MARIA ALICE VEIGA FERREIRA DE SOUZA
ARTHUR BELFORD POWELL

OPERAÇÕES com FRAÇÕES
À MODA ANTIGA

Atena Editora
Ano 2025

MARIA ALICE VEIGA FERREIRA DE SOUZA
ARTHUR BELFORD POWELL

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES À MODA ANTIGA

Atena Editora
Ano 2025

Instituto Federal do Espírito Santo
Reitor
Jadir José Pela

Rutgers University – Newark
Reitor
Jeffrey Robinson

Editoração Eletrônica
Atena Editora

Revisão Linguística
Santinho Ferreira de Souza (UFES)

Capa
Leonardo.ai

Projeto Gráfico e Diagramação
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza (IFES)

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos

Os manuscritos nacionais foram previamente submetidos à avaliação cega por pares, realizada pelos membros do Conselho Editorial desta editora, enquanto os manuscritos internacionais foram avaliados por pares externos. Ambos foram aprovados para publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Operações com frações à moda antiga

Autores: Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Arthur Belford Powell
Revisão: Os autores
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S729 Souza, Maria Alice Veiga Ferreira de
Operações com frações à moda antiga / Maria Alice Veiga Ferreira de Souza, Arthur Belford Powell. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2025.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-3302-6
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.026353004

1. Formação de professores. 2. Ensino de matemática. I. Souza, Maria Alice Veiga Ferreira de. II. Powell, Arthur Belford. III. Título.

CDD 370.71

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DO AUTOR

Para fins desta declaração, o termo 'autor' será utilizado de forma neutra, sem distinção de gênero ou número, salvo indicação em contrário. Da mesma forma, o termo 'obra' refere-se a qualquer versão ou formato da criação literária, incluindo, mas não se limitando a artigos, e-books, conteúdos on-line, acesso aberto, impressos e/ou comercializados, independentemente do número de títulos ou volumes. O autor desta obra: 1. Atesta não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação à obra publicada; 2. Declara que participou ativamente da elaboração da obra, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final da obra para submissão; 3. Certifica que a obra publicada está completamente isenta de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirma a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhece ter informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autoriza a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A literacia matemática será uma ferramenta de libertação para as pessoas que tentam sair da pobreza e a melhor esperança para as pessoas que tentam não ficar para trás.

Bob Moses (1935-2021)

Agradecimentos

A epígrafe de Moses nos leva a refletir sobre a necessidade e o desejo de quebrar padrões de desigualdade e injustiça social com os quais a classe docente da área da Matemática, inadvertidamente, tenha contribuído. Mudar, portanto, o *modus vivendi* do ensino de conteúdos curriculares que apresentam dificuldades epistemológicas e pedagógicas é *sine qua non* para uma nova maneira de ver, fazer e sentir a matemática.

O desejo é o de deixar neste espaço algum legado para docentes, sobretudo para novas gerações, a respeito de um dos temas centrais da matemática: operações com frações. Esse é o espírito com que o livro está escrito – oferecer uma experiência de conteúdo e de ensino de operações com frações que faça resultar em aprendizagem para a classe estudantil do ensino básico. Para isso, contamos com a colaboração de diferentes fontes e que correm mais especificamente nas instituições e pessoas sobre as quais sinceramente agradecemos.

Em termos institucionais, agradecemos à Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (Fapes) e ao Instituto Federal do Espírito Santo pelo recurso financeiro à primeira autora para desenvolvimento de investigações e custeio da publicação, ao lado do segundo autor, que culminaram na escrita deste livro. Igualmente à Rutgers University – Newark (RU) e ao Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes) pelo incentivo para desenvolvimento de nossos estudos.

Contamos também com as essenciais produções acadêmicas de docentes e pesquisadores da Educação Matemática, da Psicologia Cognitiva e da Neurociência. As contribuições daí extraídas tornaram o teor do livro de grandeza teórica e mais bem estruturado em sua perspectiva educacional. Do mesmo modo,

cabe destaque aos autores de artigos e livros sobre ensino de matemática, que silenciosamente ofereceram ensinamentos relevantes por meio dos resultados de suas investigações e apontamentos. Aos nossos estudantes de pós-graduação que, nos encontros de orientação, apresentaram inquietações que nos inspiraram à inclusão de uma “conversa com o professor” em algumas seções do livro.

Esperamos que estas páginas sejam úteis para quebra de padrões de desigualdade e injustiça sociais perpetuados em salas de aula, como refletimos a partir da epígrafe de Moses.

Muito obrigada! Muito obrigado!

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

Arthur Belford Powell

Prefácio

Esta obra possui muitos aspectos inovadores: seu título, seu conteúdo, suas ilustrações e suas propostas de ensino. As inovações trazem muito boas reflexões aos educadores matemáticos que pesquisam e que ensinam, tanto no Ensino Fundamental, quanto nas Licenciaturas (de Matemática e de Pedagogia). É assim, um livro muito útil a formadores de professores, aos que ensinam Matemática e aos que realizam pesquisas na temática: o aprendizado de frações.

Pesquisas anteriores evidenciam muitas dificuldades no ensino e na aprendizagem de frações, e este livro traz importantes contribuições na superação de obstáculos. Nessa direção, a obra aponta caminhos que podem ser utilizados em sala de aula para uma ampla compreensão dos números fracionários.

O título pode dar ideia inicial de uma visão tradicional, em contraposição a perspectivas mais modernas, tais como o socio-construtivismo. Entretanto, 'à moda antiga' presente no título possui outros sentidos do que pode parecer. As propostas baseiam-se na história do surgimento da fração – na perspectiva de uma medida. Contrapondo-se à ideia de contagem (base dos números naturais), os autores defendem – e muito bem – a ideia de medida como base da fração, dos racionais de modo geral.

O tema é muito relevante pela fração, em si mesma, e pelas suas aplicações no estudo da álgebra e da probabilidade, dentre outros conteúdos. Esses são muito importantes, em particular na compreensão das situações hipotéticas e dos eventos aleatórios que nos cercam. Associam-se, assim, o aprendizado da fração e operações com frações a aplicações em problemas do mundo real e questões relacionadas à justiça e equidade sociais – possibilitando a ampla compreensão de conceitos matemáticos.

As propostas de ensino são muito bem tratadas, em particular nas seções de 'Conversa com o professor'. Há importantes alertas efetuados, como a da necessidade inicial de domínio das relações no material proposto – as barras de Cuisenaire. Para tanto, recomenda-se, com base no manuseio das barras, a escrita de expressões matemáticas de igualdade, de desigualdade e de diferença. Essa proposta inicial permitirá a próxima etapa da sequência de ensino: estudo da equivalência de frações.

Após manuseio das barras, representações outras são recomendadas por intermédio de ações virtuais, ações escritas e ações formalizadas. Atenção especial é dada à análise de unidades de medidas, em particular em aplicações extraescolares, tais como receitas culinárias, dentre diversas outras.

À medida que se avança no estudo das frações (como na comparação de frações próprias com outras frações próprias, das impróprias com impróprias e das próprias com impróprias), recomenda-se na obra que os estudantes observem e tirem conclusões e generalizações, tais como:

- frações com mesmo denominador têm maior medida, quando os numeradores são maiores;

- frações com numeradores maiores que os denominadores têm maiores medidas do que aquelas que possuem numeradores menores que os denominadores;

- frações de mesmo numerador têm maiores medidas quanto menores sejam os denominadores.

Há novas recomendações no estudo das operações com frações, em especial a de que o uso de algoritmos seja antecedido e sempre acompanhado da compreensão do que representa cada operação: adição, subtração, divisão e multiplicação. Exemplos e sugestões de atividades estimulam a ampla compreensão dessas operações com frações.

As ilustrações utilizadas no texto são bem claras e sua diversidade – figuras de barras de Cuisenaire, estórias em quadrinhos, esquema de sequência de ensino, dentre outras – contribui para uma leitura muito agradável e compreensível. Mais um aspecto muito positivo da obra.

Por todos esses motivos, a leitura, o estudo e a aplicação de propostas deste livro são mais do que recomendados. O leitor – seja professor do Ensino Básico, seja docente atuante em Cursos de Licenciatura, seja pesquisador da Educação Matemática – em muito se beneficiará com o estudo desta obra.

Como sugerido logo na epígrafe, propõe-se – e consegue-se efetivamente – contribuir para a libertação da pobreza de nossos estudantes e conduzi-los para um futuro melhor, capacitando-os para a compreensão e aplicação de um conceito matemático básico.

Rute Borba
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Sumário

Sobre o livro...

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES À MODA ANTIGA é continuidade do trabalho iniciado em Frações à Moda Antiga[1], que se debruçou sobre a construção do conceito de frações sob a perspectiva de medição. Essa perspectiva surgiu de uma antiga matriz africana diante da demanda de medir terrenos agricultáveis, sobretudo quando águas dos rios subiam além de seu leito normal e acabavam por inundá-los, gerando necessidade de remarcações que não eram múltiplas exatas de alguma unidade de medida[2]. Esses comprimentos eram fracionários. Nesse contexto, frações eram entendidas como uma comparação multiplicativa entre duas quantidades: uma distância d e uma unidade de medida u. A comparação é a quantidade d/u, cuja representação ainda é usada nos dias de hoje.

Essa compreensão parece carecer de algum resgate por estudantes e professores, considerando a preocupação da comunidade de pesquisadores da Educação Matemática, da Psicologia Cognitiva e da Neurociência[3] sobre entendimentos equivocados acerca do conceito de frações e suas operações aritméticas. Como ilustração, não raramente, estudantes veem numerador e denominador como dois números naturais isolados, sem qualquer relação entre eles. Ou, ainda, não compreendem frações impróprias porque, para eles, não é possível obter cinco partes de algo que está particionado em quatro (5/4)[4].

Pelo lado das operações aritméticas, é comum estudantes somarem numeradores e denominadores de frações indiscriminadamente, provavelmente por desconhecimento das relações que mencionamos (*e.g.*, 2/3 + 1/5 = 3/8). Na

[1] Frações à Moda Antiga pode ser adquirido gratuitamente no link Educape: https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/602100; Autoria de Amaral, Souza & Powell (2021)
[2] Silveira, Souza & Powell (2023).
[3] Booth & Newton (2012); Ni & Zhou (2001); Powell (2022; 2023); Siegler *et al.* (2012); Souza (2021); Abreu-Mendoza *et al.* (2020); Rosenberg-Lee (2021).
[4] Sullivan, Barnett & Killion (2023).

multiplicação e divisão de frações são identificadas outras dificuldades epistemológicas quando multiplicam numeradores e conservam denominadores (*e.g.*, $3/5 \times 2/5 = 6/5$).

Esses equívocos são preocupantes, porque o conhecimento de frações está diretamente associado ao desempenho de estudantes na matemática futura – sobretudo na álgebra e probabilidade[5] – sem contar com aplicações em outras áreas científicas (*e.g.*, Engenharias, Química, Estatística, Economia, Geografia etc.). Por essa razão, desde anos escolares iniciais, é indicado que os estudantes apreendam as propriedades das frações e saibam reconhecer semelhanças e diferenças com as propriedades dos números naturais.

Mais do que isso, é preciso entender o número fracionário e a relação do numerador com o denominador, cujas ideias iniciais podem ser construídas pela compreensão de três tipos de comparação: (1) frações com numeradores diferentes e denominadores iguais; (2) frações com numeradores e denominadores diferentes e; (3) frações com numeradores iguais e denominadores diferentes. Somente depois dessa introdução – apreensão do conceito de fração –, estudantes e professores estarão prontos para o conteúdo deste livro, e é por isso que recomendamos estudo de Frações à Moda Antiga, antes de se lançarem ao trabalho com as operações aritméticas básicas com frações (soma, subtração, multiplicação e divisão).

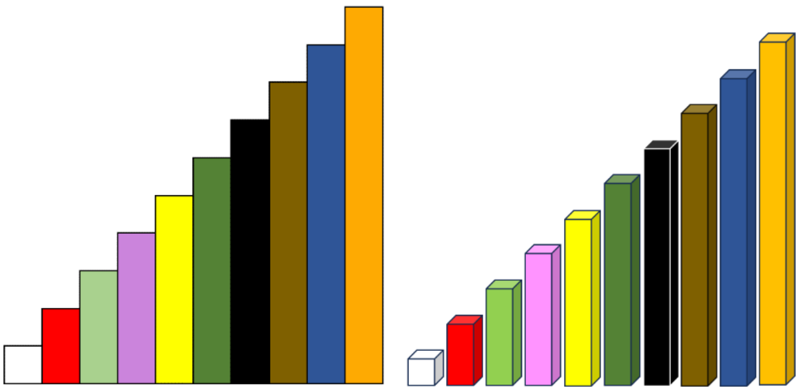
Além do conteúdo matemático exposto em Frações à Moda Antiga, este livro indica estratégias de ensino com uso de uma abordagem denominada 4A-Instructional Model[6], desenvolvida especialmente para ensino de frações sob a perspectiva de medição. Essa abordagem foi validada cientificamente e está apoiada

[5] Siegler *et al*. (2012), Van Hoof *et al*. (2020), Booth, Newton & Twiss-Garrity (2014), Powell, Gilbert & Fuchs (2019), Olive (1999), Booth & Newton (2012).
[6] Powell (2018), Amaral (2021).

em quatro Ações para a construção de seu conceito: Atuais (ou Concretas), Virtuais, Escritas e Formalizadas. Sempre que apropriado, essas Ações serão mencionadas e recomendadas pontualmente no texto.

Ainda como seguimento ao trabalho iniciado em Frações à Moda Antiga e buscando ampliar, aprofundar e detalhar materiais audiovisuais sobre o tema[7] em pauta, abordaremos as operações com frações, usando as barras de Cuisenaire (Figura 1), criadas por Emille-Georges Cuisenaire (1891-1975), justamente por facilitarem a estratégia de trabalho sob a perspectiva de medição. As barras não são os únicos meios para conduzir essa perspectiva. É possível uso de barbantes, tiras de papel, fios, canos, palitos ou outros materiais e recursos que possibilitem em sua essência uma comparação multiplicativa entre quantidades – esse é um ponto que importa conhecer.

Figura 1: barras de Cuisenaire



As barras de Cuisenaire, bem como quaisquer instrumentos educacionais não são bastantes para garantir a aprendizagem conceitual que desejamos. A ideia que subjaz ao uso do material, é

[7] Powell (2020a; 2020b; 2020c; 2020d).

que é promissora para a construção do conhecimento. Assim, as barras podem ser físicas bem como de outros materiais e recursos, mas a ideia que pretendemos produzir, não é tátil. As barras são um instrumento simples, mas se tornam sofisticadas pela proposta pedagógica que lhes são subjacentes[8].

É com esse espírito que apresentamos em **OPERAÇÕES COM FRAÇÕES À MODA ANTIGA** um meio de inspirar docentes para repensar o conteúdo e o ensino das operações aritméticas básicas, com frações sob a perspectiva de medição, iniciando com a adição e subtração, seguidas da divisão e multiplicação. O ordenamento das operações de adição e subtração pode ser invertido sem prejuízo para compreensão. Ao contrário, recomendamos que o estudo da divisão com barras de Cuisenaire preceda o da multiplicação, porque da primeira decorrerá a compreensão para o algoritmo tradicional da segunda.

Antes desses estudos, porém, é útil recordar particularidades das barras de Cuisenaire, estabelecer uma codificação para suas cores, lembrar os três tipos de comparação que mencionamos e que integram ensinamentos de equivalência e mínimo múltiplo comum, para fazer sentido quando da leitura e trabalho com as operações aritméticas. Essas particularidades estão distribuídas em seis aulas em Frações à Moda Antiga, cuja retomada neste livro não se constitui única e exclusivamente como lembrança ou reforço, mas conta com avanços e acréscimos para um leitor mais amadurecido em suas concepções acerca de frações.

Nessa esteira, são oferecidos resultados de discussões sobre pontos que permeiam o tema e ampliam a compreensão do que se está a estudar. Exemplo disso é a argumentação sobre o sinal de igual (=) em expressões matemáticas, significando igualdade ou equivalência. Terão sempre a mesma interpretação matemática?

[8] Thompson & Lambdin (1994).

Mais adiante, o leitor encontrará reflexão sobre a importância do reconhecimento da unidade de medida.

Concretamente, o livro está dividido em duas partes. A primeira contém seções nesta sequência: (1) Ensino e aprendizagem de frações: o que diz a literatura científica? (2) Frações com as barras de Cuisenaire; (3) Equivalência de frações; (4) Comparação de frações com o mesmo denominador; (5) Mínimo múltiplo comum; (6) Comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes; (7) Comparações de frações com o mesmo numerador. A segunda parte desenvolve estes tópicos: (1) Adição e subtração de frações; (2) Divisão e multiplicação de frações; (3) Palavras finais sobre desdobramentos e continuidade do que foi visto. Sempre que pertinente, cada seção traz concepções teóricas e práticas do tema em voga e indicação de estratégias para construção de ideias, seguida de breve "conversa" com o professor.

Quanto à formatação, a propósito, as figuras deste livro com as barras de Cuisenaire não possuem sempre a mesma escala devido, por vezes, à ocupação de longas configurações com esse material. Recomendamos, portanto, exame da proporcionalidade das barras dentro de cada figura, pois pode ocorrer que a paridade referida não seja a mesma encontrada entre figuras. Por exemplo, as barras da Figura 3 são proporcionalmente menores que as da Figura 2 pela necessidade de redução do tamanho por limitações de espaço físico na página. Ainda sobre a estrutura, observe-se que algumas figuras não explicitam a fonte, porque foram elaboradas pelos autores deste livro e, por serem a maioria, optamos por omiti-las visando à despoluição visual.

Figura 2

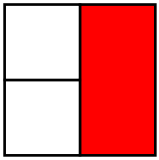
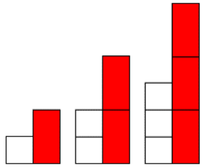


Figura 3



Por fim, sublinhamos nossa não intencionalidade em apresentar um estudo a ser implementado com os estudantes de modo rígido ou como um *script*. Ao contrário, nosso propósito é o de atender a uma agenda escolar e científica que ofereça material inspirador, ou que, talvez, seja *start-point* para professores, deixando que sua criatividade e intuições digam o melhor meio de aplicá-lo e, com isso, imprimam suas marcas pessoais e de identidade a cada ação ou aula.

Boa leitura! Bons estudos!

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

Arthur Belford Powell

PRIMEIRA PARTE

Ensino e aprendizagem de frações: o que diz a literatura científica?

A comunidade de pesquisadores da Educação Matemática, Psicologia Cognitiva e Neurociência muito tem investigado o conteúdo de frações, revelando e argumentando sobre dificuldades epistemológicas de estudantes[9] e professores[10] quando se envolvem com esse estudo. As produções científicas nesse tema são antigas e recentes, não importa a época, porque independentemente do tempo, guardam, de modo geral, a mesma essência ao apresentarem rasas compreensões de estudantes e professores sobre o que seja um número fracionário e em como operá-los aritmeticamente. Essas dificuldades podem ocasionar consequências desastrosas em estudos que necessitem do uso das frações, sobretudo quando aplicados em problemas do mundo real[11]. As dificuldades são de diferentes ordens e origens[12] e conhecê-las pode alertar professores sobre ocorrências indesejadas na aprendizagem.

Desde já, vale mencionar haver certa conformidade entre os autores de que as pessoas pouco sabem sobre diferenças e semelhanças das propriedades dos números naturais e fracionários[13]. Essa carência traz consequências sobre entendimento do que seja um número fracionário e de como lidar com as operações aritméticas com frações. Os números naturais formam um conjunto discreto, enquanto os racionais são densamente ordenados[14]. Os naturais têm antecessor e sucessor (com exceção do zero; *e.g.*, 3 antecede 4); os racionais, não, ou seja, entre dois racionais há incontáveis outros racionais (*e.g.*, 3/5 não antecede 4/5). A contagem é inerente aos naturais; a medição é característica dos

[9] Booth & Newton (2012), Ni (2005), Ni & Zhou (2001), Powell (2023), Siegler *et al.* (2012), Souza (2021).
[10] Ball (1990), Ma (1999), Ni (2001), Newton (2008), Lin *et al.* (2013), Powell (2022), Souza (2021); Sullivan, Barnett & Killion (2023).
[11] Behr *et al.* (1983).
[12] Silveira, Souza & Powell (2023).
[13] Ni & Zhou (2005), Aytekin (2020).
[14] Gabriel *et al.* (2013), Souza & Powell (2021).

racionais pela emergência de medir terras ou distâncias cujos comprimentos não são múltiplos exatos da unidade de referência eleita[15]. Esse discernimento parece ter se perdido em algum momento no ensino de frações.

A sugestão de Aytekin[16] é introduzir diferenciações entre estruturas discretas e contínuas logo após o ensino de números naturais. A primeira semente para a construção do conceito de fração pode ser plantada com situações cotidianas que não "cabem" na estrutura discreta de números naturais. Esse autor indica o problema que chamou de Homem a Meio Caminho[17]. O problema versa sobre um passageiro na realização de uma viagem terrestre. No primeiro dia, percorre a primeira metade do caminho; no dia seguinte, alcança a metade do que ficou; no outro dia, atravessa a metade do que restou do dia anterior, e, assim, sucessivamente, todo dia seguinte o passageiro percorre metade do caminho que restou. Quantos dias o homem levará para chegar ao seu destino? Um novo ponto da trajetória pode ser encontrado entre dois pontos na reta numérica, e isso não ocorre com números naturais. Imagine o leitor a contagem de gols de um time de futebol. Nenhum time pontuará 3/2 gols.

