VALVERDE MORALES, MIGUEL ANDERSON

$T : H \times H \to \mathbb{C}$

OPERADORES SOBRE ESPACIOS DE HILBERT

ASOCIADOS A FORMAS SESQUILINEALES

Atena Editora
Año 2025

VALVERDE MORALES, MIGUEL ANDERSON

T : H × H → C

$$T : H \times H \to C$$

T : H × H → C

OPERADORES SOBRE ESPACIOS DE HILBERT

ASOCIADOS A FORMAS SESQUILINEALES

Atena Editora
Año 2025

Los manuscritos nacionales fueron sometidos previamente a una revisión ciega por pares por parte de miembros del Consejo Editorial de esta editorial, mientras que los manuscritos internacionales fueron evaluados por pares externos. Ambos fueron aprobados para su publicación en base a criterios de neutralidad académica e imparcialidad.

Atena Editora se compromete a garantizar la integridad editorial en todas las etapas del proceso de publicación, evitando plagios, datos o entonces, resultados fraudulentos y evitando que los intereses económicos comprometan los estándares éticos de la publicación. Las situaciones de sospecha de mala conducta científica se investigarán con el más alto nivel de rigor académico y ético.

Operadores sobre espacios de Hilbert asociados a formas sesquilineales

Diagramación: Camila Alves de Cremo
Correción: Yaiddy Paola Martinez
Indexación: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisión: El autor
Autor: Miguel Anderson Valverde Morales

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

O61 Operadores sobre espacios de Hilbert asociados a formas sesquilineales / Miguel Anderson Valverde Morales.– Ponta Grossa - PR: Atena, 2025.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-3122-0
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.220252801

1. Análise funcional - Teoria de operadores e espaços de Hilbert. I. Valverde Morales, Miguel Anderson. II. Título.

CDD 515.724

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARACIÓN DEL AUTOR

Para efectos de esta declaración, el término 'autor' se utilizará de forma neutral, sin distinción de género o número, salvo que se indique lo contrario. De esta misma forma, el término 'obra' se refiere a cualquier versión o formato de creación literaria, incluidos, pero no limitando a artículos, e-books, contenidos en línea, de acceso abierto, impresos y/o comercializados, independientemente del número de títulos o volúmenes. El autor de esta obra: 1. Atestigua que no tiene ningún interés comercial que constituya un conflicto de intereses en relación con la obra publicada; 2. Declara que participó activamente en la elaboración de la obra, preferentemente en: : a) Concepción del estudio, y/o adquisición de datos, y/o análisis e interpretación de datos; b) Preparación del artículo o revisión con el fin de que el material sea intelectualmente relevante; c) Aprobación final de la obra para su presentación; 3. Certifica que la obra publicada está completamente libre de datos y/o resultados fraudulentos; 4. Confirma la citación y referencia correcta de todos los datos e interpretaciones de datos de otras investigaciones; 5. Reconoce haber informado todas las fuentes de financiamiento recibidas para realizar la investigación; 6. Autoriza la edición de la obra, que incluye registros de la ficha catalográfica, ISBN, DOI y otros indexadores, diseño visual y creación de portada, maquetación del núcleo, así como su lanzamiento y difusión según los criterios de Atena Editora.

DECLARACIÓN DE LA EDITORIAL

DEDICATORIA

A mis padres y a mi familia por sus sabios consejos y por su apoyo moral para seguir perfeccionándome en mi carrera profesional.

AGRADECIMIENTO

A Dios por darme la vida y la salud para estudiar y trabajar. También agradezco, a cada uno de los profesores del Departamento de la Escuela Académico Profesional de Matemáticas, que con sus conocimientos han contribuido en mi formación profesional.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En espacios de Hilbert de dimensión finita, las nociones de forma sesquilineal y operador lineal son equivalentes, esto aún es cierto en espacios de Hilbert de dimensión infinita, pues el operador acotado T sobre H, está estrechamente relacionado a una forma sesquilineal t sobre H de la siguiente manera

$$t[u, v] = \langle Tu, v\rangle$$

La relación anterior establece una correspondencia uno a uno entre el conjunto de las formas sesquilineales acotadas sobre H y el conjunto de operadores acotados sobre H.

En cambio la relación entre un operador no acotado y una forma sesquilineal no acotada es más complicada y no se puede establecer resultados generales. Sin embargo, la teoría formulada por Friedrichs establece una relación entre formas sesquilineales simétricas y semiacotadas con los operadores autoadjuntos semiacotados.

La teoría de Friedrichs puede ser extendida a otras formas sesquilineales no acotadas, no simétricas y operadores no acotados con ciertas restricciones.

En este trabajo se investigará las condiciones bajo las cuales a una forma sesquilineal no acotada se le asocia un operador autoadjunto o m-sectorial.

Para resolver dicho trabajo, se ha dividido este informe en tres capítulos. El primero esta dedicado a la teoría de operadores lineales sobre espacios de Hilbert y algunos resultados importantes para el desarrollo del trabajo, el segundo capítulo está dedicado al estudio de las formas sesquilineales y el tercer capítulo está consagrado a enunciar y demostrar la relación entre operadores lineales y formas sesquilineales.

El Autor.

Un espacio normado es un espacio vectorial con una norma definida, como caso particular de espacios normados tenemos los espacios de Banach. Estos espacios generalizan los conceptos de $\mathbb{R}^n$, tratandose de espacios de dimensión infinita aquí es posible introducir la noción de convergencia de una sucesión de vectores; teniendo la posibilidad de tener a los complejos como cuerpo de escalares.

Una sucesión será denotada por $\{u_n\}$. Si X es un espacio normado y $\{u_n\}$ una sucesión en X, la notación $\lim_{n\to\infty}\{u_n\} = u$, significa que la sucesión $\{u_n\}$ converge a u cuando $n \longrightarrow \infty$ y también lo escribiremos como $u_n \longrightarrow u$ o equivalentemente $\|u_n - u\| \longrightarrow 0$. Además la sucesión $\{u_n\}$ se dice que es de Cauchy si $\lim_{m,n\to\infty} \|u_m - u_n\| = 0$ o equivalentemente $\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0(\epsilon)$ tal que $\|u_n - u_m\| < \epsilon\ \forall m,\ n > N_0(\epsilon)$

1.1 Espacios Normados

Definición 1.1.1.

Sea X un espacio vectorial complejo. La aplicación $\|.\| : X \to [0, \infty)$, es llamada una norma si satisface las condiciones:

(N1) $\|u\| \geq 0$ (No Negatividad)

(N2) $\|u\| = 0$ si y solo si $u = 0$ (Definida positiva)

(N3) $\|\alpha u\| = |\alpha|\ \|u\|$ (Homogeneidad)

(N4) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Desigualdad Triangular)

para todo $u,\ v \in X,\ \alpha \in C$

El espacio vectorial X, junto con la norma $\|.\|$, es llamado un **espacio normado** y escibiremos $X = (X, \|.\|)$. En todo espacio normado X es factible introducirse la estructura de espacio métrico con la métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(u,\ v) = \|u - v\|$$

y es llamada la métrica inducida por la norma. El número $\|u - v\|$ representa la distancia entre los puntos u y v.

Proposición 1.1.1. *En un espacio normado toda sucesión convergente es de Cauchy.*

<u>Demostración</u>:

Sea la sucesión $\{u_n\}$ convergente a u, entonces $\{u_n\} \to u$ o también $\|u_n - n\| \to 0$, es decir para todo $\epsilon > 0\ \exists N(\epsilon) > 0$ tal que $\|u_n - u\| < \frac{\epsilon}{2}$; para todo $n \geq N(\epsilon)$. Mostraremos que dicha sucesión convergente es de cauchy. En efecto:

$\|u_n - u_m\| = \|u_n - u_m + u - u\| = \|(u_n - u) + (u - u_m)\| \leq \|u_n - u\| + \|u - u_m\| < \epsilon$, para todo $n,\ m \geq N(\epsilon)$. Luego $\|u_n - u_m\| \to 0$.

Por lo tanto $\{u_n\}$ es de Cauchy

1.2 Espacios de Banach

Definición 1.2.1. un espacio vectorial X se dice que es **completo**, si toda sucesión de Cauchy $\{u_n\}$ en X es una sucesión que converge a un elemento u de X

Definición 1.2.2. El espacio normado X es llamado **espacio de Banach**, si X es completo (completo en la métrica definida por la norma)

Proposición 1.2.1. *Sea $M \subseteq X$, donde X es un espacio normado, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *M es Cerrado*

ii) *Si $\{u_n\} \in M$ para todo n y $u_n \to u$, esto implica que $u \in M$* para la demostración de esta proposición ver Zeidler[pág 15]

Ejemplo 1.2.1. *Sea l^p el espacio de sucesiones, donde p es fijo además* $1 \leq p < \infty$

$$l^p = \left\{ u = (\xi_j) = (\xi_1, \xi_2, ...)/ \ \sum_{j=1}^{\infty} | \ \xi_j \ |^p < \infty \right\}$$

es un espacio de Banach con norma dada por

$$\|u\| = (\sum_{j=1}^{\infty} | \ \xi_j \ |^p)^{\frac{1}{p}}$$

esto induce una métrica definida por:

$$d(u, v) = (\sum_{j=1}^{\infty} | \ \xi_j - \xi_j \ |^p)^{\frac{1}{p}}$$

<u>**Demostración**</u>:

(**i**) Primero probaremos que l^p es un espacio normado, para ello mostraremos que satisface las condiciones de una norma.

<u>En efecto:</u>

Sean $u, v \in l^p$, y $\alpha \in \mathbb{C}$, con

$$u = (\xi_1, \xi_2, ...) \qquad v = (\eta_1, \eta_2, ...)$$

Luego

$$\|u\| = (\sum_{j=1}^{\infty} | \ \xi_j \ |^p)^{\frac{1}{p}} \qquad \|v\| = (\sum_{j=1}^{\infty} | \ \eta_j \ |^p)^{\frac{1}{p}}$$

Veamos que l^p satisface las condiciones de una norma [Definición (1.1.1)].

(N1) $\|u\| = \ (\sum_{j=1}^{\infty} | \ \xi_j \ |^p)^{\frac{1}{p}} \geq 0$

(N2) $\|u\| = 0$ se deduce inmediatamente si y sólo si $u = 0$

(N3) $\|\alpha u\| = (\sum_{j=1}^{\infty} | \ \alpha\xi_j \ |^p)^{\frac{1}{p}} \ = | \ \alpha \ | \ (\sum_{j=1}^{\infty} | \ \xi_j \ |^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$,luego $\|\alpha u\| = |\alpha| \ \|u\|$

(N4) Usando la desigualdad de Minkowski, tenemos:

$$\|u+v\| = (\sum_{j=1}^{\infty} \mid \xi_j + \eta_j \mid^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{j=1}^{\infty} \mid \xi_j \mid^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{j=1}^{\infty} \mid \eta_j \mid^p)^{\frac{1}{p}}$$

luego $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Por lo tanto l^p es un espacio Normado

(**ii**) Ahora probaremos que l^p es un espacio completo, es decir toda sucesión de Cauchy en l^p es convergente.

En efecto:

Sea $\{u_m\}$ una sucesión de Cauchy en el espacio l^p, además $\{u_m\} = \{\xi_1^m, \xi_2^m, ...\}$.

Mostraremos que $\{u_m\} \to u$

Observemos que si $\{u_m\}$ es de Cauchy, entonces para cada $\epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, talque $\forall m, n > N(\epsilon)$, se tiene:

$$d(u_m, u_n) = (\sum_{j=1}^{\infty} \mid \xi_j^m - \xi_j^n \mid^p)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \tag{1.2.1}$$

De aquí tenemos que para cada $j = 1, 2, ...$

$$\mid \xi_j^m - \xi_j^n \mid < \epsilon \tag{1.2.2}$$

De (1.2.2) observamos que para *un* j fijo, $\{\xi_j^m\} = \{\xi_j^1, \xi_j^2, ...\}$ es una sucesión de Cauchy, además es convergente, ya que C es completo, entonces digamos que $\{\xi_j^m\} \to \xi_j$, cuando $m \to \infty$.

Para probar que $\{u_m\} \to u$, primero definamos $u = (\xi_1, \xi_2, ...)$ además se puede observar de (1.2.1) que para todo $m, n > N(\epsilon)$, tenemos

$$\sum_{j=1}^{k} \mid \xi_j^m - \xi_j^n \mid^p < \epsilon^p \qquad (k = 1, 2, ..)$$

Sin embargo cuando $n \to \infty$, tenemos que para $m > N(\epsilon)$

$$\sum_{j=1}^{k} \mid \xi_j^m - \xi_j \mid^p < \epsilon^p \qquad (k = 1, 2...)$$

Ahora hagamos $k \to \infty$, entonces para $m > N$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mid \xi_j^m - \xi_j \mid^p \leq \epsilon^p \tag{1.2.3}$$

Es decir $d(u_m, u) \leq \epsilon$, esto demuestra que $\{u_m\} \to u$

(**iii**) Ahora probaremos que $u \in l^p$

En efecto:

De (1.2.3), tenemos que $u_m - u = (\xi_j^m - \xi_j) \in l^p$, pues

$$(\sum_{j=1}^{\infty} \mid \xi_j^m - \xi_j \mid^p)^{\frac{1}{p}} \leq \infty$$

Además por la desigualdad de Minkowsky, tenemos:

$$\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{\infty} \mid \xi_j \mid^p)^{\frac{1}{p}} &= (\sum_{j=1}^{\infty} \mid \xi_j + \xi_j^m - \xi_j^m \mid^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\sum_{j=1}^{\infty} \mid \xi_j^m + (\xi_j - \xi_j^m) \mid^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq (\sum_{j=1}^{\infty} \mid \xi_j^n \mid^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{j=1}^{\infty} \mid \xi_j - \xi_j^m) \mid^p)^{\frac{1}{p}} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Entonces $u \in l^p$

Por lo tanto l^p es un espacio de Banach.

Teorema 1.2.2. (*Subespacio Completo*).

Un Subespacio M de un espacio normado completo X es completo si y sólo si M es cerrado en X para la demostración de este teorema ver Kreyszig[pág 30]

1.3 Espacios de Hilbert

En un espacio normado podemos sumar vectores y multiplicar vectores por un escalar, además la norma en dicho espacio generaliza el concepto de longitud de un vector, sin embargo lo que se pierde todavía en un espacio normado, y en lo que querríamos tener si es posible, es un análogo del producto punto

$$a.b = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

y la fórmula notable

$$|a| = \sqrt{a.a}$$

y la condición de ortogonalidad(perpendicularidad)

$$a.b = 0$$

De allí la pregunta surge si el producto punto y la ortogonalidad se puede generalizar a espacios vectoriales arbitrarios, en efecto esto se puede hacer y llevar a espacios producto interno y espacio producto interno completos llamados espacios de Hilbert. El espacio producto interno es un caso especial de un espacio normado, su teoría es rica y se podria decir que este espacio es una generalización del espacio euclideano, pues conservan algunas características de tal espacio, uno de sus conceptos importantes es el de ortogonalidad. Además el espacio de Hilbert H se puede representar como la suma directa de un subespacio cerrado y su complemento ortogonal. Otro hecho importante es que toda funcional lineal acotada sobre H puede ser representada en términos del producto interno, esto es el teorema de Riesz.

Definición 1.3.1. Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un producto **interno** sobre H es una aplicación

$$\langle\, .\, ,\, .\, \rangle : H \times H \to \mathrm{C}$$

que asocia a cada par de vectores u,v un número complejo denotado por $\langle u,\ v\rangle$ satisfaciendo:

(H1) $\langle u + v,\ w\rangle = \langle u,\ w\rangle + \langle v,\ w\rangle$

(H2) $\langle \alpha u,\ v\rangle = \alpha\langle u,\ v\rangle$

(H3) $\langle u,\ v\rangle = \overline{\langle v,\ u\rangle}$ (Simetría hermitiana)

(H4) $\langle u,\ u\rangle > 0$ y $\langle u,\ u\rangle = 0$ si y sólo si $u = 0$ para todo $u,\ v,\ w \in H,\ \alpha \in \mathbb{C}$

El producto interno es sesquilineal, es decir es lineal con respecto al primer factor y conjugado lineal con respecto al segundo factor, ya que de (H1) y (H3) resultan:

(1) $\langle u,\ v + w\rangle = \langle u,\ v\rangle + \langle u,\ w\rangle$

(2) $\langle u,\ \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u,\ v\rangle$

Las tres primeras condiciones juntas son conocidas como sesquilinealidad, y la cuarta es llamada positiva. De este modo un producto interno es una forma sesquilineal positiva.

Un producto interno sobre H define una norma $\|\ .\ \| : H \to [0,\ \infty)$, dada por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,\ u\rangle}$$

y una métrica sobre H dada por

$$d(u,\ v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v,\ u - v\rangle}$$

Definición 1.3.2. un espacio pre-Hilbert $(H,\ \langle , \rangle)$ se dice que es un **espacio de Hilbert** si es completo (completo en la métrica definida por el producto interno).

Una de las más importantes desigualdades en espacios pre-hilbert y Hilbert es la desigualdad de Schwarz, veamos

Lema 1.3.1. (*desigualdad de Schwarz, desigualdad del triángulo*)

Sean $u,\ v \in H,$ *donde* H *es* un espacio *pre*-Hilbert. *Entonces tenemos*

1. ***desigualdad de Schwarz***

$| < u,\ v > | \leq \|u\|\ \|v\|$

2. ***desigualdad del triángulo***

$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Para la demostración del lema anterior, ver Kreyszi[pag.136]

Tambien, el producto interno definición (1.3.1) puede ser escrito en términos de la norma, via la llamada **identidad de polarización**

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\,\|u+iv\|^2 - i\,\|u-iv\|^2 \right) \tag{1.3.1}$$

Ejemplo 1.3.1. *El espacio* $l^2 = \{u = (\xi_j)/\Sigma_1^\infty | \xi_j |^2 < \infty\}$ *es* un espacio *de Hilbert, con producto interno definido por*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \overline{\eta_j}$$

Ejemplo 1.3.2. *Sea* $L_p(M)$ *el espacio compuesto por todas las funciones complejas medibles*

$$u : M \to \mathrm{C}$$

sobre un subconjunto medible M *de* $\mathbb{R}^m$*, además* $u = u(x) = u(x_1, \ldots, x_m)$*, tal que*

$$\left(\int_M | u(x) |^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

donde la norma para $L_p(M)$ *esta dada por*

$$\|u\| = \left(\int_M | u(x) |^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

y esta norma induce el producto interno dado por

$$\langle u, v\rangle = \int_M u(x)\overline{v(x)}dx$$

es un espacio de Hilbert, para la demostración ver Zeidler[pág 110]

1.4 Propiedades geométricas de los espacios de Hilbert

Una de las propiedades geométricas de los espacios de Hilbert es la ley del paralelogramo, otro aspecto geométrico de este espacio es la noción de ortogonalidad, así como en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es conocida esta definición que es de amplio uso en la teoría geométrica de $\mathbb{R}^n$, pues tal noción es también definida en los espacios pre-Hilbertianos.

Teorema 1.4.1. (***Ley del paralelogramo***)

Toda norma proveniente de un producto interno satisface la relación

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

1.4.1 Ortogonalidad

Definición 1.4.1. Dos vectores u, v en un espacio pre-Hilbertiano H son **ortogonales** si

$$\langle u, v\rangle = 0$$

En este caso escribiremos $u \perp v$.

Definición 1.4.2. Dados A y B subconjuntos de un espacio pre-Hilbertiano $H,$ diremos que **A es ortogonal a B**, si $u \perp v \ \forall u \in A$, y $\forall v \in B$ y escribiremos

$$A \perp B$$

Definición 1.4.3. El **complemento ortogonal de A**, denotado por $A^{\perp}$, se define como:

$$A^{\perp} = \{u \in H / u \perp A\}$$

Teorema 1.4.2. (***Teorema de Pitagoras***)

En un espacio preHilbertiano, si $u \perp v$, entonces se cumple:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

1.4.2 Complemento ortogonal y suma directa

En un espacio métrico X la distancia δ de un elemento $u \in X$ a un conjunto no vacio $M \subset H$ viene dado por

$$\delta = \inf_{v \in M} d(u, v)$$

y en un espacio normado esta viene dada por:

$$\delta = \inf_{v \in M} \|u, v\|$$

Teorema 1.4.3. (***Vector minimizante***)

Sea X un espacio pre-Hilbertiano y $M \neq \emptyset$ un subconjunto convexo y completo (en la métrica inducida por el producto interno). Entonces para cada $x \in X$, existe un único elemento $y \in M$ tal que

$$\delta = \inf_{y_0 \in M} \|x - y_0\| = \|x - y\|$$

Lema 1.4.4. *En el teorema anterior sea M un subespacio completo de Y y $u \in X$ fijo, entonces $z = x - y$ es ortogonal a Y*

Para la demostración del teorema y lema anterior ver Kreyszig[pág 144]. A continuación veremos una representación del espacio de Hilbert como una suma directa, y haremos uso de la ortogonalidad.

Definición 1.4.4. un espacio vectorial U se dice que es la **suma directa** de dos subespacios V y W y escribiremos

$$U = V \oplus W$$

tal que $V \cap W = \{0\}$, si cada $u \in U$ tiene una única representación

$$u = v + w \qquad\qquad v \in V, w \in W$$

Entonces W es llamado el complemento algebraico de V en U y viceversa, así de ese modo V y W son llamados subespacios complementarios en U.

Por ejemplo si $Y = \mathbb{R}$ es un subespacio del plano euclideano $\mathbb{R}^2$, entonces Y tiene infinitos complementos algebraicos en $\mathbb{R}^2$, donde cada uno de ellos es la recta real. Pero es más conveniente elegir un complemeto que sea perpendicular, nosotros hacemos uso de este hecho cuando elegimos un sistema de coordenadas cartesianas. En $\mathbb{R}^3$ la situación es la misma.

Similarmente, en el caso de un espacio de Hilbert H, nos interesa representar H como una suma directa de un subespacio cerrado V y su complemento ortogonal $V\perp$

$$V^{\perp} = \{u \in H / u \perp V\}$$

Este hecho esta expresado en el teorema de proyección.

Teorema 1.4.5. (***Teorema de Proyección***).

Sea V un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces

$$H = V \oplus W \qquad\qquad W = V^{\perp}$$

<u>Demostración:</u>

Ya que H es completo y V es un subespacio cerrado en H, entonces por el Teorema (1.2.2) se tiene que V es completo. Además V es convexo, luego usando el Teorema (1.4.3) y el lema (1.4.4), tenemos que $\forall u \in H, \exists v \in V$ talque $u = v + w$ con $w \in W = V^{\perp}$.

- Probaremos que esta representación es única.

