21 b)$$

$$[k_L^{d_1}]^* = [\beta^{d_1}]^T \cdot [k_L^d] \cdot [\beta^{d_1}] \quad (eq. 3.21 c)$$

$$[k_L^{d_2}]^* = [\beta^{d_2}]^T \cdot [k_L^d] \cdot [\beta^{d_2}] \quad (eq. 3.21 d)$$

$$\text{com: } [k_L^{a_1}]^* = \begin{bmatrix} [k_L^a]_{I,I} & [0] & [k_L^a]_{I,II} & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [k_L^a]_{II,I} & [0] & [k_L^a]_{II,II} & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}; \quad [k_L^{a_2}]^* = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [k_L^a]_{II,II} & [0] & [k_L^a]_{II,I} \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [k_L^a]_{I,II} & [0] & [k_L^a]_{I,I} \end{bmatrix};$$

$$[k_L^{d_1}]^* = \begin{bmatrix} [k_L^d]_{I,I} & [0] & [0] & [k_L^d]_{I,II} \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [k_L^d]_{II,I} & [0] & [0] & [k_L^d]_{II,II} \end{bmatrix}; \quad [k_L^{d_2}]^* = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [k_L^d]_{II,II} & [k_L^d]_{II,I} & [0] \\ [0] & [k_L^d]_{I,II} & [k_L^d]_{I,I} & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}.$$

- **2ª Etapa:** Condensar as matrizes expressas nas equações (3.21), sempre face aos elementos finitos ilustrados na Figura 3.27 (b), conforme os equilíbrios:  $\{M_L^{a_1}\} = [k_L^{a_1}]^* \cdot \{d_L^{a_1}\}$ ;  $\{M_L^{a_2}\} = [k_L^{a_2}]^* \cdot \{d_L^{a_2}\}$ ;  $\{M_L^{d_1}\} = [k_L^{d_1}]^* \cdot \{d_L^{d_1}\}$  e  $\{M_L^{d_2}\} = [k_L^{d_2}]^* \cdot \{d_L^{d_2}\}$ . Reduzindo-se a ordem (4 x 4) para (2 x 2), em notação de submatrizes, almejando impor, na terceira etapa, as matrizes de correlação da 2ª transformação.

#### ✚ Condensação dos lintéis ascendentes:

$$\{M\}_1 = [k_L^a]_{I,I} \cdot \{d\}_1 + [k_L^a]_{I,II} \cdot \{d\}_3 \quad (eq. 3.22 a)$$

$$\{M\}_3 = [k_L^a]_{II,I} \cdot \{d\}_1 + [k_L^a]_{II,II} \cdot \{d\}_3 \quad (eq. 3.22 b)$$

$$\{M\}_2 = [k_L^a]_{II,II} \cdot \{d\}_2 + [k_L^a]_{II,I} \cdot \{d\}_4 \quad (eq. 3.22 c)$$

$$\{M\}_4 = [k_L^a]_{I,II} \cdot \{d\}_2 + [k_L^a]_{I,I} \cdot \{d\}_4 \quad (eq. 3.22 d)$$

Aplicando-se a equação (3.22 b) na eq. (3.22 a), bem como procedendo-se analogamente para as eq.'s (3.22 d) e (3.22 c), reescrevem-se:

$$\{M\}_1 = [k_L^a]_{I,I} \cdot \{d\}_1 + [k_L^a]_{I,II} \cdot ([k_L^a]_{II,II}^{-1} \cdot \{M\}_3 - [k_L^a]_{II,II}^{-1} \cdot [k_L^a]_{II,I} \cdot \{d\}_1) \quad (eq. 3.22 e)$$

$$\{M\}_2 = [k_L^a]_{II,II} \cdot \{d\}_2 + [k_L^a]_{II,I} \cdot ([k_L^a]_{I,I}^{-1} \cdot \{M\}_4 - [k_L^a]_{I,I}^{-1} \cdot [k_L^a]_{I,II} \cdot \{d\}_2) \quad (eq. 3.22 f)$$

Sabe-se que os pontos 3 e 4 são os encontros em X dos lintéis, e para tal não se verifica a aplicação de cargas, logo os vetores  $\{M\}_3$  e  $\{M\}_4$  são nulos. Reescrevendo-se o sistema algébrico composto pelas eq.'s (3.22 e) e (3.22 f), como:

$$\begin{Bmatrix} \{M\}_1 \\ \{M\}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_L^a]_{I,I} - [k_L^a]_{I,II} \cdot [k_L^a]_{II,II}^{-1} \cdot [k_L^a]_{II,I} & [0] \\ [0] & [k_L^a]_{II,II} - [k_L^a]_{II,I} \cdot [k_L^a]_{I,I}^{-1} \cdot [k_L^a]_{I,II} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d\}_1 \\ \{d\}_2 \end{Bmatrix} \quad (eq. 3.23)$$

$$\text{com: } \{M\} = \begin{Bmatrix} \{M\}_1 \\ \{M\}_2 \end{Bmatrix}; \quad \{d\} = \begin{Bmatrix} \{d\}_1 \\ \{d\}_2 \end{Bmatrix}; \quad \{M\} = [k_L^a]^* \cdot \{d\}.$$

✚ Condensação dos lintéis descendentes: Procedendo-se de forma análoga ao realizado nos lintéis ascendentes, exprime-se o sistema de equilíbrio condensado, como:

$$\begin{Bmatrix} \{M\}_1 \\ \{M\}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_L^d]_{I,I} - [k_L^d]_{I,II} \cdot [k_L^d]_{II,II}^{-1} \cdot [k_L^d]_{II,I} & [0] \\ [0] & [k_L^d]_{II,II} - [k_L^d]_{II,I} \cdot [k_L^d]_{I,I}^{-1} \cdot [k_L^d]_{I,II} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d\}_1 \\ \{d\}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{eq. 3.24})$$

$$\text{com: } \{M\} = [k_L^d]^* \cdot \{d\}.$$

➤ **3ª Etapa:** Escrever as matrizes de rigidezes referenciadas nos pontos de convergência, mediante a aplicação das matrizes de correlação  $[R_L^a]$  e  $[R_L^d]$  elencadas nas equações (3.23) e (3.24), respectivamente. Concluindo-se:

$$[k_L^a]^{**} = [R_L^a] \cdot [k_L^a]^* \cdot [R_L^a]^T \quad (\text{eq. 3.25})$$

$$[k_L^d]^{**} = [R_L^d] \cdot [k_L^d]^* \cdot [R_L^d]^T \quad (\text{eq. 3.26})$$

$$\begin{aligned} \text{com: } [k_L^a]_{I,I}^{**} &= [R_L^a]_{I,I} \cdot ([k_L^a]_{I,I} - [k_L^a]_{I,II} \cdot [k_L^a]_{II,II}^{-1} \cdot [k_L^a]_{II,I}) \cdot [R_L^a]_{I,I}; \\ [k_L^a]_{II,II}^{**} &= [R_L^a]_{II,II} \cdot ([k_L^a]_{II,II} - [k_L^a]_{II,I} \cdot [k_L^a]_{I,I}^{-1} \cdot [k_L^a]_{I,II}) \cdot [R_L^a]_{II,II}; \\ [k_L^d]_{I,I}^{**} &= [R_L^d]_{I,I} \cdot ([k_L^d]_{I,I} - [k_L^d]_{I,II} \cdot [k_L^d]_{II,II}^{-1} \cdot [k_L^d]_{II,I}) \cdot [R_L^d]_{I,I}; \\ [k_L^d]_{II,II}^{**} &= [R_L^d]_{II,II} \cdot ([k_L^d]_{II,II} - [k_L^d]_{II,I} \cdot [k_L^d]_{I,I}^{-1} \cdot [k_L^d]_{I,II}) \cdot [R_L^d]_{II,II}. \end{aligned}$$

➤ **4ª Etapa:** Por fim, unificar a rigidez mediante soma das equações (3.25) e (3.26), expressando-se:

$$\{M\} = [K] \cdot \{D\} \quad \therefore \quad \{M\} = ([k_L^a]^{**} + [k_L^d]^{**}) \cdot \{D\} \quad (\text{eq. 3.27})$$

$$\text{com: } [K] = \begin{bmatrix} [K]_{I,I} & [0]_{3 \times 3} \\ [0]_{3 \times 3} & [K]_{II,II} \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} [K]_{I,I} &\equiv [K]_I = [k_L^a]_{I,I}^{**} + [k_L^d]_{I,I}^{**} \\ [K]_{II,II} &\equiv [K]_{II} = [k_L^a]_{II,II}^{**} + [k_L^d]_{II,II}^{**} \end{aligned}$$

#### d) Reações elásticas nos painéis-parede

Ao início, procede-se a simplificação de desprezar os termos de alta ordem ( $\nu_i^2$ ;  $\nu_i \cdot u_i$ ; ...;  $\nu_i \cdot \theta_i$ ) presentes na eq. (3.28), em conformidade com a TFT. Desta forma, as matrizes de correlação  $[R_{L_i}]$  e  $[R_{L_f}]$  dos lintéis ficam reorganizadas, como:

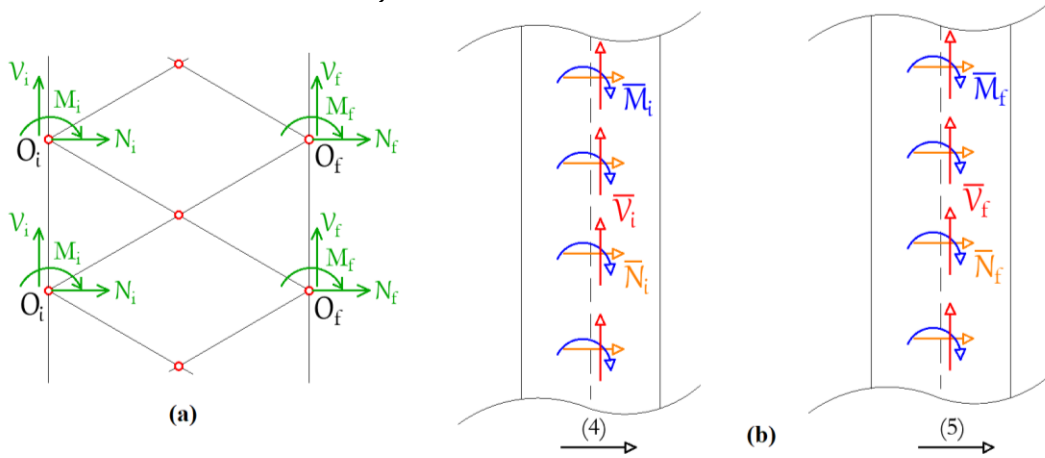
$$\begin{aligned} [R_{L_i}^a] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h_i & -d_i^* & 1 \end{bmatrix}; & [R_{L_f}^a] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -h_f & d_f^* & 1 \end{bmatrix}; \\ [R_{L_i}^d] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -h_i & -d_i^* & 1 \end{bmatrix}; & [R_{L_f}^d] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h_f & d_f^* & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

E mediante a equação (3.27) tem-se o *Sistema de Contraventamento em X*, representado via equações de Maney do EF, como:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_f \\ V_f \\ M_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ 0 & 0 & 0 & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ 0 & 0 & 0 & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_f \\ v_f \\ \theta_f \end{Bmatrix} \quad (eq. 3.28)$$

Apresentando-se na Figura 3.28 a conversão do elemento finito expresso na equação (3.28) para o sistema contínuo de reações elásticas.

**Figura 3.28. Sistema de contraventamento em X: (a) EF com as reações elásticas nodais sob os pontos de convergência  $O_i$  e  $O_f$  e (b) Reações elásticas distribuídas no meio contínuo.**



escrevendo-se as reações elásticas no *Meio Contínuo*, como:

$$\bar{N}_i = \frac{N_i}{h} \equiv \frac{K_{11} \cdot u_i + K_{12} \cdot v_i + K_{13} \cdot \theta_i}{h} \quad (eq. 3.29 a)$$

$$\bar{V}_i = \frac{V_i}{h} \equiv \frac{K_{21} \cdot u_i + K_{22} \cdot v_i + K_{23} \cdot \theta_i}{h} \quad (eq. 3.29 b)$$

$$\bar{M}_i = \frac{M_i}{h} \equiv \frac{K_{31} \cdot u_i + K_{32} \cdot v_i + K_{33} \cdot \theta_i}{h} \quad (eq. 3.29 c)$$

$$\bar{N}_f = \frac{N_f}{h} \equiv \frac{K_{44} \cdot u_f + K_{45} \cdot v_f + K_{46} \cdot \theta_f}{h} \quad (eq. 3.29 d)$$

$$\bar{V}_f = \frac{V_f}{h} \equiv \frac{K_{54} \cdot u_f + K_{55} \cdot v_f + K_{56} \cdot \theta_f}{h} \quad (eq. 3.29 e)$$

$$\bar{M}_f = \frac{M_f}{h} \equiv \frac{K_{64} \cdot u_f + K_{65} \cdot v_f + K_{66} \cdot \theta_f}{h} \quad (eq. 3.29 f)$$

ressaltando-se na Figura 3.21 os graus de liberdade:  $u_i$ ;  $u_f$ ;  $v_i$ ;  $v_f$ ;  $\theta_i$  e  $\theta_f$ , os quais em termos da *Teoria da Flexo – Torção* (TFT) são expressos por:  $u_i = -\omega_i \cdot \phi'$ ;  $v_i = \omega_i \cdot \phi'$ ;  $\theta_i = \frac{\omega_i}{d_i} \cdot \phi'$ ;  $u_f = -\omega_f \cdot \phi'$ ;  $v_f = \omega_f \cdot \phi'$ ;  $\theta_f = \frac{\omega_f}{d_f} \cdot \phi'$ .

### 3.4 NÚCLEO C

#### a) Caso simplificado

Neste caso são consideradas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- ✓ O peso-próprio dos painéis-parede é desprezado;
- ✓ A deformação axial dos painéis-parede é desprezada; e
- ✓ A rotulação dos lintéis acontece apenas no meio dos vãos.

Na Figura 3.29 é apresentado o núcleo estrutural C com as direções das paredes (2) e (3) generalizadas, bem como, apresentados os fluxos de cisalhamento nas faces dos painéis-paredes. Lembrar, desde já, que os *painéis-parede* também podem ser nomeados simplesmente de *painéis* ou de *paredes*.

Ainda da Figura 3.29 é importante definir a seguinte nomenclatura:

- $\xrightarrow{(i)}$  – As setas numeradas indicam a numeração das paredes, além do sentido dos vetores definidos no plano;
- $\boxed{k}$  – Pontos onde se determinará os deslocamentos verticais e as cargas cisalhantes distribuídas nas faces de ligação das paredes;
- $L_i$ ;  $e_i$  – O comprimento e a espessura da  $i$ -ésima parede, respectivamente; e
- $L_L$ ;  $e_L$  – O comprimento e a espessura dos lintéis.

Serão analisadas as paredes que compõe o núcleo, com largura  $L_i$  e altura diferencial  $dx$ , escrevendo-se, assim, via equações de *equilíbrio à rotação*  $[\sum M(0) = 0]$  e à *translação vertical*  $[\sum F_v = 0]$ . Ressaltando que o elemento analisado por parede estará a uma cota genérica  $x$ , conforme se apresenta na letra “a” deste item.

Em seguida é realizada a compatibilidade de deslocamentos verticais nas interseções/ligações das paredes, buscando retomar a condição inicial de funcionamento estrutural em conjunto tridimensional.



O *equilíbrio à rotação* do elemento diferencial da parede (1) é expresso por:

$$\begin{aligned}
 {}^{(+)}\sum_{\curvearrowright} M(O) = 0 \quad & \therefore \quad \mathfrak{M}_1 + d\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{V}_1 \cdot dx - (q_3 \cdot dx) \cdot \frac{L_1}{2} - (q_2 \cdot dx) \cdot \frac{L_1}{2} = 0 \\
 & \therefore \quad d\mathfrak{M}_1 = \left( -\mathfrak{V}_1 + q_2 \cdot \frac{L_1}{2} + q_3 \cdot \frac{L_1}{2} \right) \cdot dx \\
 & \therefore \quad \frac{d\mathfrak{M}_1}{dx} = -\mathfrak{V}_1 + (q_2 + q_3) \cdot \frac{L_1}{2} \quad (eq. 3.30)
 \end{aligned}$$

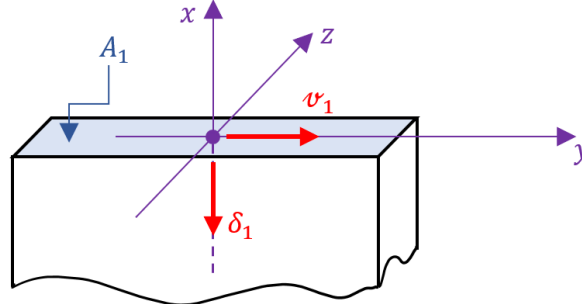
Enquanto que o *equilíbrio à translação vertical* do mesmo elemento diferencial é escrito como:

$$\begin{aligned}
 {}^{(+)}\sum_{\uparrow} F_V = 0 \quad & \therefore \quad \mathfrak{N}_1 - (\mathfrak{N}_1 + d\mathfrak{N}_1) - q_2 \cdot dx + q_3 \cdot dx = 0 \\
 & \therefore \quad d\mathfrak{N}_1 = (q_3 - q_2) \cdot dx \quad \therefore \quad \frac{d\mathfrak{N}_1}{dx} = q_3 - q_2 \quad (eq. 3.31)
 \end{aligned}$$

onde:  $q_2$  – é o fluxo cisalhante distribuído verticalmente na interseção 2 do núcleo C; e  
 $q_3$  – é o fluxo cisalhante distribuído verticalmente na interseção 3 do núcleo C.

Quanto aos deslocamentos e deformações, apresentados na Figura 3.31, pode-se definir:

**Figura 3.31 – Deslocamentos em  $x$  e  $y$ , e delimitação da área da seção transversal da parede (1)**



Fonte: O Autor (2025)

$\delta_1$  – como o deslocamento vertical no eixo da parede (1), sendo positivo quando ocorrer no sentido topo do pilar para a base do núcleo;

$v_1$  – como o deslocamento horizontal, na direção  $y$ ;

$A_1$  – sendo a área da seção transversal da parede (1); e

$\varepsilon_1$  – sendo a deformação vertical da parede (1).

Utilizando a equação diferencial da flexão, advinda da resistência dos materiais, reescreve-se:

$$(E \cdot I_z)_1 \cdot v_1'' = \mathfrak{M}_z$$

Considerando seção constante, ao derivar em relação ao eixo  $x$ , tem-se:

$$v_1''' \equiv \frac{d^3 v_1}{dx^3} = \frac{\mathfrak{M}_z'}{(E \cdot I_z)_1} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{M}_z' = J_1 \cdot v_1''' \quad (eq. 3.32)$$

onde:  $J_1 = (E \cdot I_z)_1$  – é a rigidez à flexão da parede (1).

O momento  $\mathfrak{M}_z$  é o mesmo  $\mathfrak{M}_1$ , e ao igualar as equações (3.30) e (3.32), faz-se:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_1' &= -\mathfrak{V}_1 + (q_2 + q_3) \cdot \frac{L_1}{2} \\ J_1 \cdot \mathfrak{V}_1''' &= -\mathfrak{V}_1 + (q_2 + q_3) \cdot \frac{L_1}{2}\end{aligned}$$

Tem-se a equação de equilíbrio, em termos do esforço cortante, definida por:

$$\mathfrak{V}_1 = -J_1 \cdot \mathfrak{V}_1''' + (q_2 + q_3) \cdot \frac{L_1}{2} \quad (eq. 3.33)$$

A deformação axial da parede, representada por  $\varepsilon_1$ , será expressa por:

$$\varepsilon_1 = \frac{d\delta_1}{dx} \equiv \delta_1' \quad \Rightarrow \quad \delta_1' = \frac{\mathfrak{N}_1}{E \cdot A_1}$$

Derivando em relação ao eixo  $x$ , tem-se:

$$\delta_1'' = \frac{\mathfrak{N}_1'}{E \cdot A_1} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{N}_1' = (E \cdot A_1) \cdot \delta_1'' \quad (eq. 3.34)$$

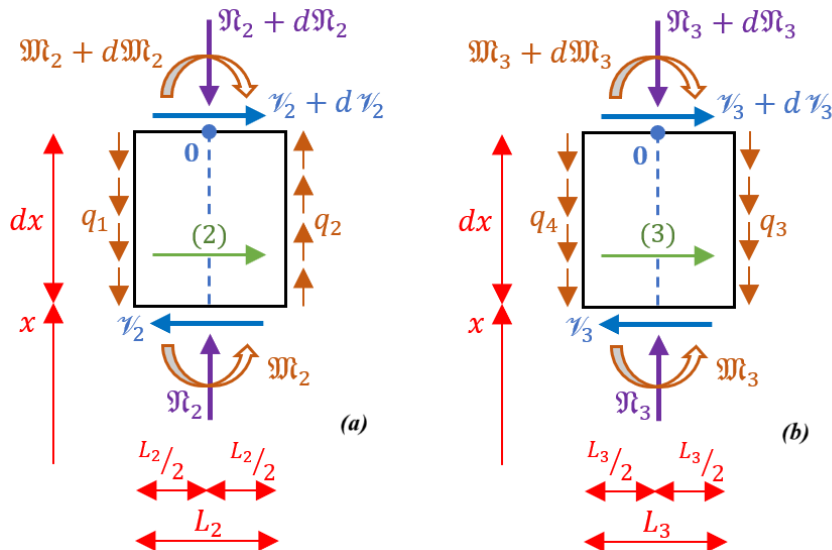
Valendo-se do equilíbrio vertical, une as equações (3.31) e (3.34), conclui-se:

$$\begin{cases} \mathfrak{N}_1' \equiv \frac{d\mathfrak{N}_1}{dx} = q_3 - q_2 \\ \mathfrak{N}_1' = (E \cdot A_1) \cdot \delta_1'' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (E \cdot A_1) \cdot \delta_1'' = q_3 - q_2 \quad (eq. 3.35)$$

### a.1.2) Equação Diferencial das Paredes (2) e (3)

Na Figura 3.32 são ilustrados os elementos diferenciais das paredes (2) e (3), contendo os fluxos advindos das interseções [1]; [2]; [3] e [4], respectivamente dois a dois.

**Figura 3.32 – Elemento diferencial: (a) da parede (2) e (b) da parede (3) do núcleo C estudado em Barbosa (1978)**



Fonte: O Autor (2025)

De modo análogo ao procedido na subletra “a.1” deste item, podem ser escritas as seguintes equações diferenciais e de equilíbrio de esforços cortantes:

♦ Para o Paine (2), elencam-se:

$$\begin{cases} \gamma_2' = -J_2 \cdot \nu_2''' + (q_1 + q_2) \cdot \frac{L_2}{2} & \text{equilíbrio do esforço cortante} \quad (eq. 3.36) \\ (E \cdot A_2) \cdot \delta_2'' = q_2 - q_1 & \text{equação diferencial da parede (2)} \quad (eq. 3.37) \end{cases}$$

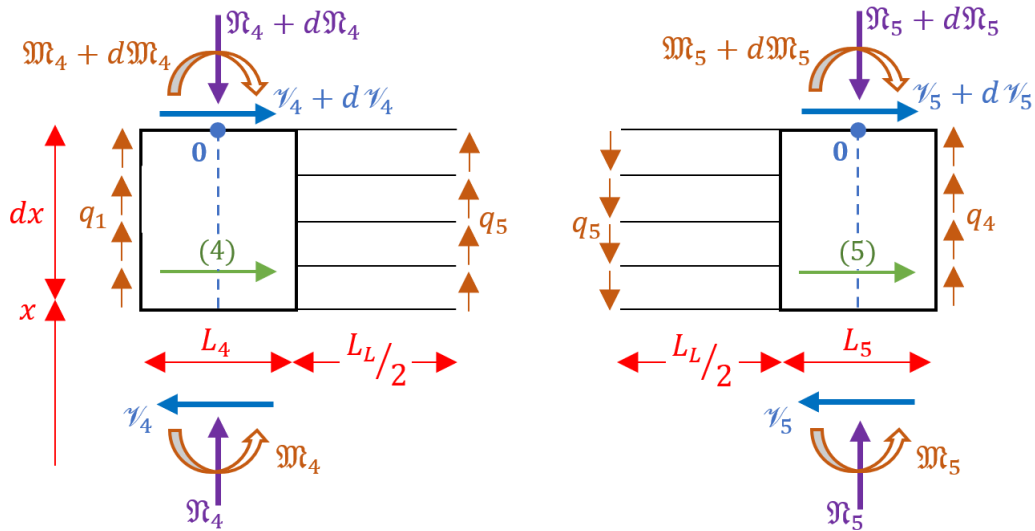
♦ Para o Paine (3), elencam-se:

$$\begin{cases} \gamma_3' = -J_3 \cdot \nu_3''' + (q_4 - q_3) \cdot \frac{L_3}{2} & \text{equilíbrio do esforço cortante} \quad (eq. 3.38) \\ (E \cdot A_3) \cdot \delta_3'' = -q_3 - q_4 & \text{equação diferencial da parede (3)} \quad (eq. 3.39) \end{cases}$$

### a.1.3 Equação Diferencial das Paredes (4) e (5)

Na Figura 3.33 são ilustrados os elementos diferenciais das paredes (4) e (5), contendo os fluxos advindos das interseções [1] e [4], respectivamente.

**Figura 3.33 – Elemento diferencial: (a) da parede (4) e (b) da parede (5) do núcleo C estudado em Barbosa (1978)**



Fonte: O Autor (2025)

De modo análogo, ao já procedido, escreve-se o equilíbrio à rotação e à translação vertical do paine (4), as seguintes expressões:

$$\mathfrak{M}_4' = -\gamma_4 - q_1 \cdot \frac{L_4}{2} + q_5 \cdot \left( \frac{L_4 + L_L}{2} \right) \quad (eq. 3.40)$$

$$\mathfrak{N}_4' = q_1 + q_5 \quad (eq. 3.41)$$

Ademais, expressam-se o equilíbrio de esforços cortantes e a equação diferencial do painel (4), como:

$$\mathcal{V}_4 = -J_4 \cdot \mathcal{V}_4''' - q_1 \cdot \frac{L_4}{2} + q_5 \cdot \left( \frac{L_4 + L_L}{2} \right) \quad (eq. 3.42)$$

$$(E \cdot A_4) \cdot \delta_4'' = q_1 + q_5 \quad (eq. 3.43)$$

Por fim, os equilíbrios à rotação, à translação vertical e ao esforço cortante do painel (5) são expressos por:

$$\mathfrak{M}_5' = -\mathcal{V}_5 + q_4 \cdot \frac{L_5}{2} + q_5 \cdot \left( \frac{L_5 + L_L}{2} \right) \quad (eq. 3.44)$$

$$\mathfrak{N}_5' = q_4 - q_5 \quad (eq. 3.45)$$

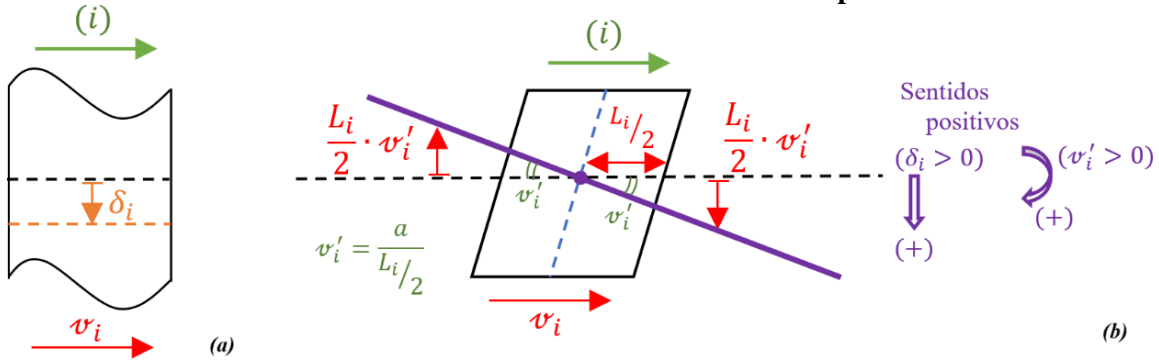
$$\mathcal{V}_5 = -J_5 \cdot \mathcal{V}_5''' + q_4 \cdot \frac{L_5}{2} + q_5 \cdot \left( \frac{L_5 + L_L}{2} \right) \quad (eq. 3.46)$$

enquanto que a equação diferencial do painel (5) é:  $(E \cdot A_5) \cdot \delta_5'' = q_4 - q_5 \quad (eq. 3.47)$

### a.2) Compatibilização dos deslocamentos verticais nas interseções

As equações de compatibilidade dos deslocamentos verticais nos pontos de interseção serão obtidas admitindo-se que as paredes são deformáveis à flexão e ao esforço axial, conforme procedimento apresentado na Figura 3.34 para a i-ésima parede.

**Figura 3.34 – Análise dos deslocamentos na i-ésima parede: (a) convenção positiva dos deslocamentos axial  $\delta_i$  e transversal  $\mathcal{V}_i$  e (b) rotação da seção e equivalentes deslocamentos transversais nas faces do elemento diferencial de parede**



Fonte: O Autor (2025)

Aplicando a compatibilidade de deslocamentos verticais aos pontos de interseção [1]; [2]; [3]; [4] e [5], escrevem-se:

- **Interseção [1]:** Engloba as paredes (2) e (4)

$$\begin{cases} \Delta_1 = \delta_2 - \frac{L_2}{2} \cdot \mathcal{V}_2' & \text{para a parede (2)} \\ \Delta_1 = \delta_4 - \frac{L_4}{2} \cdot \mathcal{V}_4' & \text{para a parede (4)} \end{cases}$$

**Observação:** - Lembrar que os deslocamentos  $\delta_2$  e  $\delta_4$  são positivos, para tanto apontam para baixo, conforme nomenclatura definida na Fig. 3.34 (a); e

- As parcelas de deslocamento  $\frac{L_i}{2} \cdot v_i'$  são negativas, tanto para as paredes (2) e (4), pois o giro da seção ocasionou que tais deslocamentos nas faces das paredes fossem para cima, logo contrário a convenção positiva da Fig. 3.34 (b).

Da compatibilização é possível escrever:

$$\Delta_1 = \Delta_1 \quad \Rightarrow \quad \delta_2 - \frac{L_2}{2} \cdot v_2' = \delta_4 - \frac{L_4}{2} \cdot v_4' \quad (eq. 3.48)$$

- **Interseção [2]:** Engloba as paredes (2) e (1)

Analogamente ao procedido na interseção [1], expressa-se a compatibilidade de deslocamentos na interseção [2], como:

$$\delta_2 + \frac{L_2}{2} \cdot v_2' = \delta_1 - \frac{L_1}{2} \cdot v_1' \quad (eq. 3.49)$$

- **Interseção [3]:** Engloba as paredes (1) e (3)

$$\delta_1 + \frac{L_1}{2} \cdot v_1' = \delta_3 + \frac{L_3}{2} \cdot v_3' \quad (eq. 3.50)$$

- **Interseção [4]:** Engloba as paredes (3) e (5)

$$\delta_3 - \frac{L_3}{2} \cdot v_3' = \delta_5 + \frac{L_5}{2} \cdot v_5' \quad (eq. 3.51)$$

- **Interseção [5]:** Será admitida a formação de rótula plástica no meio do vão dos lintéis

Neste caso, adota-se a contribuição da parede genérica superposta ao deslocamento, à flexão, dos lintéis. Ver Figura 3.1. Calcula-se o deslocamento vertical  $\delta_5$  via Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$|\delta_5| = \int_0^{L_L/2} \left( \begin{array}{c} \text{Diagrama de deslocamento} \\ q_5 \cdot h \cdot \frac{L_L}{2} \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c} \text{Diagrama de deslocamento} \\ 1 \cdot \frac{L_L}{2} \end{array} \right) \frac{ds}{E \cdot I_L} = \frac{\frac{L_L}{2}}{3 \cdot (E \cdot I_L)} \cdot q_5 \cdot h \cdot \frac{L_L}{2} \cdot \frac{L_L}{2} = \frac{q_5 \cdot h}{3 \cdot (E \cdot I_L)} \cdot \left(\frac{L_L}{2}\right)^3$$

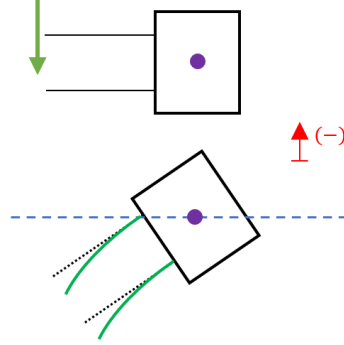
Ficando os deslocamentos, na referida interseção, expressos por:

- Para a parede (4):

$$\Delta_5 = \delta_4 + \left(\frac{L_4 + L_L}{2}\right) \cdot v_4' - \frac{q_5 \cdot h}{3 \cdot (E \cdot I_L)} \cdot \left(\frac{L_L}{2}\right)^3$$

- Para a parede (5): Ver Figura 3.35

$$\Delta_5 = \delta_5 - \left(\frac{L_5 + L_L}{2}\right) \cdot v_5' + \frac{q_5 \cdot h}{3 \cdot (E \cdot I_L)} \cdot \left(\frac{L_L}{2}\right)^3$$

**Figura 3.35 – Estado de deslocamento dos painéis-parede****Fonte: O Autor (2025)**

Igualando-se:

$$\delta_4 + \left(\frac{L_4 + L_L}{2}\right) \cdot v_4' - \frac{q_5 \cdot h}{3 \cdot (E \cdot I_L)} \cdot \left(\frac{L_L}{2}\right)^3 = \delta_5 - \left(\frac{L_5 + L_L}{2}\right) \cdot v_5' + \frac{q_5 \cdot h}{3 \cdot (E \cdot I_L)} \cdot \left(\frac{L_L}{2}\right)^3 \quad (eq. 3.52)$$

sendo:  $I_L = \frac{e_L \cdot h_L^3}{12} \rightarrow$  o momento de inércia à flexão do lintel.

