

ORGANIZADOR:  
FABRÍCIO MORAES DE ALMEIDA

# EXPLORANDO O UNIVERSO DA MATEMÁTICA

TEORIA E APLICAÇÕES 2



**Atena**  
Editora  
Ano 2024

ORGANIZADOR:  
FABRÍCIO MORAES DE ALMEIDA

# EXPLORANDO O UNIVERSO DA MATEMÁTICA

TEORIA E APLICAÇÕES 2



**Atena**  
Editora  
Ano 2024

**Editora chefe**

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

**Editora executiva**

Natalia Oliveira

**Assistente editorial**

Flávia Roberta Barão

**Bibliotecária**

Janaina Ramos

**Projeto gráfico**

Camila Alves de Cremo

Ellen Andressa Kubisty

Luiza Alves Batista

Nataly Evilin Gayde

Thamires Camili Gayde

**Imagens da capa**

iStock

**Edição de arte**

Luiza Alves Batista

2024 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2024 Os autores

Copyright da edição © 2024 Atena

Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Os manuscritos nacionais foram previamente submetidos à avaliação cega por pares, realizada pelos membros do Conselho Editorial desta editora, enquanto os manuscritos internacionais foram avaliados por pares externos. Ambos foram aprovados para publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

**Conselho Editorial****Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará

Prof. Dr. Fabrício Moraes de Almeida – Universidade Federal de Rondônia

Profª Drª Glécilla Colombelli de Souza Nunes – Universidade Estadual de Maringá

Profª Drª Iara Margolis Ribeiro – Universidade Federal de Pernambuco

Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense

Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande

Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª Drª Maria José de Holanda Leite – Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Prof. Dr. Milson dos Santos Barbosa – Universidade Tiradentes

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte

Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Nilzo Ivo Ladwig – Universidade do Extremo Sul Catarinense

Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas

Profª Dr Ramiro Picoli Nippes – Universidade Estadual de Maringá

Profª Drª Regina Célia da Silva Barros Allil – Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí

Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Explorando o universo da matemática: teoria e aplicações 2

**Diagramação:** Thamires Camili Gayde  
**Correção:** Maiara Ferreira  
**Indexação:** Amanda Kelly da Costa Veiga  
**Revisão:** Os autores  
**Organizador:** Fabrício Moraes de Almeida

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)</b>	
E96	<p>Explorando o universo da matemática: teoria e aplicações 2 / Organizador Fabrício Moraes de Almeida. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2024.</p> <p>Formato: PDF                      Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader                      Modo de acesso: World Wide Web                      Inclui bibliografia                      ISBN 978-65-258-2478-9                      DOI: <a href="https://doi.org/10.22533/at.ed.789241104">https://doi.org/10.22533/at.ed.789241104</a></p> <p>1. Matemática. 2. Cálculo. I. Almeida, Fabrício Moraes de (Organizador). II. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDD 510</p>
<b>Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166</b>	

**Atena Editora**  
 Ponta Grossa – Paraná – Brasil  
 Telefone: +55 (42) 3323-5493  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

## DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

## DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

A matemática, com sua imensidão de conhecimento e aplicações, é um convite para uma jornada empolgante de descobertas concretas e abstratas. Além disso, é possível desvendar os segredos do universo (com o tempo tendendo para o infinito), utilizando matemática para formular leis e modelar sistemas complexos que potencializam o raciocínio, impulsionam a criatividade e otimizam soluções de problemas do presente e do futuro.

Diante disso, o livro apresenta os conceitos teórico-práticos nos resultados obtidos pelos diversos autores e coautores na produção de cada capítulo. Além de tudo, a Atena Editora oferece a divulgação científica com qualidade e excelência, fundamental para garantir o destaque entre as melhores editoras do Brasil.

*“Per logicam probamus, sed per intuitionem invenimus.”*

*( Jules Henri Poincaré )*

Fabício Moraes de Almeida



**CAPÍTULO 1 ..... 1****HEALTH CONDITION PERFORMANCE INDEX OF TWO CITIES IN THE BRAZIL/BOLIVIA BORDER REGION**

Carlos Alberto Paraguassú-Chaves

Fábio Robson Casara Cavalcante

Fabrício Moraes de Almeida


Dorosnil Alves Moreira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411041>**CAPÍTULO 2 ..... 18****DETERMINACIÓN DE LA CONCENTRACIÓN DE METALES PESADOS MEDIANTE LA CARACTERIZACIÓN DE MATERIAL PARTICULADO SEDIMENTABLE EN LA RESERVA BIOLÓGICA LIMONCOCHA, ECUADOR**

Javier Valdivieso Kastner

Katty Coral-Carrillo

Jorge Esteban Oviedo

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411042>**CAPÍTULO 3 ..... 36****DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS PARA LA TASA DE INFECCIÓN Y REMOCIÓN MENSUAL EN LA MODELACIÓN MATEMÁTICA SIR DE LA PANDEMIA DEL COVID-19. CASO COMPARATIVO**

Juan Arturo Vásquez Velásquez


Luis Jaime Collantes Santisteban

Manuel Alberto Manay Fernández

Manuel Pérez Tapia

Walter De la Cruz De la Cruz


Wilfredo Vidal Irrasábal Gonzales

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411043>**CAPÍTULO 4 ..... 65****THE EFFECTIVENESS OF USING NEAR-PEER ROLE MODELS AND MENTORING: A PHENOMENOLOGICAL REFLECTION ON STEM FOR SUCCESS**

Bruce Bukiet

Cristo Ernesto Yáñez León

James Lipuma





 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411044>**CAPÍTULO 5 ..... 72****CONOCIMIENTOS TECNOLÓGICOS Y EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO IDÓNEO DE PROFESORES EN LA ENSEÑANZA DE CUADRILÁTEROS**

Jesús Victoria Flores Salazar

Morella Cristina Théry Romero

Daisy Julissa García Cuéllar

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411045>

<b>CAPÍTULO 6 .....</b>	<b>84</b>
USO DO MATLAB NO ESTUDO DE MATRIZES E SISTEMAS LINEARES	
Camila Fredegoto Santos	
Wellington José Corrêa	
 <a href="https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411046">https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411046</a>	
<b>CAPÍTULO 7 .....</b>	<b>90</b>
A EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS: UMA PESQUISA HISTÓRICA	
Pablo Ernandes Alves Santos	
Gabriella Stephany Camargo Pimenta	
Rosângela Costa Bandeira	
 <a href="https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411047">https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411047</a>	
<b>CAPÍTULO 8 .....</b>	<b>100</b>
UM POUCO DA HISTÓRIA DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DESSE TEMA	
Erick Felipe Maia Silva	
Flávia Letícia Castro de França	
Lucianny Wanessa Baia Pinheiro	
Arthur da Costa Almeida	
 <a href="https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411048">https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411048</a>	
<b>CAPÍTULO 9 .....</b>	<b>105</b>
DOMINÓS E DADOS: ESTRATÉGIAS PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ARITMÉTICA	
Hilda Hildebrand Soriani	
Camila Dall'Asta Stival	
Mateus Piaia Pessotto	
Janine da Rosa Albarello	
Félix Afonso de Afonso	
 <a href="https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411049">https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411049</a>	
<b>SOBRE O ORGANIZADOR .....</b>	<b>113</b>
<b>ÍNDICE REMISSIVO .....</b>	<b>114</b>

## HEALTH CONDITION PERFORMANCE INDEX OF TWO CITIES IN THE BRAZIL/BOLIVIA BORDER REGION

*Data de aceite: 01/04/2024*

### **Carlos Alberto Paraguassú-Chaves**

PhD in Health Sciences - University of Brasília - UnB, Brazil; PhD in Science - University of Havana (Cuba); Post-Doctor in Health Sciences - UnB and Degli Studi D'Aquila University - IT. Professor at the Federal University of Rondônia, Brazil

### **Fábio Robson Casara Cavalcante**

PhD and researcher linked to the graduate program in administration and the academic Department of Social and Environmental Sciences (DACSA) - Federal University of Rondônia, Brazil

### **Fabício Moraes de Almeida**

PhD in Physics (UFC), with post-doctorate in Scientific Regional Development (DCR/CNPq). Researcher of the Doctoral and Master Program in Regional Development and Environment (PGDRA/UNIR).

Leader — Technological and Systemic Development, and Researcher of GEITEC — Federal University of Rondonia, Brazil

### **Dorosnil Alves Moreira**

PhD in Education (Curriculum) from the Pontifical Catholic University of São Paulo. Professor at the Federal University of Rondônia, Brazil

**ABSTRACT:** The general objective of this study is to analyze the Health Conditions Performance Index in two border cities, seeking to identify the efficiency, efficacy and effectiveness of public health policies in the border region between Brazil and Bolivia. Factor analysis was used to create the health index based on the correlation of environmental, sociodemographic and administrative financial indexes. The tool for tabulating and generating the indices was SPSS. All indices performed bad, with no improvement over a period corresponding to 10 years. It is concluded that the cities of Guajará-Mirim and Guayaramerín face great difficulties to provide and guarantee complete environmental, social and economic well-being. Therefore, it is imperative that border municipalities develop specific public policies to promote, protect and recover the health of the population.

**KEYWORDS:** Health conditions. Performance Index. Brazil/Bolivia. border region.

## INTRODUCTION

The Brazilian city included in this study, located on the border of Brazil, has had great difficulty in providing its citizens with comprehensive health care. The lack of specialized human resources, the insufficiency of equipment to perform medium and high complexity procedures, and the distance between the municipality and the reference centers are the main justifications presented. In addition, the difficulty in planning the provision of these policies, due to the floating population that uses the system and which, in the Brazilian case, is not accounted for in the financial transfers of the Unified Health System (SUS), has been generating several difficulties whose main victim is the border citizen. In the case of the Bolivian city, the situation is much more complicated, due to the absence of a public health policy, in the format of the SUS model in Brazil. The authors Gadelha and Costa [1] analyze the health situation at the border and corroborate the statements pointing out the difficulties of providing comprehensive health care to this population. And, that the health system interferes in the economic, financial and political-administrative development of society in its fullness.

The aim of this research is to investigate the political and institutional situation in relation to health care in the border region. These areas are marked by the interaction and separation of cultures, economies and environments, which motivates the analysis of the way in which health systems respond to these complexities.

Thus, when one observes the scenario of the cities of Guajará-Mirim (Brazil) and Guayaramirín (Bolivia), separated by the Mamoré River in the Western Amazon region, from the perspective of public health services, it becomes evident that the performance of the sector presents significant variations between them. The question then arises: do these disparities reflect isolated cases or do they represent a common pattern of performance in border areas? The general objective of this study is to analyze the Health Condition Performance Index in these locations, seeking to identify the efficiency, efficacy and effectiveness of public health policies in the border region between Brazil and Bolivia.

In order to deepen the understanding of the research problem, we resorted to fundamental terms and concepts to understand the formulation of the Health Condition Development Index, especially the information system. According to Maranhão [2], this type of research encompasses four distinct phases: the collection of raw data, followed by the processing of these data, known as “processed data”; next, the formulation of indicators; and, finally, tabulation in indexes.

According to RIPSAs [3], indicators are synthetic measures that encompass relevant information on specific attributes and dimensions of health status, as well as on the performance of the health system. For Brazil [4], indicators are metrics that offer insights into the performance of an object (be it government, policy, program, organization, project, etc.), aiming at control, communication, and improvement.

The formulation of an indicator begins with the collection of raw data, which is then processed and associated with other existing ones, producing information that connects the scientific basis with reality, guiding sustainable decisions and generating knowledge - a long and laborious journey.

This is what Maranhão [2] calls the three basic functions of indicators – quantification, simplification of information and communication. Soligo [5] states that it constitutes a contribution of great utility and considerable acceptability when making use of a series of indicators in the planning and execution of public policies.

According to Brazil [4], the role of the indicator includes, among other aspects: - Measuring results and managing performance. – Subsidize the critical analysis of the results obtained and the decision-making process. – Contribute to the continuous improvement of organizational processes. – Facilitate performance planning and control. – Enable the comparative analysis of the performance of the organization and other organizations operating in similar areas or environments. For its part, OPAS [6] emphasizes that indicators are powerful tools to assist in the planning of public policies, by providing data on social, economic, political, environmental, and health realities. The table below highlights the roles of the indicators.

The complexity underlying the theme leads us to reflect on the very concept of health. As observed by the author Praça [7], conceptualizing health represents a challenging task, given its multidisciplinary nature that encompasses several fields of knowledge, such as social, economic, political, cultural and human.

In addition, this conceptualization varies according to the temporal, geographical, and socioeconomic context, and is influenced by individual values, scientific, religious, and philosophical conceptions, as pointed out by Scliar [8]. Capra [9] adds that health is the result of the dynamic balance between the physical and psychological aspects of the organism, as well as interactions with the natural and social environment. The definition of the World Health Organization (WHO) goes beyond the mere absence of disease, encompassing the state of complete physical, mental and social well-being [10].

According to the WHO's conception, the fields of health, idealized by Marc Lalonde in 1974, as described by Grisotto [11], include human biology, which encompasses genetic inheritance and the biological processes inherent to life, including aging factors; the environment; lifestyle; and the organization of health care.

The breadth of this concept of health demands a change in the organization and delivery of health services. It is not only a matter of considering the biological causes of disease, but also the social causes, such as hunger, lack of basic sanitation, inadequate housing, lack of access to education, unemployment, violence, environmental degradation, income inequality, among other conditions that are essential for a healthy and productive life [12].

The cities that make up the border region studied are: Guajará-Mirim, in the State of Rondônia, Brazil, and Guayaramirín, in the Department of Beni, in the Republic of Bolivia. Both municipalities have a population ranging from 40 to 45 thousand inhabitants.

## METHOD

This research is characterized as exploratory, following three distinct phases. In the first stage, we conducted a comprehensive bibliographic survey of the concepts, principles and norms pertinent to the theme. In the second stage of the research, we focused on gathering information on health conditions, which include material resources, human resources, availability of medium and high complexity care, as well as basic care. In addition, we also collected quantitative data on the population of the cities of Guajará-Mirim and Guayaramirín.

To conclude, we developed the Health Condition Performance Index (SDI), which is derived from the analysis of informational data collected over a 10-year period. This index results from the correlation between environmental, sociodemographic, and financial-administrative indicators, aiming to evaluate the efficacy, efficiency, and effectiveness of health conditions in the two cities located on the border between Brazil and Bolivia.

The tool adopted for tabulation and generation of the indices was the SPSS (Statistical Package for the Social Sciences), according to Santana [13]; [14]; Cavalcante [15].

A factor analysis model can be presented in matrix form as in Dillon; Goldstein [16] to:

$$x = aF + \varepsilon$$

Being

$X$  is the transposed  $p$ -dimensional vector of the observable variables, denoted by  $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ ;

$F$  is the  $q$ -dimensional transposed vector of unobservable variables or latent variables called common factors, denoted by  $F = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ , where  $q < p$ ;

$\varepsilon$  is the  $p$ -dimensional vector transposed from random variables or single factors, denoted by  $\varepsilon = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ ;

$\alpha$  is the matrix  $(p, q)$  of unknown constants, called factor loadings.

According to Gama et al. [17], in the factor analysis model, it is assumed that the specific factors are orthogonal to each other with all the common factors. Normally,  $E(\varepsilon) = E(F) = 0$  and  $\text{Cov}(\varepsilon, F) = 0$ .

The initial structure used to determine the matrix of factor loadings, in general, may not provide a significant pattern of variable loadings, so it is not definitive. The confirmation or not of this initial structure can be done by means of various methods of factor rotation, according to Dillon; Godstein [16]; Johnson; Wichern [18].

The VARIMAX method is a process in which the reference axes of the factors are rotated around the origin until some other position is reached. The goal is to redistribute the variance from the first factors to the others and achieve a simpler and theoretically more significant factorial pattern [19]; [20]; [14]; [17].

The choice of factors was performed using the latent root technique. Thus, the matrix of factor loadings, which measures the correlation between common factors and observable variables, is determined by means of the correlation matrix, according to Dillon; Goldstein [16].

To determine the Performance Indexes, the matrix of factorial scores estimated by the process of orthogonal rotation of factorial basis was adopted, as pointed out by Santana [14]. The factor score, by definition, places each observation in the space of common factors. For each  $f_j$  factor, the  $i$ -th factorial score extracted is defined by  $F_{ij}$ , expressed as follows [16]:

$$F_{ij} = b_1x_{i1} + b_2x_{i2} + b_px_{ip}$$

Whereas:

$b_i$  = These are the regression coefficients estimated for the  $n$  common factor scores;

$x_{ij}$  = These are the  $n$  observations of the  $p$  observable variables.

$i = 1, 2, \dots, n$ .

$j = 1, 2, \dots, p$ .

To arrive at the equation that represents the Performance Index, Gama et al. [17]; Santana [13]; [14], show the evolutionary sequence of the formulas from the previous equation. Thus, it can be seen that although the  $F_{ij}$  variable is not observable, it can be estimated by means of factor analysis techniques, using the matrix of observations of the vector  $x$  of observable variables. In factorial notation, the equation becomes:

$$F_{(n,q)} = X_{(n,q)}b_{(p,q)}$$

In equation 3,  $F$  is the regression matrix estimated from the  $n$  factor scores, which can be affected by both the magnitude and the units of measurement of the  $x$  variables. To overcome this type of problem, the variable  $x$  is replaced by the standardized variable  $w$ , given by the ratio between the deviation around the mean and the standard deviation of  $x$ , as follows:

$$W_{ij} =$$

With these values, equation 3 is modified, making possible equation 4, as follows:

$$F_{(n,q)} = w_{(n,q)}\beta_{(p,q)}$$

Based on equation 4, the matrix of beta weights ( $\beta$ ) with  $q$  standardized regression coefficients replaces  $b$ , given that the variables are standardized on both sides of the equation. Pre-multiplying both sides of equation 4 by the value  $w'$ , where  $n$  is the number of observations and  $w'$  is the transposed matrix of  $w$ , makes it possible to arrive at the following equation.

$$\frac{1}{k} w'_{(p,n)} w_{(n,p)} \beta_{(p,q)} = R_{(p,p)} \beta_{(p,q)}$$

The  $1/kw'w$  matrix, therefore, constitutes the matrix of inter-correlated variables or correlation matrix between the observations of the X matrix, designated by R. The  $1/k w^{\wedge} F$  matrix represents the correlation between the factor scores and the factors themselves, denoted by  $\Lambda$ .

If the matrix R is non-singular, one can pre-multiply both sides of equation 6 by the inverse of R, getting:

$$\beta = R^{-1} \Lambda$$

Substituting the vector in equation 4 yields the factorial score associated with each observation, as follows:

$$F_{(n,q)} = w_{(n,p)} R_{(p,p)}^{-1} \Lambda_{(p,q)}$$

Thus, the main formula of the Performance Index (DI) is reached, where the DI is defined as a linear combination of these factor scores and the proportion of variance explained by each factor in relation to the common variance. The mathematical expression is now represented by the following formula:

$$ID_i = \sum_{j=1}^a \left( \frac{\lambda_j}{\sum_j \lambda_j} FP_{ij} \right)$$

Where

$i = 1, 2, \dots, n$ .

$\lambda$  = is the variance explained by each factor;

$\sum \lambda$  = is the sum total of the variance explained by the set of common factors. The factorial score was standardized (PF) to obtain positive values of the original scores and to allow the hierarchization of the municipalities, since the values of the Performance Index are located between zero and one. The formula that allows this hierarchy can be seen by the following equation:

$$FP_i = \left( \frac{F_i - F_{min}}{F_{max} - F_{min}} \right)$$

Thus, it can be seen that  $F_{min}$  and  $F_{max}$  are the maximum and minimum values observed for the factor scores associated with the performance of each parameter analyzed by the research.

The indices are analyzed on a scale of 0.000 to 1.000, dispersed in five variables, demonstrating the performance of each city in the study area.