En efecto:

Asumamos que existe $u = v_1 + w_1$ con $v_1 \in V$, $w_1 \in W = V^{\perp}$, pero tenemos también que $u = v+w$, luego $v+w = v_1+w_1$, de este modo $v-v_1 = w_1-w$. desde que $(v-v_1) \in V$ y $v-v_1 = w-w_1 \in W = V^{\perp}$, entonces $(v-v_1) \in V \cap V^{\perp} = \{0\}$, esto implica que $v = v_1$ y $w = w_1$, luego esta representación es única. Por tanto

$$H = V \oplus W \qquad\qquad W = V^{\perp}$$

Definición 1.4.5. Una funcional lineal en un espacio de Hilbert H es una función

$$f : H \to C$$

tal que:

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(\mathrm{u}) + \beta f(\mathrm{v})$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}\ y\ u, v \in H$

Definición 1.4.6. Una funcional lineal es acotada si existe una cosntante $c \geq 0$ tal que

$$|f(u)| \leq c\, \|u\| \qquad\qquad \forall u \in H$$

A continuación veremos que toda funcional lineal acotada sobre un espacio de Hilbert H puede ser representado en términos del producto interno, esto es el lema de Riesz - Frechet.

Lema 1.4.6. (***Riesz -*** Frechet)

Sea $f : H \to \mathbb{C}$ una funcional lineal acotada. Entonces existe un único $z \in H$ tal que se cumple

$$f(x) = \langle x, z \rangle \tag{1.4.1}$$

donde $\|z\| = \|f\|$

<u>**Demostración**</u>: Probaremos que

(**a**) f tiene una representación $f(u) = \langle u, v \rangle$

(**b**) v es único

(**c**) $\|v\| = \|f\|$

Si $f = 0$, luego (a), (b) y (c) se cumplen si tomamos $v = 0$. Supongamos entonces que $f \neq 0$

(**a**) Consideremos el espacio nulo de f

$$\mathcal{N}(f) = \{u \in H / f(u) = 0\}$$

Probaremos que este espacio es cerrado en H

<u>En efecto:</u>

Sea $\{u_n\} \in \mathcal{N}(f)$ convergente a un elemento $u \in H,$ entonces $f(u_n) = 0 \;\; \forall n$. Como $u_n \to u$, luego por la continuidad de f, tenemos $f(u_n) \to f(u)$; de aquí inferimos que $f(u) = 0$, es decir $u \in N(f)$.

Luego $\mathcal{N}(f)$ es un subespacio cerrado en H

Desde que $\mathcal{N}(f)$ es un subespacio cerrado en $H,$ por el teorema de proyección tenemos que si $f \neq 0$, entonces $\mathcal{N}(f) \neq H,$ de este modo $\mathcal{N}(f)^{\perp} \neq \{0\}$.

Como $\mathcal{N}(f)^{\perp} \neq \{0\}$, entonces existe un $v_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$ con $v_0 \neq 0$. Ahora sea

$$w = f(u)v_0 - f(v_0)u$$

aplicando f, tenemos

$$f(w) = f(f(u)v_0 - f(v_0)u) = f(u)f(v_0) - f(v_0)f(u) = 0$$

Esto muestra $w \in \mathcal{N}(f)$.

Desde que $v_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$ y $w \in \mathcal{N}(f)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \langle w, v_0\rangle &= \langle f(u)v_0 - f(v_0)u, v_0\rangle \\ &= f(u)\langle v_0, v_0\rangle - f(v_0)\langle u, v_0\rangle \end{aligned}$$

como $v_0 \in \mathcal{N}(f)^{\perp}$, entonces $\langle v_0, v_0\rangle = \|v_0\|^2 \neq 0$, luego despejando $f(u)$ de la ecuación anterior, tenemos

$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{f(v_0)}{\langle v_0, v_0\rangle}\langle u, v_0\rangle \\ &= \langle u, \frac{\overline{f(v_0)}}{\langle v_0, v_0\rangle} v_0\rangle \\ &= \langle u, v\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto

$(u) = \langle u, v\rangle$ donde $v = \dfrac{\overline{f(v_0)}}{\langle v_0, v_0\rangle} v_0$

(**b**) Probaremos que v es único.

<u>En efecto:</u>

Supongamos que para todo $u \in H,$ exista un v_1 satsifaciendo (1.4.1), luego

$$f(u) = \langle u, v\rangle = \langle u, v_1\rangle$$

Entonces

$$\langle u, v - v_1\rangle = 0 \qquad \text{para todo } u$$

Eligiendo en particular $u = v - v_1$, tenemos

$$\langle u, v - v_1\rangle = \langle v - v_1, v - v_1\rangle = \|v - v_1\|2 = 0$$

De aquí $v - v_1 = 0$, lo cual implica que $v = v_1$

Luego v es único

(**c**) finalmente probaremos que $\|f\| = \|v\|$

En efecto:

Si $f = 0$, entonces $v = 0$ estaria probado, asumamos entonces que $f \neq 0$

- Probaremos primero que $\|v\| \leq \|f\|$

Haciendo $u = v$ en $f(u) = \langle u, v\rangle$, tenemos $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = f(v) \leq \|f\|\ \|v\|$

Luego $\|v\| \leq \|f\|$

- Ahora probaremos que $\|f\| \leq \|v\|$,

Bien como $|f(u)| \leq |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\ \|v\|$. Entonces

$$\sup_{\|u\|=1} |f(u)| \leq \sup_{\|u\|=1} \|u\|\,\|v\|$$

$$\|f\| \leq \|v\|$$

Luego $\|f\| \leq \|v\|$

De esta forma se deduce que $\|f\| = \|v\|$

Por lo tanto de (a), (b) y (c) tenemos que existe un único $z \in H$ tal $f(x) = \langle x, z\rangle$ y $\|z\| = \|f\|$

1.5 Operadores Lineales

En esta sección haremos un estudio de operadores lineales no acotados sobre espacios de Hilbert, esto nos llevará a la noción de operadores simétricos y autoadjuntos. También existe una clase más general de operadores que son los acretive y sectoriales, estos operadores son de gran importancia en aplicaciones.

Excepto se especifique lo contrario H, H_1 y H_2 denotarán espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$.

Definición 1.5.1. Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert. Un **operador lineal** $\mathbf{T}$ es una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset H_1 \to H_2$ que verifica la condición:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha Tu + \beta Tv$$

para todo $u, v \in \mathcal{D}(T)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Notación:

Al operador $T: \mathcal{D}(T) \subset H_1 \to H_2$, lo denotaremos como $T\,(H_1 \text{ a } H_2)$

El **dominio** de T, denotado por $\mathcal{D}(T)$, es *un* subespacio de H_1 y se define como

$$\mathcal{D}(T) = \{u \in H_1 / \exists v \in H_2,\ v = T_u\}$$

El **rango** de T, denotado por $\mathrm{R}(T)$ es *un* subespacio de H_2 y se define como

$$\mathcal{R}(T) = \{v \in H_2 / \exists u \in \mathcal{D}(T),\ Tu = v\}$$

El **espacio nulo** de T es un subespacio de H_1 y se define como

$$\mathcal{N}(T) = \{u \in \mathcal{D}(T) / \ Tu = 0\}$$

Definimos también el **rank**, **nulidad** y **deficiencia** de T, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} rank(T) &= dim(R(T)) \\ nul(T) &= dim(N(T)) \qquad (1.5.1) \\ def(T) &= codim(R(T)) \end{aligned}$$

Los operadores especiales I (**identidad**) y 0 (**cero**) de H_1 a H_2 (ambos con dominio H_1) están dados por: $Iu = u$ y $Ou = 0$

Dos operadores, S y T, de H_1 a H_2 se dice que son **iguales** si $D(S) = D(T)$, y para todo $u \in D(S)$, $Su = Tu$; y escribiremos $S = T$.

Los operadores que no están definidos en todo su dominio, nos lleva a definir restricción y estensión de un operador

Si S y T son dos operadores de $(H_1$ a $H_2)$ tal que $D(S) \subseteq D(T)$ y $Su = Tu\ \forall u \in \mathcal{D}(S)$, entonces T es llamado una **extensión** de S (en símbolos $S \supset T$), y S es una **restricción** de T (en símbolos $S \subset T$)

Definición 1.5.2. La inversa T^{-1} de un operador $T\,(H_1$ a $H_2)$ es definido si y sólo si la aplicación es inyectiva.

T es **inyectiva** si y sólo si $Tu = 0$ implica que $u = 0$.

T^{-1} es por definición el operador $T^{-1}: \mathcal{R}(T) \to H_1$ tal que $T^{-1}Tu = u$.

Así tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T) \quad &; \quad \mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{D}(T) \\ T^{-1}(Tu) = u \quad &; \quad u \in \mathcal{D}(T) \\ T(T^{-1}v) = v \quad &; \quad v \in \mathcal{R}(T) \end{aligned}$$

Diremos que T es invertible si T^{-1} existe

Definición 1.5.3. El operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \to H_2$ se dice que es **densamente definido** en H_1, si $\mathcal{D}(T)$ es denso en H_1.

Definición 1.5.4. Sean S y T operadores de (H_1 a H_2). La **suma** de S y T es el operador $S + T$, definido por:

$$(S+T)u = Su + Tu \qquad \forall u \in \mathcal{D}(S+T)$$

donde:

$$D(S+T) = \mathcal{D}(S) \cap \mathcal{D}(T)$$

Definición 1.5.5. La **multiplicación** de un operador T de (H_1 a H_2) con un escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ se define por

$$(\alpha T)u = \alpha(Tu) \qquad \forall u \in \mathcal{D}(\alpha T)$$

donde

$$\mathcal{D}(\alpha T) = \mathcal{D}(T)$$

Definición 1.5.6. La **composición** de un operador lineal T de (H_1 a H_2) con un operador *S* de (H_2 a H_3), es el operador lineal $ST : H_1 \to H_3$ definido por

$$(ST)u = S(Tu) \qquad \forall u \in \mathcal{D}(ST)$$

donde

$$\mathcal{D}(ST) = \{u \in \mathcal{D}(T)/Tu \in \mathcal{D}(S)\} = S^{-1}\mathcal{D}(T)$$

Definición 1.5.7. El operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \to H_2$, se dice que es **acotado** si existe *un* $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $u \in \mathcal{D}(T)$.

$$\|Tu\| \leq c\,\|u\| \tag{1.5.2}$$

Notemos que en (1.5.2) la norma de la izquierda esta sobre H_2 y la norma de la derecha esta sobre H_1. Por simplicidad denotaremos ambas normas con el símbolo $\|.\|$ Si en (1.5.2) elegimos $c = \|u\|$, entonces obtenemos la fórmula.

$$\|Tu\| \leq \|T\|\,\|u\|$$

Si el operador lineal T es acotado, se define la norma de T como:

$$\|T\| = \sup_{u\in\mathcal{D}(T)-\{0\}} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \tag{1.5.3}$$

La norma definida por (1.5.3) satisface la definición de norma.

Denotaremos como $B(H_1, H_2)$ al conjunto de **operadores acotados** $T : H_1 \to H_2$ con $\mathcal{D}(T) = H_1$. Esto es

$$B(H_1, H_2) = \{T : H_1 \to H_2 \,/\, T \textit{ es operador lineal acotado}\}$$

Ejemplo 1.5.1. (*Operador Integral*)

Sea $X = C[a, b]$ *con la norma*

$$\|u\| = \max_{a\leq x\leq b} \mid u(x) \mid$$

donde $-\infty < a < b < \infty$*. Supongamos que es continua la función*

$$K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

Definamos el operador integral $T : X \to X$ *tal que*

$$Tu(x) = \int_a^b k(x,y)u(y)dy, \quad \forall x \in [a,b]$$

Entonces, el operador T *es acotado y*

$$\|T\| \leq \max_{a\leq x,y\leq b} \mid k(x,y) \mid$$

Demostración:

Para probar que T es acotado, primero observemos que la continuidad de k sobre el cuadrado cerrado $[a, b] \times [a, b]$, implica que k es acotado, es decir

$$\mid k(x, y) \mid \leq k_0 \qquad \forall x \in [a, b] \times [a, b]$$

Además

$$\|u\| = \max_{a\leq x\leq b} \mid u(x) \mid$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \max_{a\leq x\leq b} \ \left| \int_a^b k(x,y)u(y)dy \right| \\
&\leq \max_{a\leq x,y\leq b} \ \int_a^b |k(x,y)| \ |u(y)|dy \\
&\leq k_0 \max_{a\leq x,y\leq b} \ \int_a^b |u(y)|dy \\
&= k_0(b-a) \, \|u\|
\end{aligned}$$

Esto es $\|Tu\| \leq c\,\|u\|$ donde $c = k_0(b-a)$, de aquí T es acotado.

1.5.1 Rango numérico, resolvente y espectro de operadores

En esta sección daremos una introducción al rango numérico y al espectro de un operador T que actua de H en H

Definición 1.5.8. El **rango numérico** de un operador lineal $T : H \to H$ se define como el conjunto

$$\mathrm{w}(T) = \{\langle Tu, u\rangle \in \mathbb{C}/u \in \mathcal{D}(T),\ \|u\| = 1\}$$

$\mathrm{w}(T)$ es un subconjunto del plano complejo, donde $\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ denota el producto interno en H. $\mathrm{w}(T)$ es la imagen de la esfera unidad $\{u \in H/\ \|u\| = 1\}$ de H bajo la forma cuadrática $u \rightarrowtail \langle Tu, u\rangle$

$\mathrm{w}(T)$ en general no es abierto ni cerrado, una propiedad importante del rango numérico es su convexidad, esto es el teorema de Toeplitz - Hausdorff [1918-1919].

Teorema 1.5.1. *Si T es* un operador *lineal $T : \mathcal{D}(T) \to H$, entonces $\mathrm{w}(T)$ es convexo*

Para la idea de una prueba, vea Kato [pag 571]

Sea Γ la clausura de w, $\Gamma(T) = \overline{\mathrm{w}(T)}$, tomado de esta forma Γ es un conjunto convexo cerrado. Además sea Δ el complemento de Γ en el plano complejo, es decir $\Delta(T) = \mathrm{C}-\Gamma(T)$, $\Delta(T)$ es un dominio, excepto si $\Gamma(T)$ es una franja en C acotada entre dos rectas paralelas. Entonces se puede tener $\Delta(T) = \Delta_1(T) \cup \Delta_2(T)$. donde Δ_1 y Δ_2 son semiplanos.

Definición 1.5.9. Sea un operador T de (H en H) y sea I la identidad sobre H

El numero complejo ζ es un valor regular de T si $(T - \zeta I)$ es un operador invertible

El conjunto de los valores regulares de T se denomina el **conjunto resolvente** y lo denotamos como $\rho(T)$

$$\rho(T) = \{\zeta \in \mathbb{C}/\ (T - \zeta I)\ es\ invertible\}$$

Los valores no regulares de T se llaman valores espectrales de T. El conjunto de los valores espectrales de T se denomina **espectro** de T y lo denotamos por $\sigma(T)$.

El espectro de T es entonces

$$\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$$

Un número $\zeta \in \mathbb{C}$, se dice que es un valor propio de T si $N\,(T - \zeta I) \neq 0$.

Si ζ es un valor propio y $Tu = \zeta u$ con u 0, entonces u se llama **vector propio** de T correspondiente al valor propio ζ. Al subespacio $N\,(T - \zeta I)$ se le llama **subespacio propio** correspondiente al valor propio ζ

1.6 Operadores no acotados

Los operadores T no acotados, aparece en muchas aplicaciones tanto en física como en matemática, el estudio de este tipo de operadores fue estimulado en mecánica cuántica por J. von Newmann y M. $H.$ Stone. Los operadores no acotados son más complejos que los operadores acotados, ya que un operadores acotado es definido en todo su espacio, mientras que los operadores no acotados no necesariamente, esto nos lleva a considerar el problema de dominios y extensiones. También vamos a ver que es necesario la densidad del dominio $\mathcal{D}(T)$ en H_1 para que exista el operador adjunto T^* de un operador lineal T, así mismo la mayoria de operadores lineales no acotados que aparecen en la práctica son cerrados o por lo menos tienen una extensión cerrada.

En esta sección consideraremos operadores lineales $T : \mathcal{D}(T) \subset H_1 \to H_2$ cuyo dominio $\mathcal{D}(T)$ está en un espacio de Hilbert complejo.

1.6.1 Operadores cerrados

Sea T un operador de (H_1 a H_2). Una sucesión $\{u_n\} \in \mathcal{D}(T)$ se dice que es **T-convergente** a $u \in H_1$, si $\{u_n\}$ y $\{Tu_n\}$ son sucesiones de Cauchy y $u_n \to u$.

Notación:

Escribiremos $u_n \underset{T}{\to} u$ para indicar que $\{u_n\}$ es $T-$ *convergente a* u

Definición 1.6.1. Sea T un operador de (H_1 a H_2), se dice que T es un operador **cerrado**, si para cada sucesión $\{u_n\}$ en $\mathcal{D}(T)$, T-convergente a $u \in H_1$, entonces $u \in \mathcal{D}(T)$y $\{Tu_n\} \to T_u$ es decir:

$$\text{Si } u_n \to u \text{ y } \{Tu_n\} \to v, \text{ entonces } u \in \mathcal{D}(T) \text{ y } Tu = v \tag{1.6.1}$$

Teorema 1.6.1. *Si T (H_1 a H_2) es acotado, entonces T es cerrado si y solo si $\mathcal{D}(T)$ es cerrado en H_1*

Demostración:

Sea una sucesión $\{u_n\} \in \mathcal{D}(T)$, convergente a $u \in H_1$, además como T es un operador acotado, entonces es continuo, es decir $\{Tu_n\} \to v$, $v \in H_2$.

⇒] Si T es cerrado entonces $u \in \mathcal{D}(T)$ y $Tu = v$, de esto se deduce que toda sucesión en $\mathcal{D}(T)$ tiene un limite en $\mathcal{D}(T)$; luego $\mathcal{D}(T)$ es cerrado.

⇐] Si $\mathcal{D}(T)$ es cerrado, entonces $u \in$ D(T) y

$$\|Tu_n - Tu\| \leq \|T\| \, \|u_n - u\| \to 0$$

De aquí $Tu_n \to Tu = v$; luego T es cerrado

Denotaremos al conjunto de todos los operadores cerrados de H_1 a H_2 por $C(H_1, H_2)$ y escribiremos $C(H, H) = C(H)$. Observemos que por el teorema anterior tenemos que $B(H_1,$

$H_2) \subseteq C(H_1, H_2)$, ya que operadores en $B(H_1, H_2)$ tienen dominio cerrado en H_1.

Teorema 1.6.2. *Si T $(H_1$ a $H_2)$ es cerrado y A $(H_1$ a $H_2)$ es acotado tal que $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(A)$, entonces $T + A$ es cerrado*

Demostración:

Observemos que $\mathcal{D}(T + A) = \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(T)$

Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $\mathcal{D}(T)$, $(T + A)$ convergente a $u \in H$.

Probaremos que $\{u_n\}$ es T-convergente.

En efecto:

$$\begin{aligned}
\|Tu_n - Tu_m\| &= \|Tu_n - Tu_m + Au_n - Au_n + Au_m - Au_m\| \\
&= \|(T + A)u_n - (T + A)u_m - A(u_n - u_m)\| \\
&\leq \|(T + A)u_n - (T + A)u_m\| + \|A\| \, \|u_n - u_m\| \\
&\to 0
\end{aligned}$$

Ya que $\{u_n\}$ es $(T + A)$ convergente.

Esto prueba que $\{u_n\}$ es T - convergente.

Ahora como T es cerrado, entonces $u \in \mathcal{D}(T)$ y $\{Tu_n\} \to Tu$. Luego por la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned}
\|(T + A)(u_n - u)\| &\leq \|T(u_n - u)\| + \|A(u_n - u)\| \\
&\leq \|Tu_n - Tu\| + k \, \|u_n - u\| \\
&\to 0
\end{aligned}$$

De aquí $\{(T + A)u_n\} \to (T + A)u$, como queriamos.

Por tanto $T + A$ es cerrado

Teorema 1.6.3. *Si $S \in C(H_1, H_2)$ y $T \in C(H_2, H_3)$ con $T^{-1} \in B(H_3, H_2)$, entonces $TS \in C(H_1, H_3)$*

Demostración:

Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $\mathcal{D}(TS)$, TS - convergente a $u \in H_1$, entonces existe un $v \in H_3$ tal que $\{TSu_n\} \to v$.

Observando que $\mathcal{D}(T^{-1}) = H_3$, y que T^{-1} es acotado, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
Su_n - T^{-1}v &= T^{-1}TSu_n - T^{-1}v \\
&= T^{-1}(TSu_n - v) \\
&\leq k \, \|TSu_n - v\| \\
&\to 0
\end{aligned}$$

De modo que $Su_n \to T^{-1}v$. De aquí $\{u_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(S)$, S - convergente a u. Además como S es cerrado,

$$\{Su_n\} \to Su = T^{-1}v$$

Así que $TSu = v$.

Luego $TS \in C(H_1, H_2)$, como se requeria

Teorema 1.6.4. *Si T $(H_1$ a $H_2)$ tiene rango cerrado, y*

$$(\exists m \in \mathbb{R}^{+})(\forall u \in \mathrm{D}(T))\ \|Tu\| \geq M\ \|u\|$$

entonces T es cerrado.

Demostración:

Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $\mathcal{D}(T)$, $T-$ *convergente* a $u \in H_1$, entonces $\{Tu_n\} \to v$ para algún $v \in H_2$. Pero $R(T)$ es cerrado, así que para algún $w \in \mathcal{D}(T)$,

$$Tw = v$$

Como $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio, para todo n tenemos $(u_n - w) \in \mathcal{D}(T)$ y por hipótesis, tenemos:

$$m\ \|u_n - w\| \leq \|T(u_n - w)\| = \|Tu_n - Tw\| = \|Tu_n - v\| \to 0$$

Luego $\|u_n - w\| \to 0$, es decir $u_n \to w$. Además como $\{u_n\}$ es $T-$ *convergente* a u, tenemos que $u = w \in \mathcal{D}(T)$ y $Tu = v$. De aquí T es cerrado.

Teorema 1.6.5. *Si* $T \in C(H_1, H_2)$*, entonces* $\mathrm{N}(T)$ *es cerrado en* H_1

Demostración:

Consideremos el espacio nulo de T, $\mathcal{N}(T) = \{u \in \mathcal{D}(T) / Tu = 0\}$.

Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $\mathcal{N}(T)$ convergente a $u \in H_1$, para demostrar que $\mathcal{N}(T)$ es cerrado es suficiente verificar que $u \in \mathcal{N}(T)$.

En efecto:

Como $\{u_n\} \in \mathcal{N}(T)$, entonces $Tu_n = 0$. De aquí tenemos

$$Tu = \lim_{n\to\infty} \{Tu_n\} = 0$$

Luego $Tu = 0$, es decir $u \in \mathrm{N}(T)$ Por lo tanto $\mathcal{N}(T)$ es cerrado en H_1

1.6.2 Gráfico de un operador

Los graficos de operadores son importantes porque ellos nos proporcionana un método útil para examinar por ejemplo la cerradura de un operador, en esta sección veremos la importancia del teorema del gráfico cerrado la cual nos proporciona una condición suficiente para que un operador lineal cerrado sobre un espacio de Hilbert sea acotado.

Definición 1.6.2. Sean H_1 y H_2 espacios de Hilbert. El **espacio producto** de H_1 y H_2, denotado por $H_1 \times H_2$, se define por:

$$H_1 \times H_2 = \{(u, v) / u \in H_1\ y\ v \in H_2\}$$

Observación 1.6.1.