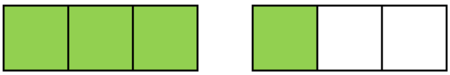
Com efeito, nos naturais, quanto mais dígitos, maior o número (*e.g.*, 56 > 4); nos fracionários, essa regra falha (*e.g.*, 56/100 < 4/5). O mesmo ocorre na multiplicação de naturais que pode ser concebida como adição repetida (*e.g.*, 4 + 4 + 4 = 3 × 4); nas frações, essa norma nem sempre se funciona (*e.g.*, 4/5 × 1/2 = 4/10; 4/10 < 4/5)[18]. O desconhecimento das particularidades entre os dois conjuntos pode levar à aplicação do que se sabe dos

[15] Roque (2012). Aspectos ligados à ontologia e à epistemologia das frações.
[16] Aytekin (2020)
[17] Esse problema expressa o Paradoxo de Zenão. Matematicamente podemos enunciá-lo assim: Dados dois pontos em uma reta. Partindo do ponto A para atingir o ponto B, antes temos que atingir C que é ponto médio de AB. Partindo de C para atingir B, existe um ponto D que é ponto médio de CB, e assim sucessivamente.
[18] Souza & Powell (2021).

naturais aos fracionários[19], podendo acarretar soma indiscriminada de numeradores e denominadores pela simples junção (*e.g.*, 2/3 + 3/4 = 5/7). A contagem também provoca embaraços na compreensão de frações impróprias e mistas. É difícil conceber uma fração 4/3, se o todo foi dividido em três partes.

Essa dificuldade é equivocadamente pensada ser superada por alguns professores, ao defenderem ser suficiente acrescentar outras três partes, para abrigar a que extrapolou a quantidade anterior. Essa prática conduz a outras implicações. Tomando as famosas representações em retângulos igualmente subdivididos para a fração 4/3 pelas partes verdes (Figura 4), estudantes podem declarar 4/6. Estariam equivocados?

Figura 4: 4/3 ou 4/6?



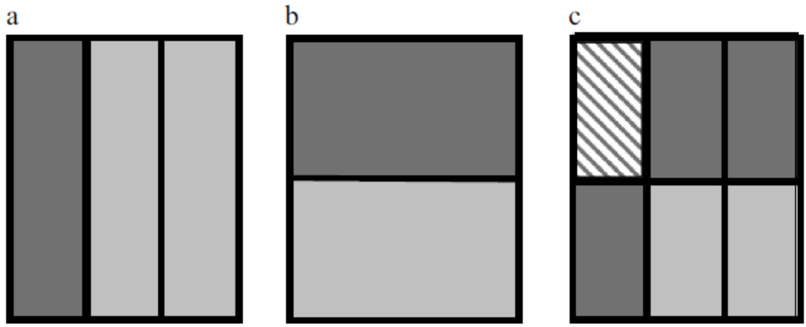
Essa confusão entre 4/3 e 4/6 nos encaminha para outra discussão: a unidade de referência. A unidade deve ser sempre o primeiro item de observação, quando o assunto é fração. No primeiro caso, a unidade é 3, no segundo é 6. O desprovimento da determinação da unidade de referência justifica uma série de enganos em diferentes pontos do estudo de frações. Por exemplo, o autor Tzur[20] propôs aos estudantes uso de uma fração unitária para compor frações não unitárias. Eles iteraram 3 vezes 1/4, fazendo resultar em 3/4; iteraram 4 vezes 1/4, tendo feito resultar em 4/4; quando os estudantes iteraram 5 vezes 1/4, deveriam ter declarado 5/4, mas concluíram que o todo agora tinha sido 5/5 e que a fração unitária tinha passado a ser 1/5. A explicação dos estudantes foi de que era necessário aumentar o

[19] Ni & Zhou (2005), Aytekin (2020).
[20] Tzur (1999).

denominador (a unidade de referência), provavelmente para abrigar “o que não cabia” na unidade anterior.

A discussão sobre a unidade de referência vai além e é estabelecida pela comunidade de educadores matemáticos como um dos fundamentos para o estudo de frações[21]. Dois pesquisadores propuseram a 246 professores estadunidenses este problema: "Uma porção de iogurte é 1/3 de uma xícara. Para uma refeição, Amanda comeu 1/2 de uma porção. Quantas xícaras de iogurte Amanda comeu?"[22] Alguns professores representaram o problema como na Figura 5.

Figura 5: representação do problema de multiplicar frações pelos professores



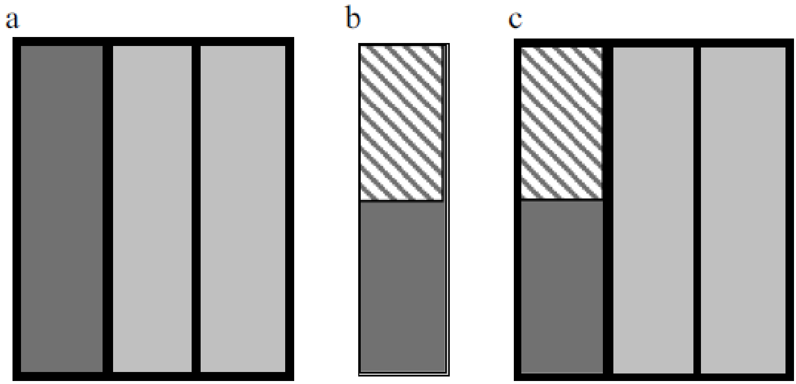
Fonte: Copur-Gencturk & Ölmez (2021, p. 1126).

Na Figura 5, em (a) os professores representaram 1/3 da xícara na cor cinza escura; em (b) 1/2 da porção; em (c) 1/6 de uma xícara na parte hachurada. À primeira vista, o método da sobreposição[23] parece coerente. No entanto, os autores ponderaram sobre a importância da coordenação de diferentes unidades de referência para o ambiente de aprendizagem criado pelos professores.

[21] Souza (2021).
[22] Copur-Gencturk & Ölmez (2021, p. 1126).
[23] O método da sobreposição consiste em sombrear o multiplicador e o multiplicando horizontal ou verticalmente (ou vice-versa), e identificam a área sombreada sobreposta para representar o produto das frações.

Uma análise mais cuidadosa revela que a representação da Figura 5 falha ao desconsiderar as diferentes unidades. O tamanho da porção é 1/3 de xícara (o retângulo completo na Figura 6a). Amanda comeu 1/2 do tamanho da porção, que não é a xícara cheia representada pelo retângulo inteiro (Figura 5b)[24]. Embora o resultado exposto nas Figuras 5c e 6c (partes hachuradas) sejam os mesmos, o modo como as Figuras 5b e 5c foram construídas denuncia desatenção às diferentes unidades.

Figura 6: representação do problema de multiplicar frações considerando as unidades de referência



Fonte: Copur-Gencturk & Ölmez (2021, p. 1125).

Esses pesquisadores consideram o método da sobreposição problemático para o ensino da multiplicação de frações, porque dificilmente mapeará corretamente o problema. Eles e outros autores[25] ponderam que essa estratégia é uma tentativa de explicação do algoritmo da multiplicação de frações, com pouca correspondência com a realidade do problema. Outros estudos corroboraram com esses resultados e acrescentaram que essa representação também foi usada de modo equivocado por

[24] Copur-Gencturk & Ölmez (2021, p. 1125).
[25] Davis & Maher (1990), Lee *et al.* (2011), Webel, Krupa & McManus (2016).

professores em operações de divisão com frações. De modo mais geral, Izsák[26] estudou conteúdos e metodologias de 990 professores do ensino básico estadunidense sobre aritmética de frações e apenas 30% demonstraram domínio das unidades de referência.

Os episódios constantes da literatura científica levam a crer na falência da introdução do estudo de frações por meios discretos[27]. Há mais a dizer sobre essa maneira introdutória de lidar com as frações. As cinco interpretações de frações preconizadas por Kieren (1980), amplamente utilizadas em livros didáticos[28] de muitos países[29] e aceitas acriticamente por professores, estão ligadas de alguma forma à contagem (discretização), umas mais do que outras: parte-todo, quociente, razão, operador e medida. Além disso, parece haver pouca articulação entre elas, podendo conduzir à crença de que são objetos independentes.

A interpretação parte-todo se baseia na relação entre quantidade de <u>partes e o total de partes</u>; o quociente é a divisão de uma quantidade *m* em *n* <u>partes</u> de mesmo tamanho; a razão compara uma quantidade de <u>partes</u> a outra; o operador é <u>parte</u> que atua sobre um todo e o modifica; a medida funciona com iterações da fração unitária (a fração unitária é a <u>parte</u>). A razão, a propósito, vem sendo confundida com fração em situações que não circunscrevem frações. Toda fração pode ser razão, mas nem toda razão pode ser fração. A relação de 4 cachorros para 5 gatos pode ser escrita como 4/5 (quatro quintos), mas não faz sentido como fração. A relação de 4 cachorros para 9 animais (quatro nonos) é fração.

[26] Izsák *et al.* (2019).
[27] Sullivan, Barnett & Killion (2023).
[28] Scheffer & Powell (2019), Dogan & Tertemiz (2020).
[29] Souza & Powell (2021).

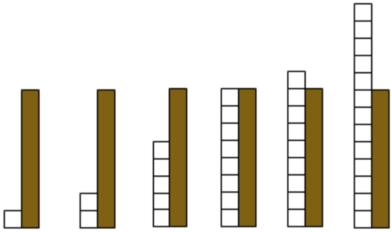
Mais do que considerar frações como contagem de partes, é concebê-las sempre como partes iguais. Imagine o leitor 90 unidades monetárias (u.m.) divididas em três grupos de 45, 30 e 15 u.m. Pela lógica da divisão das frações exclusivamente em partes iguais, não poderíamos dizer que 30 seja 1/3 do todo, pois 90 não está dividido em partes iguais. Mais do que a equipartição, alguns (estudantes e professores) não reconhecem 30 como sendo 1/3 de 90, se o agrupamento for maior do que três (*e.g.*, 5, 10, 30 e 45)[30].

Historicamente, a medição de distâncias que não são múltiplas exatas da unidade é anterior e se opõe à perspectiva de partição. O atributo do comprimento (e, portanto, não de partes) gera uma comparação multiplicativa entre tamanhos. Essa perspectiva tende a superar desafios epistemológicos apresentados pela discretização. Por exemplo, frações impróprias surgem naturalmente dessa comparação multiplicativa. Observe o leitor a Figura 7 e tome a barra branca medindo uma unidade de comprimento e a barra marrom medindo oito barras brancas. Lendo da esquerda para a direita[31] as relações dos comprimentos de cada par de barras, temos respectivamente: 1/8, 2/8, 5/8, 8/8, 9/8 e 13/8. A passagem das frações próprias para as impróprias possui uma lógica que não enseja dúvidas, em função dos comprimentos relacionados.

[30] Resultados preliminares de uma investigação em andamento realizada por uma equipe liderada por Powell & Souza.

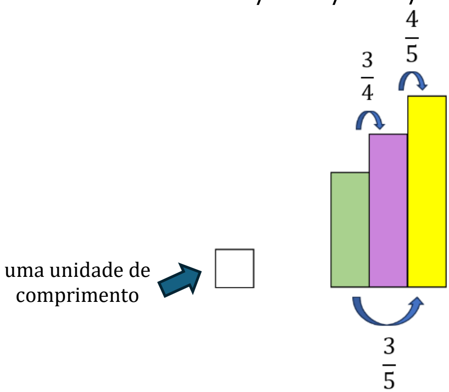
[31] A leitura da fração da esquerda para a direita é uma convenção que pode ser adaptada da direita para a esquerda, desde que a unidade de medida seja reconhecida pelos leitores. Além disso, as barras podem ser posicionadas horizontalmente, permitindo uma nova convenção de leitura, de cima para baixo ou vice-versa, contanto que se mantenha o entendimento da unidade de referência.

Figura 7: leitura das frações próprias para impróprias[32]



Nessa seara, as operações aritméticas seguem essa lógica e fazem sentido, porque a medição denuncia quando o produto de duas frações, por exemplo, resulta em um tamanho menor do que as parcelas (Figura 8). Essas medições ajudam a compreender o algoritmo tradicional da multiplicação de frações, como veremos em seções futuras.

Figura 8: tomando a barra branca como uma unidade de comprimento, a relação entre o 1º (3/4) e o 2º (4/5) comprimentos produz o resultado de 3/4 × 4/5 = 3/5.



Autores defendem que o ensino de frações iniciado pela medição apoia a flexibilidade cognitiva necessária para um ensino eficaz e significativo[33]. Pelo reverso, estudantes que inicialmente

[32] Amaral, Souza & Powell (2021, p. 64).
[33] Sullivan, Barnett & Killion (2023).

tentam compreender frações com base em números naturais, têm dificuldades em criar um sistema numérico contínuo[34]. Não é o caso de descartarmos a perspectiva parte-todo ou a discretização, mas de introduzi-la após profunda compreensão do conceito pela ideia ontológica da medição.

A ideia de continuidade subjacente à perspectiva de medição (*e.g.*, Figura 7) remete à noção de pensamento relacional e, mais especificamente, ao raciocínio relacional[35]. O pensamento relacional é a capacidade espontânea de reconhecer padrões em diferentes episódios, especialmente em momentos de aprendizagens (*e.g.*, passageiro estende o braço para o ônibus parar no ponto; médico reconhece sintomas de infarto do miocárdio; pisca-alerta aceso de um veículo sinaliza problemas mecânicos). Sem esse discernimento, os fatos ocorrem de modo isolado, não sendo úteis para construção de futuras experiências.

O raciocínio relacional é o aproveitamento do poder mental da padronização e exige esforço e intencionalidade. No caso das frações, a passagem (ou compreensão) de frações próprias para impróprias é natural (ou fluida, sem interrupções) na perspectiva da medição (vide Figura 7). Há uma padronização que não deixa "escapar" a relação de magnitudes. Diferentemente, a perspectiva de partição impõe uma "quebra" no raciocínio relacional que prejudica a fluência da compreensão. Essa argumentação pode ser ilustrada em um estrato de conversa do Prof. Powell com um estudante do quarto ano do ensino básico estadunidense. Esse estudante já havia tido aulas sobre frações e suas operações aritméticas em sua escola. Prof. Powell ofereceu-lhe uma folha de papel e caneta para solução de algumas tarefas sobre frações, sem uso de qualquer material manipulativo e isento de qualquer

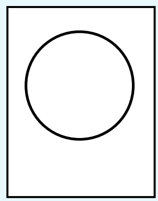
[34] Ni & Zhou (2005), Aytekin (2020), Powell (2023), Souza & Powell (2022).
[35] Alexander (2016).

instrução prévia. Em meio às tarefas, o estudante foi solicitado a relatar o que fazia e como pensava resolvê-la.

Pela facilidade, esse estrato está organizado em quadrinhos enfileirados em duas colunas e numerados: a coluna da esquerda traz o diálogo entre Prof. Powell e o estudante, em balões; a da direita mostra a produção escrita do estudante e a numeração de cada linha na cor vermelha. Comentários adicionais sobre o comportamento do estudante interceptam as linhas. Para resguardarmos os sigilos éticos necessários, as identidades do estudante e de sua instituição de ensino não são reveladas.

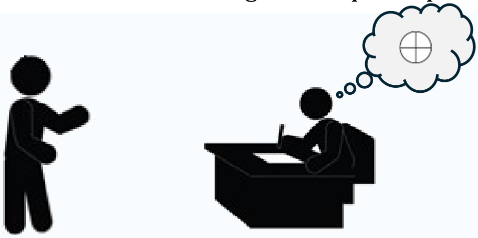
Diálogo Prof. Powell e Estudante	**Produção Escrita do Estudante**

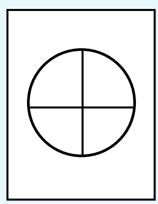
A primeira tarefa continha a figura de um círculo. Prof. Powell solicitou...



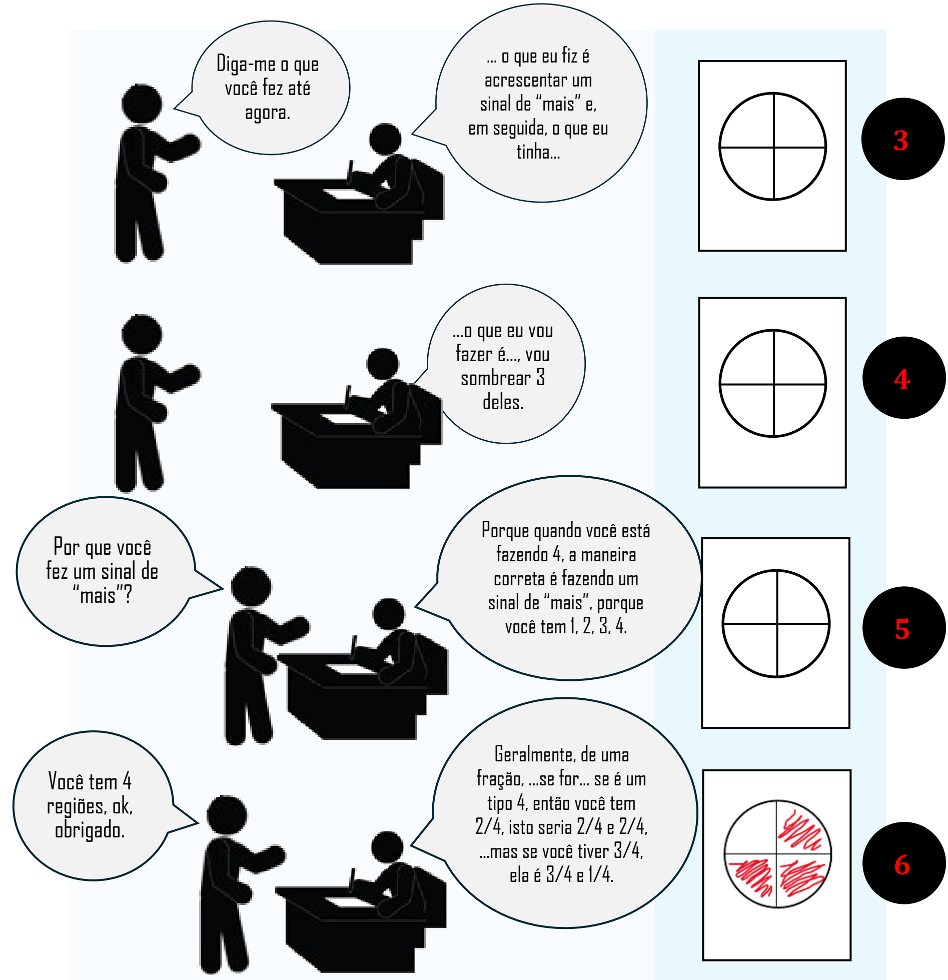
1

O estudante dividiu a figura em quatro partes iguais...