**Index Scale:**

0.000 to 0.200 (lousy performance)

0.201 to 0.400 (bad performance)

0.401 to 0.600 (regular performance)

0.601 to 0.800 (good performance)

0.801 to 1.000 (excellent performance).

## RESULTS AND DISCUSSION

### Environmental Performance Index (ADI)

Environmental analysis is the starting point of this study, aiming to organize information on basic sanitation, including water distribution, waste collection and sewage treatment. The construction of the Environmental Performance Index (ADI) is carried out through the combination of the following indicators: 1. Household access to drinking water. 2. Household waste collection. 3. Sanitary sewage system in households.

#### *Environmental Performance Index of the City of Guajará-Mirim/Brazil*

In the period in question, Guajará-Mirim has about 93% of its territory occupied by Conservation Units and Indigenous Lands. However, it faces significant challenges in the provision of health-related environmental services, as it performs very poorly according to the scale of analysis. The protection and promotion of individual and collective health in the environmental sphere are considered inefficient. Water distribution, waste collection and sewage treatment services are insufficient to meet local demand. Over the course of a decade, it has been found that there has been little or no improvement, indicating that environmental services remain precarious.

City	Reference year	10 years later	Current Table of Contents
Guajará-Mirim	0,255	0,230	Bad

Table 1: Environmental Development Index of the City of Guajará-Mirim

Source: Survey data

#### *Environmental Performance Index of the City of Guayaramerín/Bolivia*

The Environmental Performance Index of the city of Guayaramerín shows a poor performance of 0.248 in the first moment and a bad performance of 0.266 in the second moment. Territorial spaces provide their citizens with environmental and sanitary services of compromised quality, considered by the classification scale as bad.

City	Reference year	10 years later	Current Table of Contents
Guayaramerín	0,248	0,266	Bad

Table 2: Environmental Development Index of the City of Guayaramerín

Source: Survey data

Barata [21] highlights a sad and worrisome reality in the cities of Guajará-Mirim and Guayaramerín. The sanitary sewage system is practically non-existent. Sewage treatment is carried out only by black or septic tanks, or irregularly in the streams that cross the urban area, which seriously compromises the quality of local water resources. The garbage is collected and dumped in a dump without receiving any kind of treatment. Only in certain situations is contaminated medical waste incinerated, while the rest is dumped in the dump. According to research conducted by Barata [21], the proportion of households with access to the general network of treated water is still very low. The author also points out the absence of a sanitary sewage collection network in these locations. The lack of basic sanitation can result in serious public health problems, since water pollution can trigger diseases such as dysentery, dengue, yellow fever, leptospirosis, hepatitis A, among others. Another consequence of the lack of sanitation is related to environmental damage, such as floods, silting of rivers (resulting from deforestation and occupation of banks), loss of green areas, landslides and compromise of water bodies, which become garbage dumps and sewage channels. This reality is also observed in many cities, both Brazilian and Bolivian [22].

Basic sanitation plans play a crucial role, as they serve as tools for diagnosing the local situation and establishing priorities for investments and actions in the short, medium and long term. Azevedo [23], when examining the conditions and quality of life in reorganized areas, had already alerted us to the socio-environmental disparities in Amazonian cities, especially in relation to the deficiency in the supply of water for the population's consumption, the collection and proper disposal of solid waste, and, especially, basic sanitation. Paraguassú-Chaves [24], in their research entitled "Culture, Leisure and Health: A generalized (Dis)organization - a case study in Rondônia", and Paraguassú-Chaves [25], in "Social Inclusion in the Border Region", demonstrated that the municipalities located on the Brazil/Bolivia border, in this region of the Western Amazon, face extremely negative scenarios, characterized by a significant precariousness in water supply. In addition to garbage collection and sanitary sewage treatment. The data found in these studies only corroborate the analysis carried out by Paraguassú-Chaves [26] in the study "Conditions and Quality of Life in Reorganized Space". Machado [27] observes that environmental indicators, both quantitative and perceptual, are fundamental for the study of environmental performance.

## Socioeconomic and Demographic Performance Index (SDI)

The second phase for the elaboration of the Health Performance Index is the Sociodemographic Performance Index (SDI), which provides essential information about society. The construction of the IDSD involves the combination of the following indicators: Illiteracy rate, Life expectancy at birth, Gini index of per capita household income, Expected years of study, Percentage of the population living in poverty, Average household income per capita and Unemployment rate.

### *Socioeconomic and Demographic Performance Index of the City of Guajará-Mirim*

In the reference year, the city of Guajará-Mirim recorded a sociodemographic performance index of 0.344, indicating a poor performance. Ten years later, this index increased to 0.415, reflecting a performance considered regular. However, the number of functionally illiterate and unemployed people is still high, which highlights the lack of promotion of social rights to education and minimum income for subsistence. This demonstrates the ineffectiveness of consistent and effective public policies.

City	Reference year	10 years later	Current Table of Contents
Guajará-Mirim	0.344	0.415	Regular

Table 3: Socioeconomic and Demographic Performance Index of the City of Guajará-Mirim

Source: Survey data

### *Sociodemographic Performance Index of the City of Guayaramerín*

The city of Guayaramerín has a Sociodemographic Performance Index (SDI) of 0.345 (indicating poor performance) and 0.379 (also considered poor), revealing the lack of satisfactory socioeconomic public policies that are adequate to local needs. It is essential to improve the process of promoting social welfare, ensuring better living conditions, such as access to a stable income, quality education, and reduction of unemployment rates, among other important variables.

City	Reference year	10 years later	Current Table of Contents
Guayaramerín	0.345	0.379	Bad

Table 4: Sociodemographic Performance Index of the City of Guayaramerín

Source: Survey data

## Financial and Administrative Performance Index (IDFA)

The main objective of this index is to quantify the material, financial and human resources of health services, in order to determine whether the existing resources are sufficient to enable an effective, efficient and effective health recovery process. The formulation of the Administrative Financial Performance Index (IDFA) involves the combination of indicators, with Indicator 1 being the percentage of public expenditure on health in relation to total public expenditure. Indicator 2: Public expenditure on health per capita. Indicator 3: Number of surgeons (per 1000 inhabitants). Indicator 4: Number of general practitioners (per thousand inhabitants). Indicator 5: Number of nurses (per thousand inhabitants). Indicator 6: Number of obstetrician-gynecologists (per thousand inhabitants). Indicator 7: Number of hospital beds (per thousand inhabitants). Indicator 8: Number of dentists (per thousand inhabitants). Indicator 9: Number of mammographs (per thousand inhabitants). Indicator 10: Number of X-ray machines (per thousand inhabitants). Indicator 11: Number of CT scanners (per thousand inhabitants). Indicator 12: Number of MRI machines (per thousand inhabitants). Indicator 13: Number of ultrasound machines (per thousand inhabitants). Indicator 14: Number of dental equipment (per thousand inhabitants).

### *Administrative Financial Performance Index of the City of Guajará-Mirim*

The financial and administrative resources allocated to health are not adequate to local needs, demanding greater investments and public policies aimed at the recovery of health. The situation is alarming, as the material, human and financial resources for health are insufficient, inadequate and ineffective in the process of recovering the health of the citizens of Guajará-Mirim.

The city of Guajará-Mirim has an Administrative Financial Performance Index (IDFA) of 0.347 (indicating a poor performance) and currently maintains this performance with an IDFA of 0.368. Therefore, public policies aimed at health recovery are ineffective, since they do not have sufficient material and human resources to meet the needs of the local population.

City	Reference year	10 years later	Current Table of Contents
Guajará-Mirim	0.347	0.368	Bad

Table 5: Administrative Financial Performance Index of the City of Guajará-Mirim

Source: Survey data

### *Administrative Financial Performance Index of the City of Guayaramerín*

The city of Guayaramerín has underperformed. This indicates that the health recovery system does not adequately meet the needs of society, demanding greater and better financial, material, administrative and human resources. Initially, in the reference year of the survey, the Administrative Financial Performance Index (IDFA) presented an index of 0.335. Ten years later, the index remains unsatisfactory, remaining at 0.388. This evidences a persistence in the inadequacy of the resources allocated to the health system, which have not been able to promote significant improvements over time.

City	Reference year	10 years later	Current Table of Contents
Guayaramerín	0.335	0.388	Bad

Table 6: Administrative Financial Performance Index of the City of Guayaramerín

Source: Survey data

The Administrative Financial Performance Index (IDFA) reveals that the two border cities analyzed need more effective health recovery policies. It is clear that the material, financial and human resources currently available are insufficient to fully guarantee the right to health of border citizens. More robust and targeted measures are essential to address the challenges and improve the quality of health services in these regions.

### **Health Condition Performance Index (CDI)**

The balance between environmental, social and economic knowledge of health constitutes the instrumental basis of the process of elaboration of the Health Condition Performance Index. This is accomplished through a holistic and systematic view of problems, solutions and possibilities, as proposed by Capra (1982). The process of formulating the CDI involves the integration of environmental, socioeconomic and demographic, financial and administrative performance indices. Thus, the CDI is composed of the IDA (Environmental), IDSD (Sociodemographic) and IDFA (Financial and Administrative) indexes. The objective of the CDI is to provide essential information for the process of formulating public health policies in the border region. This comprehensive approach allows for a more complete understanding of the needs and challenges faced in this particular context, making it possible to implement more effective and targeted measures.

### *Health Condition Performance Index of the City of Guajará-Mirim*

In the city of Guajará-Mirim, in the two research periods, respectively, it presented an IDCS of 0.315 (bad performance) and an CDI of 0.337 (bad performance).

City	Reference year	10 years later	Current Table of Contents
Guajará-Mirim	0,315	0,337	Bad

Table 7: Health Condition Performance Index of the City of Guajará-Mirim

Source: Survey data

### *Health Condition Performance Index of the City of Guayaramerín*

The city of Guayaramerín has an CDI of 0.309 (bad performance) in the reference year and currently an IDCS of 0.344 (bad performance).

City	Reference year	10 years later	Current Table of Contents
Guayaramerín	0,309	0,344	Bad

Table 8: Health Condition Performance Index of the City of Guayaramerín

Source: Survey data

Medical or health care services were investigated by the author Paraguassu-Chaves [28]. In this research, the author sought to identify, from the perspective of health geography, the distribution and planning of infrastructure and human resources elements in the health care system.

In the analysis carried out by Paraguassu-Chaves [28], public health services have, throughout the historical process, only partially achieved their objectives. This author examines the elements that make up the health system through several indicators. Among them, the following stand out: human resources in the area of health, including training, professional experience, territorial and spatial distribution of professionals, legal attributions and competences; technological equipment and materials, considering real applications and needs; territorial and spatial distribution of health units; and hospital beds in public and private institutions, among other relevant aspects.

In its thematic maps, Paraguassu-Chaves [28] highlights the fragility of the human and infrastructural resources of the health system. Moret and Guerra [53] highlight the insufficiency of financial resources, specialized human resources, and equipment, along with the unequal distribution of these components in public health, resulting in the chaos that medical and health care services for the general population have become. According to Moret and Guerra [29], the population needs at least twice as many health units as the existing ones. These authors warn of the worsening of the pent-up demand in health, considering the shortage of doctors, specialist doctors, basic and specialized clinics, medical teams, hospital beds, equipment, devices and materials for medical use. They point out that these are urgent needs that require effective solutions.

According to Toda [30], the distribution of public health units presents significant inequalities, with areas lacking concentrated care [30]. According to Paraguassú-Chaves [28], the geographical distribution of health units is mainly influenced by political criteria and interests. As a result, the unequal distribution of state health services leads to a large influx of users seeking care far from their homes. In addition, medium and high complexity services are still bottlenecks in the medical care system.

There are still many barriers to access in outpatient and hospital services. Among these barriers, the unavailability of basic and specialized services to the majority of the population stands out, in addition to the geographical distribution of health units.

The following indicators were studied in the municipalities that make up the Brazil/Bolivia border by several authors: 1. Percentage of public expenditure on health in relation to total public expenditure. 2. Public spending on health per capita. 3. Number of surgeons (per 1000 inhabitants). 4. Number of general practitioners (per thousand inhabitants). 5. Number of nurses (per thousand inhabitants). 6. Number of obstetrician-gynecologists (per thousand inhabitants). 7. Number of hospital beds (per thousand inhabitants). 8. Number of dentists (per thousand inhabitants). 9. Number of mammographs (per thousand inhabitants). 10. Number of X-ray machines (per thousand inhabitants). 11. Number of CT scanners (per thousand inhabitants). 12. Number of magnetic resonance imaging machines (per thousand inhabitants). 13. Number of ultrasounds (per thousand inhabitants). 14. Number of dental equipment (per thousand inhabitants).

These studies have been conducted by several authors, including Paraguassú-Chaves in “Medical or health geography: space and disease in the Western Amazon”, Pereira in “Geoprocessing of occupational diseases in Rondônia in the last decade”, Souza Pereira in “Work and occupational disease”, Toda in “Spatial analysis of the distribution of the public health system of Porto Velho”, Paraguassú-Chaves in “Work and Occupational Diseases”, and Paraguassú-Chaves in “Conditions and Quality of Life in Reorganized Space”.

On the other hand, Silva [31], when addressing economic conditions, analyzes the city as a nucleus of economic activity and the issues arising from it, related to individual living conditions, such as income and consumption, labor market, housing and economic dynamics. Barros, Henriques and Mendonça [32] point out that inequality and poverty represent an unacceptable stability. The map of poverty and inequality in Brazilian municipalities prepared by the IBGE clearly shows the chaotic situation of the vast majority of municipalities in Brazil [33]. This scenario is also observed in the reality of Bolivian cities on the border of the Western Amazon.

The indices that comprise the illiteracy rate, life expectancy at birth, Gini index of per capita family income, expectation of years of schooling, percentage of people living in poverty, average household income per capita and unemployment rate, which are indicators of sociodemographic performance, have been studied by several researchers, including Cavalcante [15], Azevedo [23], Machado [27], Barros, Henriques e Mendonça [32],

Paraguassu-Chaves [34], Paraguassu-Chaves [35], Paraguassu-Chaves [36], Paraguassu-Chaves [37], Pacífico [38], Almeida [39], Brazil [40], Cavalcante et al. [41], Henriques [42], Herculano [43], IPEA [44], Pereira [45], Souza Pereira [46].

## CONCLUSION

The Environmental Performance Index (ADI) reveals the crucial importance of environmental issues in the efficient and effective planning of health conditions. From the IDA, it is possible to conclude that the cities studied face inefficient and precarious environmental health systems.

The Sociodemographic Performance Index (SDI) shows the socioeconomic reality of cities, showing that living conditions, such as education, income, poverty and unemployment, have reached levels considered “bad”.

The Administrative Financial Performance Index (IDFA) points out that the current administrative and financial system for the recovery of the health system is inadequate to social demands, representing one of the main obstacles that significantly affect the reality of a large part of the Amazonian border cities, including Bolivian cities.

When analyzing together the performance of the previous indexes, which were part of the calculation for the determination of the Health Condition Performance Indices (IDCS) of the cities surveyed, it is observed that the performance levels are inadequate, indicating health conditions below the demands of society.

It is concluded that the cities of Guajará-Mirim and Guayaramerín face great difficulties to provide and guarantee complete environmental, social and economic well-being. Therefore, it is imperative that border municipalities develop specific public policies to promote, protect and recover the health of the population.

## REFERENCES

[1] Gadelha, CAG.; Costa, L. Integração de fronteiras: a saúde no contexto de uma política nacional de desenvolvimento. *Cad. Saúde Pública*, Rio de Janeiro, 23 Sup2:S214-S226, 2016. Disponível em <<http://www.scielosp.org/pdf/csp/v23s2/10.pdf>>

[2] Maranhão, N. Sistema de Indicadores para Planejamento e Gestão dos Recursos Hídricos de Bacias Hidrográficas [Rio de Janeiro] 2007, 397 p.(COPPE/UFRJ, D.Sc. Engenharia Civil, 2007).

[3] RIPSAs, Rede Interagencial de Informação para a Saúde. Indicadores básicos para a saúde no Brasil: conceitos e aplicações. 2. Edição. Brasília: Organização Pan-Americana da Saúde, 2008.

[4] Brasil, Ministério do planejamento. Melhoria da gestão pública por meio da definição de um guia referencial para medição do desempenho da gestão, e controle para o gerenciamento dos indicadores de eficiência, eficácia e de resultados do programa nacional de gestão pública e desburocratização. Brasília, 2009.



- [5] Soligo, V. Indicadores: conceito e complexidade do mensurar em estudos de fenômenos sociais. *Est. Aval. Educ.*, São Paulo, v. 23, n. 52. 2012.
- [6] OPAS, Organização Pan-Americana da Saúde. Sustentabilidade ambiental e de saúde na Amazônia Legal, Brasil: uma análise através de indicadores. Organização Pan-Americana da Saúde, 2010.
- [7] Praça, MIF. “Qualidade de vida relacionada com a saúde: a perspectiva dos utentes que frequentam os Centros de Saúde do ACES Trás-os-Montes I Nordeste”. Dissertação, Instituto politécnico de Bragança. Bragança. 2012. Disponível em <<https://bibliotecadigital.ipb.pt/bitstream/10198/3612/1/tese%20final%20Fevereiro.pdf>>
- [8] Scliar, M. História do Conceito de Saúde. *PHYSIS: Rev. Saúde Coletiva*, Rio de Janeiro, 17(1): 29-41, 2007. Disponível em <<http://www.scielo.br/pdf/physis/v17n1/v17n1a03>>
- [9] Capra, F. O ponto de mutação: a ciência, a sociedade e a cultura emergente. São Paulo: Cultrix, 1982. 445p. P. 299 – 350.
- [10] Segre, M.; Ferral, FC. O conceito de saúde. *Rev. Saúde Pública*, 31 (5): 538-42, 1997. Disponível em <http://www.ceap.br/material/MAT03082012162552.pdf>.
- [11] Grisotto, LEG. Identificação, avaliação e espacialização das relações entre indicadores de saúde, saneamento, ambiente e socioeconomia no estado de São Paulo. Tese, universidade de São Paulo. São Paulo, 2011.
- [12] Brasil, Presidência da República, Casa Civil. Lei nº 8.080, de 19 de setembro de 1990. Dispõe sobre as condições para a promoção, proteção e recuperação da saúde, a organização e o funcionamento dos serviços correspondentes e dá outras providências. Disponível em <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/L8080.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L8080.htm)>.
- [13] Santana, AC. (2005). Métodos quantitativos em economia: elementos e aplicações. (Quantitative methods in economics: elements and applications). Belém: UFRA.
- [14] Santana, AC. (2005). Elementos de economia, agronegócio e desenvolvimento local. (Economy, agribusiness elements and local development). Belém: GTZ; TUD; UFRA.
- [15] Cavalcante, FRC. (2011). Análise da desigualdade regional no estado de Rondônia à luz da teoria institucionalista de Douglass North. (Analysis of regional inequality in the state of Rondônia in the light of the Douglass North institutionalist theory). Tese (Doutorado). Universidade Federal do Pará, Núcleo de Altos Estudos Amazônicos, UFPA, NAEA, Doutorado em Desenvolvimento Sustentável do Trópico Úmido.
- [16] Dillon, WR.; Goldstein, M (1984): *Multivariate Analysis –Methods and Applications*. Wiley, New York.
- [17] Gama, ZJC.; Santana, AC.; Mendes, FAT.; Khan, AS (2007). Índice de desempenho competitivo das empresas de móveis da região metropolitana de Belém. *Revista de economia e agronegócio*, v. 5, p. 127-159.
- [18] Johnson, RA.; Wichern, DW. (1988). *Applied multivariate statistical analysis*. 2 ed. New Jersey: Prentice Hall International.
- [19] Reis, E. (2001). *Estatística multivariada aplicada*. 2. ed. Lisboa: Silabo.