(a) $H_1 \times H_2$ es un espacio vectorial con las operaciones

$$+ : (H_1 \times H_2) \times (H_1 \times H_2) \to H_1 \times H_2$$
$$((u_1, v_1) , (u_2, v_2)) \to (u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2 , v_1 + v_2)$$
$$\cdot : K \times (H_1 \times H_2) \to (H_1 \times H_2)$$
$$(\alpha, (u, v)) \to \alpha \cdot (u, v) = (\alpha \cdot u , \alpha \cdot v)$$

(b) $H_1 \times H_2$ es un espacio de Hilbert bajo el producto interno

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2)\rangle = \langle u_1, u_2\rangle + \langle v_1, v_2\rangle \tag{1.6.2}$$

(c) $H_1 \times H_2$ es un espacio normado si la norma es definida por

$$\|(u, v)\| = \|u\| + \|v\| \tag{1.6.3}$$

Además $H_1 \times H_2$ es completo con la norma definida en 1.6.3.

<u>En efecto:</u>

Sea $\{w_n\}$ una sucesión de Cauchy en $H_1 \times H_2$, donde $w_n = (u_n, v_n)$.

Como $\{w_n\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon)$ tal que

$$\begin{aligned} \|w_n - w_m\| &= \|(u_n, v_n) - (u_m, v_m)\| \\ &= \|(u_n - u_m , v_n - v_m)\| \\ &= \|u_n - u_m\| + \|v_n - v_m\| \\ &< \epsilon \ m, n > N(\epsilon) \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

De aquí $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son sucesiones de Cauchy en H_1 y H_2 respectivamente y convergen, ya que H_1 y H_2 son completos, digamos entonces que la sucesión $u_n \to u$ y la sucesión $v_n \to v$. Esto implica que $\{w_n\} \to w = (u, v)$, ya que cuando $m \to \infty$ de la ecuación (1.6.4) tenemos $\|w_n - w\| < \epsilon \ \forall n > N(\epsilon)$.

De esta forma $\{w_n\}$ es una sucesión de Cauchy convergente. Por lo tanto $H_1 \times H_2$ es completo

Definición 1.6.3. El **gráfico** $G(T)$ de un operador lineal T (H_1 a H_2) es definido por

$$G(T) = \{(u, Tu)/ u \in \mathrm{D}(T)\}$$

donde $G(T)$ es un subconjunto de $H_1 \times H_2$. También podemos definir el **gráfico inverso** de un operador T como

$$G'(T) = \{(Tu, u)/ u \in \mathrm{D}(T)\}$$

donde $G^{\prime}(T)$ es un subconjunto de $H_2 \times H_1$

Observación 1.6.2. Sea T un operador lineal de (H_1 a H_2).

Una sucesión $\{u_n\}$ en $\mathcal{D}(T)$ es T – *convergente* si y sólo si $\{u_n, Tu_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $(H_1 \times H_2)$.

Además T es cerrado si y sólo si $G(T)$ es cerrado en $(H_1 \times H_2)$.

Los siguientes resultados muestran en forma más precisa que subespacios vectoriales son gráficos.

Teorema 1.6.6. *Sea $M \subseteq (H_1 \times H_2)$ un subespacio vectorial. M es el gráfico de un operador T de $(H_1$ a $H_2)$ si y sólo si*

$$(\forall v \in H_2 - \{0\}) \qquad (0, v) \notin M$$

<u>**Demostración:**</u>

$\Rightarrow$] Si $M = G(T)$, entonces por la linealidad, tenemos para $v \in H_2 - \{0\}$, $Tv \neq 0$, luego $(0, v) \notin M$ como queriamos

$\Leftarrow$] Definamos un operador T de $(H_1$ a $H_2)$ de la siguiente manera

$$\mathcal{D}(T) = \{u \in H_1 / \exists v \in H_2, (u, v) \in M\}$$

Tal que $T : \mathcal{D}(T) \to H_2$ y $Tu = v$ si y sólo si $(u, v) \in M$.

Probaremos que T está bien definida.

<u>En efecto:</u>

Supongamos que (u, v_1); $(u, v_2) \in M$, pero como M es un subespacio vectorial, entonces $(u, v_1) - (u, v_2) = (0, v_1 - v_2) \in M$. Luego por la hipótesis tenemos $(0, v) \notin M$, entonces $v_1 - v_2 = 0$. De aquí tenemos que $v_1 = v_2$, es decir T está bien definida.

Ahora probaremos que T es lineal.

<u>En efecto:</u>

Supongamos que (u_1, v_1); $(u_2, v_2) \in M$, y sea $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Como M es un subespacio vectorial $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 , \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in M$, además por la definición de T , tenemos:

$$T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 Tu_1 + \lambda_2 Tu_2$$

Por lo tanto $M = G(T)$

Del teorema 1.6.6 se desprende que un subespacio vectorial de un gráfico es si mismo un gráfico. Los dos resultados siguiente trata de extensiones de gráficos.

Teorema 1.6.7. *Sea S y T dos operadores de $(H_1$ a $H_2)$. T es una extensión de S si y sólo si $G(S) \subseteq G(T)$*

<u>**Demostración:**</u>

$\Rightarrow$] Si T es una extensión de S, obviamente $G(S) \subseteq G(T)$

⇐] Si $G(S) \subseteq G(T)$, entonces para $u \in \mathcal{D}(S)$; $(u, Su) \in G(T)$

Es decir $u \in \mathcal{D}(T)$ y $Su = Tu$.

De aquí T es una extensión de S

Teorema 1.6.8. *Sea T (H_1 a H_2) un operador cerrado, y T' una extensión de T de dimensión finita, entonces T' es cerrado*

<u>**Demostración:**</u>

Como $G(T)$ es un subespacio vectorial cerrado de $H_1 \times H_2$.

Supongamos que

$$\mathcal{D}(T') = span(\mathcal{D}(T) \cup \{v_1, v_2, ..., v_n\})$$

donde $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in H_1 - \mathrm{D}(T)$. Entonces:

$$\mathcal{R}(T') = span(\mathcal{R}(T) \cup \{Tv_1, Tv_2, ..., Tv_n\})$$

De modo que $G'(T)$ es una extensión de dimensión finita de $G(T)$, y $G'(T)$ es cerrada ya que $G(T)$ es cerrada. Luego por la observación (1.6.2) T' es cerrado ya que $G'(T)$ es cerrado.

En el teorema (1.6.1) nosotros vimos que un operador acotado con dominio cerrado era cerrado. Lo contrario de este resultado es el teorema del gráfico cerrado. Antes de probar este resultado primero enuciaremos el lema siguiente

Lema 1.6.9. (***Teorema del inverso acotado***)

Sea T (X a Y) un operador lineal acotado y biyectivo entre espacios de Banach X *y* Y*. Entonces* T^{-1} *es acotado.*

Para la demostración de este lema ver Kreyszig[teorema 4.12-2. - pag 287]

Teorema 1.6.10. (***Teorema del gráfico cerrado***)

Sea T (H_1 a H_2) cerrado con dominio cerrado $\mathcal{D}(T)$. Entonces T es acotado

<u>**Demostración:**</u>

Como T es cerrado, entonces $G(T)$ es cerrado en $H_1 \times H_2$, además por hipótesis $\mathcal{D}(T)$ es cerrado en H_1. Luego por el teorema (1.2.2) $G(T)$ y $\mathcal{D}(T)$ son completos. Consideremos la aplicación $P : G(T) \to \mathrm{D}(T)$, dada por

$$P(u, Tu) = u$$

obviamente P así definida es lineal. Además P es biyectiva y acotado.

<u>En efecto:</u>

$$\|P(u, Tu)\| = \|u\| \leq \|u\| + \|Tu\| = \|(u, Tu)\|$$

Luego P es acotado

P es biyectivo, desde que existe la aplicación inversa $P^{-1} : \mathrm{D}(T) \to G(T)$ con

$$P^{-1}u = (u, Tu)$$

Como $G(T)$ y $\mathcal{D}(T)$ son completos, además P es biyectivo y acotado, luego por teorema del inverso acotado, P^{-1} es también acotado, es decir $\|P^{-1}u\| = \|(u, Tu)\| \leq k\,\|u\|$ para algún k y para todo $u \in \mathcal{D}(T)$.

Luego T es acotado ya que

$$\|Tu\| \leq \|Tu\| + \|u\| = \|(u, Tu)\| \leq k\,\|u\|$$

para todo $u \in \mathcal{D}(T)$

Corolario 1.6.11. *Sea $T \in C(H_1, H_2)$ con $R(T) = H_2$. Si T es invertible, entonces $T^{-1} \in B(H_2, H_1)$*

Ejemplo 1.6.1. *Sea $H = l^2(\mathbb{C})$ consideremos el dominio*

$$D(T) = \left\{ (\zeta_j) \in H / \ \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \mid \zeta_j \mid^2 < \infty \right\}$$

Definamos un operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \to H$, dado por

$$T(\zeta_j) = \{j\zeta_j\}$$

T no es acotada, pero tiene una inversa acotada con $\|T^{-1}\| \leq 1$.

En efecto:

1) Afirmamos que T no es acotado. En efecto:

Sea $\{u_n\} = (0, ..., 0, 1, 0, ...) \in H$, donde $\{u_n\}$ tiene ocupada la enésima posición por 1. Tomando la norma en l^2 a la sucesión $\{u_n\}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\|u_n\| &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mid \zeta_j \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-1} \mid \zeta_j \mid^2 + \sum_{j=n}^{n} \mid \zeta_j \mid^2 + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mid \zeta_j \mid^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (0 + 1 + 0)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Es decir $\|u_n\| = 1$.

Ahora por la definición de T, tenemos que $Tu_n = nu_n$, luego tomando norma resulta $\|Tu_n\| = \|n\|\,\|u_n\| = n$. Consecuentemente

$$\{\|Tu_n\|\} = \{n\} \to \infty$$

Por lo tanto T no es acotado

2) T tiene una inversa acotada $T^{-1} \leq 1$.

En efecto:

T es cerrado pues dada una sucesión $\{u_n\} \to u$, tenemos

$$\|Tu_n - Tu\| = \|T(u_n - u)\| = \|T(0)\| = 0$$

El operador T^{-1} existe, pues

$$\begin{aligned} N(T) &= \{u_n \in H/\ Tu_n = 0\} \\ &= \{u_n \in H/nu_n = 0\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Además $R(T) = H,$ es decir T es sobreyectiva y como T es cerrado, luego por el corolario (1.6.11), tenemos la inversa acotada $T^{-1} : H \to H,$ dada por $T^{-1}(\zeta_j) = \{\frac{1}{j}\,\zeta_j\}$, además

$$\left\|T^{-1}(\zeta_j)\right\| = \left\|\frac{1}{j}\ \zeta_j\right\| = \frac{1}{j}\ \ \|\zeta_j\| \tag{1.6.5}$$

Pero también tenemos

$$\left\|T^{-1}(\zeta_j)\right\| = \left\|T^{-1}\right\| \|\zeta_j\| \tag{1.6.6}$$

Igualando las expresiones (1.6.5) y (1.6.6) resulta

$$\left\|T^{-1}\right\| \|\zeta_j\| = \frac{1}{j}\ \ \|\zeta_j\|$$

De aquí, tenemos

$$\left\|T^{-1}\right\| = \frac{1}{j} \leq 1$$

Como queriamos.

1.6.3 Operadores cerrables

Definición 1.6.4. El operador $T(H_1$ a $H_2)$ es **cerrable**, si T tiene una extensión cerrada

Por la observación (1.6.2) y por el teorema (1.6.7), se sigue que:

T es cerrable si y sólo si $G(T)$ es un subespacio vectorial de un gráfico cerrado.

Esto nos lleva al siguiente criterio de cerrabilidad

Teorema 1.6.12. *$T(H_1$ a $H_2)$ es cerrable si y sólo si $\overline{G(T)}$ es un gráfico*

Demostración:

⇒] Como T es cerrable, entonces $G(T)$ es un subespacio vectorial de un gráfico cerrado M. Luego se deduce que $\overline{G(T)} \subseteq M$, siendo M el conjunto cerrado más pequeño que contenga a $G(T)$.

Luego $\overline{G(T)}$ es un gráfico.

⇐] si $\overline{G(T)}$ es un grafico de T, obviamente T es cerrable.

Observación 1.6.3. El teorema (1.6.6) nos lleva al siguiente criterio:

T es cerrable si y sólo si para toda sucesión $\{u_n\}$ en $\mathcal{D}(T)$

$$\textit{Si } \{u_n\} \to 0 \textit{ y } \{Tu_n\} \to v, \textit{ entonces } v = 0 \tag{1.6.7}$$

Definición 1.6.5. Si T es cerrable, entonces existe un operador cerrado $\widetilde{T}$ con $G(\widetilde{T}) = \overline{G(T)}$.

$\widetilde{T}$ es llamado la **clausura** de T, y es la extensión cerrada más pequeña de T

Observación 1.6.4.

$u \in \mathcal{D}(\widetilde{T}) \Leftrightarrow (u, \widetilde{T}u) \in \overline{G(T)}$, o también

$u \in \mathrm{D}(\widetilde{T}) \Leftrightarrow \mathrm{Si}\ \exists \{u_n\} \in \mathcal{D}(T)$, T – *convergente a u*, entonces $\{Tu_n\} \to Tu$.

Definición 1.6.6. Sea T un operador cerrado. Si S es un operador cerrable tal que $\overline{S} = T$, entonces el dominio $\mathcal{D}(S)$ es llamado un **núcleo** de T

Más generalmente, un subespacio vectorial M de $\mathcal{D}(T)$ es un núcleo de T si $\{(u, Tu)/ u \in M\}$ es denso en $G(T)$

Observación 1.6.5. Si M es un núcleo de T, entonces M es denso en $\mathcal{D}(T)$.

<u>En efecto:</u>

Sea $v \in \mathcal{D}(T)$, entonces existe una sucesión $\{u_n\} \in M$ tal que $\{u_n, Tu_n\} \to \{v, Tv\}$, y luego tenemos que $\{u_n\} \to v$

Observación 1.6.6. Si T es cerrado y acotado, entonces algún subespacio D de $\mathcal{D}(T)$ denso en $\mathcal{D}(T)$, es un núcleo de T

<u>En efecto:</u>

Como T es cerrado y acotado, luego por el teorema 1.6.1 $\mathcal{D}(T)$ es cerrado, entonces como $\mathcal{D}(T)$ es cerrado para todo $u \in \mathcal{D}(T)$, existe una sucesión $\{u_n\} \in D$ tal que $\{u_n\} \to u$. Luego tenemos

$$\|Tu_n - Tu\| \leq \|T\| \, \|u_n - u\| \to 0$$

es decir $\{Tu_n\} \to Tu$, de modo que $\{u_n, Tu_n\} \to \{u, Tu\}$

De aquí D es un núcleo de T.

Teorema 1.6.13. *Todo operador acotado es cerrable*

<u>Demostración:</u>

Sea T un operador de H_1 a H_2, y sea $u \in \overline{\mathcal{D}(T)}$. Si $\{u_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(T)$, convergente a u. Entonces $\{Tu_n\}$ es de Cauchy en H_2.

En efecto:

$$\|Tu_n - Tu_m\| \le \|T\| \, \|u_n - u\| \to 0$$

Luego $\{Tu_n\}$ es de Cauchy, así pues $\{Tu_n\}$ converge a algún elemento $T'u$ de H_2. Definiremos un operador T' y probaremos que T' es una extensión cerrada de T.

En efecto:

Sea $T' : \overline{\mathcal{D}(T)} \to H_2$, veamos que T' está bien definida.

Sean $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ dos sucesiones en $\mathcal{D}(T)$, convergentes a $u \in \overline{\mathcal{D}(T)}$, entonces $\{u_n - v_n\} \to 0$ y como T es acotado $\{Tu_n - Tv_n\} \to 0$. Es decir

$$\lim Tu_n = \lim Tv_n$$

Luego T' está bien definido.

T' es una extensión de T, ya que si $u \in \mathcal{D}(T)$, entonces la sucesión constante $\{u\} \to u$ en $\mathcal{D}(T)$.

T' es un operador lineal.

En efecto:

Sean las sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ en $\mathcal{D}(T)$, convergentes a u y v en H_1 respectivamente y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, luego tenemos:

$$\begin{aligned} T'(\alpha u + \beta v) &= \lim(T(\alpha u_n + \beta v_n)) \\ &= \lim(\alpha T u_n + \beta T v_n) \\ &= \alpha \lim Tu_n + \beta \lim Tv_n \\ &= \alpha T' u + \beta T' v \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

Luego T' es lineal.

T' es cerrado, ya que si tomamos una sucesión $\{u_n\}$ en $\overline{\mathcal{D}(T)}$, convergente a $u \in \overline{\mathcal{D}(T)}$, entonces tenemos $(u_n, T'u_n) \to (u, Tu)$. Por lo tanto T cerrable.

Teorema 1.6.14. *Si T (H a H) es densamente definido, y $w(T) \neq \mathbb{C}$, entonces T es cerrable*

Demostración:

Por el teorema (1.5.1) $w(T)$ es convexo, y como $w(T) \neq \mathbb{C}$, luego $w(T)$ está contenido en un semiplano. Considerando $\alpha T + \beta I$ en lugar de T, nosotros podemos asumir sin pérdida de generalidad que $w(T)$ esta contenido en el semiplano derecho, es decir para todo $u \in \mathcal{D}(T)$

$$\mathrm{Re}\langle Tu, u\rangle \ge 0$$

Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $\mathcal{D}(T)$ tal que $\{u_n\} \to 0$ y $\{Tu_n\} \to v$.

Probaremos que $v = 0$.

<u>En efecto:</u>

Sea $w \in \mathcal{D}(T)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathrm{Re}\langle T(u_n + w), u_n + w\rangle \\ &= \mathrm{Re}\langle T u_n + Tw, u_n + w\rangle \\ &= \mathrm{Re}(\langle T u_n, u_n + w\rangle + \langle Tw, u_n + w\rangle) \end{aligned}$$

haciendo $n \to \infty$, tenemos:

$$0 \leq \mathrm{Re}\langle v, w\rangle + \mathrm{Re}\langle T w, w\rangle$$

hagamos $w = \alpha x$ donde $\alpha > 0$ y reemplazando tenemos

$$0 \leq \mathrm{Re}\langle v, \alpha x\rangle + \mathrm{Re}\langle T \alpha x, \alpha x\rangle = \alpha\ \mathrm{Re}\langle v, x\rangle + \alpha^2\ \mathrm{Re}\langle T x, x\rangle$$

Luego $0 \leq \mathrm{Re}\langle v, \alpha x\rangle + \alpha\ \mathrm{Re}\langle T x, x\rangle$ y como $\mathrm{Re}\langle T x, x\rangle \geq 0$, entonces $0 \leq \mathrm{Re}\langle v, \alpha x\rangle$ y de aquí $0 \leq \mathrm{Re}\langle v, w\rangle$.

Desde que $w \in \mathcal{D}(T)$ fue elegido arbitrariamente, y $\mathcal{D}(T)$ es denso en H, se sigue que $v = 0$.

De aquí por criterio de cerrabilidad (1.6.7) y el teorema 1.6.6 T es cerrable.

Ejemplo 1.6.2. *Sea* $H = L^2[0, 1]$

$$L^2[0,1] = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{C} / \quad \int_0^1 \mid f \mid^2 < \infty \right\}$$

Consideremos como dominio el espacio de las funciones continuas sobre $[0,1]$ $\mathcal{D}(T) = C[0, 1] \subseteq H$. *Sea el operador* $T : \mathcal{D}(T) \to H$ *dado por*

$$Tx(t) = x(0)$$

Probaremos que T no es cerrable.

<u>**Demostración:**</u>

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathcal{D}(T)$ dada por $x_n(t) = (1 - t)^n$. Entonces

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \int_0^1 (1-t)^{2n} dt \\ &= -\frac{1}{2n+1}[(1-t)^{2n+1}]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2n+1}[(1-1)^{2n+1} - (1-0)^{2n+1}] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2n+1}$$

Ahora si $n \to \infty$, tenemos

$$\{\|x_n\|\} = \{\frac{1}{2n+1}\} \to 0 \tag{1.6.9}$$

Ahora como $Tx(t) = x(0)$ y $x_n(t) = (1-t)^n$, luego tenemos:
$Tx_n(t) = x_n(0) = (1-0)^n = 1$. Es decir tenemos

$$\{Tx_n\} = \{1\} \tag{1.6.10}$$

Pero por la observación (1.6.3), si $\{\|x_n\|\} \to 0$, entonces $\{Tx_n\} \to 0$. Lo obtenido en (1.6.9) y (1.6.10) contradice a esta observación.

Por lo tanto T no es cerrable.

Ejemplo 1.6.3. *Sea* $H = l^2(\mathbb{C})$ *consideremos el dominio*

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ (\zeta_j) \in H / \quad \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \mid \zeta_j \mid^2 < \infty \right\}$$

Definamos un operador lineal $T : \mathcal{D}(T) \to H$, *dado por*

$$T(\zeta_j) = \{j\zeta_j\}$$

Consideremos la restricción, T' *de* T, *con dominio*

$$\mathcal{D}' = \{(\zeta_j) \in H/\text{solo un número finito de } \zeta_j, \text{ son} \neq 0\}$$

Entonces T' no es cerrado pero s*u* extensión T es cerrada (Ejemplo 1.6.1)

<u>**Demostración:**</u>

Tomaremos una sucesión en $\mathcal{D}'$ y probaremos que no converge en $\mathcal{D}'$.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathcal{D}'$ dada por:

$$x_1 = \{1, 0, 0, ...\}$$
$$x_2 = \{1, \frac{1}{4}, 0, ...\}$$
$$\vdots$$
$$x_n = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, ..., \frac{1}{n^2}, 0, ...\}$$

Entonces

$$\{x_n\} \to \{\frac{1}{j^2}\} \notin \mathcal{D}'$$

Sin embargo por la definición de T, tenemos:

$$\{Tx_n\} = \{nx_n\}$$
$$= \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; ...; \frac{1}{n}; ...\}$$

Luego:
$\{Tx_n\} \rightarrow \{\frac{1}{j}\} \in H$

Por lo tanto T' no es cerrado, aunque tiene una extensión cerrada (ejemplo 1.6.1)

1.6.4 Operadores adjuntos

Dado un operador T (H_1 a H_2), nosotros podemos asociar el operador adjunto de (H_2 a H_1) que está estrechamente relacionado a T. Estos operadores son sumamente útiles, y nos llevan a las importantes nociones de simetría y autoadjuntos.

Definición 1.6.7. Los operadores T (H_1 a H_2) y S(H_2 a H_1) se dice que son adjuntos si $\forall u \in \mathcal{D}(T)$ y $v \in \mathcal{D}(S)$. Tenemos

$$\langle Sv, u\rangle = \langle v, Tu\rangle \tag{1.6.11}$$

En general, dado un operador T, existiran muchos operadores adjuntos a T; pero si T es densamente definido, existe un único operador maximal T^* adjunto a T. Esto significa que T^* es adjunto a T mientras que cualquier otro operador S adjunto a T será una restricción de T^*.