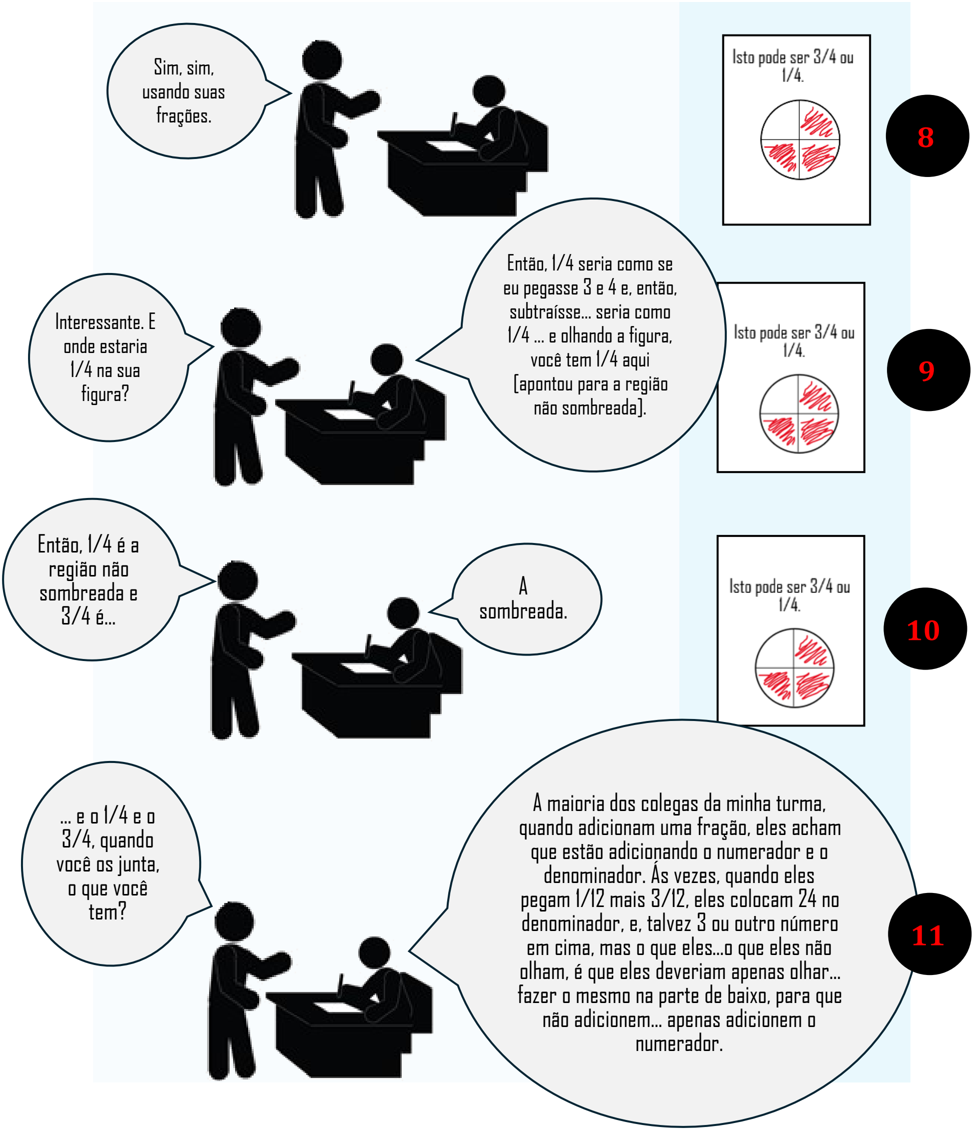


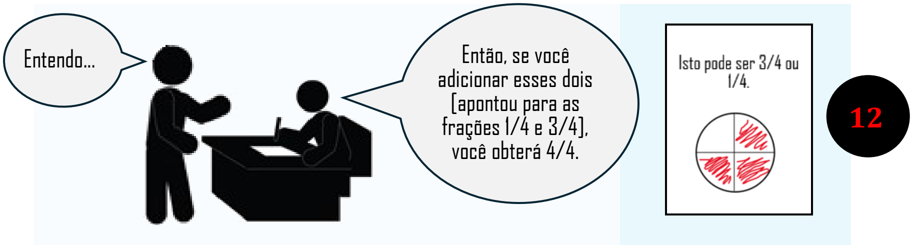
2



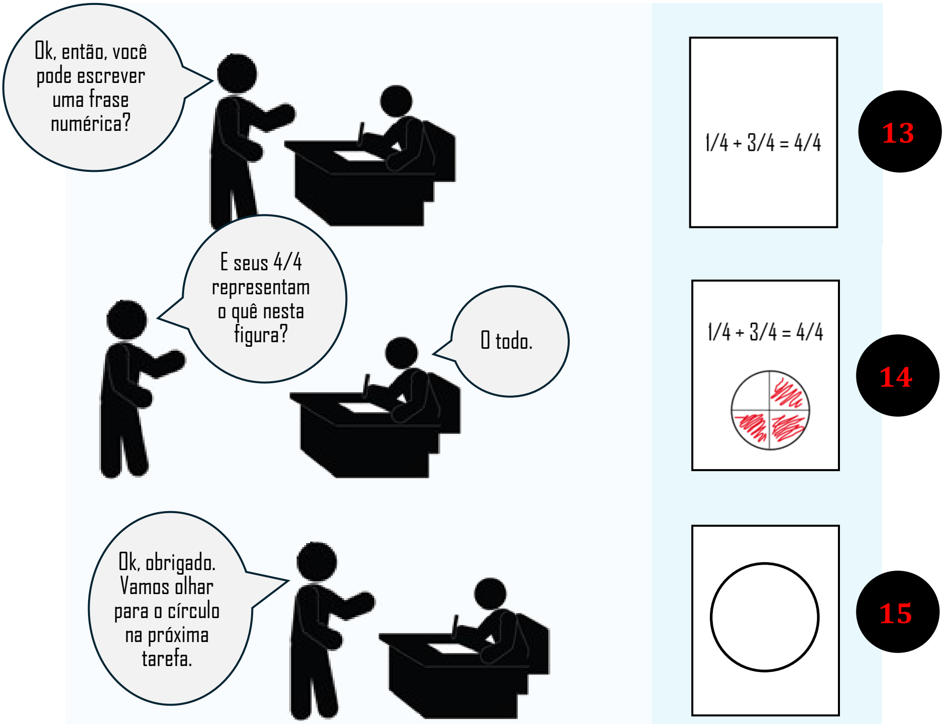
O estudante hachurou três das quatro partes..., apontou duas regiões da figura para se referir a 2/4; apontou três regiões para se referir a 3/4; apontou para a região não sombreada para se referir a 1/4.

E o estudante escreveu...



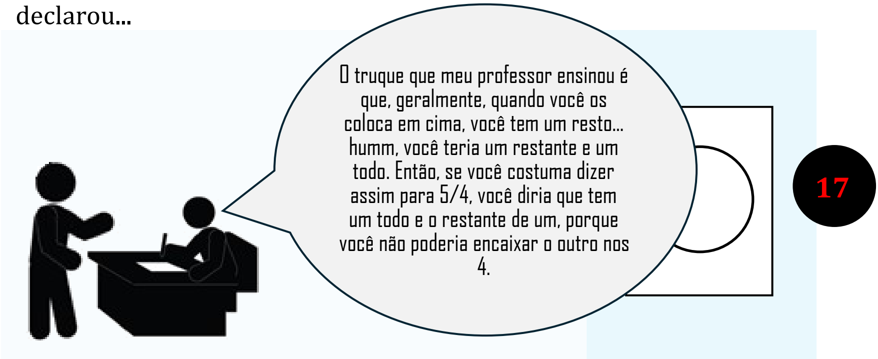


Após a solicitação do Prof. Powell, o estudante escreveu a sentença matemática...

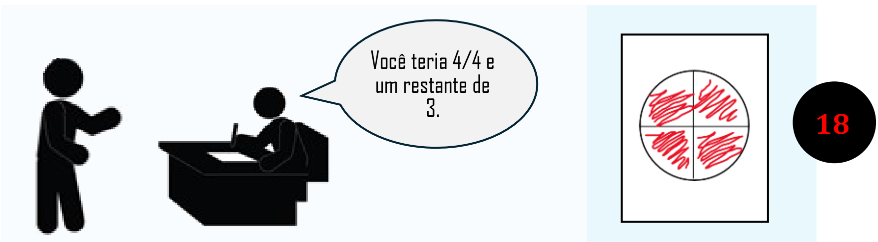


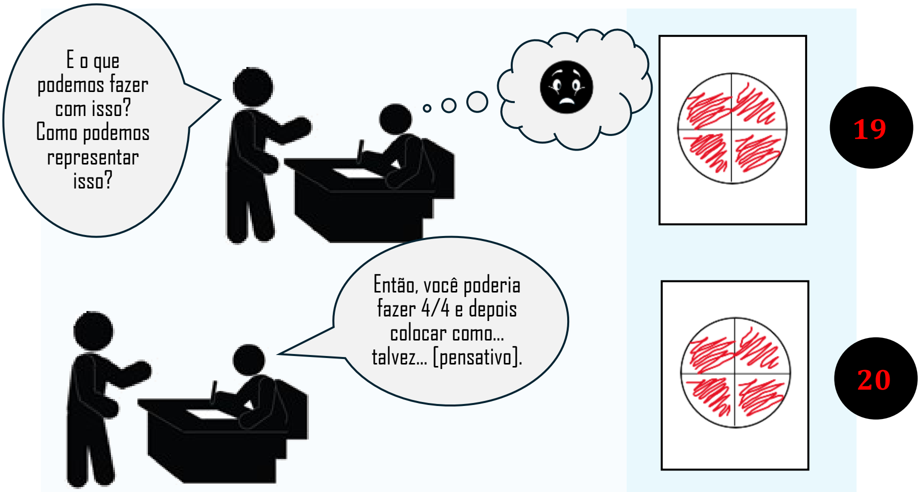
Prof. Powell pediu que o estudante considerasse o círculo na próxima tarefa.

O estudante refletiu por alguns instantes e se lembrou de ter questionado seu professor, no ano passado, sobre a fração 5/4. Continuou pensativo e dividiu o círculo em quatro partes, como na tarefa anterior, e voltou a refletir. A pergunta do Prof. Powell não pareceu ser trivial para aquele estudante. Em seguida, o estudante declarou...



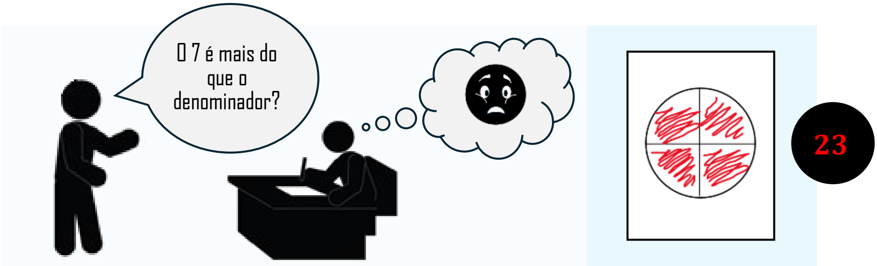
Em seguida, o estudante sombreou as quatro regiões do círculo e disse...



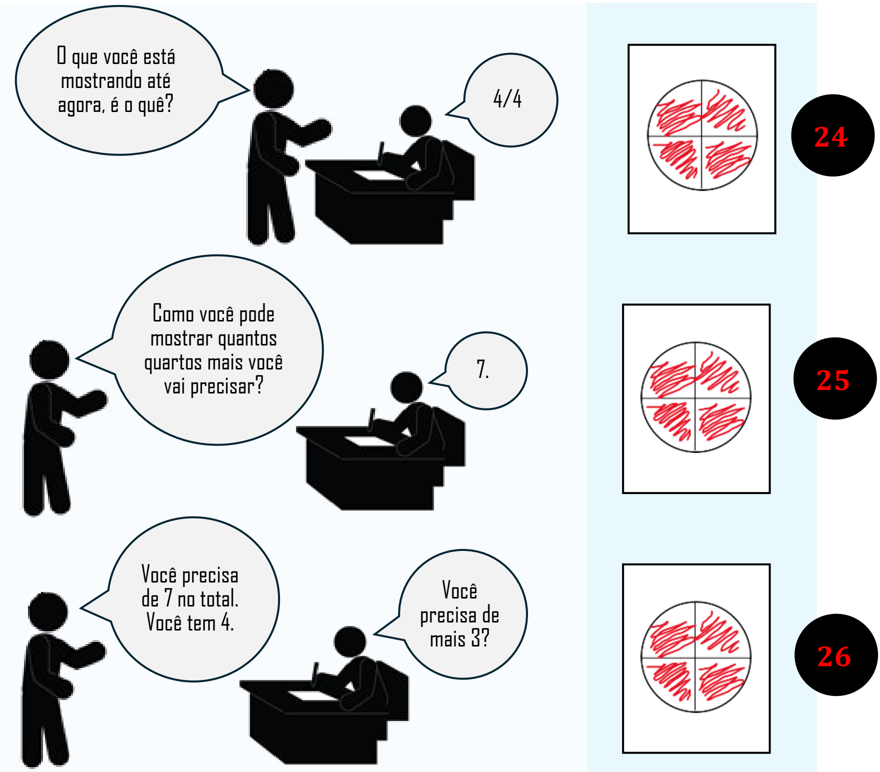


O estudante pareceu tentar outras estratégias, mas não as revelou...

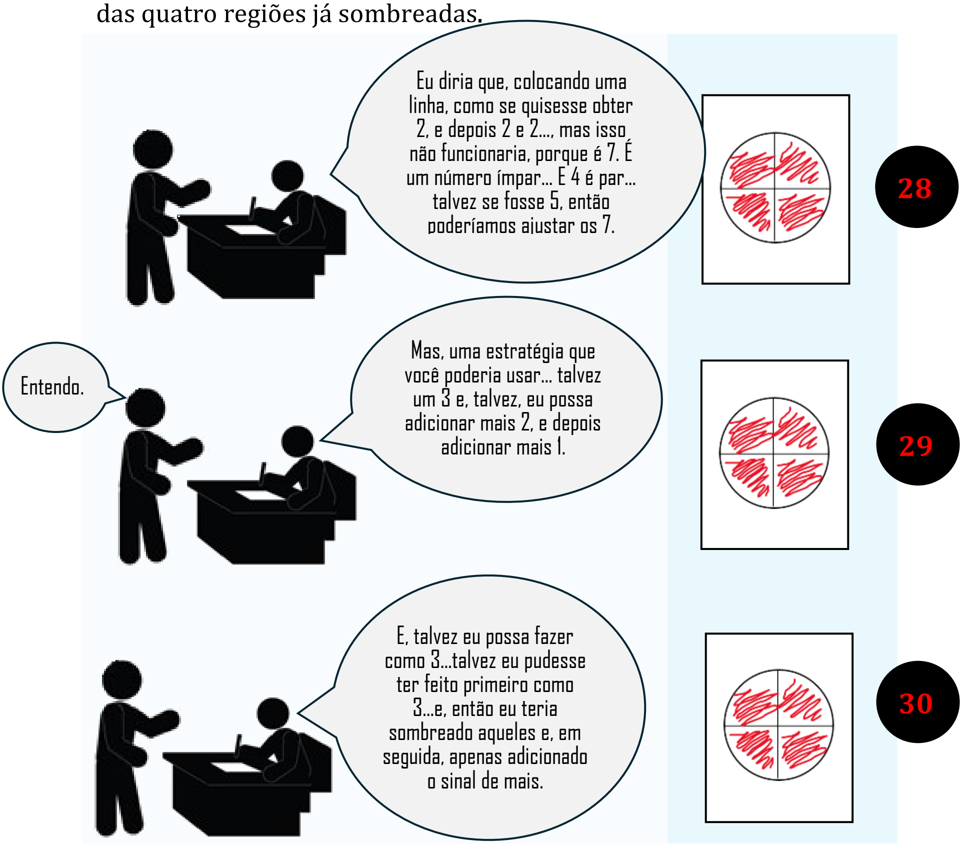
Prof. Powell perguntou a razão de aquela pergunta ser tão complicada para o estudante.

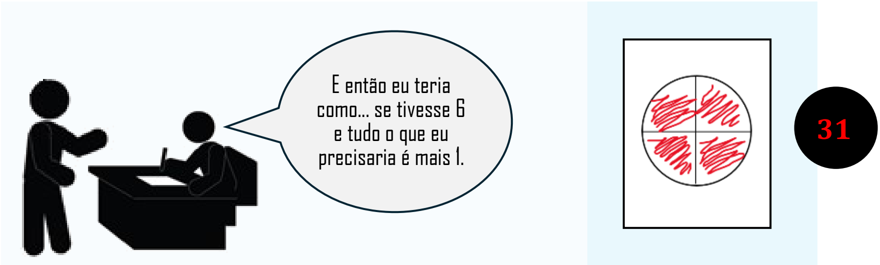


Prof. Powell perguntou mais uma vez como o estudante poderia representar a fração 7/4, mas não conseguiu responder. Prof. Powell tentou ajudá-lo a refletir...

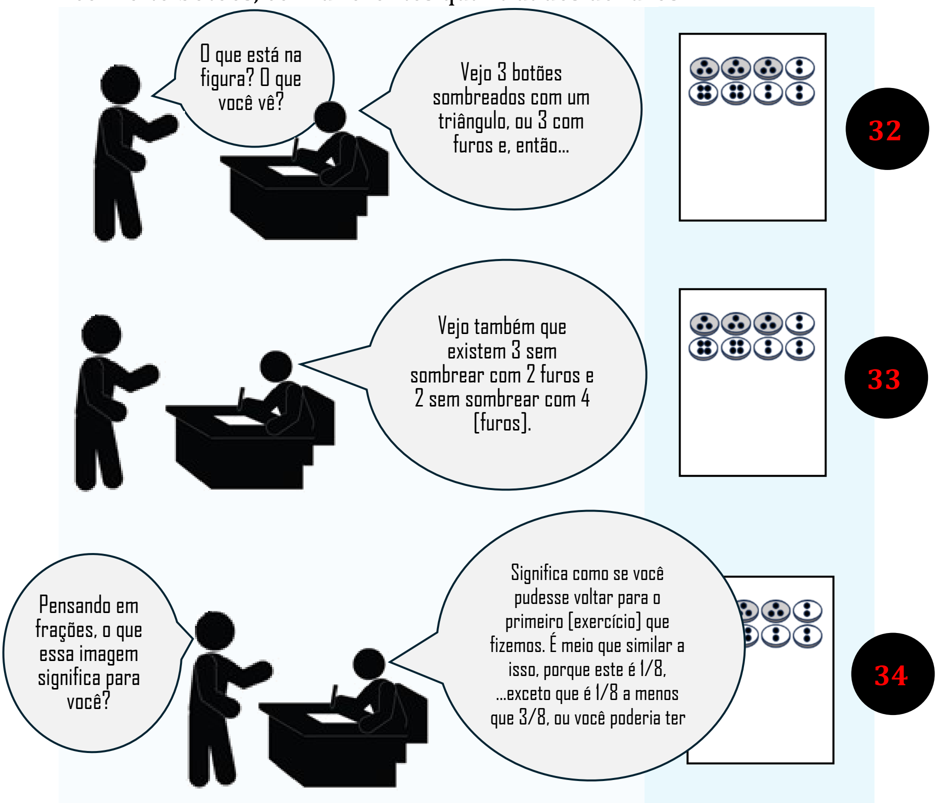


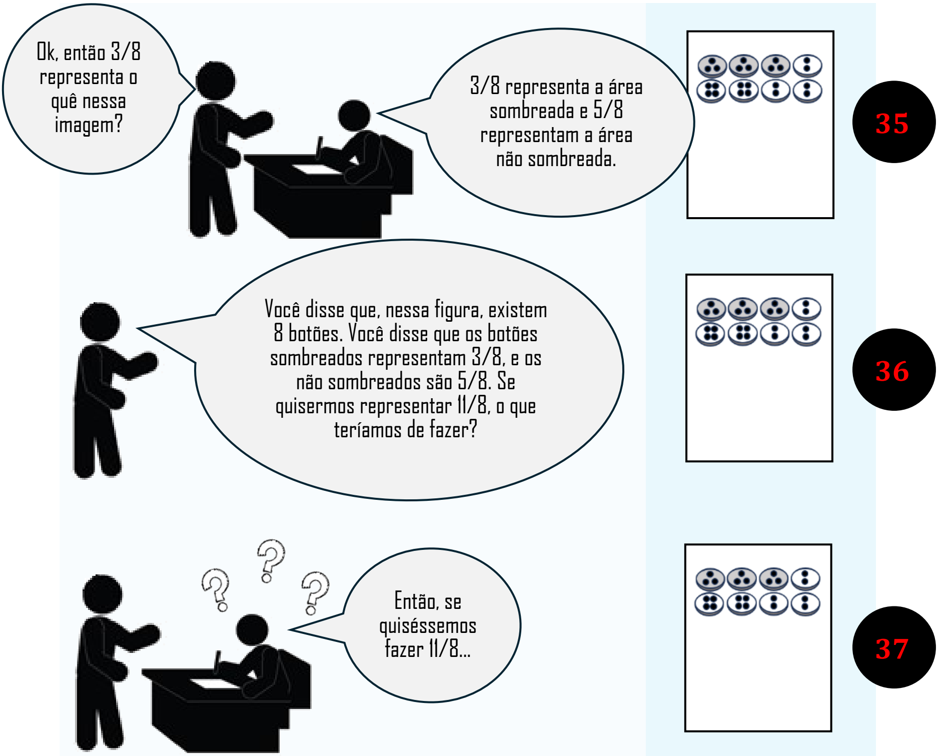
Sem riscar o papel, o estudante mostrou possibilidades de subdivisões das quatro regiões já sombreadas.



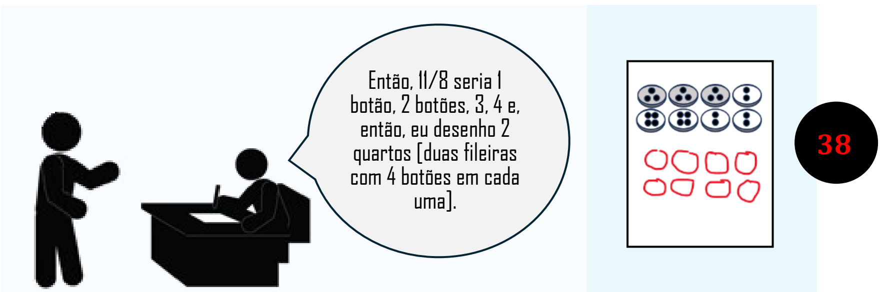


Sem mais declarações para a tarefa dos 7/4, Prof. Powell convidou o estudante para resolver um novo problema, a partir de uma figura com oito botões, com diferentes quantidades de furos.