- [20] Hair, J F. et al (2005). Análise multivariada de dados. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 730 p.
- [21] Barata, CS. (2016). Mapeamento da Contaminação por Nitrato (NO<sub>3</sub>-) em Poços Rasos na Área da Sede do Município de Nova Mamoré. Dissertação (Mestrado em Geografia). Universidade Federal de Rondônia.
- [22] IBGE. Censo Demográfico. Rio de Janeiro: IBGE, 2016.
- [23] Azevedo, PA. Condições e qualidade de vida em espaço reorganizado. Porto Velho e Ariquemes, 2009. 157 f. Monografia (Especialização em Análise Ambiental) – Faculdade de Educação e Meio Ambiente, Ariquemes - RO, 2009.
- [24] Paraguassu-Chaves, CA.. Cultura, Lazer e Saúde: A (Des)organização generalizada - um estudo de caso em Rondônia. In: Debate em Ação, 2012a, Porto Velho. Debate em Ação. Porto Velho: AICSA, 2012. v. 1. p. 5-20.
- [25] Paraguassu-Chaves, CA.. Inclusão Social em Região de Fronteira. In: Debate em Ação, 2012, Porto Velho. Debate em Ação. Porto Velho: AICSA, 2012b. v. 1. p. 22-30.
- [26] Paraguassu-Chaves, C.A.. Condições e Qualidade de Vida em Espaço Reorganizado. In: Debate em Ação. Discussão Científica, 2009, Porto Velho. Debate em Ação - Discussão Científica. Porto Velho: AICSA, 2009b. v. 1. p. 57-84.
- [27] Machado, LMCP. Qualidade ambiental: indicadores quantitativos e perceptivos. In: MARTOS, H. L.; MAIA, N. B. *Indicadores ambientais*. Sorocaba: Gráfica, 1997, p. 15-21.
- [28] Paraguassu-Chaves, C.A. Geografia médica ou da saúde: espaço e doença na Amazônia Ocidental. Porto Velho: EDUFRO, 2001.
- [29] Moret, AS.; Guerra, SMG. Hidrelétricas no rio Madeira: reflexões sobre impactos ambientais e sociais. Revista OIDLES, v. 3, n. 7, dez., p. 01-35, 2009.
- [30] Toda, DTS. Análise espacial da distribuição do sistema público de saúde de Porto Velho. 2008. 86 f. (Trabalho de Conclusão de Curso)–ULBRA, Porto Velho, 2008.
- [31] Silva, RCP. (2013). Qualidade de Vida em Porto Velho, Rondônia: Perspectivas do Processo de Desenvolvimento Regional. Tese (Doutorado). Universidade Federal do Pará, Núcleo de Altos Estudos Amazônicos, UFPA, NAEA, Doutorado em Desenvolvimento Sustentável do Trópico Úmido.
- [32] Barros, RP.; Henriques, R.; Mendonça, R. Desigualdade e pobreza no Brasil: retratos da realidade contemporânea e estratégias de mensuração. In: HENRIQUES, R. (Org.). Desigualdade e pobreza no Brasil. Rio de Janeiro: IPEA, 2000, p. 24-43.
- [33] IBGE. Mapa da pobreza da pobreza e desigualdade: municípios brasileiros 2003, 2004, 2005, 2006, 2016. Disponível em: <<http://www.ibge.gov.br/estadosat/>>.
- [34] Paraguassu-Chaves, CA.. O Poder Local em Transformação. In: Debate em Ação, 2011, Porto Velho. Debate em Ação. Porto Velho: AICSA, 2011a. v. 1. p. 15-35.

- [35] Paraguassu-Chaves, CA.. Subjetivo objetivável: elaboração de um modelo de qualidade de vida. Discussão Científica. In: Debate em Ação, 2011, Porto Velho. Debate em Ação - Discussão Científica. Porto Velho: AICSA, 2011b. v. 1. p. 79-104.
- [36] Paraguassu-Chaves, CA.. Trabalho e Doenças Ocupacionais. In: Debate em Ação. Discussão Científica, 2010, Porto Velho. Debate em Ação - Discussão Científica. Porto Velho: AICSA, 2010a. v. 1. p. 57-85.
- [37] Paraguassu-Chaves, CA.. Aplicação de Modelo de Qualidade de Vida. In: Debate em Ação. Discussão Científica, 2010b. Debate em Ação - Discussão Científica. Porto Velho: AICSA, 2010b. v. 1. p. 87-102.
- [38] Pacífico, JM. Políticas públicas para a Educação Infantil em Porto Velho/RO (1999/2008). 2010. 358 f. Tese (Doutorado em Educação Escolar)–Universidade Estadual Paulista, Araraquara, 2010.
- [39] Almeida, AT. Expansão urbana de Porto Velho: análise do contexto socioespacial de uma cidade em transformação. Ariquemes, 2009. 178 f. Monografia (Especialização em Análise Ambiental). Faculdade de Educação e Meio Ambiente, Ariquemes – RO, 2009.
- [40] Brasil. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF.
- [41] Cavalcante, FRC.; Batista, AS.; Góes, SB.; Flores, CR.; Flores, JA (2015). Processo de desenvolvimento regional e a política ambiental em Rondônia: o turismo como vetor de desenvolvimento local de Guajará-Mirim. In: V Congresso Brasileiro de Gestão Ambiental, Belo Horizonte/MG, 24 a 27 de novembro de 2014. Disponível em <http://www.ibeas.org.br/congresso/Trabalhos2014/VII-074.pdf>
- [42] Henriques, MHFT. A dinâmica demográfica de uma área de fronteira: Rondônia. Revista Brasileira de geografia, Rio de Janeiro, v. 47, n. 3-4, p. 317-356, jul./dez. 1985.
- [43] Herculano, S. A qualidade de vida e seus indicadores. Revista Ambiente & Sociedade, Campinas, ano 1, n. 2, p. 77-99, 1998.
- [44] IPEA. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada. Ministério da Economia. Indicador Ipea. Brasília, 2012.
- [45] Pereira, AP. Geoprocessamento das doenças ocupacionais em Rondônia na última década, 2011. 145 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Gestão, Análise e Perícia Ambiental). Faculdade de Educação e Meio Ambiente, Guajará-Mirim, RO, 2011.
- [46] Souza Pereira, S. Trabalho e doença ocupacional. 2010. 211 f. Trabalho de Conclusão de (Especialização em Análise Ambiental). Faculdade de Educação e Meio Ambiente, Simone Araújo. 2010.

## CAPÍTULO 2

# DETERMINACIÓN DE LA CONCENTRACIÓN DE METALES PESADOS MEDIANTE LA CARACTERIZACIÓN DE MATERIAL PARTICULADO SEDIMENTABLE EN LA RESERVA BIOLÓGICA LIMONCOCHA, ECUADOR

*Data de aceite: 01/04/2024*

### **Javier Valdivieso Kastner**

Universidad Internacional SEK, Facultad de Ingeniería y Ciencias Aplicadas  
Quito, Ecuador  
<https://orcid.org/0009-0009-6408-6142>

### **Katty Coral-Carrillo**

Universidad Internacional SEK, Facultad de Ingeniería y Ciencias Aplicadas  
Quito, Ecuador  
<https://orcid.org/0000-0002-1680-5650>

### **Jorge Esteban Oviedo**

Universidad de Cantabria, Escuela de Ingenieros Industriales y Telecomunicaciones  
Santander España  
<https://orcid.org/0000-0002-8397-3419>

mediante un embudo colector. Se tomaron muestras mensuales a partir de noviembre de 2016 hasta junio de 2017, siendo ocho muestras en total. Los datos que se obtuvieron permitieron la determinación de la dinámica de transporte de metales pesados en Material Particulado Sedimentable (MPs) dentro de la RBL y generaron un aporte para la construcción final de la línea base, que se utilizará como herramienta para la gestión óptima de la Reserva, constituyéndose en el primer aporte atmosférico a este tema. Se obtuvieron valores de MPS comprendidos entre 24.7 y 1,9 mg/cm<sup>2</sup>. mes, y se estableció la estrecha correlación existente entre la concentración de MPs y la pluviosidad del sector. El **Cu** es el metal con mayor presencia en el MPs, sin embargo, no se encontró una correlación directa con la concentración de este metal en los sedimentos.

**PALABRAS-CLAVE:** materia en suspensión, partículas atmosféricas, calidad del aire, metales pesados, áreas naturales

**RESUMEN:** La presente investigación evaluó la concentración de metales pesados (Fe, Mn, Cd, Zn, Cu, Co, Ni, Cr, Pb y V) contenidos en el material particulado sedimentable en la Reserva Biológica Limoncocha (RBL), por medio de un análisis químico por espectrofotometría con horno de grafito y gravimetría. Se implementó un equipo de muestreo pasivo basado en normativa internacional, capaz de captar la precipitación y las partículas sedimentables

# DETERMINATION OF THE CONCENTRATION OF HEAVY METALS THROUGH THE CHARACTERIZATION OF SEDIMENTABLE PARTICULATE MATERIAL IN THE LIMONCOCHA BIOLOGICAL RESERVE, ECUADOR

**ABSTRACT:** The present work evaluated the concentration of heavy metals (Fe, Mn, Cd, Zn, Cu, Co, Ni, Cr, Pb, and V) contained in the Sedimentary Particulate Material in the Limoncocha Biological Reserve (RBL) by chemical analysis with spectrophotometry in graphite furnace and gravimetry. Passive sampling equipment, capable of capturing precipitation and sedimentary particles through a collector funnel, was implemented based on international regulations. Monthly samples were taken from November 2016 to June 2017, with eight samples in total. The data obtained allowed the determination of the transport dynamics of heavy metals in Sedimentable Particulate Material within the RBL. They generated a contribution for the final construction of the baseline, which will be used as a tool for the optimal management of the Reserve, constituting the first atmospheric contribution to this topic. PMs values between 24.7 y 1,9 mg/cm<sup>2</sup>.mes were obtained, and the close correlation between the concentration of MPS and the rainfall in the sector was established. Cuprum is the metal with the highest presence in the PMs; however, no direct correlation was found with the concentration of this metal in the sediments.

**KEYWORDS:** Air quality, Contamination, Protected areas, Dust, Atmosphere, Rainwater.

## INTRODUCCIÓN

A casi tres siglos de la revolución industrial, la curva de demografía global ha descrito una tendencia de crecimiento exponencial, en contraste con la fluctuación del poder económico de cada país. Sin embargo, es la explotación indiscriminada de recursos naturales la que ha traído consecuencias catastróficas que se han convertido en una amenaza para la vida en el planeta, dejando un desequilibrio casi imposible de revertir (Gomes da Silva & Gouveia, 2020)

El material particulado en el aire, también conocido como aerosoles o partículas suspendidas, se refiere a pequeñas partículas sólidas o líquidas que están presentes en la atmósfera. Estas partículas pueden variar en tamaño, composición y origen, y tienen un impacto significativo en la calidad del aire y la salud humana. Se clasifican comúnmente en función de su diámetro aerodinámico, dividiéndose en Material Particulado Sedimentable (MP<sub>s</sub>) que corresponden a las partículas más gruesas y que fácilmente sedimentan, partículas finas con tamaños menores a 10 $\mu$  (PM10) y partículas ultrafinas finas tamaños menores a 2.5  $\mu$  (PM2.5). Las partículas en suspensión y sedimentables pueden contener compuestos orgánicos, metales pesados y otras sustancias tóxicas, lo que las hace peligrosas para la salud humana y el medio ambiente. La exposición prolongada a altos niveles de material particulado puede estar asociada con problemas respiratorios, enfermedades cardiovasculares, impactos en el sistema nervioso y otros efectos adversos para la salud. (Coral- Carrillo et al., 2019, 2018)

En la reserva Biológica de Limoncocha se encuentra el Bloque 15 de producción petrolera, actualmente administrado por PetroEcuador, parte de su proceso de extracción y refinamiento consiste en extraer mezcla de gases provenientes de los pozos; el gas suele ser quemado a través de antorchas a manera de medida de seguridad.(Agurto Dimitri & Coral-Carrillo Katty, 2016) En tanto y en cuanto se mantenga la operación del Bloque, la antorcha seguirá encendida siendo una fuente significativa de contaminación hacia la atmósfera todo el día durante todo el año, hasta cuando se cambie este sistema de control.

Los contaminantes atmosféricos se clasifican de acuerdo a sus propiedades físicas y químicas: partículas en suspensión y gases. Estos provienen en un gran porcentaje de fuentes móviles, en conjunto con procesos de combustión en industrias. La normativa ecuatoriana, contemplada en el Acuerdo Ministerial 97 A, Anexo 4, de la Norma de Calidad del Aire Ambiente, reconoce a: Partículas sedimentables,  $PM_{10}$ ,  $PM_{2.5}$ , Dióxido de azufre ( $SO_2$ ), Monóxido de Carbono (CO), Ozono ( $O_3$ ) y Dióxido de nitrógeno ( $NO_2$ ) como contaminantes convencionales del aire. Estos elementos contribuyen al cambio climático y pueden provocar afecciones a la salud, por lo cual su emisión a la atmósfera está regulada y controlada (Ministerio de Ambiente del Ecuador, 2015)

El contaminante atmosférico de interés para esta investigación es el material particulado sedimentable, este término se refiere a elementos sólidos de un diámetro aerodinámico entre 25- 45  $\mu m$  en forma de cúmulos de partículas, polvos, aerosoles, arenas etc. Se encuentran suspendidos en el aire por lapso corto de tiempo, que pueden ser horas o días dependiendo de las condiciones meteorológicas. Su origen proviene principalmente de procesos de combustión en industrias como fabricación de químicos, metalúrgicas, generación de energía, gestión inadecuada de residuos, refinación y extracción de petróleo.(Coral- Carrillo et al., 2019; Coral-Carrillo & Oviedo-Costales, 2022). El material particulado generado puede contener partículas de óxidos metálicos debido a la quema de combustibles orgánicos e inorgánicos, que generalmente son utilizados en la cadena de proceso. De la misma manera, también existe un aporte natural de material, procedente del suelo debido a movilización, vientos y otros fenómenos atmosféricos. Al liberarse estas partículas se mantienen suspendidas hasta descender al suelo por medio de la lluvia o de su propio peso, transportándose así su contenido (Espinosa José et al., 2022; UIDR, 2019).

La acumulación de estas partículas provoca efectos significativos en el ambiente debido a la facilidad de su dispersión, por lo que puede llegar a desequilibrar las condiciones atmosféricas y ambientales. Al precipitar al suelo, puede permear en conjunto con el agua lluvia, lo que puede causar un cambio en las propiedades del suelo, pudiendo ser absorbido por las raíces de las plantas, dándose un proceso de esparcimiento y bioacumulación con metales traza. Esto representa un peligro para la conservación de especies y el mantenimiento de la población de fauna y flora en general.(Espinosa José et al., 2022; FAO, 2022; UIDR, 2019)

Los metales pesados se encuentran en el aire formando parte del material particulado, ya sea este PM<sub>10</sub>, 2,5 o sedimentable. En este trabajo se evaluó la concentración de metales pesados (Fe, Mn, Cd, Zn, Cu, Co, Ni, Cr, Pb y V) contenidos en el material particulado sedimentable en la Reserva Biológica Limoncocha (RBL), por medio de un análisis químico por espectrofotometría con horno de grafito y gravimetría.

La presencia de metales pesados traza en áreas de alto valor ecológico es motivo de especial atención debido a sus características de toxicidad, persistencia y capacidad de bioacumulación.(Alloway, 2013; Coral-Carrillo Katty et al., 2023; Sakan et al., 2015)

La preocupación por los metales se debe a sus propiedades como la toxicidad, persistencia, biodisponibilidad y bioacumulación (Ali et al., 2019), lo que puede llevarlos a transferirse al agua circundante y, por ende, ingresar a la cadena alimentaria (Chapman, 2008; Ivanina & Sokolova, 2015). Tanto su presencia en el ambiente como su asociación con sedimentos, suelos y material particulado sólido en el aire, son resultado de actividades tanto naturales como humanas. El comportamiento ambiental de estos elementos potencialmente tóxicos en suelos, Material particulado sedimentable y sedimentos depende de varios factores, como su contenido, distribución y especiación, así como el contenido de materia orgánica y arcilla en la matriz sólida, además de las condiciones ambientales cambiantes, como el pH, el potencial redox y los niveles de ligandos orgánicos (Mazurek et al., 2017) , 2017). Todos estos factores influyen en los procesos que ocurren en suelos y sedimentos, como la adsorción-desorción, el redox, la precipitación, la solubilización, la floculación y la quelación, lo que a su vez afecta su movilidad y los posibles efectos sobre los organismos.(Coral-Carrillo et al., 2021, 2022)

Las comunidades enfrentan exposición a material particulado (MP) y metales pesados en el aire, ocasionalmente superando los límites establecidos por las leyes nacionales, lo que puede representar riesgos para la salud de las personas.(Legarreta Perusquia et al., 2016), estos metales, eventualmente se deponen en aguas, suelos y sedimentos de las áreas de influencia pudiendo incrementar la concentración de estas sustancias en estos compartimientos, pero adicionalmente, también pueden actuar como receptores de Material particulado con metales, provenientes del suelo, los sedimentos e incluso del agua. (Popoola et al., 2018)

Existen lugares con mayor vulnerabilidad a sufrir un episodio de contaminación, ya sea por la actividad antropogénica que se lleve a cabo o por su grado de intervención. Es decir, no será la misma magnitud si es que se tala una hectárea de bosque primario para construir una carretera, que si se abre la misma vía dentro de una ciudad. Por lo tanto, las autoridades han designado sitios de protección para la vida natural (Ministerio del Ambiente del Ecuador, 2015)

En Ecuador, el Ministerio de Agua, Ambiente y Transición Ecológica (MAATE) se ha encargado de clasificar estos espacios en ocho categorías, en donde se encuentran: parques nacionales, reservas marinas, reservas ecológicas, reservas de producción de





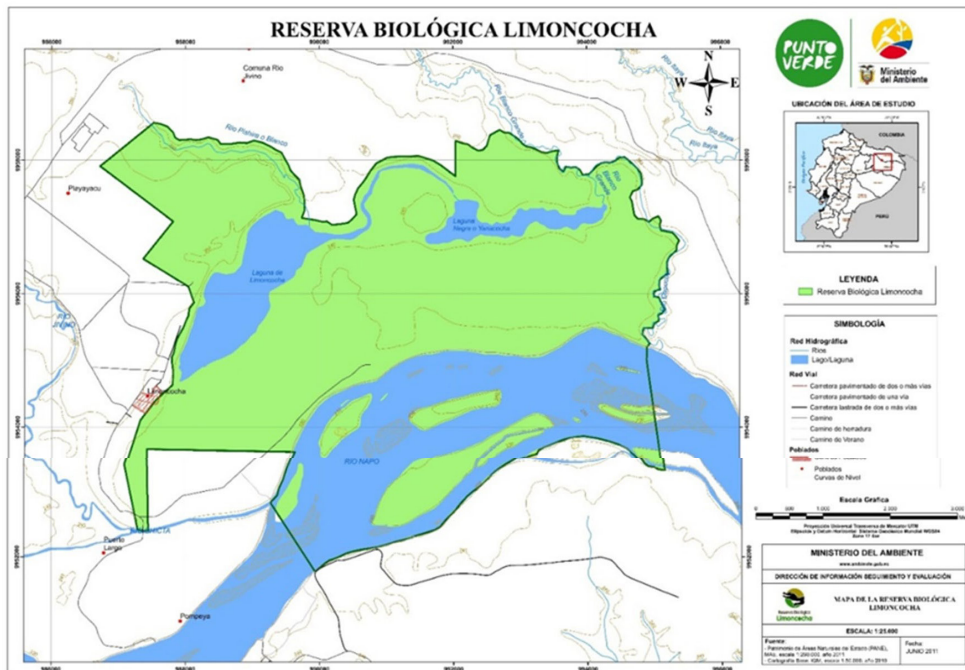
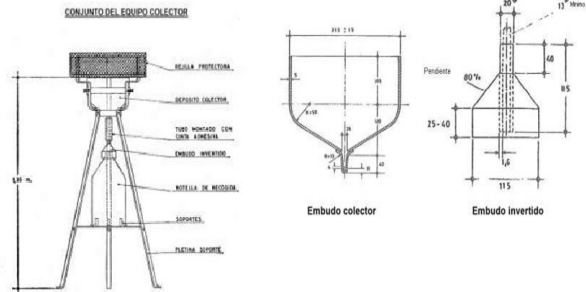


Ilustración 2. Ubicación de la Reserva Biológica Limoncocha (Ministerio del Ambiente del Ecuador, 2015)

La legislación ecuatoriana (AM 050), establece que para la medición de MPs se debe utilizar el Método gravimétrico mediante captación de partículas en envases abiertos, haciendo referencia al Método 502 “Methods of air Sampling and Analysis” 3rd Edition de Intersociety Committee de 1989, (Lodge & Intersociety Committee, 1989; Acuerdo Ministerial 050: Norma de Calidad de Aire Ambiente o Inmisión, 2011), sin entrar en descripciones detalladas del equipo a utilizar, por lo cual se procedió a buscar normativa internacional que permita una evaluación estandarizada, recurriendo a el Anexo V del Libro de Registro de Mediciones, en el capítulo de Emisiones de Contaminantes a la Atmósfera, desarrollado por la Consejería de Medio Ambiente del Gobierno de Cantabria, España (Libro de Registro de Mediciones, 2013) con cuya base se construyó el equipo de monitoreo de MPs y se realizaron los cálculos respectivos.