T^* es llamado el **operador adjunto** a T

Observación 1.6.7. Si T (H_1 a H_2) es densamente definido sobre H_1, entonces existe un operador maximal T^* (H_2 a H_1) adjunto a T tal que

$$T^*v = w$$

con dominio

$$\mathcal{D}(T^*) = \{v \in H_2 / \exists w \in H_1; \forall u \in \mathcal{D}(T)\ \langle v, Tu\rangle = \langle w, u\rangle\} \tag{1.6.12}$$

Probaremos que T^* está bien definida.

<u>En efecto:</u>

Sean w_1 y $w_2 \in H_1$ satisfaciendo (1.6.12) , entonces tenemos:

$$\langle v, Tu\rangle = \langle w_1, u\rangle \tag{1.6.13}$$
$$\langle v, Tu\rangle = \langle w_2, u\rangle \tag{1.6.14}$$

Igualando (1.6.13) y (1.6.14) resulta

$$\langle w_1, u\rangle = \langle w_2, u\rangle$$
$$\langle w_1 - w_2, u\rangle = 0$$

como $\mathcal{D}(T)$ es denso en H_1, entonces $w_1 - w_2 = 0$. Luego $w_1 = w_2$, es decir $w \in H_1$ está únicamente determinado por v. De aquí T^*: $\mathcal{D}(T^*) \to H_1$ dado por $T^*v = w$ está bien definido.

Además T^* es un operador adjunto maximal a T

Teorema 1.6.15. *Si T (H_1 a H_2) es densamente definido, entonces T^* es cerrado.*

Demostración:

Si S es adjunto a T, entonces tenemos:

$$\langle Sv, u\rangle = \langle v, Tu\rangle$$
$$\langle v, Tu\rangle - \langle Sv, u\rangle = 0$$
$$\langle -Sv, u\rangle + \langle v, Tu\rangle = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{D}(T) \text{ y } v \in \mathcal{D}(S)$$

Luego por la ecuación (1.6.2), tenemos:

$$\langle(-Sv, v), (u, Tu)\rangle = 0$$

Es decir

$$G(T) \perp G'(-S)$$

En particular como T^* es maximal, tenemos que $G'(-T^*) = G(T)^{\perp}$. Además $G(T)^{\perp}$ es cerrado, entonces $G'(-T^*)$ es cerrado. Luego T^* es cerrado como queriamos.

Observación 1.6.8. De la demostración del teorema 1.6.15 podemos afirmar que:

T y S son adjuntos si y sólo si el gráfico de T y el gráfico inverso de $-S$ son ortogonales. Es decir

$$G(T) \perp G'(-S)$$

En forma particular el gráfico inverso de $-T^*$ es ortogonal al gráfico de T

$$G(T) \perp G'(-T^*)$$

Desde que T es densamente definida, esto garantiza que $G(T)^{\perp}$ es efectivamente un gráfico inverso ya que el ortogonal es cerrado.

$$G(T) = G'(-T^*)^{\perp}$$

En efecto:

Si S y T son adjuntos y T es cerrable, entonces S y $\tilde{T}$ son también adjuntos.

Si T es cerrable, entonces existe un operador cerrado $\tilde{T}$ tal que

$$G(\tilde{T}) = \overline{G(T)}$$

Sea $(u, \tilde{T}u) \in \overline{G(T)}$, entonces existe una sucesión $\{u_n, Tu_n\} \in G(T)$ tal que $\{u_n, Tu_n\} \to (u, \tilde{T}_u)$

Ahora como S y T son adjuntos, entonces dado $(-Sv, v) \in G'(-S)$, tenemos

$$\langle(-Sv, v), (u_n, Tu_n)\rangle = 0$$

Haciendo $n \to \infty$ y usando la continuidad del producto interno, tenemos:

$$\langle(-Sv, v), (u, \tilde{T}u)\rangle = 0$$

De aquí tenemos que $\overline{G(T)} \perp G'(-S)$.

Por lo tanto S y $\tilde{T}$ son adjuntos.

Teorema 1.6.16. *Si T (H_1 a H_2) es densamente definida y tiene una extensión T', entonces T^* es una extensión de T'^**

Observación 1.6.9. Si T es densamente definido, entonces $N(T^*) = R(T)^\perp$

En efecto:

Sabemos que el espacio nulo de T viene dado por:

$$N(T^*) = \{v \in D(T^*) / T^*v = 0\}$$

Sea un elemento arbitrario $v \in N(T^*)$ y $u \in \mathcal{R}(T)$, así mismo tomemos $w \in \mathcal{D}(T)$, tal que

$$Tw = u \tag{1.6.15}$$

Ahora consideremos el producto interno de v y u y usando (1.6.15), tenemos

$$\langle v, u\rangle = \langle v, Tw\rangle = \langle T^*v, w\rangle = \langle 0, w\rangle = 0 \tag{1.6.16}$$

De la relación (1.6.16) se obtiene

$$\langle v, u\rangle = 0$$

Es decir $v \perp u = 0$. Por lo que se deduce

$$\mathrm{N}(T^*) \perp \mathcal{R}(T)$$

Supongamos ahora que para algún $v \in H_2$, tenemos

$$\langle v, u\rangle = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{R}(T)$$

Entonces tomemos $w \in \mathcal{D}(T)$ de tal forma que

$$\langle v, Tw\rangle = 0 = \langle 0, w\rangle \tag{1.6.17}$$

Podemos escribir (1.6.17) de la siguiente manera

$$\langle v, Tw\rangle = \langle T^*v, w\rangle = \langle 0, w\rangle$$

Luego $v \in \mathcal{D}(T^*)$ y $T^*v = 0$. Es decir $v \in \mathcal{N}(T^*)$.

Por lo tanto $\mathrm{N}(T^*) = \mathrm{R}(T)^{\perp}$

Teorema 1.6.17. *Sea T (H_1 a H_2) y S (H_2 a H_1) adjuntos. Si cualquiera de los dos o S o T es densamente definido, entonces el otro es cerrable*

Demostración:

Si T es densamente definido, entonces T^* existe y es cerrado (teorema 1.6.15) además

*T** ⊃ *S*. De aquí *S* es cerrable.

Si *S* es densamente definido, entonces $G'(-S)^{\perp}$ es un gráfico (observación 1.6.8)). Como $G(T) \perp G'(-S)$, luego $G(T) \subseteq G'(-S)^{\perp}$. De forma similar esto es cierto para $\overline{G(T)}$.

Por lo tanto $\overline{G(T)}$ es un gráfico y T es cerrable.

Teorema 1.6.18. *Si T (H_1 a H_2) es cerrable y densamente definido, entonces T* es cerrado y densamente definido y*

$$T^{**} = \tilde{T}$$

Demostración:

Si T es densamente definido, entonces T^* es cerrado (teorema 1.6.15), si T es cerrable, entonces $\overline{G(T)}$ es un gráfico (teorema 1.6.12) y existe un operador cerrado $\tilde{T}$ tal que

$$G(\tilde{T}) = \overline{G(T)} \tag{1.6.18}$$

además como $G(T)^{\perp}$ es cerrado, entonces $G(T)^{\perp\perp}$ también es cerrado, luego la expresión 1.6.18 se puede escribir así:

$$G(T)^{\perp\perp} = G(\tilde{T}) = \overline{G(T)}$$

Ahora por la observación (1.6.8), tenemos:

$$G(T) = G(\tilde{T}) = G'(-T^{*})^{\perp} \tag{1.6.19}$$

Ahora probaremos que T^* es densamente definido.

Asumamos que T^* no es densamente definido, entonces $\exists 0 \neq v \in H_2$ tal que $v \perp \mathcal{D}(T^{*}) \forall u \in \mathcal{D}(T^{*})$, entonces tenemos:

$$\begin{gathered}\langle v, u\rangle = 0\\ \langle 0, -Tu^{*}\rangle + \langle v, u\rangle = 0\\ \langle (0, v), (-Tu^{*}, u)\rangle = 0\end{gathered}$$

De aquí

$$(0, v) \in G'(-T^{*})^{\perp} = G(\tilde{T}) \tag{1.6.20}$$

Ahora teniendo en cuenta el (teorema 1.6.6) lo obtenido en (1.6.20)nos dice que $G(\tilde{T})$ no es un gráfico, contradiciendo lo obtenido en (1.6.18). Consecuentemente T^{*} es densamente definido.

Ahora como T^* es densamente definido, entonces existe T^{**} y es definido como un operador de (H_1 a H_2) y por la observación(1.6.8)

$$G(T^{**}) = G'(-T^{*})^{\perp} = G(\tilde{T}) \tag{1.6.21}$$

Luego de la ecuación (1.6.21) tenemos $G(T^{**}) = G(\tilde{T})$, es decir como los gráficos son iguales concluimos que $T^{**} = \tilde{T}$

Observación 1.6.10. Por la observación (1.6.9) y el teorema (1.6.18), tenemos que si T es cerrado

$$\mathcal{N}(T) = N(T^{**}) = \mathcal{R}(T^{*})^{\perp} \tag{1.6.22}$$

Además $\mathcal{R}(T^{*})$ es cerrado si y sólo si $\mathcal{R}(T)$ es cerrado, en este caso tenemos:

$$\begin{gathered}\mathcal{R}(T) = N(T^{*})^{\perp}\\ \mathcal{R}(T^{*}) = \mathcal{N}(T)^{\perp}\end{gathered} \tag{1.6.23}$$

Por la observación (1.6.9), tenemos:

$$H_1 = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T^*)$$
$$H_2 = \mathcal{N}(T^*) \oplus \mathcal{R}(T) \qquad (1.6.24)$$

Teorema 1.6.19. *Sea $T \in C(H_1, H_2)$ densamente definida. Si T es invertible, y $T^{-1} \in B(H_2, H_1)$, entonces T^* es invertible y $T^{*-1} \in B(H_1, H_2)$ con*

$$T^{*-1} = (T^{-1})^* \qquad (1.6.25)$$

Reciprocamente, si T^* es invertible, y $T^{*-1} \in B(H_1, H_2)$, entonces T es invertible, $T^{-1} \in B(H_2, H_1)$ y la ecuación (1.6.25) se cumple.

Demostración:

i) Si $T^{-1} \in B(H_2, H_1)$, entonces su adjunto $T^{-1*} \in B(H_1, H_2)$ tal que $\|T^{-1}\| = \|(T^{-1})^*\|$ (teorema 3.9-2 Kreyszig). Probaremos que $T^{*-1} = (T^{-1})^*$.

En efecto:

Sea $v \in \mathcal{D}(T^*)$ y $w \in H_2$, entonces

$$\begin{aligned} \langle (T^{-1})^* T^* v, w\rangle &= \langle T^* v, T^{-1}) w\rangle \\ &= \langle v, TT^{-1} w\rangle \\ &= \langle v, w\rangle \end{aligned}$$

De este modo:

$$(T^{-1})^* T^* v = v \qquad (1.6.26)$$

De forma similar sea $u \in \mathcal{D}(T)$ y $f \in H_1$, entonces:

$$\begin{aligned} \langle T^*(T^{-1})^* u, f\rangle &= \langle (T^{-1})^* u, Tf\rangle \\ &= \langle u, f\rangle \end{aligned}$$

De este modo

$$T^*(T^{-1})^* u = u \qquad (1.6.27)$$

De la relación (1.6.26) y (1.6.27) se demuestra que $T^{*-1} = (T^{-1})^*$

II) Reciprocamente, si $T^{*-1} \in B(H_1, H_2)$ entonces $\forall u \in H_1$ y $v \in \mathrm{D}(T)$. Tenemos

$$\begin{aligned} \langle T^{*-1}, Tv\rangle &= \langle T^* T^{*-1} u, T^* Tv\rangle \\ &= \langle u, v\rangle \end{aligned} \qquad (1.6.28)$$

Sabiendo que $\|u\|2 = \langle u, u \rangle$, además usando (1.6.28) tenemos $\forall u \neq 0 \in \mathcal{D}(T)$

$$\begin{aligned} \|u\| &= \frac{1}{\|u\|}\langle u, u\rangle \\ &= \langle \frac{1}{\|u\|}u, u\rangle \\ &= \langle T^{*-1}\frac{u}{\|u\|}, Tu\rangle && \text{por (1.6.28)} \\ &\leq |\langle T^{*-1}\frac{u}{\|u\|}, Tu\rangle| \\ &\leq \left\|T^{*-1}\frac{u}{\|u\|}\right\| \|Tu\| && \text{desigualdad de Schwarz} \\ &\leq \left\|T^{*-1}\right\| \|T\| \|u\| \end{aligned}$$

De la última expresión tenemos que T es invertible y $\|T^{-1}\| \leq T^{*-1}$

Además como $G(T)$ es cerrado, entonces $G(T^{-1})$ es cerrado y por la observación (1.6.2), T^{-1} es cerrado, así pues T^{-1} es acotado.

Ahora por el teorema (1.6.1) como T^{-1} es acotado y T^{-1} es cerrado, entonces $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$ es cerrado.

Para demostrar que $T^{-1} \in B(H_2, H_1)$ basta probar que $R(T) = H_2$ para ello es suficiente probar que ningún $v \neq 0 \in H_2$ es ortogonal a $R(T)$.

En efecto:

Si $v \in H_2$ con $T^*v = 0$ entonces $v = 0$ (desde que T^* es invertible) y por la observación (1.6.9) tenemos

$$\mathcal{N}(T^*) = \mathcal{R}(T)^{\perp}$$

Como queriamos.

1.6.5 Operadores simétricos y autoadjuntos

Antes de presentar la noción de operador autoadjunto para operadores lineales densamente definidos en H, el cual es muy importante en la teoría como en las aplicaciones, introduciremos previamente el concepto de operador simétrico.

Trabajaremos con operadores de H en H, es decir $H_1 = H_2 = H$

Definición 1.6.8. El operador $T(H$ a $H)$ es un **operador simétrico**, si T es densamente definido en H, y para todo $u, v \in \mathcal{D}(T)$ se cumple

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$$

Ejemplo 1.6.4. (***Operador Multiplicación***)

Sea el operador multiplicación T

$$T : \mathcal{D}(T) \to L^2(-\infty, +\infty)$$
$$u(x) \to Tu(x) = xu(x)$$

donde $\mathcal{D}(T) \subset L^2(-\infty, +\infty)$ *y* $x \in \mathbb{R}$. *El dominio de* T *está dado por*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(T) &= \{u \in L^2(-\infty, +\infty)/ \;\; xu \in L^2(-\infty, +\infty)\} \\ &= \{u \in L^2(-\infty, +\infty)/ \;\; \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |u(x)|^2 dx < \infty\}\end{aligned}$$

Se probará que el operador multiplicación

(*a*) *No es acotado*

(*b*) *Es simétrico*

__**Demostración:**__

(**a**) Sea la sucesión (u_n) en $\mathcal{D}(T)$ tal que

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 \quad , \quad si \;\; x \in [n, n+1) \\ 0 \quad , \quad si \;\; x \notin [n, n+1) \end{cases} \tag{1.6.29}$$

Luego por (1.6.29), tenemos

$$\|u_n\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x)|^2 dt = \int_n^{n+1} dx = 1$$

Entonces

$$\|u_n\| = 1 \tag{1.630}$$

Además

$$\begin{aligned}\|Tu_n\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |Tu_n(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |xu_n(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |u_n(x)|^2 dx \\ &= \int_n^{n+1} x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}[(n+1)^3 - n^3] \\ &= n^2 + n + \frac{1}{3} \\ &> n^2\end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\|Tu_n\|^2 > n^2$$

$$\|Tu_n\|^2 > n^2$$

$$\|Tu_n\| > n$$

$$\frac{\|Tu_n\|}{\|u_n\|} > n \qquad \text{pues} \quad \|u_n\| = 1$$

$$\|T\| > n \qquad n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto el operador T no es acotado

(**b**) Puesto que $x \in \mathbb{R}$, entonces $x = \bar{x}$. Luego para todo $u, v \in D(T)$ se tiene:

$$\begin{aligned}\langle Tu, v\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} Tu(x)\overline{v(x)}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xu(x)\overline{v(x)}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{xv(x)}dx \\ &= \langle u, Tv\rangle\end{aligned}$$

Por lo tanto T es un operador simétrico

Lema 1.6.20. *Un operador lineal T densamente definido sobre un espacio de Hilbert complejo es simétrico si y solo si $T \subset T^*$*

Demostración:

$\Rightarrow$] Si el operador lineal T es simétrico, entonces

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle \ \forall u, v \in \mathcal{D}(T) \tag{1.6.31}$$

Puesto que T es densamente definido, entonces el operador adjunto T^* existe, y se tiene

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle \ \forall u \in \mathcal{D}(T) \tag{1.6.32}$$

Igualando las relaciones (1.6.31) y (1.6.32), tenemos

$$\begin{gathered}\langle u, Tv\rangle = \langle u, T^*v\rangle \\ \langle u, Tv - T^*v\rangle = 0 \qquad \forall u \in \mathcal{D}(T) \\ (Tv - T^*v) \in \mathrm{D}(T)^\perp\end{gathered}$$

Como $\mathcal{D}(T)$ es denso en H, entonces $\mathcal{D}(T)^\perp = \{0\}$. Luego

$$\begin{gathered}Tv - T^*v = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{D}(T) \\ Tv = T^*v \qquad \forall v \in \mathcal{D}(T)\end{gathered}$$

Así, tenemos

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*) \qquad y \qquad T^*|_{\mathcal{D}(T)} = T$$

Por lo tanto $T \subset T^*$

$\Leftarrow$] Si $T \subset T^*$, entonces el operador T es simétrico.

Por hipotesis $T \subset T^*$. Entonces

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*) \qquad y \qquad T^*|_{\mathcal{D}(T)} = T \tag{1.6.33}$$

Por definición de operador adjunto, para todo $u \in \mathcal{D}(T)$ y todo $v \in \mathcal{D}(T^*)$, tenemos

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle \tag{1.6.34}$$

Por la relación (1.6.33)

$$T^*v = Tv \qquad \forall v \in \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*) \tag{1.6.35}$$

Reemplazando (1.6.35) en (1.6.34), obtenemos

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle \qquad \forall u, v \in \mathcal{D}(T)$$

Por lo tanto T es simétrico

Definición 1.6.9. Sea $T : \mathcal{D}(T) \to H$ un operador densamente definido en $H,$ se dice que T es un **operador autoadjunto** si

$$T = T^*$$

Observación 1.6.11. Todo operador lineal autoadjunto es simétrico, sin embargo un operador simétrico no necesariamente es autoadjunto, la razón es que T^* puede ser una extensión lineal propia de T, es decir $\mathcal{D}(T) \neq \mathcal{D}(T^*)$, y obviamente, esto no puede ocurrir si $\mathcal{D}(T)$ es todo $H.$

Ejemplo 1.6.5. (***Operador Multiplicación***)

Sea el operador multiplicación T

$$T : \mathcal{D}(T) \to L^2(-\infty, +\infty)$$
$$u(x) \to Tu(x) = xu(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

es un operador lineal autoadjunto

Demostración:

Como el operador multiplicacion es simétrico, entonces $T \subset T^*$ (lema 1.6.20). Para probar que T es autoajunto faltaria probar que $T^* \subset T$, para ello es suficiente probar que $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T)$, es decir debemos elegir un $v \in \mathcal{D}(T^*)$, y probar que $v \in \mathcal{D}(T)$.

Sea $v \in \mathcal{D}(T^*)$, elegido arbitrariamente. Entonces:

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^*v\rangle \qquad \forall u \in \mathcal{D}(T)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Tu(x)\overline{v(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{T^*v(x)}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xu(x)\overline{v(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{T^*v(x)}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{xv(x)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{T^*v(x)}dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{xv(x)}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\overline{T^*v(x)}dx = 0$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)[\ \overline{xv(x)} - \overline{T^*v(x)}\ ]dx = 0 \tag{1.6.36}$$

Puesto que (1.6.36) se verifica para toda $x \in \mathcal{D}(T)$, consideremos:

$$u(x) = \begin{cases} xv(x) - T^*v(x), & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 0, & \text{si} \quad x \notin [a,b] \end{cases} \tag{1.6.37}$$

Ahora reemplazando (1.6.37) en (1.6.36), tenemos:

$$\int_a^b |xv(x) - T^*v(x)|^2 dx = 0$$

De aquí, se tiene que $xv(x) - T^*v(x) = 0$ en $[a, b]$. Luego $xv(x) = T^*v(x)$ en $[a, b]$. Pero como $Tv(x) = xv(x) = T^*v(x)$, se deduce que

$$Tv(x) = T^*v(x)$$

Desde que el intervalo $[a, b]$ fue arbitrario, esto muestra que $v \in \mathcal{D}(T)$, es decir, $v(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$ y $Tv = T^*v \in L_2(M)$.

Con esto queda demostrado que

$$\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(T) \qquad T|_{\mathcal{D}(T^*)} = T^*$$

Es decir $T^* \subset T$

Por lo tanto $T = T^*$

1.7 Semiacotaciones, operadores acretive y sectoriales

Semiacotaciones y acretividad son propiedades de operadores relacionados con su rango numérico. Semiacotaciones se refieRe a semiacotaciones del rango numérico de operadores simétricos (contenidos en $\mathbb{R}$). Acretividad (y otras nociones relacionadas), están estrechamente ligadas con semiacotaciones, con la diferencia que esta noción nos sirve para operadores más generales, es decir para operadores que no sean necesariamente simétricos.

1.7.1 Operadores semiacotados

Un operador simétrico $T\,(H$ a $H)$ se dice que es **acotado inferiormente** si el rango numérico $w(T)$ ($\subseteq \mathbb{R}$) es acotado inferiormente. Es decir si $\forall u \in \mathcal{D}(T)$, y $\gamma \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\langle Tu,\, u\rangle \geq \gamma\langle u,\, u\rangle$$

En este caso se puede escribir $T \geq \gamma$. El mayor número γ con esta propiedad es llamado **cota inferior** de T. Similarmente se puede definir acotado superiormente y cota superior.

Un operador simétrico acotado inferiormente (o superiormente) se dice que es semiacotado

***Observació*n** 1.7.1. Si $T\,(H$ a $H)$ es autoadjunto, entonces T es acotado inferiormente (con cota inferior γ_T) si y sólo si $\sigma(T)$ es acotado inferiormente (con cota γ_σ)

Ejemplo 1.7.1. *Sea $H = l^2(\mathbb{C})$, y sea*

$$\mathcal{D}(T) = \left\{ (\zeta_j) \in H \ / \ \sum_{j=1}^{\infty} j^2 |\ \zeta_j\ |^2 < \infty \right\}$$

Se define $T : \mathcal{D}(T) \to H$ por $T\,(\zeta_j) = (j\zeta_j)$. Entonces T es acotado inferiormente.

<u>**Demostración:**</u>

Sea $(\zeta_j) \in \mathcal{D}(T)$, enonces

$$\begin{aligned}
\langle T(\zeta_j), (\zeta_j)\rangle &= \sum_{j=1}^{\infty} T(\zeta_j)\overline{\zeta_j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j\zeta_j\overline{\zeta_j} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j\|\zeta_j\|^2 \\
&\geq \sum_{j=1}^{\infty} \|\zeta_j\|^2 \\
&= \|(\zeta_j)\|^2
\end{aligned}$$

$$= \langle(\zeta_j)(\zeta_j)\rangle$$

Es decir $\langle T(\zeta_j), (\zeta_j)\rangle \geq \langle(\zeta_j)(\zeta_j)\rangle$. Por lo tanto T es acotado inferiormente.