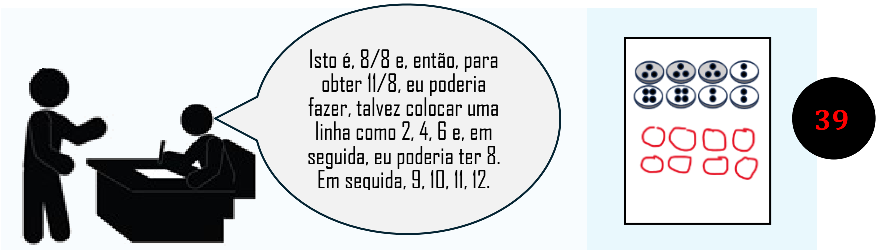




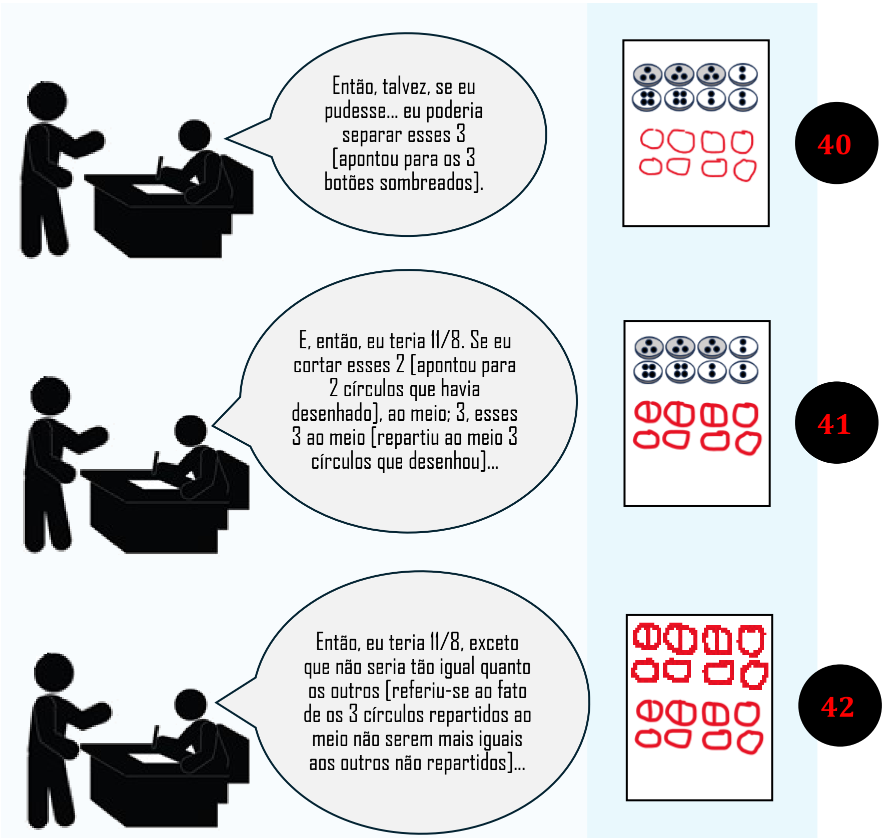
Prof. Powell, compreendeu a dificuldade do estudante e tentou ajudá-lo, sugerindo que desenhasse na figura os 11/8. O estudante desenhou oito círculos abaixo dos botões existentes e disse...

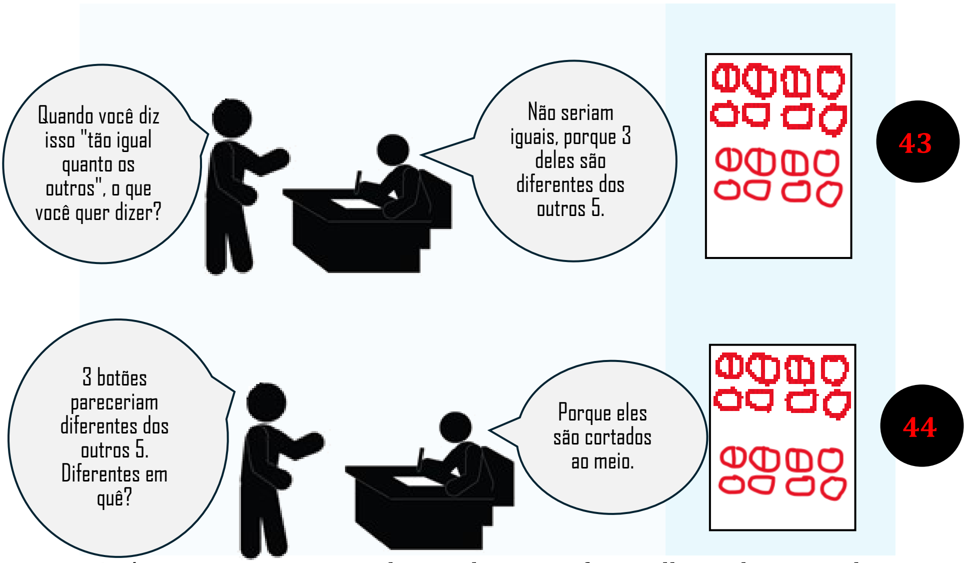


Sem escrever, o estudante respondeu, apontando a caneta para os círculos que desenhou.



Depois, voltando para a figura dos oito botões, o estudante disse...





Após poucas conjecturas do estudante, Prof. Powell agradeceu a pela sua participação e encerrou o diálogo.

Observe o leitor que o estudante soube conduzir e explicar seu raciocínio, quando a tarefa versava exclusivamente sobre fração própria, incluindo explicação sobre a soma de 3/4 e 1/4 (Quadrinhos 1 a 14). Entretanto, ao ser solicitado a representar 7/4 na próxima tarefa, buscou uma solução que não conseguiu representar (Quadrinhos 18 a 31). Faltou ao estudante saber lidar com frações impróprias, provavelmente por não compreender como “caberiam” sete partes havendo apenas quatro.

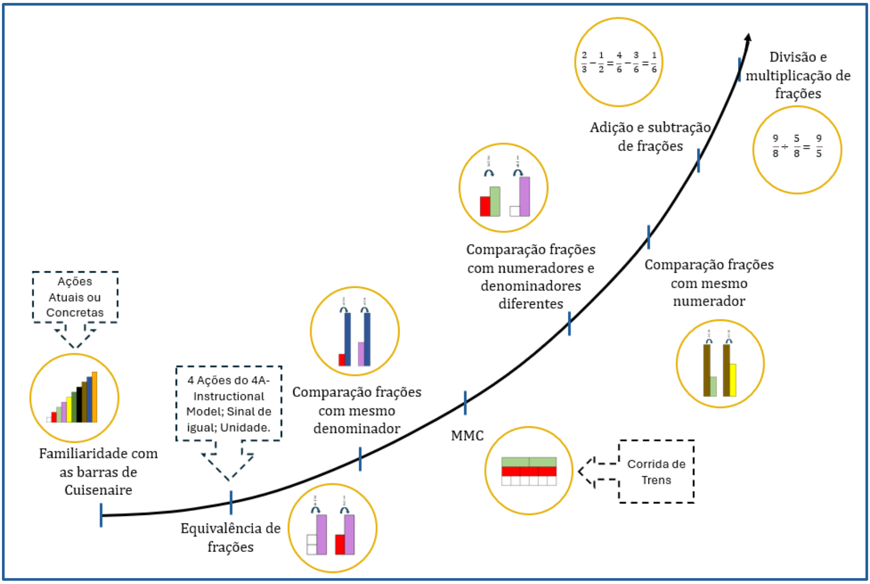
O mesmo ocorreu em nova proposta do Prof. Powell com a tarefa dos botões (Quadrinho 32) – o estudante soube explicar questionamentos sobre fração própria, mas falhou na representação de 11/8 (Quadrinhos 36 a 44). O esforço do estudante em subdividir as figuras (Quadrinhos 41 a 44) indica o desejo de ampliação do todo (unidade de referência) para “encaixar” um numerador maior do que o denominador. Em outras palavras, a persistência do estudante em subdividir as figuras, leva a crer em uma tentativa de relação e importação do raciocínio desenvolvido na perspectiva de partição para resolução ou representação da fração imprópria. Esse obstáculo é superado, quando o apoio cognitivo está baseado na medição.

Com efeito, baseados no fato de que as frações podem influenciar o desempenho na matemática futura – especialmente na álgebra[36] – somado ao diálogo com o estudante do quarto ano estadunidense e aos resultados de investigações com a perspectiva de medição[37], acreditamos não ser sustentável a introdução do estudo de frações pela partição. A aprendizagem apresentada pelo estudante do quarto ano estadunidense leva a crer na satisfação momentânea do ensino de frações àquela altura, mas pode comprometer as chances de compreensão em temas de que necessitem das frações dentro e fora da matemática. A busca pelo equilíbrio entre as necessidades do presente sem comprometer as chances do futuro − a sustentabilidade − deve inspirar ações docentes que tenham energia para apoiar ensinamentos posteriores.

É nesse sentido que recomendamos o estudo de frações na sequência da Figura 9: inicialmente, proporcionar familiaridade com as barras de Cuisenaire. Depois, a equivalência de frações, comparação de frações com o mesmo denominador. Em seguida, o MMC com o que chamamos de "corrida de trens" ou "corrida das cores". Essa "corrida" auxiliará na comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes e na comparação de frações com mesmo numerador. Por fim, o estudo das quatro operações aritméticas: soma, subtração, divisão e multiplicação.

[36] Siegler *et al.* (2012), Van Hoof *et al.* (2020), Booth, Newton & Twiss-Garrity (2014), Powell, Gilbert & Fuchs (2019), Olive (1999), Booth & Newton (2012).
[37] Amaral (2021), Powell (2023).

Figura 9: sugestão de sequência para estudo de frações e suas operações aritméticas básicas



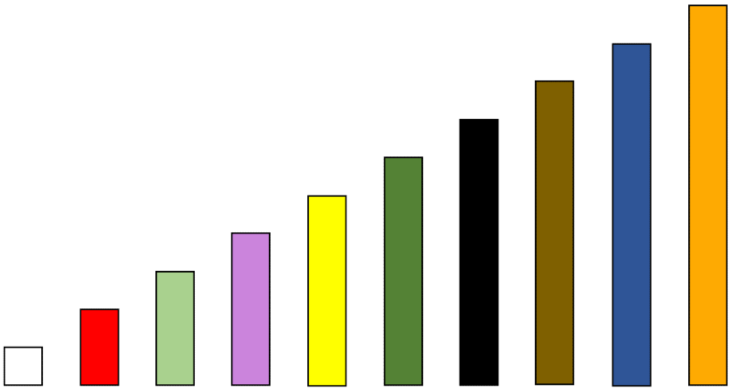
A perspectiva de medição foi objeto de validação da aprendizagem de estudantes do ensino básico brasileiro e estadunidense[38]. Baseados nos resultados dessas investigações e de autores que são citados neste livro, convidamos professores e pesquisadores a experimentarem e vivenciarem com seus estudantes a proposta apresentada em **OPERAÇÕES COM FRAÇÕES À MODA ANTIGA**.

[38] Amaral (2021), Powell (2023).

Frações com as barras de Cuisenaire

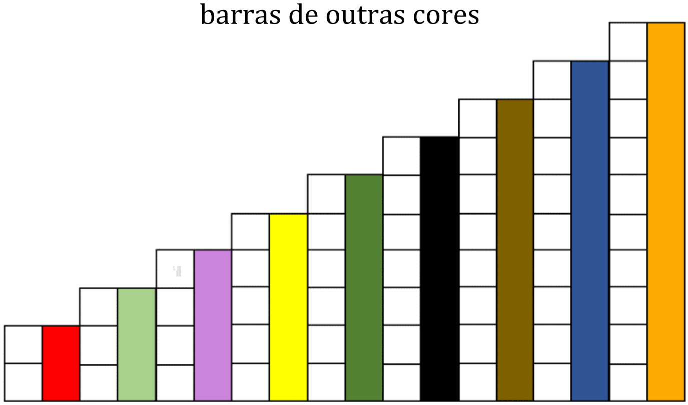
As barras de Cuisenaire formam um conjunto de dez barras com comprimentos e cores diferentes (Figura 10). Embora sejam representadas por paralelepípedos, o que nos interessa para o estudo de frações são as cores e os comprimentos das maiores faces dispostas sobre uma mesa.

Figura 10: barras de Cuisenaire



A barra branca possui a face com determinado comprimento que, quando duas ou mais são arranjadas ponta a ponta, alcançam os comprimentos das barras de outras cores (Figura 11).

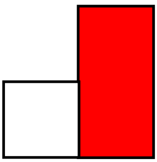
Figura 11: Relação de comprimento das barras brancas com as barras de outras cores



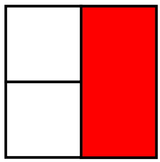
Logo, uma barra vermelha tem o mesmo comprimento de duas barras brancas arranjadas de ponta a ponta. Uma barra verde clara tem o mesmo comprimento de três barras brancas. Seguindo essa lógica, uma barra laranja tem o mesmo comprimento de dez barras brancas. As barras de mesma cor têm o mesmo comprimento.

Esses comprimentos auxiliam os estudantes a compreender uma relação entre a barra da esquerda e a barra da direita por suas extensões[39]. A leitura dessas relações é sempre realizada da barra da esquerda para a barra da direita. Como exemplo, podemos dizer que a barra branca é metade do comprimento da barra vermelha (Figura 12).

Figura 12: relação do comprimento da barra branca com a barra vermelha



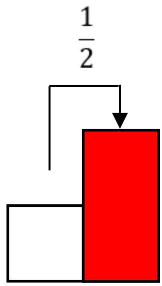
pois,



Então, podemos dizer que a barra branca é 1/2 da barra vermelha (Figura 13).

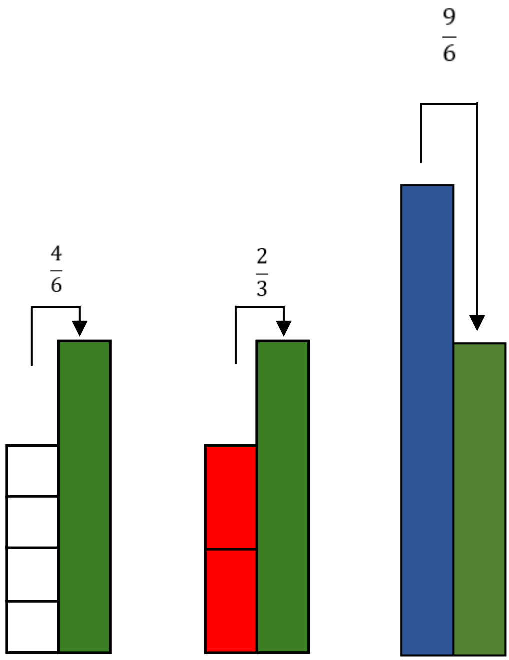
[39] Neste livro, as diferentes ilustrações com as barras de Cuisenaire não possuem sempre a mesma escala. O leitor, portanto, deve estar atento às relações entre as barras em cada figura, isoladamente. Por exemplo, a barra vermelha da Figura 5 não tem a mesma escala da barra vermelha da Figura 6.

Figura 13: comprimento de uma barra branca é 1/2 da barra vermelha



Seguindo a mesma lógica e considerando o comprimento da barra da direita como a unidade de medida em cada caso, temos as seguintes relações (Figura 14):

Figura 14: relação entre o comprimento da(s) barra(s) da esquerda com a respectiva barra da direita em cada dupla



Observe o leitor que a unidade de medida deve ser sempre considerada em cada contexto relacional entre os comprimentos das barras.

Para ações futuras, devemos codificar cada barra com letras, pois teremos expressões matemáticas para representar ou falar das magnitudes[40] de cada barra ou conjunto de barras. Adotaremos a codificação da Tabela 1:

Tabela 1: representação de cada barra com uma letra

Cor da barra	Letra	Descrição da cor
	b	branca
	v	vermelha
	vc	verde clara
	r	roxa
	o	amarela (ouro)
	ve	verde escura
	p	preta
	m	marrom
	a	azul
	l	laranja

[40] Na próxima página esclarecemos o significado de magnitude no contexto deste livro.

Desse modo, a título de exemplificação e considerando o comprimento da barra branca como a unidade de medida, podemos escrever expressões como:

$$v = b + b \text{ ou } v = 2b$$

$$l > r$$

$$ve = v + r$$

$$a < l$$

$$2p \neq m$$

Esclarecemos que...
a magnitude de uma fração é o valor de seu comprimento, ou seja, é o valor que atribuímos para descrever o comprimento de uma fração.

Conversa com o professor

Recomendamos que a aula não prossiga com novas ideias até que os estudantes tenham dominado as relações de comprimento, as letras que representam cada barra e o estabelecimento da unidade de medida em cada caso. É importante que essas ações preliminares sejam incorporadas em suas mentes e, para isso, é aconselhado imprimir as mesmas ações com outras barras. Por exemplo:

1- quantas barras brancas arranjadas de ponta a ponta são necessárias para ter o mesmo comprimento da barra preta?

2- quantas barras amarelas arranjadas de ponta a ponta são necessárias para ter o mesmo comprimento da barra preta?

3- que relação há entre o comprimento da barra roxa e o comprimento da barra marrom?

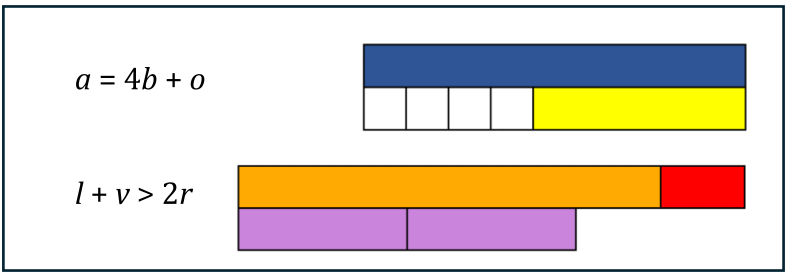
4- que relação há entre o comprimento da barra azul e o comprimento da barra verde clara?

Sugerimos que essas questões sejam realizadas e respondidas com os estudantes manipulando as barras sobre a mesa. Essa ação concreta[41] ajudará os estudantes a compreender as relações. Estudantes que não respondam corretamente aos questionamentos devem retornar às atividades do conteúdo do livro Frações à Moda Antiga.

Prosseguindo..., sugerimos pedir aos estudantes que:

5- escrevam expressões matemáticas de igualdade, desigualdade e diferença, demonstrando-as com as barras. (Por exemplo, como na Figura 15).

Figura 15: exemplos de sentenças matemáticas e correspondentes representações nas barras



Essas atividades ajudarão os estudantes na construção dos próximos conceitos, a iniciar por frações equivalentes.

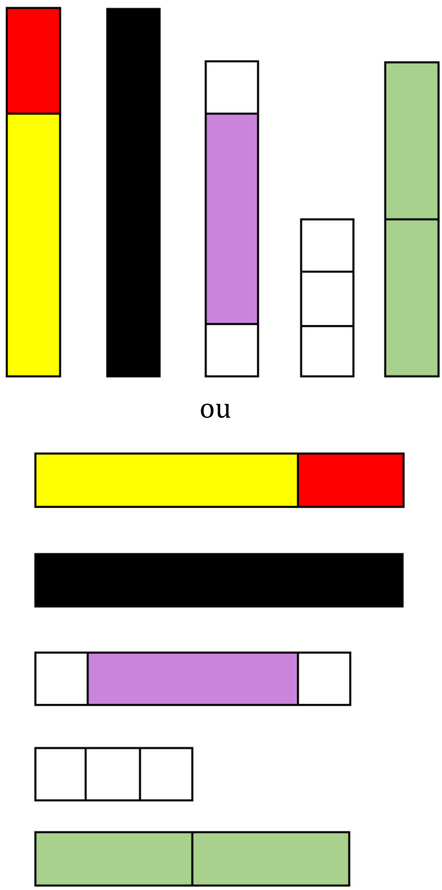
Até a próxima seção!

[41] Ação Concreta do 4A-Instructional Model - ver o livro Frações à Moda Antiga.

Equivalência de frações

A abordagem de equivalência de frações deve ser antecedida de um protocolo de comunicação. A comunicação entre professores e estudantes deve ser sempre bem estabelecida para que ela não seja um obstáculo para a aprendizagem. As barras arranjadas sobre uma mesa, ponta a ponta, vertical ou horizontalmente, formam uma carreira que chamaremos de **trem** (Figura 16). Um trem pode ser uma ou mais barras dispostas ponta a ponta gerando um novo comprimento (Figura 16).