Verifica-se que a equação (3.48) é função dos deslocamentos  $\delta_2$  e  $\delta_4$  e a equação (20) depende dos deslocamentos  $\delta_2$  e  $\delta_1$ , daí aplicando a equação (3.48) na eq. (3.49), conclui-se:

$$\begin{cases} \delta_2 = \delta_4 - \frac{L_4}{2} \cdot v_4' + \frac{L_2}{2} \cdot v_2' \sim \\ \delta_2 + \frac{L_2}{2} \cdot v_2' = \delta_1 - \frac{L_1}{2} \cdot v_1' \end{cases} \Downarrow \Rightarrow \left(\delta_4 - \frac{L_4}{2} \cdot v_4' + \frac{L_2}{2} \cdot v_2'\right) + \frac{L_2}{2} \cdot v_2' = \delta_1 - \frac{L_1}{2} \cdot v_1' \\ \therefore \delta_4 = \delta_1 - \frac{L_1}{2} \cdot v_1' - L_2 \cdot v_2' + \frac{L_4}{2} \cdot v_4' \quad (eq. 3.53)$$

Analogamente, ao aplicar a eq. (3.50) na eq. (3.51), explicita-se o deslocamento  $\delta_5$ , como:

$$\delta_5 = \delta_1 + \frac{L_1}{2} \cdot v_1' - L_3 \cdot v_3' - \frac{L_5}{2} \cdot v_5' \quad (eq. 3.54)$$

Agora, a fim de determinar o fluxo  $q_5$ , aplicam-se as equações (3.53) e (3.54) na eq. (3.52) e determina-se:

$$\begin{aligned} \left(\delta_1 - \frac{L_1}{2} \cdot v_1' - L_2 \cdot v_2' + \frac{L_4}{2} \cdot v_4'\right) + \left(\frac{L_4 + L_L}{2}\right) \cdot v_4' - \frac{q_5 \cdot h}{3 \cdot (E \cdot I_L)} \cdot \left(\frac{L_L}{2}\right)^3 = \\ = \left(\delta_1 + \frac{L_1}{2} \cdot v_1' - L_3 \cdot v_3' - \frac{L_5}{2} \cdot v_5'\right) - \left(\frac{L_5 + L_L}{2}\right) \cdot v_5' + \frac{q_5 \cdot h}{3 \cdot (E \cdot I_L)} \cdot \left(\frac{L_L}{2}\right)^3 \\ \therefore q_5 = \frac{12 \cdot (E \cdot I_L)}{h \cdot L_L^3} \cdot \left[ -L_1 \cdot v_1' - L_2 \cdot v_2' + L_3 \cdot v_3' + \left(\frac{2 \cdot L_4 + L_L}{2}\right) \cdot v_4' \right. \\ \left. + \left(\frac{2 \cdot L_5 + L_L}{2}\right) \cdot v_5' \right] \quad (eq. 3.56) \end{aligned}$$

Neste instante, ao derivar duas vezes as equações (3.48) a (3.51) e aplicando as equações diferenciais de cada parede (eq.'s 3.35; 3.37; 3.39; 3.43 e 3.47) no lugar das derivadas segundas, reescrevem-se:

$$\delta_2'' - \frac{L_2}{2} \cdot v_2''' = \delta_4'' - \frac{L_4}{2} \cdot v_4'''$$

$$\therefore \frac{(q_2 - q_1)}{E \cdot A_2} - \frac{L_2}{2} \cdot v_2''' = \frac{(q_1 + q_5)}{E \cdot A_4} - \frac{L_4}{2} \cdot v_4'''$$

multiplicando toda a equação por  $(E \cdot A_2 \cdot A_4)$ , reescreve-se:

$$q_1 \cdot (A_2 + A_4) - q_2 \cdot A_4 + q_5 \cdot A_2 = -\frac{L_2}{2} \cdot E \cdot A_2 \cdot A_4 \cdot v_2''' + \frac{L_4}{2} \cdot E \cdot A_2 \cdot A_4 \cdot v_4''' \quad (eq. 3.56)$$

$$\delta_2'' + \frac{L_2}{2} \cdot v_2''' = \delta_1'' - \frac{L_1}{2} \cdot v_1'''$$

$$\therefore \frac{(q_2 - q_1)}{E \cdot A_2} + \frac{L_2}{2} \cdot v_2''' = \frac{(q_3 - q_1)}{E \cdot A_1} - \frac{L_1}{2} \cdot v_1'''$$

multiplicando toda a equação por  $(E \cdot A_1 \cdot A_2)$ , reescreve-se:

$$-q_1 \cdot A_1 + q_2 \cdot (A_1 + A_2) - q_3 \cdot A_2 = -\frac{L_1}{2} \cdot E \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot v_1''' - \frac{L_2}{2} \cdot E \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot v_2''' \quad (eq. 3.57)$$

$$\delta_1'' + \frac{L_1}{2} \cdot v_1''' = \delta_3'' + \frac{L_3}{2} \cdot v_3'''$$

$$\therefore \frac{(q_3 - q_1)}{E \cdot A_1} + \frac{L_1}{2} \cdot v_1''' = \frac{(-q_3 - q_4)}{E \cdot A_3} + \frac{L_3}{2} \cdot v_3'''$$

multiplicando toda a equação por  $(E \cdot A_1 \cdot A_3)$ , reescreve-se:

$$-q_2 \cdot A_3 + q_3 \cdot (A_1 + A_3) + q_4 \cdot A_1 = -\frac{L_1}{2} \cdot E \cdot A_1 \cdot A_3 \cdot v_1''' + \frac{L_3}{2} \cdot E \cdot A_1 \cdot A_3 \cdot v_3''' \quad (eq. 3.58)$$

$$\delta_3'' - \frac{L_3}{2} \cdot v_3''' = \delta_5'' + \frac{L_5}{2} \cdot v_5'''$$

$$\therefore \frac{(-q_3 - q_4)}{E \cdot A_3} - \frac{L_3}{2} \cdot v_3''' = \frac{(q_4 - q_5)}{E \cdot A_5} + \frac{L_5}{2} \cdot v_5'''$$

multiplicando toda a equação por  $(E \cdot A_3 \cdot A_5)$ , reescreve-se:

$$q_3 \cdot A_5 + q_4 \cdot (A_3 + A_5) - q_5 \cdot A_3 = -\frac{L_3}{2} \cdot E \cdot A_3 \cdot A_5 \cdot v_3''' - \frac{L_5}{2} \cdot E \cdot A_3 \cdot A_5 \cdot v_5''' \quad (eq. 3.59)$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} A_2 + A_4 & -A_4 & 0 & 0 \\ -A_1 & A_1 + A_2 & -A_2 & 0 \\ 0 & -A_3 & A_1 + A_3 & A_1 \\ 0 & 0 & A_5 & A_3 + A_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -A_2 \\ 0 \\ 0 \\ A_3 \end{Bmatrix} \cdot q_5 + \\
+ \frac{E}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -L_2 \cdot A_2 \cdot A_4 & 0 & L_4 \cdot A_2 \cdot A_4 & 0 \\ -L_1 \cdot A_1 \cdot A_2 & -L_2 \cdot A_1 \cdot A_2 & 0 & 0 & 0 \\ -L_1 \cdot A_1 \cdot A_3 & 0 & L_3 \cdot A_1 \cdot A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_3 \cdot A_3 \cdot A_5 & 0 & -L_5 \cdot A_3 \cdot A_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1''' \\ v_2''' \\ v_3''' \\ v_4''' \\ v_5''' \end{Bmatrix} \quad (eq. 3.60)$$

Em notação matricial condensada, tem-se:

$$[M_1] \cdot \{q_{1-4}\} = \{M_2\} \cdot q_5 + [M_4] \cdot \{v_\omega'''\} \quad (eq. 3.61)$$

onde reescreve-se o fluxo cisalhante nos lintéis, representado por  $q_5$ , a fim de buscar compatibilizar a notação, como:

$$q_5 = \{M_3\}^T \cdot \{v_\omega'\} \quad (eq. 3.62)$$

$$\text{ou ainda: } q_5 = 12 \cdot \frac{E \cdot I_L}{h \cdot L_L^3} \cdot \left\{ -L_1 \quad -L_2 \quad -L_3 \quad \frac{2 \cdot L_4 + L_L}{2} \quad \frac{2 \cdot L_5 + L_L}{2} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \\ v_5' \end{Bmatrix} \quad (eq. 3.63)$$

Assim, substituindo a equação (3.62) na eq. (3.61), chega-se à:

$$[M_1] \cdot \{q_{1-4}\} = \{M_2\} \cdot \{M_3\}^T \cdot \{v_\omega'\} + [M_4] \cdot \{v_\omega'''\} \quad (eq. 3.64)$$

Determinam-se os valores de  $q_1$  a  $q_4$ , pré-multiplicando a eq. (3.64) pela matriz inversa  $[M_1]^{-1}$ , logo reescrita como:

$$\{q_{1-4}\} = [M_1]^{-1} \cdot \{M_2\} \cdot \{M_3\}^T \cdot \{v_\omega'\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_4] \cdot \{v_\omega'''\} \quad (eq. 3.65)$$

### a.3) Equilíbrio de esforços cortantes

#### a.3.1) Esforços cortantes internos

Analisando os esforços cortantes obtidos via equações de equilíbrio das paredes, ver eq.'s (3.33; 3.36; 3.38; 3.42 e 3.46), podem ser reorganizadas como:

$$\begin{cases} \gamma_1 = -J_1 \cdot v_1''' + q_2 \cdot \frac{L_1}{2} + q_3 \cdot \frac{L_1}{2} \end{cases} \quad (eq. 3.66)$$

$$\begin{cases} \gamma_2 = -J_2 \cdot v_2''' + q_1 \cdot \frac{L_2}{2} + q_2 \cdot \frac{L_2}{2} \end{cases} \quad (eq. 3.67)$$

$$\begin{cases} \gamma_3 = -J_3 \cdot v_3''' - q_3 \cdot \frac{L_3}{2} + q_4 \cdot \frac{L_3}{2} \end{cases} \quad (eq. 3.68)$$

$$\begin{cases} \gamma_4 = -J_4 \cdot v_4''' - q_1 \cdot \frac{L_4}{2} + q_5 \cdot \left( \frac{L_4 + L_L}{2} \right) \end{cases} \quad (eq. 3.69)$$

$$\begin{cases} \gamma_5 = -J_5 \cdot v_5''' + q_4 \cdot \frac{L_5}{2} + q_5 \cdot \left( \frac{L_5 + L_L}{2} \right) \end{cases} \quad (eq. 3.70)$$

Em termos matriciais ficando expresso por:

$$\{\gamma_\omega\} = [M_5] \cdot \{v_\omega'''\} + \{M_6\} \cdot q_5 + [M_7] \cdot \{q_{1-4}\} \quad (eq. 3.71)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1''' \\ v_2''' \\ v_3''' \\ v_4''' \\ v_5''' \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ L_4 + L_L \\ L_5 + L_L \end{Bmatrix} \cdot q_5 + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & L_1 & L_1 & 0 \\ L_2 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_3 & -L_3 \\ -L_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \quad (eq. 3.72)$$

Ainda, manipulando a eq. (3.71) e lembrando que  $q_5 = \{M_3\}^T \cdot \{v_\omega'\}$ , tem-se:

$$\{\gamma_\omega\} = [M_5] \cdot \{v_\omega'''\} + \{M_6\} \cdot \{M_3\}^T \cdot \{v_\omega'\} + [M_7] \cdot \{q_{1-4}\} \quad (eq. 3.73)$$

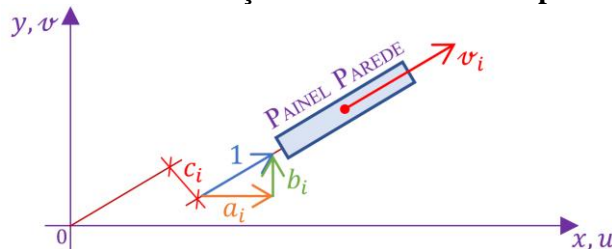
Aplicando a equação (3.65) na eq. (3.73), escreve-se:

$$\begin{aligned} \{\gamma_\omega\} &= [M_5] \cdot \{v_\omega'''\} + \{M_6\} \cdot \{M_3\}^T \cdot \{v_\omega'\} + \\ &\quad + [M_7] \cdot ([M_1]^{-1} \cdot \{M_2\} \cdot \{M_3\}^T \cdot \{v_\omega'\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_4] \cdot \{v_\omega'''\}) \\ \therefore \\ \{\gamma_\omega\} &= ([M_5] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot \{v_\omega'''\} + \\ &\quad + (\{M_6\} + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot \{M_2\}) \cdot \{M_3\}^T \cdot \{v_\omega'\} \end{aligned} \quad (eq. 3.74)$$

**- Equação de equilíbrio de esforços cortantes internos no sistema local de coordenadas -**

Analisando os deslocamentos  $v_i$  de uma parede genérica  $i$ , utiliza-se a formulação descrita por Stamato (1978) para a análise do encurtamento de mola para Painel de uma única laje, adaptando a carga  $\bar{p}_i$  como unitária, conforme ilustrado na Figura 3.36.

**Figura 3.36 – Transformação do referencial local para o global**



Fonte: O Autor (2025)

chegando-se à:  $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c}_i \cdot \phi$

e aplicando a cada parede que compõe o núcleo, escreve-se a lei de transformação de sistema coordenados, como:

$$\{\mathbf{v}_\omega\} = [\mathbf{M}_8] \cdot \{\mathbf{v}\} \quad (eq. 3.75)$$

$$\text{onde: } \begin{cases} v_1 = a_1 \cdot v + b_1 \cdot \omega + c_1 \cdot \phi \\ v_2 = a_2 \cdot v + b_2 \cdot \omega + c_2 \cdot \phi \\ v_3 = a_3 \cdot v + b_3 \cdot \omega + c_3 \cdot \phi \\ v_4 = a_4 \cdot v + b_4 \cdot \omega + c_4 \cdot \phi \\ v_5 = a_5 \cdot v + b_5 \cdot \omega + c_5 \cdot \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v \\ \omega \\ \phi \end{Bmatrix}$$

Em seguida, aplicando-se a equação (3.75) na eq. (3.74), tem-se o equilíbrio em esforço cortante  $\mathcal{V}_i$  para os deslocamentos globais  $\{u; v; \phi\}$ , definido por:

$$\{\mathcal{V}_\omega\} = ([\mathbf{M}_5] + [\mathbf{M}_7] \cdot [\mathbf{M}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_4]) \cdot [\mathbf{M}_8] \cdot \{\mathbf{v}'''\} + ([\mathbf{M}_6] + [\mathbf{M}_7] \cdot [\mathbf{M}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_2]) \cdot \{\mathbf{M}_3\}^T \cdot [\mathbf{M}_8] \cdot \{\mathbf{v}'\} \quad (eq. 3.76)$$

- *Equação de equilíbrio de esforços cortantes internos no sistema global de coordenadas* -

$$\text{sendo: } \{\mathbf{v}'\} = \begin{Bmatrix} v' \\ \omega' \\ \phi' \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{v}'''\} = \begin{Bmatrix} v''' \\ \omega''' \\ \phi''' \end{Bmatrix}$$

### a.3.2) Esforços cortantes externos

O equilíbrio do esforço cortante externo decorrente da atuação do carregamento pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \sum \mathcal{V}_i \cdot a_i = \mathcal{V}_{ext} \cdot a \\ \sum \mathcal{V}_i \cdot b_i = \mathcal{V}_{ext} \cdot b \\ \sum \mathcal{V}_i \cdot c_i + G \cdot \left( \sum I_{t_i} \right) \cdot \phi' = \mathcal{V}_{ext} \cdot c \end{cases} \quad (eq. 3.77 a)$$

$$(eq. 3.77 b)$$

$$(eq. 3.77 c)$$

onde:  $I_{t_i} = \frac{e_i^3 \cdot L_i}{3} \rightarrow$  é o momento de inércia à torção das paredes finas; e

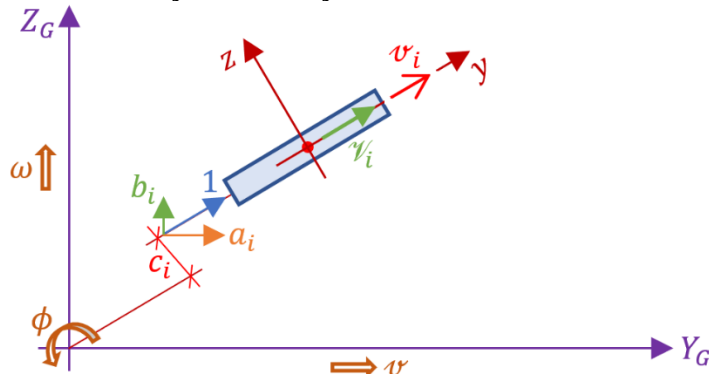
$G \cdot I_{t_i} \rightarrow$  é a rigidez á torção de cada parede.

O que aplicado as cinco paredes do núcleo estrutural C é expandido por:

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{ext} \cdot a = \mathcal{V}_1 \cdot a_1 + \mathcal{V}_2 \cdot a_2 + \mathcal{V}_3 \cdot a_3 + \mathcal{V}_4 \cdot a_4 + \mathcal{V}_5 \cdot a_5 \\ \mathcal{V}_{ext} \cdot b = \mathcal{V}_1 \cdot b_1 + \mathcal{V}_2 \cdot b_2 + \mathcal{V}_3 \cdot b_3 + \mathcal{V}_4 \cdot b_4 + \mathcal{V}_5 \cdot b_5 \\ \mathcal{V}_{ext} \cdot c = \mathcal{V}_1 \cdot c_1 + \mathcal{V}_2 \cdot c_2 + \mathcal{V}_3 \cdot c_3 + \mathcal{V}_4 \cdot c_4 + \mathcal{V}_5 \cdot c_5 + G \cdot \left( \sum I_{t_i} \right) \cdot \phi' \end{cases}$$

Já a transformação do cortante no sistema local para o sistema global do núcleo é procedida mediante ilustração da Figura 3.37.

Figura 3.37 – Transformação do esforço cortante do referencial local para o global



Fonte: O Autor (2025)

Matricialmente, escreve-se:

$$\mathcal{V}_{ext} \cdot \{A^*\} = [M_8]^T \cdot \{\mathcal{V}_\omega\} + [M_9] \cdot \{v'\} \quad (eq. 3.78)$$

$$\text{onde: } \mathcal{V}_{ext} \cdot \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot \left( \sum I_{ti} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v' \\ \omega' \\ \phi' \end{Bmatrix}$$

#### a.4) Equação diferencial da análise estática

Por fim, a equação (3.76) é substituída na eq. (3.78) e chega-se a Equação Diferencial que rege o problema estático dos núcleos estruturais, como:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ext} \cdot \{A^*\} = & [M_8]^T \cdot ([M_5] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot [M_8] \cdot \{v'''\} + \\ & + [M_8]^T \cdot (\{M_6\} + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot \{M_2\}) \cdot \{M_3\}^T \cdot [M_8] \cdot \{v'\} + [M_9] \cdot \{v'\} \end{aligned}$$

Agrupando-se:

$$-[J] \cdot \{v'''\} + [S] \cdot \{v'\} = \{\mathcal{V}_f\} \quad (eq. 3.79)$$

- Equação Diferencial do Núcleo Estrutural sob REGIME ESTÁTICO -

$$\text{sendo: } [J] = -[M_8]^T \cdot ([M_5] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot [M_8];$$

$$[S] = [M_8]^T \cdot (\{M_6\} + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot \{M_2\}) \cdot \{M_3\}^T \cdot [M_8] + [M_9]; \text{ e}$$

$$\{\mathcal{V}_f\} = \mathcal{V}_{ext} \cdot \{A^*\}.$$

Agora, ressalta-se que basta que a equação (3.79) seja resolvida e será obtida a resposta dos deslocamentos globais  $\{v\}^T = \{v \quad \omega \quad \phi\}$  e em seguida retorna-se ao sistema local, a fim de determinar os esforços solicitantes em cada parede que compõe o núcleo. O conhecimento de tais esforços solicitantes propicia o dimensionamento racional das paredes.

### a.5) Retornando ao sistema local de referência dos painéis

Parte-se do sistema global em direção ao sistema local de referências. Assim, quantificando:

- **Deslocamentos das paredes:** Nomeado de Transformação de Coordenadas

$$\{\nu_\omega\} = [M_8] \cdot \{\nu\} \quad (eq. 3.80)$$

$$\text{sendo: } \{\nu_\omega\} = \begin{Bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \\ \nu_5 \end{Bmatrix}.$$

- **Esforços Cortantes nas paredes:**

$$\{\nu_\omega\} = ([M_5] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot [M_8] \cdot \{\nu'''\} + ([M_6] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_2]) \cdot \{M_3\}^T \cdot [M_8] \cdot \{\nu'''\} \quad (eq. 3.81)$$

- **Momentos fletores nas paredes:**

Via deslocamentos dos diafragmas, tem-se:

$$\nu_\omega'' = \frac{\mathfrak{M}_\omega}{J_\omega} \quad \text{e} \quad \{\nu_\omega\} = -[M_5] \cdot \{\nu\}$$

Assim:

$$\{\nu_\omega''\} = -[M_5] \cdot \{\mathfrak{M}_\omega\} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} \nu_1'' \\ \nu_2'' \\ \nu_3'' \\ \nu_4'' \\ \nu_5'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathfrak{M}_1 \\ \mathfrak{M}_2 \\ \mathfrak{M}_3 \\ \mathfrak{M}_4 \\ \mathfrak{M}_5 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \quad \{\mathfrak{M}_\omega\} = -[M_5]^{-1} \cdot \{\nu_\omega''\} \quad \Rightarrow \quad \{\mathfrak{M}_\omega\} = -[M_5]^{-1} \cdot [M_8] \cdot \{\nu''\} \quad (eq. 3.82)$$

- **Fluxo de cisalhamento  $q$  nas intersecções:** Com base nas eq.'s (3.62) e (3.65)

$$\{q_{1-4}\} = [M_1]^{-1} \cdot \{M_2\} \cdot \{M_3\}^T \cdot \{\nu_\omega'\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_4] \cdot \{\nu_\omega'''\}$$

Aplicando a transformação de coordenadas,  $\{\nu_\omega\} = [M_8] \cdot \{\nu\}$ , fica reescrita:

$$\{q_{1-4}\} = [M_1]^{-1} \cdot \{M_2\} \cdot \{M_3\}^T \cdot [M_8] \cdot \{\nu'\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_4] \cdot [M_8] \cdot \{\nu'''\} \quad (eq. 3.83)$$

e:

$$\{q_5\} = \{M_3\}^T \cdot \{\nu_\omega'\} \quad \Rightarrow \quad \{q_5\} = \{M_3\}^T \cdot [M_8] \cdot \{\nu'\} \quad (eq. 3.84)$$

- **Esforço Cortante no lintel:**

$$\nu_L = q_5 \cdot h \quad (eq. 3.85)$$

- **Deslocamentos verticais  $\{\delta\}$  nos eixos das paredes:** Inicialmente, partindo das equações (3.48), (3.49), (3.53) e (3.54). Desta forma, após determinar o deslocamento  $\delta_1$ , os demais deslocamentos ( $\delta_2$ ;  $\delta_3$ ;  $\delta_4$ ;  $\delta_5$ ) serão também determinados. Assim, quantifica-se o deslocamento  $\delta_1$  via equilíbrio da parede (1), via:

$$(E.A_1).\delta_1'' = q_3 - q_2$$

onde os fluxos de cisalhamento  $q_2$  e  $q_3$  serão determinados mediante equação (3.65), por:

$$\{q_{1-4}\} \equiv \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = [M_1]^{-1} \cdot \{M_2\} \cdot \{M_3\}^T \cdot \{\psi_\omega'\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_4] \cdot \{\psi_\omega'''\}$$

Observa-se que a diferença ( $q_3 - q_2$ ) dependerá apenas do vetor  $\{\psi_\omega'''\}$ , em mais específico diferença entre a 3ª linha e a 2ª linha do sistema  $\{q_{1-4}\}$ , sendo:

$$q_3 - q_2 = D_1 \cdot \psi_1''' + D_2 \cdot \psi_2''' + D_3 \cdot \psi_3''' + D_4 \cdot \psi_4''' + D_5 \cdot \psi_5'''$$

$$\text{com: } [D] = [M_1]_{4 \times 4}^{-1} \cdot [M_4]_{4 \times 5} \equiv \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} \end{bmatrix}_{4 \times 5}$$

$$\begin{aligned} \text{onde: } D_1 &= D_{31} - D_{21} & ; & & D_2 &= D_{32} - D_{22} \\ D_3 &= D_{33} - D_{23} & ; & & D_4 &= D_{34} - D_{24} \\ D_5 &= D_{35} - D_{25} \end{aligned}$$

- **Valores obtidos pela diferença entre as 3ª e 2ª linhas da matriz  $[D]$ , resultando do produto de  $[M_1]^{-1}$  por  $[M_4]$  -**

Ficando:

$$\delta_1'' = \frac{1}{E.A_1} \cdot \{D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4 \quad D_5\} \cdot \begin{Bmatrix} \psi_1''' \\ \psi_2''' \\ \psi_3''' \\ \psi_4''' \\ \psi_5''' \end{Bmatrix} \quad \therefore \quad \delta_1'' = \{M_{10}\}^T \cdot \{\psi_\omega'''\}$$

$$\begin{aligned} \text{Integrando-se por duas vezes, tem-se: } \delta_1' &= \{M_{10}\}^T \cdot \{\psi_\omega''\} + C_1 \\ \delta_1 &= \{M_{10}\}^T \cdot \{\psi_\omega'\} + C_1 \cdot x + C_2 \end{aligned}$$

Usando condições de contorno a fim de obter as constantes de integração:

$$\begin{aligned} \diamond \text{ Para } x = 0 &\rightarrow \begin{cases} \delta_{10} = 0 \\ \{\psi_\omega'\}_0 = 0 \end{cases} \\ \diamond \text{ Para } x = H &\rightarrow \begin{cases} \delta_{1H}' = 0 \\ \{\psi_\omega''\}_H = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Resultando em:  $C_1 = 0$  e  $C_2 = 0$ .

$$\text{Ficando: } \delta_1 = \{M_{10}\}^T \cdot \{\psi_\omega'\}$$

$$\begin{aligned}
\text{Por fim: } \delta_2 &= \{\mathbf{M}_{10}\}^T \cdot \{\mathbf{v}_\omega'\} - \mathbf{v}_1' \cdot \frac{L_1}{2} - \mathbf{v}_2' \cdot \frac{L_2}{2} \\
\delta_3 &= \{\mathbf{M}_{10}\}^T \cdot \{\mathbf{v}_\omega'\} + \mathbf{v}_1' \cdot \frac{L_1}{2} - \mathbf{v}_3' \cdot \frac{L_3}{2} \\
\delta_4 &= \{\mathbf{M}_{10}\}^T \cdot \{\mathbf{v}_\omega'\} - \mathbf{v}_1' \cdot \frac{L_1}{2} - \mathbf{v}_2' \cdot L_2 + \mathbf{v}_4' \cdot \frac{L_4}{2} \\
\delta_5 &= \{\mathbf{M}_{10}\}^T \cdot \{\mathbf{v}_\omega'\} + \mathbf{v}_1' \cdot \frac{L_1}{2} - \mathbf{v}_3' \cdot L_3 - \mathbf{v}_5' \cdot \frac{L_5}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Matricialmente: } \{\delta_\omega\} = ([\mathbf{M}_{12}] + [\mathbf{M}_{11}]) \cdot \{\mathbf{v}_\omega'\}$$

$$\text{onde: } \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{M}_{10}\}^T \\ \{\mathbf{M}_{10}\}^T \\ \{\mathbf{M}_{10}\}^T \\ \{\mathbf{M}_{10}\}^T \\ \{\mathbf{M}_{10}\}^T \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1' \\ \mathbf{v}_2' \\ \mathbf{v}_3' \\ \mathbf{v}_4' \\ \mathbf{v}_5' \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -L_1 & -L_2 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 & 0 & -L_3 & 0 & 0 \\ -L_1 & -2 \cdot L_2 & 0 & L_4 & 0 \\ L_1 & 0 & -2 \cdot L_3 & 0 & -L_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_1' \\ \mathbf{v}_2' \\ \mathbf{v}_3' \\ \mathbf{v}_4' \\ \mathbf{v}_5' \end{Bmatrix}$$

Agora, valendo-se da transformação de coordenadas locais  $\{\mathbf{v}_\omega\}$  para coordenadas globais  $\{\mathbf{v}\}$ , faz-se:

$$\begin{aligned}
\{\delta_\omega\} &= ([\mathbf{M}_{12}] + [\mathbf{M}_{11}]) \cdot \{\mathbf{v}_\omega'\} \\
\{\mathbf{v}_\omega\} &= [\mathbf{M}_8] \cdot \{\mathbf{v}\}
\end{aligned} \Rightarrow \{\delta_\omega\} = ([\mathbf{M}_{12}] + [\mathbf{M}_{11}]) \cdot [\mathbf{M}_8] \cdot \{\mathbf{v}'\} \quad (eq. 3.86)$$

- **Esforços Normais em todas as paredes:** Utilizando as equações decorrentes das deformações axiais  $\varepsilon$  em cada parede, escreve-se  $\mathfrak{N}_i$  em termos de  $\delta_1'$ , como:

$$\begin{aligned}
\{\mathfrak{N}_\omega\} &= [\mathbf{M}_{13}] \cdot \{\delta_\omega'\} \quad (eq. 3.87) \\
\mathfrak{N}_1 &= (E \cdot A_1) \cdot \delta_1' \\
\mathfrak{N}_2 &= (E \cdot A_2) \cdot \delta_2' \\
\mathfrak{N}_3 &= (E \cdot A_3) \cdot \delta_3' \\
\mathfrak{N}_4 &= (E \cdot A_4) \cdot \delta_4' \\
\mathfrak{N}_5 &= (E \cdot A_5) \cdot \delta_5'
\end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \mathfrak{N}_1 \\ \mathfrak{N}_2 \\ \mathfrak{N}_3 \\ \mathfrak{N}_4 \\ \mathfrak{N}_5 \end{Bmatrix} = E \cdot \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1' \\ \delta_2' \\ \delta_3' \\ \delta_4' \\ \delta_5' \end{Bmatrix}$$

substituindo-se a equação (3.86), derivada em relação a  $x$ , na equação (3.87) e chega-se à:

$$\{\mathfrak{N}_\omega\} = [\mathbf{M}_{13}] \cdot ([\mathbf{M}_{12}] + [\mathbf{M}_{11}]) \cdot [\mathbf{M}_8] \cdot \{\mathbf{v}''\} \quad (eq. 3.88)$$

Após determinação dos esforços normais  $\mathfrak{N}_{\omega_i}$  de todas as paredes  $i$  e dos respectivos momentos fletores  $\mathfrak{M}_{\omega_i}$  é possível determinar as tensões axiais em qualquer posição da estrutura de núcleo, em questão, tanto na seção transversal como ao longo da altura.