1.7.2 Operadores acretive

Acretividad es una noción similar a la de semiacotado, con la diferencia que esta es aplicable a cualquier operador.

Definición 1.7.1. Un operador $T(H$ a $H)$, se dice que es **acretive** si el rango numérico $\mathrm{w}(T)$ está contenido en el semiplano derecho.

Es decir $\forall u \in \mathcal{D}(T)$

$$\operatorname{Re}\langle Tu, u\rangle \geq 0$$

Definición 1.7.2. Un operador $T(H$ a $H)$ se dice que es **m-acretive** si para $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, se tiene que $\lambda \in \rho(T)$, y

$$\begin{cases} (T+\lambda I)^{-1} & \in \; B(H) \\ \|(T+\lambda I)^{-1}\| & \leq \; (\operatorname{Re}\lambda)^{-1} \end{cases} \tag{1.7.1}$$

Teorema 1.7.1. *Un operador m-acretive $T(H$ a $H)$ es acretive, y no tiene la propiedad de extensión acretive.*

<u>Demostración:</u>

i) Si T es un operador m-acretive, entonces para $\alpha > 0$, tenemos

$$(T+\alpha I)^{-1} \in B(H)$$
$$\|(T+\alpha I)^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$$

Luego para todo $u \in \mathcal{D}(T)$

$$\|u\| \leq \alpha^{-1}\, \|(T+\alpha I)u\|$$

Elevando al cuadrado a ambos miembros, resulta

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq \alpha^{-2}\, \|Tu+\alpha u\|^2 \\ &= \alpha^{-2}\langle Tu+\alpha u, Tu+\alpha u\rangle \\ &= \alpha^{-2}(\|Tu\|^2 + \langle Tu, \alpha u\rangle + \langle \alpha u, Tu\rangle + \|\alpha u\|^2) \\ &= \alpha^{-2}(\|Tu\|^2 + 2\alpha\operatorname{Re}\langle Tu, u\rangle + \alpha^2\, \|u\|^2) \end{aligned}$$

$$= \alpha^{-2} \|Tu\|^2 + 2\alpha^{-1} \operatorname{Re}\langle Tu, u\rangle + \|u\|^2$$

Luego

$$\|u\|^2 \leq \alpha^{-2} \|Tu\|^2 + 2\alpha^{-1} \operatorname{Re}\langle Tu, u\rangle + \|u\|^2$$

$$0 \leq \alpha^{-1} \|Tu\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle Tu, u\rangle$$

Si $\alpha \to \infty$, resulta $\operatorname{Re}\langle T u, u\rangle \geq 0$

Por lo tanto T es acretive

ii) Supongamos que T_1 es una extensión acretive de T. Entonces para $\operatorname{Re} > 0$, $(T_1 + \lambda I)^{-1}$ existe y es una extensión de $(T + \lambda I)^{-1}$; pero $\mathcal{D}(T + \lambda I)^{-1} = H,$ ya que $(T + \lambda I)^{-1})$ está definido en un subconjunto denso en H.

Luego $(T_1 + \lambda I)^{-1} = (T + \lambda I)^{-1}$. De aquí $T = T_1$

Por lo tanto T no tiene una extensión acretive.

Teorema 1.7.2. Un operador $T\,(H$ *a* $H)$ *es* ***m-acretive*** *si y sólo si es cerrado, acretive y def* $(T - \zeta 1) = 0$ *para* $\zeta \in \Delta(T)$

__Demostración:__

$\Rightarrow$] Si un operador T es m-acretive, entonces es cerrado acretive y *de* $f\,(T - \zeta I) = 0$; para $\zeta \in \Delta(T)$.

__En efecto:__

Desde que T es m-acretive, $\forall\zeta \in \Delta(T)$, tenemos que $\operatorname{Re} \zeta < 0$ y $(T + \zeta I)^{-1}$ es acotado con dominio cerrado H. Luego por el teorema (1.6.1), tenemos que $(T + \zeta I)^{-1}$ es cerrado, de esta manera $(T + \zeta I)$ también es cerrado. Ahora por el teorema (1.6.2) se tiene que T es cerrado ya que *I* es acotado.

Como $(T + \zeta I)^{-1} \in B(H)$ y está definido en un conjunto denso en $H,$ entonces $\mathcal{R}(T + \zeta I) = H,$ de aquí se deduce que *de* $f\,(T - \zeta I) = 0$, además T es acretive por el teorema anterior.

$\Leftarrow$] Si un operador T es cerrado, acretive y *de* $f\,(T - \zeta I) = 0$, $\zeta \in \Delta(T)$, entonces es m-acretive

__En efecto:__

Desde que T es cerrado, acretive y *def* $(T - \zeta I) = 0$, luego por el teorema ***, tenemos que

Si $\operatorname{Re} \zeta > 0$, entonces $-\zeta \in \Delta(T) \subseteq \rho(T)$. Luego tenemos $(T + \zeta I)^{-1} \in B(H)$ con

$$\left\|(T + \zeta I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{dis(-\zeta, \Gamma(T))} \leq (\operatorname{Re} \lambda)^{-1}$$

Por lo tanto T es m-acretive

Proposición 1.7.3. Un operador *m-acretive* T *es densamente definido*

__Demostración:__

Notemos que para $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\mathcal{D}(T) = \mathcal{R}((T + \lambda \mathrm{I})^{-1})$, tenemos que demostrar que $\overline{\mathcal{D}(T)} = H,$ para ello es suficiente probar que para todo *u* $\in H,$ si $\langle (T + \lambda I)u, v\rangle = 0$, entonces $v = 0$.

Para ello hagamos $u = v$ y $(T - \lambda I)^{-1}v = w$, luego tenemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= \operatorname{Re}\langle (T + \lambda I)^{-1}v,\ v\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle w,\ (T + \lambda I)w\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle w,\ Tw\rangle + \operatorname{Re}\langle w,\ \lambda w\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle w,\ Tw\rangle + \operatorname{Re}\lambda\ \|w\|^2
\end{aligned}
$$

Desde que T es m-acretive, tenemos $0 \leq \operatorname{Re}\langle T\,w,\ w\rangle = \operatorname{Re}\langle w,\ Tw\rangle$

Es decir

$$\operatorname{Re}\langle w,\ Tw\rangle \geq 0$$

$$0 = \operatorname{Re}\langle w,\ Tw\rangle + \operatorname{Re}\lambda\ \|w\|^2 \geq \operatorname{Re}\lambda\ \|w\|^2$$

Luego

$$\operatorname{Re}\lambda\ \|w\|^2 \leq 0$$

Entonces $w = 0$, de esta forma $v = 0$ como queriamos

Proposición 1.7.4. *Si T es acretive e invertible, entonces T^{-1} es acretive*

Demostración:

Para probar que T^{-1} es acretive debemos probar que $\operatorname{Re}\langle T^{-1}u,\ u\rangle \geq 0$, $\forall u \in \mathcal{D}(T^{-1})$.

Sea $u \in \mathcal{D}(T^{-1})$, de modo que para algún $v \in \mathcal{D}(T)$, tenemos que $T^{-1}u = v$.

Luego

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle T^{-1}u,\ u\rangle &= \operatorname{Re}\langle v,\ Tv\rangle \\
&= \operatorname{Re}\langle T\,v,\ v\rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

Se sigue que Re$\langle T^{-1}u,\ u\rangle \geq 0$. Por lo tanto que T^{-1} es acretive

Proposición 1.7.5. *Si T es m-acretive, entonces T^* es m-acretive*

Demostración:

Como T es m-acretive, para $\operatorname{Re}\lambda > 0$, tenemos

$$(T + \overline{\lambda}I)^{-1} \in B(H)$$

$$\left\|(T + \overline{\lambda}I)^{-1}\right\| \leq (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$$

Además T es cerrado y densamente definido (observación 1.7.3), luego por el teorema (1.6.19), $(T + \overline{\lambda}I)^*$ es invertible y $(T + \overline{\lambda}I)^{*-1} \in B(H)$, satisfaciendo:

$$(T + \overline{\lambda}I)^{*-1} = \|(T + \overline{\lambda}I)^{-1}\| \leq (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$$

Además como $(T + \overline{\lambda}I)^* = T^* + \lambda I$, entonces $\|(T^* + \lambda I)^{-1}\| \leq (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$. Por lo tanto T^* es m-acretive.

Las siguientes propiedades son más generales que acretividad y m-acretividad

Definición 1.7.3. Sea un operador T (H a H)

i) Se dice que T es casi-acretive si $T + \alpha I$ es acretive para algún $\alpha \in$ C

Equivalentemente: Si $\forall u \in \mathcal{D}(T)$ y para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\mathrm{Re}\langle T u, u\rangle \geq \lambda$$

ii) T se dice que es casi m-acretive si $T + \alpha I$ es m-acretive para algún $\alpha \in \mathbb{C}$

Observación 1.7.2. Si T es cuasi m-acretive, entonces T es cerrado, densamente definido y no tiene la propiedad de casi - acretive extensión

La demostración se sigue del teorema (1.7.2), proposición (1.7.3) y la definición (1.7.3)

1.7.3 Operadores sectoriales

Definición 1.7.4. Un operador T (H a H) casi-acretive se dice que es **sectorial**, si el rango numérico $w(T)$ se encuentra en un sector. Es decir si para algún $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\phi \in [0, \frac{\pi}{2})$, tenemos

$$\mathrm{w}(T) \subseteq \{\zeta \in \mathbb{C}/\ |Arg(\zeta - \gamma)| \leq \phi\} \tag{1.7.2}$$

- γ es llamado un **vertice** de T
- ϕ es llamado un **semiangulo** de T

γ y ϕ no son unicamente determinados, desde que algún $\gamma_1 \leq \gamma$ es también un vértice; y algún $\phi_1 \in [0, \frac{\pi}{2})$ es también un semiángulo

Definición 1.7.5. Un operador T (H a H) se dice que es **m-sectorial** si este es casi-m-acretive y sectorial.

Ejemplo 1.7.2. *Sea* $H = L^2[a, b]$, *consideremos el operador* $T : \mathfrak{D}(t) \rightarrow H$ *tal que* $Tu = Lu$, $\forall u \in \mathcal{D}(t)$. *Donde el dominio está dado por*

$$\mathfrak{D}(t) = \{u \in H/u'' \text{ es absolutamente continua sob}\mathrm{Re}\ [a, b]\}$$

Consideremos el operador diferencial L *sobre el intervalo finito* $[a,b]$ *tal que*

$$Lu = p_0(x)u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u$$

Asumiremos que $p_0(x)$, $p_1(x)$ *y* $p_2(x)$ *son valores reales, además* $p_0(x) < 0$ *con las condiciones de frontera* $u(a) = u(b) = 0$. *Probaremos que* T *es* un operador *m-sectorial*

En efecto:

Para todo $u \in \mathcal{D}(t)$, tenemos:

2.1 Forma sesquilineal

En lo que sigue se considerará H un espacio de Hilbert, sobre el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, además denotaremos al dominio de la forma sesquilineal T, como $\mathfrak{D}(t)$, donde $\mathfrak{D}(t)$ es un subespacio de H. Estrictamente hablando el dominio de T es $\mathfrak{D}(t)\times\mathfrak{D}(t)$, pero por constumbre en este trabajo lo denotaremos como $\mathfrak{D}(t)$, o simnplemente $\mathfrak{D}$. En algunos casos para referirnos a **formas sesquilineales** simplemente diremos **formas**.

Definición 2.1.1. Una **forma sesquilineal** sobre H es una aplicación

$$t : \mathfrak{D}(t) \times \mathfrak{D}(t) \subset H \times H \to \mathrm{C}$$

Que es lineal en el primer argumento, y semilineal en el segundo. Es decir para todo $u, v, w \in \mathfrak{D}(t)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, satisface

$$\left.\begin{aligned} t[u+v,w] &= t[u,w]+t[v,w] \\ t[\alpha u,w] &= \alpha t[u,v] \\ t[u,v+w] &= t[u,v]+t[u,w] \\ t[u,\alpha v] &= \overline{\alpha} t[u,v] \end{aligned}\right\} \tag{2.1.1}$$

Si comparamos las definición de producto interno y forma sesquilineal, observamos que el producto interno sobre H es obviamente una forma sesquilineal con dominio H. Diremos que t es densamente definida si $\mathfrak{D}(t)$ es denso en H.

Definición 2.1.2. Para cada forma sesquilineal, t, asociamos una **forma cuadrática** $t' : \mathfrak{D}(t) \to \mathbb{C}$, via

$$t'[u] = t[u, u] \qquad \forall u \in \mathfrak{D}(t) \tag{2.1.2}$$

Sin posibilidad de confusión, usaremos el mismo símbolo para denotar a la forma sesquilineal y a su forma cuadrática asociada, sirviendo el argumento para distinguir a estas dos formas, es decir $t[u] = t[u, u]$

En un espacio de Hilbert complejo, existe una correspondencia uno uno entre formas sesquilineales y formas cuadráticas, como puede ser visto de la ecuación (2.1.2) y la siguiente proposición generaliza este hecho

Proposición 2.1.1. (***Identidad de polarización***)

Sea H un espacio de Hilbert complejo, t una forma sesquilineal sobre H, con la forma cuadrática asociada $t[u]$. Entonces para todo $u, v \in \mathfrak{D}(t)$ tenemos

$$t[u,v] = \frac{1}{4}\{t[u+v] - t[u-v] + i\ t[u+iv] - i\ t[u-iv]\} \tag{2.1.3}$$

Definición 2.1.3. Dos formas sesquilineales $t_1 : \mathfrak{D}(t_1) \to \mathbb{C}$ y $t_2 : \mathfrak{D}(t_2) \to \mathbb{C}$, son iguales $(t_1 = t_2)$ si y solo si $\mathfrak{D}(t_1) = \mathfrak{D}(t_2) = \mathfrak{D}$ y $t_1[u, v] = t_2[u, v]$, para todo $u, v \in \mathfrak{D}$

La noción de extensión y restricción de formas, se define de manera similar al de operadores.

Definición 2.1.4. Sean t_1 y t_2 dos formas tal que $\mathfrak{D}(t_1) \subset \mathfrak{D}(t_2)$ y $t_1[u, v] = t_2[u, v]$, para todo $u, v \in \mathfrak{D}(t_1)$, entonces t_2 es llamado una extensión de t_1 y t_1 una restricción de t_2, (en símbolos $t_2 \supset t_1$, $t_1 \subset t_2$)

Definición 2.1.5. Sean t, t_1 y t_2 formas sobre H, y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces definimos La **suma**, $(t_1 + t_2)[u, v] = t_1[u, v] + t_2[u, v]$; $\mathfrak{D}(t_1 + t_2) = \mathfrak{D}(t_1) \cap \mathfrak{D}(t_2)$

El **producto** αt como: $(\alpha t)[u, v] = \alpha t[u, v]$, $\mathfrak{D}(\alpha t) = \mathfrak{D}(t)$

Además la **forma unitaria** $I[u, v]$ es por definición: $\mathfrak{D}(I) = H$ y $I[u, v] = \langle u, v\rangle$ y la **forma cero** $0[u, v]$ se define como $\mathfrak{D}(0) = H$ y $0[u, v] = 0$. Así de este modo $t + \alpha = t + \alpha I$ es definida para alguna forma T como:

$$(t + \alpha I)[u, v] = t[u, v] + \alpha\langle u, v\rangle\ , \quad \mathfrak{D}(t + \alpha) = \mathfrak{D}(t)$$

Definición 2.1.6. Una forma sesquilineal t sobre H se dice que es **acotada** si $\exists M \geq 0$ tal que $\forall u, v \in \mathfrak{D}(t)$,

$$|\ t[u, v]\ | \leq M \,\|u\|\, \|v\| \tag{2.1.4}$$

Si la forma t no satisface la ecuación (2.1.4), se dirá que no es acotada

El número M más grande es llamado la **norma** de t, $\|t\|$ y es dado por

$$\|t\| \ = \sup_{u,v\in\mathfrak{D}(t)-\{0\}} \frac{|\ t[u,v]\ |}{\|u\|\ \|v\|} \tag{2.1.5}$$

Como en el caso de operadores, definiremos una forma simétrica

Definición 2.1.7. Una forma t se dice que es **simétrica**, si

$$t[u, v] = \overline{t[v, u]}\ ,\ \forall u, v \in \mathfrak{D}(t)$$

Teorema 2.1.2. *$t[u, v]$ es simétrica si y sólo si $t[u] \in \mathbb{R}$, para todo $u \in \mathcal{D}(t)$*

<u>**Demostración:**</u>

$\Rightarrow$] Si t es simétrica, entonces tenemos para todo $u \in \mathfrak{D}(t)$

$$t[u] = t[u, u] = \overline{t[u, u]} = \overline{t[u]}$$

Como $t[u] = \overline{t[u]}$, luego $t[u] \in \mathbb{R}$

$\Leftarrow$] Usando la identidad de polarización (2.1.3), tenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{t[v,u]} &= \overline{\frac{1}{4}(t[v+u] - t[v-u] + it[v+iu] - it[v-iu])} \\
&= \frac{1}{4}(\overline{t[v+u]} - \overline{t[v-u]} + \bar{i}\ \overline{t[v+iu]} - \bar{i}\ \overline{t[v-iu]}) \\
&= \frac{1}{4}(t[v+u] - t[v-u] - it[v+iu] + it[v-iu]) \\
&= \frac{1}{4}(t[u+v] - t[u-v] + it[u+iv] - it[u-iv]) \\
&= t[u,v]
\end{aligned}$$

De este modo $t[u, v] = t\overline{[v, u]}$. Por lo tanto T es simétrica

Definición 2.1.8. Sea T una forma, definimos la forma adjunta de T como

$$t^*[u, v] = \overline{t[v, u]}\,, \quad \mathfrak{D}(t^*) = \mathfrak{D}(t)$$

De las definiciones (2.1.7) y (2.1.8), es inmediato, que t es simétrica si y sólo si $t = t^*$.

Además observemos que para dos formas t_1, $t_2 \in H$, y para α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{C}$, tenemos para $u, v \in \mathfrak{D}(t_1) \cap \mathfrak{D}(t_2)$,

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)^*[u,v] &= \overline{(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2)[v,u]} \\
&= \overline{\alpha_1 t_1[v,u]} + \overline{\alpha_2 t_2[v,u]} \\
&= \overline{\alpha_1}\,\overline{t_1[v,u]} + \overline{\alpha_2}\,\overline{t_2[v,u]} \\
&= \overline{\alpha_1}\ t_1^*[u,v] + \overline{\alpha_2}\ t_2^*[u,v]
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Definición 2.1.9. Definimos la parte **real** e **imaginaria** de una forma T en H como sigue: $\mathfrak{D}(\mathrm{Re}\ t) = \mathfrak{D}(t) = \mathfrak{D}(\mathrm{Im}\ t)$, y

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{Re}\, t &= \frac{1}{2}(t + t^*) \\
\mathrm{Im}\, t &= \frac{1}{2i}(t - t^*)
\end{aligned}\right\} \tag{2.1.7}$$

Además $\mathrm{Re}\ t$ y $\mathrm{Im}\ t$ son formas ya que están definidas como operaciones de formas; y por la ecuación (2.1.6), $\mathrm{Re}\ t$ y $\mathrm{Im}\ t$ son simétricas.

<u>En efecto:</u>

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\, t^*[u,v] &= \frac{1}{2}(t^* + (t^*)^*)[u,v] \\
&= \frac{1}{2}t^*[u,v] + \frac{1}{2}(t^*)^*[u,v] \\
&= \frac{1}{2}t^*[u,v] + \frac{1}{2}\overline{t^*[v,u]} \\
&= \frac{1}{2}t^*[u,v] + \frac{1}{2}\overline{\overline{t[u,v]}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(t+t^*)[u,v] \\ &= \operatorname{Re} t[u,v] \end{aligned}$$

Por lo tanto $\operatorname{Re} t$ es simétrica. De forma similar se puede probar que $\operatorname{Im} t$ es simétrica; así mismo de la definición (2.1.7) tenemos que,

$$t = \operatorname{Re} t + i \operatorname{Im} t \tag{2.1.8}$$

Además tenemos, que para todo $u \in \mathfrak{D}(t)$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re} t[u,u] &= \frac{1}{2}(t[u,u] + \overline{t[u,u]}) = \operatorname{Re}(t[u]) \\ \operatorname{Im} t[u,u] &= \frac{1}{2i}(t[u,u] - \overline{t[u,u]}) = \operatorname{Im}(t[u]) \end{aligned}\right\} \tag{2.1.9}$$

Ejemplo 2.1.1. *Sea* $H = l^2$ *y* $\mathfrak{D}(t) = \{u = (\xi_j) \in H / \Sigma|\alpha_j|\, |\xi_j|^2 < \infty\}$

$$t[u,v] \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\ \mu_j\ \overline{\nu_j} \qquad para \quad u \;=\; (\mu_j) \quad y \quad v \;=\; (\nu_j)$$

Donde (λ_j) *es una sucesión de números complejos. Entonces* t *es una forma sesquilineal.*

<u>**Demostración:**</u>

Sea $u, v, w \in \mathfrak{D}(t)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. De este modo tenemos:

$$u \;=\; (\mu_j) \qquad v = (\nu_j) \qquad w = (\omega_j)$$

$$\begin{aligned} t[\alpha u + \beta v, w] &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\ (\alpha\ \mu_j\ +\ \beta\ \nu_j)\ \overline{\omega_j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\ \alpha\ \mu_j\ \overline{\omega_j}\ +\ \lambda_j\ \beta\ \nu_j\ \overline{\omega_j} \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\ \mu_j\ \overline{\omega_j}\ +\ \beta\ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\ \nu_j\ \overline{\omega_j} \\ &= \alpha\ \ t[u,w]\ +\ \beta\ t[v,w] \\ t[u, \alpha v + \beta w] &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\ \mu_j\ \overline{(\alpha\ \nu_j\ +\ \beta\ \omega_j)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\ \mu_j\ (\overline{\alpha}\ \overline{\nu_j}\ +\ \overline{\beta}\ \overline{\omega_j}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\ \mu_j\ \overline{\alpha}\ \overline{\nu}_j\ +\ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\ \mu_j\ \overline{\beta}\overline{\omega} \\ &= \overline{\alpha}\ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\ \mu_j\ \overline{\nu}_j\ +\ \overline{\beta}\ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\ \mu_j\ \overline{\omega} \\ &= \overline{\alpha}\ t[u,v]\ +\ \overline{\beta}\ t[u,w] \end{aligned}$$

Por lo tanto t es una forma sesquilineal

Ejemplo 2.1.2. *Sea* $H = L^2$ *y*

$$t[u,v] \;=\; \int_\Omega f(x)\; u(x)\; \overline{v(x)}dx$$

Donde $f(x)$ *es una función medible de valor complejo sobre* Ω*. Además el dominio es* $\mathfrak{D}(t) = \{u \in H / \int |f(x)||u(x)|^2 dx < \infty\}$*. Entonces* t *es una forma sesquilineal, además* t *es simétrica si* $f(x)$ *es real.*

Demostración:

Sea $u, v, w \in \mathfrak{D}(t)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}
t[\alpha u + \beta v, w] &= \int_\Omega f(x)(\alpha u + \beta v)(x)\overline{w(x)}dx \\
&= \int_\Omega f(x)(\alpha u(x) + \beta v(x))\overline{w(x)}dx \\
&= \int_\Omega \{\alpha f(x)u(x)\overline{w(x)} + \beta f(x)v(x)\overline{w(x)}\}dx \\
&= \alpha \int_\Omega f(x)u(x)\overline{w(x)}dx + \beta \int_\Omega f(x)v(x)\overline{w(x)}dx \\
&= \alpha\; t[u,w] + \beta\; t[v,w]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t[u, \alpha v + \beta w] &= \int_\Omega f(x)u(x)\overline{(\alpha v + \beta w)}(x)dx \\
&= \int_\Omega f(x)u(x)(\overline{\alpha v} + \overline{\beta w})(x)dx \\
&= \int_\Omega f(x)u(x)(\overline{\alpha}\overline{v(x)} + \overline{\beta}\overline{w(x)})dx \\
&= \overline{\alpha} \int_\Omega f(x)u(x)\overline{v(x)}dx + \overline{\beta} \int_\Omega f(x)u(x)\overline{w(x)}dx \\
&= \overline{\alpha}\; t[u,v] + \overline{\beta}\; t[u,w]
\end{aligned}$$

Además t es simétrica si $f(x)$ es real

$$\begin{aligned}
t[u,v] &= \int_\Omega f(x)u(x)\overline{v(x)}(x)dx \\
&= \int_\Omega \overline{\overline{f(x)}\;\overline{u(x)}\;v(x)}dx \\
&= \int_\Omega \overline{f(x)\;v(x)\;\overline{u(x)}}dx \\
&= \overline{\int_\Omega f(x)\;v(x)\;\overline{u(x)}dx} \\
&= \overline{t[v,u]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto t es una forma sesquilineal.