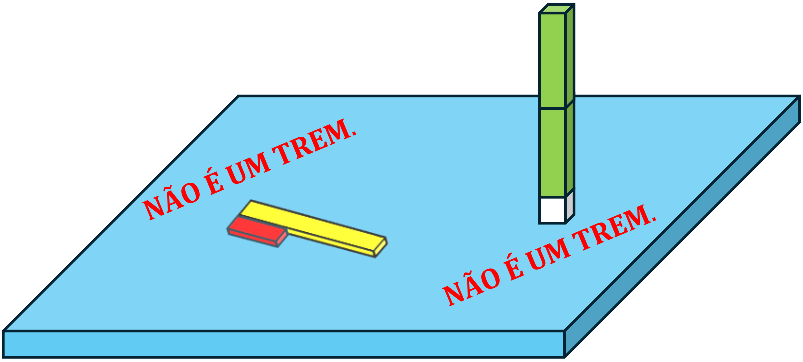
Figura 16: exemplos de trens



Não são aqui considerados trens, conjunto de barras dispostas lado a lado (Figura 17a) ou posicionadas “como uma torre” sobre a mesa (Figura 17b):

Figura 17: não são trens

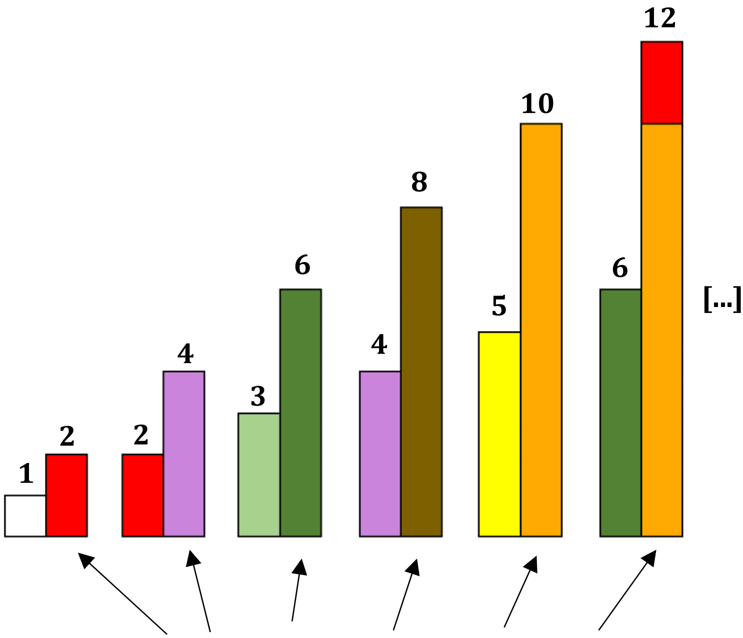
(a) (b)



Com a comunicação definida entre professor e estudantes, o trabalho com a equivalência de frações pode ser iniciado. Tome pares de trens que possuam uma relação 1/2 do comprimento de outro trem e disponha-os lado a lado, de modo que o trem (ou trens) que é (são) a unidade de medida em cada par fique(m) posicionado(s) do lado direito (Figura 18)[42]. Dessa forma, o trem que representa 1/2 do outro, está do lado esquerdo do par.

[42] Lembramos ao leitor que esta é uma convenção e que pode ser adaptada, desde que a unidade de medida seja reconhecida pelos leitores.

Figura 18: mesma relação do comprimento do trem da esquerda com o trem da direita

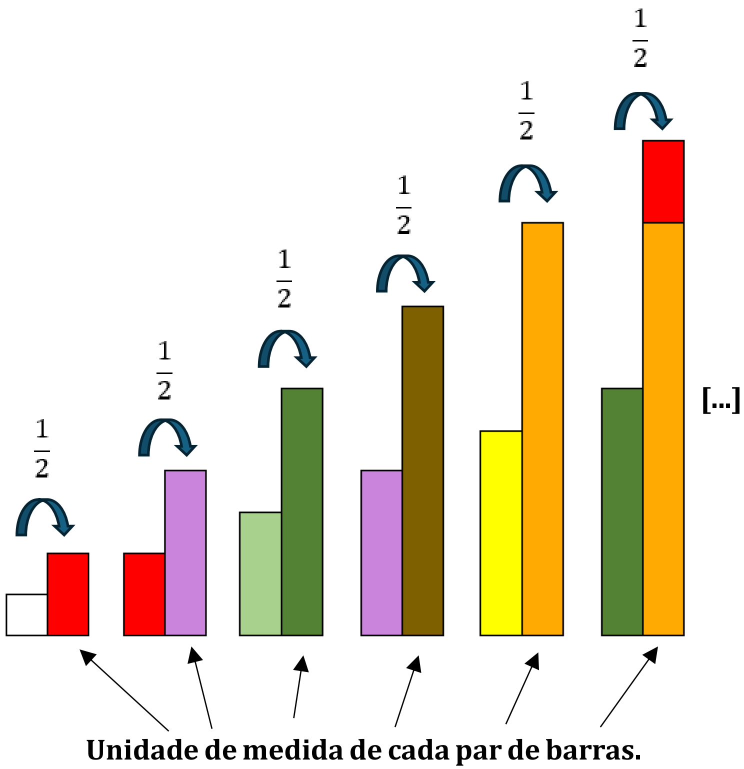


Unidade de medida de cada par de barras.

É sempre bom lembrar que...
o comprimento da barra à direita representa a unidade de medida em cada par de barras.

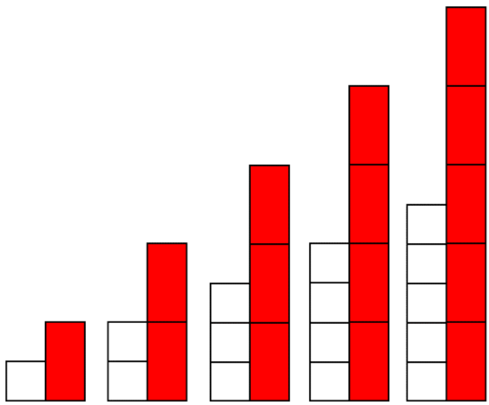
Observe que a relação do comprimento do trem do lado esquerdo e o comprimento do trem do lado direito é de 1/2 em todos os pares (Figura 19).

Figura 19: relação de 1/2 em todos os pares



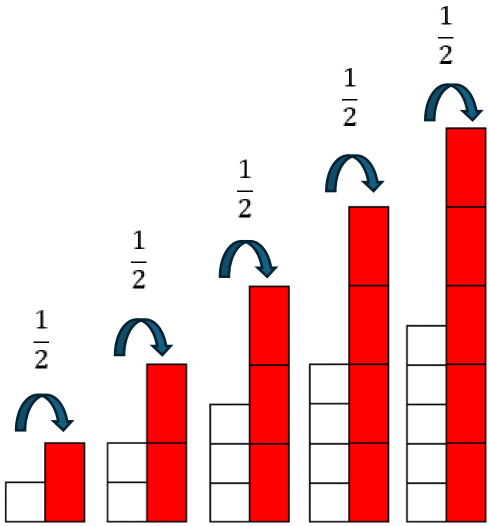
Depois disso, precisamos convergir para a compreensão da equivalência de frações. Para isso, tome novamente um trem branco e um trem vermelho e construa outros pares de trens, acrescentando um trem de mesmo tipo a cada cor em cada par. Repita essa ação por, pelo menos, cinco vezes (Figura 20).

Figura 20: incremento de trens de mesmo tipo a cada cor

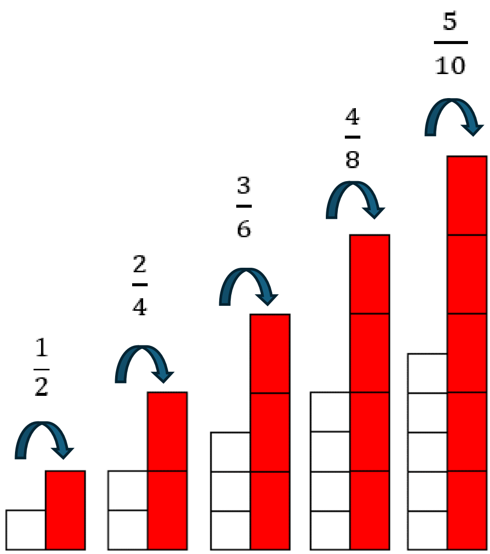


O que muda de um par para o outro? O que não muda de um par para o outro? Após uma reflexão atenta sobre as relações de cada par de trens, uma conclusão esperada é que o incremento de uma barra, a cada cor, em cada par, expresse uma relação invariante a cada par de trens que é de 1/2 (Figura 21).

Figura 21: relação invariante de 1/2 a cada par



Há outro modo de ler esse conjunto de pares...



Se a relação de cada par de trens é de 1/2, então:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \ldots \text{ são equivalentes.}$$

Matematicamente falando, como podemos estar convencidos dessa equivalência? Observe que os acréscimos simultâneos de uma barra de mesma cor a cada trem não alteram a relação de 1/2.

$$\frac{1 \times 1}{1 \times 2} = \frac{2 \times 1}{2 \times 2} = \frac{3 \times 1}{3 \times 2} = \frac{4 \times 1}{4 \times 2} = \frac{5 \times 1}{5 \times 2} = \cdots$$

De modo mais geral, chamando a barra branca de b e a barra vermelha de v, temos a seguinte expressão que também mostra a relação de 1/2 inalterada.

$$\frac{b}{v} = \frac{b + b}{v + v} = \frac{b + b + b}{v + v + v} = \frac{b + b + b + b}{v + v + v + v} = \cdots$$

Ou ainda,

$$\frac{b}{v}=\frac{1\times b}{1\times v}=\frac{2\times b}{2\times v}=\frac{3\times b}{3\times v}=\frac{4\times b}{4\times v}=\frac{5\times b}{5\times v}=\cdots$$

$$\frac{b}{v}=\frac{n\times b}{n\times v}, \text{com } n\in\mathbb{N}$$

Mas essa equivalência não acontece somente com a relação entre *b* e *v*. Precisamos generalizar a equivalência para quaisquer relações entre duas barras.

Chamando de *a* a magnitude de qualquer barra ou conjunto de barras em relação à magnitude *b* de qualquer outra barra ou conjunto de barras, e sendo $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$, temos:

$$\frac{a}{b}=\frac{n\times a}{n\times b}, \text{com } a,b,n\in\mathbb{N};\ b,n\neq 0$$

Conversa com o professor

Após estudantes demonstrarem compreensão da existência de uma relação invariante de 1/2 com 2/4, 3/6, 4/8, 5/10 etc., é hora de experimentarem outras mais. O professor pode questioná-los nesta direção:

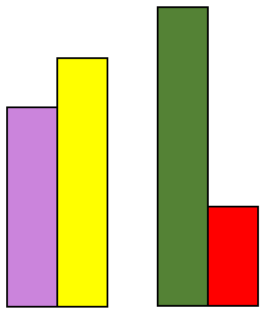
1- que outras representações podem ser apresentadas para a relação 3/4?

Do mesmo modo, vale os estudantes realizarem relações com frações impróprias:

2- que outras representações podem ser apresentadas para a relação 3/2?

Logo após, de modo mais flexível, o professor pode solicitar que cada estudante crie uma relação entre duas barras (por exemplo: barra roxa e barra amarela ou barra verde escura e barra vermelha – Figura 22) e construa representações equivalentes para a relação escolhida. É importante que o professor estimule trabalho com frações próprias e impróprias indistintamente.

Figura 22: sugestão para criação de relações entre duas barras



3- escolha duas barras quaisquer. Que relação existe entre elas? Que outras representações equivalentes podem ser escritas para essa relação? Mostre nas barras e escreva as representações no papel. Compare suas representações com as de seu colega.

Essas ações são denominadas atuais (ou ações concretas na abordagem 4A-Instructional Model)[43], ou seja, com uso das barras

[43] Ações Atuais, Ações Virtuais, Ações Escritas e Ações Formalizadas fazem parte de uma abordagem denominada 4A-Instructional Model de autoria do Prof. Dr. Powell. Essa abordagem pode ser encontrada no cap. 3º, p. 24, do livro Frações à Moda Antiga.

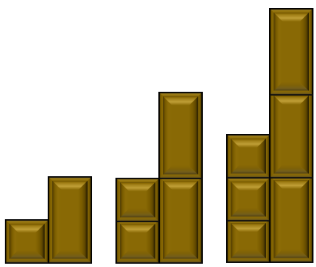
para responder aos questionamentos do professor. Em seguida, é desejável que estudantes que já tenham compreendido a equivalência de frações, avancem para ações virtuais. O professor pode mostrar duas barras quaisquer e pedir que os estudantes verbalizem outras representações equivalentes para a relação eleita pelo professor.

Novamente, o professor pode selecionar outras duas barras quaisquer e pedir que os estudantes escrevam três ou quatro representações equivalentes àquela (estarão envolvidas ações virtuais, ações escritas e ações formalizadas).

Se algum estudante não conseguir responder a essa atividade, significa que ainda não dominou a equivalência plenamente. Vale a pena, nesse caso, retornar às atividades anteriores até que a aprendizagem ocorra.

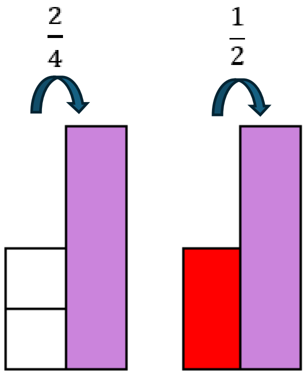
A aprendizagem no tópico de equivalência pode ser expandida. Sugerimos um debate sobre a representação do sinal de igual (=) como igualdade e como equivalência, pois é o mesmo para ambos os casos. Mas, que significados tem para cada uso? O estímulo ao debate poderia ser iniciado com uma problematização. Por exemplo, 1/2, 2/4 e 3/6 são relações equivalentes como as da Figura 17, mas, se fossem barras de chocolate, por que Carolina comeria mais chocolate do que Samir, que, por sua vez, comeria mais do que Clara? (Figura 23)

Figura 23: problematização sobre igualdade e equivalência



O debate poderia prosseguir para a seguinte situação: considere o leitor as relações 2/4 – barras brancas e barra roxa –e 1/2 – barra vermelha e barra roxa - da Figura 24.

Figura 24: relações de 2/4 e 1/2 de barras brancas e barra vermelha em relação à barra roxa, respectivamente

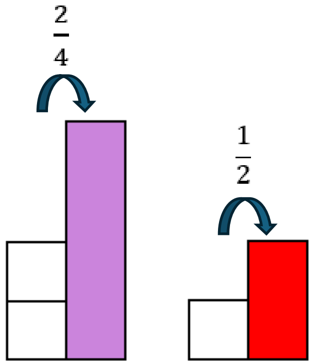


A situação da Figura 23 mostra que 2/4 e 1/2 são iguais e equivalentes, porque seus comprimentos são os mesmos em relação à unidade de medida. Logo, o sinal de igual (=) nessa situação expressa igualdade e equivalência.

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, o sinal "=" expressa igualdade e equivalência.

Observe o leitor a relação de 2/4 das barras brancas com a barra roxa e de 1/2 da barra branca com a barra vermelha na Figura 25.

Figura 25: relações de 2/4 e 1/2 de barras brancas com barra roxa e vermelha, respectivamente



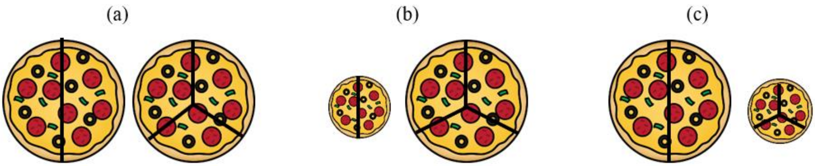
A Figura 25 expõe uma circunstância de 2/4 e 1/2 cujos comprimentos não são os mesmos em relação às respectivas unidades de medidas. Nesse caso, essas relações guardam tão somente a mesma proporção em relação às suas unidades de medidas, logo, são equivalentes, mas não são iguais.

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, o sinal “=” expressa equivalência, mas não igualdade.

Após um debate sobre o sinal de igual (=), o professor pode solicitar que os estudantes apresentem nas barras outras situações com duas ou mais relações que expressem igualdade e equivalência, e somente equivalência. Exemplos: 2/3 e 4/6; 1/3, 2/6 e 3/9).

O debate com o sinal de igualdade e equivalência tangencia o reconhecimento da unidade de medida, quando do estudo de frações. A esse respeito, podemos estimular outra reflexão. Sugerimos apresentar aos estudantes a seguinte situação: “Marcos comeu 1/3 de pizza, e Carlos comeu 1/2. Quem comeu mais pizza?”[44] A ideia é promover uma reflexão sobre comparação entre 1/3 e 1/2. Quem responder 1/3, provavelmente está baseado no fato de 3 ser maior do que 2. Nesse caso, há aplicação das propriedades dos números naturais aos racionais. Quem responder 1/2, possivelmente pensa que a metade de algo seja sempre maior que um terço. Em ambas as respostas, há desconsideração da unidade de medida, logo a resposta deveria ser “depende”. A análise da Figura 26 ilustra cada uma das respostas.

Figura 26: comparação entre pizzas com diferentes unidades de medidas[45]



A Figura 25(a) apresenta duas pizzas com a mesma magnitude, portanto 1/2 > 1/3. As pizzas das figuras 25(b) e 25(c) possuem diferentes magnitudes: em 25(b), 1/3 da pizza da direita é maior que 1/2 da pizza da esquerda e; em 25(c), 1/2 da pizza da esquerda é maior que 1/3 da pizza da direita. A análise da unidade de medida justifica a resposta “depende” ao problema proposto e leva os estudantes a refletirem sobre a necessidade do reconhecimento de magnitudes.

Como seguimento à abordagem com a unidade, é útil ilustrar o conteúdo escolar com alguma aplicação extraescolar. Por exemplo, é comum em alguns países a indicação da distância a ser percorrida por um veículo até o destino desejado (Figura 27).

[44] Souza (2021, p. 87).
[45] Souza (2021, p. 88).

Figura 27: sinalização em uma rodovia estadunidense

A Figura 27 mostra uma sinalização que informa ser possível um retorno na rodovia a 1/4 de milha. Qual é a unidade de referência nesse caso?

O que significa dizer "Brandon, 3/4 de milha" na Figura 28? No todo (na unidade de referência), quanto falta percorrer para chegar a Brandon?

Figura 28: sinalização em uma rodovia estadunidense

O contexto culinário é rico para abordagem da unidade de medida. Vejamos a receita de biscoitos de chocolate da Figura 29.

Figura 29: receita de biscoitos de chocolate

- 3/4 de xícara de açúcar cristal
- 1/4 de xícara de açúcar mascavo
- 1 xícara de manteiga
- 3/2 colheres de sopa de baunilha
- 1 ovo
- 1/2 xícara de farinha de trigo
- 1 colher de chá de sal
- 1/2 colher de chá de bicarbonato de sódio
- 350g de chocolate.
- 1/2 xícara de nozes picadas.

Há várias unidades de medida a serem consideradas na receita da Figura 29. Observe o leitor que 1/2 xícara de nozes ou farinha de trigo não é a mesma medida que 1/2 colher de chá de bicarbonato. Por quê? Quais unidades estão envolvidas? Serão usados mais açúcar cristal ou açúcar mascavo nessa receita? Por quê? Podemos comparar essas medidas?

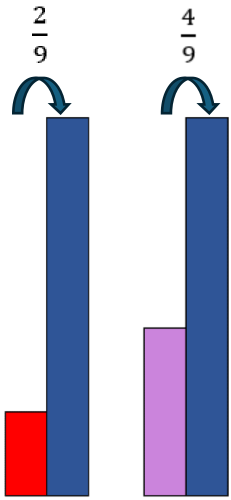
A comparação, equivalência e análise da unidade de medida de frações são fundamentais para a construção do conceito de frações e serão base para compreensão de suas operações aritméticas. Vamos seguir com um estrato sobre a comparação de frações com o mesmo denominador, semelhante à discussão realizada no livro Frações à Moda Antiga.

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

Comparação de frações com denominadores iguais

Após a familiaridade com as barras de Cuisenaire, com a compreensão de equivalência de magnitudes e a atenção à unidade de referência, é o momento de compararmos frações com o mesmo denominador. Propomos comparar as magnitudes das frações 2/9 e 4/9 (Figura 30).

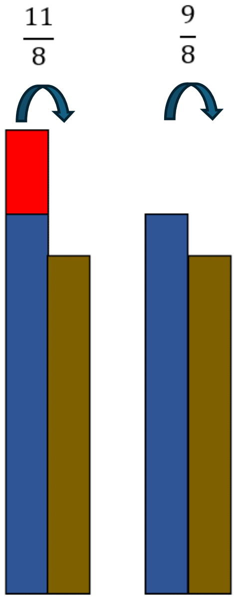
Figura 30: comparação entre 2/9 e 4/9



A medida 4/9 é maior do que 2/9, porque a barra roxa tem maior comprimento que a barra vermelha, ambas em relação à medida da barra azul.

É sempre pertinente a diversificação das ações. Propomos, então, a comparação entre duas frações impróprias 11/8 e 9/8 (Figura 31).

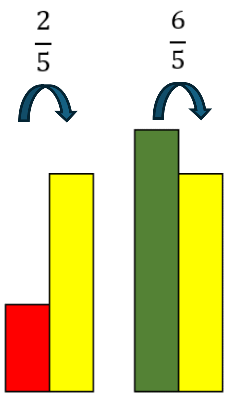
Figura 31: comparação entre 11/8 e 9/8



A fração 11/8 tem maior comprimento do que 9/8, ambas em relação à unidade marrom.

Do mesmo modo, é bem-vinda a comparação de magnitudes entre uma fração própria e outra imprópria (Figura 32).

Figura 32: comparação entre 2/5 e 6/5



A fração 6/5 tem maior magnitude do que 2/5, ambas em relação ao comprimento da barra amarela.

Conversa com o professor

Após as comparações propostas pelo professor, sugerimos que os estudantes possam criar suas próprias comparações:

1- escolham uma barra qualquer como unidade de referência. Depois, escolham outras duas barras de cores diferentes entre si e diferente da unidade, cada qual formando uma fração com a unidade de referência. Por fim, declarem qual fração é maior ou menor.

Depois, o professor pode estimular comparações com barras de cores iguais. Qual conclusão é esperada? A ideia é que as comparações estimulem os estudantes a concluir que frações com o mesmo denominador terão maior medida, quando os numeradores forem maiores. Logo, 11/8 > 9/8, 5/6 > 2/6, etc. O professor pode provocar a conclusão...

2- como podemos identificar se uma fração é maior, menor ou igual a outra, tendo o mesmo denominador?