- **Deslocamentos verticais nas interseções:** Partindo da primeira parte das equações (3.48) e (3.52), além da segunda parte das equações (3.49), (3.50) e (3.51), escritas como:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \delta_2 - \frac{L_2}{2} \cdot \mathbf{v}_2' & ; & \quad \Delta_2 = \delta_1 - \frac{L_1}{2} \cdot \mathbf{v}_1' \\
\Delta_3 &= \delta_3 + \frac{L_3}{2} \cdot \mathbf{v}_3' & ; & \quad \Delta_4 = \delta_5 + \frac{L_5}{2} \cdot \mathbf{v}_5'
\end{aligned}$$

$$\Delta_5 = \delta_4 + \left( \frac{L_4 + L_L}{2} \right) \cdot v_4' - \frac{q_5 \cdot h}{3 \cdot (E \cdot I_L)} \cdot \left( \frac{L_L}{2} \right)^3$$

Neste conjunto, mais especificamente na equação de  $\Delta_5$  e aplicar o fluxo  $q_5$  da equação (3.55), cuja organização em formato matricial, fica:

$$\begin{aligned} \{\Delta_\omega\} &= \{\delta_\omega\} + [M_{14}] \cdot \{v_\omega'\} \\ \therefore \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \Delta_1 \\ \Delta_3 \\ \Delta_5 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 \\ L_1 & L_2 & -L_3 & L_{1a} & L_{5a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \\ v_5' \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{sendo: } L_{1a} = \frac{L_1}{2}; \quad L_{5a} = \frac{2 \cdot L_5 + L_L}{2}.$$

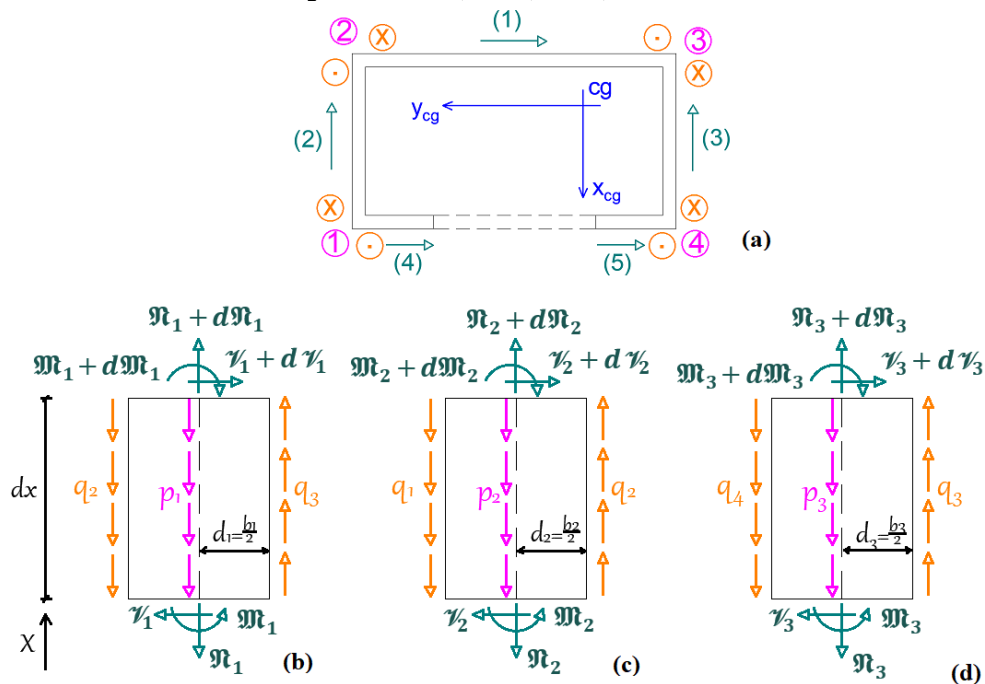
Transformando as coordenadas mediante  $\{v_\omega\} = [M_8] \cdot \{v\}$ , conclui-se:

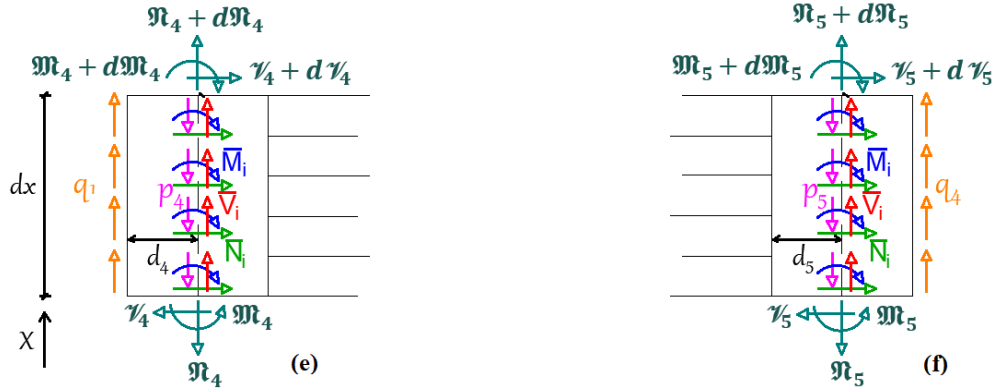
$$\{\Delta_\omega\} = \{\delta_\omega\} + [M_{14}] \cdot [M_8] \cdot \{v'\} \quad (\text{eq. 3.89})$$

## b) Caso via Maney

Na Figura 3.38 consta a numeração dos Painéis – Parede, de (1) a (5), bem como o sentido adotado para a modelização. Apresentando-se ainda, os sentidos de fluxo de cisalhamento nas interseções, além de expor com detalhes os elementos diferenciais dos mencionados painéis – parede, mediante TMC.

**Figura 3.38 – Pilar de paredes finas: (a) convenções adotadas, além dos elementos diferenciais dos painéis (b) 1, (c) 2, (d) 3, (e) 4 e (f) 5**





Fonte: Adaptado de (Melo et al., 2021)

### b.1) Equilíbrio dos painéis-parede

Ao proceder o equilíbrio de forças verticais e momento fletor nos Painéis – Parede (1), (2) e (3), conforme são ilustrados nas Figuras 3.38 (b) a 3.38 (d), exprimem-se as variações de esforço normal e momento fletor, por:

$$\frac{dN_1}{dx} = p_1 + q_2 - q_3 \quad (eq. 3.90 a)$$

$$\frac{dM_1}{dx} = -V_1 + (q_2 + q_3) \cdot d_1 \quad (eq. 3.90 b)$$

$$\frac{dN_2}{dx} = p_2 + q_1 - q_2 \quad (eq. 3.90 c)$$

$$\frac{dM_2}{dx} = -V_2 + (q_1 + q_2) \cdot d_2 \quad (eq. 3.90 d)$$

$$\frac{dN_3}{dx} = p_3 + q_3 + q_4 \quad (eq. 3.90 e)$$

$$\frac{dM_3}{dx} = -V_3 + (q_4 - q_3) \cdot d_3 \quad (eq. 3.90 f)$$

partindo da Equação Diferencial da Linha Elástica, da Teoria de Euler-Bernoulli, além de agregar o conceito de deformação, reescrevem-se as equações (1) como:

$$V_1 = -J_1 \cdot v_1''' + (q_2 + q_3) \cdot d_1 \quad (eq. 3.91 a)$$

$$(E \cdot A_1) \cdot \delta_1'' = p_1 + q_2 - q_3 \quad (eq. 3.91 b)$$

$$V_2 = -J_2 \cdot v_2''' + (q_1 + q_2) \cdot d_2 \quad (eq. 3.91 d)$$

$$(E \cdot A_2) \cdot \delta_2'' = p_2 + q_1 - q_2 \quad (eq. 3.91 e)$$

$$V_3 = -J_3 \cdot v_3''' + (q_4 - q_3) \cdot d_3 \quad (eq. 3.91 f)$$

$$(E \cdot A_3) \cdot \delta_3'' = p_3 + q_3 + q_4 \quad (eq. 3.91 g)$$

com:  $(E \cdot I_{zi}) \cdot v_i'' = M_{zi} \quad \therefore \quad M'_{zi} = J_i \cdot v_i'''$ , além de:  $E \cdot A_i \cdot \delta_i' = N_i$ .

Realizando agora o balanço de forças, vertical e horizontal, além do equilíbrio de momentos, nos Painéis – Parede (4) e (5), exprimem-se:

$$\frac{d\mathcal{V}_4}{dx} = -\bar{N}_i \quad (eq. 3.92 a)$$

$$\frac{d\mathcal{N}_4}{dx} = p_4 - q_1 - \bar{V}_i \quad (eq. 3.92 b)$$

$$\frac{d\mathcal{M}_4}{dx} = -\mathcal{V}_4 - q_1 \cdot d_4 - \bar{M}_i \quad (eq. 3.92 c)$$

$$\frac{d\mathcal{V}_5}{dx} = -\bar{N}_f \quad (eq. 3.92 d)$$

$$\frac{d\mathcal{N}_5}{dx} = p_5 - q_4 - \bar{V}_f \quad (eq. 3.92 e)$$

$$\frac{d\mathcal{M}_5}{dx} = -\mathcal{V}_5 + q_4 \cdot d_5 - \bar{M}_f \quad (eq. 3.92 f)$$

utilizando novamente a Teoria de Euler-Bernoulli e o conceito de deformação, postulam-se:

$$(E \cdot A_4) \cdot \delta_4'' = p_4 - q_1 - \bar{V}_i \quad (eq. 3.93 a)$$

$$(E \cdot A_5) \cdot \delta_5'' = p_5 - q_4 - \bar{V}_f \quad (eq. 3.93 b)$$

$$\mathcal{V}_4 = -J_4 \cdot \mathcal{V}_4''' - q_1 \cdot d_4 - \bar{M}_i \quad (eq. 3.93 c)$$

**Observação:** Conforme observa-se nas definições em Vlassov (1962, p. 254; 255; 269 e 270), que quando ocorre o contraventamento em seções de paredes finas unicamente por lintéis horizontais, despreza-se o deslocamento axial nos mencionados lintéis. Assim, o balanço de forças horizontais nos Painéis – Parede (1); (2) e (3) conduz apenas a lei de variação do esforço cortante.

Pensando de forma análoga, nos Painéis – Parede (4) e (5) verifica-se que as equações (3.92 a) e (3.92 d) implicam unicamente na descrição da lei de variação dos esforços cortantes  $\mathcal{V}_4$  e  $\mathcal{V}_5$  diferente da função constante constante. Assim exprime-se:

$$\frac{d\mathcal{V}_4}{dx} = -\bar{N}_i \quad \therefore \quad \mathcal{V}_4(x) = - \int \bar{N}_i dx \quad (eq. 3.94 a)$$

$$\frac{d\mathcal{V}_5}{dx} = -\bar{N}_f \quad \therefore \quad \mathcal{V}_5(x) = - \int \bar{N}_f dx \quad (eq. 3.94 b)$$

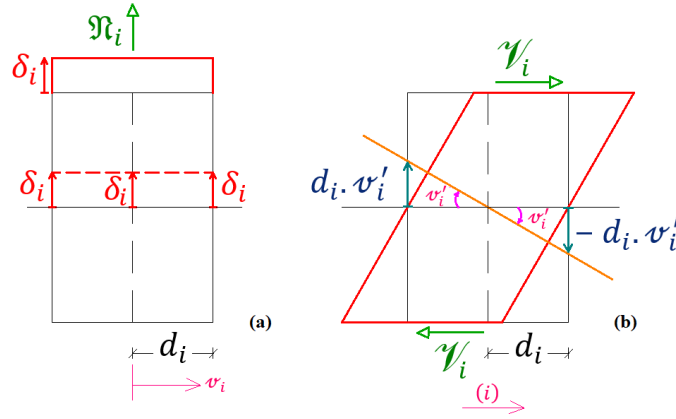
onde as eq.'s (5.94) apenas descrevem a distribuição do esforço cortante nos Painéis – Parede (4) e (5).

## b.2) Compatibilização dos deslocamentos nas interseções

Como foi adotada a *Teoria das Pequenas Deformações* (TPD), procede-se então a compatibilização dos deslocamentos verticais nas interseções, numeradas de 1 a 4. E para tal,

utiliza-se do efeito de cisalhamento  $\mathcal{V}_i$  e de esforço normal  $\mathfrak{N}_i$  nos respectivos *Painéis* – *Parede*. Desta forma, na Figura 3.39 é apresentada a convenção positiva dos deslocamentos verticais nas extremidades dos *i*-ésimo *Painel* – *Parede*.

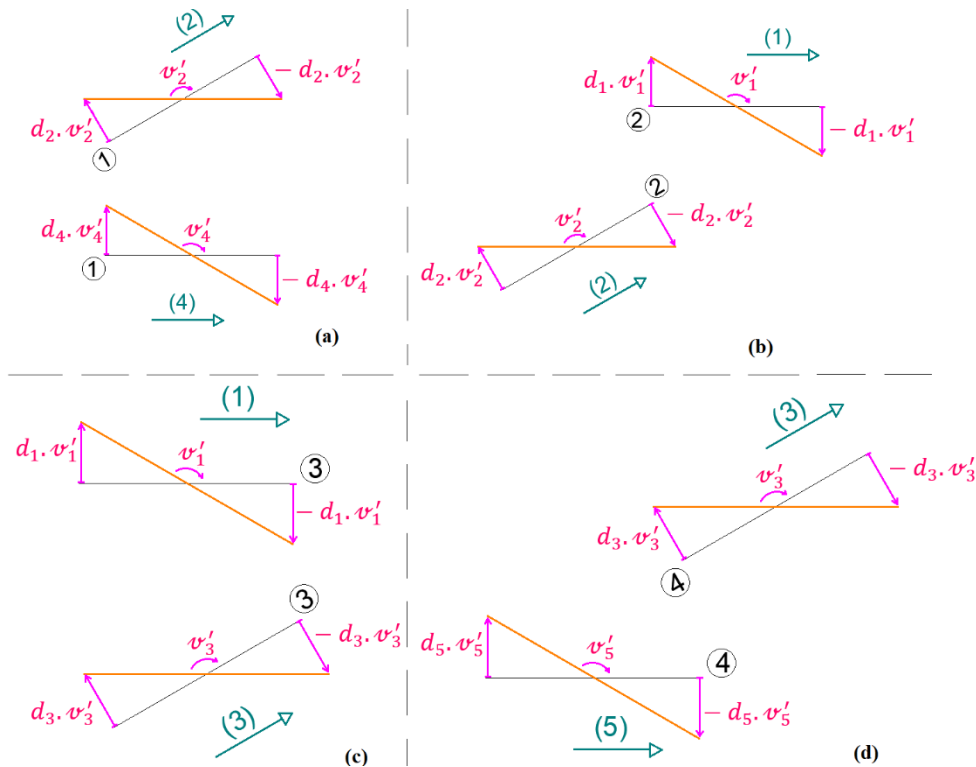
**Figura 3.39 – Convenção positiva dos deslocamentos devido: (a) esforço normal e (b) cisalhamento**



Fonte: O Autor (2025)

Apresenta-se agora na Figura 3.40 a mobilização dos extremos dos *Painéis* – *Parede* ao serem impostas as rotações  $\mathbf{v}'_i$ .

**Figura 3.40 – Deslocamentos por corte na interseção: (a) 1, (b) 2, (c) 3 e (d) 4**



Fonte: O Autor (2025)

Procede-se agora a compatibilização dos deslocamentos de corpo rígido, ver Figura 3.39 (a), com os deslocamentos apresentados na Figura 3.40, de acordo com as interseções, escrevendo-se:

- Na Interseção 1:  $\delta_2 + d_2 \cdot v'_2 = \delta_4 + d_4 \cdot v'_4$  (eq. 3.95 a)
- Na Interseção 2:  $\delta_2 - d_2 \cdot v'_2 = \delta_1 + d_1 \cdot v'_1$  (eq. 3.95 b)
- Na Interseção 3:  $\delta_1 - d_1 \cdot v'_1 = \delta_3 - d_3 \cdot v'_3$  (eq. 3.95 c)
- Na Interseção 4:  $\delta_5 - d_5 \cdot v'_5 = \delta_3 + d_3 \cdot v'_3$  (eq. 3.95 d)

Derivando-se a equação (3.95 a) duas vezes e impondo-lhe as equações (3.93 a) e (3.93 c), além de isolar no primeiro membro da equação os termos dos fluxos de cisalhamento  $q_i$ , exprime-se:

$$q_1 \cdot (A_2 + A_4) - q_2 \cdot A_4 = -A_2 \cdot \bar{V}_i - E \cdot d_2 \cdot A_2 \cdot A_4 \cdot v_2''' + E \cdot d_4 \cdot A_2 \cdot A_4 \cdot v_4''' - p_2 \cdot A_4 + p_4 \cdot A_2 \quad (eq. 3.96 a)$$

Procedendo de forma análoga nas equações (3.95 b) a (3.95 d), exprime-se as demais equações de compatibilidade de tensões cisalhantes, como:

$$-q_1 \cdot A_1 + q_2 \cdot (A_1 + A_2) - q_3 \cdot A_2 = -E \cdot d_1 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot v_1''' - E \cdot d_2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot v_2''' - p_1 \cdot A_2 + p_2 \cdot A_1 \quad (eq. 3.96 b)$$

$$-q_2 \cdot A_3 + q_3 \cdot (A_1 + A_3) - q_4 \cdot A_1 = -E \cdot d_1 \cdot A_1 \cdot A_3 \cdot v_1''' + E \cdot d_3 \cdot A_1 \cdot A_3 \cdot v_3''' + p_1 \cdot A_3 - p_3 \cdot A_1 \quad (eq. 3.96 c)$$

$$q_4 \cdot (A_3 + A_5) + q_3 \cdot A_5 = -A_3 \cdot \bar{V}_f - E \cdot d_3 \cdot A_3 \cdot A_5 \cdot v_3''' - E \cdot d_5 \cdot A_3 \cdot A_5 \cdot v_5''' - p_3 \cdot A_5 + p_5 \cdot A_3 \quad (eq. 3.96 d)$$

E matricialmente agrupam-se as equações (3.96), como:

$$[M_1] \cdot \{q\} = \{M_2\} + [M_4] \cdot \{v_\omega'''\} + [M_{10}] \cdot \{p\} \quad (eq. 3.97)$$

$$\text{sendo: } [M_1] = \begin{bmatrix} (A_2 + A_4) & -A_4 & 0 & 0 \\ -A_1 & (A_1 + A_2) & -A_2 & 0 \\ 0 & -A_3 & (A_1 + A_3) & A_1 \\ 0 & 0 & A_5 & (A_3 + A_5) \end{bmatrix}; \quad \{M_2\} = \begin{Bmatrix} -A_2 \cdot \bar{V}_i \\ 0 \\ 0 \\ -A_3 \cdot \bar{V}_f \end{Bmatrix};$$

$$[M_4] = E \cdot \begin{bmatrix} 0 & -d_2 \cdot A_2 \cdot A_4 & 0 & d_4 \cdot A_2 \cdot A_4 \\ -d_1 \cdot A_1 \cdot A_2 & -d_2 \cdot A_1 \cdot A_2 & 0 & 0 \\ -d_1 \cdot A_1 \cdot A_3 & 0 & d_3 \cdot A_1 \cdot A_3 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 \cdot A_3 \cdot A_5 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[M_{10}] = \begin{bmatrix} 0 & -A_4 & 0 & A_2 & 0 \\ -A_2 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & -A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_5 & 0 & A_3 \end{bmatrix};$$

$$\{p\}^T = \{p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5\};$$

$$\{q\}^T = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\};$$

$$\{v_\omega'''\}^T = \{v_1''' \quad v_2''' \quad v_3''' \quad v_4''' \quad v_5'''\}.$$

### b.2.1) Considerando as reações elásticas dos lintéis

Reescrevendo-se os termos do vetor  $\{\mathbf{M}_2\}$  apresentado na equação (3.97), mediante imposição das equações (3.12 b) e (3.12 e), para impor a formulação da TMC para as reações elásticas  $\bar{\mathbf{V}}_i$  e  $\bar{\mathbf{V}}_f$ , respectivamente, além de aplicar também os graus de liberdade via as eq.'s (3.11 a) a (3.11 f). Exprime-se o vetor  $\{\mathbf{M}_2\}$  em formato matricial, dependente unicamente do vetor de rotações e empenamento  $\{\mathbf{v}'\}$  no SGC, como:

$$\{\mathbf{M}_2\} = [\mathbf{M}_2] \cdot \{\mathbf{v}'\} \quad (eq. 3.98)$$

$$\text{onde: } [\mathbf{M}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_2^* \end{bmatrix}; \quad \{\mathbf{v}'\} = \begin{Bmatrix} \omega' \\ \phi' \end{Bmatrix}.$$

procedendo-se:

$$\begin{aligned} -A_2 \cdot \bar{\mathbf{V}}_i &= \frac{-A_2}{h} \cdot [r^{*inc} \cdot u_i + t \cdot v_i - b_i^{***} \cdot \theta_i - r^{*inc} \cdot u_f - t \cdot v_f - b_f^{***} \cdot \theta_f] \\ &= \frac{-A_2}{h} \cdot \left[ r^{*inc} \cdot (-\omega_i \cdot \phi') + t \cdot (\omega_i \cdot \phi') - b_i^{***} \cdot \left( \frac{\omega_i}{d_i} \cdot \phi' \right) - r^{*inc} \cdot (-\omega_f \cdot \phi') - t \cdot (\omega_f \cdot \phi') \right. \\ &\quad \left. - b_f^{***} \cdot \left( \frac{\omega_f}{d_f} \cdot \phi' \right) \right] = d_1^* \cdot \phi' \\ -A_3 \cdot \bar{\mathbf{V}}_f &= \frac{-A_3}{h} \cdot [-r^{*inc} \cdot u_i - t \cdot v_i + b_i^{***} \cdot \theta_i + r^{*inc} \cdot u_f + t \cdot v_f + b_f^{***} \cdot \theta_f] \\ &= \frac{-A_3}{h} \cdot \left[ -r^{*inc} \cdot (-\omega_i \cdot \phi') - t \cdot (\omega_i \cdot \phi') + b_i^{***} \cdot \left( \frac{\omega_i}{d_i} \cdot \phi' \right) + r^{*inc} \cdot (-\omega_f \cdot \phi') + t \cdot (\omega_f \cdot \phi') \right. \\ &\quad \left. + b_f^{***} \cdot \left( \frac{\omega_f}{d_f} \cdot \phi' \right) \right] = d_2^* \cdot \phi' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{concluindo-se, por fim: } d_1^* &= -\frac{A_2}{h} \cdot \left\{ \left( -r^{*inc} + t - \frac{b_i^{***}}{d_i} \right) \cdot \omega_i + \left( r^{*inc} - t - \frac{b_f^{***}}{d_f} \right) \cdot \omega_f \right\}; \\ d_2^* &= -\frac{A_3}{h} \cdot \left\{ \left( r^{*inc} - t + \frac{b_i^{***}}{d_i} \right) \cdot \omega_i + \left( -r^{*inc} + t + \frac{b_f^{***}}{d_f} \right) \cdot \omega_f \right\}. \end{aligned}$$

E por último, aplicando a equação (3.98) na equação (3.97) e isolando o vetor de fluxo de cisalhamento  $\{\mathbf{q}\}$  nas interseções, exprime-se a equação matricial de compatibilidade de deslocamentos verticais nas interseções, como:

$$\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{M}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_2] \cdot \{\mathbf{v}'\} + [\mathbf{M}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_4] \cdot \{\mathbf{v}_\omega'''\} + [\mathbf{M}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_{10}] \cdot \{\mathbf{p}\} \quad (eq. 3.99)$$

### b.3) Equilíbrio de esforços cortantes

O equilíbrio de esforços cortantes é processado mediante igualdade dos esforços internos e externos. Quanto a consideração dos esforços cortantes internos, parte-se do balanço de momentos nos painéis com a devida imposição da Teoria de Euler-Bernoulli para linha

elástica. E por fim, os esforços cortantes externos são obtidos mediante equilíbrio da seção genérica  $\mathbf{S}$  localizada a uma distância  $x$  da base do pilar.

### b.3.1) Esforços cortantes internos no SLC

Partindo das equações (3.91 a); (3.91 c); (3.91 e); (3.93 c) e (3.93 d), escreve-se a lei de equilíbrio em esforços cortantes, no formato matricial, referenciada no *Sistema Local de Coordenadas* (SLC) como:

$$\{\mathcal{V}_\omega\} = [M_5] \cdot \{\mathcal{V}_\omega'''\} + \{M_6\} + [M_8] \cdot \{q\} \quad (eq. 3.100)$$

$$\text{e: } [M_5] = \begin{bmatrix} -J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_5 \end{bmatrix}; [M_8] = \begin{bmatrix} 0 & d_1 & d_1 & 0 \\ d_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 & d_3 \\ -d_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 \end{bmatrix}; \{M_6\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{M}_i \\ -\bar{M}_f \end{Bmatrix};$$

$$\{\mathcal{V}_\omega\}^T = \{\mathcal{V}_1 \quad \mathcal{V}_2 \quad \mathcal{V}_3 \quad \mathcal{V}_4 \quad \mathcal{V}_5\}.$$

### b.3.2) Considerando as reações elásticas no cortante interno

Nos termos do vetor  $\{\mathbf{M}_6\}$  apresentado na equação (3.100) procede-se a imposição das reações elásticas, presentes nas eq.'s (3.12 c) e (3.12 f). Além de aplicar os graus de liberdade expressos sob a Teoria da Flexo – Torção, ver equações (3.11 a) a (3.11 f). Reescreve-se o vetor  $\{\mathbf{M}_6\}$  em função do vetor rotações e empenamento  $\{\mathcal{V}'\}$ , como:

$$\{M_6\} = [M_6] \cdot \{\mathcal{V}'\} \quad (eq. 3.101)$$

$$\text{onde: } [M_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^* \\ 0 & 0 & d_4^* \end{bmatrix}; \quad \{\mathcal{V}'\} = \begin{Bmatrix} \mathcal{V}' \\ \omega' \\ \phi' \end{Bmatrix}.$$

procedendo-se agora:

$$\begin{aligned} -\bar{M}_i &= \frac{-1}{h} \cdot [b_i^{**} \cdot u_i - b_i^{***} \cdot \mathcal{V}_i + k_i^* \cdot \theta_i - b_i^{**} \cdot u_f + b_i^{***} \cdot \mathcal{V}_f + a^* \cdot \theta_f] \\ &= \frac{-1}{h} \cdot \left[ b_i^{**} \cdot (-\omega_i \cdot \phi') - b_i^{***} \cdot (\omega_i \cdot \phi') + k_i^* \cdot \left( \frac{\omega_i}{d_i} \cdot \phi' \right) - b_i^{**} \cdot (-\omega_f \cdot \phi') + b_i^{***} \cdot (\omega_f \cdot \phi') \right. \\ &\quad \left. + a^* \cdot \left( \frac{\omega_f}{d_f} \cdot \phi' \right) \right] = d_3^* \cdot \phi' \\ -\bar{M}_f &= \frac{-1}{h} \cdot [-b_f^{**} \cdot u_i - b_f^{***} \cdot \mathcal{V}_i + a^* \cdot \theta_i + b_f^{**} \cdot u_f + b_f^{***} \cdot \mathcal{V}_f + k_f^* \cdot \theta_f] \\ &= \frac{-1}{h} \cdot \left[ -b_f^{**} \cdot (-\omega_i \cdot \phi') - b_f^{***} \cdot (\omega_i \cdot \phi') + a^* \cdot \left( \frac{\omega_i}{d_i} \cdot \phi' \right) + b_f^{**} \cdot (-\omega_f \cdot \phi') \right. \end{aligned}$$

$$+ b_f^{***} \cdot (\omega_f \cdot \phi') + k_f^* \cdot \left( \frac{\omega_f}{d_f} \cdot \phi' \right) \Big] = d_4^* \cdot \phi'$$

concluindo-se, então:  $d_3^* = -\frac{1}{h} \cdot \left\{ (-b_i^{**} - b_i^{***} + \frac{k_i^*}{d_i}) \cdot \omega_i + \left( b_i^{**} + b_f^{***} + \frac{a^*}{d_f} \right) \cdot \omega_f \right\};$

$$d_4^* = -\frac{1}{h} \cdot \left\{ (b_f^{**} - b_f^{***} + \frac{a^*}{d_i}) \cdot \omega_i + \left( -b_f^{**} + b_f^{***} + \frac{k_f^*}{d_f} \right) \cdot \omega_f \right\}.$$

Por último, aplica-se a equação (3.101) na equação (3.100) e exprime-se:

$$\{\gamma_\omega\} = [M_5] \cdot \{\nu_\omega'''\} + [M_6] \cdot \{\nu'\} + [M_8] \cdot \{q\} \quad (eq. 3.102)$$

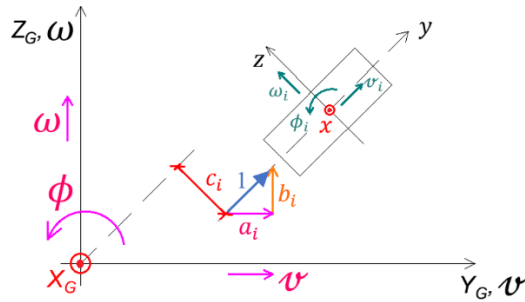
### b.3.3) Esforços cortantes no SGC

Os esforços cortantes internos estão referenciados no SLC, conforme observa-se na eq. (3.102), porém faz-se necessário seu translação para o *Sistema Global de Coordenadas* (SGC). Desta forma, inicialmente explicita-se o processo formal de mudanças de sistemas coordenados, para em seguida reescrever a lei de equilíbrio de esforços cortantes no novo sistema coordenado.

➤ **1ª Etapa:** Transformação do SLC para o SGC

Na Figura 3.41 é apresentado graficamente os princípios para a transformação do *Sistema Local de Coordenadas* (SLC), do i-ésimo Painel – Parede, para o *Sistema Global de Coordenadas* (SGC). Baseando-se em Stamato (1966) e Barbosa (1978, p. II – 58).

**Figura 3.41 – Representação gráfica da correlação entre o SLC e o SGC**



Fonte: O Autor (2025)

Escrevendo-se o deslocamento local  $\nu_i$  em termos dos deslocamentos globais  $\nu$ ;  $\omega$  e  $\phi$ , como:

$$\nu_1 = a_1 \cdot \nu + b_1 \cdot \omega + c_1 \cdot \phi \quad (eq. 3.103 a)$$

$$\nu_2 = a_2 \cdot \nu + b_2 \cdot \omega + c_2 \cdot \phi \quad (eq. 3.103 b)$$

$$\nu_3 = a_3 \cdot \nu + b_3 \cdot \omega + c_3 \cdot \phi \quad (eq. 3.103 c)$$

$$\nu_4 = a_4 \cdot \nu + b_4 \cdot \omega + c_4 \cdot \phi \quad (eq. 3.103 d)$$

$$\nu_5 = a_5 \cdot \nu + b_5 \cdot \omega + c_5 \cdot \phi \quad (eq. 3.103 e)$$

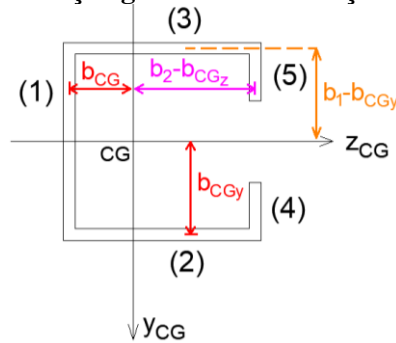
o que matricialmente fica expresso como:

$$\{\nu_\omega\} = [M_9] \cdot \{\nu\} \quad (eq. 3.104)$$

$$\text{com: } [M_9] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & -b_{CGz} \\ 0 & -1 & b_{CGy} \\ 0 & -1 & -(b_1 - b_{CGy}) \\ -1 & 0 & (b_2 - b_{CGz}) \\ -1 & 0 & (b_3 - b_{CGz}) \end{bmatrix}; \quad \{\nu_\omega\} = \begin{Bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \\ \nu_5 \end{Bmatrix}; \quad \{\nu\} = \begin{Bmatrix} \omega \\ \phi \end{Bmatrix}.$$

sendo apresentado na Figura 3.42 as cotas para compor a matriz de rotação  $[M_9]$ .