Ejemplo 2.1.3. *Sea* T un operador *en* H*, talque*

$$t[u, v] = \langle Tu, v\rangle \;\; \mathfrak{D}(t) = \mathcal{D}(T)$$

t es una forma sesquilineal. Además si T es simétrico, luego t es simétrico.

Demostración:

Sea $u,\ v,\ w \in \mathfrak{D}(t)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
t[\alpha u + \beta v, w] &= \langle T(\alpha u + \beta v), w\rangle \\
&= \langle \alpha T(u) + \beta T(v), w\rangle \\
&= \langle \alpha T(u), w\rangle + \langle \beta T(v), w\rangle \\
&= \alpha\langle T(u), w\rangle + \beta\langle T(v), w\rangle \\
&= \alpha\ t[u,w] + \beta\ t[v,w]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t[u, \alpha v + \beta w] &= \langle T(u), \alpha v + \beta w\rangle \\
&= \overline{\langle \alpha v + \beta w, T(u)\rangle} \\
&= \overline{\alpha\langle v, T(u)\rangle + \beta\langle w, T(u)\rangle} \\
&= \overline{\alpha}\overline{\langle v, T(u)\rangle} + \overline{\beta}\ \overline{\langle w, T(u)\rangle} \\
&= \overline{\alpha}\langle T(u), v\rangle + \overline{\beta}\langle T(u), w\rangle \\
&= \overline{\alpha}\ t[u,v] + \overline{\beta}\ t[u,w]
\end{aligned}$$

Ademas veamos que si T es simétrico, luego t es simétrico

$$\begin{aligned}
t[u,v] &= \langle T(u), v\rangle \\
&= \langle u, T(v)\rangle \\
&= \overline{\langle T(v), u\rangle} \\
&= \overline{t[v,u]}
\end{aligned}$$

2.2 Semiacotaciones

Dada una forma sesquilineal simétrica $H,$ su forma cuadrática $h[u]$ tiene sus valores en los números reales, es decir $h[u] \in \mathbb{R}$, esto nos motiva a hablar de formas acotadas inferiormente y superiormente. Pero sabemos que en general una forma t no es simétrica, entonces su forma cuadrática $t[u]$ está en los números complejos, de esta manera tendríamos que hablar de formas acotadas a la izquierda o a la derecha. Diremos que una forma sesquilineal simétrica H es no negativa si $h[u] \geq 0$ para todo $u \in \mathfrak{D}(h)$, (en símbolos $h \geq 0$) y se dice que es positiva cuando $h[u] > 0$ para todo $u \in \mathfrak{D}(h)$ con $u \neq 0$ (en símbolos $h > 0$)

Definición 2.2.1. Dada una forma t en un espacio de Hilbert $H,$ el **rango numérico**, $\mathrm{w}(t)$ de t es dado por

$$w(t) = \{t[u]/\ u \in \mathcal{D}(t),\ \|u\| = 1\} \tag{2.2.1}$$

Observemos que por el teorema (2.1.2), t es simétrica si y sólo si $\mathrm{w}(t) \subseteq \mathbb{R}$

Definición 2.2.2. Una forma simétrica t en H es **acotada inferiormente** si el rango numérico $\mathrm{w}(t)$ es acotado inferiormente, esto es si $\mathrm{w}(t)$ es un intervalo finito o semi-infinito del eje real que es acotado a la izquierda.

Equivalentemente: para algún $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$(\forall u \in \mathfrak{D}(t)) \qquad t[u] \geq \gamma \, \|u\|^2 \tag{2.2.2}$$

En este caso escribiremos $t \geq \gamma$. El mayor número γ con esta propiedad es llamado **cota inferior** de t, y se puede escribir γ_t. Obviamnete también podemos definir forma acotada superiormente y cota superior.

Las nociones de acotado y semiacotado están relacionados de la siguiente manera.

Proposición 2.2.1. *Una forma simétrica t es acotada si y sólo si es acotada inferiormente y superiormente*

<u>Demostración:</u>

$\Rightarrow$] Consideremos el rango numérico de t, $\mathrm{W}(t) = \{t[u]/\, u \in \mathfrak{D}(t), \, \|u\| = 1\}$, ahora por la desigualdad (2.1.4), tenemos que para todo $u \in \mathfrak{D}(t)$ con $\|u\| = 1$,

$$|t[u]| \leq \|t\| \,,$$

entonces $w(t) \subseteq [-\|t\| \,, \|t\|]$, de este modo t es acotado inferiormente y superiormente.

$\Leftarrow$] Sea $u, \, v \in \mathcal{D}(t)$, y consideremos $|t[u, \, v]|$. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$, tenemos que $|t[u, \, v]| = |t[\lambda u, \, v]|$, entonces podemos asumir sin perdida de generalidad que $t[u, \, v] \in \mathbb{R}$.

Como $t[u]$ es de valor real, por la identidad de polarización, tenemos

$$t[u, v] = \frac{1}{4}(t[u + v] - t[u - v])$$

Ahora como t es acotado inferiormente y superiormente, entonces para algún M (la mayor cota tanto inferior como superior de t), $|t[u]| \leq M \, \|u\|^2$ para todo $u \in \mathfrak{D}(t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
|t[u, v]| &= \frac{1}{4}|t[u + v] - t[u - v]| \\
&\leq \frac{1}{4}(|t[u + v]| + |t[u - v]|) \\
&\leq \frac{1}{4}M(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2) \\
&= \frac{1}{2}M(\|u\|^2 + \|v\|^2)
\end{aligned}$$

usando la sustitución

$$\left.\begin{array}{l} u \to \sqrt{\dfrac{\|v\|}{\|u\|}}\ u \\ v \to \sqrt{\dfrac{\|u\|}{\|v\|}}\ v \end{array}\right\}$$

resulta

$$\begin{aligned} |t[u,v]| &= t\left[\sqrt{\frac{\|v\|}{\|u\|}}\ u, \sqrt{\frac{\|u\|}{\|v\|}}\ v\right] \\ &\leq \frac{1}{2}M\left(\frac{\|v\|}{\|u\|}\ \|u\|^2 + \frac{\|u\|}{\|v\|}\ \|v\|^2\right) \\ &= M\ \|u\|\ \|v\| \end{aligned}$$

Luego t es acotado con norma $\|t\| \leq M$, como queriamos.

Observación 2.2.1. Para una forma simétrica h, de la proposición (2.2.1) se puede afirmar que,

Si $|h[u]| \leq M\, \|u\|^2$ *,* $\forall u \in \mathfrak{D}(h)$; *entonces* $|h[u, v]| \leq M\, \|u\|\, \|v\|\ \forall u, v \in \mathfrak{D}(h)$

Además tenemos la generalización de la **desigualdad de Schwartz**:

Sean h y f formas simétricas, donde $\mathfrak{D}(h) = \mathfrak{D}(f)$ y asumamos que h es no negativa. Luego,

$$Si\ |f[u]| \leq Mh[u],\ \forall u \in \mathfrak{D}(h),\ \textit{entonces}\ |f[u, v]| \leq M\ \sqrt{h[u]h[v]}\ \forall u, v \in \mathfrak{D}(h) \tag{2.2.3}$$

Así como vimos en operadores, en formas sesquilineales necesitamos también definiciones que tengan que ver con el rango numérico pero para formas no simétricas.

Definición 2.2.3. Una forma t se dice que es **acotada de la izquierda** si para algún $\gamma \in \mathbb{R}$, el rango numércio $\mathrm{w}(t)$ es un subconjunto del semiplano de la forma $\mathrm{Re}\,\zeta \geq \gamma$, es decir

$$\mathrm{w}(t) \subseteq \{\zeta \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\,\zeta \geq \gamma\} \tag{2.2.4}$$

Particularizando la definición anterior, tenemos

Definición 2.2.4. Una forma sesquilineal t se dice que es **sectorialmente acotada de la izquierda** (o **sectorial**) si $\mathrm{w(t)}$ está contenido en un sector: es decir para algún $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$,

$$\mathrm{w}(t) \subseteq \{\zeta \in \mathbb{C} / |Arg(\zeta - \gamma)| \leq \theta\} \tag{2.2.5}$$

γ es llamado un **vertice** de t, y θ *un* **semiangulo** de t.

θ 2.2.2. *Sea T una forma sectorial con vertice γ y semiángulo θ, entonces para $u \in \mathfrak{D}(t)$, tenemos*

$$\left.\begin{array}{ll} i) & \operatorname{Re} t[u] \geq \gamma \|u\|^2 \quad = \gamma I[u] \\ ii) & |\operatorname{Im} t[u]| \leq (\operatorname{Re} t[u] - \gamma \|u\|^2) \tan\theta = (\operatorname{Re} t - \gamma I)[u] \tan\theta \end{array}\right\} \tag{2.2.6}$$

Demostración:

(**i**) Como t es sectorial, entonces

$$\{t[u]/u \in \mathfrak{D}(t),\ \|u\| = 1\} \subseteq \{\zeta \in \mathbb{C}/|Arg(\zeta - \gamma)| \leq \theta\}$$

Luego $|Arg(t[u] - \gamma)| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, $\forall u \in \mathfrak{D}(t)$ con $\|u\| = 1$, esto implica que $\operatorname{Re}(t[u] - \gamma) \geq 0$, es decir $\operatorname{Re}(t[u]) \geq \gamma$ y también $\operatorname{Re}(t[u]) \geq \gamma \|u\|^2$ desde que $\|u\| = 1$.

Ahora de la ecuación (2.1.9), tenemos que $\operatorname{Re} t[u] = \operatorname{Re}(t[u]) \geq \gamma \|u\|^2$.

Por lo tanto $\operatorname{Re} t[u] \geq \gamma \|u\|^2 = \gamma \mathrm{I}[u]$

(**ii**) De la ecuación (2.1.9) y teniendo en cuenta que $\gamma \in \mathbb{R}$, tenemos $\operatorname{Im} t[u] = \operatorname{Im}(t[u]) = \operatorname{Im}(t[u] - \gamma)$, entonces

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} t[u]| &= |\operatorname{Im}(t[u] - \gamma)| \\ &= \operatorname{Re}(t[u] - \gamma) \tan |Arg(t[u] - \gamma)| \\ &\leq \operatorname{Re}(t[u] - \gamma) \tan\theta \\ &= (\operatorname{Re} t[u] - \gamma \|u\|^2) \tan\theta \\ &= (\operatorname{Re} t - \gamma I)[u] \tan\theta \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Observación 2.2.2. Como $\operatorname{Re} t - \gamma I \geq 0$, y por la generalización de la desigualdad de Schwartz (2.2.3), tenemos que para $u,\ v \in \mathfrak{D}(t)$,

$$(\operatorname{Re} t - \gamma I)[u, v] \leq \sqrt{(\operatorname{Re} t - \gamma I)[u](\operatorname{Re} t - \gamma I)[v]} \tag{2.2.8}$$

También de (2.2.6) y la desigualdad de Schwartz, tenemos

$$|\operatorname{Im} t[u, v]| \leq \tan\theta \sqrt{(\operatorname{Re} t - \gamma I)[u](\operatorname{Re} t - \gamma I)[v]} \tag{2.2.9}$$

entonces de las ecuaciones (2.2.8) y (2.2.9), tenemos

$$\begin{aligned} |(t - \gamma I)[u, v]| &\leq |(\operatorname{Re} t - \gamma I)[u, v]| + |\operatorname{Im} t[u, v]| \\ &\leq (1 + \tan\theta) \sqrt{(\operatorname{Re} t - \gamma I)[u](\operatorname{Re} t - \gamma I)[v]} \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Similarmente a la ecuación (2.2.6), tenemos otro resultado importante,

$$(\operatorname{Re} t - \gamma I)[u] \leq |(t - \gamma I)[u]| \leq \sec\theta (\operatorname{Re} t - \gamma I)[u] \tag{2.2.11}$$

Los siguientes dos ejemplos muestran un importante metodo de construir formas sesquilineales a partir de operadores, y estos serán de uso en la prueba de las representaciones de los teoremas en el capitulo 3.

Ejemplo 2.2.1. *Sea* T $(H$ *a* $H)$ *un operador, y definamos una forma* t *en* H *por*

$$t[u, v] = \langle Tu, v\rangle$$

donde $\mathfrak{D}(t) = \mathcal{D}(T)$. *Entonces*

$$\begin{aligned} \mathrm{w}(t) &= \{t[u]/u \in \mathcal{D}(t), \|u\| = 1\} \\ &= \{\langle Tu, u\rangle/u \in \mathcal{D}(T), \|u\| = 1\} \\ &= \mathrm{w}(T) \end{aligned}$$

Observemos que los rangos numéricos son iguales, entonces t es simétrica sii T lo es, también t es acotado inferiormente sii T lo es; t es acotado de la izquierda sii T es casi acretive; y t es sectorial sii T lo es.

Ejemplo 2.2.2. *Sea* $S(H_1$ *a* $H_2)$ un operador*; y definamos* una *forma s en* H_1 *por*

$$s[u, v] = \langle Su, Sv\rangle$$

donde $\mathfrak{D}(s) = \mathcal{D}(S)$. *Entonces s es simétrica y no negativa*

Demostración:

Primero probemos que S es simétrica

$$\begin{aligned} s[v, u] &= \langle Sv, Su\rangle \\ &= \overline{\langle Su, Sv\rangle} \\ &= \overline{s[u, v]} \end{aligned}$$

Por lo tanto *s* es simétrica.

También $s[u, v] = \langle Su, Sv\rangle = \|u\|^2 \geq 0$, es decir s es no negativa.

2.3 Formas cerradas

La noción de forma cerrada es importante en la teoría de formas sesquilineales ya que esta es una de las condiciones en la primera representación de los teoremas en el capitulo 3. La cerradura de una forma permite representar formas en térninos de operadores.

Estudiaremos la noción de t-convergencia, así como se hizo en operadores.

Definición 2.3.1. Sea t una forma sectorial sobre H. Una sucesión $\{u_n\}$ de vectores se dice que es **t-convergente** a $u \in H$, si

i) $u_n \in \mathfrak{D}(t)$ $\qquad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $u_n \to u$

iii) $t[u_n - u_m] \to 0$ cuando $m, n \to \infty$

Escribiremos $u_n \underset{t}{\to} u$, para denotar que $\{u_n\}$ es t-convergente a u.

Proposición 2.3.1. *Sea t una forma sectorial sobre H y $\{u_n\}$* una *sucesión en $\mathfrak{D}(t)$, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) $un \underset{t}{\to} u$

b) $un \xrightarrow[t\pm\alpha-I]{} u$

c) $un \xrightarrow[\mathrm{Re}T]{} u$

Demostración:

$(a \Leftrightarrow b)$ Usando la definición de t-convergencia, y como toda sucesión convergente es de Cauchy, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(u_n \xrightarrow[t]{} u\right) &\Leftrightarrow \{u_n\} \in \mathfrak{D}(t), \quad u_n \to u \quad y \quad t[u_n - u_m] \to 0 \\
&\Leftrightarrow \{u_n\} \in \mathfrak{D}(t), \quad u_n \to u \quad y \quad t[u_n - u_m] \pm \alpha \|u_n - u_m\| \to 0 \\
&\Leftrightarrow \{u_n\} \in \mathfrak{D}(t), \quad u_n \to u \quad y \quad (t \pm \alpha I)[u_n - u_m] \to 0 \\
&\Leftrightarrow \left(u_n \xrightarrow[t+\alpha I]{} u\right)
\end{aligned}$$

$(a \Leftrightarrow c)$ Usando el argumento anterior y como $(\mathrm{Re}\, t - \gamma I)[u] \leq |(t - \gamma I)[u]|$, donde γ es un vertice de t (desigualdad 2.2.11), tenemos

$$\begin{aligned}
u_n \xrightarrow[t]{} u &\Leftrightarrow u_n \xrightarrow[t-\gamma I]{} u \\
&\Leftrightarrow u_n \xrightarrow[\mathrm{Re}\, t-\gamma I]{} u \\
&\Leftrightarrow u_n \xrightarrow[\mathrm{Re}\, t]{} u
\end{aligned}$$

Por lo tanto las afirmaciones son equivalentes

Proposición 2.3.2. *Si $u_n \underset{t}{\to} u$ y $v \underset{t}{\to} v$, entonces $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tenemos*

$$(\alpha u_n + \beta v_n) \underset{t}{\to} (\alpha u + \beta v)$$

<u>**Demostración**</u>: Por hipótesis tenemos que

$$u_n \xrightarrow[t]{} u \quad \Leftrightarrow \quad u_n \in \mathfrak{D}(t), \quad u_n \to u \ \text{ y } \ t[u_n - u_m] \to 0$$

$$v_n \xrightarrow[t]{} v \quad \Leftrightarrow \quad v_n \in \mathfrak{D}(t), \quad v_n \to v \ \text{ y } \ t[v_n - v_m] \to 0$$

Probaremos que: $\alpha u_n + \beta v_n \underset{t}{\to} \alpha u + \beta v$ esto es equivalente a probar $\alpha u_n + \beta v_n \in \mathfrak{D}(t)$, $\alpha u_n + \beta v_n \to \alpha u + \beta v$ y $t[(\alpha u_n + \beta v_n) - (\alpha u_m + \beta v_m)] \to 0$.

<u>**Primero**</u>: $\alpha u_n + \beta v_n \in \mathfrak{D}(t)$

Dado $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $u_n, v_n \in \mathfrak{D}(t)$, entonces $\alpha u_n + \beta v_n \in \mathfrak{D}(t)$, desde que $\mathfrak{D}(t)$ es un espacio vectorial.

<u>Segundo:</u> $\alpha u_n + \beta v_n \to \alpha u + \beta v$

Como $\|u_n - u\| \to 0$ y $\|v_n - v\| \to 0$, entonces

$$\|(\alpha u_n + \beta v_n) - (\alpha u + \beta v)\| = \|(\alpha u_n - \alpha u) + (\beta v_n - \beta v)\|$$

$\leq |\alpha| \, \|u_n - u\| + |\beta| \, \|v_n - v\|$

$\rightarrow 0$

<u>**Tercero**</u>: $t[(\alpha u_n + \beta v_n) - (\alpha u_m - \beta v_m)] \rightarrow 0$

Como tenemos que $t[u_n - u_m] \rightarrow 0$, entonces

$$\begin{aligned} t[\alpha(u_n - u_m)] &= \langle \alpha(u_n - u_m), \alpha(u_n - u_m) \rangle \\ &= \alpha\overline{\alpha} \langle (u_n - u_m), (u_n - u_m) \rangle \\ &= |\alpha^2| t[u_n - u_m] \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Analogamente si $t[v_n - v_m] \rightarrow 0$, entonces $t[\beta(v_n - v_m)] \rightarrow 0$

Además se cumple $t[u + v] \leq 2t[u] + 2t[v]$. Luego

$$\begin{aligned} t[(\alpha u_n + \beta v_n) - (\alpha u_m + \beta v_m)] &= t[\alpha(u_n - u_m) + \beta(v_n - v_m)] \\ &\leq 2t[\alpha(u_n - u_m)] + 2t[\beta(v_n - v_m)] \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Definición 2.3.2. Una forma sectorial t sobre H se dice que es **cerrada**,

Si $u_n \underset{t}{\rightarrow} u$, implica que $u \in \mathfrak{D}(t)$ y $t[u_n - u] \rightarrow 0$

Se sigue de la definición dada y de la proposición (2.3.1),

t es cerrado sii $t + \alpha I$ es cerrado para algún $\alpha \in \mathbb{C}$.

<u>En efecto:</u>

t es cerrado $\Leftrightarrow u_n \underset{t}{\rightarrow} u$, implica $u \in \mathfrak{D}(t)$ y $t[u_n - u] \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow u_n \underset{t\pm\alpha I}{\rightarrow} u$, implica $u \in \mathfrak{D}(t)$ y $t[u_n - u] \pm \|u_n - u\|^2 \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow u_n \underset{t\pm\alpha I}{\rightarrow} u$, implica $u \in \mathfrak{D}(t)$ y $(T \pm \alpha I)[u_n - u] \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow (t \pm \alpha I)$ es cerrado

Analogamente t es cerrado sii $\mathrm{Re}\, t$ es cerrado

Proposición 2.3.3. *Una forma acotada t sobre H es cerrada si y sólo si $\mathfrak{D}(t)$ es cerrada*

<u>**Demostración:**</u>

Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $\mathfrak{D}(t)$, convergente a $u \in H$, además si t es acotado, entonces

$$\begin{aligned} |t[u_n - u_m]| &= |t[u_n - u_m, u_n - u_m]| \\ &\leq k \, \|u_n - u_m\| \, \|u_n - u_m\| \\ &= \|t\| \, \|u_n - u_m\|^2 \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

luego $u_n \underset{t}{\rightarrow} u$

$\Rightarrow$] Si T es cerrada, $u \in \mathfrak{D}(t)$. Luego $\mathfrak{D}(t)$ es cerrada

$\Leftarrow$] Si $\mathfrak{D}(t)$ es cerrada, $u \in \mathfrak{D}(t)$. Además $|t[u_n - u]| \leq \|t\| \, \|u_n - u\|^2 \to 0$

Por lo tanto t es cerrada

Definición 2.3.3. Sea h una forma simétrica no negativa sobre H. Definamos

$$\langle .,.\rangle_h : \mathfrak{D}(h) \times \mathfrak{D}(h) \to \mathbb{C}$$

por

$$\langle u, v\rangle_h = (H + I)[u, v] = h[u, v] + \langle u, v\rangle \tag{2.3.1}$$

$\langle .,.\rangle_h$ es entonces una forma sesquilineal simétrica positiva sobre H, ya que está definida como la suma de una forma simétrica no negativa H y una forma simétrica positiva I. También definimos

$$\|u\|_h = \sqrt{\langle u, u\rangle_h} \tag{2.3.2}$$

Notemos que $\langle u, v\rangle_h$ es simétrica y estrictamente positiva

$$\|u\|_h^2 = \langle u, u\rangle_h = (h + I)[u] = h[u] + \|u\|^2 \geq \|u\|^2 \tag{2.3.3}$$

$\mathfrak{D}(h)$ puede ser considerado como un espacio producto interno bajo $\langle .,.\rangle_h$ denotemos este espacio por $H_h = (\mathfrak{D}(h), \langle .,.\rangle_h)$.