É possível ir além. Sempre que uma fração possuir numerador maior do que o denominador, e a outra fração não possuir essa característica, a primeira terá maior comprimento. Por quê? Talvez esse seja o momento de conversar com os estudantes sobre o fato de que se o denominador é menor que o numerador, a medida da fração aumenta. As barras podem convencer os estudantes sobre essa afirmação.

Em algum momento, é possível que os estudantes tenham curiosidade em comparar frações com denominadores diferentes. Se isso não acontecer espontaneamente, o professor pode estimulá-los...

3- como podemos comparar frações com denominadores diferentes?

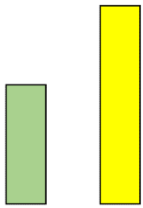
A comparação de frações com denominadores diferentes pode requerer que conheçamos a ideia de um múltiplo comum (não necessariamente o mínimo múltiplo comum - MMC). Pela tradição matemática, usaremos o MMC!... Vamos a ele na próxima seção.

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

Mínimo múltiplo comum

A necessidade do mínimo múltiplo comum nasce, quando duas ou mais barras de cores diferentes participam de um jogo: Corrida das Cores ou Corrida de Trens. Vamos conhecer esse jogo, tomando as barras verde clara e amarela da Figura 33. A barra verde clara corresponde ao comprimento de três barras brancas. A barra amarela possui o mesmo tamanho de cinco barras brancas, arranjadas ponta a ponta.

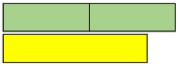
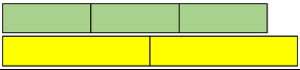
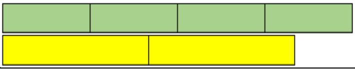
Figura 33: duas barras com cores diferentes



O jogo consiste em posicionar as barras emparelhadas uma à outra, e acrescentar barras de mesma cor a cada um dos trens, sempre no menor trem naquele momento, até que o comprimento dos dois (ou mais) trens seja igualado, quando, então, o jogo termina.

Na Tabela 2, iniciamos com uma barra verde clara emparelhada com uma barra amarela. A barra verde clara é menor do que a barra amarela, portanto, ela receberá a segunda barra verde clara. Com isso, duas barras verdes claras têm comprimento maior do que uma barra amarela, portanto acrescentamos a segunda barra amarela. Sempre que o comprimento de um trem seja menor do que o outro, receberá uma barra de mesma cor. O jogo prossegue até que as duas fileiras de barras verdes claras e amarelas possuam o mesmo comprimento.

Tabela 2: Corrida dos Trens entre as barras verde clara e amarela

Corrida de trens entre barras verde clara e amarela	**Etapas do jogo**
	1 verde clara 1 amarela
	2 verdes claras 1 amarela
	2 verdes claras 2 amarelas
	3 verdes claras 2 amarelas
	4 verdes claras 2 amarelas
	4 verdes claras 3 amarelas
	5 verdes claras 3 amarelas

O jogador que igualou os comprimentos dos dois (ou mais) trens é o vencedor. No nosso caso, o jogador que posicionou a última barra verde clara. O comprimento de cada trem é o mínimo múltiplo comum entre as magnitudes das barras verde clara e a amarela. Mínimo múltiplo comum – MMC (verde clara, amarela) = comprimento de 5 verdes claras ou comprimento de 3 amarelas.

Como a barra verde clara tem o comprimento de três barras brancas e a barra amarela tem o comprimento de cinco barras brancas, então o MMC (3, 5) = 15.

Conversa com o professor:

O jogo da “Corrida de Trens” funciona como uma estratégia eficiente para futuramente comparar magnitudes de frações pelos comprimentos que alcançam em cada trem. Depois de os estudantes terem compreendido o jogo e apreendido seus objetivos, é hora de estimulá-los a jogar em pares ou trios com seus colegas. É importante que, ao final de cada rodada do jogo, os estudantes declarem o MMC entre os comprimentos das barras.

Além disso, alguma reflexão é bem-vinda como uma ampliação ou aprofundamento da aprendizagem dos estudantes, questionando-os:

1- será que conseguiríamos ter um ganhador na Corrida dos Trens para quaisquer duas ou mais barras?

2- por que não faz sentido jogar a Corrida de Trens com duas ou mais barras de mesma cor? Nesse caso, qual seria o mínimo múltiplo comum?

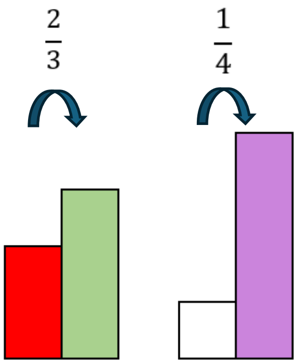
3- como seria o mínimo múltiplo comum se jogássemos a Corrida de Trens com uma barra branca e outra de cor diferente?

Com a Corrida de Trens aprendida, podemos seguir para a comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes. Até lá!

Comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes

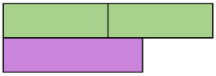
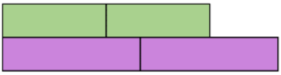
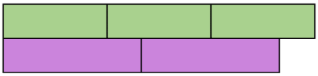
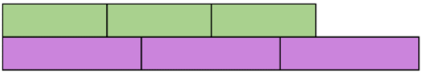
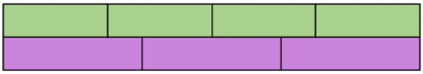
A comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes não é trivial à primeira vista. Como podemos comparar 2/3 e 1/4? (Figura 34)

Figura 34: comparação entre 2/3 e 1/4



Essa pode ser uma oportunidade de levar os estudantes a trazer ao primeiro plano o que aprenderam da comparação com frações de mesmo denominador e o domínio da Corrida de Trens. Por que é difícil compararmos 2/3 e 1/4? É possível simplesmente compararmos as medidas dos numeradores e denominadores? O que podemos fazer para compararmos 2/3 e 1/4? O que sabemos até agora sobre a comparação de frações? As respostas a esses questionamentos devem levá-los à Corrida de Trens e ao que aprenderam da primeira propriedade de frações – frações com o mesmo denominador terão maior medida se tiverem numeradores maiores (Tabela 3).

Tabela 3: Corrida dos Trens entre as barras verde clara e roxa

Corrida de trens entre barras verde clara e roxa	**Etapas do jogo**
	1 verde clara 1 roxa
	2 verdes claras 1 roxa
	2 verdes claras 2 roxas
	3 verdes claras 2 roxas
	3 verdes claras 3 roxas
	4 verdes claras 3 roxas

O MMC entre o comprimento de quatro barras verdes claras e o comprimento de três barras roxas é 12. Em outras palavras, como cada barra verde clara tem o comprimento de três barras brancas e cada barra roxa tem o comprimento de quatro barras brancas, então o MMC (3, 4) = 12.

Assim sendo:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \text{ e } \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

Logo:

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{4} \text{ porque } \frac{8}{12} > \frac{3}{12}$$

Conversa com o professor:

Depois da conclusão de que a Corrida de Trens fornece igualdade de denominadores e que esse fato conduz à comparação de frações com mesmo denominador, é o momento de o professor buscar conclusões de seus estudantes.

1- como podemos comparar duas frações com numeradores e denominadores diferentes? (Resposta esperada: após a Corrida de Trens e a equivalência das frações, a que tiver maior numerador, terá maior medida.)

Essa conclusão é útil, mas podemos ir além. O que dizer sobre comparação de frações própria e imprópria com numeradores e denominadores diferentes?

2- vamos comparar as frações 5/4 e 2/3.

Como:

$$\frac{5}{4} = \frac{15}{12} \text{ e } \frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

Logo:

$$\frac{5}{4} > \frac{2}{3} \text{ porque } \frac{15}{12} > \frac{8}{12}$$

É esperado que os estudantes realizem a Corrida de Trens e a equivalência para essa comparação, mesmo que desnecessariamente. A verificação com as barras, entretanto, pode ensejar outra importante conclusão – a comparação de uma fração própria com uma imprópria é dispensável, pois a imprópria sempre terá maior medida que a própria.

3- precisamos realizar a Corrida de Trens e a equivalência de denominadores, para compararmos essas frações? Por quê?

Esse estímulo poderá promover conexões e reforços com o que já foi estudado, tornando a aprendizagem relacionada a todo momento.

E se a comparação for entre duas frações impróprias?

4- como podemos comparar as magnitudes das frações 5/4 e 7/3?

Como:

$$\frac{5}{4} = \frac{15}{12} \text{ e } \frac{7}{3} = \frac{28}{12}$$

Logo:

$$\frac{5}{4} < \frac{7}{3} \text{ porque } \frac{15}{12} < \frac{28}{12}$$

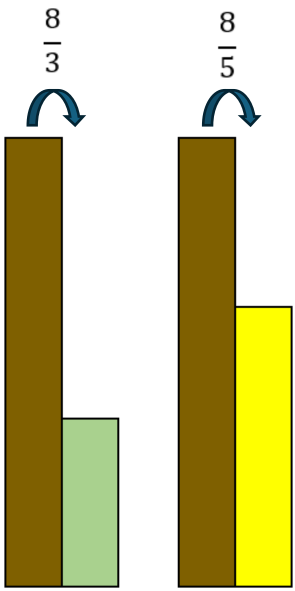
A ideia é que os estudantes recorram à Corrida de Trens e à equivalência das frações para essa comparação.

A experiência da comparação de frações com numeradores e denominadores diferentes pode gerar o questionamento: e se as frações tiverem numeradores iguais e denominadores diferentes? Vamos ver isso na próxima seção.

Comparação de frações com o mesmo numerador

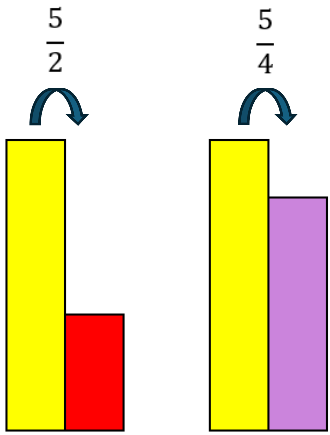
Quem tem maior medida, 4/3 ou 4/5? As duas frações possuem numeradores iguais. Essa comparação será (deverá ser) imediata se os estudantes se lembrarem de que frações impróprias são sempre maiores do que frações próprias, mas como seria comparar 8/3 e 8/5? As duas são impróprias, com numeradores iguais. A esta altura da aprendizagem podemos usar as barras de Cuisenaire apenas para comprovarmos a conclusão de que quanto menor o denominador, maior a medida. Por quê? (Figura 35)

Figura 35: comparação entre 8/3 e 8/5



Se essa conclusão não emergir imediatamente, são indicados mais estímulos: quem é maior, 5/2 ou 5/4? (Figura 36)

Figura 36: comparação entre 5/2 e 5/4



A magnitude de 5/2 é maior do que a de 5/4 porque a relação entre 5 e 2 é maior do que entre 5 e 4. Observe o leitor que os comprimentos relativos das barras amarela e roxa são mais próximos do que os comprimentos relativos das barras amarela e vermelha, portanto, a magnitude 5/2 é maior do que a de 5/4.

A ideia é que os estudantes entendam que, se o denominador cresce, a medida diminui. O comprimento das barras pode esclarecer essa propriedade.

Conversa com o professor:

Depois dos estímulos oferecidos pelo professor, é sempre bem-vindo que os estudantes proponham comparações uns para os outros.

1- elabore duas frações com denominadores diferentes e peça para um colega dizer qual delas é maior.

A ideia é que os estudantes concluam que, entre duas frações de mesmo numerador, a fração de maior medida é a que possui menor denominador.

A primeira parte deste livro trouxe lembrança, reforço e acréscimos do que pode ser encontrado no ebook Frações à Moda Antiga de modo mais amplo e profundo, incluindo maior quantidade de atividades e propostas de condução de aulas desenhadas por uma equipe em meio a um Lesson Study[46]. A familiaridade com as barras de Cuisenaire e o estudo das três propriedades de frações (1- comparação com denominadores iguais; 2- comparação com numeradores e denominadores diferentes e; 3- comparação com numeradores iguais) são base para compreensão da aritmética com frações que inaugura a segunda parte.

[46] Lesson Study é um modo de formar professores, elaborado por educadores japoneses, cuja eficácia vem sendo comprovada cientificamente (Takahashi & McDougal, 2016; Takahashi, 2006; Takahashi, Watanabe, Yoshida & Wang-Iverson, 2005).

SEGUNDA PARTE

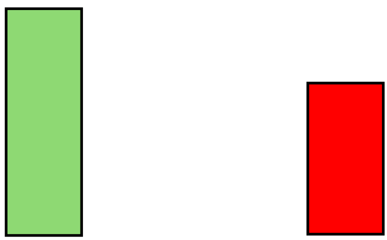
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

Adição e subtração de frações

As operações de adição e subtração de duas frações começam pela determinação do MMC entre as unidades de medidas. Precisamos, então, da Corrida de Trens entre as barras, que são as unidades de medidas de cada relação. Mas por que realizar o MMC antes de tudo? Se as relações possuem unidades de medidas diferentes, é útil torná-las iguais. Por exemplo, em 2/3, o “2” se relaciona com o “3”; em 1/2, o “1” se relaciona com o “2”; “3” e “2” são magnitudes diferentes e, portanto, cada relação é única dentro da unidade de medida que estão se relacionando. Por isso, precisamos fazer com que ambas as relações estejam com a mesma unidade de medida. Essa é a razão para realizarmos o MMC. Vamos a ele nessas mesmas relações...

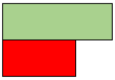
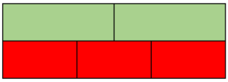
Tome as frações 2/3 e 1/2. A unidade de medida de 2/3 pode ser representada pela barra verde clara. A unidade de medida de 1/2 pode ser representada pela barra vermelha (Figura 37)

Figura 37: unidades de medidas para 2/3 e 1/2, respectivamente



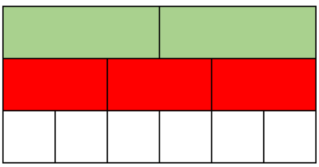
O passo a passo da Corrida dos Trens para as barras verde clara e vermelha está na Tabela 4.

Tabela 4: Corrida dos Trens entre as barras verde clara e vermelha

Corrida de trens entre barras verde clara e vermelha	**Etapas do jogo**
	1 verde clara 1 vermelha
	1 verde clara 2 vermelhas
	2 verdes claras 2 vermelhas
	2 verdes claras 3 vermelhas
2 barras verdes claras representam 6 barras brancas; 3 barras vermelhas representam 6 barras brancas; **MMC (3, 2) = 6**	

A Tabela 4 declara o MMC (3, 2) = 6, porque o comprimento de duas barras verdes e o comprimento de três barras vermelhas correspondem a 6 barras brancas (Figura 38).

Figura 38: MMC (3, 2) = 6, com as barras de Cuisenaire

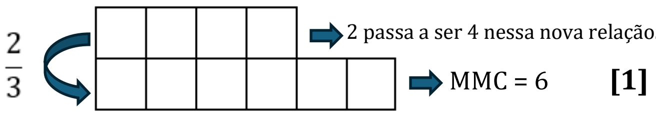


Acabamos de encontrar uma unidade de medida que será comum às duas relações (2/3 e 1/2). Resta ajustarmos cada relação a essa nova unidade de medida. Por quê? Porque 2 se relaciona com 3 em 2/3, e não com 6; 1 se relaciona com 2 em 1/2, e não com 6. Se 6 é uma nova unidade de medida, 2 em 2/3 e, 1 em 1/2, devem ser ajustados para essa nova magnitude. Na verdade, devemos encontrar <u>relações equivalentes</u> a 2/3 e 1/2, respectivamente, que tenham unidade de medida igual a 6, ou seja,

$$\frac{2}{3} = \frac{?}{6} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} = \frac{?}{6}$$

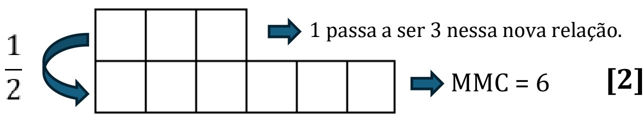
Como podemos representar 2/3, tendo 6 barras brancas como unidade de medida? (Figura 39)

Figura 39: representação de 2/3 com barras brancas como unidade de medida



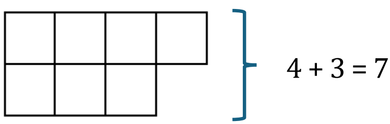
Como podemos escrever 1/2, tendo 6 barras brancas como unidade de medida? (Figura 40)

Figura 40: representação de 1/2 com barras brancas como unidade de medida



Adicionando os comprimentos de cada relação, temos: (Figura 41)

Figura 41: adição dos comprimentos das duas relações

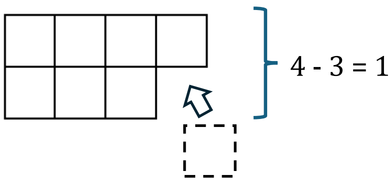


Substituindo o resultado de **[1]** e **[2]** nas respectivas relações iniciais, temos:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\underbrace{\frac{4}{6}+\frac{3}{6}}_{\text{MMC}}=\frac{7}{6}$$

E como seria com a subtração de 2/3 e 1/2? Sabemos que 2/3 > 1/2, pelas propriedades das frações[47]. Então, vamos confrontar 2/3 com 1/2 (Figura 42).

Figura 42: confronto dos comprimentos das duas relações



Substituindo o resultado de **[1]** e **[2]** nas respectivas relações iniciais, temos:

$$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\underbrace{\frac{4}{6}-\frac{3}{6}}_{\text{MMC}}=\frac{1}{6}$$

[47] Essa comparação consta no livro Frações à Moda Antiga e foi revisada em seções anteriores deste livro.

A adição ou subtração de frações que tenha a mesma unidade de medida, requer apenas a soma ou diminuição de suas relações.[48]

Essa experiência pode ser generalizada para outras adições e subtrações de frações da seguinte maneira:

Sejam a/b e c/d relações com unidades de medidas b e d, respectivamente; sendo $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$; $b, d \neq 0$. A expressão

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} \pm \frac{b \times c}{b \times d} = \frac{a \times d \pm b \times c}{b \times d}$$

propaga a adição e subtração para quaisquer relações fracionárias.

Conversa com o professor:

As operações com frações seguem um algoritmo que será (claro que sim!) memorizado pela prática com diferentes adições ou subtrações. Mas, essa memorização deve estar associada à compreensão do que fazemos ou do que ensinamos. No caso das operações de adição e subtração de frações, é *sine qua non* que sejamos conhecedores dos motivos para iniciarmos pela determinação do mínimo múltiplo comum para, depois, prosseguirmos com os ajustes das relações com a nova unidade de medida (a equivalência). O que subjaz dessa manobra matemática são comprimentos associados a um parâmetro que chamamos de unidade de medida. Essa concepção deve estar presente a cada passo dado nas operações.

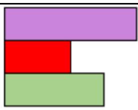
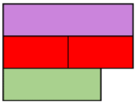
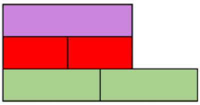
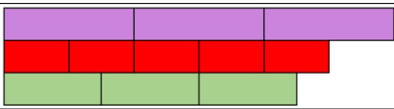
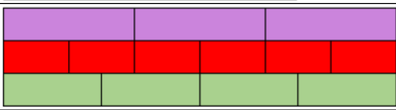
Com isso em mente, como um desafio, podemos sugerir que os estudantes realizem soma com três ou mais frações, todas com

[48] Essa afirmação é uma das propriedades das frações que pode ser encontrada em detalhes no livro Fração à Moda Antiga e revisada em seções anteriores deste livro.

unidades de referência diversas. Nesse caso, a Corrida dos Trens será com três ou mais barras. Mais adiante, o professor pode sugerir alguma operação que mescle adição e subtração de frações. Veja um exemplo.

1- qual é o resultado de 3/4 + 1/2 - 2/3? (Tabela 5)

Tabela 5: Corrida dos Trens entre barra roxa, vermelha e verde clara

Corrida dos trens entre barras roxa, vermelha e verde clara	**Etapas do jogo**
	1 roxa 1 vermelha 1 verde clara
	1 roxa 2 vermelhas 1 verde clara
	1 roxa 2 vermelhas 2 verdes claras
	2 roxas* 3 vermelhas* 2 verdes claras
	2 roxas 4 vermelhas* 3 verdes claras*
	3 roxas* 5 vermelhas* 3 verdes claras
	3 roxas 6 vermelhas* 4 verdes claras*
*Observe que houve dois trens que foram menores no comprimento e, portanto, ambos receberam barras na Corrida dos Trens.	
3 barras roxas representam 12 barras brancas; 6 barras vermelhas representam 12 barras brancas;	

4 barras verdes claras representam 12 barras brancas.
MMC (4, 2, 3) = 12

Se o MMC (4, 2, 3) = 12, então:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}+\frac{6}{12}-\frac{8}{12}=\frac{9+6-8}{12}=\frac{7}{12}$$

A Corrida dos Trens pode se transformar em uma brincadeira para os estudantes. Por isso, podemos fazê-los desafiar uns aos outros, criando expressões que estimulem o colega à busca pela solução. Também recomendamos combinações de expressões que tenham frações próprias e impróprias.

Resta conhecermos a divisão e a multiplicação. Vamos a essas operações na próxima seção.