**Figura 3.42 – Representação gráfica da correlação entre o SLC e o SGC**



Fonte: O Autor (2025)

➤ **2ª Etapa:** Escrever o vetor  $\{\nu_\omega\}$  no *Sistema Global de Coordenadas*

Inicialmente aplicando-se a equação (3.99) na eq. (3.102), exprime-se o equilíbrio de esforços cortantes em termos apenas dos deslocamentos dos Painéis – Parede e do peso-próprio da estrutura, como:

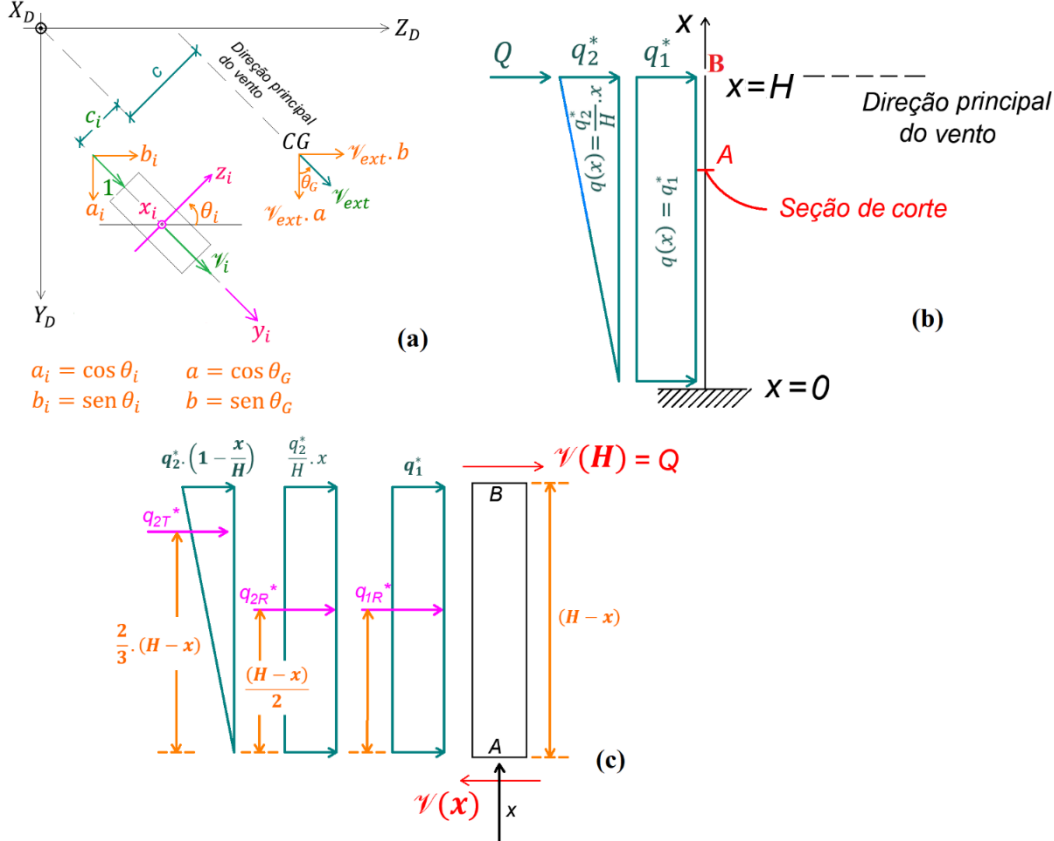
$$\{\nu_\omega\} = ([M_5] + [M_8] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot \{\nu_\omega'''\} + ([M_6] + [M_8] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_2]) \cdot \{\nu'\} + [M_8] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\} \quad (eq. 3.105)$$

Em seguida, impõe-se a transformação de sistema coordenado, apresentada na eq. (3.104), na equação (3.105), reescrevendo-se:

$$\{\nu_\omega\} = ([M_5] + [M_8] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot [M_9] \cdot \{\nu_\omega'''\} + ([M_6] + [M_8] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_2]) \cdot \{\nu'\} + [M_8] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\} \quad (eq. 3.106)$$

### b.3.4) Esforço cortante externo gerado pela ação do vento

Na Figura 3.43 é apresentado o equacionamento do esforço cortante externo  $\nu_{ext}$  em relação ao i-ésimo Painel – Parede, bem como sua correlação com os carregamentos  $q_1^*$ ;  $q_2^*$  e  $Q$  na direção principal.

**Figura 3.43 – Ação do vento: (a) direção principal, (b) carregamentos e (c) equilíbrio do corte**

Fonte: Adaptado de (Melo et al., 2021) e de (Fonseca e Melo, 2024)

Em primeira análise determina-se o  $\mathcal{V}_{ext}$  através do equilíbrio de forças horizontais no trecho AB apresentado na figura 6 (c), assim exprime-se:

$$\mathcal{V}_{ext} = \mathcal{V}(x) = D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3 \quad (eq. 3.107)$$

Em segunda análise, procede-se o equilíbrio de esforços cortantes externos com o cortante  $\mathcal{V}_i$ , através da Figura 3.43 (a), de qual escrevem-se:

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i \cdot a_i = \mathcal{V}_{ext} \cdot a \quad (eq. 3.108 a)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i \cdot b_i = \mathcal{V}_{ext} \cdot b \quad (eq. 3.108 b)$$

$$G \cdot \left( \sum_{i=1}^n I_{t_i} \right) \cdot \phi' + \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i \cdot c_i = \mathcal{V}_{ext} \cdot c \quad (eq. 3.108 c)$$

Por fim, aplicando as equações (3.108) na geometria do núcleo estrutural apresentado na Figura 3.42, conclui-se o seguinte:

$$\mathcal{V}_{ext} \cdot a = \mathcal{V}_1 \cdot a_1 + \mathcal{V}_2 \cdot a_2 + \mathcal{V}_3 \cdot a_3 + \mathcal{V}_4 \cdot a_4 + \mathcal{V}_5 \cdot a_5$$

$$\gamma_{ext}.b = \gamma_1.b_1 + \gamma_2.b_2 + \gamma_3.b_3 + \gamma_4.b_4 + \gamma_5.b_5$$

$$\gamma_{ext}.c = \gamma_1.c_1 + \gamma_2.c_2 + \gamma_3.c_3 + \gamma_4.c_4 + \gamma_5.c_5 + G.\left(\sum_{i=1}^n I_{t_i}\right).\phi'$$

matricialmente, tem-se:

$$\gamma_{ext}.\{A^*\} = [M_9]^T.\{\gamma_\omega\} + [M_{11}].\{\nu'\} \quad (eq. 3.109)$$

$$\text{sendo: } [M_{11}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G.(\sum_{i=1}^n I_{t_i}) \end{bmatrix}; \quad \{A^*\} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \cos \theta_G \\ \sin \theta_G \\ e_z \end{Bmatrix}; \quad I_{t_i} = \frac{2.d_i.t^3}{3}$$

$e_z$  – distância entre o Centro de Gravidade (CG) e o Centro de Carga (CC);

$d_i$  – é o comprimento da seção transversal do i-ésimo Painel – Parede;

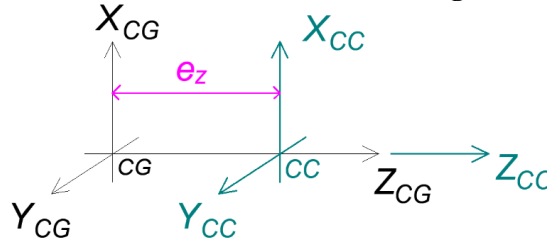
$t$  – é a espessura da seção transversal do i-ésimo Painel – Parede;

$G.I_{t_i}$  – é a rigidez à torção do i-ésimo Painel – Parede;

$$e_z = \frac{b_2}{2} - b_{CGz}$$

apresentando-se na Figura 3.44 o translate do Centro de Carga para o Centro de Gravidade.

**Figura 3.44 – Braço de alavanca entre o Centro de Carga e o Centro de Gravidade**



Fonte: O Autor (2025)

#### b.4) Equação diferencial da análise estática

Por fim, aplicando-se a equação (3.106) na equação (3.109) conclui-se o processo de dedução do funcionamento da solicitação estática nos Painéis – Parede. Mediante o procedimento em Melo (2019), conclui-se como sistema de equações diferenciais, que representa a solicitação estática dos pilares em núcleo C contraventados em Z, e referenciado no Centro de Gravidade, o seguinte:

$$-[J]_{3 \times 3}.\{\nu'''_{CG}(x)\} + [S]_{3 \times 3}.\{\nu'_{CG}(x)\} = \{\gamma_{f_{CG}}(x)\}_{3 \times 1} \quad (eq. 3.110)$$

sendo:  $[J] = -[M_9]^T \cdot ([M_5] + [M_8] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot [M_9]$ ;

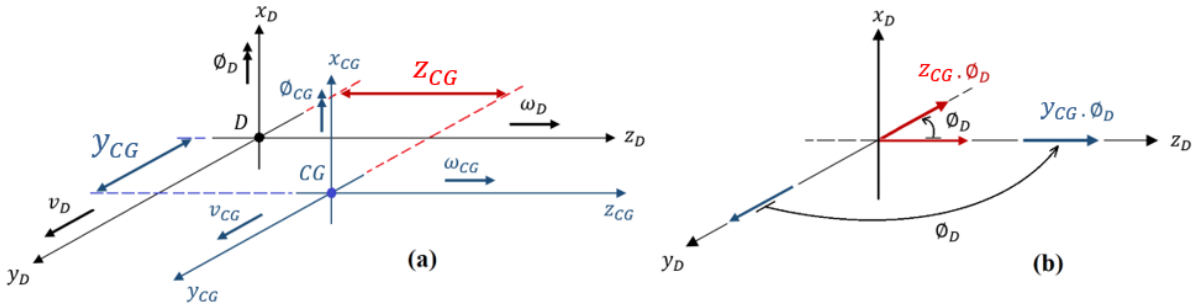
$[S] = [M_9]^T \cdot ([M_6] + [M_8] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_2]) + [M_{11}]$ ;

$\{\mathcal{V}_f\} = \mathcal{V}_{ext} \cdot \{A^*\} - [M_9]^T \cdot [M_8] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\}$ .

### b.5) Transformação do referencial para o Centro de Torção

Na Figura 3.45 é apresentado o processo de translação dos graus de liberdade, do CG para D, do pilar de paredes finas.

**Figura 3.45 – Representação gráfica da transformação de coordenadas dos graus de liberdade do CG para D: (a) translações e (b) rotação**



Fonte: (Melo, 2019)

e a partir das correlações explicitadas na Figura 3.45, escrevem-se:

$$\{\mathcal{V}_{CG}\} = [T] \cdot \{\mathcal{V}_D\} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} \mathcal{V}_{CG} \\ \omega_{CG} \\ \phi_{CG} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_{CG} \\ 0 & 1 & y_{CG} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathcal{V}_D \\ \omega_D \\ \phi_D \end{Bmatrix} \quad (eq. 3.111)$$

com:  $y_{CG}$  e  $z_{CG}$  sendo as coordenadas do Centro de Gravidade do *Núcleo Estrutural*.

Por fim, aplicando-se na equação (3.110) a transformação exposta na eq. (3.111), exprime-se a equação diferencial dinâmica da TPP solicitada estaticamente, referenciada no Centro de Torção, como:

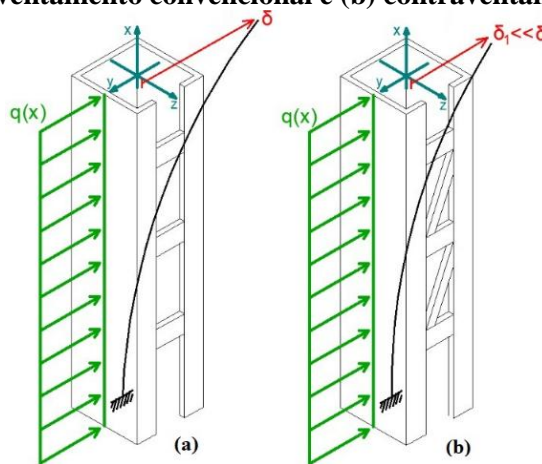
$$-[\bar{J}] \cdot \{\mathcal{V}_D''''(x, t)\} + [\bar{S}] \cdot \{\mathcal{V}_D''(x, t)\} = \{\bar{V}_f'(x, t)\} \quad (eq. 3.112)$$

onde:  $[\bar{J}] = [T]^T \cdot [J] \cdot [T]$ ;  $[\bar{S}] = [T]^T \cdot [S] \cdot [T]$ ;  $\{\bar{V}_f'\} = [T]^T \cdot \{V_f'\}$ .

## c) Análise dinâmica

Partindo da Teoria dos Painéis – Parede (TPP), bem como adotando-se os procedimentos de análise estrutural preconizados em Laredo (1969, p. 309 – 312); Laredo (1973, p. 112); Barbosa (1978, p. II-60 a II-64); e Melo (2019, p. 93 – 98), postula-se o elemento de contraventamento por lintéis em Z. E na Figura 3.46 é apresentada a minoração dos deslocamentos ao impor o contraventamento em Z, cujas diagonais reduzem em muito os deslocamentos laterais do já mencionado núcleo estrutural.

**Figura 3.46 – Exposição qualitativa da minoração dos deslocamentos laterais em núcleos C para: (a) contraventamento convencional e (b) contraventamento em Z**



Fonte: (Melo et al., 2021)

Obtendo-se para tal, o sistema de equações diferenciais que representa a solicitação estática dos pilares em núcleo C contraventados em Z, com base nas postulações em Melo (2019) e em Melo e Barbosa (2020). Nesta formulação, referencia-se a equação diferencial no Centro de Gravidade, como:

$$-[J]_{3 \times 3} \cdot \{v'''_{CG}(x)\} + [S]_{3 \times 3} \cdot \{v'_{CG}(x)\} = \{\psi_{fCG}(x)\}_{3 \times 1} \quad (eq. 3.113)$$

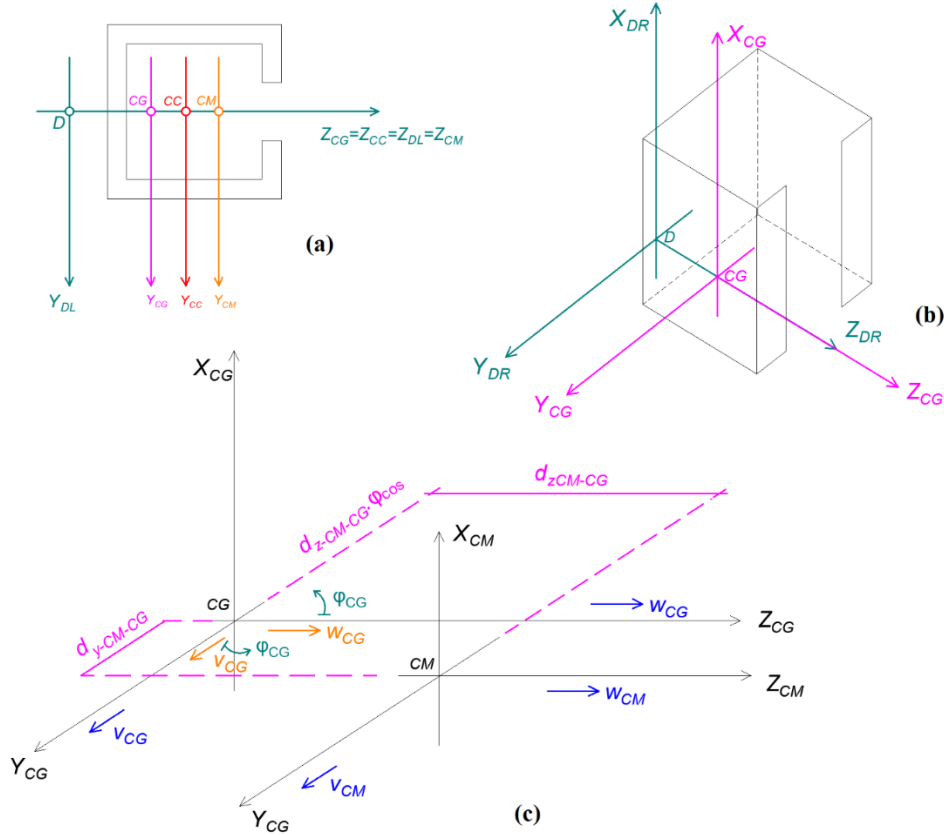
sendo:  $[J] = -[M_9]^T \cdot ([M_5] + [M_8] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot [M_9]$ ;

$$[S] = [M_9]^T \cdot ([M_6] + [M_8] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_2]) + [M_{11}]$$

$$\{\psi_f\} = \psi_{ext} \cdot \{A^*\} - [M_9]^T \cdot [M_8] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\}.$$

A primeira constatação que se deve proceder na análise dinâmica de *Núcleos Estruturais*, de concreto armado, é o fato da equação diferencial da parcela estática está referenciada no Centro de Gravidade (CG). Enquanto que a parcela dinâmica referencia-se, a princípio, no Centro de Massa (CM). Assim, na Figura 3.47 é ilustrado o posicionamento dos centros geométricos: de Carga (CC); de Torção (D) e de Massa (CM) para o núcleo em comento.

**Figura 3.47 – Núcleo estrutural: (a) eixos na seção transversal, (b) eixos no Centro de Torção e no Centro de Gravidade, (c) Transformação dos eixos coordenados do CM para o CG**



Fonte: O Autor (2025)

A partir da Figura 3.47 (c) estabelece a *Lei de Transformação dos eixos coordenados*, do CM para o CG, como:

$$v_{CM} = v_{CG} - d_{zCM-CG} \cdot \phi_{CG} \quad (eq. 3.114 a)$$

$$\omega_{CM} = \omega_{CG} + d_{yCM-CG} \cdot \phi_{CG} \quad (eq. 3.114 b)$$

$$\phi_{CM} = \phi_{CG} \quad (eq. 3.114 c)$$

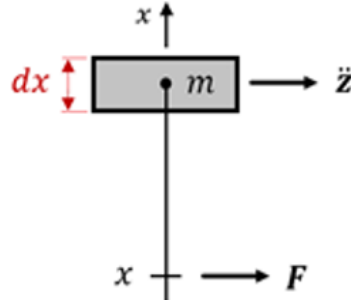
o que matricialmente fica expresso por:

$$\{v_{CM}\} = [\bar{T}_M] \cdot \{v_{CG}\} \quad (eq. 3.115 a)$$

$$\begin{Bmatrix} v_{CM} \\ \omega_{CM} \\ \phi_{CM} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_{zCM-CG} \\ 0 & 1 & d_{yCM-CG} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_{CG} \\ \omega_{CG} \\ \phi_{CG} \end{Bmatrix} \quad (eq. 3.115 b)$$

### c.1) Parcela dinâmica no Centro de Massa

Na Figura 3.48 é apresentado o esquema de consideração da força  $F$  ativada mediante aceleração  $\ddot{z}$  da massa  $m$ .

Figura 3.48 – Força  $F$  ativada pela aceleração  $\ddot{z}$  na massa  $m$ 

Fonte: (Melo, 2019)

sendo:  $F = \int_x^H (m \cdot \ddot{z}) dx$ ; e  $dF = m \cdot \ddot{z}$ , ficando expressa para a estrutura tridimensional, como:

$$\{dF_{CM}\} = [M] \cdot \{\ddot{v}_{CM}\} \quad (eq. 3.116 a)$$

$$\begin{Bmatrix} dF_y \\ dF_z \\ dM_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{v}_{CM} \\ \ddot{\omega}_{CM} \\ \ddot{\phi}_{CM} \end{Bmatrix} \quad (eq. 3.116 b)$$

### c.2) Parcela dinâmica no Centro de Gravidade

Aplicando a *Lei de Transformação* dos graus de liberdade do CM para o CG, exprime-se a equação (3.116 a) mediante imposição da eq. (3.115 a), como:

$$\{dF_{CM}\} = [M] \cdot [\bar{T}_M] \cdot \{\ddot{v}_{CG}\} \quad (eq. 3.117)$$

o que transformando o vetor de forças, tem-se:

$$\begin{aligned} [\bar{T}_M]^T \cdot \{dF_{CM}\} &= [\bar{T}_M]^T \cdot [M] \cdot [\bar{T}_M] \cdot \{\ddot{v}_{CG}\} \\ \therefore \quad \{dF_{CG}\} &= [\bar{M}] \cdot \{\ddot{v}_{CG}\} \end{aligned} \quad (eq. 3.118)$$

sendo:  $\{dF_{CG}\} = [\bar{T}_M]^T \cdot \{dF_{CM}\}$ ;  $[\bar{M}] = [\bar{T}_M]^T \cdot [M] \cdot [\bar{T}_M]$ .

### c.3) Equação diferencial da análise dinâmica no Centro de Gravidade

Observa-se inicialmente que a equação (3.113) exprime a análise estática dos Painéis – Parede, isso referenciado no Centro de Gravidade. Desta forma, para compor a equação diferencial da análise dinâmica basta derivar a equação (3.113) e somar o vetor de forças  $\{dF_{CG}\}$  no primeiro membro da equação. Resultando em:

$$-[J] \cdot \{v_{CG}''''(x, t)\} + [S] \cdot \{v_{CG}''(x, t)\} + [\bar{M}] \cdot \{\ddot{v}_{CG}(x, t)\} = \{V'_{f_{CG}}(x, t)\} \quad (eq. 3.119)$$

sendo:  $\{V'_{f_{CG}}(x, t)\} = V'_{ext}(x) \cdot \{A^*\} \cdot V_{ext}(t)$ ;

$$V_{ext}(x) = 2 \cdot D_1 \cdot x + D_2;$$

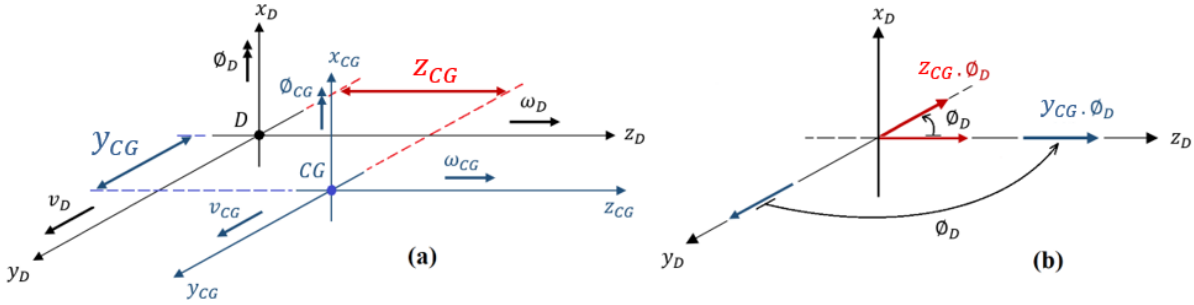
$$V_{ext}(t) = \text{sen}(\bar{\omega} \cdot t);$$

$\bar{\omega}$  – é a frequência da carga atuante, em “rad/s”.

#### c.4) Equação diferencial da análise dinâmica no Centro de Torção

Na Figura 3.49 é apresentado o processo de translação dos graus de liberdade, do CG para D, do pilar de paredes finas.

**Figura 3.49 – Representação gráfica da transformação de coordenadas dos graus de liberdade do CG para D: (a) translações e (b) rotação**



Fonte: (Melo, 2019)

e a partir das correlações explicitadas na Figura 3.49, escrevem-se:

$$\{\nu_{CG}\} = [T] \cdot \{\nu_D\} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} \nu_{CG} \\ \omega_{CG} \\ \phi_{CG} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_{CG} \\ 0 & 1 & y_{CG} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \nu_D \\ \omega_D \\ \phi_D \end{Bmatrix} \quad (eq. 3.120)$$

com:  $y_{CG}$  e  $z_{CG}$  sendo as coordenadas do Centro de Gravidade do *Núcleo Estrutural*.

Por fim, aplicando-se na equação (3.119) a transformação exposta na eq. (3.120), exprime-se a equação diferencial dinâmica da TPP, referenciada no Centro de Torção, como:

$$-[\bar{J}] \cdot \{\nu_D''''(x, t)\} + [\bar{S}] \cdot \{\nu_D''(x, t)\} + [\bar{M}] \cdot \{\ddot{\nu}_D(x, t)\} = \{\bar{V}_f'(x, t)\} \quad (eq. 3.121)$$

onde:  $[\bar{J}] = [T]^T \cdot [J] \cdot [T]$ ;  $[\bar{S}] = [T]^T \cdot [S] \cdot [T]$ ;  $[\bar{M}] = [T]^T \cdot [\bar{M}] \cdot [T]$ ;  $\{\bar{V}_f'\} = [T]^T \cdot \{V_f'\}$ .

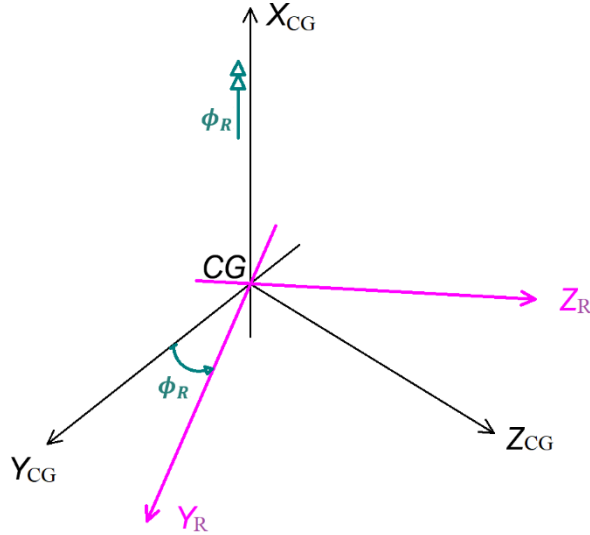
#### c.5) Desacoplamento do sistema dinâmico

Através do procedimento exposto neste guia de pesquisa, as três transformações de referencial, além de seguir os conceitos preconizados em Stamato (1966, p. 6); Quarteroni et al. (2007) quanto ao *Método de diagonalização postulado por Jacobi*; e em Melo e Barbosa (2020), postula-se na Fig. 3.51 o fluxograma de desacoplamento do sistema da eq. (3.121).

- **1ª Transformação de Referencial:** Nesta primeira transformação almeja-se da EDO expressa na eq. (3.121) para um sistema principal de rigidez do núcleo. Onde a matriz a a matriz de rigidez  $[J]$  é diagonal. Desta forma, na Figura 3.50

é apresentado o processo de transformação das coordenadas iniciais para o sistema referenciado da equação (3.122), constatando-se eixos principais de rigidez.

**Figura 3.50 – Representação gráfica da transformação de coordenadas para o referencial principal de rigidez**



Fonte: O Autor (2025)

Esta transformação ocorre mediante a matriz de rotação  $[R_e]$ , partindo do referencial inicial  $\{v\}$  no CG da seção transversal, e seguindo em direção ao referencial  $\{x\}$  onde matriz de rigidez  $[J]$  do núcleo estrutural é diagonalizada. Neste caso, impõe-se a *Lei de Transformação*:  $\{v\} = [R_e] \cdot \{x\}$  na equação (3.122), de qual reescreve-se:

$$-[\bar{J}] \cdot [R_e] \cdot \{x''''\} + [\bar{S}] \cdot [R_e] \cdot \{x''\} + [\bar{M}] \cdot [R_e] \cdot \{\ddot{x}\} = \{\bar{V}_f'\} \quad (eq. 3.122)$$

do que mediante conceitos de *Resistência dos Materiais*, postulam-se:

$$[R_e] = \begin{bmatrix} \cos(\phi_R) & -\sin(\phi_R) & z_R \\ \sin(\phi_R) & \cos(\phi_R) & y_R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (eq. 3.122 a)$$

$$[\bar{J}] = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{13} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{13} & \bar{J}_{23} & \bar{J}_{33} \end{bmatrix} \quad (eq. 3.122 b)$$

$$\phi_R = \frac{1}{2} \cdot \text{tg}^{-1} \left( \frac{2 \cdot \bar{J}_{12}}{\bar{J}_{11} - \bar{J}_{22}} \right) \quad (eq. 3.122 c)$$

$$dr = \bar{J}_{11} \cdot \bar{J}_{22} - (\bar{J}_{12})^2 \quad (eq. 3.122 d)$$

$$y_R = \frac{-\bar{J}_{13} \cdot \bar{J}_{12} + \bar{J}_{23} \cdot \bar{J}_{11}}{dr} \quad (eq. 3.122 e)$$

$$z_R = \frac{-\bar{J}_{13} \cdot \bar{J}_{22} + \bar{J}_{23} \cdot \bar{J}_{12}}{dr} \quad (eq. 3.122 f)$$

agora procedendo a transformação de forças mediante a mesma lei de transformação:  $\{V_f'\} = [R_e] \cdot \{V_f^*\}$ , onde:  $\{V_f^*\}$  é o vetor de esforços cortantes no sistema de rigidez diagonalizada. Assim, matematicamente consegue-se provar que:  $[R_e]^T = [R_e]^{-1}$ , obtendo-se:

$$-[R_e]^T \cdot [\bar{J}] \cdot [R_e] \cdot \{x''''\} + [R_e]^T \cdot [\bar{S}] \cdot [R_e] \cdot \{x''\} + [R_e]^T \cdot [\bar{M}] \cdot [R_e] \cdot \{\ddot{x}\} = [R_e]^T \cdot \{\bar{V}_f'\} \quad (eq. 3.123)$$

o que para facilitar a notação, reescreve-se:

$$-[J^*] \cdot \{x''''\} + [S^*] \cdot \{x''\} + [M^*] \cdot \{\ddot{x}\} = \{V_f^*\} \quad (eq. 3.124)$$

sendo:  $[J^*] = [R_e]^T \cdot [\bar{J}] \cdot [R_e]$ ;  
 $[S^*] = [R_e]^T \cdot [\bar{S}] \cdot [R_e]$ ;  
 $[M^*] = [R_e]^T \cdot [\bar{M}] \cdot [R_e]$ ;  
 $\{V_f^*\} = [R_e]^T \cdot \{\bar{V}_f'\}$ .

- **2ª Transformação:** Após a realização da primeira transformação de referencial, observa-se que a matriz de rigidez do núcleo foi devidamente diagonalizada para  $[J^*]$ . Assim, nesta segunda transformação almeja-se converter a matriz  $[J^*]$  em matriz identidade de mesma ordem, no caso:  $[I]_3$ . Para tal, vale-se da seguinte *Lei de Transformação*:  $\{x\} = [J^*]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{y\}$ .

Impondo a lei de transformação na equação (3.124) e já transformando também as forças, reescreve-se:

$$-[I] \cdot \{y''''\} + [S^{**}] \cdot \{y''\} + [M^{**}] \cdot \{\ddot{y}\} = \{V_f^{**}\} \quad (eq. 3.125)$$

sendo:  $[J^{**}] = [J^*]^{-\frac{1}{2}} \cdot [J^*] \cdot [J^*]^{-\frac{1}{2}} \equiv [I]_3$ ;  
 $[S^{**}] = [J^*]^{-\frac{1}{2}} \cdot [S^*] \cdot [J^*]^{-\frac{1}{2}}$ ;  
 $[M^{**}] = [J^*]^{-\frac{1}{2}} \cdot [M^*] \cdot [J^*]^{-\frac{1}{2}}$ ;  
 $\{V_f^{**}\} = [J^*]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{V_f^*\}$ .

- **3ª Transformação:** A partir de agora observa-se que a diagonalização das matrizes  $[S^{**}]$  e  $[M^{**}]$  ocorrerá de forma iterativa mediante o *Método de Diagonalização de Jacobi*.

Neste caso, aplica-se a *diagonalização por Jacobi* para a matriz  $[S^{**}]$  recalculando-se a matriz  $[M^{**}]$ , e para fluidez da programação faz-se a transformação em cima da mesma matriz. Em seguida, repete-se o procedimento de *diagonalização por Jacobi* para a matriz  $[M^{**}]$ , recalculando-se a matriz  $[S^{**}]$ . Repetindo estes dois procedimentos até que todos os elementos, de ambas as matrizes, que estejam fora das respectivas diagonais principais sejam inferiores a valores de tolerância.

Quanto ao valor de tolerância para a matriz  $[M^{**}]$  é o  $\varepsilon_M$ , que será nesta pesquisa admitida como o menor valor da diagonal principal vezes  $10^{-5}$ . Já a tolerância para a matriz  $[S^{**}]$  é o  $\varepsilon_S$  e segue a mesma lógica. E a fim de expor a procedimento, expõe-se o primeiro ciclo iterativo:

✚ **Transformação 3.1:** Diagonalizar a matriz  $[S^{**}]$  mediante o *Método de Jacobi*, valendo-se da *Lei de Transformação*:  $\{q_1\} = [\varphi_S] \cdot \{y\}$ , onde:  $[\varphi_S]$  é a matriz de autovetores que propicia a diagonalização da matriz de rigidez  $[S^{**}]$  dos lintéis para a matriz de autovalores  $[\mathcal{s}]$ . Assim, a equação (13) fica reescrita como:

$$-[I] \cdot \{q_1''''\} + [\mathcal{s}] \cdot \{q_1''\} + [M^{**}] \cdot \{\ddot{q}_1\} = \{V_f^{**}\} \quad (eq. 3.126)$$

sendo:  $[I] = [\varphi_S]^T \cdot [I] \cdot [\varphi_S] \equiv [I]_3$ ;

$$[\mathcal{s}] = [\varphi_S]^T \cdot [S^{**}] \cdot [\varphi_S];$$

$$[M^{**}] = [\varphi_S]^T \cdot [M^{**}] \cdot [\varphi_S];$$

$$\{V_f^{**}\} = [\varphi_S]^T \cdot \{V_f^*\}.$$

ressantando que a acumulação da matriz  $[M^{**}]$  e do vetor  $\{V_f^{**}\}$  é realizada por sobre eles mesmos, a fim de facilitar a programação.