El mismo acuerdo (AM 050) establece en su artículo 4.1.2 las “Normas generales para concentraciones de contaminantes criterio en el aire ambiente”, la máxima concentración de MPs en muestras colectadas en 30 días de forma continua, estableciendo este valor en  $1 \text{ mg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{mes}^{-1}$ .



Equipo de muestreo Pasivo de Material Particulado Sedimentable

Ilustración 3. Equipo de muestreo pasivo de Material particulado sedimentable construido para la realización de este trabajo Adaptado de (Libro de Registro de Mediciones, 2013)por Coral K

## MATERIALES Y METODOS

### Punto de muestreo

Se construyó e instaló el equipo de muestreo pasivo basado en normativa internacional del Gobierno de Cantabria, capaz de captar la precipitación y las partículas sedimentables mediante un embudo colector.

El equipo se ubicó en las inmediaciones de la estación científica de la Universidad Internacional SEK-Ecuador, dentro de una zona abierta, libre de masas arbóreas, construcciones verticales y demás objetos que puedan interrumpir el depósito de material particulado sedimentable MPs (Libro de Registro de Mediciones, 2013), en un espacio de aproximadamente 12 m a la redonda. (Valdivieso & Coral-Carrillo Katty, 2018). Atendiendo a estas características y por las condiciones de la zona de estudio, este era el lugar que mejor cumplía tanto condiciones técnicas como de seguridad física y ocupacional.



Ilustración 4. Mapa de Ubicación del Punto de muestreo (MPS) dentro de la RBL (Elaborado por Valdivieso J).

## Metodología de Campo

Este trabajo inició con la construcción del equipo de muestreo (Ilustración 3), para lo cual se utilizaron las dimensiones y demás parámetros establecidos en el Anexo V del Libro de Registro de Mediciones, en el capítulo de Emisiones de Contaminantes a la Atmósfera, desarrollado por la Consejería de Medio Ambiente del Gobierno de Cantabria, España (2013). Esta adaptación fue necesaria, debido a que la Ley Ecuatoriana contemplada en el Acuerdo Ministerial 050, hace una referencia general del método, careciendo del diseño del equipo de muestreo necesario para esta investigación. En contraste, la normativa española dispone del diseño y dimensionamiento de un dispositivo específico, así como de la metodología para la captación del material particulado sedimentable MPs.

Siguiendo los criterios en la normativa cántabra, se construyó la rejilla protectora, depósito colector, soportes y trípode en acero inoxidable; (Ilustración 3) por otro lado, el frasco colector es de vidrio neutro, para de esta manera asegurar la toma de datos y su fiabilidad.

La Ilustración 5, tomada del Libro de registro de mediciones de Cantabria, muestra claramente las dimensiones utilizadas en la construcción del equipo, estas mediciones fueron validadas por los autores de este trabajo, con el cálculo de exactitud de la medida que indica la proximidad de una medida a su valor aceptado, y se expresa en términos de error, (Fernández José María, 2001). Luego de 10 mediciones por cada uno de los tres autores, se encontró un error inferior al 1%, validando así la funcionalidad del equipo

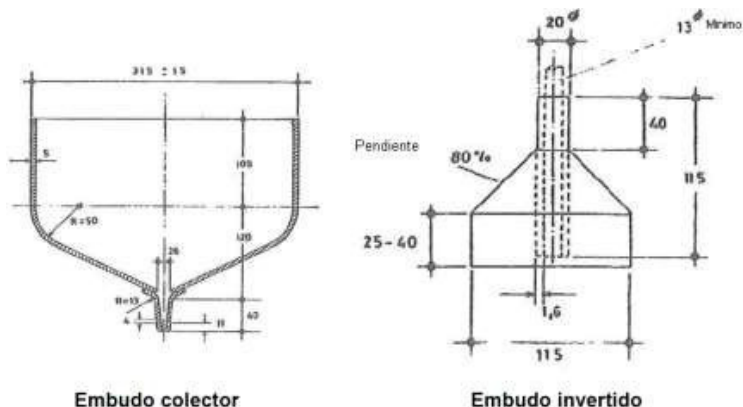


Ilustración 5. Dimensiones Embudo Colector (Libro de Registro de Mediciones, 2013)

El embudo tiene un factor de corrección ( $F$ ), expresado en  $m^{-2}$  que multiplicado por el peso total del MPs en mg obtenido en una serie significativa de mediciones, representa la concentración de partículas sedimentables en  $mg.m^{-2}$  y se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$MPS = PT * F$$

Ecuación 1. Fórmula para el Cálculo de Material particulado Sedimentable en  $mg.m^{-2}$  (Libro de Registro de Mediciones, 2013)

Donde MPS es la cantidad de material particulado sedimentable recolectado por el equipo en  $mg.m^{-2}$ , y  $F$  es el factor de corrección del equipo, establecido en la metodología española utilizada y ya establecida en párrafos anteriores. Para el cálculo de  $F$ , se utilizó la siguiente fórmula:

$$F = \frac{(127.3 * 10^4)}{D^2}$$

Ecuación 2. Factor de corrección del Equipo (Libro de Registro de Mediciones, 2013)

Donde  $D$  es el valor medio del diámetro del embudo, expresado en mm, resultante de realizar doce medidas de éste en distintos puntos de su circunferencia interior (Libro de Registro de Mediciones, 2013). Estas dimensiones se pueden observar en la ilustración 5 de este trabajo.

Debido a que la norma ecuatoriana así lo establece con su valor referencial de calidad de aire ambiente, la recolección de muestras fue continua durante 30 días (mensual), las unidades de reporte incluyen el periodo de muestreo, siendo  $mg.m^{-2}.mes^{-1}$ . (Valdivieso & Coral-Carrillo Katty, 2018)

## Recolección de Muestras

El muestreo se realizó mensualmente a partir de noviembre de 2016 a junio de 2017 con un total de ocho meses de muestreo. El equipo de muestreo pasivo se dejaba colocado durante 30 días de forma continua, al tratarse de un depósito abierto, el colector también recibía agua lluvia conjuntamente con el material particulado sedimentable. El agua lluvia se depositaba dentro del frasco colector hasta que este se llenaba completamente. Después se trasvasaba a una caneca de 18 litros de volumen con tapa hermética. Una vez culminado el mes de muestreo se procedía al traslado de la muestra colectada al laboratorio para su posterior análisis.

Adicionalmente se mantuvo un diario de campo, manejado por una persona capacitada, en el cual se registraron los días que se trasvasa el recipiente y la medición de los parámetros.

## Filtración de la muestra recolectada

Para llevar a cabo este procedimiento, se tuvieron en consideración las recomendaciones de instrucción técnica establecidas por la normativa española. Se procedió a montar una serie de soportes universales, embudos y balones aforados con un litro de capacidad, con el propósito de recoger el agua lluvia filtrada utilizando papeles filtro cualitativos previamente tarados e identificados, aplicando lo indicado por la Consejería de Medio Ambiente en 2013.

## Gravimetría por Volatilización

Este método indirecto basado en el Estándar Methods: 2540 B "Sediments" consistió en pesar el precipitado obtenido, proceder a un secado a 105°C por 8 horas y tarar nuevamente el papel filtro, y por diferencia de masas se determinó la masa volatilizada. Al no ocurrir reacción al calentar el precipitado, el agua se evapora por efecto del calor y una vez libre de humedad se determina la masa de MPs. (APHA, 2017)

$$PT = PFS - PFP$$

Ecuación 3. Peso Total del MPS (APHA, 2017)

Donde:

PT es el Peso total del Material Particulado Sedimentable en mg.

PFS: Peso del papel filtro sin precipitado en mg.

PFP: Peso del papel filtro con precipitado en mg, posterior al proceso de secado.

## Cálculo del Material Particulado Sedimentable en $\text{mg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{mes}^{-1}$

Aplicando la Ecuación 1,

$$\text{MPs} = \text{PT} \cdot F$$

Se procedió, con los datos obtenidos experimentalmente, al cálculo de MPs mensual en  $\text{mg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{mes}^{-1}$

## Secado e Incineración

Se secan los papeles filtro en estufa por 24 horas a  $105^{\circ}\text{C}$  (Véase Anexo 3 y 4). Se pesa nuevamente, este dato dará a conocer la masa de Material Particulado Sedimentable que se obtuvo, ya que está libre de agua. Después se depositan los papeles filtro en un crisol de porcelana, para someterlos a un proceso de incineración en mufla por 6 horas a  $800^{\circ}\text{C}$ , obteniéndose cenizas del sedimento (EPA, 1996).

## Digestión

En la siguiente etapa se procedió a realizar el método EPA 3050B "Acid Digestion of Sediments, Sludges and Soils", Los metales fueron extraídos con un sistema de digestión ácida por microondas (CEM modelo Mars 5) siguiendo el Método normalizado SW-846 EPA Método 3051 A, (US EPA, 2007), que implicó la digestión de 0.1 g de muestra de sedimento con una mezcla de 9 mL de ácido nítrico (65%, calidad Suprapur) y 3 mL de ácido clorhídrico (30%, calidad Suprapur) en recipientes de teflón. Después de las digestiones, las muestras se diluyeron a 50 mL utilizando Agua Milli-Q y posteriormente fueron analizadas. (US EPA, 2007) La precisión del análisis fue comprobada con el material de Referencia 8704 del Instituto Nacional de Estándares y Tecnología de Estados Unidos.

## Detección de Metales Pesados por Espectrofotometría de Absorción Atómica en Horno de Grafito (GFAAS)

Este equipo GBC, modelo GEMINAA, es capaz de analizar muestras de un volumen muy reducido entre 1 mL y  $100\ \mu\text{L}$ , debido a su extremo nivel de sensibilidad, ya que se puede obtener mediciones de sustancias en una concentración en partes por billón. Funciona a través de un conjunto de lámparas alimentadas por corriente eléctrica, las cuales producen una longitud de onda estándar para cada elemento. De acuerdo al análisis deseado, se debe configurar el equipo, es decir que cada lámpara tendrá que pasar por un proceso de balanceo y escaneo para conseguir tanto la posición como la temperatura óptima en la que se producirá la radiación (Castaño Puerta Alfredo & Robledo Vélez Laura Melissa, 2012)

Por otro lado, la cámara donde se posiciona el horno de grafito, está enlazada directamente con la lámpara, de esta manera empieza el proceso de calentamiento. El horno de grafito es un tubo hueco con una longitud de 2 cm y 5 cm de diámetro, capaz

de alcanzar temperaturas superiores a los 2000 °C, esta oquedad es donde se situará la muestra a analizar. Una vez que la corriente eléctrica pasa por el tubo, empieza el proceso de atomización aumentando la temperatura paulatinamente por lapso de un minuto aproximadamente (Carrillo Paredes Emma Ivonne & Martínez-Fresneda Miguel, 2016).



Ilustración 6. Equipo de Absorción Atómica con Horno de Grafito de la Universidad Internacional SEK utilizado. (Foto Valdivieso J)

En esta etapa se aplica la potencia máxima para elevar la temperatura del horno mientras que la muestra es volatilizada, disociándose en átomos libres, los cuales serán registrados por el haz de luz emitido, teniéndose así la absorción atómica, que revelará la concentración del analito (Robledo L & Castaño A, 2012)

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

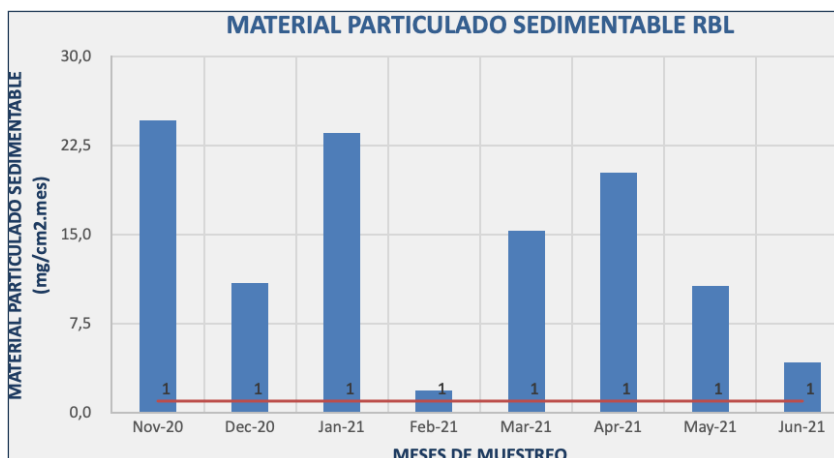


Ilustración 7. Material Particulado Sedimentable en la RBL 2017 (Valdivieso J)

Se obtuvieron valores de MPS comprendidos entre 24.7 y 1,9 mg.m<sup>-2</sup>.mes<sup>-1</sup>, que superan en todas las ocasiones el límite establecido por la Legislación Ecuatoriana en el Acuerdo Ministerial 050 “Norma de calidad de Aire Ambiente o nivel de inmisión”, de 1.0 mg/cm<sup>2</sup>.mes. Adicionalmente se estableció la estrecha correlación existente entre la concentración entre del MPs y la pluviosidad del sector, como se puede apreciar siguiente ilustración.

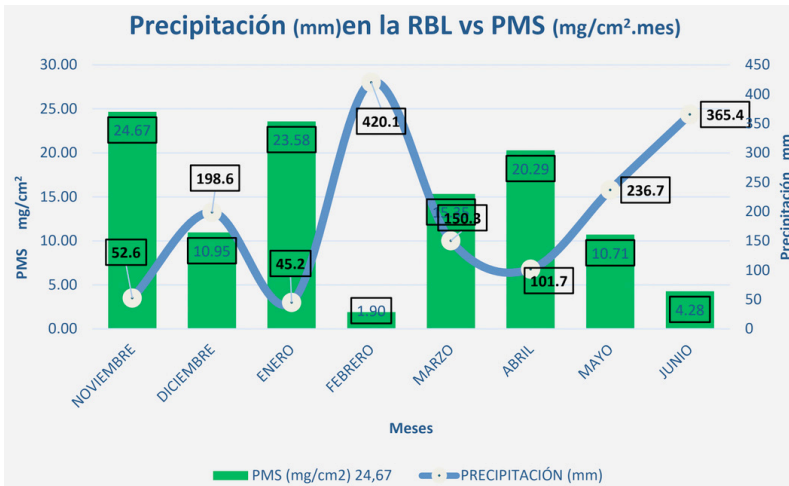


Ilustración 8. Precipitación vs MPs (Valdivieso J)

Dentro de la composición del Material Particulado Sedimentable existen partículas solubles e insolubles, por lo tanto, el MPS al ser arrastrado por el viento en dirección a la Laguna de Limoncocha, aporta a la composición de los sedimentos mediante las partículas insolubles antes mencionadas, como se puede apreciar en la Ilustración 9.

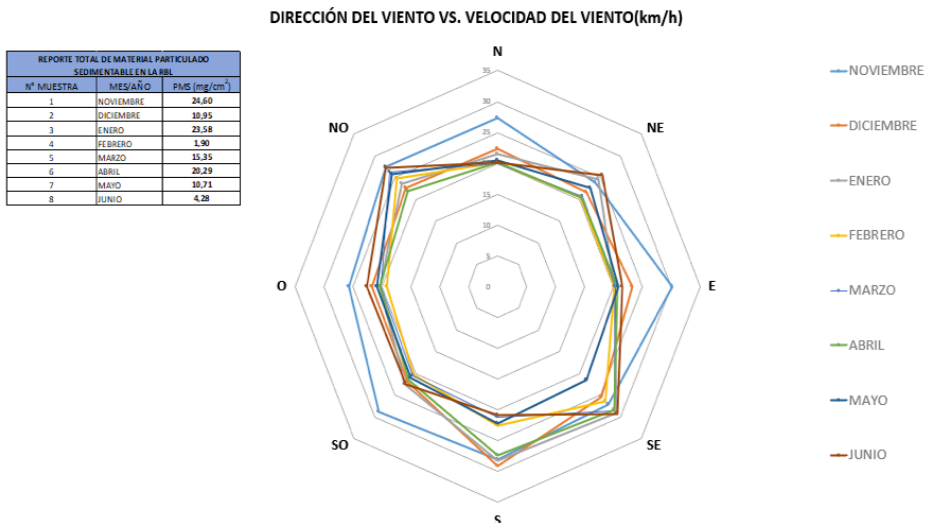


Ilustración 9. Dirección y Velocidad del Viento en la RBL (Valdivieso J)



La ilustración 9, correlaciona la dirección del viento en la zona con la concentración de MPs, se aprecia la concentración de MPs en los ocho meses de muestreo en comparación con la velocidad del viento (Estación Meteorológica UISEK), teniendo como direcciones predominantes Sur, Sureste y Este. Para la dirección Sur destaca los meses de diciembre, enero y abril. En el Sureste domina el mes de junio, mientras que para la dirección Este sobresale el mes de noviembre. Esto quiere decir que el Material Particulado Sedimentable está siendo arrastrado en dirección a la Laguna Limoncocha, teniendo allí su principal depósito.

El análisis de metales en el material particulado seco, arrojó valores de  $\mu\text{g}$  de metal por kg de material particulado sedimentable  $\mu\text{g}/\text{kg}$ . En la Tabla 1, se observan los valores de concentración de metales pesados medidos en el MPS, teniendo Cobre como el metal con mayor presencia dentro del análisis con valor promedio de 123,16 ppb. Por otro lado, Níquel es el metal con menor concentración, con un valor promedio de 8,72 ppb. Vanadio es el metal con una concentración fuera del límite de detección por el método utilizado.