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

Divisão e multiplicação de frações

As operações de divisão e multiplicação de duas frações são facilitadas com o emprego do MMC na perspectiva de medição, como veremos. Vamos iniciar pela operação matemática de divisão. Antes de tudo, porém, lembramos que usamos as barras de Cuisenaire para representar números. Na verdade, estamos focando em um atributo das barras para sinalizar números: seus comprimentos. Então, as barras e as letras que as simbolizam representam comprimentos e os comprimentos exprimem números. Compreendemos que a expressão m/v pode ser pensada do seguinte modo: quanto da unidade de medida v é necessária para medir m. Então, se m for a barra marrom e v a barra vermelha, quantas barras de v são necessárias para medir o comprimento da m (veja Figura 43)?

Para efeito de nossa comunicação pictórica, até aqui, usamos nas figuras a seta para indicar o sentido da relação do comprimento de uma barra em relação ao comprimento de outra barra que representa a unidade de referência. Doravante, usaremos a seta para sinalizar a quantidade de barras necessárias para alcançar o mesmo comprimento de outra barra (ou magnitude).

Figura 43: quantidade de barras v (a unidade de medida) para medir o comprimento da barra m[49]

O contexto da Figura 43 indica que necessitamos de quatro barras vermelhas para alcançar o comprimento da barra marrom.

[49] Observe o leitor que as barras podem ser dispostas vertical ou horizontalmente. No modo horizontal, costumamos dispor a unidade de medida na parte inferior do conjunto de barras em análise que, nesse caso é a barra vermelha medindo a barra marrom.

A divisão de frações ocorre de modo semelhante da divisão de naturais. Pense, por exemplo, na operação $8 \div 4$ (nesse caso, $m = 8$ e $v = 4$). Que quantidade é necessária de $v = 4$ para alcançarmos a quantidade de $m = 8$? Resposta: duas quantidades de $v = 4$.
Em outras palavras, quantos "4" para chegar a "8"? Resposta: Dois "4".

Paralelamente, vamos usar a ideia graficamente ilustrada na Figure 43 para realizar a divisão de $9/8 \div 5/8$. Entendemos que essa operação de divisão significa se perguntar: quanto da unidade de medida, 5/8, é necessária para medir o comprimento 9/8? Notamos que, além da fração 5/8 sendo uma unidade de medida na dada expressão, nesse caso, ela e a outra fração representam comprimentos que estão sendo medidos pela mesma unidade de medida, que é o 8 ou, em termos das barras, a marrom, m (veja a Figura 44).

Figura 44: comprimentos de 9/8 e 5/8[50]

A barra azul representa 9/8 e a barra amarela representa 5/8. Como as unidades de medida são as mesmas para ambas as

[50] As setas das Figuras 44 e 45 não indicam a relação de fração como em situações passadas neste livro.

frações, nossa questão passa a ser entre os comprimentos, da amarela em relação à azul. Podemos nos perguntar, o seguinte: quantas barras amarelas são necessárias para medir uma barra azul? (Figura 45)

Figura 45: quantas barras amarelas medem a barra azul?

Na Figura 45, considerando a barra amarela como a unidade de medida para medir a barra azul, observamos a necessidade de uma barra amarela mais um comprimento menor que uma amarela. O comprimento que resta é igual a uma barra roxa que, com respeito à unidade de medida, é 4/5 da amarela (veja a Figura 46). Então, a resposta para a questão da Figura 45 é 1 e 4/5 da barra amarela. Também, uma vez que a barra branca é uma subunidade das barras amarela e azul e ela é 1/5 da barra amarela, a barra azul é igual a 9/5. Em resumo, temos que:

$$\frac{9}{8} \div \frac{5}{8} = 1\frac{4}{5} = \frac{9}{5}$$

Figura 46: relação $1\ \frac{4}{5}$ nas barras

Então, como

$$\frac{9}{8} \div \frac{5}{8} = \frac{9}{5}$$

podemos generalizar em termos simbólicos assim:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{b} = \frac{a}{c}, \text{sendo } a, b, c \in \mathbb{Z}; b, c \neq 0. \qquad \textbf{[3]}$$

Essa generalização está coerente quando os denominadores são iguais.

Agora, e se as unidades de medidas das duas frações forem diferentes? Por exemplo, vamos considerar como realizamos a divisão 7/6 por 3/10. Se quisermos aplicar a generalização acima [3], precisaremos de frações com o mesmo denominador. Para facilitar nosso cálculo, utilizaremos o $\text{MMC}\ (6, 10) = 30$ (verifique com a Corrida dos Trens) para transformar as frações dadas para frações equivalentes que possuem um denominador em comum.

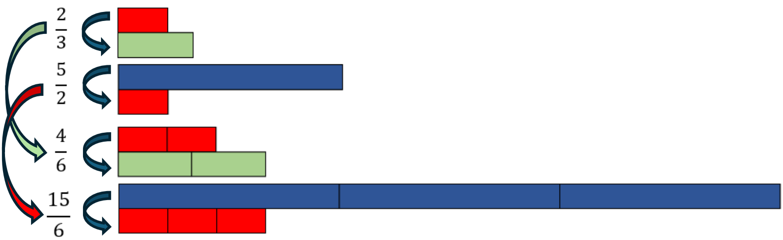
$$\frac{7}{6} \div \frac{3}{10} = \frac{35}{30} \div \frac{9}{30} = \frac{35}{9} = 3\frac{1}{9}$$

Vamos experimentar nosso procedimento com o problema da situação a seguir:

Maria está participando de uma gincana matemática na escola. Em uma das atividades, ela precisou preparar 2/3 de um litro de suco. Em seguida, Maria foi perguntada sobre quanto essa quantidade de suco representaria em uma garrafa com capacidade para 5/2 litros. Maria respondeu corretamente. Qual foi a resposta dela?

Como as unidades de medida de cada fração são diferentes, usaremos o MMC (3, 2) = 6, e ajustaremos cada fração à nova unidade de medida que é comum às duas frações, como apresentamos na Figura 47.

Figura 47: Ajustes de 2/3 e 5/2 à nova unidade de medida 6



Se temos as unidades de medida comuns, nos resta comparar os comprimentos das duas barras vermelhas com as três barras azuis, que representam 4/15 (Figura 48).

Figura 48: Comparação dos comprimentos de barras vermelhas e azuis

O resultado da Figura 48 nos diz que Maria respondeu que a quantidade de suco na garrafa com capacidade para 5/2 litros representa 4/15 desse recipiente.

Em termos simbólicos:

pela equivalência de frações...
$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{2} = \underbrace{\frac{4}{6} \div \frac{15}{6}}_{\text{MMC}}$$

Aplicando [3], temos:

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{2} = \frac{4}{6} \div \frac{15}{6} = \frac{4}{15}$$

De modo mais geral que em [3], para simplificarmos o cálculo, aplicamos o MMC e a equivalência de frações assim:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \underbrace{\frac{a \times d}{b \times d} \div \frac{b \times c}{b \times d}}_{\text{MMC}} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \qquad [4]$$

sendo $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$; b, c, $d \neq 0$.

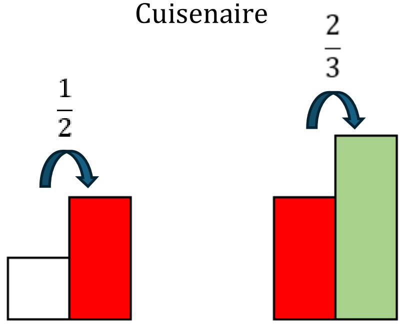
Este é o algoritmo tradicional para divisão de duas frações.

Os desdobramentos da divisão de frações podem ser aproveitados para a multiplicação de frações. Vamos iniciar tomando a multiplicação entre 1/2 e 2/3.

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$$

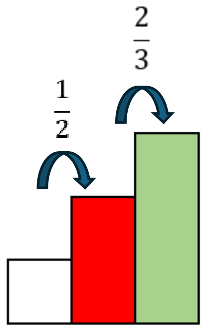
Essa expressão diz que queremos encontrar a metade (1/2) de 2/3. Vamos representar 1/2 com uma barra branca em relação a uma barra vermelha e, 2/3 com uma barra vermelha em relação a uma barra verde clara (Figura 49).

Figura 49: representação de 1/2 e 2/3 com as barras de Cuisenaire



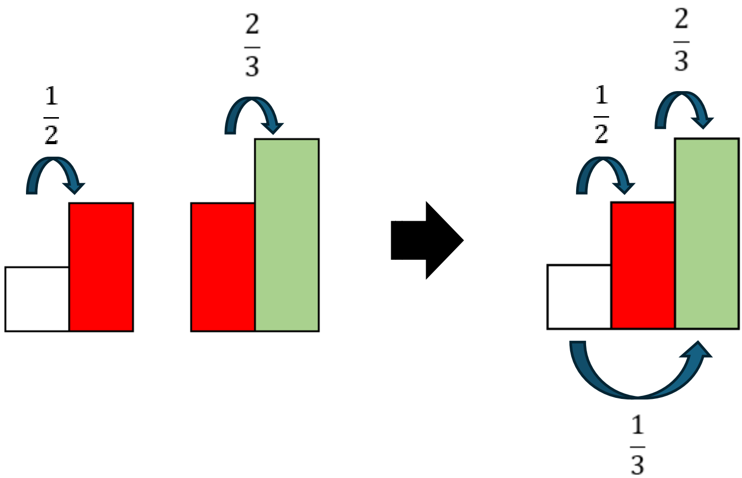
A compreensão da multiplicação de duas frações pode ser realizada por meio de três comprimentos: a barra branca é 1/2 da barra vermelha; a barra vermelha é 2/3 da barra verde clara (Figura 50).

Figura 50: relações de 1/2 e 2/3



A comparação multiplicativa entre o 1º e 2º comprimentos e entre o 2º e 3º comprimentos é a relação do 1º e 3º comprimentos (Figura 51).

Figura 51: Construção da relação do 1º e 3º comprimentos



Então, 1/2 de 2/3 é 1/3. Em outras palavras, a metade de 2/3 é 1/3. Simbolicamente, temos:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Observe o leitor que a unidade de referência de $1/2$ é igual à relação em $2/3$. Em outras palavras, o denominador da primeira fração e igual ao numerador da segunda fração. Quando essa igualdade ocorrer, a operação de multiplicação pode ser escrita como:

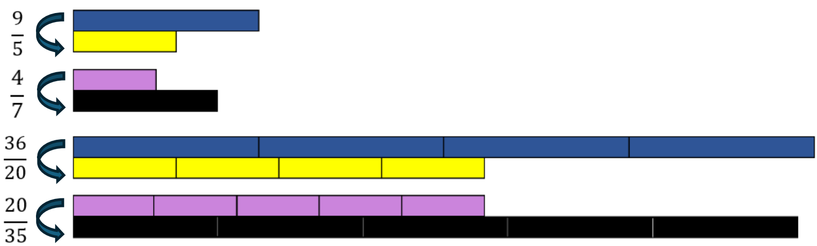
$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c}\ , \qquad \textbf{[5]}$$

sendo a/b e b/c relações com unidades de medidas b e c, respectivamente, e $a, b, c \in \mathbb{Z}$; $b, c \neq 0$.

Mas, e se a unidade de medida da primeira fração não for igual à relação da segunda fração? Vejamos o caso de $9/5 \times 4/7$ em um problema como este: uma pequena fábrica produz $9/5$ metros de tecido por hora. Quantos metros de tecido ela produzirá em $4/7$ de hora?

A solução nas barras será facilitada se realizarmos o MMC entre a unidade de medida da primeira fração e a relação da segunda fração, ou seja, MMC (5,4) = 20 (Confira na Corrida de Trens). Depois, ajustamos as frações à nova unidade de medida para ambas e aplicaremos a expressão [5], do mesmo modo como procedemos com a multiplicação entre $1/2$ e $2/3$.

Figura 52: Ajustes das frações $9/5$ e $4/7$ à nova unidade de medida



A pequena fábrica produzirá em 4/7 de hora 36/35 metros de tecido. Simbolicamente, temos:

$$\frac{9}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{36}{20} \times \frac{20}{35} = \frac{36}{35}$$

De modo mais simples, como já construímos a ideia da multiplicação e divisão de frações com as barras, podemos aplicar a expressão [4] diretamente em quaisquer multiplicações de frações. No problema da Figura 52, temos:

$$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{9}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{36}{35}.$$

sendo a/b e d/c relações com unidades de medidas b e c, respectivamente, e $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$; $b, c \neq 0$.

Conversa com o professor:

Mais uma vez, o professor pode propor outras operações matemáticas de divisão e de multiplicação, a iniciar com operações mais simples, como as que ilustramos nesta seção, ou com conexões preliminares que tragam esclarecimentos adicionais. Por exemplo, para o caso de $\frac{2}{5} \times \frac{5}{9}$, o professor pode questionar ou argumentar:

- Quanto são 2/5 de 5/9 de um terreno?

- A metade de dois metros é um metro;

- A barra vermelha é 2/5 da barra amarela. A barra amarela é 5/9 da barra azul. Simplesmente, a barra vermelha é 2/9 da barra azul, logo, $\frac{2}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{2}{9}$.

Depois que os estudantes compreenderem essas ações e estiverem confiantes sobre o que fazem, recomendamos avançar para uso de procedimentos ou algoritmos que simplifiquem as operações matemáticas com frações, sempre associando aos conceitos construídos.

Bom trabalho!

10
9
8
7
6
5
4
3
2
1

Palavras finais

> No mundo de hoje, o acesso econômico e a cidadania plena dependem crucialmente da literacia matemática e científica.
>
> Bob Moses (1935-2021)[51]

A introdução do estudo de frações ocorre geralmente em anos iniciais do ensino básico de muitos currículos escolares mundiais. Esse início deve estar comprometido com a construção dos conceitos ali subjacentes, sob risco de que alguma superficialidade, parcialidade ou equívoco[52] ligados ao ensino e aprendizagem de frações possa lesar, em algum senso, a literacia matemática e científica. Essa lesão pode ser nociva para além da escolaridade e cientificidade, e atingir mais amplamente a plena cidadania.

E que indícios demonstram que o ensino e a aprendizagem de frações alcançaram objetivos escolares e científicos no sentido de que a literacia matemática não tenha comprometido a cidadania? Quando, por exemplo, houver: (1) atenção sobre a unidade de referência; (2) entendimento sobre as relações existentes entre numerador e denominador forem entendidos em suas relações; (3) interpretação das frações impróprias e mistas forem interpretadas além dos limites da unidade de medida; (4) reconhecimento de uma fração independa de partições representativas iguais; (5) discernimento entre as propriedades dos números naturais e fracionários; (6) compreensão de que os números racionais são densamente ordenados (entre dois racionais há infinitos outros racionais); (7) diversidade de representações imagéticas de frações não seja um empecilho para a compreensão; (8) conexão entre os diferentes modos de

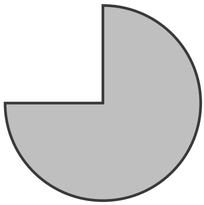
[51] Bob Moses (1935-2021) foi um ativista dos direitos civis e educador, publicou o livro, "Radical Equations: Civil Rights from Mississippi to the Algebra Project" em 2001.

[52] Souza (2021), Silveira, Souza & Powell (2024), Powell & Souza (2024).

expressão do número fracionário; (9) aplicação do algoritmo das operações aritméticas de frações forem aplicados como uma simplificação do conceito apreendido.

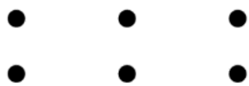
Esses indícios podem ser mapeados pelas atividades apresentadas no início deste livro ou nas que sugerimos a seguir:

1) suponha que a forma abaixo represente a quantidade 9/4.



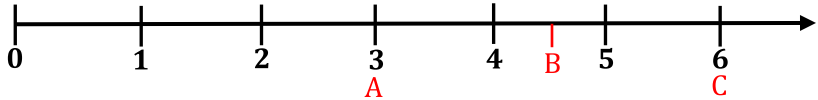
Usando essa informação, mostre uma forma que represente a quantidade 1.

2) suponha que os pontos abaixo representem a quantidade 2/5.



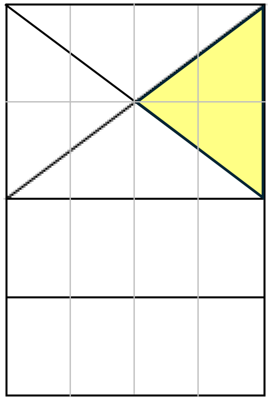
Usando essa informação, mostre uma representação para a quantidade 4/3.

3) na reta abaixo, Maria localizou a fração 3/2 em A, Pedro localizou em B e Clara em C. Quem localizou 3/2 corretamente? Quem se equivocou? Por quê?



4) você tem R$90,00 repartidos em quatro partes: R$10,00, R$5,00, R$45,00 e R$30,00. Algum desses valores é 1/3 de R$90,00? Justifique sua resposta.

5) a parte amarela da figura abaixo representa 1/8 de toda a figura?



6) Ana leu 3/4 de um livro na primeira semana e 2/3 do restante na segunda semana. Quanto falta para Mariana finalizar o livro? A unidade de referência interfere na resposta?

7) uma noite, o rei não conseguia dormir, então desceu até a cozinha real, onde encontrou uma tigela cheia de mangas. Estando com fome, pegou 1/6 das mangas. Mais tarde, naquela mesma noite, a rainha estava com fome e não conseguia dormir. Também encontrou as mangas e pegou 1/5 do que o rei havia deixado. Mais tarde, o primeiro príncipe acordou, foi até a cozinha e comeu 1/4 das mangas restantes. Mais tarde ainda, seu irmão, o segundo príncipe, comeu 1/3 do que restava. Finalmente, o terceiro príncipe comeu 1/2 do que restava, deixando apenas três mangas para os servos. Quantas mangas estavam originalmente na tigela?[53]

A importância do estudo de frações se constitui em um importante viés para a Matemática e outras áreas científicas. A perspectiva de medição retoma a emergência do número fracionário,

53 https://www.nctm.org/uploadedFiles/Content/Lessons/Resources/6-8/Classic-AS-Mangoes.pdf

evitando simplificações desastrosas para a compreensão desse objeto matemático. Nessa esteira, a comparação multiplicativa entre duas grandezas comensuráveis se apresenta como uma possibilidade de superação dos problemas apontados pela comunidade científica da Educação Matemática, Psicologia Cognitiva e Neurociência, como vimos em seções anteriores. Nesse sentido, desejamos que o conteúdo deste livro possa ser ponto de partida para formações de professores, deixando a cargo de cada docente sua criatividade, experiência e intuição na desafiadora responsabilidade de ensinar e aprender frações e, assim, imprimirem sua marca pessoal.

Referências que apoiaram nosso estudo

Abreu-Mendoza, R. A., Coulanges, L., Ali, K., Powell, A. B.; & Rosenberg-Lee, M. Children's discrete proportional reasoning is related to inhibitory control and enhanced by priming continuous representations. *Journal of Experimental Child Psychology*, [*s. l.*], *199*, 2020. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022096520300862. Acesso em: 04 mar. 2024.

Abreu-Mendoza, R. A., Coulanges, L., Ali, K., Powell, A. B.; & Rosenberg-Lee, M. From non-symbolic to symbolic proportions and back: a Cuisenaire rod proportional reasoning intervention enhances continuous proportional reasoning skills. *Frontiers in Psychology*, [*s. l.*], *12*, 1-16, mai. 2021. Disponível em: https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2021.633077/full. Acesso em: 04 mar. 2024.

Alexander, P. A. (2016). Relational thinking and relational reasoning: harnessing the power of patterning. *NPJ Science of Learning*, 1. doi:10.1038/npjscilearn.2016.4. Acesso em: 13 dez. 2023.

Alqahtani, M. M.; Powell, A. B.; Webster, V.; Tirnovan, D. How a measuring perspective influences pre-service teachers' reasoning about fractions with discrete and continuous models. *International Eletronic Journal of Elementary Education*, [*s. l.*], *14*(3), 441-458. doi: 10.26822/iejee.2022.255. Disponível em: https://www.iejee.com/index.php/IEJEE/article/view/1786. Acesso em: 05 mar. 2024.

Amador, J. Mathematics teacher educator noticing: examining interpretations and evidence of students' thinking. (2022). *Journal of Mathematics Teacher Education*, [*s. l.*], *25*, 163-189.

Amaral, C. A. do N. (2021). *Conceito de fração pela perspectiva de medição: Uma abordagem baseada no 4A-Instructional Model utilizando as barras de Cuisenaire e conduzida por um Lesson Study*. 2021. 120f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória.

Aytekin, C. (2020). Development of fraction concepts in children. *In:* ZAHAL, O. (ed.). *Academic Studies Educational Sciences – II*. Turquia: Gece Kitapligi. 21-48.

Baltar, P. M. (1996). *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collége*. 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Université Joseph Fourier, Grenoble.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. *In:* GROUWS, D. A. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*: A project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Co, Inc., 296–333.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *In:* LESH, R.; LANDAU, M. (ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press, 1983. p. 91-126. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Edward-Silver-2/publication/258510439_Rational_number_concepts/links/57598dc808aed884620b0d82/Rational-number-concepts.pdf. Acesso em: 06 mar. 2024.

Booth, J. L., Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, [*s. l.*], v. *37*(4), 247-253. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0361476X12000392. Acesso em: 05 mar. 2024.