✚ **Transformação 3.2:** Diagonalizar a matriz  $[M^{**}]$  mediante o *Método de Jacobi*, valendo-se da *Lei de Transformação*:  $\{q_2\} = [\varphi_M] \cdot \{q_1\}$ . De qual imposição, reescreve-se a equação (3.126), como:

$$-[I] \cdot \{q_2''''\} + [\mathcal{s}] \cdot \{q_1''\} + [M^{**}] \cdot \{\ddot{q}_1\} = \{V_f^{**}\} \quad (eq. 3.127)$$

sendo:  $[I] = [\varphi_M]^T \cdot [I] \cdot [\varphi_M] \equiv [I]_3$ ;

$$[S^{**}] = [\varphi_M]^T \cdot [\mathcal{s}] \cdot [\varphi_M];$$

$$[m] = [\varphi_M]^T \cdot [M^{**}] \cdot [\varphi_M];$$

$$\{V_f^{**}\} = [\varphi_M]^T \cdot \{V_f^*\}.$$

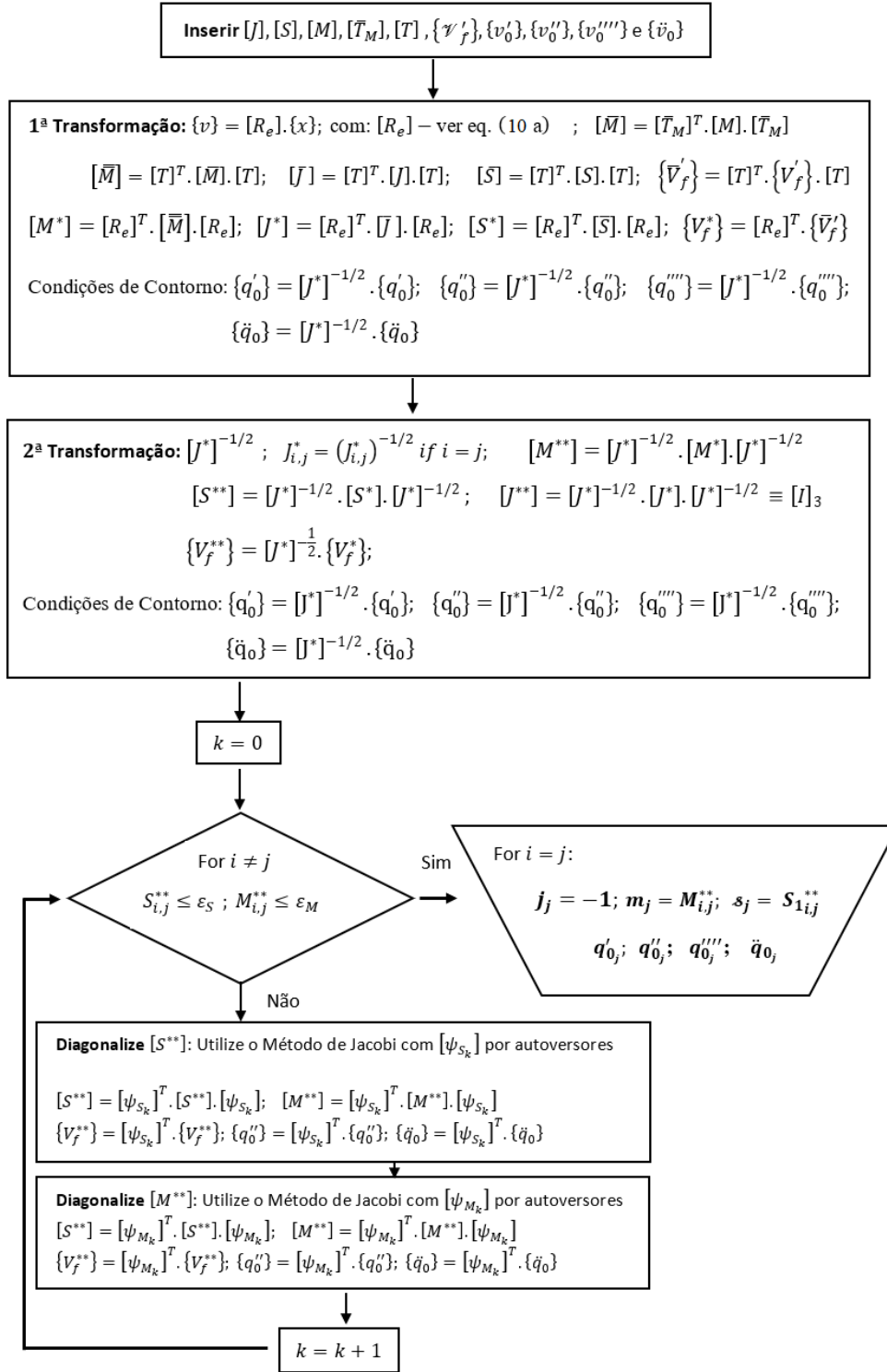
Expondo-se por fim, na Figura 3.51, o fluxograma de desacoplamento do *Sistema Dinâmico da TPP*.

E por fim, após o processo de diagonalização das matrizes do sistema de equações diferenciais da TPP, sob solicitação dinâmica, que consta na equação (9). Escreve-se o conjunto com três equações desacopladas, como:

$$-[I] \cdot \{q_n''''\} + [\mathcal{s}] \cdot \{q_n''\} + [m] \cdot \{\ddot{q}_n\} = \{\bar{V}_{f_n}\} \quad (eq. 3.128)$$

onde, a equação (3.128) é referenciada num *Sistema de Coordenadas Generalizadas*, e o conjunto de equações desacopladas, para  $\mathbf{j} = \{1; 2 \text{ e } 3\}$ , é expresso por:

$$-q_j''''(\bar{x}, t) + s_j \cdot q_j''(\bar{x}, t) + m_j \cdot \ddot{q}_j(\bar{x}, t) = \bar{V}_{f_j}(\bar{x}, t) \quad (eq. 3.129)$$

**Figura 3.51 – Fluxograma de Desacoplamento do sistema na solicitação dinâmica na TPP****Fonte: O Autor (2025)**

cujas condições de contorno, necessárias para a resolução da EDP apresentada na eq. (3.129), são expressas no *Sistema de Coordenadas Generalizadas*, como:

$$\{q'_0\} = [\Phi_R]^{-1} \cdot \{v'_0\} \quad (eq. 3.130 a)$$

$$\{q''_0\} = [\Phi_R]^{-1} \cdot \{v''_0\} \quad (eq. 3.130 b)$$

$$\{q_0'''\} = [\Phi_R]^{-1} \cdot \{v_0'''\} \quad (eq. 3.130 c)$$

$$\{\ddot{q}_0\} = [\Phi_R]^{-1} \cdot \{\ddot{v}_0\} \quad (eq. 3.130 d)$$

sendo:  $[\Phi_R] = [R_e] \cdot [J^*]^{-1/2} \cdot [\psi_S] \cdot [\psi_M] \cdot \dots \cdot [\psi_{n-1}] \cdot [\psi_n]$ .

E por último, após resolver a EDP expressa na eq. (3.129) promove-se seu retorno ao sistema inicial de coordenadas, isso mediante:

$$\{v(x, t)\} = [\Phi_R] \cdot \{q(\bar{x}, t)\} \quad (eq. 3.131)$$

onde:  $\{v(x, t)\}$  – é o vetor de deslocamentos nas direções  $y$ ,  $z$  e  $x$ ; respectivamente, isso no sistema inicial de referência. E  $\{q(\bar{x}, t)\}$  – é o vetor de deslocamentos nas direções  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  e  $\bar{x}$ ; respectivamente, sob o *Sistema de Coordenadas Generalizadas*.

### c.6) Análise modal dos painéis-parede

Seguindo os princípios preconizados em Rogers (1959, p. 157 – 177); Volterra & Zachmanoglou (1965, p. 310 – 323); e Baykov & Sigalov (1980, p. 567 – 597), procede-se a análise modal da equação (3.129) mediante sua homogenea, qual seja:

$$-q_j''''(\bar{x}, t) + s_j \cdot q_j''(\bar{x}, t) + m_j \cdot \ddot{q}_j(\bar{x}, t) = 0 \quad (eq. 3.132)$$

E para análise da eq. (3.132) emprega-se o *Método da Superposição Modal*, o qual consiste em admitir que a função  $q(\bar{x}, t)$  será o produto de duas funções parciais, em cada uma das variáveis envolvidas. Assim, escrevendo-se:

$$-u''''(\bar{x}) \cdot g(t) + s \cdot u''(\bar{x}) \cdot g(t) + m \cdot u(\bar{x}) \cdot \ddot{g}(t) = 0 \quad (eq. 3.133)$$

com:  $q(\bar{x}, t) = u(\bar{x}) \cdot g(t)$ .

Impondo-se o *Processo de Separação de Variáveis* na eq. (3.133), conclui-se:

$$\frac{-u''''(\bar{x}) + s \cdot u''(\bar{x})}{u(\bar{x})} = \frac{-m \cdot \ddot{g}(t)}{g(t)} = -\omega^2 \quad (eq. 3.134)$$

sendo:  $\omega$  – a frequência de vibração da estrutura.

Da equação (3.134) concluem-se duas equações diferenciais ordinárias, uma espacial e outra temporal, expressas por:

$$-u''''(\bar{x}) + s \cdot u''(\bar{x}) - \omega^2 \cdot u(\bar{x}) = 0 \quad (eq. 3.135)$$

- EDO homogênea espacial -

$$m \cdot \ddot{g}(t) - \omega^2 \cdot g(t) = 0 \quad (eq. 3.136)$$

- EDO homogênea temporal -

### c.6.1) Resolução da EDO homogênea espacial

A análise modal dos Painéis – Parede é processada mediante resolução da EDO homogênea espacial, eq. (3.135), e para tal propõe-se por solução:

$$u(\bar{x}) = e^{\alpha \cdot \bar{x}} \quad (eq. 3.137)$$

e ao impor a equação (3.137) na eq. (3.135) gera-se a seguinte equação característica de quarto grau:

$$\alpha^4 - s \cdot \alpha^2 - \omega^2 = 0 \quad (eq. 3.138)$$

Resolve-se a equação biquadrada, ver eq. (3.138), mediante a mudança de variáveis:  $\beta = \alpha^2$ , caracterizando-se uma equação de segundo grau:

$$\beta^2 - s \cdot \beta - \omega^2 = 0 \quad (eq. 3.139)$$

e por soluções, tem-se:

$$\beta_1 = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2} \quad (eq. 3.140 a)$$

$$\beta_2 = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2} \quad (eq. 3.140 b)$$

observa-se ainda, que existe a seguinte relação entre as raízes  $\beta_1$  e  $\beta_2$ , qual seja:

substituindo: 
$$\begin{cases} \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2} = \beta_1 - \frac{s}{2} \\ \beta_2 = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2} \end{cases} \rightarrow \beta_2 = \frac{s}{2} - \left(\beta_1 - \frac{s}{2}\right)$$

$$\therefore \beta_2 = s - \beta_1 \quad (eq. 3.141)$$

do que retornando a variável inicial, exprime-se as quatro raízes como:

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2}} \quad (eq. 3.142 a)$$

$$\alpha_2 = -\sqrt{\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2}} \quad (eq. 3.142 b)$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2}} \quad (eq. 3.142 c)$$

$$\alpha_4 = -\sqrt{\frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2}} \quad (eq. 3.142 d)$$

ao analisar as equações (3.142) constata-se que a raiz  $\alpha_2$  é igual a raiz  $\alpha_1$ , isso em módulo. Além de verifica-se igualdade nos módulos das raízes  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$ , diferindo apenas pelo sinal.

Assim:  $\alpha_2 = -\alpha_1$ ; e  $\alpha_4 = -\alpha_3$ , e daí pode-se operar o restante do equacionamento com estas duas leis de recorrência. E em seguida, consegue-se reescrever a raiz  $\alpha_4$  para remover o sinal negativo a frente da raiz quadrada, isso mediante:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2} \rightarrow \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2} = \alpha_1^2 - \frac{s}{2} \end{cases} \quad (eq. 3.143 a)$$

$$\begin{cases} \alpha_4 = -\sqrt{\frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2}} \rightarrow \alpha_4 = -\sqrt{\frac{s}{2} - \left(\alpha_1^2 - \frac{s}{2}\right)} \end{cases} \quad (eq. 3.143 b)$$

e reorganizando a equação (3.143 b), escreve-se:

$$\alpha_4 = \sqrt{-\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2}} \quad (eq. 3.143 c)$$

As raízes da equação característica, equação (3.138), adimensionalizadas via:  $\lambda = \alpha \cdot H$ , e com a raiz  $\alpha_4$  devidamente ajustada, exprimem-se por:

$$\lambda_1 = H \cdot \sqrt{\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2}} \quad (eq. 3.144 a)$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \quad (eq. 3.144 b)$$

$$\lambda_3 = -\lambda_4 \quad (eq. 3.144 c)$$

$$\lambda_4 = H \cdot \sqrt{-\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \omega^2}} \quad (eq. 3.144 d)$$

### c.6.2) Expressões das frequências $\omega_j$ ; $f_j$ e dos períodos $T_j$

A frequência  $\omega_j$  é obtida mediante o produto das raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_4$  ao quadrado, advindos das equações (3.144 a) e (3.144 b), escrevendo-se:

$$\omega_j = \frac{\lambda_{1j} \cdot \lambda_{4j}}{H^2} \quad (eq. 3.145)$$

de onde se pode expressar:  $\omega_j = \frac{\omega_j^*}{H^2}$ , com:  $\omega_j^*$  sendo a frequência básica e expressa por:

$$\omega_j^* = \lambda_{1j} \cdot \lambda_{4j} \quad (eq. 3.146)$$

E por definição, os períodos são expressos, para os j-ésimos modos de vibração, por:

$$T_j = \frac{2\pi}{\omega_j} \quad \therefore \quad T_j = T_j^* \cdot H^2 \quad (eq. 3.147)$$

$$\text{com: } T_j^* = \frac{2\pi}{\omega_j^*} \equiv \frac{2\pi}{\lambda_{1j} \cdot \lambda_{4j}}.$$

E por último, faz-se relevante formular a frequência  $f_j$  para as devidas comparações com os valores fornecidos por simulações numéricas no ANSYS. Assim, escreve-se:

$$f_j = \frac{1}{T_j} \quad \therefore \quad f_j = \frac{\omega_j}{2\pi} \quad (\text{eq. 3.148})$$

e por frequência básica, tem-se:  $f_j^* = \frac{\omega_j^*}{2\pi} \equiv \frac{\lambda_{1j} \cdot \lambda_{4j}}{2\pi}$ .

### c.7) Equação Transcendental

A equação transcendental é obtida mediante imposição das condições de contorno na função deslocamento  $u(\xi)$ , que é a resposta adimensionalizada para a EDO apresentada na equação (23). Sendo a solução homogênea  $u(\xi)$  expressa por:

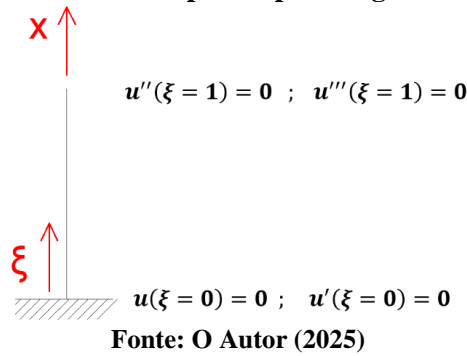
$$u(\xi) = B_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot \xi} + B_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot \xi} + B_3 \cdot e^{\lambda_3 \cdot \xi} + B_4 \cdot e^{\lambda_4 \cdot \xi} \quad (\text{eq. 3.149})$$

porém, como as raízes  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são iguais em módulo as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_4$ , respectivamente. Modificando-se apenas os sinais, o que implica em reescrever a solução exposta na eq. (3.149), como:

$$u(\xi) = B_1 \cdot \cosh(\lambda_1 \cdot \xi) + B_2 \cdot \sinh(\lambda_2 \cdot \xi) + B_3 \cdot \cos(\lambda_3 \cdot \xi) + B_4 \cdot \sin(\lambda_4 \cdot \xi) \quad (\text{eq. 3.150})$$

cujas condições de contorno são apresentadas na Figura 3.52.

**Figura 3.52 – Condições de contorno para o pilar engastado na base e livre no topo**



Ao aplicar na equação (3.150) as quatro condições de contorno, apresentadas na Figura 3.52, tem-se:

$$u(\xi = 0) = B_1 + B_3 = 0 \quad (\text{eq. 3.150 a})$$

$$u'(\xi = 0) = B_2 \cdot \lambda_1 + B_4 \cdot \lambda_2 = 0 \quad (\text{eq. 3.150 b})$$

$$u''(\xi = 1) = B_1 \cdot \lambda_1^2 \cdot \cosh(\lambda_1) + B_2 \cdot \lambda_2^2 \cdot \sinh(\lambda_2) - B_3 \cdot \lambda_3^2 \cdot \cos(\lambda_3) - B_4 \cdot \lambda_4^2 \cdot \sin(\lambda_4) \quad (\text{eq. 3.150 c})$$

$$u'''(\xi = 1) = B_1 \cdot \lambda_1^3 \cdot \sinh(\lambda_1) + B_2 \cdot \lambda_2^3 \cdot \cosh(\lambda_2) + B_3 \cdot \lambda_3^3 \cdot \sin(\lambda_3) - B_4 \cdot \lambda_4^3 \cdot \cos(\lambda_4) \quad (\text{eq. 3.150 d})$$

E de onde, agrupando-se as equações (3.150 a) a (3.150 d), exprime-se o sistema algébrico  $[A] \cdot \{B\} = \{0\}$ . Onde a equação transcendental é obtida impondo-lhe a condição de solução não trivial. Logo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 \cdot \cosh(\lambda_1) & \lambda_2^2 \cdot \sinh(\lambda_2) & -\lambda_3^2 \cdot \cos(\lambda_3) & -\lambda_4^2 \cdot \sin(\lambda_4) \\ \lambda_1^3 \cdot \sinh(\lambda_1) & \lambda_2^3 \cdot \cosh(\lambda_2) & \lambda_3^3 \cdot \sin(\lambda_3) & -\lambda_4^3 \cdot \cos(\lambda_4) \end{vmatrix} = 0 \quad (eq. 3.151)$$

Concluindo-se por fim, a equação transcendental expressa por:

$$f_1 \cdot \cosh(\lambda_1) \cdot \cos(\lambda_4) + f_4 \cdot \sinh(\lambda_1) \cdot \sin(\lambda_4) = -1 \quad (eq. 3.152)$$

$$\text{com: } f_1 = \frac{2 \cdot \lambda_1^3 \cdot \lambda_4^3}{\lambda_1 \cdot \lambda_4^5 + \lambda_1^5 \cdot \lambda_4}; \quad f_4 = \frac{\lambda_1^2 \cdot \lambda_4^4 - \lambda_1^4 \cdot \lambda_4^2}{\lambda_1 \cdot \lambda_4^5 + \lambda_1^5 \cdot \lambda_4}.$$

### c.8) Resolução da Equação Transcendental

Na resolução da equação transcendental, eq. (3.152), é bastante salutar criar uma relação  $\lambda$  entre as raízes distintas ( $\lambda_1$  e  $\lambda_4$ ), para que assim possam ser tabulados os modos de vibração. Assim, realizando a substituição da eq. (3.144 a) na eq. (3.144 d), conclui-se:

$$\lambda^2 = \lambda_4^2 - \lambda_1^2 \quad (eq. 3.153)$$

Para a geração da tabela aludida, impõe-se a equação (3.153) e as séries de potência de Taylor, para as funções trigonométricas e hiperbólicas, na equação (3.152). Concluindo-se uma nova equação que depende unicamente da relação  $\lambda$  e da raiz  $\lambda_1$ , e com grau algébrico a depender do número de termos adotados para as séries de Taylor. No caso da imposição das séries de Taylor com 11 termos obtém-se um polinômio com sete raízes distintas, as quais implicam nos sete primeiros modos de vibração. Sendo as funções trigonométricas e hiperbólicas substituídas pelas séries de Taylor truncadas:

$$\cosh(\lambda_1) = 1 + \frac{\lambda_1^2}{2!} + \frac{\lambda_1^4}{4!} + \frac{\lambda_1^6}{6!} + \frac{\lambda_1^8}{8!} + \frac{\lambda_1^{10}}{10!} + \frac{\lambda_1^{12}}{12!} + \frac{\lambda_1^{14}}{14!} + \frac{\lambda_1^{16}}{16!} + \frac{\lambda_1^{18}}{18!} + \frac{\lambda_1^{20}}{20!} \quad (eq. 3.154 a)$$

$$\sinh(\lambda_1) = \lambda_1 + \frac{\lambda_1^3}{3!} + \frac{\lambda_1^5}{5!} + \frac{\lambda_1^7}{7!} + \frac{\lambda_1^9}{9!} + \frac{\lambda_1^{11}}{11!} + \frac{\lambda_1^{13}}{13!} + \frac{\lambda_1^{15}}{15!} + \frac{\lambda_1^{17}}{17!} + \frac{\lambda_1^{19}}{19!} + \frac{\lambda_1^{21}}{21!} \quad (eq. 3.154 b)$$

$$\cos(\lambda_4) = 1 - \frac{\lambda_4^2}{2!} + \frac{\lambda_4^4}{4!} - \frac{\lambda_4^6}{6!} + \frac{\lambda_4^8}{8!} - \frac{\lambda_4^{10}}{10!} + \frac{\lambda_4^{12}}{12!} - \frac{\lambda_4^{14}}{14!} + \frac{\lambda_4^{16}}{16!} - \frac{\lambda_4^{18}}{18!} + \frac{\lambda_4^{20}}{20!} \quad (eq. 3.154 c)$$

$$\sin(\lambda_4) = \lambda_4 - \frac{\lambda_4^3}{3!} + \frac{\lambda_4^5}{5!} - \frac{\lambda_4^7}{7!} + \frac{\lambda_4^9}{9!} - \frac{\lambda_4^{11}}{11!} + \frac{\lambda_4^{13}}{13!} - \frac{\lambda_4^{15}}{15!} + \frac{\lambda_4^{17}}{17!} - \frac{\lambda_4^{19}}{19!} + \frac{\lambda_4^{21}}{21!} \quad (eq. 3.154 d)$$

Na Tabela 3.1 são elencados do 1º ao 7º modos de vibração em função da razão  $\lambda$ .

sendo:  $H$  – a altura do pilar; e

$\delta$  – equivale aos valores  $\delta_{11}$ ;  $\delta_{22}$  ou  $\delta_{33}$  advindos do processo de diagonalização da matriz de rigidez  $[S]$  do sistema de contraventamento.

e valendo-se para utilizar a tabela:  $\lambda = H \cdot \sqrt{\delta}$ ;  $\omega_j^* = \lambda_{1j} \cdot \lambda_{4j}$ ;  $T_j^* = \frac{2\pi}{\omega_j^*}$ .

**Tabela 3.1 – Primeiros modos de vibração para o pilar de paredes finas e contraventado em Z**

$\lambda$		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$
<b>0,0</b>	$\lambda_1$	1,87510	4,69409	7,85483	9,08911	10,02092	11,68901	14,62618
	$\lambda_4$	1,87510	4,69409	7,85483	9,08911	10,02092	11,68901	14,62618
	$\omega_i^*$	3,51600	22,03448	61,69835	84,61192	105,97714	136,63295	213,92514
	$T_i^*$	1,78703	0,28515	0,10184	0,07606	0,05929	0,04599	0,02937
	$f_i^*$	0,55959	3,50690	9,81960	13,46640	16,86790	21,74580	34,04724
	$\lambda_i^{(a)}$	1,87510	4,69410	7,85550	10,99600	-----	-----	-----
	% $\Delta\lambda$	0,00000	0,00021	0,00853	17,3417	-----	-----	-----
<b>0,5</b>	$\lambda_1$	1,92738	4,73666	7,92626	9,11768	10,04144	11,69751	14,62569
	$\lambda_4$	1,79298	4,68358	7,89466	9,09022	10,01651	11,67612	14,60859
	$\omega_i^*$	3,45576	22,18454	62,57510	82,88171	100,58021	136,58151	213,66066
	$T_i^*$	1,81818	0,28322	0,10041	0,07581	0,06247	0,04600	0,02941
	$f_i^*$	0,55000	3,53082	9,95917	13,19087	16,00768	21,73913	34,00204
	$\lambda_1$	1,98334	4,67319	7,89001	9,14477	10,06085	11,73094	15,10577
	$\lambda_4$	1,71279	4,56494	7,82638	9,08993	10,01103	11,68824	15,07263
<b>1,0</b>	$\omega_i^*$	3,39704	21,33285	61,75023	83,12531	100,71946	137,11404	227,68374
	$T_i^*$	1,84961	0,29453	0,10175	0,07559	0,06238	0,04582	0,02760
	$f_i^*$	0,54065	3,39524	9,82801	13,22926	16,03078	21,82453	36,23188
	$\lambda_1$	2,17092	4,90452	8,03356	9,23096	10,12354	11,68447	14,60825
	$\lambda_4$	1,48758	4,64266	7,87643	9,09454	9,99930	11,57700	14,52243
	$\omega_i^*$	3,22942	22,77003	63,27574	83,95132	101,22834	135,27106	212,14729
	$T_i^*$	1,94561	0,27594	0,09930	0,07484	0,06207	0,04645	0,02962
<b>2,5</b>	$f_i^*$	0,51398	3,62398	10,07049	13,36184	16,11084	21,52852	33,76097
	$\lambda_1$	2,52714	5,10929	8,16649	9,37042	10,22620	11,77672	14,62109
	$\lambda_4$	1,17747	4,59400	7,85440	9,09971	9,97874	11,56249	14,56249
	$\omega_i^*$	2,97563	23,47208	64,14286	85,26813	102,04455	136,16819	211,26148
	$T_i^*$	2,11155	0,26769	0,09796	0,07369	0,06157	0,04614	0,02974
	$f_i^*$	0,47359	3,73566	10,20825	13,57036	16,24168	21,67317	33,62475
	$\lambda_1$	2,89825	5,30895	8,29810	9,50762	10,32883	11,82274	14,57512
<b>5,0</b>	$\lambda_4$	0,94861	4,54807	7,83316	9,10466	9,95915	11,50118	14,31552
	$\omega_i^*$	2,74930	24,14548	65,00038	86,56365	102,86640	135,97548	208,65043
	$T_i^*$	2,28538	0,26022	0,09666	0,07258	0,06108	0,04621	0,03011
	$f_i^*$	0,43756	3,84290	10,34554	13,77790	16,37197	21,64033	33,21156
	$\lambda_1$	3,25746	5,50391	8,42839	9,64266	10,43138	11,87014	14,61565
	$\lambda_4$	0,78169	4,50478	7,81267	9,10938	9,94051	11,44116	14,26945
	$\omega_i^*$	2,54634	24,79389	65,84820	87,83870	103,69321	135,80821	208,55730
<b>10</b>	$T_i^*$	2,46754	0,25342	0,09542	0,07153	0,06059	0,04627	0,03013
	$f_i^*$	0,40526	3,94602	10,47998	13,98015	16,50437	21,61228	33,18951
	$\lambda_1$	3,91350	5,88096	8,68511	9,90673	10,63608	11,96891	14,53238
	$\lambda_4$	0,56168	4,42557	7,77375	9,11829	9,90587	11,32496	14,00679
	$\omega_i^*$	2,19813	26,02661	67,51584	90,33248	105,35959	135,54747	203,55194
	$T_i^*$	2,5843	0,24141	0,09306	0,06956	0,05964	0,04635	0,03087
	$f_i^*$	0,34984	4,14233	10,74576	14,37610	16,76727	21,57497	32,39391
<b>15</b>	$\lambda_1$	6,10829	8,61531	9,29340	10,43048	11,65087	12,06984	14,60359
	$\lambda_4$	4,16067	7,36367	8,14661	9,42311	10,75838	11,21076	13,90197
	$\omega_i^*$	25,41460	63,44026	75,70972	98,28751	125,34450	135,31202	203,01871
	$T_i^*$	0,24723	0,09904	0,08299	0,06393	0,05013	0,04643	0,03095
	$f_i^*$	4,04482	10,09693	12,04964	15,64211	19,94813	21,53780	32,31018

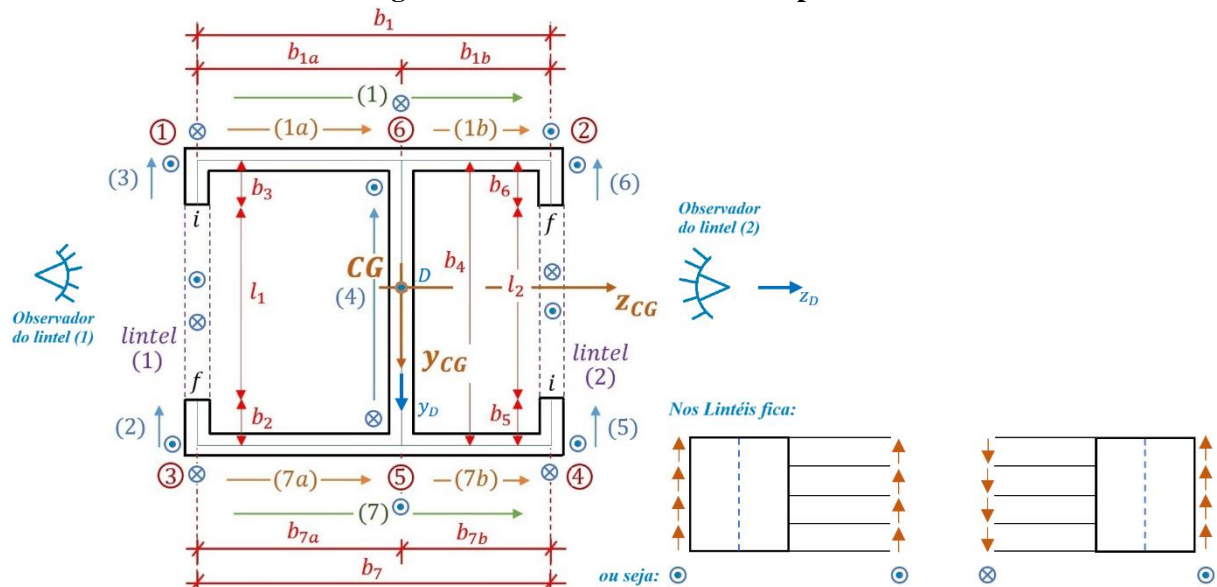
Onde:  $\lambda_i^{(a)}$  é a raiz apresentada em Kiseliou (1983, p. 172), isso no capítulo destinado a ações dinâmicas em vigas de seção constante. Assim tais valores podem validar a formulação desta tese para  $s_j = 0$  (sem lintéis).

Fonte: Avanço de (Melo, 2019)

### 3.5 NÚCLEO DUPLO T

Na Figura 3.53 é apresentado o núcleo estrutural em duplo T, elencando-se: - os sentidos dos fluxos cisalhantes nas interseções; - a numeração e direção das paredes; - a numeração das interseções; - a configuração de rotulação dos lintéis e o consequente fluxo cisalhante adotado.

**Figura 3.53 – Núcleo estrutural duplo T**



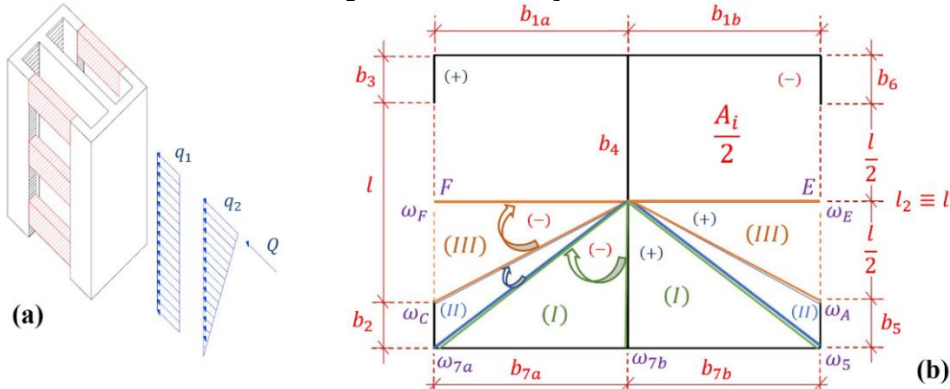
Fonte: Adaptado de (Melo, 2019)

Desta forma, evidenciam-se as seguintes ideias na proposição do modelo estrutural ilustrado na Figura 3.53, como:

- Os fluxos cisalhantes são representados em notação vetorial, sendo o fluxo entrando no plano do desenho representado por  $\otimes$ , além do fluxo saindo do plano ser representado pelo símbolo  $\odot$ ;
- Começa-se a definir o fluxo arbitrado de cisalhamento a partir dos lintéis, porém o sentido é arbitrário, como já mencionado, uma vez que o sinal do resultado é que informará o sentido final dos fluxos cisalhantes; e
- Admite-se como hipótese simplificadora da modelagem das ligações dos lintéis com as paredes laterais: - *Não há efeitos tridimensionais relevantes na ligação, visto que não há razões práticas para o núcleo apresentar grande excentricidade na ligação das paredes.*

Neste subtópico procede-se a utilização da geometria típica de pilares de pontes, em formato de duplo T, bem como são modificadas algumas condições de contorno, mais especificamente no topo do pilar. Observando-se na Figura 3.54 (a) o estado de carga para a ação do vento, e na Fig. 3.54 (b) expõe-se a notação para o traçado do diagrama de ordenadas setoriais da seção transversal em duplo T.