Los resultados de Cobre y los otros metales van de la mano con los valores presentados por Coral K, Ruiz G y Víguri J, en varios estudios sobre suelos y sedimentos de la reserva Biológica de Limoncocha, (Coral-Carrillo et al., 2021, 2022; Mera José Antonio et al., 2019)

CONCENTRACIÓN ( $\mu\text{g}/\text{kg}$ ) DE METALES PESADOS EN EL MATERIAL PARTICULADO SEDIMENTABLE DE LA RBL								
ELEMENTO	NOVIEMBRE	DICIEMBRE	ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO
CADMIO	4,5	10,6	13,5	7,6	6,4	62,3	4,4	40,8
COBALTO	12,5	11,4	13,7	9,4	8,5	22,6	17,3	31,6
COBRE	164,7	58,3	95,0	126,5	111,6	153,4	103,5	172,3
MANGANESO	4,2	4,9	3,9	2,5	3,0	4,5	3,2	4,2
NIQUEL	9,4	8,1	10,8	4,0	24,8	7,6	2,5	2,6
PLOMO	<0,1	0,4	33,2	167,9	22,6	13,7	<0,1	<0,1
VANADIO	<0,1	<0,1	<0,1	<0,1	<0,1	<0,1	<0,1	<0,1
ZINC	1,5	3,0	17,6	15,7	13,2	1,5	2,0	1,0

Tabla 1. Concentración ( $\mu\text{g}/\text{kg}$ ) de metales pesados en el material particulado sedimentable de la RBL

Con los datos obtenidos se realizó un análisis de varianza ANOVA, para comparar las medias los grupos independientes de metales, para determinar si hay diferencias significativas entre ellas. El ANOVA permitió evaluar si las diferencias observadas entre las medias de los metales son mayores de lo que podría esperarse debido al azar. En otras palabras, buscó determinar si las diferencias entre los grupos de muestras y metales son estadísticamente significativas o simplemente se deben a la variabilidad aleatoria dentro de los datos. (Fernández José María, 2001). Los resultados del análisis ANOVA, realizado en el programa PAST se determinó que no existen diferencias significativas entre las medias de las muestras. Utilizando el ANOVA con la prueba de Kruskal y Wallis, se obtuvieron los siguientes resultados:

#### Kruskal-Wallis test for equal medians

$H(ch^2)$ :	4.329
$H_C$ (tie corrected):	4.352
$p$ (same):	0.7385

There is no significant difference between sample medians

Tabla 2. Análisis ANOVA con la prueba de Kruskal y Wallis

## CONCLUSIONES

El Material Particulado Sedimentable excede el nivel mensual de inmisión establecido en el Acuerdo Ministerial 050, con un valor límite de  $1\text{mg}/\text{cm}^2 \cdot 30$  días, en todos y cada uno de los meses monitoreados. El valor mínimo alcanzado en el muestreo es de  $1.9\text{ mg}/\text{cm}^2$ . mes (mes de 30 días), es decir es un 90 % superior al mínimo requerido. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que la normativa está direccionada de manera general, más no hacia la protección de un área natural.

La precipitación es un factor clave dentro de la medición del Material Particulado Sedimentable, ya que como se demuestra en la ilustración 9, la concentración del  $\text{MP}_s$  se verá disminuida en los periodos de mayor lluvia, en contraste con los lapsos de sequía, en los que el material aumenta.

El viento es un factor que afecta la distribución del  $\text{MP}_s$ , en este caso las direcciones predominantes son: Sur y Este lo cual sitúa el arrastre del material hacia la ubicación de la Laguna Limoncocha.

Se evidenció el contenido de metales pesados dentro del Material Particulado Sedimentable, teniendo Cobre como el metal con mayor presencia dentro del análisis, con un valor promedio de 123,16 ppb. Por otro lado, Manganeso es el metal con menor concentración, con un valor promedio de 3,79 ppb. De la misma manera existe presencia de Cadmio, Cobalto, Níquel, Plomo y Zinc lo cual delata un foco de aportación de estos metales dentro de la Reserva Biológica Limoncocha, que puede deberse a una, varias o todas de las siguientes acciones antropogénicas: la actividad petrolera, la agricultura de la zona, la gestión inadecuada de residuos (Coral-Carrillo & Oviedo-Costales, 2022), el arrastre de partículas de suelo en áreas intervenidas, entre otras. A pesar de estos datos, no se puede establecer con la cantidad de datos obtenidos ni con los resultados, fuentes definitivas o exclusivas de metales en el material particulado, sin embargo, el presente trabajo es una herramienta de gestión ambiental de la Reserva, estableciéndose como línea base de este componente ambiental.

Dentro de la composición del Material Particulado Sedimentable existen partículas solubles e insolubles, por lo tanto, el  $\text{MPS}$  al ser arrastrado por el viento en dirección a la Laguna Limoncocha, aporta a la composición de los sedimentos mediante las partículas insolubles antes mencionadas. Igual conclusión a la anterior se puede aplicar a los suelos

de la reserva e incluso a la vegetación de la zona, lo que implica que el monitoreo de metales pesados en aguas, suelos, sedimentos y  $MP_s$  debe ser permanente en la Reserva Biológica de Limoncocha. (Valdivieso & Coral-Carrillo Katty, 2018), ampliando el número de puntos de muestreo para conocer si existen focos de aportaciones de Material Particulado Sedimentable, por ejemplo, en las inmediaciones de las comunidades, las zonas agrícolas y dentro del área de influencia de los pozos petroleros que se encuentran dentro de la Reserva Biológica Limoncocha. Esto con el fin de llegar a una mejor idea de la calidad de aire de la RBL.

La carencia de valores referenciales de metales en material particulado, dentro de la Normativa ambiental ecuatoriana para la inmisión es una carencia que debe ser subsanada, estableciendo niveles de alerta, alarma y emergencia como para los otros contaminantes establecidos en el AM 050, para esto se recomienda el uso de índices e indicadores que permitan, con base a, la información establecer estos valores referenciales. Como complemento, la normativa ecuatoriana no se especifica un equipo de muestreo para determinar Material Particulado Sedimentable, por lo tanto, se sugiere mantener un muestreador estándar para la medición de este parámetro, con el fin de obtener datos fiables y comparables para la cuantificación del mismo.

## REFERENCIAS

Agurto Dimitri, & Coral-Carrillo Katty. (2016). "EVALUACIÓN DE LA CONCENTRACIÓN DE MERCURIO, ALUMINIO Y COBRE EN AGUAS, SUELOS Y SEDIMENTOS DE LA RESERVA BIOLÓGICA LIMONCOCHA PARA ESTABLECER LA LÍNEA BASE, 2015- 2016." Universidad Internacional SEK.

Ali, H., Khan, E., & Ilahi, I. (2019). Environmental Chemistry and Ecotoxicology of Hazardous Heavy Metals: Environmental Persistence, Toxicity, and Bioaccumulation. *Journal of Chemistry*, 2019, 1–14. <https://doi.org/10.1155/2019/6730305>

Alloway, B. J. (2013). Sources of Heavy Metals and Metalloids in Soils. In *En B. Alloway, Heavy Metals in Soils* (pp. 11–50). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-4470-7\\_2](https://doi.org/10.1007/978-94-007-4470-7_2)

APHA, A. P. H. A. (2017). *Standart Methods for the examination of Water and Wastewater* (Bridgewater Laura, Ed.; 23rd ed.). APHA.

Carrillo Paredes Emma Ivonne, & Martínez-Fresneda Miguel. (2016). *CARACTERIZACIÓN Y PROPUESTA DE FUNCIONAMIENTO HIDROGEOQUÍMICO DE LA LAGUNA DE LIMONCOCHA* [Tesis Maestría]. Universidad Internacional SEK.

Castaño Puerta Alfredo, & Robledo Vélez Laura Melissa. (2012). *Validación de la metodología para el análisis de los metales cadmio y plomo en agua tratada por absorción atómica con horno de grafito en el laboratorio de análisis de aguas y alimentos de la Universidad Tecnológica de Pereira* [Tesis ingeniería]. Universidad Tecnológica de Pereira.

Chapman, P. M. (2008). Environmental risks of inorganic metals and metalloids: A continuing, evolving scientific odyssey. *Human and Ecological Risk Assessment*, 14(1), 5–40. <https://doi.org/10.1080/10807030701790272>

Coral- Carrillo, K., Oviedo, J. E., & Rodríguez, A. (2019). Evaluation of the chemical risk of the miners of the transfer station ET2 Zámbez by heavy metals in the breathable particulate material. *Espirales Revista Multidisciplinaria de Investigación*, 3(29), 106–128. <https://doi.org/10.31876/er.v3i29.595>

Coral- Carrillo, Katty., Rodríguez, Ana., & Oviedo, J. Esteban. (2018). Riesgo biológico en el aire respirable de los minadores de basura en la Et2 Zámbez en Quito-Ecuador. *Ambiente y Desarrollo*, 21(41), 79–92. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.ayd21-41.rbar>

Coral-Carrillo, K., Drouet, J. C., Rodríguez-Romero, A., Tovar-Sánchez, A., Ruiz-Gutiérrez, G., & Viguri Fuente, J. R. (2021). Spatial distribution and level of contamination of potentially toxic elements in sediments and soils of a biological reserve wetland, northern Amazon region of Ecuador. *Journal of Environmental Management*, 289. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2021.112495>

Coral-Carrillo, K., & Oviedo-Costales, J. E. (2022). PODER CALORÍFICO SUPERIOR E INFERIOR DE LOS RESIDUOS SÓLIDOS URBANOS DE LA PARROQUIA LIMONCOCHA EN LA AMAZONIA ECUATORIANA. In *Medio ambiente: Preservación, salud y sobrevivencia 2* (pp. 24–36). Atena Editora. <https://doi.org/10.22533/at.ed.7052222073>

Coral-Carrillo, K., Rodríguez-Romero, A., Tovar-Sánchez, A., Ruiz-Gutiérrez, G., & Fuente, J. R. V. (2022). Geochemical baseline establishment, contamination level and ecological risk assessment of metals and As in the Limoncocha lagoon sediments, Ecuadorian Amazon region. *Journal of Soils and Sediments*, 22(1). <https://doi.org/10.1007/s11368-021-03084-w>

Coral-Carrillo Katty, Ruiz Gema, & Viguri Javier. (2023). *Evaluación de la contaminación y del riesgo ecológico potencial de metales y As en sedimentos y suelos de la Reserva Biológica de Limoncocha, Amazonia Ecuatoriana*. Universidad de Cantabria.

Espinosa José, Moreno Julio, & Bernal Gustavo. (2022). *Suelos del Ecuador: Clasificación, uso y manejo* (Espinosa José, Moreno Julio, & Bernal Gustavo, Eds.; 1st ed.). Instituto Geográfico Militar. <https://www.geoportaligm.gob.ec/portal/index.php/estudios-geograficos/>

FAO, O. de las N. U. para la A. y la A. (2022, June 14). *Portal de Suelos de la FAO*.

Fernández José María. (2001). *La estadística en Química Analítica*.

Libro de Registro de mediciones, Norma Técnica (2013).

Gomes da Silva, F. J., & Gouveia, R. M. (2020). Global Population Growth and Industrial Impact on the Environment. In *Cleaner Production* (pp. 33–75). Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-23165-1\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-23165-1_3)

Ivanina, A. V., & Sokolova, I. M. (2015). Interactive effects of metal pollution and ocean acidification on physiology of marine organisms. *Current Zoology*, 61(4), 653–668. <https://doi.org/10.1093/czoolo/61.4.653>

Jarrín, A., Salazar, J., & Martínez, M. (2017). Evaluación del riesgo a la contaminación de los acuíferos de la Reserva Biológica de Limoncocha, Amazonía. *Ambiente & Agua - An Interdisciplinary Journal of Applied Science*, 652–664.

Legarreta Perusquia, A., Corral Avitia, A. Y., Delgado Rios, M., Torres Pérez, J., & Flores Marguez, J. P. (2016). Material particulado y metales pesados en aire en ciudades mexicanas. *CULCYT*, 56, 56–68.

Lodge, J. P., & Intersociety Committee. (1989). *Methods of air sampling and analysis* (J. P. Lodge & Intersociety Committee, Eds.; 3rd ed., Vol. 3).

Acuerdo Ministerial 050: Norma de Calidad de aire ambiente o inmisión, Norma de calidad (2011).

Mazurek, R., Kowalska, J., Gąsiorek, M., Zadrożny, P., Józefowska, A., Zaleski, T., Kępk, W., Tymczuk, M., & Orłowska, K. (2017). Assessment of heavy metals contamination in surface layers of Roztocze National Park forest soils (SE Poland) by indices of pollution. *Chemosphere*, 168, 839–850. <https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2016.10.126>

Mera José Antonio, Martínez-Fresneda Miguel, Salazar José, & Coral-Carrillo Katty. (2019). *DETECCIÓN DE METALES PESADOS EN SÓLIDOS SUSPENDIDOS TOTALES, FIJOS Y VOLÁTILES DE LA LAGUNA DE LIMONCOCHA: UN ESTUDIO PARA LA CONSERVACIÓN Y SALUD AMBIENTAL*. [THESIS]. UNIVERSIDAD INTERNACIONAL SEK.

Ministerio de Ambiente del Ecuador. (2015). Acuerdo Ministerial 097 A. *Registro Oficial*, 387.

Ministerio del Ambiente del Ecuador. (2015). *Info SNAP I Sistema Nacional de Áreas Protegidas del Ecuador*. SISTEMA NACIONAL DE ÁREAS PROTEGIDAS DEL ECUADOR. <http://areasprotegidas.ambiente.gob.ec/es/areas-protegidas/reserva-biológica-limoncocha>

Neira, F., Suza, M., & Robles, K. (2013). Sustainable uses of biodiversity in a protected area of Ecuadorian Amazonia (2006-2011). *Letras Verdes. Revista Latinoamericana de Estudios Socioambientales FLACSO - Ecuador*, 14, 338–357.

Neira, F., & Younes, N. (2011). valuación multicriterial de los usos de subsistencia de la biodiversidad por parte de una comunidad Kichwa en la Reserva Biológica Limoncocha. In E. F. FLACSO, F. Neira, & N. Younes (Eds.), *Retos y amenazas en Yasuní* (pp. 137–152). FLACSO.

Popoola, L. T., Adebanjo, S. A., & Adeoye, B. K. (2018). Assessment of atmospheric particulate matter and heavy metals: a critical review. *International Journal of Environmental Science and Technology*, 15(5), 935–948. <https://doi.org/10.1007/s13762-017-1454-4>

Robledo L, & Castaño A. (2012). *Validación de la Metodología para el análisis de los metales Cadmio y Plomo en agua tratada por absorción atómica con horno de grafito en el Laboratorio de Análisis de Aguas y Alimentos de la Universidad Tecnológica de Pereira*. (Universidad Tecnológica de Pereira, Ed.; 1st ed., Vol. 1).

Sakan, S., Dević, G., Relić, D., Anđelković, I., Sakan, N., & Đorđević, D. (2015). Evaluation of sediment contamination with heavy metals: the importance of determining appropriate background content and suitable element for normalization. *Environmental Geochemistry and Health*, 37(1), 97–113. <https://doi.org/10.1007/s10653-014-9633-4>

UIDR. (2019). *La textura en suelos Agrícolas*. Universidad Internacional del Riego. <https://www.universidadderiego.com/la-textura-en-los-suelos-agricolas/>

US EPA. (2007). Method 3051A (SW-846). In *Microwave assisted acid digestion of sediments, sludges, and oils*. (Vol. 3, Issue September). <https://www.epa.gov/hw-sw846>

Valdivieso, J., & Coral-Carrillo Katty. (2018). *"Determinación de la concentración de metales pesados mediante la caracterización de material particulado sedimentable en la reserva biológica LIMONCOCHA, Noviembre de 2016 a Junio 2017."* [https://repositorio.uisek.edu.ec/bitstream/123456789/2786/2/TESIS MPS VALDIVIESO KASTNER ESTEBAN J.pdf](https://repositorio.uisek.edu.ec/bitstream/123456789/2786/2/TESIS%20MPS%20VALDIVIESO%20KASTNER%20ESTEBAN%20J.pdf)

## CAPÍTULO 3

# DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS PARA LA TASA DE INFECCIÓN Y REMOCIÓN MENSUAL EN LA MODELACIÓN MATEMÁTICA SIR DE LA PANDEMIA DEL COVID-19. CASO COMPARATIVO

*Fecha de envío: 29/02/2024*

*Data de aceite: 01/04/2024*

### **Juan Arturo Vásquez Velásquez**

Departamento de Ciencias  
Universidad Tecnológica del Perú –  
Campus Chiclayo  
Chiclayo – Perú  
<https://orcid.org/0000-0002-7449-8919>

### **Luis Jaime Collantes Santisteban**

Departamento Académico de Matemáticas  
Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo  
Lambayeque – Perú  
<https://orcid.org/0000-0001-9262-9399>

### **Manuel Alberto Manay Fernández**

Universidad Católica de Trujillo  
Trujillo – Perú  
<https://orcid.org/0009-0000-5913-0043>

### **Manuel Pérez Tapia**

Universidad Católica Santo Toribio de  
Mogrovejo  
Chiclayo – Perú  
<https://orcid.org/0009-0001-9403-1857>

### **Walter De la Cruz De la Cruz**

Universidad Tecnológica del Perú –  
Campus Lima Norte  
Lima – Perú  
<https://orcid.org/0009-0001-7760-0149>

### **Wilfredo Vidal Irrasábal Gonzales**

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo  
Lambayeque – Perú  
<https://orcid.org/0009-0004-9967-8731>

**RESUMEN:** El objetivo de esta investigación fue determinar los valores de los parámetros para la tasa de infección y remoción mensual (desde marzo 2020 a diciembre 2020) en el modelo matemático epidemiológico SIR, con la finalidad de describir la evolución del Covid-19 en la región Lambayeque, Perú. La investigación desarrollada fue de tipo observacional y retrospectiva, con diseño no experimental. Como técnica principal se utilizó la observación directa y como instrumento una ficha de recolección de datos, en la cual se anotaron los casos de personas susceptibles ( $S$ ), Infectadas ( $I$ ) y Removidas ( $R$ ) por Covid-19 en la región Lambayeque durante el año 2020, información proporcionada por la Gerencia Regional de Salud (GERESA). Con los datos de GERESA se calcularon los parámetros referidos y se programó en el software MATLAB el modelo matemático epidemiológico SIR, desarrollando simulaciones numéricas de tipo Runge-

Kutta, cuyos resultados fueron comparados con la información real proporcionada por la GERESA, concluyendo que el modelo matemático epidemiológico SIR permitió predecir de una manera aceptable la evolución de la pandemia del Covid-19 en la región Lambayeque. Se concluye en resaltar la gran importancia que tiene la modelación matemática para predecir el comportamiento de una enfermedad.

**PALABRAS-CLAVE:** Modelo SIR, Epidemiología, Covid-19, Runge-Kutta, Modelación Matemática, Matemática Aplicada.

## DETERMINATION OF THE PARAMETERS FOR THE MONTHLY INFECTION AND REMOVAL RATE IN THE SIR MATHEMATICAL MODELING OF THE COVID-19 PANDEMIC. COMPARATIVE CASE

**ABSTRACT:** The objective of this research was to determine the values of the parameters for the monthly infection and removal rate (from March 2020 to December 2020) in the SIR epidemiological mathematical model, with the purpose of describing the evolution of Covid-19 in the Lambayeque region, Peru. The research carried out was observational and retrospective, with a non-experimental design. Direct observation was used as the main technique and a data collection form was used as an instrument, in which the cases of susceptible ( $S$ ), Infected ( $I$ ) and Removed ( $R$ ) people by Covid-19 in the Lambayeque region were noted during the year 2020, information provided by the Regional Health Management (GERESA). With the GERESA data, the aforementioned parameters were calculated and the SIR epidemiological mathematical model was programmed in the MATLAB software, developing numerical simulations of the Runge-Kutta type, the results of which were compared with the real information provided by the GERESA, concluding that the epidemiological mathematical model SIR made it possible to predict in an acceptable way the evolution of the Covid-19 pandemic in the Lambayeque region. We conclude by highlighting the great importance of mathematical modeling to predict the behavior of a disease.