Si t es una forma sectorial con vertice γ y semiángulo θ, entonces definidos

$$H_T = H_{\mathrm{Re}\ t - \gamma I} \tag{2.3.4}$$

Proposición 2.3.4. *Sea T una forma sectorial en H. Una sucesión $\{u_n\}$ en $\mathfrak{D}(t)$ es t-convergente si y sólo si $\{u_n\}$ es de Cauchy en H_t*

<u>**Demostración:**</u>

$\Rightarrow$] Dada una sucesión de Cauchy $\{u_n\}$ en $\mathfrak{D}(t)$ t-convergente a $u \in H$, probaremos que $\{u_n\}$ es de Cauchy en H_t, es decir, $\|u_n - u_m\|_t \to 0$.

<u>En efecto:</u>

Si $\{u_n\}$ es t-convergente, entonces $\{u_n\} \in \mathfrak{D}(t)$, $u_n \to u$ y $t[u_n - u_m] \to 0$, además por la ecuación (2.1.9), tenemos $(\mathrm{Re}\ t)[u_n - u_m] = \mathrm{Re}(t[u_n - u_m])$ luego

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|_t^2 &= \|u_n - u_m\|_{\mathrm{Re}\,t-\gamma I}^2 \\
&= (\mathrm{Re}\,t - \gamma I)[u_n - u_m] + \|u_n - u_m\|^2 \\
&= (\mathrm{Re}\,t)[u_n - u_m] - \gamma \|u_n - u_m\|^2 + \|u_n - u_m\|^2 \\
&\to 0
\end{aligned}$$

Entonces $\{u_n\}$ es de Cauchy en $H_t = (\mathfrak{D}(t), \|.\|_t)$

⇐] Si $\{u_n\}$ es de Cauchy en H_t, probaremos que $\{u_n\}$ es t-convergente a $u \in H$, es decir, $u_n \in \mathfrak{D}(t)$, $u_n \to u$ y $t[u_n - u_m] \to 0$

<u>En efecto:</u>

i) Como $\{u_n\}$ es de Cauchy en H_T, entonces $u \in \mathfrak{D}(t)$

ii) Si $\{u_n\}$ es de Cauchy en H_t, entonces $\|u_n - u_m\|_T \to 0$, luego

$$\|u_n - u_m\|_t^2 = (\mathrm{Re}\, t - \gamma I)[u_n - u_m] + \|u_n - u_m\|^2 \to 0$$

así tenemos

$$(\mathrm{Re}\; T - \gamma I)[u_n - u_m] \to 0 \; y \; \|u_n - u_m\|^2 \to 0 \tag{2.3.5}$$

Desde que H es completo, existe $u \in H$ tal que $\|u_n - u\| \to 0$

iii) Ahora probaremos que $t[u_n - u_m] \to 0$

De la proposición (2.2.6) y la ecuación (2.3.5), tenemos que

$|\mathrm{Im}\; t[u_n - u_m]| \leq \tan\theta(\mathrm{Re}\; T - \gamma \mathrm{I})[u_n - u_m] \to 0$

Entonces

$$\begin{aligned} t[u_n - u_m] &= (\mathrm{Re}\; t + i\; \mathrm{Im}\; t)[u_n - u_m] \\ &= (\mathrm{Re}\; t)[u_n - u_m] + i(\mathrm{Im}\; t)[u_n - u_m] \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{u_n\}$ es t-convergente

Proposición 2.3.5. *Sea t* una *forma sectorial con vertice γ y semiángulo θ. Entonces t es acotado* sobre H_t

<u>**Demostración**</u>: Usando la expresión (2.3.3), $\|u\| \leq \|u\|_t$ y la desigualdad

$|(t - \gamma I)[u, v]| \leq (1 + \tan\theta)\sqrt{(\mathrm{Re}\, t - \gamma I)[u](\mathrm{Re}\, t - \gamma I)[v]}$,

Tenemos:

$$\begin{aligned} |t[u,v]| &= |t[u,v] - \gamma I[u,v] + \gamma I[u,v]| \\ &\leq |(t-\gamma I)[u,v]| + |\gamma I[u,v]| \\ &\leq (1+\tan\theta)\sqrt{(\mathrm{Re}\, t - \gamma I)[u](\mathrm{Re}\, t - \gamma I)[v]} + |\gamma||\langle u, v\rangle| \\ &\leq (1+\tan\theta)\sqrt{(\mathrm{Re}\, t - \gamma I + I)[u](\mathrm{Re}\, t - \gamma I + I)[v]} + |\gamma|\,\|u\|\,\|v\| \\ &= (1+\tan\theta)\sqrt{(\mathrm{Re}\, t - \gamma I)[u] + \|u\|^2}\;\sqrt{(\mathrm{Re}\, t - \gamma I)[v] + \|v\|^2} \;+\; |\gamma|\,\|u\|\,\|v\| \\ &= (1+\tan\theta)\,\|u\|_{\mathrm{Re}\, t - \gamma I}\,\|v\|_{\mathrm{Re}\, t - \gamma I} + |\gamma|\,\|u\|\,\|v\| \\ &= (1+\tan\theta)\,\|u\|_t\,\|v\|_t + |\gamma|\,\|u\|\,\|v\| \qquad\qquad H_t = H_{\mathrm{Re}\, t - \gamma I} \\ &\leq (1+\tan\theta)\,\|u\|_t\,\|v\|_t + |\gamma|\,\|u\|_t\,\|v\|_t \qquad\qquad \forall u, v \in H_t \\ &= (1+\tan\theta + |\gamma|)\,\|u\|_t\,\|v\|_t \end{aligned}$$

Por lo tanto t es una forma sesquilineal acotada sobre H_t

Teorema 2.3.6. *Sea t una forma sectorial, con vertice γ. Entonces*

$$t \text{ es cerrado} \Leftrightarrow H_t \text{ es completo}$$

<u>Demostración:</u>

Por la proposición (2.3.1), t es cerrado si y sólo si $\mathrm{Re}\, t - \gamma I$ es cerrado, entonces podemos asumir sin pérdida de generalidad que t es simétrica y no negativa.

$\Rightarrow$] Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en H_t, probaremos que esta sucesión converge en H_t.

<u>En efecto:</u>

Como $\{u_n\}$ es de Cauchy en H_t, entonces $\|u_n - u_m\|_t \to 0$. Pero

$$\|u_n - u_m\|_t^2 = t[u_n - u_m] + \|u_n - u_m\|^2$$

Luego

$$t[u_n - u_m] \to 0 \qquad y \qquad \|u_n - u_m\| \to 0$$

Así tenemos que $\{u_n\}$ es de Cauchy en H, y como H es completo, entonces $\exists u \in H$ tal que $\|u_n - u\| \to 0$, consecuentemente $u_n \underset{t}{\to} u$.

Como t es cerrado, tenemos que $u \in \mathfrak{D}(t) = H_t$ y $t[u_n - u] \to 0$, luego por la desigualdad (2.3.3)

$$\|u_n - u\|_t^2 = t[u_n - u] + \|u_n - u\|^2 \to 0$$

De esto tenemos que $\{u_n\}$ es convergente en H_t. Por lo tanto H_t es completo.

$\Leftarrow$] Supongamos que H_t es completo, luego probaremos que t es cerrado, es decir $u \in \mathfrak{D}(t)$ y $t[u_n - u] \to 0$

<u>En efecto:</u>

Sea $\{u_n\}$ una sucesión en $\mathfrak{D}(t)$, t-convergente a u, además como $\|u_n - u_m\|_t \to 0$, entonces tenemos:

$$t[u_n - u_m] \to 0 \qquad y \qquad \|u_n - u_m\| \to 0$$

Como H_t es completo, existe $u' \in \mathfrak{D}(t) = H_t$ tal que $\|u_n - u'\| \to 0$, luego tenemos

$$t[u_n - u'] \to 0 \qquad y \qquad \|u_n - u'\| \to 0$$

De aquí existe $u = u' \in \mathfrak{D}(t)$ y $t[u_n - u] \to 0$.

Por lo tanto t es cerrado

Teorema 2.3.7. *Sea t una forma sectorial en H. Si $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son sucesiones en $\mathfrak{D}(t)$ con $u_n \underset{t}{\rightarrow} u$ y $v_n \underset{t}{\rightarrow} v$, entonces $\lim t[u_n, v_n]$ existe.*

Además si t es cerrado, entonces

$$\lim_{n\to\infty} t[u_n, v_n] = t[u, v]$$

<u>**Demostración**</u>: Lo haremos en dos partes:

i) Primero probaremos que $\lim t[u_n, v_n]$ existe, es decir que $t[u_n, v_n]$ sea convergente.

<u>En efecto:</u>

Por la proposición (2.3.1) podemos asumir que t tiene *un* vertice $\gamma = 0$, y por la desigualdad (2.2.10), tenemos que

$$|t[u,v]| \leq (1+\tan\theta)\sqrt{\operatorname{Re} t[u] \operatorname{Re} t[v]}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
|t[u_n, v_n] - t[u_m, v_m]| &= |t[u_n, v_n] - t[u_m, v_n] + t[u_m, v_n] - t[u_m, v_m]| \\
&= |t[u_n - u_m, v_n] + t[u_m, v_n - v_m]| \\
&\leq |t[u_n - u_m, v_n]| + |t[u_m, v_n - v_m]| \\
&\leq (1+\tan\theta)(\sqrt{\operatorname{Re} t[u_n - u_m] \operatorname{Re} t[v_n]} + \sqrt{\operatorname{Re} t[u_m] \operatorname{Re} t[v_n - v_m]})
\end{aligned}$$

Ahora como $u_n \underset{t}{\rightarrow} u$ y $v_n \underset{t}{\rightarrow} v$, tenemos que $t[u_n - u_m] \rightarrow 0$ y $t[v_n - v_m] \rightarrow 0$.

Entonces $\operatorname{Re} t[u_n - u_m] \rightarrow 0$ y $\operatorname{Re} t[v_n - v_m] \rightarrow 0$, además $t[u_n]$ es convergente, de aquí acotado, de la misma forma para $\{v_n\}$.

Luego $|t[u_n, v_n] - t[u_m, v_m]| \rightarrow 0$, es decir $t[u_n, v_n]$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$ por lo tanto convergente.

ii) Probaremos que si t es cerrado, entonces $\lim t[u_n, v_n] = t[u, v]$

<u>En efecto:</u>

Sin pérdida de generalidad asumamos que t tiene un vertice $\gamma = 0$, además como t es cerrado, entonces para $u, v \in \mathfrak{D}(t)$, se tiene que $t[u_n - u] \rightarrow 0$ y $t[v_n - v] \rightarrow 0$.

De forma similar como en i) tenemos:

$$\begin{aligned}
|t[u_n, v_n] - t[u, v]| &= |t[u_n, v_n] - t[u, v_n] + t[u, v_n] - t[u, v]| \\
&\leq |t[u_n - u, v_n]| + |t[u, v_n - v]| \\
&\leq (1+\tan\theta)(\sqrt{\operatorname{Re} t[u_n - u] \operatorname{Re} t[v_n]} + \sqrt{\operatorname{Re} t[u] \operatorname{Re} t[v_n - v]})
\end{aligned}$$

Pero tenemos que $\operatorname{Re} t[u_n - u] \rightarrow 0$ y $\operatorname{Re} t[u_n]$ es convergente de aquí acotado; similarmente para $\{v_n\}$.

Por lo tanto $t[u_n, v_n] \rightarrow t[u, v]$

Ejemplo 2.3.1. *Sea $T\,(H_1$ a $H_2)$ un operador y t una forma en H_1, tal que*

$$t[u, v] = \langle Tu, Tv \rangle$$

donde $\mathfrak{D}(s) = \mathcal{D}(S)$.

Entonces t *es cerrado si y sólo si* T *es un operador cerrado*

Demostración:

Basta probar que $u_n \underset{t}{\to} u$ sea equivalente a $u_n \underset{T}{\to} u$ y $t[u_n - u] \to 0$ sea equivalente a $Tu_n \to T_u$

$$\begin{aligned} u_n \underset{t}{\longrightarrow} u &\Leftrightarrow u_n \to u \quad y \quad t[u_n - u_m] \to 0 \\ &\Leftrightarrow u_n \to u \quad y \quad \|Tu_n - Tu_m\| \to 0 \\ &\Leftrightarrow u_n \underset{T}{\longrightarrow} u \end{aligned}$$

2.4 Formas Cerrables

Definición 2.4.1. Una forma sectorial t se dice que es **cerrable** si esta tiene una extensión cerrada.

Definición 2.4.2. Para una forma cerrable t, la clausura $\tilde{t}$ de t es definida de la siguente manera

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{D}(\tilde{t}) = \{u \in H/ \text{ para alguna sucesión } \{u_n\} \text{ en } \mathfrak{D}(t), u_n \underset{t}{\longrightarrow} u\} \\ &\tilde{t}[u, v] = \lim_{n\to\infty} t[u_n, v_n], \quad \text{para las sucesiones } u_n \underset{t}{\longrightarrow} u \text{ , } v_n \underset{t}{\longrightarrow} v \end{aligned}\right\} \tag{2.4.1}$$

$\tilde{t}$ es llamada la **clausura** de t, y es la extensión cerrada más pequeña de t.

Teorema 2.4.1. *Una forma sectorial* T *es cerrable si y sólo si* $u_n \underset{t}{\to} 0$*, implica que* $t[u_n] \to 0$

Demostración:

$\Rightarrow$] Sea t_1 una extensión cerrada de t, ahora si $u_n \underset{t}{\to} 0$, entonces $u_n \underset{t_1}{\to} 0$.

Luego como t_1 es cerrado tenemos $t[u_n] = t_1[u_n] = t_1[u_n - 0] \to 0$.

Por lo tanto $t[u_n] \to 0$

Proposición 2.4.2. $\tilde{t}$ *es una forma sesquilineal bien definida*

Demostración:

(**i**) $\mathfrak{D}(\tilde{t})$ es un subespacio de H

En efecto:

Sean $u, v \in \mathfrak{D}(\tilde{t})$ y α, $\beta \in \mathbb{C}$, entonces de la definición (2.4.1) existen sucesiones $\{u_n\}$, $\{v_n\} \in \mathfrak{D}(t)$ tal que $u_n \underset{t}{\to} u$ y $v_n \underset{t}{\to} v$

Como $\mathfrak{D}(t)$ es un subespacio, luego $\alpha u_n + \beta v_n \in \mathfrak{D}(t)$, ahora por la proposición (2.3.2), $\alpha u_n + \beta v_n \underset{t}{\to} \alpha u + \beta v$, de aquí por la definición de $\mathfrak{D}(\tilde{t})$, tenemos $\alpha u + \beta v \in \mathfrak{D}(\tilde{t})$.

Por lo tanto $\mathfrak{D}(\tilde{t})$ es un subespacio de H

(**ii**) $\tilde{t}$ es un forma sesquilineal

En efecto:

Dados $u', u'', v \in \mathfrak{D}(\tilde{t})$, existen sucesiones $\{u'\}$, $\{u''_n\}$, $\{v_n\} \in \mathfrak{D}(t)$ tal que $u'_n \underset{t}{\to} u'$, $u''_n \underset{t}{\to} u''$ y $v_n \underset{t}{\to} v$, entonces por el teorema (2.3.7) existen

$$\lim_{n\to\infty} t[u'_n, v_n] \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} t[u''_n, v_n]$$

Además por la definición (2.4.1)

$$\begin{aligned}\tilde{t}[u', v] + \tilde{t}[u'', v] &= \lim_{n\to\infty} t[u'_n, v_n] + \lim_{n\to\infty} t[u''_n, v_n] \\ &= \lim_{n\to\infty} \{t[u'_n, v_n] + t[u''_n, v_n]\} \\ &= \lim_{n\to\infty} t[u'_n + u''_n, v_n] \\ &= \tilde{t}[u' + u'', v]\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tilde{t}$ es lineal en el primer argumento, de forma similar se puede probar la homogeneidad en el primer argumento y conjugado lineal en el segundo.

(**iii**) $\tilde{t}$ está bien definida

Probaremos que lim $t[u_n, v_n]$ depende sólo de u y v y no de la elección de las sucesiones.

En efecto:

Si $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ son sucesiones en $\mathfrak{D}(t)$ tal que $u_n \underset{t}{\to} u$ y $v_n \underset{t}{\to} v$, entonces el $\lim t[u_n, v_n]$ existe (teorema 2.3.7)

Supongamos que existen otras sucesiones $\{u'_n\}$ y $\{v'_n\}$ en $\mathfrak{D}(t)$ tal que $u'_n \underset{t}{\to} u'$, y $v'_n \underset{t}{\to} v'$, luego por la proposición (2.3.2)

$$(u_n - u'_n) \underset{t}{\longrightarrow} 0 \qquad y \qquad (v_n - v'_n) \underset{t}{\longrightarrow} 0$$

de esto tenemos

$$t[u_n - u'_n] \to 0 \qquad y \qquad t[v_n - v'_n] \to 0$$

Asumiendo que t tiene un vertice $\gamma = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}|t[u'_n, v'_n] - t[u_n, v_n]| &= |t[u'_n, v'_n] - t[u_n, v'_n] + t[u_n, v'_n] - t[u_n, v_n]| \\ &\leq |t[u'_n - u_n, v'_n]| + |t[u_n, v'_n - v_n]| \\ &\leq (1 + \tan\theta)(\sqrt{\operatorname{Re} t[u'_n - u_n] \operatorname{Re} t[v'_n]} + \sqrt{\operatorname{Re} t[u_n] \operatorname{Re} t[v'_n - v_n]}) \\ &\to 0\end{aligned}$$

De aquí tenemos que $t[u'_n, v'_n] = t[u_n, v_n]$

Por lo tanto $\tilde{t}$ está bien definida

Proposición 2.4.3. *$\tilde{t}$ es una extensión de t*

Demostración:

Probaremos que $\mathfrak{D}(t) \subseteq \mathfrak{D}(\tilde{t})$ y $t[u, v] = \tilde{t}[u, v] \quad \forall u, v \in \mathfrak{D}(t)$

En efecto:

Dados $u, v \in \mathfrak{D}(t)$, entonces tomemos $\{u_n\} = u$ y $\{v_n\} = v$, $\forall n \in \mathbb{N}$; luego podemos afirmar que $u_n \underset{t}{\to} u$ y $v_n \underset{t}{\to} v$, de este modo $u, v \in \mathfrak{D}(\tilde{t})$, es decir $\mathfrak{D}(t) \subseteq \mathfrak{D}(\tilde{t})$, además

$$\tilde{t}[u,v] = \lim_{n\to\infty} t[u_n, v_n] = t[u,v]$$

Por lo tanto $\tilde{t}$ es una extensión de t

Proposición 2.4.4. *H_t es denso en $H_{\tilde{t}}$*

Demostración: Probaremos que dado $u \in H_{\tilde{t}}$, existe una sucesión $\{u_n\} \in H_t$ tal que $\|u_n - u\|_{\tilde{t}} \to 0$

En efecto: Afirmamos que

$$\text{Si} \quad u_n \underset{t}{\to} u, \text{ entonces} \quad \tilde{t}[u_n - u] \to 0 \tag{2.4.2}$$

Esto es cierto ya que por la definición (2.4.1)

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{t}[u_n - u] = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} t[u_n - u_m]$$

es cero si $u_n \underset{t}{\to} u$

Como $\tilde{t}$ es una extensión de t, entonces H_t es *un* subespacio vectorial de $H_{\tilde{t}}$, por la proposición (2.3.4) y ecuación (2.4.2), si $\{u_n\} \in \mathfrak{D}(t)$ es t-convergente, entonces $\{u_n\}$ es de Cauchy en H_t, luego dado $u \in H_{\tilde{t}}$, existe una sucesión $\{u_n\}$ en H_t tal que $\|u_n - u\|_{\tilde{t}} \to 0$

Por lo tanto H_t es denso en $H_{\tilde{t}}$.

Proposición 2.4.5. *$\tilde{t}$ es cerrado*

Demostración:

Para probar que $\tilde{t}$ es cerrado basta demostrar que $H_{\tilde{t}}$ es completo (teorema 2.3.6)

En efecto:

Sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $H_{\tilde{t}}$, desde que H_t es denso en $H_{\tilde{t}}$, existe una sucesión $\{v_n\} \in H_t$ tal que $\|v_n - u_n\|_{\tilde{t}} \leq \frac{1}{n}$. Entonces $\{v_n\}$ es de Cauchy en $H_{\tilde{t}}$, ahora por la proposición (2.3.6) $v_n \underset{\tilde{t}}{\to} v$ para algún $v \in H_{\tilde{t}}$. Luego podemos afirmar que $u_n \to v$, asi pues $H_{\tilde{t}}$ es completo

Teorema 2.4.6. *Una forma cerrable t con dominio H es acotado*

Demostración:

Sin perdida de generalidad asumamos que t tiene un vertice 0. Desde que $\mathcal{D}(t) = H$, y $\tilde{t}$ es una extensión de t, entonces $\mathfrak{D}(\tilde{t}) = H$, de esta manera $t = \tilde{t}$, luego la forma t es cerrada. De aquí por el teorema (2.3.6), si t es cerrado, entonces H_t es completo. Ahora por la desigualdad (2.3.3), tenemos $\|u\|_t \geq \|u\|$, $\forall u \in H$

Consideremos la aplicación

$$T : H_t \to H, \qquad \text{dada por} \qquad Tu = u$$

Entonces $\|Tu\| = \|u\| \leq \|u\|_t$ y asumiendo que $u \neq 0$, tenemos

$$\|T\| = \sup_{u \in H_t - \{0\}} \frac{\|Tu\|}{\|u\|_t} \leq \sup_{u \in H_t - \{0\}} 1 = 1$$

Luego el operador T es acotado con $\|T\| \leq 1$, además su dominio H_t es cerrado. Pero sabemos que si T es acotado con dominio cerrado, entonces T es cerrado. Asi mismo como T es inyectiva y cerrado, se deduce que, T^{-1} es acotado.