**Figura 3.54: Pilar de ponte com seção transversal em duplo T: (a) carregamento do vento e (b) ordenadas setoriais nos pontos de rotulação dos lintéis (meio do vão)**



Fonte: (Melo, 2019)

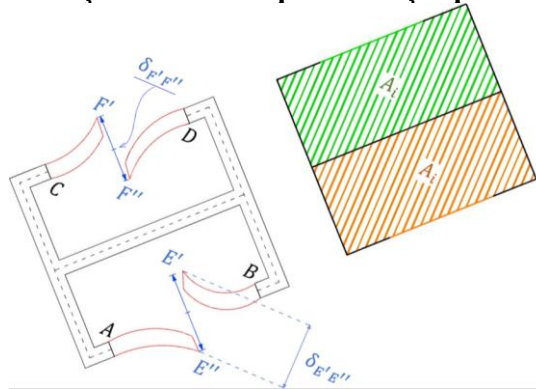
A solução da EDO expressa na eq. (3.155) para o pilar apresentado na Figura 3.54, em termos das rotações  $\phi$ , será a mesma apresentada na equação (3.156), quando aproximada a ação do vento unicamente pela carga lateral  $q_1$ . A única diferença é o cálculo da área interna, que consiste agora, na área de cada um dos dois núcleos em C que compõe o duplo T.

$$G \cdot I_t \cdot \phi' - E \cdot I_\omega \cdot \phi''' = M_t \quad (\text{eq. 3.155})$$

$$\phi(x) = A_1 + A_2 \cdot x + A_3 \cdot \cosh(\alpha \cdot x) + A_4 \cdot \sinh(\alpha \cdot x) + \frac{m}{\alpha^2 \cdot E \cdot I_\omega} \cdot x^2 \quad (\text{eq. 3.156})$$

Na Figura 3.55 é apresentado o diagrama de deformação dos lintéis após a rotulação plástica da seção do meio do vão, bem como explicitando-se o cálculo da área interna  $A_i$ . Em tais lintéis será utilizado o PTV para a determinação dos deslocamentos relativos  $\delta_{E'E''}$  e  $\delta_{F'F''}$ .

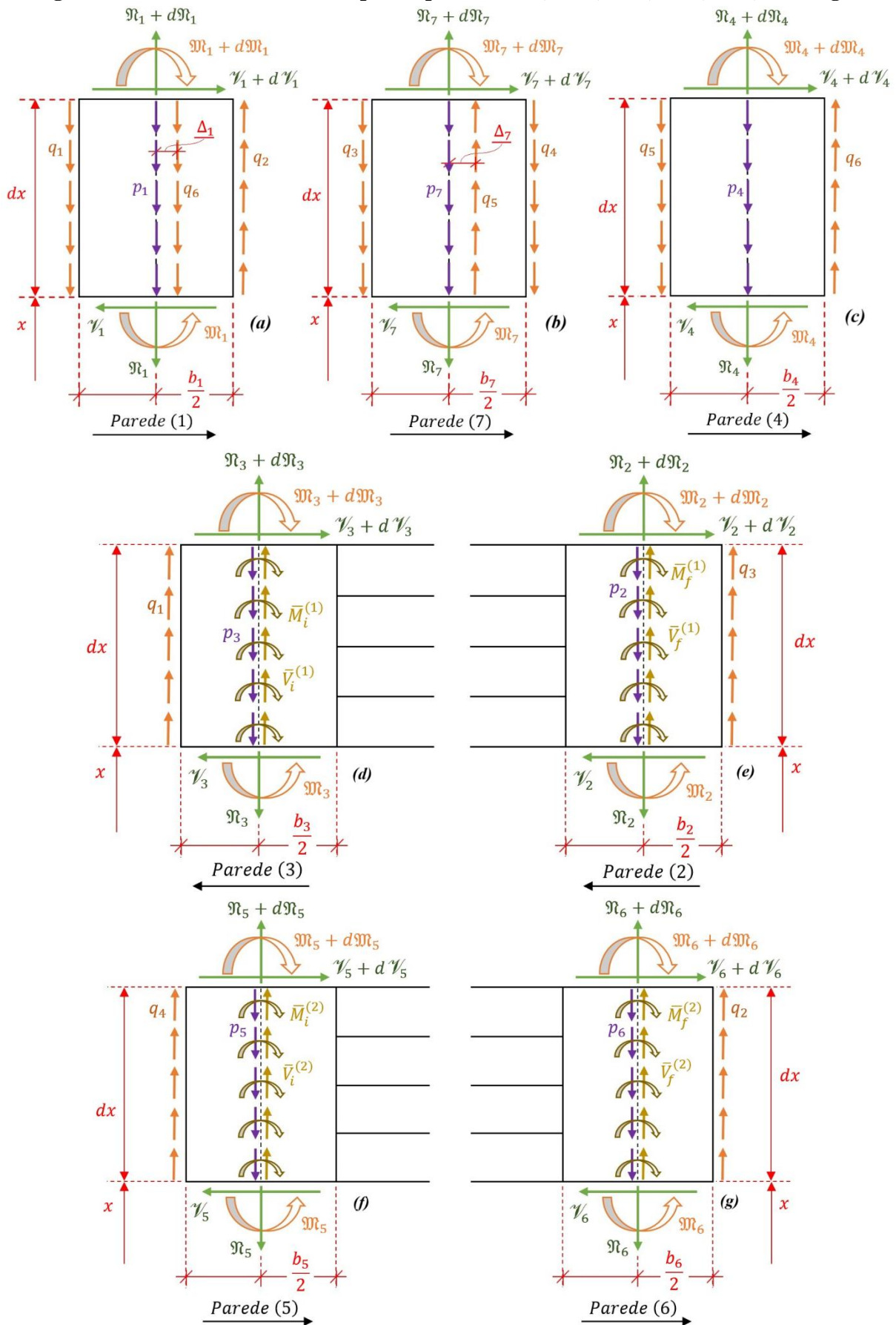
**Figura 3.55: Deformação dos lintéis após rotulação plástica no meio do vão**



Fonte: (Melo, 2019)

#### a) Equações diferenciais dos painéis-parede

Já na Figura 3.56 são apresentados os elementos diferenciais das paredes do núcleo duplo T, considerando o peso-próprio  $p_i$ , os fluxos cisalhantes  $q_k$  e os esforços solicitantes nas seções das coordenadas  $x$  e  $(x + dx)$ .

**Figura 3.56 – Elemento diferencial para a parede: (a) 1, (b) 7, (c) 4, (d) 3, (e) 2, (f) 5 e (g) 6**

Fonte: (Melo, 2019)

De qual equilíbrio à rotação, expressam-se:

$$\frac{d\mathfrak{M}_1}{dx} = -\mathcal{V}_1 + (q_1 + q_2) \cdot \frac{b_1}{2} - q_6 \cdot \Delta_\alpha \quad (eq. 3.157 a)$$

$$\frac{d\mathfrak{M}_2}{dx} = -\mathcal{V}_2 + q_3 \cdot \frac{b_2}{2} - \bar{M}_f^{(1)} \quad (eq. 3.157 b)$$

$$\frac{d\mathfrak{M}_3}{dx} = -\mathcal{V}_3 - q_1 \cdot \frac{b_3}{2} - \bar{M}_i^{(1)} \quad (eq. 3.157 c)$$

$$\frac{d\mathfrak{M}_4}{dx} = -\mathcal{V}_4 + (q_5 + q_6) \cdot \frac{b_4}{2} \quad (eq. 3.157 d)$$

$$\frac{d\mathfrak{M}_5}{dx} = -\mathcal{V}_5 - q_4 \cdot \frac{b_5}{2} - \bar{M}_i^{(2)} \quad (eq. 3.157 e)$$

$$\frac{d\mathfrak{M}_6}{dx} = -\mathcal{V}_6 + q_2 \cdot \frac{b_6}{2} - \bar{M}_f^{(2)} \quad (eq. 3.157 f)$$

$$\frac{d\mathfrak{M}_7}{dx} = -\mathcal{V}_7 + (q_3 - q_4) \cdot \frac{b_7}{2} + q_5 \cdot \Delta_\beta \quad (eq. 3.157 g)$$

sendo:  $\Delta_\alpha = \frac{(b_{1a} - b_{1b})}{2}$ ; e  $\Delta_\beta = \frac{(b_{7a} - b_{7b})}{2}$ .

E do equilíbrio transversal, escrevem-se:

$$\frac{d\mathfrak{N}_1}{dx} = p_1 + q_1 - q_2 + q_6 \quad (eq. 3.158 a)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_2}{dx} = p_2 - q_3 - \bar{V}_f^{(1)} \quad (eq. 3.158 b)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_3}{dx} = p_3 - q_1 - \bar{V}_i^{(1)} \quad (eq. 3.158 c)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_4}{dx} = p_4 + q_5 - q_6 \quad (eq. 3.158 d)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_5}{dx} = p_5 - q_4 - \bar{V}_i^{(2)} \quad (eq. 3.158 e)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_6}{dx} = p_6 - q_2 - \bar{V}_f^{(2)} \quad (eq. 3.158 f)$$

$$\frac{d\mathfrak{N}_7}{dx} = p_7 + q_3 + q_4 - q_5 \quad (eq. 3.158 g)$$

Bem como, via equação da linha elástica, elencam-se:

$$\mathcal{V}_1 = -J_1 \cdot \mathcal{V}_1''' + (q_1 + q_2) \cdot \frac{b_1}{2} - q_6 \cdot \Delta_\alpha \quad (eq. 3.159 a)$$

$$\mathcal{V}_2 = -J_2 \cdot \mathcal{V}_2''' + q_3 \cdot \frac{b_2}{2} - \bar{M}_f^{(1)} \quad (eq. 3.159 b)$$

$$\mathcal{V}_3 = -J_3 \cdot \mathcal{V}_3''' - q_1 \cdot \frac{b_3}{2} - \bar{M}_i^{(1)} \quad (eq. 3.159 c)$$

$$\mathcal{V}_4 = -J_4 \cdot \mathcal{V}_4''' + (q_5 + q_6) \cdot \frac{b_4}{2} \quad (eq. 3.159 d)$$

$$\mathcal{V}_5 = -J_5 \cdot \mathcal{V}_5''' - q_4 \cdot \frac{b_5}{2} - \bar{M}_i^{(2)} \quad (eq. 3.159 e)$$

$$\mathcal{V}_6 = -J_6 \cdot \mathcal{V}_6''' + q_2 \cdot \frac{b_6}{2} - \bar{M}_f^{(2)} \quad (eq. 3.159 f)$$

$$\mathcal{V}_7 = -J_7 \cdot \mathcal{V}_7''' + (q_3 - q_4) \cdot \frac{b_7}{2} + q_5 \cdot \Delta_\beta \quad (eq. 3.159 g)$$

Além do conceito de deformação axial específica, tem-se:

$$\delta_1'' = \frac{p_1 + q_1 - q_2 + q_6}{E \cdot A_1} \quad (eq. 3.160 a)$$

$$\delta_2'' = \frac{p_2 - q_3 - \bar{V}_f^{(1)}}{E \cdot A_2} \quad (eq. 3.160 b)$$

$$\delta_3'' = \frac{p_3 - q_1 - \bar{V}_i^{(1)}}{E \cdot A_3} \quad (eq. 3.160 c)$$

$$\delta_4'' = \frac{p_4 + q_5 - q_6}{E \cdot A_4} \quad (eq. 3.160 d)$$

$$\delta_5'' = \frac{p_5 - q_4 - \bar{V}_i^{(2)}}{E \cdot A_5} \quad (eq. 3.160 e)$$

$$\delta_6'' = \frac{p_6 - q_2 - \bar{V}_f^{(2)}}{E \cdot A_6} \quad (eq. 3.160 f)$$

$$\delta_7'' = \frac{p_7 + q_3 + q_4 - q_5}{E \cdot A_7} \quad (eq. 3.160 g)$$

## b) Compatibilidade dos deslocamentos nas interseções

Na Figura 3.57 são apresentados o estado deformado das paredes, com enfoque das interseções, aplicando a rotação da seção e definindo, por geometria, os deslocamentos verticais nos extremos das paredes e em contato das interseções.

Ao Analisar as interseções é possível estabelecer as seguintes equações de compatibilidade de deslocamentos, visando sempre a retomada da estrutura tridimensional inicial. Assim escritas:

- **Interseção [1]:** Da análise da Figura 3.57 (a)

$$\delta_3 - \frac{b_3}{2} \cdot \mathcal{V}_3' = \delta_1 + \frac{b_1}{2} \cdot \mathcal{V}_1' \quad (eq. 3.161)$$

- **Interseção [2]:** Da análise da Figura 3.57 (b)

$$\delta_1 - \frac{b_1}{2} \cdot \mathcal{V}_1' = \delta_6 - \frac{b_6}{2} \cdot \mathcal{V}_6' \quad (eq. 3.162)$$

- **Interseção [3]:** Da análise da Figura 3.57 (c)

$$\delta_2 + \frac{b_2}{2} \cdot \mathcal{V}_2' = \delta_7 + \frac{b_7}{2} \cdot \mathcal{V}_7' \quad (eq. 3.163)$$

- **Interseção [4]:** Da análise da Figura 3.57 (d)

$$\delta_5 + \frac{b_5}{2} \cdot v_5' = \delta_7 - \frac{b_7}{2} \cdot v_7' \quad (\text{eq. 3.164})$$

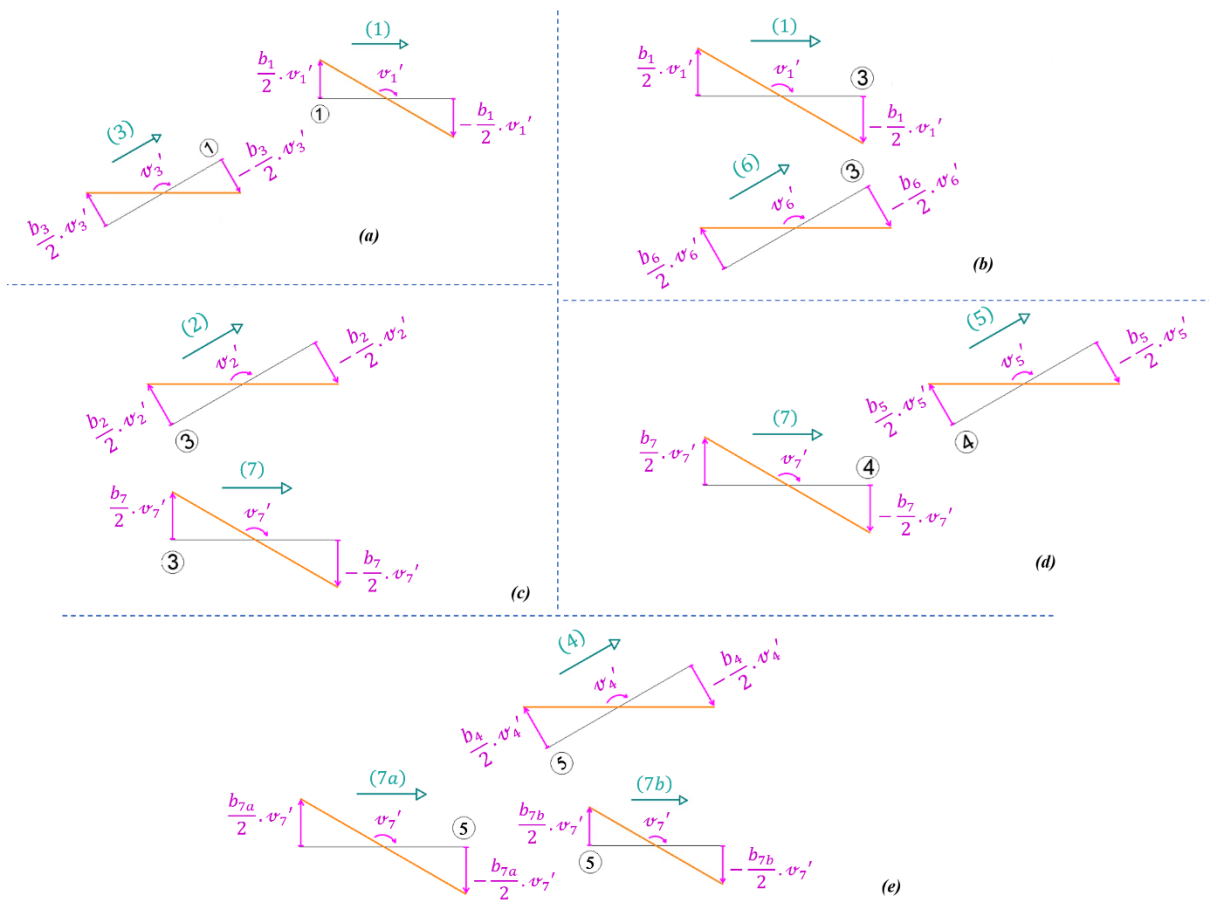
- **Interseção [5]:** Dividindo-se a parede (7) em (7 a) e (7 b) e ver a Figura 3.57 (e)

$$\delta_7 - \Delta_\beta \cdot v_7' = \delta_4 + \frac{b_4}{2} \cdot v_4' \quad (\text{eq. 3.165})$$

- **Interseção [6]:** Dividindo-se a parede (1) em paredes (1 a) e (1 b)

$$\delta_1 - \Delta_\alpha \cdot v_1' = \delta_4 - \frac{b_4}{2} \cdot v_4' \quad (\text{eq. 3.166})$$

**Figura 3.57 – Estado deformado das paredes convergentes às interseções: (a) 1, (b) 2, (c) 3, (d) 4 e (e) 5**



Fonte: O Autor (2025)

Derivam-se duas vezes as equações (3.161) a (3.166) e reescrevem-se:

$$\delta_3'' - \frac{b_3}{2} \cdot v_3''' = \delta_1'' + \frac{b_1}{2} \cdot v_1''' \quad (\text{eq. 3.167 a})$$

$$\delta_1'' - \frac{b_1}{2} \cdot v_1''' = \delta_6'' - \frac{b_6}{2} \cdot v_6''' \quad (\text{eq. 3.167 b})$$

$$\delta_2'' + \frac{b_2}{2} \cdot v_2''' = \delta_7'' + \frac{b_7}{2} \cdot v_7''' \quad (\text{eq. 3.167 c})$$

$$\delta_5'' + \frac{b_5}{2} \cdot v_5''' = \delta_7'' - \frac{b_7}{2} \cdot v_7''' \quad (\text{eq. 3.167 d})$$

$$\delta_7'' - \Delta_\beta \cdot \nu_7''' = \delta_4'' + \frac{b_4}{2} \cdot \nu_4''' \quad (eq. 3.167 e)$$

$$\delta_1'' - \Delta_\alpha \cdot \nu_1''' = \delta_4'' - \frac{b_4}{2} \cdot \nu_4''' \quad (eq. 3.167 f)$$

Aplicam-se as equações (3.160) nas eq.'s (3.167) e concluem-se:

$$\text{A} \quad \delta_3'' - \frac{b_3}{2} \cdot \nu_3''' = \delta_1'' + \frac{b_1}{2} \cdot \nu_1'''$$

$$\therefore \quad \frac{p_3 - q_1 - \bar{V}_i^{(1)}}{E \cdot A_3} - \frac{b_3}{2} \cdot \nu_3''' = \frac{p_1 + (q_1 - q_2 + q_6)}{E \cdot A_1} + \frac{b_1}{2} \cdot \nu_1'''$$

multiplicando toda a equação por  $(E \cdot A_1 \cdot A_3)$ , reescreve-se:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot (A_1 + A_3) - q_2 \cdot A_3 + q_6 \cdot A_3 &= \\ = -\bar{V}_i^{(1)} \cdot A_1 - \frac{b_1}{2} \cdot E \cdot A_1 \cdot A_3 \cdot \nu_1''' - \frac{b_3}{2} \cdot E \cdot A_1 \cdot A_3 \cdot \nu_3''' + p_3 \cdot A_1 - p_1 \cdot A_3 \end{aligned} \quad (eq. 3.168)$$

---

$$\text{B} \quad \delta_1'' - \frac{b_1}{2} \cdot \nu_1''' = \delta_6'' - \frac{b_6}{2} \cdot \nu_6'''$$

$$\therefore \quad \frac{p_1 + (q_1 - q_2 + q_6)}{E \cdot A_1} - \frac{b_1}{2} \cdot \nu_1''' = \frac{p_6 - q_2 - \bar{V}_f^{(2)}}{E \cdot A_6} - \frac{b_6}{2} \cdot \nu_6'''$$

multiplicando toda a equação por  $(E \cdot A_1 \cdot A_6)$ , reescreve-se:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot A_6 + q_2 \cdot (A_1 - A_6) + q_6 \cdot A_6 &= \\ = -\bar{V}_f^{(2)} \cdot A_1 + \frac{b_1}{2} \cdot E \cdot A_1 \cdot A_6 \cdot \nu_1''' - \frac{b_6}{2} \cdot E \cdot A_1 \cdot A_6 \cdot \nu_6''' - p_1 \cdot A_6 + p_6 \cdot A_1 \end{aligned} \quad (eq. 3.169)$$

---

$$\text{C} \quad \delta_2'' + \frac{b_2}{2} \cdot \nu_2''' = \delta_7'' + \frac{b_7}{2} \cdot \nu_7'''$$

$$\therefore \quad \frac{p_2 - q_3 - \bar{V}_f^{(1)}}{E \cdot A_2} + \frac{b_2}{2} \cdot \nu_2''' = \frac{p_7 + (q_3 + q_4 - q_5)}{E \cdot A_7} + \frac{b_7}{2} \cdot \nu_7'''$$

multiplicando toda a equação por  $(E \cdot A_2 \cdot A_7)$ , reescreve-se:

$$\begin{aligned} q_3 \cdot (A_7 + A_2) + q_4 \cdot A_2 - q_5 \cdot A_2 &= \\ = -\bar{V}_f^{(1)} \cdot A_7 + \frac{b_2}{2} \cdot E \cdot A_2 \cdot A_7 \cdot \nu_2''' - \frac{b_7}{2} \cdot E \cdot A_2 \cdot A_7 \cdot \nu_7''' + p_2 \cdot A_7 - p_7 \cdot A_2 \end{aligned} \quad (eq. 3.170)$$

---

$$\begin{matrix} D \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \delta_5'' + \frac{b_5}{2} \cdot v_5''' = \delta_7'' - \frac{b_7}{2} \cdot v_7'''$$

$$\therefore \quad \frac{p_5 - q_4 - \bar{V}_i^{(2)}}{E \cdot A_5} + \frac{b_5}{2} \cdot v_5''' = \frac{p_7 + (q_3 + q_4 - q_5)}{E \cdot A_7} - \frac{b_7}{2} \cdot v_7'''$$

multiplicando toda a equação por  $(E \cdot A_5 \cdot A_7)$ , reescreve-se:

$$\begin{aligned} q_4 \cdot (A_7 + A_5) + q_3 \cdot A_5 - q_5 \cdot A_5 = \\ = -\bar{V}_i^{(2)} \cdot A_7 + \frac{b_7}{2} \cdot E \cdot A_5 \cdot A_7 \cdot v_7''' + \frac{b_5}{2} \cdot E \cdot A_5 \cdot A_7 \cdot v_5''' + p_5 \cdot A_7 - p_7 \cdot A_5 \quad (eq. 3.171) \end{aligned}$$

-.-.-

$$\begin{matrix} E \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \delta_7'' - \Delta_\beta \cdot v_7''' = \delta_4'' + \frac{b_4}{2} \cdot v_4'''$$

$$\therefore \quad \frac{p_7 + (q_3 + q_4 - q_5)}{E \cdot A_7} - \Delta_\beta \cdot v_7''' = \frac{p_4 + q_5 - q_6}{E \cdot A_4} + \frac{b_4}{2} \cdot v_4'''$$

multiplicando toda a equação por  $(E \cdot A_4 \cdot A_7)$ , reescreve-se:

$$\begin{aligned} q_5 \cdot (A_4 + A_7) - q_4 \cdot A_4 - q_3 \cdot A_4 - q_6 \cdot A_7 = \\ = -\Delta_\beta \cdot E \cdot A_4 \cdot A_7 \cdot v_7''' - \frac{b_4}{2} \cdot E \cdot A_4 \cdot A_7 \cdot v_4''' + p_7 \cdot A_4 - p_4 \cdot A_7 \quad (eq. 3.172) \end{aligned}$$

-.-.-

$$\begin{matrix} F \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad \delta_1'' - \Delta_\alpha \cdot v_1''' = \delta_4'' - \frac{b_4}{2} \cdot v_4'''$$

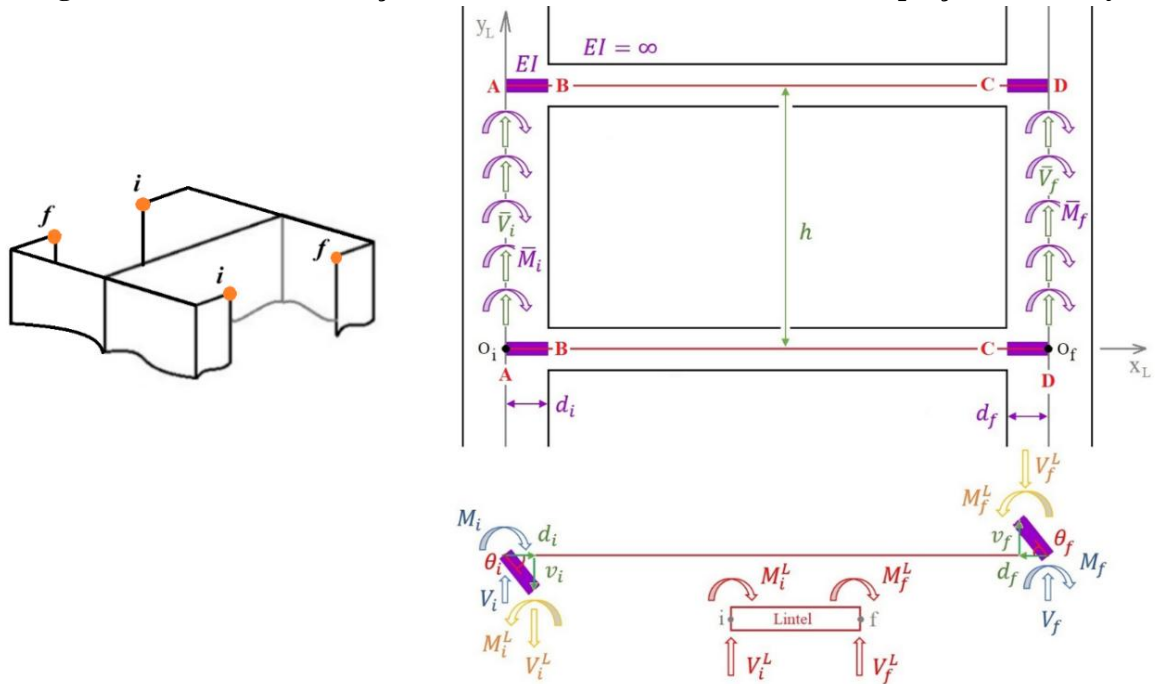
$$\therefore \quad \frac{p_1 + (q_1 - q_2 + q_6)}{E \cdot A_1} - \Delta_\alpha \cdot v_1''' = \frac{p_4 + (q_5 - q_6)}{E \cdot A_4} - \frac{b_4}{2} \cdot v_4'''$$

multiplicando toda a equação por  $(E \cdot A_1 \cdot A_4)$ , reescreve-se:

$$\begin{aligned} q_6 \cdot (A_1 + A_4) - q_2 \cdot A_4 + q_1 \cdot A_4 - q_5 \cdot A_1 = \\ = -\Delta_\alpha \cdot E \cdot A_1 \cdot A_4 \cdot v_1''' - \frac{b_4}{2} \cdot E \cdot A_1 \cdot A_4 \cdot v_4''' + p_4 \cdot A_1 - p_1 \cdot A_4 \quad (eq. 3.173) \end{aligned}$$

### b.1) Análise do lintel (1)

Na Figura 3.58 é apresentado o estado de reações elásticas dos lintéis horizontais dispostos na seção aberta 1, denominados de lintel (1).

**Figura 3.58 – Estado de reações elásticas dos lintéis horizontais via Equações de Maney**

Fonte: Adaptado de (Melo, 2019)

Lembrando que a Técnica do Meio Contínuo consiste em uniformizar a distribuição das reações elásticas  $[\bar{V}_i^{(j)}; \bar{V}_f^{(j)}; \bar{M}_i^{(j)}; \bar{M}_f^{(j)}]$  dos  $j$ -ésimos lintéis, com  $j = 1$  e  $j = 2$ , pela divisão do espaçamento  $h$  dos lintéis. Assim, escrevem-se:

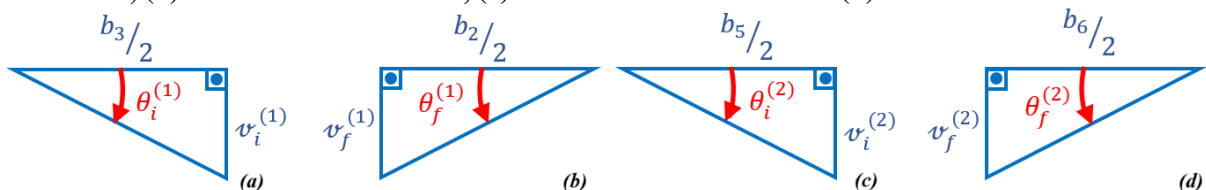
$$\bar{M}_i^{(j)} = \frac{k_i^{(j)} \cdot \theta_i^{(j)} + a_i^{(j)} \cdot \theta_f^{(j)} - b_i^{(j)} \cdot v_i^{(j)} + b_i^{(j)} \cdot v_f^{(j)}}{h} \quad (\text{eq. 3.174})$$

$$\bar{M}_f^{(j)} = \frac{a_f^{(j)} \cdot \theta_i^{(j)} + k_f^{(j)} \cdot \theta_f^{(j)} - b_f^{(j)} \cdot v_i^{(j)} + b_f^{(j)} \cdot v_f^{(j)}}{h} \quad (\text{eq. 3.175})$$

$$\bar{V}_i^{(j)} = \frac{-b_i^{(j)} \cdot \theta_i^{(j)} + b_f^{*(j)} \cdot \theta_f^{(j)} + t^{(j)} \cdot v_i^{(j)} + t^{(j)} \cdot v_f^{(j)}}{h} \quad (\text{eq. 3.176})$$

$$\bar{V}_f^{(j)} = \frac{b_i^{(j)} \cdot \theta_i^{(j)} + b_f^{(j)} \cdot \theta_f^{(j)} - t^{(j)} \cdot v_i^{(j)} + t^{(j)} \cdot v_f^{(j)}}{h} \quad (\text{eq. 3.177})$$

Além da Figura 3.59 contemplar a geometria do estado de rotação dos trechos infinitamente rígido dos lintéis (1) e (2).