**KEYWORDS:** SIR Model, Epidemiology, Covid-19, Runge-Kutta, Mathematical Modeling, Applied Mathematics.

## INTRODUCCIÓN

Desde que el hombre comenzó a vivir en comunidades numerosas, las epidemias y enfermedades contagiosas aparecieron, así tenemos por ejemplo la plaga de Atenas (430 A.C.), la peste negra en Europa (1346-1350) o la plaga de Londres por mencionar algunas; muchas de ellas han sido controladas y se han descubierto vacunas para combatirlas. Actualmente aún existen epidemias mundiales como el ébola, cólera, VIH/Sida, entre otras, que siguen azotando a la humanidad, algunas de estas enfermedades eran típicas de una determinada zona o región; sin embargo, debido a la globalización las enfermedades se pueden propagar más rápido (Santamaría, 2015).

En diciembre de 2019 en Wuhan, China, apareció una nueva enfermedad respiratoria llamada Covid-19 (enfermedad infecciosa que es causada por el coronavirus) que en el año 2020 se propagó por todo el mundo azotando duramente a la humanidad, causando

un grave problema de salud pública donde la epidemiología se presenta como una herramienta útil y eficaz para estudiar el comportamiento de las enfermedades infecciosas. El Perú también fue azotado por la pandemia del Covid-19 cuando el 6 de marzo de 2020 las autoridades anunciaron el primer caso de contagio. A partir de esa fecha el número de personas infectadas por el virus fueron en aumento, siendo el Ministerio de Salud (MINSA), a través de la Sala situacional Covid-19, el encargado de dar un reporte diario de los casos de personas contagiadas, fallecidas y recuperadas. Esta pandemia en nuestro país causó muchas muertes, hacinamiento en los hospitales, falta de camas en la Unidad de Cuidados Intensivos (UCI) para atención a los pacientes y falta de plantas de oxígeno, causando un colapso en el sistema de salud. La región Lambayeque no fue ajena a los contagios por Covid-19, su propagación entre la población causó miles de infectados y muertes durante el año 2020. La falta de camas UCI, falta de oxígeno, hacinamiento en hospitales y un endeble sistema de salud pública fueron los estragos que produjo esta pandemia en la región.

Debido a estas pandemias surgió el interés de describir y modelar su comportamiento y evolución, la enfermedad del Covid-19 generó un gran interés en desarrollar herramientas para realizar predicciones basadas en modelos matemáticos. Uno de los pioneros en formular modelos matemáticos aplicados a una epidemia fue Daniel Bernoulli en el año 1760, sin embargo, Pedersen (2015) señala que “no será sino hasta entrado el siglo XX cuando la modelización matemática en epidemiología cobraría un real impulso” (p. 5) y naturalmente el Covid-19 en el mundo estimuló un gran interés para desarrollar herramientas basadas en modelos matemáticos.

## Modelo básico epidemiológico SIR

Uno de los modelos epidemiológicos más utilizados para describir diferentes pandemias y enfermedades es el modelo básico epidemiológico SIR propuesto por Kermack y McKendrick (1927), el cual ha sido utilizado para describir la evolución de diferentes enfermedades a nivel mundial dando buenas aproximaciones.

Este modelo considera el número de personas de una comunidad de manera constante, es decir sin tomar en cuenta los nacimientos ni defunciones, y permite estimar el número de personas que son susceptibles a enfermarse al estar en contacto con personas infectadas (susceptibles), el número de personas que padecen la enfermedad (infectados) y el número de personas que son inmunes, es decir, ya no pueden transmitir la enfermedad (Recuperados o fallecidos), en una población a lo largo de un determinado periodo de tiempo (Manrique et al., 2020), es decir que este modelo divide a una población  $N(t)$  en tres partes, los susceptibles  $S(t)$ , los infectados  $I(t)$  y los removidos  $R(t)$ , todos relacionados con la unidad de tiempo  $t$ , generalmente expresada en días (Marques et al., 2021) de tal manera que:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) \quad (1)$$



El esquema del modelo básico epidemiológico SIR, se representa en la figura 1

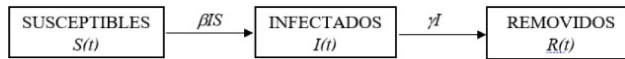


Figura 1. Dinámica de una pandemia en una población de acuerdo al modelo SIR

El modelo básico epidemiológico SIR, plantea el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda S(t) \cdot I(t) \\ I'(t) = \gamma S(t) \cdot I(t) \\ R'(t) = \gamma I(t) \end{cases} \quad (2)$$

donde:

$\lambda$ : Tasa de infección.

$\gamma$ : Tasa de remoción.

$t$ : Tiempo.

$S(t)$ : Número de personas susceptibles.

$I(t)$ : Número de personas infectadas.

$R(t)$ : Número de personas removidas.

La primera ecuación del sistema (2) nos indica que la variación del número de personas susceptibles en una población es directamente proporcional con la cantidad de susceptibles e infectados, esta variación va disminuyendo, es decir que  $S(t)$  es decreciente. La segunda ecuación del sistema (2) nos indica que la variación de la cantidad de personas infectadas está dada por la diferencia entre los nuevos infectados y los nuevos removidos y la tercera ecuación del sistema (2) indica que la variación de la cantidad de personas removidas es directamente proporcional a la cantidad de personas infectadas, además  $R(t)$  es creciente (Vergara, et al., 2020).

Como se puede apreciar, en una pandemia, el número de infectados va disminuyendo, es decir que:  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (2) posee solución única definida para todo  $t \geq 0$ , la demostración se encuentra en García (2014). En la presente investigación se ha utilizado el método de Runge-Kutta de cuarto orden para resolver dicho sistema garantizando que la solución aproximada converja a la solución exacta.

El modelo SIR trabaja bajo los siguientes supuestos:

- La población es constante (no se toman en cuenta nacimientos ni muertes)
- Las personas recuperadas se vuelven inmunes a la enfermedad, es decir que no vuelven a contagiarse (no hay rebotes).
- La enfermedad tiene un periodo de desarrollo.

## Utilización del modelo SIR para modelar enfermedades

Santamaría (2015), utilizó el modelo SIR para modelar la gripe en Barcelona realizando la parametrización inicial en base a los datos obtenidos sobre la gripe con el fin de acotar el rango de los parámetros, logrando una buena aproximación que le permitió obtener un modelo que se ajustó al escenario real logrando recrear el comportamiento de la enfermedad de manera satisfactoria. Borbón y Borbón (2014) hicieron un análisis acerca de los modelos utilizados en la propagación de la Influenza AH1N1, donde analizan el modelo SIR y sus variantes logrando concluir que el modelo SIR es el más pertinente para la modelación de enfermedades de transmisión, ya que es simple, versátil y de fácil aplicación, al considerar diferentes parámetros. Hacen hincapié que una buena campaña de vacunación y, en algunos casos, el aislamiento y cuarentena hacen que la enfermedad no se propague. Zárate (2012) utilizó el modelo SIR para describir enfermedades respiratorias que tienen un comportamiento típico, donde logró muy buenos resultados al estimar los parámetros para la influenza AH1N1 en México, realizó la simulación utilizando el software MatLab y creó un ambiente gráfico de modo que se logró dar valores a los parámetros, al número de semanas de la epidemia que se desea modelar, así como la clase ya sea susceptible, infeccioso o removido, obteniendo resultados conforme avanzaba la enfermedad en el tiempo. La ventaja de utilizar el modelo epidemiológico SIR es que se pueden variar los parámetros con los que se desea modelar de acuerdo al ambiente geográfico.

Abelló et al. (2020), afirman que el modelo SIR es útil en la predicción de enfermedades lo que les sirvió de apoyo en la toma de decisiones en salud pública durante la epidemia del Covid-19; asimismo afirmaron que este modelo permite analizar rebrotes o eventos locales de transmisión y que se puede aplicar a poblaciones específicas para la modelación de enfermedades. Este modelo SIR fue aplicado en la ciudad de La Habana (Cuba), donde los resultados y estimaciones fueron de ayuda a los epidemiólogos.

Vinitsky (2021) propuso un modelo SIR reducido para la pandemia Covid-19 basado en un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden no lineales y obtuvo soluciones numéricas mediante el método de Euler con paso de 1 día, concluyendo que el modelo es aplicable a cualquier comunidad (país, ciudad, etc.). Usó como metodología ejemplos de modelado del desarrollo de una pandemia en función de dos parámetros: el tiempo de la diseminación de la infección por un portador del virus y la probabilidad de contaminación de un miembro de la población sana en contacto con uno infectado por unidad de tiempo. El modelo propuesto lo comparó con el modelo básico SIR ya que su formulación estuvo basada en el número de infectados y el número de portadores de la enfermedad.

Manrique et al. (2020) usaron el modelo SIR para pronosticar la pandemia del Covid-19 en Colombia, obteniendo datos de los casos diarios confirmados, proporcionados por el Instituto Nacional de Salud. En esta investigación se plantearon diversos modelos haciendo la variación del número básico de reproducción ( $R_0$ ), creando cuatro simulaciones con el modelo básico SIR, obteniendo como resultado que un  $R_0$  de 2 es la mejor aproximación del comportamiento real de la pandemia para los primeros 15 días desde el reporte del primer caso y si  $R_0$  es igual a 3 se tendrá el peor escenario que se daría en la primera semana del mes de abril de 2020.

Los resultados obtenidos por Grillo et al. (2020) permitieron conocer la manera como los modelos matemáticos pueden predecir el comportamiento de enfermedades infecciosas, enfocándose en el virus que provoca el Covid-19; su investigación incluyó una descripción de las variables epidemiológicas, los elementos del contexto y las intervenciones en salud que influyen en la tasa de infección. Asimismo, hicieron una descripción del modelo SIR, mostrando las características y los factores que influyen en este modelo, y explicando cómo puede ser usado el modelo para estimar futuros escenarios de la pandemia.

Para la buena aproximación de los modelos SIR, es necesario optimizar el cálculo de los parámetros del modelo, tal como se desarrolla en el trabajo de Sedaghat et al. (2020), donde propusieron un método novedoso que integra una solución analítica de la población infecciosa utilizando la función de distribución de Weibull en cualquier modelo de tipo SIR.

El modelamiento matemático en nuestro país se ha usado en diversos trabajos para estudiar diferentes enfermedades utilizando modelos matemáticos aplicados a la epidemiología, como el de Vásquez (2018), que utilizó un modelo matemático para estudiar la obesidad. También existen trabajos aplicados al modelamiento del Covid-19, como la investigación de Pino et al. (2020) quienes propusieron un modelo matemático SIR-D segmentado para “predecir la evolución de poblaciones epidemiológicas de interés en la pandemia del Covid-19” (p. 162) utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias. Para la metodología realizaron una segmentación del modelo en 6 intervalos de tiempo de 14 días cada uno. En cada etapa de la enfermedad, calcularon las tasas epidemiológicas para reemplazarlo en el sistema de ecuaciones y estimaron de manera empírica los datos que proporcionaba el Ministerio de Salud de manera diaria. Los datos obtenidos les permitieron observar y analizar el comportamiento de la pandemia del Covid-19 en el Perú y realizaron simulaciones que representaron la evolución de esta enfermedad.

Espínola et al. (2020), utilizaron como metodología el modelamiento matemático epidemiológico SIR con ecuaciones diferenciales ordinarias definidas para simular el comportamiento epidemiológico y estimar la evolución del Covid-19 en la población peruana. Se aplicaron 6 modelos sin contención y 6 modelos con contención de la enfermedad, obteniendo tasas de recuperación, así como las tasas de infectados en periodos de 11, 14 y 21 días.

Asimismo, Olivera y Rivera (2021) aplicaron el modelo SIR durante un periodo de 200 días para caracterizar la evolución epidémica de la enfermedad de coronavirus (Covid-19), estimando valores a través del número básico de reproducción  $R_0$ , obteniendo el pico de infectados poco después del 30 de mayo de 2020, luego disminuye el número de personas infectadas a  $R_0=1,5$ .

Vargas et al. (2022) utilizan el modelo SIRD para determinar la propagación del Covid-19 en la región Tacna, donde utilizando la data del Ministerio de Salud, logran modelar el comportamiento de la enfermedad en dicha región y obtienen posibles escenarios con proyecciones para 2 y 3 años.

A nivel de la región Lambayeque existen escasos trabajos de modelación de enfermedades epidemiológicas. Vergara et al. (2020) utilizaron el modelo epidemiológico básico SIR para determinar y describir el comportamiento de la pandemia del Covid-19 para cada una de las regiones del país, estimando los parámetros diarios desde el 28 de marzo de 2020 hasta el 30 de abril del mismo año, obteniendo una proyección del comportamiento del Covid-19. Utilizaron el método de Euler para resolver el modelo SIR, además realizaron simulaciones generando un patrón.

A diferencia del anterior trabajo, en esta investigación se ha calculado los parámetros diarios en un periodo de tiempo más prolongado (del 15 de marzo de 2020 al 31 de diciembre de 2020) incorporando el cálculo de la media de los datos diarios proporcionados por la GERESA Lambayeque para determinar los parámetros del modelo de manera mensual, asimismo, se resolvió el modelo SIR a través del método de Runge Kutta de cuarto orden para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El aporte fundamental de este trabajo es describir la evolución del Covid-19 en la región Lambayeque utilizando el modelo básico epidemiológico SIR, resuelto bajo el enfoque numérico de Runge Kutta de cuarto orden, y comparar los resultados de las simulaciones con la información dada por la GERESA [5].

**Definición 1. (Contagio neto).** Se define el Contagio Neto (CN) de la pandemia del Covid-19 como:

$$CN(t) = I(t) - R(t)$$

donde:

$CN(t)$ : Cantidad de personas con contagio neto en el día  $t$ .

$I(t)$ : Cantidad de personas infectadas en el día  $t$ .

$R(t)$ : Cantidad de personas removidas (recuperadas o fallecidas) en el día  $t$ .

$t$ : Tiempo (en días).

## MATERIAL Y MÉTODOS

El método de investigación fue de enfoque cuantitativo, tomando la información proporcionada por la GERESA durante el año 2020 de las personas infectadas, recuperadas y fallecidas de Covid-19 en la región Lambayeque, midiendo los datos en diferentes momentos de la pandemia.

Se utilizó el método de análisis-síntesis puesto que primero se observó el fenómeno a estudiar, en este caso la evolución del Covid-19 en la región Lambayeque, luego se describió el comportamiento de dicha enfermedad, identificando sus parámetros con la información recogida de acuerdo a las variables de la investigación, distribuyéndolas en base a sus indicadores. Luego se utilizó el modelo básico epidemiológico SIR para poder describir el comportamiento de la enfermedad. Se obtuvo una solución aproximada del modelo utilizando métodos numéricos, a través de simulaciones hechas en un programa desarrollado en MatLab y los resultados se compararon con los datos oficiales proporcionados por la Gerencia Regional de Salud de Lambayeque (GERESA) para dar una explicación del fenómeno observado.

También en esta investigación se ha utilizado el enfoque de sistemas para cumplir el objetivo general, planteamiento del problema y la justificación de la investigación, para esto se ha realizado lo siguiente:

- a. Formulación del problema.
- b. Identificación y utilización del modelo básico epidemiológico SIR.
- c. Cálculo de los parámetros iniciales del modelo.
- d. Obtención de resultados.
- e. Comparación de los resultados del modelo con los datos oficiales de la GERESA para calibrar los parámetros.
- f. Análisis y discusión de los resultados.
- g. Elaboración de las conclusiones y sugerencias.

El tratamiento de la información tuvo un enfoque interdisciplinario ya que se incorporó conocimientos de diferentes ciencias como la Biología y Epidemiología y un enfoque empírico ya que se basó en la experiencia vivida durante la epidemia observando el fenómeno y utilizando un análisis estadístico para la obtención de los parámetros.

## RESULTADOS

De acuerdo a los datos proporcionados por la GERESA (2023), el número de personas con contagio neto por Covid-19 en la región Lambayeque desde el 15 de marzo al 31 de diciembre de 2020 (292 días), se muestra en la figura 2.

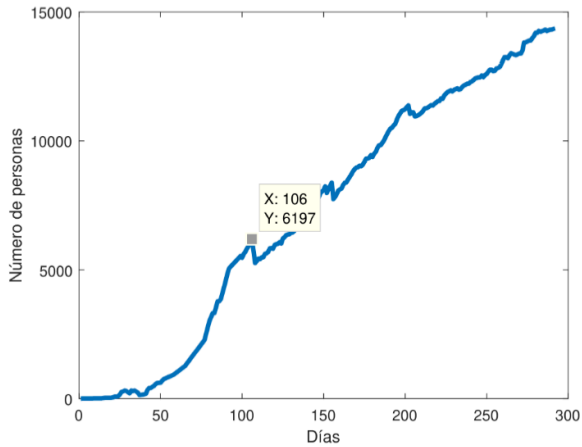


Figura 2. Contagios netos de Covid-19 en la región Lambayeque según datos de la GERESA

Como se observa en la figura 2 los contagios netos desde el 15 de marzo hasta el 31 de diciembre de 2020 por Covid-19 en la región Lambayeque muestran un pico de contagio muy notorio que se da en el día 106 de la pandemia (28 de junio de 2020) con 6197 personas con contagio neto y luego hay un pequeño descenso hasta que los contagios vuelven a incrementarse. Este incremento en los contagios es lo que las autoridades denominaron la segunda ola.

### Identificación de parámetros

Los parámetros  $\lambda$  (tasa de contagio) y  $\gamma$  (tasa de remoción), considerados en las fórmulas de Vergara et al. (2020), están dados por:

$$\lambda = -\frac{S(t+1)-S(t-1)}{2 S(t)I(t)} \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{R(t+1)-R(t-1)}{2 I(t)} \quad (4)$$

Con las fórmulas (3) y (4), se calcularon los parámetros diarios para el Covid-19 en la región Lambayeque para las tasas de contagio y de recuperación desde el 28 de marzo de 2020 (día en que se reportó el primer fallecido) hasta el 31 de diciembre de 2020.

Día	Susceptibles	Infectados	Removidos
15 de marzo 2020	1309730	1	0
16 de marzo 2020	1309726	5	0
....	....	....	....
27 de marzo 2020	1309717	14	0
28 de marzo 2020	1309715	15	1
29 de marzo 2020	1309708	22	1
30 de marzo 2020	1309700	29	2
31 de marzo 2020	1309698	30	3
01 de abril 2020	1309693	34	4
....	....	....	....
30 de diciembre 2020	1257381	33346	19004
31 de diciembre 2020	1257310	33391	19030

Tabla 1. Datos de infectados y removidos proporcionados por GERESA

Para calcular el primer parámetro diario  $\lambda$ , se procedió utilizando los datos de la tabla 1 y la fórmula (3)

$$\lambda_1 = -\frac{1309708 - 1309717}{2 \times 1309715 \times 15}$$

$$\lambda_1 = 2.29057 \times 10^{-7}.$$

De la misma forma se calculó el segundo parámetro diario  $\lambda$ ,

$$\lambda_2 = -\frac{1309700 - 1309715}{2 \times 1309708 \times 22}$$

$$\lambda_2 = 2.60294 \times 10^{-7}$$

y así sucesivamente. De manera análoga, se calcularon los parámetros diarios  $\gamma$ , utilizando los datos de la tabla 1 y la fórmula (4)

$$\gamma_1 = \frac{1309708 - 1309717}{2 \times 15}$$

$$\gamma_1 = 0.033333333$$

De esta manera los parámetros diarios se muestran en la tabla 2.