Ahora como T^{-1} es acotado para todo $u \in \mathfrak{D}(t)$, tenemos

$$\|u\|_t = \left\|T^{-1}u\right\|_t \leq \left\|T^{-1}\right\| \|u\| \tag{2.4.3}$$

Además por la ecuación (2.3.3)

$$\|u\|_t^2 = \|u\|_{\mathrm{Re}\, t}^2 = (\mathrm{Re}\, t + I)[u] = \mathrm{Re}\, t[u] + \|u\|^2 \tag{2.4.4}$$

Entonces de (2.4.3) y (2.4.4)

$$\mathrm{Re}\, t[u] \leq \mathrm{Re}\, t[u] + \|u\|^2 \leq \left\|T^{-1}\right\|^2 \|u\|^2$$

Ahora por la desigualdad (2.2.10)

$$\begin{aligned} |t[u,v]| &\leq (1 + \tan\theta)\sqrt{\mathrm{Re}\, t[u]\, \mathrm{Re}\, t[v]} \\ &\leq (1 + \tan\theta) \left\|T^{-1}\right\| \|u\| \left\|T^{-1}\right\| \|v\| \\ &= (1 + \tan\theta) \left\|T^{-1}\right\|^2 \|u\| \|v\| \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Por lo tanto t es acotado

Definición 2.4.3. Sea t una forma sectorial cerrada. Un subespacio vectorial D' de $\mathfrak{D}(t)$ es un **core** de t si la restricción, t' de t, a D' tiene clausura t, es decir $\tilde{t}' = t$

Por la proposición (2.3.1), *t*-convergencia, $t+\alpha I$-convergencia y Re *t*-convergencia son equivalentes, de esta forma D' es un core de t sii, D' es un core de $t + \alpha I$ para algún $\alpha \in C$, o sii D' es un core de Re *t*

Proposición 2.4.7.

i) *un core D' de t es denso en $\mathfrak{D}(t)$*

ii) *Si t es acotado y D' es denso en $\mathfrak{D}(t)$, entonces D' es un core de t*

<u>Demostración:</u>

i) Probaremos que D' es denso en $\mathfrak{D}(t)$, es decir dado $u \in \mathfrak{D}(t)$, existe $\{u_n\} \in D'$ tal que $u_n \to u$

<u>En efecto:</u>

Sea $u \in \mathfrak{D}(t)$, y t' la restricción de t a D'; además si D' es un core de t, entonces $\tilde{t}' = t$, luego

$$\mathfrak{D}(t) = \mathfrak{D}(\tilde{t}) = \{u \in H / \exists \{u_n\} \text{ en } D', u_n \underset{t'}{\to} u\}$$

Entonces de aquí tenemos que $u_n \to u$. Por lo tanto D' es denso en $\mathfrak{D}(t)$

ii) Probaremos que D' es un core de t, es decir que $\tilde{t}' = t$

<u>En efecto:</u>

Como D' es denso en $\mathfrak{D}(t)$, entonces dado $u \in \mathfrak{D}(t)$, existe una sucesión $\{u_n\}$ en D' tal que $u_n \to u$

Sea t' la restricción de t a D', luego como t es acotado

$$\begin{aligned} |t'[u_n - v_n]| &= |t[u_n - v_n]| \\ &\leq \|t\| \, \|u_n - u_m\|^2 \\ &\to 0 \end{aligned}$$

Luego tenemos que $u_n \to u$ y $|t'[u_n - u_m]| \to 0$, es decir $u_n \underset{t'}{\to} u$. De aquí $u \in \mathfrak{D}(\tilde{t}')$ y $\mathfrak{D}(t) \subseteq \mathfrak{D}(\tilde{t}')$. También tenemos

$$\begin{aligned} (\tilde{t'} - t)[u] &= \lim_{n\to\infty} (\tilde{t'} - t)[u_n] \\ &= \lim(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego $\tilde{t}' = t$. Por lo tanto $\tilde{t}'$ es una extensión de t

Teorema 2.4.8. *Sea t una forma sectorial cerrada. Un subespacio vectorial D' de $\mathfrak{D}(t)$ es un core de t si y sólo si D' es denso en H_t*

<u>**Demostración:**</u>

$\Rightarrow$] Por la prueba del la proposición (2.4.4) dada una forma k, su clausura es $\tilde{k}$, entonces H_k es denso en $H_{\tilde{k}}$

$\Leftarrow$] Sea t' la restricción de t a D', como D' es denso en H_t, entonces para $u, v \in \mathfrak{D}(t)$, existen sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ en D' tal que

$$u_n \underset{t}{\to} u \text{ y } v_n \underset{t}{\to} v$$

Ahora por la definición (2.4.1) y el teorema (2.3.7) tenemos que $\mathfrak{D}(t) \subseteq \mathfrak{D}(t')$ y

$$\tilde{t}' = \lim(t'[u_n, v_n]) = \lim(t[u_n, v_n]) = t[u, v]$$

Entonces $\tilde{t}'$ es una extensión de t.

Asimismo para $u, v \in H - \mathfrak{D}(t)$, no existe una sucesión en D' t-convergente a u y v; de este modo $u, v \notin \mathfrak{D}(\tilde{t}')$.

Por lo tanto $t = \tilde{t}'$

CAPÍTULO 3. OPERADORES ASOCIADOS A FORMAS SESQUILINEALES

En este capítulo estudiaremos la relación entre operadores lineales y formas sesquilineales. En el caso de formas acotadas, esta relación fue hallada por Riesz, estableciendo una correspondencia uno a uno entre los operadores lineales y las formas sesquilineales. Para formas no acotadas, la relación entre operadores y formas fueron encontrados por Friedrichs, entre otros.

3.1 Teorema de la representación de Riesz

Antes de probar el teorema principal de esta sección, el teorema de la representación de Riesz para formas sesquilineales acotadas, daremos, otro resultado similar, debido a Riesz - Frechet, que se encuentra en el capitulo 1 (lema 1.4.6).

Lema 3.1.1. (***Riesz - Frechet***)

Sea f $: H \to \mathbb{C}$ *una funcional lineal acotada. Entonces existe un único* $z \in H$ *tal que se cumple*

$$f(x) = \langle x, z \rangle$$

donde $\|z\| = \|f\|$

Teorema 3.1.2. (***Teorema de Riesz***)

Sea $t: H \times H \to \mathbb{C}$ *una forma sesquilineal acotada. Entonces existe un único operador lineal acotado* $T : H \to H,$ *tal que se cumple*

$$t[u, v] = \langle Tu, v \rangle \tag{3.1.1}$$

donde $\|T\| = \|t\|$

<u>Demostración:</u>

Para cada $u \in H,$ definamos una funcional lineal, $f_u : H \to \mathbb{C}$ tal que

$$f_u(v) = \overline{t[u, v]}$$

Como t es acotada, se deduce que la funcional f_u es acotada. luego por el teorema de Riesz-Frechet, existe un único $z_u \in H$ tal que

$$f_u(v) = \langle v, z_u \rangle = \overline{t[u, v]}$$

es decir

$$t[u, v] = \langle z_u, v \rangle$$

Como necesitamos tener la representación (3.1.1), entonces definamos un operador $T : H \to H$ por

$$Tu = z_u$$

Probaremos que T es lineal, acotado, único además $\|t\| = \|T\|$

<u>En efecto:</u>

i) T es lineal

Para $u_1, u_2, v \in H$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), v\rangle &= t[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v] \\
&= \alpha_1 t[u_1, v] + \alpha_2 t[u_2, v] \\
&= \alpha_1 \langle Tu_1, v\rangle + \alpha_2 \langle Tu_2, v\rangle \\
&= \langle \alpha_1 Tu_1 + \alpha_2 Tu_2, v\rangle
\end{aligned}$$

Por consiguiente: $T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 Tu_1 + \alpha_2 Tu_2$

Por lo tanto T es lineal

ii) T es acotado, y $\|t\| = \|T\|$

Si $T = 0$, entonces $Tu = zu = 0$, se sigue que $t[u, v] = \langle 0, v\rangle = 0$. Luego $t = 0$, de este modo T y t son acotados y se cumpel $\|t\| = 0 = \|T\|$.

Si $T \neq 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|t\| &= \sup_{u,v\in H-\{0\}} \frac{|\ t[u,v]\ |}{\|u\|\ \|v\|} \\
&= \sup_{u,v\in H-\{0\}} \frac{|\ \langle Tu, v\rangle\ |}{\|u\|\ \|v\|} \\
&\geq \sup_{u\in H-\{0\}} \frac{|\ \langle Tu, Tu\rangle\ |}{\|u\|\ \|Tu\|} \\
&= \sup_{u,v\in H-\{0\}} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} \\
&= \|T\|
\end{aligned}$$

Así pues T es acotado y se cumple la siguiente desigualdad $\|t\| \geq \|T\|$.

Por otro lado por la desigualdad de Schwartz, tenemos

$$\begin{aligned}
\|t\| &= \sup_{u,v\in H-\{0\}} \frac{|\ \langle Tu, v\rangle\ |}{\|u\|\ \|v\|} \\
&\leq \sup_{u\in H-\{0\}} \frac{\|Tu\|\ \|v\|}{\|u\|\ \|v\|} \\
&= \|T\|
\end{aligned}$$

Así pues $\|t\| \leq \|T\|$ De esto se deduce que $\|t\| = \|T\|$

iii) T es único

Para mostrar que T es único, supongamos que existe otro operador lineal $S : H \to H$ satisfaciendo (3.1.1), entonces para todo $u, v \in H,$ tenemos

$$t[u, v] = \langle Tu, v\rangle = \langle Su, v\rangle$$

De esta manera $Tu = Su$, es decir $T = S$, luego T es único

Por lo tanto de i) , ii) y iii) tenemos que, existe un único operador lineal acotado T tal que $t[u, v] = \langle Tu, v\rangle$ y $\|t\| = \|T\|$

3.2 Teoremas de representación para formas no acotadas

Para formas no acotadas, una representacion del tipo encontrado en el teorema (3.1.2) no siempRe existe. Sin embargo, una representación similar pero con ciertas restricciones para algunas formas, si existe, aunque esta relación no se cumple en todo el dominio de la forma sesquilineal. No obstante si restringimos aún más el tipo de operador, entonces obtendremos otro tipo de representación, que este definido en todo su dominio.

El siguiente teorema lo denominaremos primera representación del teorema y lo tratamos a continuación.

Teorema 3.2.1. (***Primera representación del teorema***)

Sea $t[u, v]$ una forma sesquilineal sectorial cerrada y densamente definida en H. Entonces existe un operador m-sectorial T sobre H tal que para todo $u \in \mathcal{D}(T)$ y $v \in \mathcal{D}(t)$, tenemos

$$t[u, v] = \langle Tu, v\rangle$$

Demostración:

Empezamos la demostración recordando que si t es una forma sectorial, entonces por la notación y definición en (2.3.4), tenemos que

$$H_t = H_{\mathrm{Re}\ t-\gamma I} \quad \text{y} \quad \mathrm{Re}\ T - \gamma \mathrm{I} \geq 0$$

Luego sin pérdida de generalidad, asumamos que: t tiene un vertice $\gamma = 0$, de este modo $\mathrm{Re}\ t \geq 0$.

Como t es una forma sectorial cerrada en $H,$ entonces por el teorema (2.3.6) se tiene que H_t es completo con el producto interno definido por

$$\langle u, v\rangle_t = \langle u, v\rangle_{\mathrm{Re}\ t} = (\mathrm{Re}\ t + I)[u, v]$$

Además por la ecuación (2.3.3), tenemos que

$$\|u\| \leq \|u\|_t \qquad (3.2.1)$$

También por la proposición (2.3.5) t es acotado sobre H_t

Ahora consideremos la forma $t_1 = t + I$, esta forma sesquilineal es acotada en H_t

En efecto:

$$\begin{aligned} |(t+I)[u,v]| &= |t[u,v] + I[u,v]| \\ &\leq |t[u,v]| + |\langle u,v\rangle| \\ &\leq k\,\|u\|_t\,\|v\|_t + \|u\|\,\|u\| \\ &\leq k\,\|u\|_t\,\|v\|_t + \|u\|_t\,\|u\|_t \\ &= (k+1)\,\|u\|_t\,\|v\|_t \end{aligned}$$

Consecuentemente t_1 es acotado en H_t.

Ahora como t_1 es acotado en H_t, luego por el teorema (3.1.2) existe un operador lineal acotado $S \in B(H_t)$ tal que

$$t_1[u, v] = \langle Su, v\rangle_t \quad \forall u, v \in H_t = \mathfrak{D}(t) \qquad (3.2.2)$$

Ahora por (2.1.9) y la desigualdad de Schwartz, para todo $u \in H_T$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|u\|_t^2 &= (\operatorname{Re} t + I)[u] \\ &= \operatorname{Re}(t+I)[u] \\ &= \operatorname{Re} t_1[u] \\ &= \operatorname{Re}\langle Su, u\rangle_t \\ &\leq |\langle Su, u\rangle_t| \\ &\leq \|Su\|_t\,\|u\|_t \end{aligned}$$

Por consiguiente $\|u\|_t \leq \|Su\|_t$

Verificaremos que el operador S es invertible, esto es mostraremos que el núcleo del operador es el conjunto cuyo elemento es el cero

En efecto: Si $Su = 0$, entonces para todo $v \in H_t$, tenemos

$$t_1[u, v] = \langle Su, v\rangle_t = \langle 0, v\rangle_t = 0$$

de este modo

$$t_1[u, u] = t[u, u] + \|u\|^2 = 0$$

Luego $u = 0$, desde que 0 es un vertice de t.

Por consiguiente S tiene una inversa

Ahora por la definición de operador inverso, tenemos:

$$S^{-1} : \mathcal{D}(S^{-1}) = \mathcal{R}(S) \to \mathcal{R}(S^{-1}) = \mathcal{D}(S)$$

Y se cumple que $\|u\|_t \leq \|Su\|_t$. Sea $S^{-1}u \in H_t$, para algún $u \in \mathcal{D}(S^{-1})$, tenemos

$$\|S^{-1}u\|_t \leq \|S(S^{-1}u)\|_t = \|u\|_t \tag{3.2.3}$$

De esta forma S^{-1} es acotado sobre $\mathcal{D}(S^{-1})$ tal que $\|S^{-1}\| \leq 1$

Ahora probaremos que el dominio de S^{-1} es todo H_T, esto es, $\mathcal{D}(S^{-1}) = \mathcal{R}(S) = H_t$

Es suficiente probar que si $u \in H_t$ tal que $u \perp \mathcal{D}(S^{-1}) = \mathcal{R}(S)$, entonces $u = 0$

<u>En efecto:</u>

Asumamos que $\mathcal{R}(S) = \mathcal{D}(S^{-1})$ sea cerrado. Entonces

$$H_t = \mathcal{D}(S^{-1}) \oplus \mathcal{D}(S^{-1})^{\perp}$$

donde

$$\mathcal{D}(S^{-1})^{\perp} = \{u \in H_t / u \perp \mathcal{D}(S^{-1})\}$$

Probaremos que $\mathcal{D}(S^{-1})^{\perp} = \{0\}$

Sea $u \in \mathcal{D}(S^{-1})^{\perp}$, entonces

$$\|u\|_t^2 = \mathrm{Re}\ t_1[u] = \mathrm{Re}\langle Su, u\rangle_t = 0$$

De aquí $u = 0$

Consiguientemente $\mathcal{D}(S^{-1}) = H_t$

Por otro lado como $\|S^{-1}u\|_t \leq \|u\|_t$, esto implica que $\|S^{-1}\| \leq 1$

Sea $u \in H$ fijo. Definamos una funcional lineal $f_u : H_t \to \mathbb{C}$ tal que

$$f_u(v) = \langle v, u\rangle \tag{3.2.4}$$

La funcional f_u es acotada sobre H_t, ya que

$$|f_u(v)| = |\langle v, u\rangle| \leq \|v\|\ \|u\| \leq \|v\|_t\ \|u\|_t$$

Ahora por el lema de Riesz - Frechet, esto implica que existe un único $u' \in H_t$, tal que $\forall v \in H_t$, tenemos $\|f_u\| = \|u'\|_t$, además

$$f_u(v) = \langle v, u' \rangle_t \tag{3.2.5}$$

por las expresiones (3.2.4) y (3.2.5), tenemos

$$\langle v, u' \rangle_t = \langle v, u \rangle \tag{3.2.6}$$

Afirmamos que $\|u'\|_t \leq \|u\|$, ya que

$$\|u'\|_t = \|f_u\| = \sup_{v \in H_t - \{0\}} \frac{|f_u(v)|}{\|v\|_t} \leq \sup_{v \in H_t - \{0\}} \frac{|f_u(v)|}{\|v\|} = \sup_{v \in H_t - \{0\}} \frac{|\langle v, u \rangle|}{\|v\|} \leq \|u\|$$

Luego

$$\|u'\|_t \leq \|u\| \tag{3.2.7}$$

- Ahora definamos un operador

$$A : H \to H_t \qquad tal\ que \qquad Au = S^{-1}u' \tag{3.2.8}$$

con $\mathcal{D}(A) = H$ y $\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(S^{-1}) = \mathcal{D}(S) = H_t$

i) Probaremos que A es lineal:

<u>En efecto:</u>

Sea $u_1, u_2 \in H$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle v, (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)' \rangle_t &= \langle v, (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle v, u_1 \rangle + \overline{\alpha_2} \langle v, u_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha_1} \langle v, u_1' \rangle_t + \overline{\alpha_2} \langle v, u_2' \rangle_t \\ &= \langle v, \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' \rangle_t \end{aligned}$$

Por consiguiente $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)' = \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2$

De aquí

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) &= S^{-1}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)' \\ &= S^{-1}(\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2') \\ &= \alpha_1 S^{-1} u_1' + \alpha_2 S^{-1} u_2' \\ &= \alpha_1 A u_1 + \alpha_2 A u_2 \end{aligned}$$

De aquí se deduce que A es lineal

ii) A es un operador acotado en H

<u>En efecto:</u>

Por las expresiones (3.2.8), (3.2.3) y (3.2.7) tenemos

$$Au = S^{-1}u', \qquad \|S^{-1}u\|_t \leq \|u\|_t \qquad y \qquad \|u'\|_t \leq \|u\|$$

Usando estos resultados para $u \in H$, tenemos

$$\|Au\| = \|S^{-1}u'\| \leq \|S^{-1}u'\|_t \leq \|u'\|_t \leq \|u\|$$

De este modo $\|A\| \leq 1$

Ahora usando la expresión (3.2.6), también la definición $Au = S^{-1}u'$, y por último de (3.2.2) se tiene $t_1[u, v] = \langle Su, v\rangle_t$, entonces para $u \in H$ y $v \in \mathfrak{D}(t)$, tenemos

$$\langle u, v\rangle = \langle u', v\rangle_t = \langle SAu, v\rangle_t = t_1[Au, v] = (t + I)[Au, v] = t[Au, v] + \langle Au, v\rangle$$

Esto implica que

$$t[Au, v] = \langle u, v\rangle - \langle Au, v\rangle = \langle u - Au, v\rangle \tag{3.2.9}$$

iii) El operador *A* es inyectivo

<u>En efecto:</u> usando la expresión (3.2.9)

Si $Au = 0 \Rightarrow \langle u, v\rangle = t[Au, v] + \langle Au, v\rangle = 0, \forall v \in H_t$, lo cual implica que $u = 0$, desde que $H_t = \mathfrak{D}(t)$ es denso en H por hipotesis.

Luego A es inyectiva

Como A es inyectiva, de esta forma tiene una inversa

$$A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{D}(A)$$

Haciendo $w = Au$, entonces $u = A^{-1}w$ y denotando por I el operador identidad sobre $\mathcal{R}(A)$. Entonces por (3.2.9)

$$t[w, v] = \langle A^{-1}w - AA^{-1}w, v\rangle = \langle (A^{-1} - I)w, v\rangle \qquad w \in \mathrm{R}(A), v \in H_t$$

Ahora definamos

$$T = A^{-1} - I$$

$$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(A^{-1} - I) = \mathcal{D}(A^{-1}) \cap \mathcal{D}(I) = \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A), \text{ entonces}$$
$$t[w, v] = \langle Tw, v\rangle$$

$w \in \mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(T) \subseteq H_t = \mathcal{D}(t), v \in H_t = \mathcal{D}(t)$

Como el operador A es acotado y su dominio $\mathcal{D}(A) = H$ es cerrado, entonces A es cerrado (teorema 1.6.1), además A^{-1} es también cerrado. El operador identidad I es acotado y $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A) = \mathcal{D}(I)$.

Luego el operador $T = A^{-1} - I$ es cerrado (teorema 1.6.2)

Desde que $t[u] = \langle Tu, u \rangle$, entonces el operador T y la forma sesquilineal t tienen el mismo rango numérico

$$\mathrm{w}(T) = w(T)$$

De aquí como t es sectorial, luego T es sectorial (ejemplo 2.2.1).

Además $\mathcal{R}(T + I) = \mathcal{R}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A) = H$ de esta forma T es m-sectorial

CONCLUSIONES

Después de haber realizado el presente trabajo, consistente en soluciones aproximadas de raices de ecuaciones no lineales de una variable, con una variante del Método de Newton hemos logrado las siguientes conclusiones:

1. Se muestra que la variante del método de Newton es al menos convergente de tercer orden si y solo si la primera, segunda y tercera derivada de la función existe en una vecindad de la raíz.

2. Los resultados numéricos (Tabla 1) apoyan la convergencia de tercer orden, y para algunas funciones el orden de convergencia computacional es aún más que tres.

3. La característica más importante de la variante del Método de Newton es que a diferencia de todas las otras aproximaciones de tercer orden o mayores, este método no requiere calcular las derivadas mayores de segundo orden de la función para llevar a cabo la iteración.

4. Aparentemente la variante del método de Newton necesita una evaluación de la función más en cada iteración, cuando es comparada con el método de Newton, sin embargo es evidente que los resultados calculados (Tabla 1) resultan que el número total de evaluación de funciones requerido es menor que la del método de Newton.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Bakhualov, N., *Métodos Numéricos, Análisis, Álgebra, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Madrid, 1980.

[2] Burden R. and Faires D., *Numerical Analysis*, PWS, Kent PublisH, Boston, 1993.

[3] Gilbert, S., *Introducción to Applied Mathematics*, Massachusetts Institute of Technology, Alambra S.A., Impreso en España, Primera Edición, 1975.

[4] Kelley, C., *Iterative Methods for Linear Nonlinear Equations*, SIAM. Philadelphia, 1995.

[5] Kudriavtsev, L., *Curso de Análisis Matemático*, Tomo I, Editorial Mir Moscú, 1986.

[6] Lange, K., *Numerical Analysis for Statisticians,* New York, 1999.

[7] Mathews, J. and Fink, K., *Métodos Numéricos con Matlab*, Tercera Edición, Madrid, 2000.

[8] Nieves, A. and Dominguez, F., *Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería*, México, 1998.

[9] Shoichiro, N. and Gutierrez, R., *Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab*, Edit. Prentice Hall Hispanoamericana S.A, 1997.

AUTOR

MIGUEL ANDERSON VALVERDE MORALES – Licenciado en Matemáticas, egresado de la facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad Nacional de Trujillo. Magister en Economía con mención en Gestión Empresarial, con segunda especialidad en Tecnología educativa, mención Informática Educativa. Amplia experiencia en la docencia preuniversitaria, educación básica regular y universitaria en las diferentes instituciones de la ciudad de Trujillo-Peru.

OPERADORES SOBRE ESPACIOS DE HILBERT

ASOCIADOS A FORMAS SESQUILINEALES

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora

Año 2025

OPERADORES SOBRE ESPACIOS DE HILBERT

ASOCIADOS A FORMAS SESQUILINEALES

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora

Año 2025