**Figura 3.59 – Estado de rotação dos trechos infinitamente rígido para o: (a) lintel 1 no trecho inicial, (b) lintel 1 no trecho final, (c) lintel 2 no trecho inicial e (d) lintel 2 no trecho final**

Fonte: O Autor (2025)

Elencam-se as rotações inicial e final, para os lintéis e lembrando que  $\nu = \omega \cdot \phi'$ , como:

$$\theta_i^{(1)} = \frac{\nu_i^{(1)}}{\frac{b_3}{2}} \Rightarrow \theta_i^{(1)} = \frac{\omega_i^{(1)} \cdot \phi'}{\frac{b_3}{2}} \Rightarrow \theta_i^{(1)} = \frac{2 \cdot \omega_i^{(1)} \cdot \phi'}{b_3} \quad (eq. 3.178)$$

$$\theta_f^{(1)} = \frac{\nu_f^{(1)}}{\frac{b_2}{2}} \Rightarrow \theta_f^{(1)} = \frac{\omega_f^{(1)} \cdot \phi'}{\frac{b_2}{2}} \Rightarrow \theta_f^{(1)} = \frac{2 \cdot \omega_f^{(1)} \cdot \phi'}{b_2} \quad (eq. 3.179)$$

$$\theta_i^{(2)} = \frac{2 \cdot \omega_i^{(2)} \cdot \phi'}{b_5} \quad (eq. 3.180)$$

$$\theta_f^{(2)} = \frac{2 \cdot \omega_f^{(2)} \cdot \phi'}{b_6} \quad (eq. 3.181)$$

E as deflexões verticais, por lintel, sendo expressas por:

$$\nu_i^{(1)} = \omega_i^{(1)} \cdot \phi' \quad (eq. 3.182)$$

$$\nu_f^{(1)} = \omega_f^{(1)} \cdot \phi' \quad (eq. 3.183)$$

$$\nu_i^{(2)} = \omega_i^{(2)} \cdot \phi' \quad (eq. 3.184)$$

$$\nu_f^{(2)} = \omega_f^{(2)} \cdot \phi' \quad (eq. 3.185)$$

Faz-se também:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{-\bar{V}_i^{(1)} \cdot A_1}{\phi'} \\ &= \frac{-A_1}{h \cdot \phi'} \cdot \left[ -b_i^{(1)} \cdot \frac{2 \cdot \omega_i^{(1)} \cdot \phi'}{b_3} + b_f^{*(1)} \cdot \frac{2 \cdot \omega_f^{(1)} \cdot \phi'}{b_2} + t^{(1)} \cdot \omega_i^{(1)} \cdot \phi' + t^{(1)} \cdot \omega_f^{(1)} \cdot \phi' \right] \\ &= \frac{A_1}{h} \cdot \left\{ \left[ 2 \cdot \frac{b_i^{(1)}}{b_3} - t^{(1)} \right] \cdot \omega_i^{(1)} + \left[ t^{(1)} - 2 \cdot \frac{b_f^{*(1)}}{b_2} \right] \cdot \omega_f^{(1)} \right\} \end{aligned} \quad (eq. 3.186)$$

---

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{-\bar{V}_f^{(2)} \cdot A_1}{\phi'} \\ &= \frac{-A_1}{h \cdot \phi'} \cdot \left[ b_i^{(2)} \cdot \frac{2 \cdot \omega_i^{(2)} \cdot \phi'}{b_5} + b_f^{(2)} \cdot \frac{2 \cdot \omega_f^{(2)} \cdot \phi'}{b_6} + t^{(2)} \cdot \omega_i^{(2)} \cdot \phi' + t^{(2)} \cdot \omega_f^{(2)} \cdot \phi' \right] \\ &= \frac{A_1}{h} \cdot \left\{ \left[ t^{(2)} - 2 \cdot \frac{b_i^{(2)}}{b_5} \right] \cdot \omega_i^{(2)} - \left[ 2 \cdot \frac{b_f^{(2)}}{b_6} + t^{(2)} \right] \cdot \omega_f^{(2)} \right\} \end{aligned} \quad (eq. 3.187)$$

---

$$\mathbf{d}_3 = \frac{-\bar{V}_f^{(1)} \cdot A_7}{\phi'} \equiv \frac{A_7}{h} \cdot \left\{ \left[ \mathbf{t}^{(1)} - 2 \cdot \frac{\mathbf{b}_i^{(1)}}{b_3} \right] \cdot \boldsymbol{\omega}_i^{(1)} + \left[ 2 \cdot \frac{\mathbf{b}_f^{(1)}}{b_2} + \mathbf{t}^{(1)} \right] \cdot \boldsymbol{\omega}_f^{(1)} \right\} \quad (eq. 3.188)$$

---

$$\mathbf{d}_4 = \frac{-\bar{V}_i^{(2)} \cdot A_7}{\phi'} \equiv \frac{A_7}{h} \cdot \left\{ \left[ 2 \cdot \frac{\mathbf{b}_i^{(2)}}{b_5} - \mathbf{t}^{(2)} \right] \cdot \boldsymbol{\omega}_i^{(2)} + \left[ \mathbf{t}^{(2)} - 2 \cdot \frac{\mathbf{b}_f^{*(2)}}{b_6} \right] \cdot \boldsymbol{\omega}_f^{(2)} \right\} \quad (eq. 3.189)$$

Escreve-se o vetor  $\{\mathbf{M}_2\}$ , como:

$$\{\mathbf{M}_2\} = \begin{Bmatrix} -A_1 \cdot \bar{V}_i^{(1)} \\ -A_1 \cdot \bar{V}_f^{(2)} \\ -A_7 \cdot \bar{V}_f^{(1)} \\ -A_7 \cdot \bar{V}_i^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\nu}' \\ \boldsymbol{\omega}' \\ \phi' \end{Bmatrix} \equiv [\mathbf{M}_3] \cdot \{\boldsymbol{\nu}'\} \quad (eq. 3.190)$$

Organizando matricialmente as equações (3.168) a (3.173), ficando:

$$[\mathbf{M}_1] \cdot \{q\} = \{\mathbf{M}_2\} + [\mathbf{M}_4] \cdot \{\boldsymbol{\nu}_\omega'''\} + [\mathbf{M}_{10}] \cdot \{p\} \quad (eq. 3.191)$$

Aplica-se a equação (3.190) na eq. (3.191), obtém-se:

$$\{q\} = [\mathbf{M}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_3] \cdot \{\boldsymbol{\nu}'\} + [\mathbf{M}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_4] \cdot \{\boldsymbol{\nu}_\omega'''\} + [\mathbf{M}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_{10}] \cdot \{p\} \quad (eq. 3.192)$$

sendo:

$$[\mathbf{M}_1] = \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & -A_3 & 0 & 0 & 0 & A_3 \\ A_6 & A_1 - A_6 & 0 & 0 & 0 & A_6 \\ 0 & 0 & A_2 + A_7 & A_2 & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & A_5 + A_7 & -A_5 & 0 \\ 0 & 0 & -A_4 & -A_4 & A_4 + A_7 & -A_7 \\ A_4 & -A_4 & 0 & 0 & -A_1 & A_1 + A_4 \end{bmatrix}; \{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}; \{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{Bmatrix};$$

$$[\mathbf{M}_4] = \frac{E}{2} \cdot \begin{bmatrix} -b_1 \cdot A_1 \cdot A_3 & 0 & -b_3 \cdot A_1 \cdot A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 \cdot A_1 \cdot A_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_6 \cdot A_1 \cdot A_6 \\ 0 & b_2 \cdot A_2 \cdot A_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_7 \cdot A_2 \cdot A_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 \cdot A_5 \cdot A_7 & b_7 \cdot A_5 \cdot A_7 \\ 0 & 0 & 0 & -b_4 \cdot A_4 \cdot A_7 & 0 & 0 & -2 \cdot \Delta_\beta \cdot A_4 \cdot A_7 \\ 2 \cdot \Delta_\alpha \cdot A_1 \cdot A_4 & 0 & 0 & -b_4 \cdot A_1 \cdot A_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{M}_{10}] = \begin{bmatrix} -A_3 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & A_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_7 & 0 & -A_5 \\ 0 & 0 & 0 & -A_7 & 0 & 0 & A_4 \\ -A_4 & 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \text{ e } \{\boldsymbol{\nu}_\omega'''\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\nu}_1''' \\ \boldsymbol{\nu}_2''' \\ \boldsymbol{\nu}_3''' \\ \boldsymbol{\nu}_4''' \\ \boldsymbol{\nu}_5''' \\ \boldsymbol{\nu}_6''' \\ \boldsymbol{\nu}_7''' \end{Bmatrix}.$$

### c) Equilíbrio dos esforços cortantes

#### c.1) Esforços cortantes internos

Organizando as equações (3.159) e (3.160) em formato matricial tem-se:

$$\{\mathcal{V}_\omega\} = [M_5] \cdot \{\mathcal{V}_\omega'''\} + \{M_6\} + [M_7] \cdot \{q\} \quad (eq. 3.193)$$

com:

$$[M_5] = \begin{bmatrix} -J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -J_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_7 \end{bmatrix}; \quad [M_7] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & -2 \cdot \Delta_\beta \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -b_5 & 0 & 0 \\ 0 & b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_7 & -b_7 & 2 \cdot \Delta_\alpha & 0 \end{bmatrix};$$

$$\{M_6\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\bar{M}_i^{(1)} \\ -\bar{M}_i^{(2)} \\ 0 \\ -\bar{M}_f^{(1)} \\ 0 \\ -\bar{M}_f^{(2)} \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_8 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathcal{V}' \\ \omega' \\ \phi' \end{Bmatrix} \equiv [M_6] \cdot \{\mathcal{V}'\} \quad (eq. 3.194)$$

Ao substituir a equação (98) e na eq. (97), escreve-se:

$$\{\mathcal{V}_\omega\} = [M_5] \cdot \{\mathcal{V}_\omega'''\} + [M_6] \cdot \{\mathcal{V}'\} + [M_7] \cdot \{q\} \quad (eq. 3.195)$$

onde:

$$d_5 = -\frac{\bar{M}_i^{(1)}}{\phi'} \equiv \frac{1}{h} \cdot \left\{ \left[ -2 \cdot \frac{k_i^{(1)}}{b_3} + b_i^{(1)} \right] \cdot \omega_i^{(1)} - \left[ 2 \cdot \frac{a_i^{(1)}}{b_2} - b_i^{(1)} \right] \cdot \omega_f^{(1)} \right\} \quad (eq. 3.196)$$

$$d_6 = -\frac{\bar{M}_i^{(2)}}{\phi'} \equiv \frac{1}{h} \cdot \left\{ \left[ -2 \cdot \frac{k_i^{(2)}}{b_5} + b_i^{(2)} \right] \cdot \omega_i^{(2)} - \left[ 2 \cdot \frac{a_i^{(2)}}{b_6} - b_i^{(2)} \right] \cdot \omega_f^{(2)} \right\} \quad (eq. 3.197)$$

$$d_7 = -\frac{\bar{M}_f^{(1)}}{\phi'} \equiv \frac{1}{h} \cdot \left\{ \left[ b_f^{(1)} - 2 \cdot \frac{a_f^{(1)}}{b_3} \right] \cdot \omega_i^{(1)} - \left[ 2 \cdot \frac{k_f^{(1)}}{b_2} + b_f^{(1)} \right] \cdot \omega_f^{(1)} \right\} \quad (eq. 3.198)$$

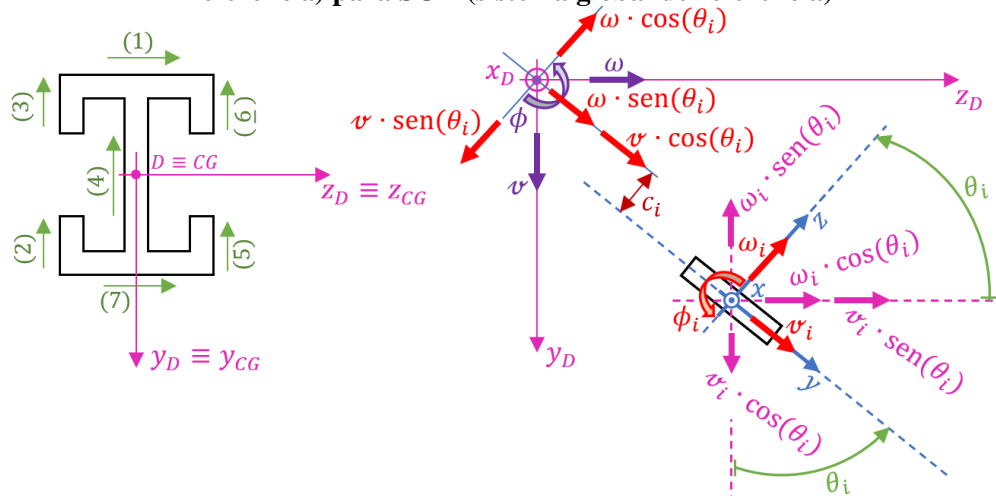
$$d_8 = -\frac{\bar{M}_f^{(2)}}{\phi'} \equiv \frac{1}{h} \cdot \left\{ \left[ b_f^{(2)} - 2 \cdot \frac{a_f^{(2)}}{b_5} \right] \cdot \omega_i^{(2)} - \left[ 2 \cdot \frac{k_f^{(2)}}{b_6} + b_f^{(2)} \right] \cdot \omega_f^{(2)} \right\} \quad (eq. 3.199)$$

Aplica-se a equação (3.192) na eq. (3.195), escreve-se o vetor  $\{\mathcal{V}_\omega\}$ , como:

$$\{\mathcal{V}_\omega\} = ([M_5] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot \{\mathcal{V}_\omega'''\} + ([M_6] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_3]) \cdot \{\mathcal{V}'\} + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\} \quad (eq. 3.200)$$

Valendo-se da rotação no espaço, conforme ilustrado na Figura 3.60.

**Figura 3.60 – Transformação de sistema de referências, passando do SLR (sistema local de referência) para SGR (sistema global de referência)**



Fonte: O Autor (2025)

Deseja-se correlacionar os graus de liberdade  $v$ ,  $\omega$  e  $\phi$  em relação ao deslocamento  $v_i$  do  $i$ -ésima parede, sendo a rotação via a parcela  $(c_i \cdot \phi)$ , vide Figura 3.61, assim:

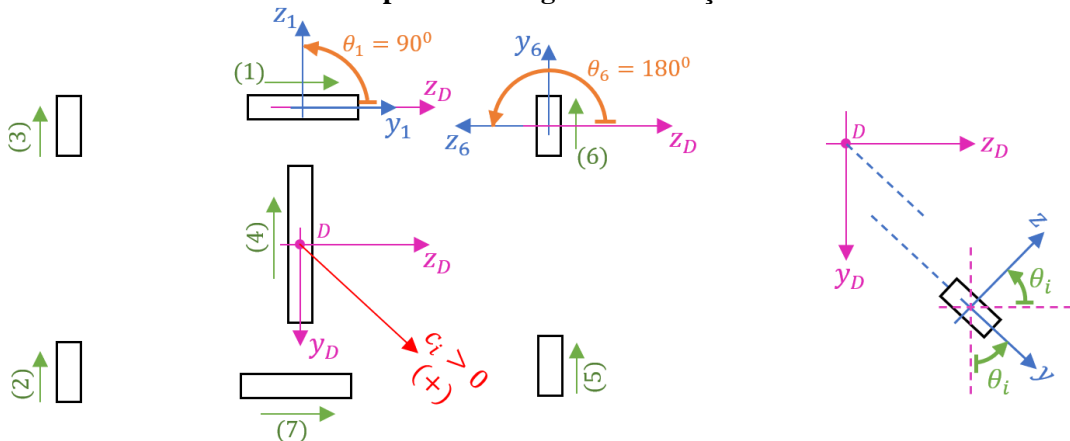
$$v_i = a_i \cdot v + b_i \cdot \omega + c_i \cdot \phi$$

com:  $a_i = \cos \theta_i$  e  $b_i = \sin \theta_i$ .

$$\{v_\omega\} = [M_8] \cdot \{v\} \quad (eq. 3.201)$$

$$\text{onde: } [M_8] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 \\ a_6 & b_6 & c_6 \\ a_7 & b_7 & c_7 \end{bmatrix}; \{v\} = \begin{Bmatrix} v \\ \omega \\ \phi \end{Bmatrix}; \begin{aligned} \theta_1 = \theta_7 = 90^\circ &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_7 = 0 \\ b_1 = b_7 = 1 \end{cases} \\ \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 180^\circ &\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \\ c_4 &= 0 \\ c_1 = -c_7 &= -\frac{b_4}{2} \\ c_2 = c_3 = -c_5 = -c_6 &= -\frac{b_1}{2} \end{aligned}$$

**Figura 3.61 – Paredes do núcleo duplo T e os ângulos de rotação entre os sistemas de referência**



Fonte: O Autor (2025)

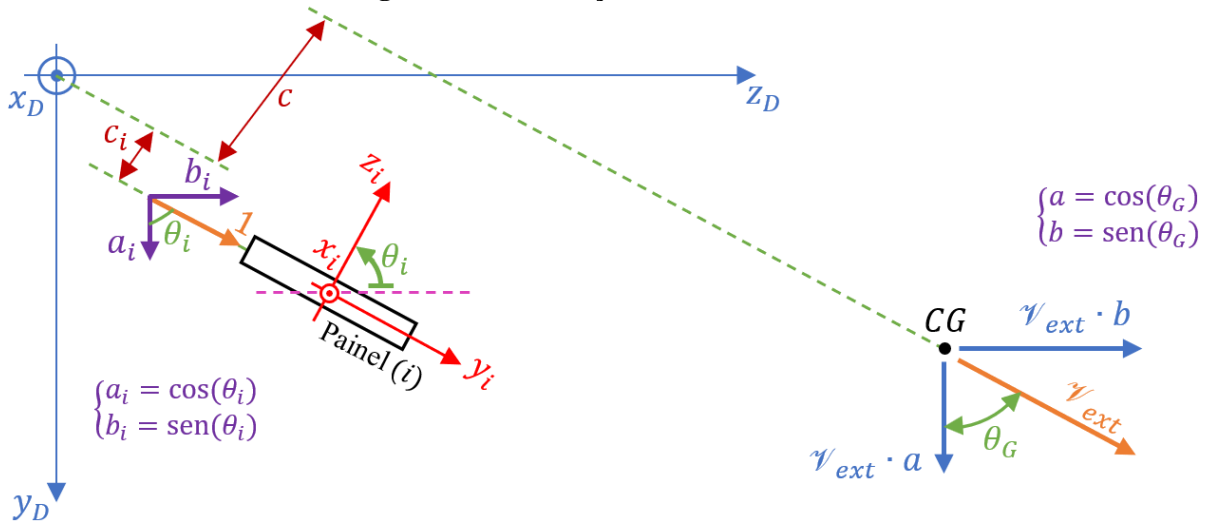
Ao aplicar a equação (3.201) na eq. (3.200), tem-se:

$$\{\mathcal{V}_\omega\} = ([\mathbf{M}_5] + [\mathbf{M}_7] \cdot [\mathbf{M}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_4]) \cdot [\mathbf{M}_8] \cdot \{\mathcal{V}'''\} + ([\mathbf{M}_6] + [\mathbf{M}_7] \cdot [\mathbf{M}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_3]) \cdot \{\mathcal{V}'\} + [\mathbf{M}_7] \cdot [\mathbf{M}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{M}_{10}] \cdot \{p\} \quad (eq. 3.202)$$

### c.2) Esforços cortantes externos

Agora, analisando o esforço cortante gerado pelo carregamento externo  $\mathcal{V}_{ext}$ , conforme ilustração apresentada na Figura 3.62.

Figura 3.62 – Esforço cortante externo



Fonte: O Autor (2025)

O equilíbrio em cortantes externos fica:

$$\begin{cases} \sum \mathcal{V}_i \cdot a_i = \mathcal{V}_{ext} \cdot a \\ \sum \mathcal{V}_i \cdot b_i = \mathcal{V}_{ext} \cdot b \\ \sum \mathcal{V}_i \cdot c_i + G \cdot \left( \sum I_{t_i} \right) \cdot \phi' = \mathcal{V}_{ext} \cdot c \end{cases}$$

onde:  $I_{t_i} = \frac{e_i^3 \cdot L_i}{3} \rightarrow$  é o momento de inércia à torção das paredes finas; e

$G \cdot I_{t_i} \rightarrow$  é a rigidez á torção de cada parede.

Da aplicação as sete paredes, escrevem-se:

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{ext} \cdot a = \mathcal{V}_1 \cdot a_1 + \mathcal{V}_2 \cdot a_2 + \mathcal{V}_3 \cdot a_3 + \mathcal{V}_4 \cdot a_4 + \mathcal{V}_5 \cdot a_5 + \mathcal{V}_6 \cdot a_6 + \mathcal{V}_7 \cdot a_7 \\ \mathcal{V}_{ext} \cdot b = \mathcal{V}_1 \cdot b_1 + \mathcal{V}_2 \cdot b_2 + \mathcal{V}_3 \cdot b_3 + \mathcal{V}_4 \cdot b_4 + \mathcal{V}_5 \cdot b_5 + \mathcal{V}_6 \cdot b_6 + \mathcal{V}_7 \cdot b_7 \\ \mathcal{V}_{ext} \cdot c = \mathcal{V}_1 \cdot c_1 + \mathcal{V}_2 \cdot c_2 + \mathcal{V}_3 \cdot c_3 + \mathcal{V}_4 \cdot c_4 + \mathcal{V}_5 \cdot c_5 + \mathcal{V}_6 \cdot c_6 + \mathcal{V}_7 \cdot c_7 + G \cdot \left( \sum I_{t_i} \right) \cdot \phi' \end{cases}$$

$$\mathcal{V}_{ext} \cdot \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_3 \\ \mathcal{V}_4 \\ \mathcal{V}_5 \\ \mathcal{V}_6 \\ \mathcal{V}_7 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \cdot \left( \sum I_{t_i} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathcal{V}' \\ \omega' \\ \phi' \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{V}_{ext} \cdot \{A^*\} = [M_8]^T \cdot \{\mathcal{V}_\omega\} + [M_9] \cdot \{\mathcal{V}'\} \quad (eq. 3.203)$$

#### d) Sistema de Equações Diferenciais da análise estática

Por fim, aplicando a equação (3.202) na eq. (3.203), chega-se à EDO do problema estático dos painéis-parede. Assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ext} \cdot \{A^*\} &= [M_8]^T \cdot ([M_5] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot [M_8] \cdot \{\mathcal{V}'''\} + \\ &+ [M_8]^T \cdot ([M_6] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_3]) \cdot \{\mathcal{V}'\} + [M_9] \cdot \{\mathcal{V}'\} + [M_8]^T \cdot [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\} \end{aligned}$$

Reescrita como:

$$\begin{aligned} -[J] \cdot \{\mathcal{V}'''\} + [S] \cdot \{\mathcal{V}'\} &= \{\mathcal{V}_f\} \\ - EDO da análise estática da Teoria do Painéis – Parede - \end{aligned} \quad (eq. 3.204)$$

sendo:  $[J] = -[M_8]^T \cdot ([M_5] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_4]) \cdot [M_8]$ ;

$[S] = [M_8]^T \cdot ([M_6] + [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_3]) + [M_9]$ ; e

$\{\mathcal{V}_f\} = \mathcal{V}_{ext} \cdot \{A^*\} - [M_8]^T \cdot [M_7] \cdot [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\}$ .

## 3.6 RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

O sistema de equações diferenciais da análise estática dos núcleos estruturais é acoplado, uma vez que cada equação do sistema depende de mais de um dos graus de liberdade  $\mathcal{V}$ ;  $\omega$  e  $\phi$ . Assim, o sistema a ser desacoplado é a equação (3.204). Onde:  $\mathcal{V}$  e  $\omega$  são os deslocamentos na direção y e z, respectivamente; e ainda se tem  $\phi$  como o empenamento da seção de paredes finas.

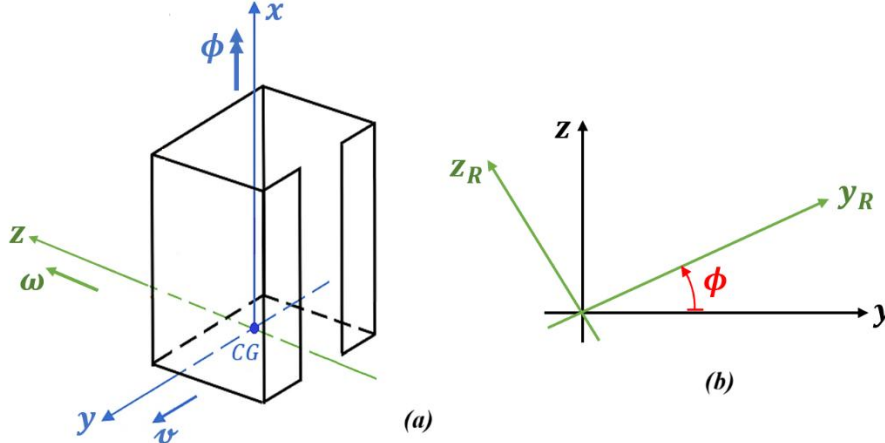
A diagonalização do sistema de equações diferenciais é realizada mediante as seguintes transformações de referencial:

✚ **1ª Transformação:** Mediante matriz de rotação  $[R_e]$  do sistema cartesiano para o sistema de referência dos eixos principais de momento de inércia da seção transversal. Assim:

Na Figura 3.63 consta o sistema coordenado cartesiano do núcleo, além dos graus de liberdade e da rotação para os eixos principais de inércia da seção transversal. Onde a transformação do vetor de graus de liberdade e suas derivações, por:

$$\begin{aligned}\{v\} &= [R_e] \cdot \{\bar{v}\} \\ \{v'\} &= [R_e] \cdot \{\bar{v}'\} \\ \{v'''\} &= [R_e] \cdot \{\bar{v}'''\}\end{aligned}$$

**Figura 3.63 – Núcleo estrutural: (a) indicação dos graus de liberdade e (b) rotação entre os eixos cartesianos  $y, z$  para os eixos principais de inércia ( $y_R, z_R$ )**



Fonte: O Autor (2025)

sendo:

$$[R_e] = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & z_R \\ \sin \phi & \cos \phi & -y_R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \begin{aligned} y_R &= \frac{-J_{13} \cdot J_{12} + J_{23} \cdot J_{11}}{d} \\ z_R &= \frac{-J_{13} \cdot J_{22} + J_{23} \cdot J_{12}}{d} \\ \operatorname{tg}(2\phi) &= \frac{2 \cdot J_{12}}{J_{11} - J_{22}} \\ d &= J_{11} \cdot J_{22} - (J_{12})^2 \end{aligned}$$

Desta forma, na equação diferencial substitui-se  $\{v'\}$  e  $\{v'''\}$  para o novo referencial  $\{\bar{v}\}$  e pré-multiplicar toda a equação (3.204) por  $[R_e]^T$ , esta última a fim de transformar o vetor de esforços cortante, ficando:

$$\begin{aligned} -[R_e]^T \cdot [J] \cdot [R_e] \cdot \{\bar{v}'''\} + [R_e]^T \cdot [S] \cdot [R_e] \cdot \{\bar{v}'\} &= [R_e]^T \cdot \{\gamma_f\} \\ \therefore \quad \boxed{-[\bar{J}] \cdot \{\bar{v}'''\} + [\bar{S}] \cdot \{\bar{v}'\} = \{\bar{\gamma}_f\}} \end{aligned}$$

onde:  $[\bar{J}] = [R_e]^T \cdot [J] \cdot [R_e]$ ;

$[\bar{S}] = [R_e]^T \cdot [S] \cdot [R_e]$ ;

$\{\bar{\gamma}_f\} = [R_e]^T \cdot \{\gamma_f\}$

Observando-se que a matriz  $[J]$  no referencial  $[\bar{J}]$  já está diagonalizada, uma vez que é referencial no sistema desacoplado de rigidez, ou seja, nos eixos principais de inércia, o que conduz a rigidez desacoplada.

✚ **2ª Transformação:** Agora via transformação da matriz  $[\bar{J}]$  em matriz identidade, valendo-se da transformação quadrática por  $[\bar{J}]^{-\frac{1}{2}}$ , vejamos:

$$\{\bar{\nu}\} = [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{\nu\}^*$$

$$\{\bar{\nu}'\} = [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{\nu'\}^*$$

$$\{\bar{\nu}'''\} = [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{\nu'''\}^*$$

$$\text{Ficando:} \quad -[\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot [\bar{J}] \cdot [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{\bar{\nu}'''\} + [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot [\bar{S}] \cdot [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{\bar{\nu}'\} = [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{\bar{\nu}_f\}$$

$$\therefore \quad \boxed{-[\mathbf{I}] \cdot \{\nu'''\}^* + [\mathbf{S}]^* \cdot \{\nu'\}^* = \{\nu_f\}^*}$$

$$\text{onde: } [\mathbf{S}]^* = [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot [\bar{S}] \cdot [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \equiv [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot [R_e]^T \cdot [S] \cdot [R_e] \cdot [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\{\nu_f\}^* = [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{\bar{\nu}_f\} \equiv [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot [R_e]^T \cdot \{\nu_f\}$$

✚ **3ª Transformação:** Diagonalização da matriz  $[\mathbf{S}]^*$  mediante transformação ao sistema de coordenadas  $\{\nu\}^{**}$ , mediante matriz  $[A_V]$  de autoversores e resultando na obtenção da matriz de autovalores  $[\lambda^2]$ . Logo:

$$\{\nu\}^* = [A_V] \cdot \{\nu\}^{**}$$

$$\{\nu'\}^* = [A_V] \cdot \{\nu'\}^{**}$$

$$\{\nu'''\}^* = [A_V] \cdot \{\nu'''\}^{**}$$

$$\text{Ficando:} \quad -[\mathbf{I}] \cdot \{\nu'''\}^{**} + [A_V]^T \cdot [\mathbf{S}]^* \cdot [A_V] \cdot \{\nu'\}^* = [A_V]^T \cdot \{\nu_f\}^*$$

$$\therefore \quad \boxed{-[\mathbf{I}] \cdot \{\nu'''\}^{**} + [\lambda^2] \cdot \{\nu'\}^{**} = \{\nu_f\}^{**}}$$

$$\text{onde: } [\lambda^2] = [A_V]^T \cdot [\mathbf{S}]^* \cdot [A_V] - \text{é uma matriz diagonal}$$

(só tem elementos não nulos na diagonal principal)

$$\{\nu_f\}^{**} = [A_V]^T \cdot \{\nu_f\}^*$$

$$[A_V] - \text{é a matriz de autoversores da matriz de rigidez } [\mathbf{S}]^*.$$

✚ **4ª Transformação:** Após diagonalizar o sistema num referencial generalizado é necessário passar as condições de contorno  $\{\nu_o\}$  e  $\{\dot{\nu}_o\}$  no referencial inicial para  $\{\nu_o\}^{**}$  e  $\{\dot{\nu}_o\}^{**}$  no referencial generalizado mediante a manipulação das três transformações de referencial:

$$\{\nu\} = [R_e] \cdot \{\bar{\nu}\}$$

$$= [R_e] \cdot [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{\nu\}^*$$

$$= [R_e] \cdot [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot [A_V] \cdot \{\nu\}^{**}$$

Por analogia ao procedido na diagonalização de sistemas dinâmicos, faz-se:  $[\Phi] = [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot [A_V]$  e daí reescreve-se:

$$\{\nu\} = [R_e] \cdot [\Phi] \cdot \{\nu\}^{**}$$


Ao pré-multiplicar por  $[R_e]^{-1}$  e em seguida por  $[\Phi]^{-1}$ , conclui-se:

$$\{\nu\}^{**} = [\Phi]^{-1} \cdot [R_e]^{-1} \cdot \{\nu\}$$

Por fim, as condições de contorno no sistema de coordenadas generalizadas serão expressas por:

$$\{\nu_o\}^{**} = [\Phi]^{-1} \cdot [R_e]^{-1} \cdot \{\nu_o\}$$

$$\{\dot{\nu}_o\}^{**} = [\Phi]^{-1} \cdot [R_e]^{-1} \cdot \{\dot{\nu}_o\}$$

 **5ª Transformação:** Expressar o vetor de esforços cortantes  $\{\nu_f\}^{**}$  mediante matriz modal ponderada  $[\Phi]$ , ficando:

$$\begin{aligned} \{\nu_f\}^{**} &= [A_V]^T \cdot \{\nu_f\}^* \\ &= [A_V]^T \cdot [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot \{\overline{\nu_f}\} \\ &= [A_V]^T \cdot [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot [R_e]^T \cdot \{\nu_f\} \\ &= [\Phi]^T \cdot [R_e]^T \cdot \{\nu_f\} \end{aligned}$$

#### a) Rotina de cálculo

A diagonalização do sistema de equações diferenciais é realizada mediante as seguintes etapas:

##### 1. Montar o Sistema de EDO's:

$$-[J] \cdot \{\nu'''\} + [S] \cdot \{\nu'\} = \{\nu_f\}$$

##### 2. Diagonalizar a Matriz $[J]$ :

Calcular  $[R_e] \rightarrow$  Matriz de Autoversores

$$[R_e] = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & z_R \\ \sin \phi & \cos \phi & -y_R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcular  $[\bar{J}] \rightarrow$  Matriz de Autovalores

$$[\bar{J}] = [R_e]^T \cdot [J] \cdot [R_e]$$

##### 3. Calcular a Matriz $[S]^*$ :

$$[S]^* = [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot [R_e]^T \cdot [S] \cdot [R_e] \cdot [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}}$$

##### 4. Diagonalizar a Matriz $[S]^*$ : Via Método de Jacobi

Calcular  $[A_V] \rightarrow$  Matriz de Autoversores (Modal)

Calcular  $[\lambda^2] \rightarrow$  Matriz de Autovalores (matriz diagonal)

$$[\lambda^2] = [A_V]^T \cdot [S]^* \cdot [A_V]$$

5. **Calcular a Matriz Modal Ponderada:**

$$[\Phi] = [\bar{J}]^{-\frac{1}{2}} \cdot [A_V]$$

6. **Calcular o Vetor de Esforços Cortantes no Referencial Generalizado:**

$$\{\mathcal{V}_f\}^{**} = [\Phi]^T \cdot [R_e]^T \cdot \{\mathcal{V}_f\}$$

7. **Reescrever as EDO's no Referencial Generalizado:**

$$-\{\mathcal{V}'''\}^{**} + [\lambda^2] \cdot \{\mathcal{V}'\}^{**} = \{\mathcal{V}_f\}^{**}$$

Ressaltando que já se encontra desacoplado e será:

$$-\mathcal{V}_j''''^{**} + \lambda_j^2 \cdot \mathcal{V}_j'^{**} = \mathcal{V}_{f_j}^{**} \quad ; \quad \{\mathcal{V}\} = \begin{Bmatrix} \mathcal{V} \\ \omega \\ \phi \end{Bmatrix}$$

8. **Solucionar o conjunto de EDO's considerando-se as seguintes condições iniciais:**

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}_o\}^{**} &= [\Phi]^{-1} \cdot [R_e]^{-1} \cdot \{\mathcal{V}_o\} \\ \{\dot{\mathcal{V}}_o\}^{**} &= [\Phi]^{-1} \cdot [R_e]^{-1} \cdot \{\dot{\mathcal{V}}_o\} \end{aligned}$$

9. **Calcular as respostas no Referencial Inicial:**

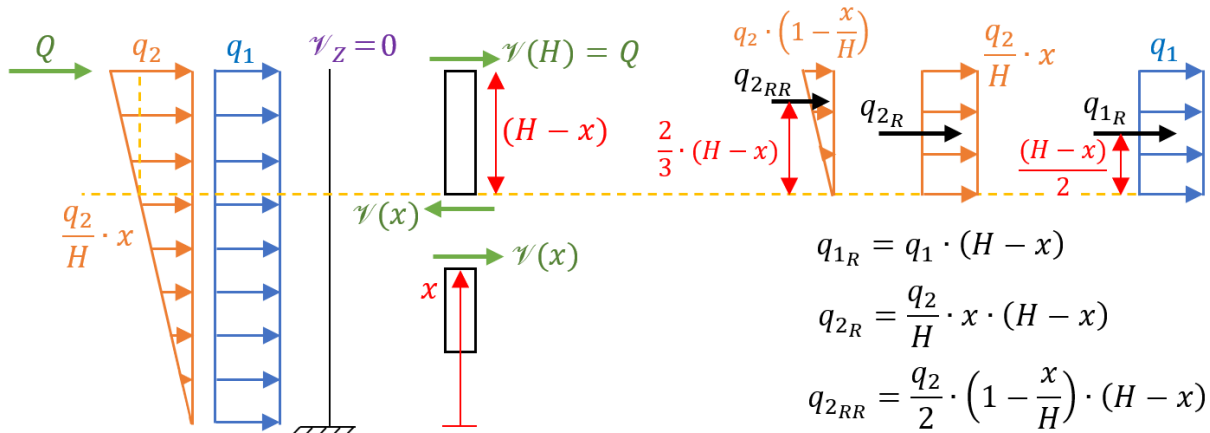
$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}\} &= [R_e] \cdot [\Phi] \cdot \{\mathcal{V}\}^{**} \\ &= [\bar{\Phi}] \cdot \{\mathcal{V}\}^{**} \end{aligned}$$

onde:  $[\bar{\Phi}] = [R_e] \cdot [\Phi]$ .

b) **Grau do polinômio particularizante**

Na Figura 3.64 é exposto o processo de determinação da expressão do esforço cortante no pilar, tendo como variável o eixo axial  $x$ .