Booth, J. L., Newton, K. J., Twiss-Garrity, L. K. (2014). The impact of fraction magnitude knowledge on algebra performance and learning. *Journal of Experimental Child Psychology*, [*s. l.*], *118*, 110-118. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022096513001793. Acesso em: 04 mar. 2024.

Caraça, B. de J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática. 1951.

Carraher, D. W. (1996). Learning about fractions. *In*: Steffe, L. P.; Nesher, P.; Coob, P.; Sriraman, B.; Greer, B. (ed.). *Theories of mathematical learning*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 241-266.

Ciosek, M., Samborska, M. (2016). A false belief about fractions – What is its source? *The Journal of Mathematical Behavior*, [*s. l.*], *42*, 20-32.

Disponível em:
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312316300025. Acesso em: 06 mar. 2024.

Cole, Y. Assessing elemental validity: the transfer and use of mathematical knowledge for teaching measures in Ghana. *ZDM*, [*s. l.*], *44*, 415-426. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-012-0380-7. Acesso em: 05 mar. 2024.

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics*, [*s. l.*], *107*, 525-545. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-021-10033-4. Acesso em: 04 mar. 2024.

Copur-Gencturk, Y., Ölmez, E. B. (2022). Teachers' Attention to and Flexibility with Referent Units. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Taiwan, *20*, 1123-1139. https://doi.org/10.1007/s10763-021-10186-x. Acesso em: 05 mar. 2024.

Davis, R. B., Maher, C. A. (1990). What do we do when we "do mathematics"? *In:* DAVIS, R. B., MAHER, C. A., NODDINGS, N. (ed.), Constructivist views on the teaching and learning of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, *4*, 1990. 65-78. Disponível em: https://doi.org/10.2307/749913. Acesso em: 06 mar. 2024.

Doyle, K. M., Dias, O., Kennin, J. R., Czarnocha, B, & Baker, W. (2016). The rational number subconstructs as a foundation for problem solving. *Adults Learning Mathematics*: An International Journal, London, *11*(1), 21-42. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=EJ1091996. Acesso em: 05 mar. 2024.

Escolano, R. (2004). Presencia histórica de la fracción en los libros de texto del sistema educativo español. *In:* Simposio de la Sociedade Española de Investigación em Educación Matemática, *8*, LaCoruña. *Anais* [...]. LaCoruña.

Escolano, R., Sallán, J. M. G. (2005). Modelos de medida para la ensenanza del número racional en Educación Primaria. Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, [*s. l.*], *1*(1), 17-35. Disponível em: https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1397/1095. Acesso em: 04 mar. 2024.

Fujii, T. (2014). Implementing japanese lesson study in foreign countries: misconceptions revealed. *Mathematics Teacher Education and Development*. Australia, *16*(1) 1-17. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=EJ1046666. Acesso em: 06 mar. 2024.

Gaigher, V. R., Souza, M. A. V. F. de., & Wrobel, J. S. (2017). Planejamentos colaborativos e reflexivos de aulas baseadas em resolução de problemas verbais de matemática. *Vidya*, *37*(1), 51-73. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1929. Acesso em: 04 mar. 2024.

Izsák, A., Jacobson, E., & Bradshaw, L. (2019). Surveying Middle-grades teachers' reasoning about fraction arithmetic in terms of measured quantities. *Journal for Research in Mathematics Education*, [*s. l.*], *50*(2), 156–209.

Jacobson, E., & Izsák, A. (2015). Knowledge and motivation as mediators in mathematics teaching practice: the case of drawn models for fraction arithmetic. *Journal of Mathematics Teacher Education*, [*s. l.*], *18*, 467-488. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-015-9320-0. Acesso em: 05 mar. 2024.

Kerslake, D. (1986). *Fractions:* A report of the strategies and errors in secondary mathematics project. Windsor: Eric.

Kieren, T. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations os rational numbers. *In:* Lesh, R. (Org.). *Number and measurement:* papers from a research workshop. Ohio: Eric/Smeac, 1976. p. 101-144. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=ED120027. Acesso em: 04 mar. 2024.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding*: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3th edition. Routledge.

Lee, M. Y., Lee, J-E. (2021). Spotlight on Area Models: Pre-service Teachers' Ability to Link Fractions and Geometric Measurement. *International Journal of Science and Mathematics Education*, Taiwan, *19*, 1079-1102. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10763-020-10098-2. Acesso em: 05 mar. 2024.

Lee, S. J., Brown, R. E., & Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning*, [*s. l.*], *13*, 198–220.

Lin, C., Becker, J., Byun, M., Yang, D., & Huang, T. (2013). Preservice teachers' conceptual and procedural knowledge of fraction operations: a comparative study of the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics*, *113*(1), 41 – 51. Disponível em: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1111/j.1949-8594.2012.00173.x. Acesso em: 04 mar. 2024.

Lovin, L. H., Stevens, A. L., Siegfried, J., Wilkins, J. L. M., & Norton, A. (2018). Pre-K-8 prospective teachers' understanding of fractions: An extension of fractions schemes and operations research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, [*s. l.*], *21*, 207-235. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-016-9357-8. Acesso em: 04 mar. 2024.

MA, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: the case of informal knowledge. *In:* Carpenter, T. P.; Fennema, E., & Romberg, T. A. (ed.). *Rational numbers: an integration of research*. Lawrence Erlbaum Associates. p. 85-105.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: Final report of the national mathematics advisory panel.* Washington, DC: US Department of Education. Disponível em:

https://tile.loc.gov/storage-services/master/gdc/gdcebookspublic/20/23/69/21/57/2023692157/2023692157.pdf. Acesso em: 06 mar. 2024.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, [*s. l.*], *26*(3), 400-417. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0361476X00910725?via%3Dihub. Acesso em: 05 mar. 2024.

Olive, J. (1999). From Fractions to Rational Numbers of Arithmetic: A Reorganization Hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning*, [*s. l.*], *1*(4), 279-314.

Olmez, I. B., & Izsák, A. (2023). Validating psychometric classification of teachers' fraction arithmetic reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, [*s. l.*]. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-022-09564-1. Acesso em: 06 mar. 2024.

Pinhal, D. V. de R. (2022). A aritmética de frações em livros didáticos brasileiros e japoneses. 2022. 198f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória.

Powell, A. B. (2018a) Reaching back to advance: Towards a 21stcentury approach to fraction knowledge with the 4A Instructional Model. *Perspectiva*, *36*(2), 399-420. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/view/2175-795X.2018v36n2p399. Acesso em: 05 mar. 2024.

Powell, A. B. (2018b). Perspectiva de medindo-proporcionalidade de frações: um olhar histórico e neurocientífico. *In:* Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 7., 2018b, Foz do Iguaçu. Anais [...]. Foz do Iguaçu. 1-12. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/paper/view/610/320. Acesso em: 04 mar. 2024.

Powell, A. B. (2019). Aprimorando o conhecimento dos estudantes sobre a magnitude da fração: Um estudo preliminar com alunos nos anos iniciais. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação*

Matemática - RIPEM, [*s. l.*], *9*(2), 50-68. Disponível em: http://www.sbemrevista.com.br/revista/index.php/ripem/article/view/2152. Acesso em: 05 mar. 2024.

Powell, A. B. (2019). How does a fraction get its name? *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática*, *3*(3), 700-713. Disponível em: https://e-revista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/23846. Acesso em: 04 mar. 2024.

Powell, A. B. (2020a). Operações com Frações – parte 1. [Arquivo de vídeo 7:05 min]. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=JvXvzw7Vpns&feature=youtu.be. Acesso em: 04 mar. 2024.

Powell, A. B. (2020b). Operações com Frações - parte 2. [Arquivo de vídeo 6:15 min]. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=ccEtz9LzA3s. Acesso em: 04 mar. 2024.

Powell, A. B. (2020c). Operações com Frações - parte 3. [Arquivo de vídeo 5:34 min]. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Ckf-MDJbuak. Acesso em: 06 mar. 2024.

Powell, A. B. (2020d). Operações com Frações – parte 4. [Arquivo de vídeo 8:17 min]. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=CFboWc8mwjM. Acesso em: 06 mar. 2024.

Powell, A. B. (2023). Enhancing students' fraction magnitude knowledge: A study with students in early elementary education. *Journal of Mathematical Behavior*, [*s. l.*], *70*, 1-14. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312323000123. Acesso em: 05 mar. 2024.

Powell, A. B., & Ali, K. V. (2018). Design Research in Mathematics Education: Investigating a measuring approach to fraction sense. In: Custódio, J. F., Costa, D. A. da, Flores, C. R., & Grando, R. C. (org.) *Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica*

(PPGECT): Contribuições para pesquisa e ensino. São Paulo: Editora Livraria da Física. 221-242.

Powell, A. B., Alqahtani, M. M., Tirnovan, D., & Temur, O. D. (2022). "One of three parts, but they are unequal": elementary school teachers' understanding of Unit Fractions. *Boletim Gepem*, *80*, 231-248. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/614. Acesso em: 04 mar. 2024.

Powell, S. R., Gilbert, J. K., & Fuchs, L. S. (2019). Variables influencing algebra performance: Understanding rational numbers is essential. *Learning and Individual Differences*, *74*. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1041608019300949. Acesso em: 05 mar. 2024.

Powell, S. R., Gilbert, J. K., & Fuchs, L. S. (2019). Variables influencing algebra performance: Understanding rational numbers is essential. *Learning and Individual Differences*, *74*. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1041608019300949. Acesso em: 04 mar. 2024.

Powell, A. B., & Souza, M. A. V. F. de. (2024). "Não tem partes iguais!": como professores entendem uma fração unitária. *In:* IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, *9*, Natal. *Anais* [...]. Natal.

Rosenberg-Lee, M. (2021). Probing the neural basis rational numbers: the role of inhibitory control and magnitude representations. In: Fias, W., & Henik, A. (ed.). Heterogeneous Contributions to Numerical Cognition: Learning and Education in Mathematical Cognition. Elsevier. 143-180. Disponível em: https://17657d1c-7daa-4fdd-9bd3-9f83029fb693.filesusr.com/ugd/38701c_4cdaf9d50776440cbd70c8f8d5e4f519.pdf. Acesso em: 06 mar. 2024.

Schastai, M. B., Da Silva, S. de C. R., & Soistak, M. M. A abordagem do conteúdo de frações em um curso de formação de professores dos anos iniciais. *Espacios*, *35*(5), 15, 2014. Disponível em: https://ww.revistaespacios.com/a14v35n05/14350415.html. Acesso em: 06 mar. 2024.

Scheffer, N. F., & Powell, A. B. (2019). Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *Revemop*, *1*(3), 476-503. Disponível em: https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/1977. Acesso em: 06 mar. 2024.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K.; Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M. I., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, *23*(7), 691-697. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED552898.pdf. Acesso em: 04 mar. 2024.

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in cognitive sciences*, *17*(1), 13-19. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364661312002653. Acesso em: 04 mar. 2024.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273-296. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001002851100003X. Acesso em: 05 mar. 2024.

Souza, M. A. V. F. de, & Powell, A. B. (2021). How do textbooks from Brazil, the United States, and Japan deal with fractions? *Acta Scientiae*, *23*(4), 77-111. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/6413. Acesso em: 06 mar. 2024.

Souza, M. A. V. F. de, & Powell, A. B. (2021). Kyozaikenkyu: essential lesson planning in japanese lesson study. *CEMeR*, *13*, 1-24.

Souza, M. A. V. F. de. (2019a). Lesson Study – origem e características. [Arquivo de vídeo 7:04 min]. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=z-S3g7Yup4c&t=1s. Acesso em: 04 mar. 2024.

Souza, M. A. V. F. de. (2019b). Lesson Study – currículo e metas. [Arquivo de vídeo 4:27 min]. Disponível em:

https://www.youtube.com/watch?v=4UPj1NtDehw. Acesso em: 04 mar. 2024.

Souza, M. A. V. F. de. (2019c). Lesson Study – research lesson. [Arquivo de vídeo 3:51 min]. Disponível em: https://youtu.be/j1-HBIi0uyE. Acesso em: 04 mar. 2024.

Souza, M. A. V. F. de. (2019d). Lesson Study – research lesson. [Arquivo de vídeo 5:59 min]. Disponível em: https://youtu.be/MTClSOCBUz0. Acesso em: 04 mar. 2024.

Souza, M. A. V. F. de. (2019e). Lesson Study – bansho, neriage e matome. [Arquivo de vídeo 3:57 min]. Disponível em: https://youtu.be/BnaehYc_-MU. Acesso em: 04 mar. 2024.

Souza, M. A. V. F. de. (2019f). Lesson Study – reflexão crítica. [Arquivo de vídeo 3:56 min]. Disponível em: https://youtu.be/jjWT_pwaJMk. Acesso em: 04 mar. 2024.

Souza, M. A. V. F. de. (2020). A colaboração no Lesson Study. [Arquivo de vídeo 6:23 min]. Disponível em: https://youtu.be/QaehsKbmngA. Acesso em: 04 mar. 2024.

Souza, M. A. V. F. de. (2021). Fração: conceito e aplicação da unidade de medida por professores e futuros professores. *Gepem*, *79*, 86-100. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/594. Acesso em: 04 mar. 2024.

Souza, M. A. V. F. de., Wrobel, J. S., & Baldin, Y. Y. (2018). Lesson Study como meio para a formação inicial e continuada de professores de matemática – Entrevista com Yuriko Yamamoto Baldin. *Gepem*, *73*, 115-130. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/163. Acesso em: 06 mar. 2024.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Springer.

Stevens, A. L., Wilkins, J. L. M., Lovin, L. H., Siegfried, J., Norton, A., & Busi, R. (2020). Promoting sophisticated fraction constructs through instructional changes in a mathematics course for PreK-8 prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, [*s. l.*], *23*, 153-181. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-018-9415-5. Acesso em: 05 mar. 2024.

Sullivan, P. L., Barnett, J. E., & Killion, K. (2023). Beware of "gaps" in students' fraction conceptions. *Mathematics Teacher: Learning & Teaching*, *116*(12), 911-922.

Takahashi, A., & McDougal, T. (2016). Collaborative lesson research: maximizing the impact of lesson study. *ZDM*, [*s. l.*], 48(4), 513-526. Disponível em: https://doi.org/10.1007/s11858-015-0752-x. Acesso em: 05 mar. 2024.

Takahashi, A. C. (2006). Characteristics ofJapanese mathematics lessons. *Tsukuba Journal of Educational Studyin Mathematics*, *25*, 37-44.

Takahashi, A.; Watanabe, T.; Yoshida, M.; Wang-Iverson, P. (2005). Improving content and pedagogical knowledge through Kyozaikenkyu. In: Wang- Iverson, P, & Yoshida, M. (Eds.). *Building our understanding of lessonstudy* (pp. 101-110). Research for Better Schools.

Thompson, P. W., & Lambdin, D. (1994). Concrete materials and teaching for mathematical understanding. Arithmetic Teacher, [s. l.], *41*(9), 556-558. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/264119418_Concrete_materials_and_teaching_for_mathematical_understanding. Acesso em: 04 mar. 2024.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, [*s. l.*], *30*(4), 390-416.

Van Hoof, J., Verschaffel, L., De Neys, W., & Van Dooren, W. (2020). Intuitive errors in learners' fraction understanding: A dual-process. *Memory & Cognition*, [*s. l.*], *48*, 1171–1180. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.3758/s13421-020-01045-1. Acesso em: 04 mar. 2024.

Vitrac, B. (2006). *A invenção da geometria. In*: Scientific American-História. Ediouro.

Von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism* A way of knowing and learning. Routledge Falmer.

Watanabe, T., Lo, J., & Son, J. (2017). Intended treatment of fractions and fraction operations in mathematics curricula from Japan, Korea, and Taiwan. *In:* SON, J.; WATANABE, T.; LO, J. (ed.). What matters? Research trends in international comparative studies in mathematics education. Research in Mathematics Education. 33-61.

Webel, C., Krupa, E., & McManus, J. (2016). Using representations of fraction multiplication. *Teaching Children Mathematics*, [*s. l.*], *22*(6), 366–373.

Wilkie, K, & Roche, A. (2022). Primary teachers' preferred fraction models and manipulatives for solving fraction tasks and for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, [*s. l.*], *26*. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10857-022-09542-7. Acesso em: 06 mar. 2024.

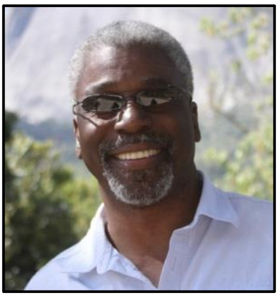
Wrobel, J. S., & Souza, M. A. V. F. de. (2018). Avaliação da qualidade de aula baseada na resolução de problema de matemática planejada e executada em um cenário de Lesson Study. *In:* Cyrino, M. C. de C. T. (org.). *Temáticas emergentes de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática: desafios e perspectivas.* Brasília: SBEM. 69-101.

Yoshida, H., & Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal-partitioning and equal-whole. Japanese Psychological Research, [*s. l.*], *44*(4), 183-195. Disponível em: https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/1468-5884.00021. Acesso em: 05 mar. 2024.

Zhang, D., Stecker, P., & Beqiri, K. (2017). Strategies students with and without mathematics disabilities use when estimating fractions on number lines. *Learning Disability Quarterly*, [*s. l.*], *40*(4), 225-236. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/26742878. Acesso em: 06 mar. 2024.

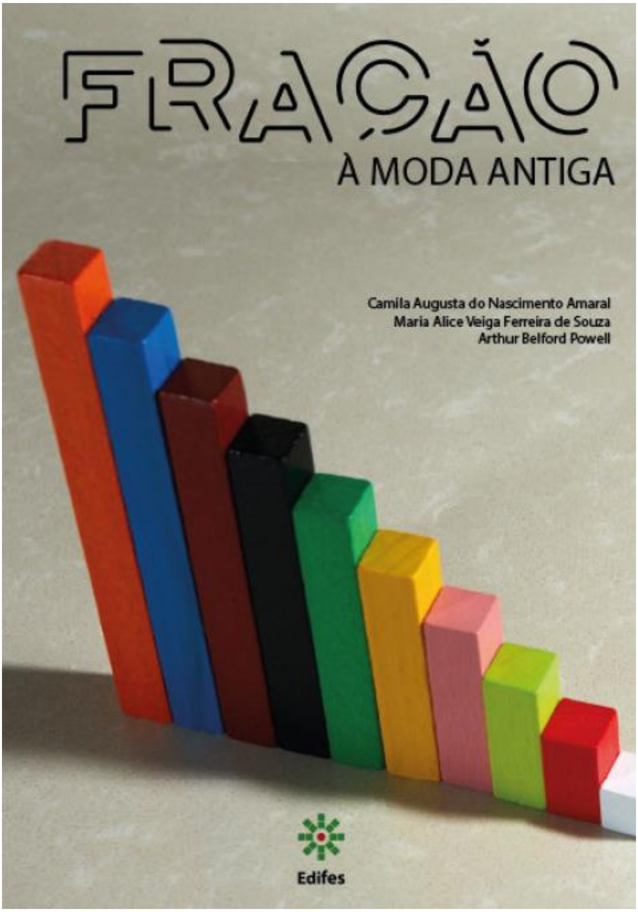
Minicurrículo dos autores

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza é brasileira, com pós-doutorado em Resolução de Problemas pela Universidade de Lisboa (2014), em Ensino de Números Racionais pela Rutgers University – Newark – United States of America (2018) e, em Frações pela Perspectiva de Medição pela Rutgers University – Newark – United States (2024), doutora em Psicologia da Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (2007), mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (2001), graduada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (1995). É professora titular do Instituto Federal do Espírito Santo, onde trabalha, principalmente, na Pós-graduação Strictu Senso em Educação em Ciências e Matemática. Tem interesse em ensino, pesquisa e extensão ligados à formação de professores que ensinam matemática, em Resolução de Problemas, Lesson Study, Psicologia Cognitiva ligada ao processo de pensamento matemático, aplicações estatísticas e matemáticas na área da Educação, Ciências, Matemática e Engenharias.



Arthur Belford Powell é estadunidense, doutor em Educação Matemática pela Rutgers University (2003), mestre em Matemática pela University of Michigan (1977), graduado em Matemática e Estatística pela Hampshire College (1976). Atualmente é professor de Educação Matemática na Rutgers University (New Jersey). É diretor associado e pesquisador do Robert B. Davis Institute for Learning of the Graduate School of Education. Coordena o Grupo de Pesquisa sobre Comunicação, Tecnologia e Aprendizagem Matemática da Rutgers University. É diretor interino do Programa de Política Educacional e Sistemas Urbanos (Program in Educational Policy, Urban Systems). Está profundamente engajado em projetos de colaboração internacional entre educadores matemáticos da Rutgers University e do hemisfério Sul (Moçambique, África do Sul, Brasil e Haiti). Tem interesse em pesquisas ligadas à Aprendizagem Matemática, Etnomatemática, desenvolvimento das ideias, raciocínio e heurística matemáticos, formação de professores de Matemática e resolução de problemas em Matemática de modo colaborativo e com tecnologia.

Frações à Moda Antiga



Ebook disponível para download em

http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/602100

Fração à Moda Antiga é um livro que visa a apoiar e motivar professores que queiram alternativas para construir com seus estudantes o conceito de fração tendo em vista os benefícios que a aprendizagem baseada na perspectiva de medição desse conteúdo proporciona na vida escolar hodierna e futura dos estudantes.

APOIO