**Figura 3.64 – Indicação do carregamento lateral no pilar e a determinação do esforço cortante através do método das seções**



Fonte: O Autor (2025)

Ao equacionar e admitir que os carregamentos  $Q$ ,  $q_1$  e  $q_2$  são aplicados na direção  $y$ , conclui-se que a expressão do esforço cortante  $\mathcal{V}_y$  no referido eixo será função das aludidas cargas. Enquanto que o esforço cortante  $\mathcal{V}_z$  na direção  $z$  será nulo em todo o comprimento do pilar. Assim:

$$\mathcal{V}_y = f(Q, q_1, q_2, x, H) \quad ; \quad \mathcal{V}_z = 0$$

Equilibrando as forças na direção  $y$ , chega-se à expressão do esforço cortante:

$$\begin{aligned} \sum F(y) &= 0 \quad \therefore \quad \mathcal{V}_y(x) = \mathcal{V}(H) + q_{1R} + q_{2R} + q_{2RR} \\ \therefore \quad \mathcal{V}_y(x) &= Q + q_1 \cdot (H - x) + \frac{q_2}{H} \cdot x \cdot (H - x) + \frac{q_2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{H}\right) \cdot (H - x) \\ \therefore \quad \mathcal{V}_y(x) &= Q + q_1 \cdot H - q_1 \cdot x + q_2 \cdot x - \frac{q_2}{H} \cdot x^2 + \frac{q_2}{2} \cdot \left(H - x - x + \frac{x^2}{H}\right) \\ \therefore \quad \mathcal{V}_y(x) &= Q + (q_2 - q_1 - q_2) \cdot x + \left(-\frac{q_2}{H} + \frac{q_2}{2 \cdot H}\right) \cdot x^2 + q_1 \cdot H \\ \therefore \quad \mathcal{V}_y(x) &= D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3 \end{aligned}$$

$$\text{sendo: } D_1 = -\frac{q_2}{2 \cdot H} \quad ; \quad D_2 = -q_1 \quad ; \quad D_3 = Q + q_1 \cdot H$$

Como o esforço será expresso por função de 2º grau, logo a deflexão  $v$  será a integral tripla do esforço cortante, com isso o grau do polinômio da deflexão será cinco (5º grau). Assim esquematizado:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_y(x) \text{ é de } 2^\circ \text{ grau} &\rightarrow \text{logo: } v'''(x) = \mathcal{V}_y(x) \leftrightarrow v(x) = \int \int \int \mathcal{V}_y(x) dx dx dx \\ &\therefore v(x) \text{ de } 5^\circ \text{ grau} \end{aligned}$$

Por fim, a expressão da deflexão pode ser escrita de maneira genérica com seis (6) coeficientes a determinar, como:

$$v(x) = A_1 \cdot x^5 + A_2 \cdot x^4 + A_3 \cdot x^3 + A_4 \cdot x^2 + A_5 \cdot x + A_6$$

e a EDO desacoplada fica expressa por:


$$-v_j'''' + \lambda_j^2 \cdot v_j' = v_{f_j}'' \equiv D_1'' \cdot x^2 + D_2'' \cdot x + D_3''$$

sendo:  $D_k''$  a transformação dos coeficientes  $D_k$ , basicamente mediante a transformação de referenciais para a expressão do esforço cortante, conforme é expresso na etapa 6 da ROTINA DE CÁLCULO.

### c) Sistema de Coordenadas Generalizadas e momento fletor nulo no topo do pilar

Para facilitar a notação será reescrita a EDO desacoplada, como:

$$-v'''' + \lambda^2 \cdot v' = D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3$$

 **Solução Particular:** Na maior ordem de derivação faz-se a escrita de polinômio com mesmo grau que seja apresentado no termo particularizante da EDO:

$$v_p(x) = \int v'(x) dx \equiv \frac{A_1}{60} \cdot x^5 + \frac{A_2}{24} \cdot x^4 + \frac{A_3}{6} \cdot x^3 + \frac{A_4}{2} \cdot x^2 + A_5 \cdot x + A_6 \quad \leftarrow$$

$$v_p'(x) = \int v''(x) dx \equiv \frac{A_1}{12} \cdot x^4 + \frac{A_2}{6} \cdot x^3 + \frac{A_3}{2} \cdot x^2 + A_4 \cdot x + A_5 \quad \uparrow$$

$$v_p''(x) = \int v'''(x) dx \equiv \frac{A_1}{3} \cdot x^3 + \frac{A_2}{2} \cdot x^2 + A_3 \cdot x + A_4 \quad \uparrow$$

$$v_p'''(x) = A_1 \cdot x^2 + A_2 \cdot x + A_3 \quad \rightarrow$$

Aplicando-se as derivadas da solução particular  $v_p(x)$  na EDO, quantificam-se os coeficientes  $A_n$  em função de  $D_k$ , estes últimos sendo dados de entrada da questão analisada. Deste modo reescrita a EDO:

$$-v_p'''(x) + \lambda^2 \cdot v_p'(x) = D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3$$

$$\begin{aligned} -(A_1 \cdot x^2 + A_2 \cdot x + A_3) + \lambda^2 \cdot \left( \frac{A_1}{12} \cdot x^4 + \frac{A_2}{6} \cdot x^3 + \frac{A_3}{2} \cdot x^2 + A_4 \cdot x + A_5 \right) &= \\ &= D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2 \cdot A_1}{12} \cdot x^4 + \frac{\lambda^2 \cdot A_2}{6} \cdot x^3 + \left( \frac{\lambda^2 \cdot A_3}{2} - A_1 \right) \cdot x^2 + (\lambda^2 \cdot A_4 - A_2) \cdot x + (\lambda^2 \cdot A_5 - A_3) &= \\ &= 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3 \end{aligned}$$

Agrupando os termos semelhantes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\lambda^2 \cdot A_1}{12} = 0 & \rightarrow A_1 = 0 \\ \frac{\lambda^2 \cdot A_2}{6} = 0 & \rightarrow A_2 = 0 \\ \frac{\lambda^2 \cdot A_3}{2} - A_1 = D_1 & \rightarrow A_3 = \frac{2 \cdot D_1}{\lambda^2} \\ \lambda^2 \cdot A_4 - A_2 = D_2 & \rightarrow A_4 = \frac{D_2}{\lambda^2} \\ \lambda^2 \cdot A_5 - A_3 = D_3 & \rightarrow A_5 = \frac{\lambda^2 \cdot D_3 + 2 \cdot D_1}{\lambda^4} \end{array} \right.$$

Cabe lembrar que  $\lambda$  é conhecido e vem da diagonalização do sistema de EDO's. Ver etapa 4 da ROTINA DE CÁLCULO.

#### d) Sistema de Coordenadas Generalizadas e existência do momento fletor no topo

Como o parâmetro  $\lambda^2$  pode assumir valores positivos ou negativos a resposta homogênea será mantida em termos da função exponencial. Assim para a EDO reescrita:

$$-v''' + \lambda^2 \cdot v' = D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3$$

##### Solução Homogênea:

Admitindo como solução homogênea: 
$$\begin{cases} v_H(x) = e^{m \cdot x} \\ v_H'(x) = m \cdot e^{m \cdot x} \\ v_H'''(x) = m^3 \cdot e^{m \cdot x} \end{cases}$$

Ao substituir a EDO homogênea tem-se a equação característica e suas raízes:

$$\begin{aligned} -m^3 \cdot e^{m \cdot x} + \lambda^2 \cdot m \cdot e^{m \cdot x} &= 0 \\ -m^3 + \lambda^2 \cdot m &= 0 \\ m = 0 &\rightarrow m_3 = 0 \\ m \cdot (-m^2 + \lambda^2) = 0 &\Rightarrow m^2 = \lambda^2 \rightarrow \begin{cases} m_1 = \lambda \\ m_2 = -\lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Ficando a solução característica expressa como a combinação das três raízes:

$$\begin{aligned} v_H(x) &= A_1 \cdot e^{m_1 \cdot x} + A_2 \cdot e^{m_2 \cdot x} + A_3 \cdot e^{m_3 \cdot x} \\ v_H(x) &= A_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\lambda \cdot x} + A_3 \end{aligned}$$

### Solução Particular:

O termo particularizante é de grau dois (2) e a maior derivada é de ordem três (3), logo a integral tripla de um polinômio de grau 2 conduz a resposta particular de grau 5, e para tal necessitar-se-á de seis (6) coeficientes na resposta geral. Assim, a Solução Particular será:

$$v_p(x) = A_3 \cdot x^3 + A_4 \cdot x^2 + A_5 \cdot x + A_6$$

$$v_p'(x) = \frac{dv_p(x)}{dx} \equiv 3 \cdot A_3 \cdot x^2 + 2 \cdot A_4 \cdot x + A_5$$

$$v_p''(x) = \frac{dv_p'(x)}{dx} \equiv 6 \cdot A_3 \cdot x + 2 \cdot A_4$$

$$v_p'''(x) = \frac{dv_p''(x)}{dx} \equiv 6 \cdot A_3$$

lembrar que o coeficiente independente da solução homogênea será englobado pelo coeficiente independente da solução particular.

Após escrever o grau e o polinômio particularizante pode-se determina-los através da substituição deste na equação diferencial não homogênea:

$$-v_p'''(x) + \lambda^2 \cdot v_p'(x) = D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3$$

$$-(6 \cdot A_3) + \lambda^2 \cdot (3 \cdot A_3 \cdot x^2 + 2 \cdot A_4 \cdot x + A_5) = D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3$$

$$(3 \cdot \lambda^2 \cdot A_3) \cdot x^2 + (2 \cdot \lambda^2 \cdot A_4) \cdot x + (\lambda^2 \cdot A_5 - 6 \cdot A_3) = D_1 \cdot x^2 + D_2 \cdot x + D_3$$

resultando nos coeficientes particularizantes expressos, como:

$$3 \cdot \lambda^2 \cdot A_3 = D_1 \quad \rightarrow \quad A_3 = \frac{D_1}{3 \cdot \lambda^2}$$

$$2 \cdot \lambda^2 \cdot A_4 = D_2 \quad \rightarrow \quad A_4 = \frac{D_2}{2 \cdot \lambda^2}$$

$$\lambda^2 \cdot A_5 - 6 \cdot A_3 = D_3 \quad \rightarrow \quad A_5 = \frac{\lambda^2 \cdot D_3 + 2 \cdot D_1}{\lambda^4}$$

Agora, juntando as soluções homogênea ( $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_6$  – visto que é o  $A_3$  renumerado) e particular ( $A_3$  a  $A_5$ ), escreve-se a solução geral  $v(x)$  da EDO não homogênea, como:

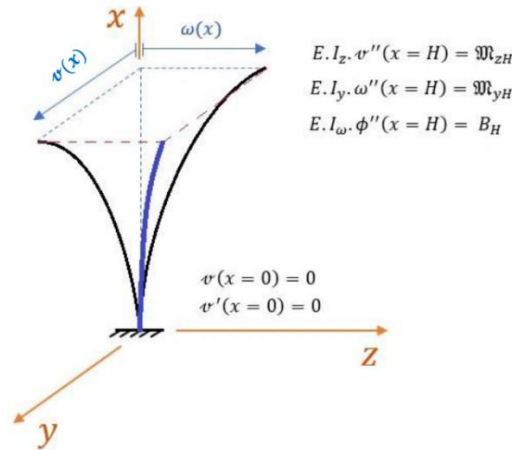
$$v(x) = A_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + A_2 \cdot e^{-\lambda \cdot x} + A_3 \cdot x^3 + A_4 \cdot x^2 + A_5 \cdot x + A_6$$

cujas derivações são expressas por:

$$v'(x) = A_1 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} - A_2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} + 3 \cdot A_3 \cdot x^2 + 2 \cdot A_4 \cdot x + A_5$$

$$v''(x) = A_1 \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} + A_2 \cdot \lambda^2 \cdot e^{-\lambda \cdot x} + 6 \cdot A_3 \cdot x + 2 \cdot A_4$$

Na Figura 3.65 é apresentada a deformada contínua do núcleo, além de elencar as condições de contorno inerentes (via TFT).

**Figura 3.65 – Condições de contorno com base na deformada do pilar submetido à flexo-torção**

Fonte: Adaptado de (Melo, 2019)

Após a aplicação das condições de contorno na solução geral  $v(x)$ , determinam-se:

$$A_2 = \frac{d_H \cdot \lambda^4 - 2 \cdot (\lambda^2 \cdot H - 1) \cdot D_1 - \lambda^2 \cdot (D_2 - D_3)}{\lambda^6 \cdot (e^{\lambda \cdot H} + e^{-\lambda \cdot H})}$$

$$A_1 = \frac{d_H \cdot \lambda^4 - 2 \cdot [\lambda^2 \cdot H - 1 + d_e] \cdot D_1 - \lambda^2 \cdot D_2 + \lambda^2 \cdot [1 - d_e]}{\lambda^6 \cdot (e^{\lambda \cdot H} + e^{-\lambda \cdot H})}$$

$$A_6 = -(A_1 + A_2)$$

$$\text{onde: } d_H = \begin{cases} \frac{\mathfrak{M}_{zH}}{E \cdot I_z}; & \text{no caso do deslocamento } v \\ \frac{\mathfrak{M}_{yH}}{E \cdot I_y}; & \text{no caso do deslocamento } \omega \\ \frac{B_H}{E \cdot I_\omega}; & \text{no caso da rotação } \phi \end{cases} \quad ; \quad \text{o vetor deslocamento } \{v\} = \begin{Bmatrix} v \\ \omega \\ \phi \end{Bmatrix}$$

sendo:  $\mathfrak{M}_{zH}$  e  $\mathfrak{M}_{yH}$  – os momentos fletores aplicados no topo do núcleo, conforme as direções  $z$  e  $y$ , respectivamente; e

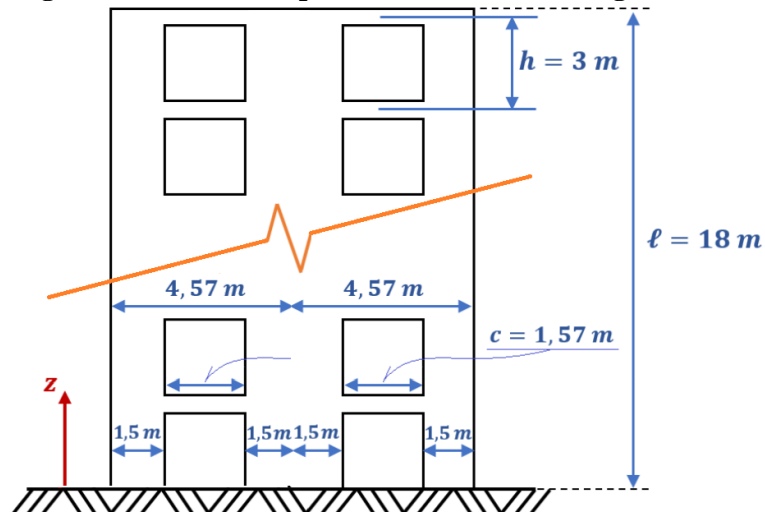
$B_H$  – o bimomento aplicado, também no topo do núcleo. Além de:

$$d_e = \lambda^2 \cdot (e^{\lambda \cdot H} + e^{-\lambda \cdot H})$$

## 3.7 PROJETO PROPOSTO

Com base nos conhecimentos formulados e debatidos neste capítulo 3, pede-se para o Núcleo com vista indicada na Figura 3.66 e seção transversal de paredes finas ilustrada na Figura 3.67, o seguinte:

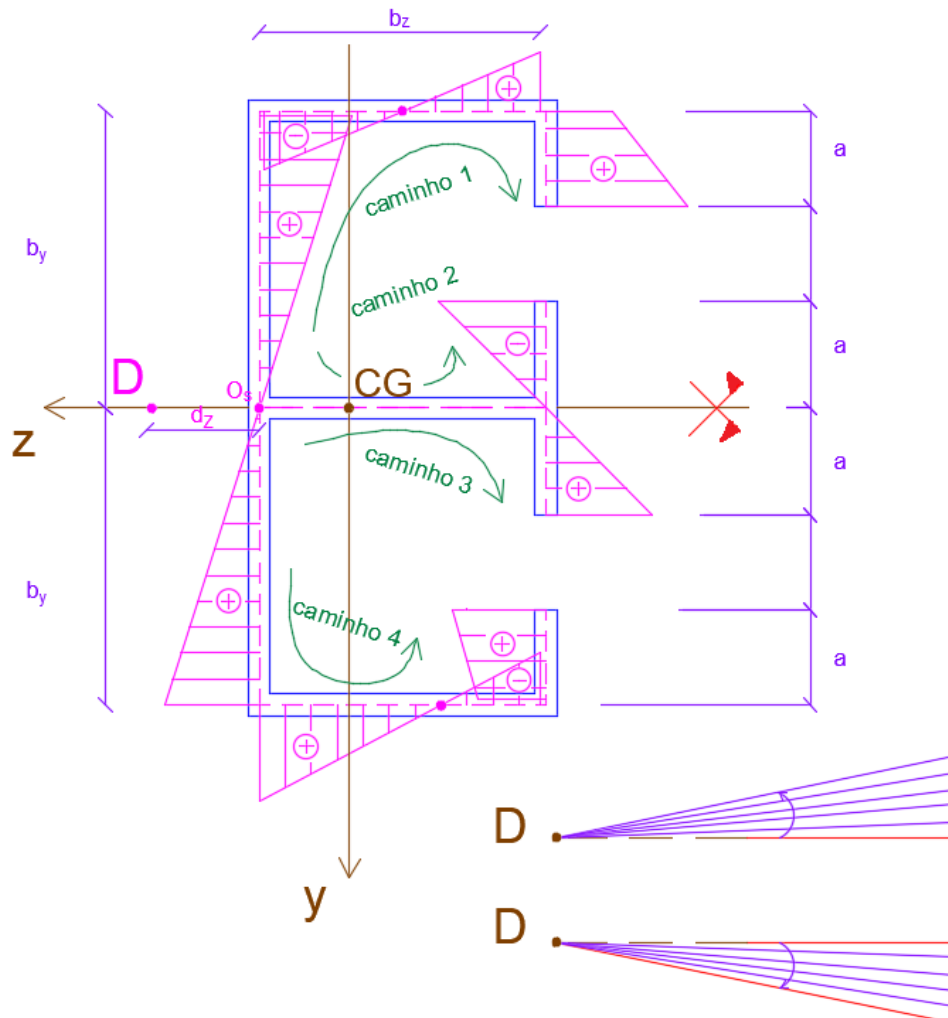
**Figura 3.66 – Vista do pilar com dois núcleos C germinados**



Fonte: O Autor (2025)

- a) Localizar o centro de torção do pilar com dois núcleos C germinados, conforme ilustrado na figura 2. *Dica:* determine a distância  $d_z$ . Adotar  $b_z = b_y$ .








**Figura 3.67 – Representação da seção transversal do pilar de paredes finas do projeto proposto e indicação do traçado do diagrama de ordenadas setoriais principais**



Fonte: O Autor (2025)

- b) Apresentar as equações diferenciais das paredes que compõem o núcleo acoplado analisado. *Dica: Usar o formato:  $E \cdot A_i \cdot \delta_i'' = \text{combinação de } q_k$ .*
- c) Apresentar as equações de equilíbrio do esforço cortante interno das i-ésimas paredes. *Dica: Usar o formato:  $V_i = -j_i \cdot v_i''' + (\text{combinação de } q_k) \cdot \frac{L_i}{2}$ .*
- d) Elencar as equações de compatibilidade de deslocamentos verticais, nas interseções das paredes, bem como, organizá-las em formato matricial.

d.1) Analisar os lintéis horizontais, no meio contínuo, via equações de Maney.

- e) Organizar matricialmente as expressões de equilíbrio de esforços cortantes internos, além de aplicar a rotação de eixos e escrever a expressão matricial no SGC.
- f) Apresentar o equilíbrio de esforço cortante externo no pilar, devido a ação do vento. *Dica: Usar o carregamento constante + carregamento triangular com máximo no topo do pilar + Carga lateral concentrada no topo do pilar.*
- g) Apresentar o sistema de equações diferenciais da análise estática da TPP.
- h) Proceder o retorno ao sistema local dos painéis, enfocando:
  -  Deslocamentos das paredes;
  -  Esforços cortantes nas paredes;
  -  Momentos fletores nas paredes;
  -  Fluxo de cisalhamento nas interseções;
  -  Deslocamentos verticais nos eixos das paredes;
  -  Esforços normais em todas as paredes; e
  -  Deslocamentos verticais nas interseções.
- i) Resolver o sistema de equações diferenciais da análise estática e postular a Rotina de Cálculo.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS DO CAPÍTULO 3

BARBOSA, J.A. **Edifícios com paredes de secção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral**. Dissertação de Mestrado. EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1978. Disponível online em: <http://sistemas.set.eesc.usp.br/producao/591>.

BAYKOV, V. N.; SIGALOV, E. E. **Estructuras de Hormigon Armado**. Traducido del ruso por Juan Manuel Julio. Moscou: Editorial MIR, 1980.

GOTO, Y. et al. Ultimate state of Thin-Walled circular steel columns subjected to biaxial horizontal forces and biaxial bending moments caused by bidirectional seismic accelerations. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 141, Issue 5, 04014122 – 1 a 12, 2015. Publicado online em: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%29ST.1943-541X.0001067>.

HOIT, M. **Computer-Assisted Structural Analysis and Modeling**. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

KISELIOV, V. A. **Mecanica de construccion – curso especial**. Tradução ao espanhol por MIRCHEVSKI B. A. Moscou: Editorial MIR, 1983.

LAREDO, M. Théorie Générale des Noyaux de Contreventement des Grandes Tours. **Annales de L’Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics**, N° 303, Annales Mars, p. 110 – 136, 1973.

LAREDO, M. Théorie Générale du Comportement des Grandes Structures Spatialles. **Annales de L’Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics**, N° 254, Annales Février, p. 305 – 378, 1969.

MACLEOD, I. A. Analysis of shear wall buildings by the frame method. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, Vol. 55, Issue 3, p. 593 – 503, 1973. Publicado online em: <https://www.icevirtuallibrary.com/doi/abs/10.1680/iicep.1973.4691?journalCode=jpric>.

MACLEOD, I. A. **Analytical Modelling of Structural Systems: an entirely new approach with emphasis on the behaviour of building structures**. New York: Ellis Horwood, 1990.

MANEY, G. A. Secondary stresses and other problems in rigid frames: a new method of solution. **Studies in Engineering. Bulletin 1**. Minneapolis: University of Minesota, p. 1 – 17, 1915.

MANCINI, E. **Associação contínua tridimensional de pórticos e paredes com engastamentos elásticos**. 1972. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1972. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/564?search=mancini>.

MEGSON, T. H. G. **Structural and Stress Analysis**. Amsterdam: Elsevier, 2005.

MELO, W. I. G. **Contribuições à análise dinâmica da ação do vento em Pilares de Pontes via Técnica do Meio Contínuo e Método dos Elementos Finitos**. Tese de Doutorado. João Pessoa: UFPB, 2019. Disponível online em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/19805>.

MELO, W. I. G.; BARBOSA, N. P. Dynamic Modeling of Metal Columns with Open Thin-Walled Sections. **International Journal of Steel Structures**, Volume 20, Issue 3, p. 833 – 855, 2020. Publicado online em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s13296-020-00326-4>.

MELO, W. I. G.; LUZ, P. V. C. A.; BARBOSA, N. P. Dynamic modeling of thin-walled slender columns braced by lintels in systems Z and X: A theoretical and numericaç approach the continuous médium technique. **Revista de Engenharia da Universidade Católica de Petrópolis**, Volume 15, nº 1, p. 36 – 56, 2021. Publicado online em: <https://seer.ucp.br/seer/index.php/REVCEC/article/view/2043>.

FONSECA, C. C. F.; MELO, W. I. G. Análise modal e estabilidade em pilares de paredes finas: abordagens com a Técnica do Meio Contínuo e o Método dos Elementos Finitos. **Acústica e**

**Vibrações**, Volume 39, n. 56, p. 19 – 36, 2024. Publicado online em: [https://revista.acustica.org.br/acustica/article/view/aev56\\_modal](https://revista.acustica.org.br/acustica/article/view/aev56_modal).

PARCEL, J. I.; MANEY, G. A. **Na elementar treatise on Statically Indeterminate Stresses**. Second edition. New York: John Wiley & Sons, 1944.

ROBERTS, T. M.; YEUNG, K. W. Torsion and Bending of braced Thin-Walled open sections. **International Journal of Mechanical Sciences**, Vol. 34, Issue 5, p. 333 – 344, 1992. Publicado online em: <https://ascelibrary.org/doi/10.1061/%28ASCE%290733-9445%281990%29116%3A1%281%29>.

SCHUELLER, W. **The Vertical Building Structure**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.

SMITH, B. S.; COULL, A. **Tall Building Structures: Analysis and Design**. New York: John Wiley & Sons, 1991.

SMITH, B.S.; TARANATH, B.S. The analysis of tall core-supported structures subject to torsion. **Proceedings of civil engineering**, University of Southampton, Chicago, p. 173 – 187, 1972. Publicado online em: <https://www.icevirtuallibrary.com/doi/abs/10.1680/iicep.1972.5408?journalCode=jpric>.

PUBAL, Z. **Theory and Calculation of Frame Structures with stiffening Walls**. Developments in Civil Engineering, 22. Amsterdam: Elsevier, 1988.

QUARTERONI, A. et al. **Métodes numérique: algorithms, analyse et applications**. Milan: Springer, 2007.

ROGERS, G. L. **An Introduction of the Dynamics of framed structures**. New York: John Wiley & Sons, 1959.

STAMATO, M.C. **Distribuição das cargas do vento entre os painéis de contraventamento**. EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1966 e 1978. Disponível online em: <http://repositorio.eesc.usp.br/items/67cd702b-6202-49e4-8ce5-4ac1aaed9406>.

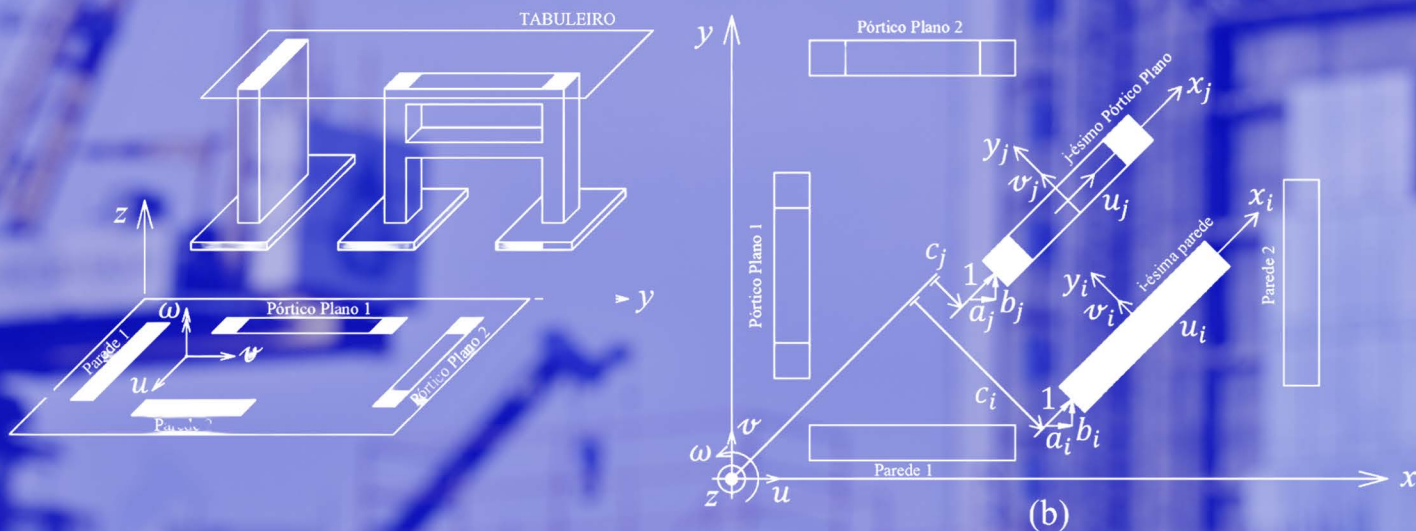
SZERÉMI, L. Stiffening system of multi-storey buildings by the continuum model. **Periodic Civil Politechnica**, Volume 22, p. 205 – 218, 1977. Disponível online em: <https://pp.bme.hu/ci/article/download/4159/3264/7917>.

VLASSOV, B. Z. **Pièces longues em voiles minces**. Traduite par G. Smirnoff. Paris: Éditions Eyrolles, 1962.

VOLTERRA, E.; ZACHMANOGLU, E. C. **Dynamics of Vibrations**. Ohio: Editions by Charles E. Merrill, 1965.

XAVIER, M.A.P. **Análise de efeitos de segunda ordem em estruturas de edifícios altos pela técnica do meio contínuo**. 1987. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1987. Disponível online em: <https://producaocientifica.eesc.usp.br/set/682?search=mancini>.

ZALKA, K. A. **Global Structural Analysis of Buildings**. New York: Taylor & Francis Group, 2000.



## RELEVÂNCIA DA TEMÁTICA:

A análise estrutural correta é imprescindível para o dimensionamento econômico atrelado à segurança, promovendo, desta forma, o lançamento racional dos elementos de sustentação de determinada estrutura. Neste sentido, entende-se que a análise estrutural aguçada de edifícios altos constitui condição basilar, exemplar e imprescindível para a atuação do(a)s futuro(a)s engenheiro(a)s estruturais. Assim, este livro visa colaborar no aprendizado sobre o funcionamento dos painéis de contraventamento nos edifícios altos, sendo uma fonte concatenada de informações.



[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)



[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)



[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)



[www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br)