Día	Susceptibles	Infectados	Removidos	$\lambda$	$\gamma$
28 de marzo 2020	1309715	15	1	$2.29057 \times 10^{-7}$	0.033333333
29 de marzo 2020	1309708	22	1	$2.60194 \times 10^{-7}$	0.022727273
30 de marzo 2020	1309700	29	2	$1.31644 \times 10^{-7}$	0.034482759
31 de marzo 2020	1309698	30	3	$8.90791 \times 10^{-8}$	0.033333333
01 de abril 2020	1309693	34	4	$6.7371 \times 10^{-8}$	0.014705882
....	....	....	....	....	....
30 de diciembre 2020	1257381	33346	19004	$2.43271 \times 10^{-9}$	0.001199544
31 de diciembre 2020	1257310	33391	19030	$1.45297 \times 10^{-9}$	0.000763679

Tabla 2. Cálculo de los parámetros diarios utilizados en el modelo

Para realizar la aplicación del modelo SIR a la pandemia del Covid-19 en el año 2020, se tomaron como parámetros iniciales los que se muestran en la tabla 3, los valores de  $\lambda$  y  $\gamma$  han sido determinados como la media de los parámetros diarios tomados mensualmente. Los datos de la tabla 3, se aplicaron en el modelo para los meses de marzo de 2020 a diciembre de 2020 y se compararon con la data de la GERESA [5].

Mes	$S(0)$	$I(0)$	$R(0)$	$\lambda$	$\gamma$
Marzo 2020	1309730	1	0	$1.7752 \times 10^{-7}$	0.030969175
Abril 2020	1309693	34	4	$1.6707 \times 10^{-7}$	0.073784139
Mayo 2020	1305629	2358	1744	$5.6913 \times 10^{-8}$	0.030694125
Junio 2020	1294845	8839	6047	$1.6627 \times 10^{-8}$	0.006299962
Julio 2020	1287524	13779	8428	$8.8496 \times 10^{-9}$	0.00377143
Agosto 2020	1282054	17440	10237	$1.028 \times 10^{-8}$	0.005078797
Setiembre 2020	1274045	22331	13355	$6.2777 \times 10^{-9}$	0.002425049
Octubre 2020	1268280	26379	15072	$3.7832 \times 10^{-9}$	0.001962766
Noviembre 2020	1264233	28768	16730	$2.9542 \times 10^{-9}$	0.001190257
Diciembre 2020	1260907	31025	17799	$2.8928 \times 10^{-9}$	0.001258022

Tabla 3. Parámetros iniciales del modelo para el año 2020

### Aplicación de los parámetros al modelo SIR

Los parámetros de la tabla 3 se aplicaron al modelo SIR, el cual se programó en MatLab, con cálculo aproximado utilizando el Método de Runge Kutta de cuarto orden y los datos iniciales, obteniéndose los siguientes resultados:

*Mes de marzo 2020*

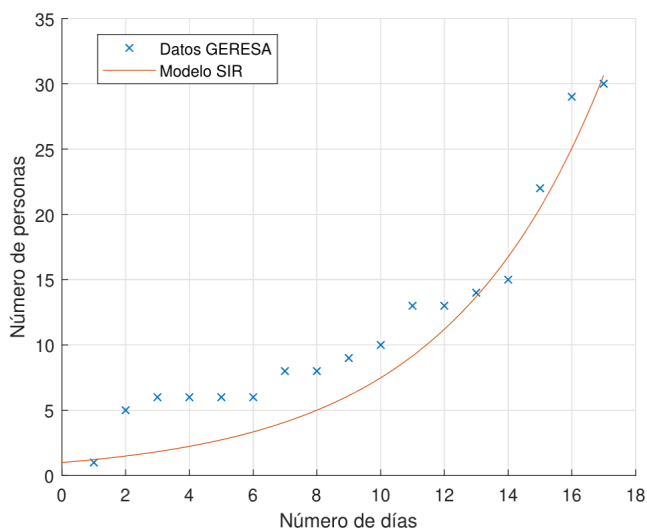


Figura 3. Solución del modelo SIR para los infectados del mes de marzo 2020



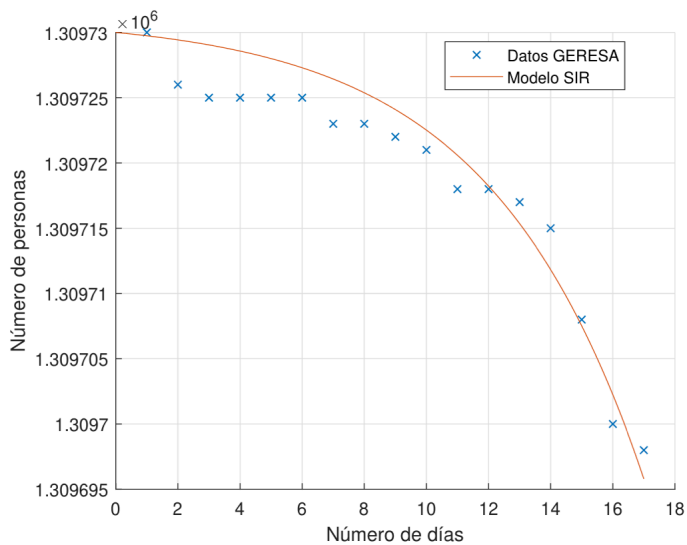


Figura 4. Solución del modelo SIR para los susceptibles del mes de marzo 2020

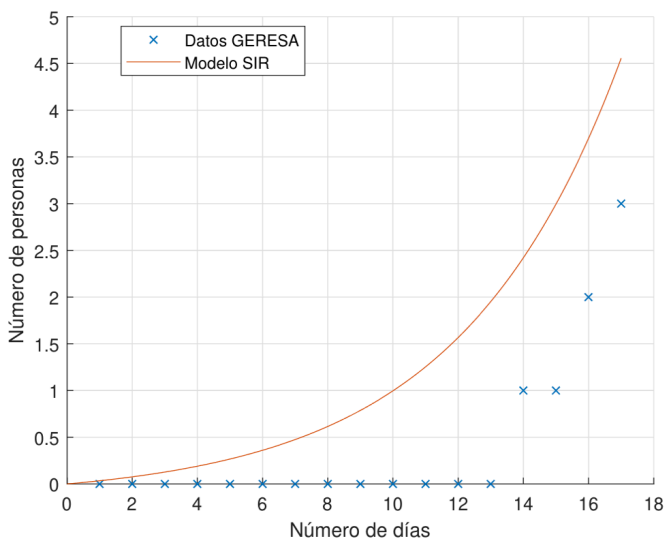


Figura 5. Solución del modelo SIR para los removidos del mes de marzo 2020

Mes de abril 2020

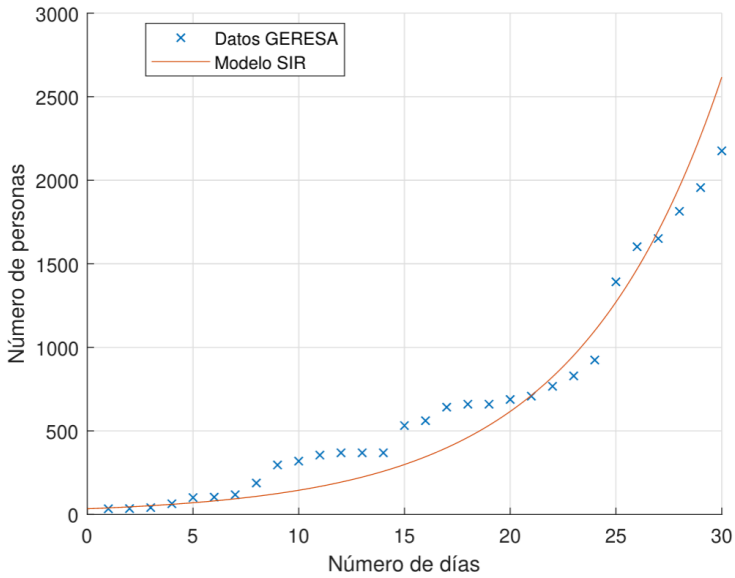


Figura 6. Solución del modelo SIR para los infectados del mes de abril 2020

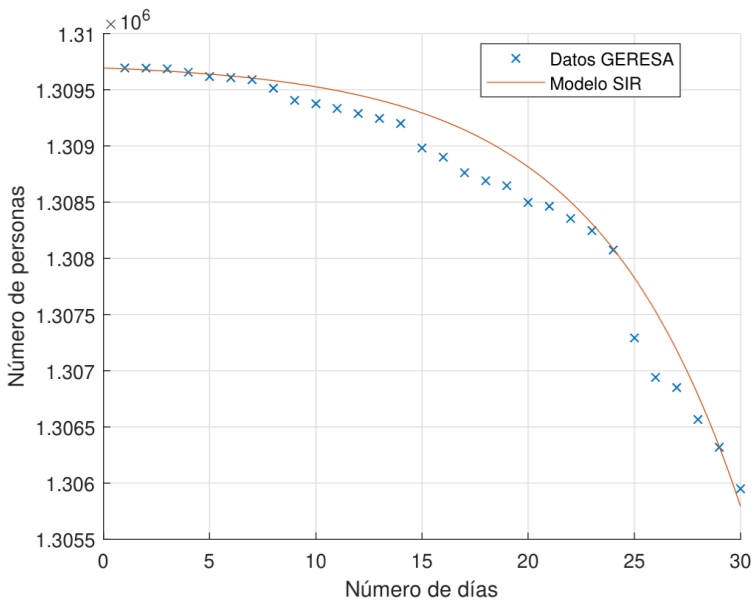


Figura 7. Solución del modelo SIR para los susceptibles del mes de abril 2020

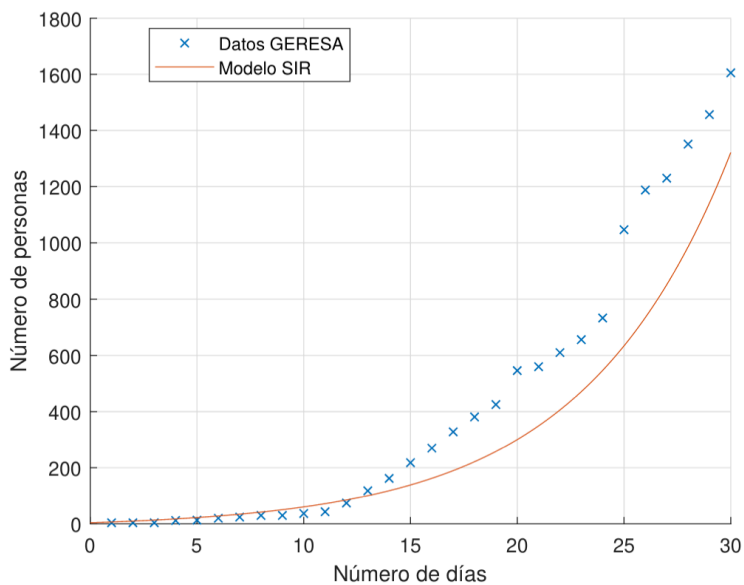


Figura 8. Solução do modelo SIR para os removidos do mês de abril 2020

### Mes de mayo 2020

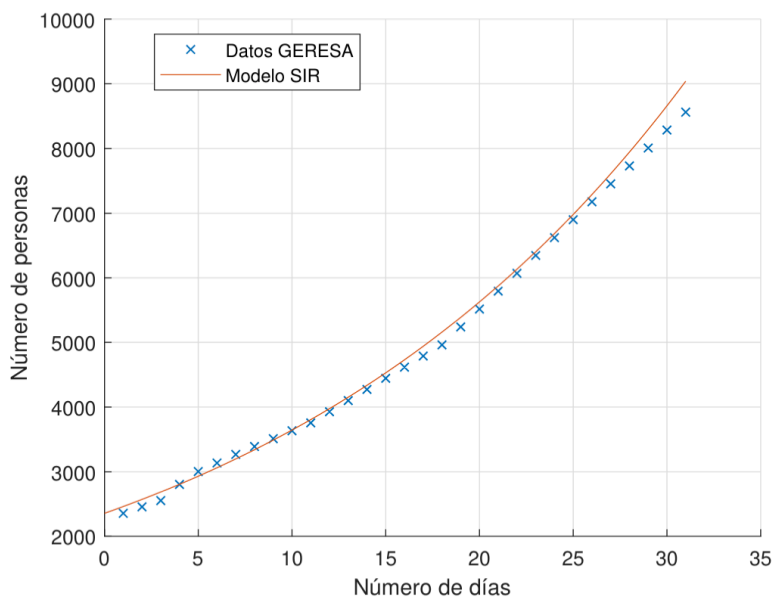


Figura 9. Solução do modelo SIR para os infectados do mês de mayo 2020

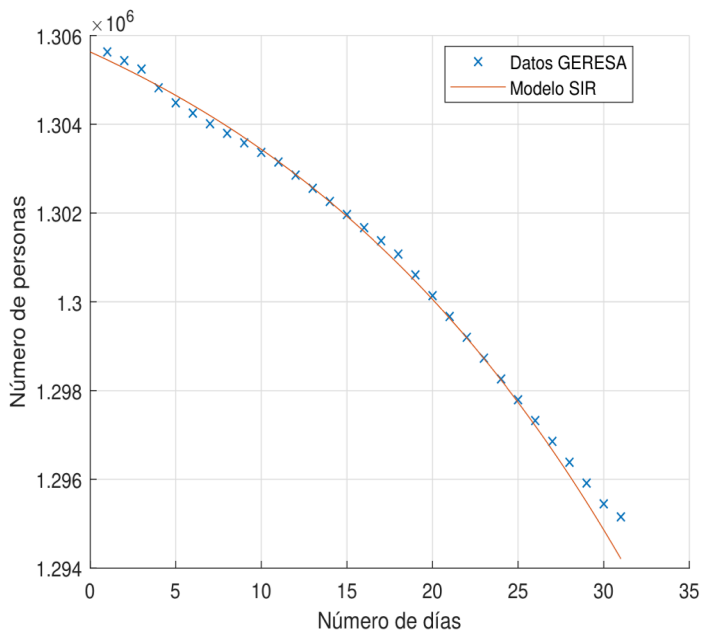


Figura 10. Solución del modelo SIR para los susceptibles del mes de mayo 2020

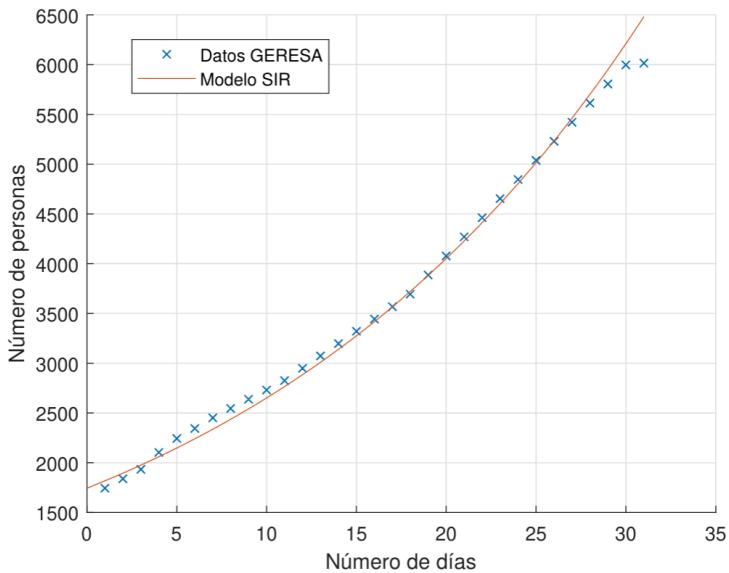


Figura 11. Solución del modelo SIR para los removidos del mes de mayo 2020

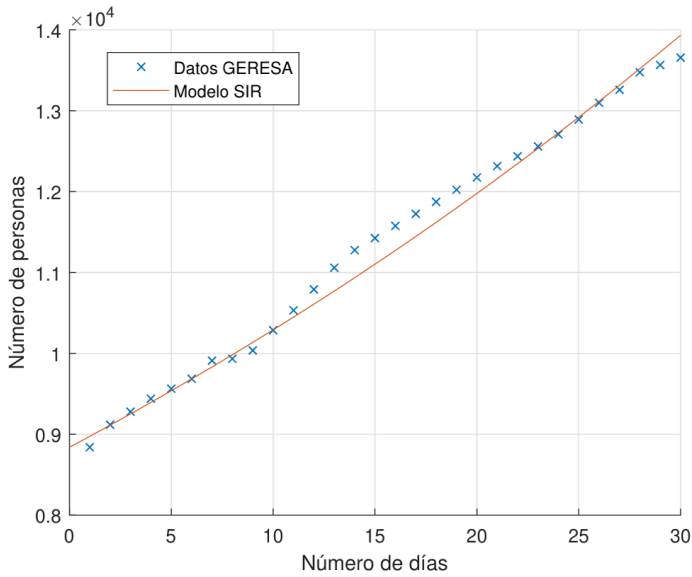


Figura 12. Solución del modelo SIR para los infectados del mes de junio 2020

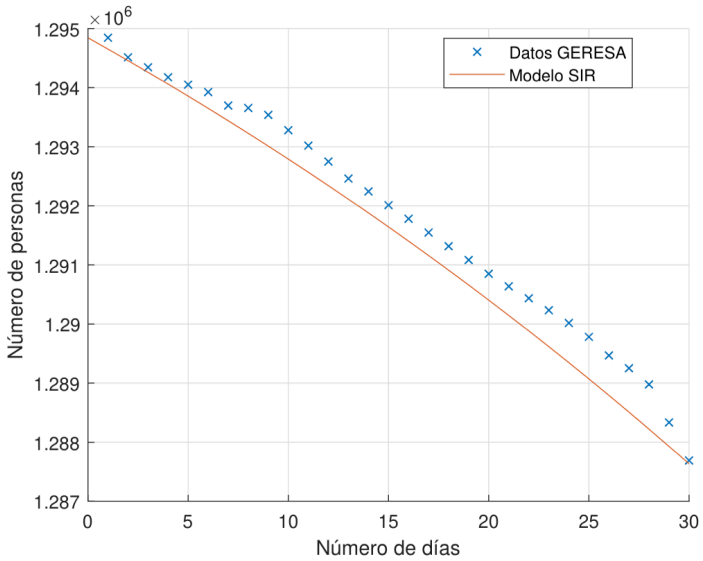


Figura 13. Solución del modelo SIR para los susceptibles del mes de junio 2020

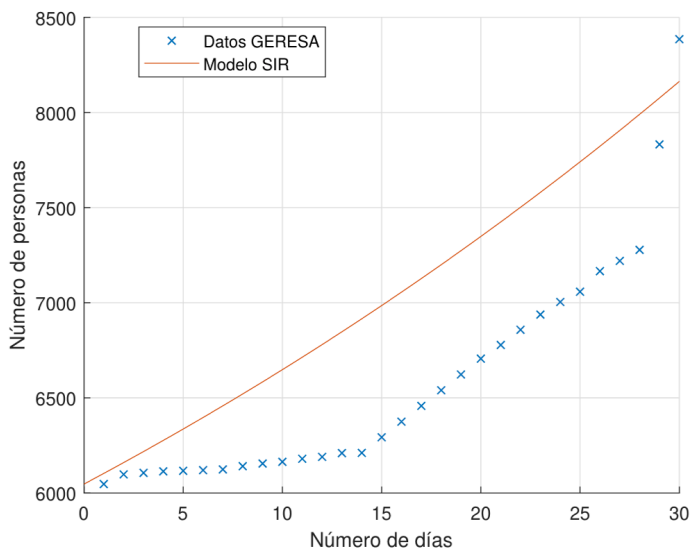


Figura 14. Solução do modelo SIR para os removidos do mês de junho 2020

*Mes de julio 2020*

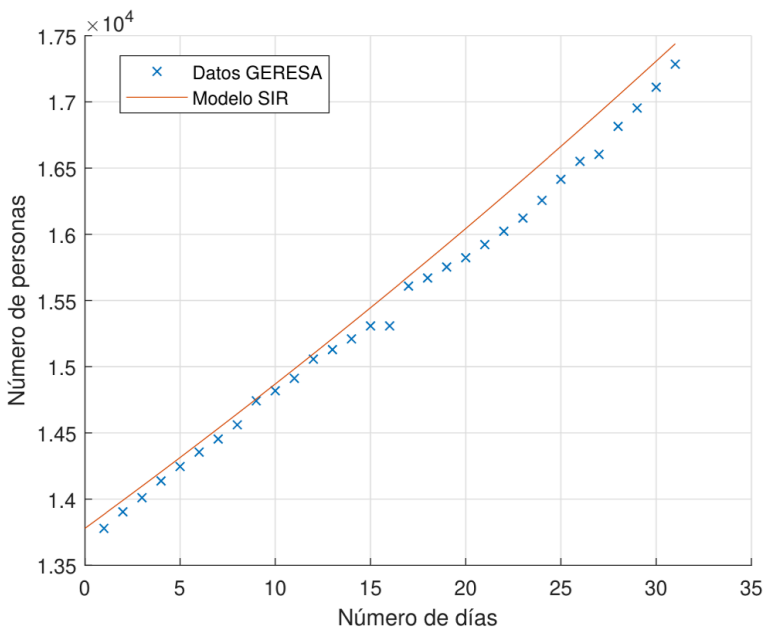


Figura 15. Solução do modelo SIR para os infectados do mês de julho 2020

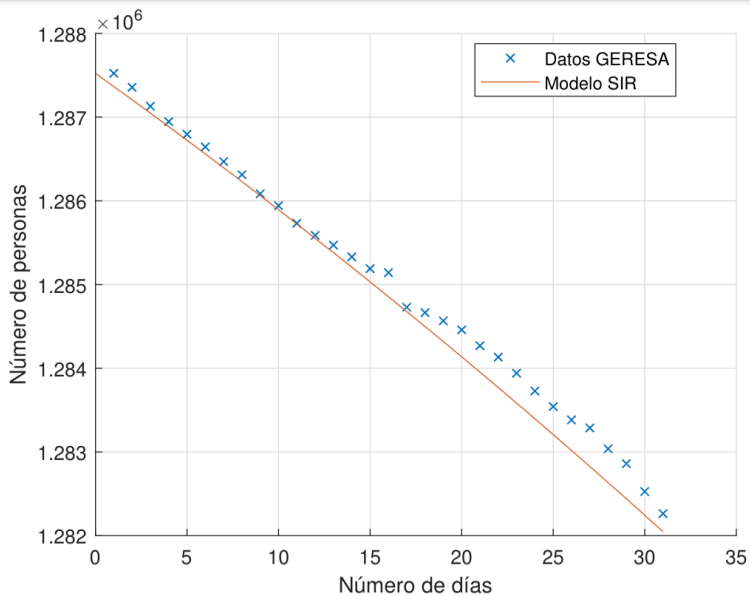


Figura 16. Solução do modelo SIR para os suscetíveis do mês de julho 2020

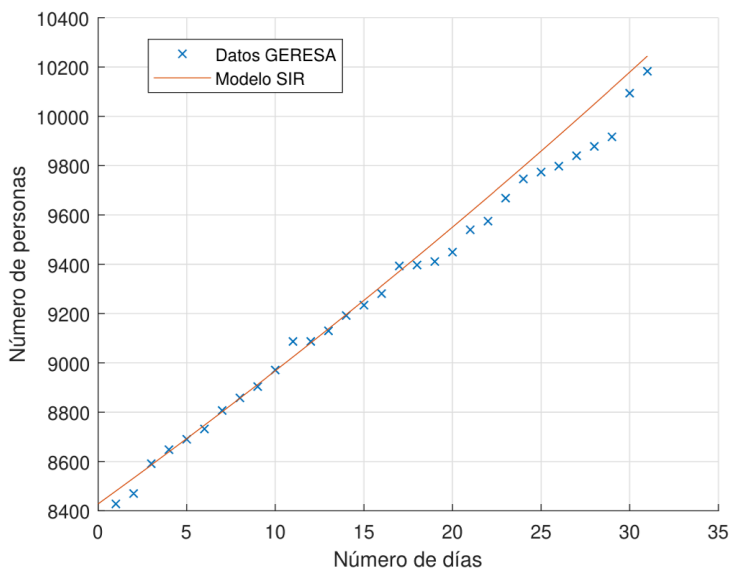


Figura 17. Solução do modelo SIR para os removidos do mês de julho 2020

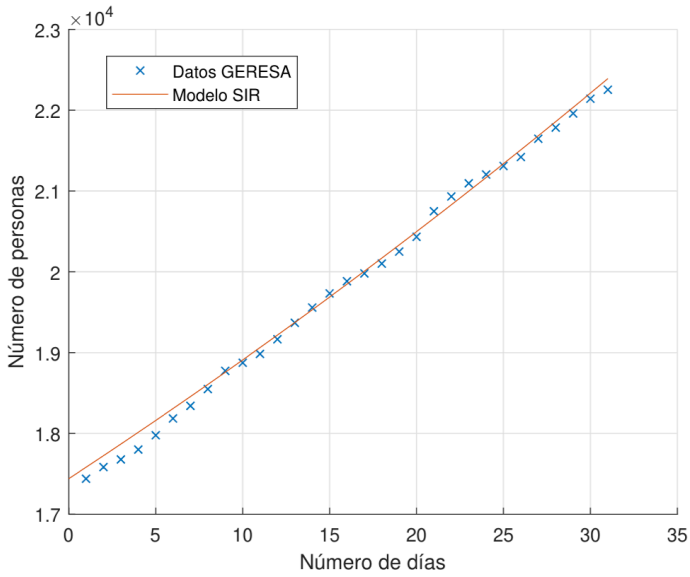


Figura 18. Solución del modelo SIR para los infectados del mes de agosto 2020

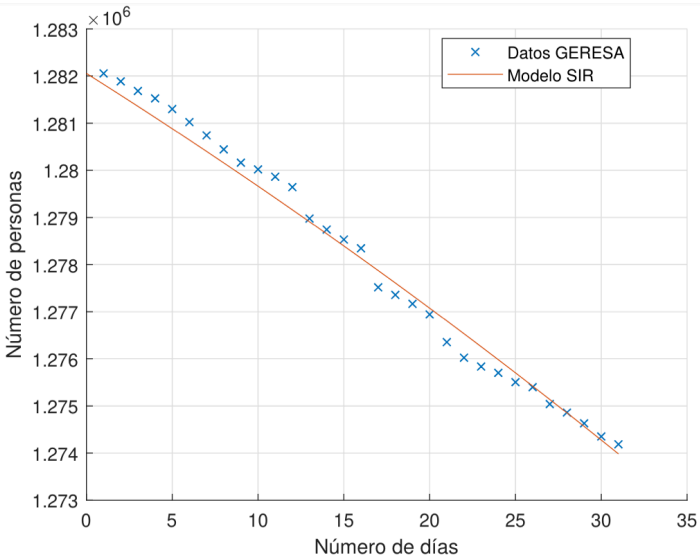


Figura 19. Solución del modelo SIR para los susceptibles del mes de agosto 2020



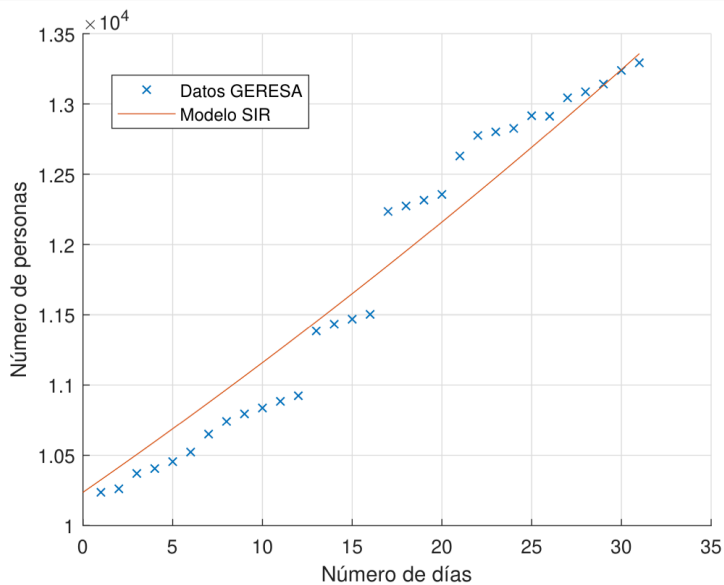


Figura 20. Solución del modelo SIR para los removidos del mes de agosto 2020

*Mes de setiembre 2020*

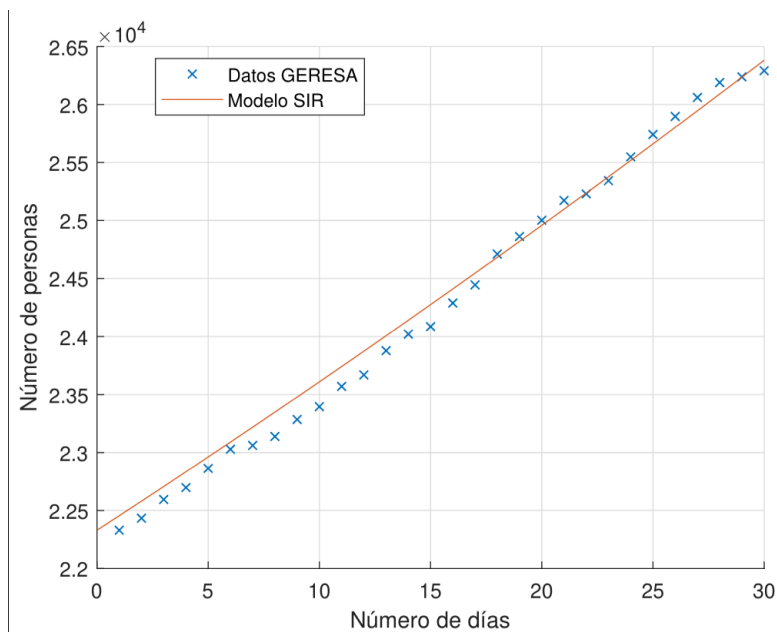


Figura 21. Solución del modelo SIR para los infectados del mes de setiembre 2020

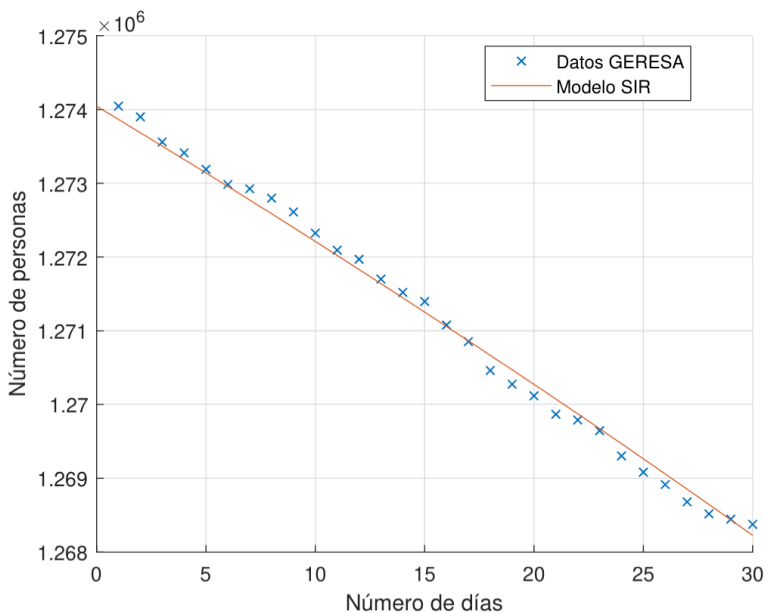


Figura 22. Solución del modelo SIR para los susceptibles del mes de setiembre 2020

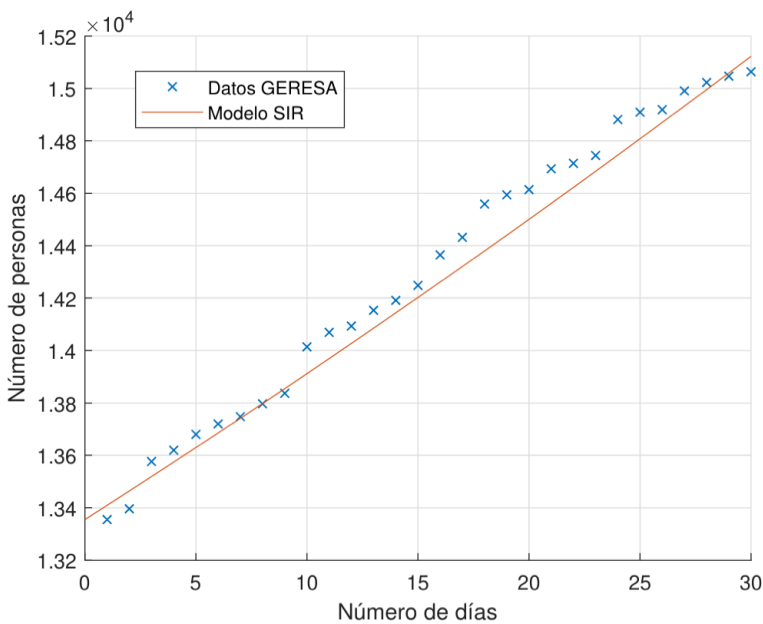


Figura 23. Solución del modelo SIR para los removidos del mes de setiembre 2020

Mes de octubre 2020

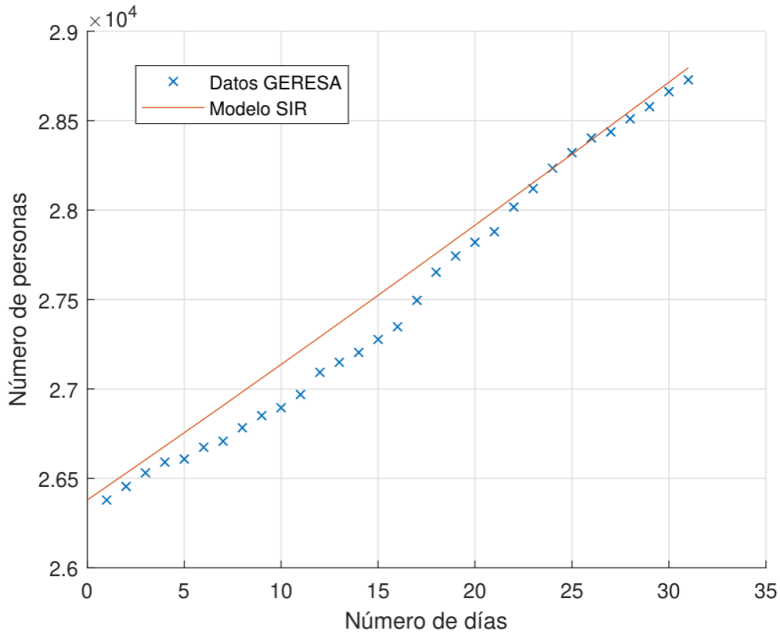


Figura 24. Solución del modelo SIR para los infectados del mes de octubre 2020

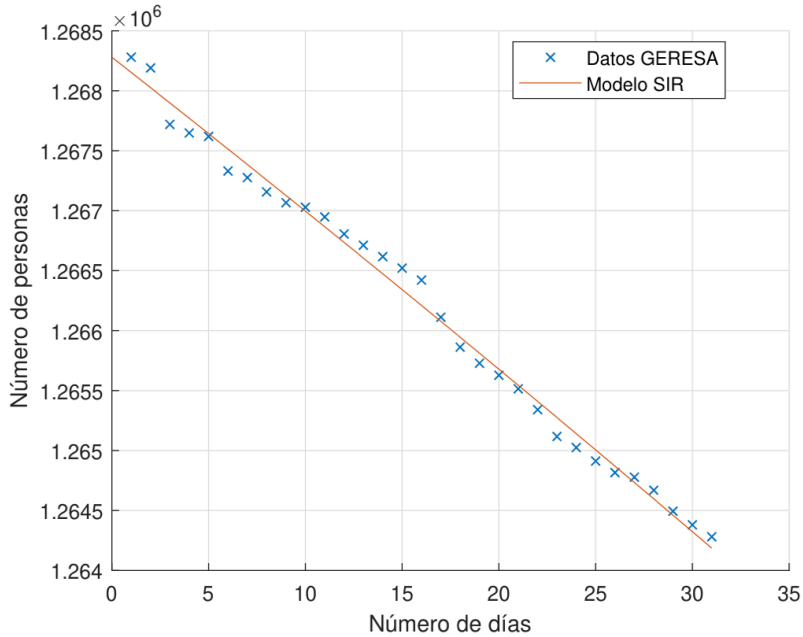


Figura 25. Solución del modelo SIR para los susceptibles del mes de octubre 2020

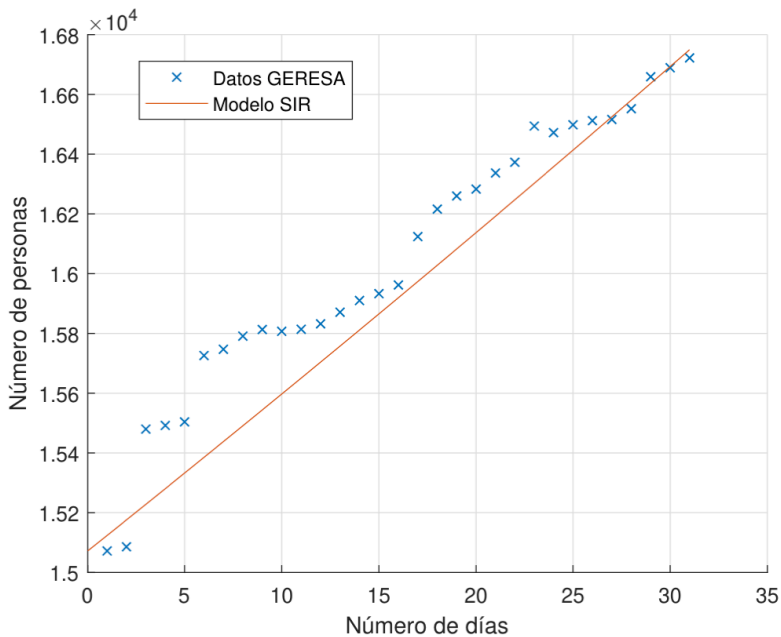


Figura 26. Solução do modelo SIR para os removidos do mês de outubro 2020

*Mes de noviembre 2020*

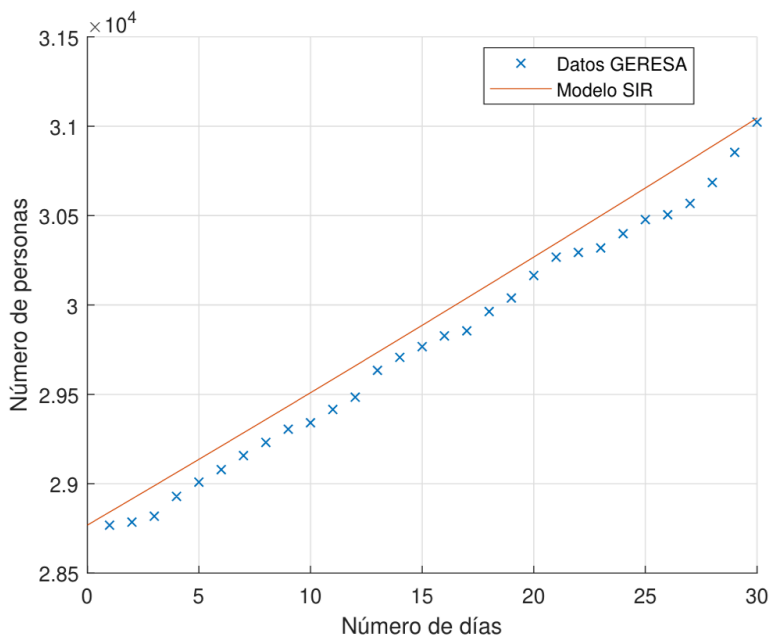


Figura 27. Solução do modelo SIR para os infectados do mês de novembro 2020

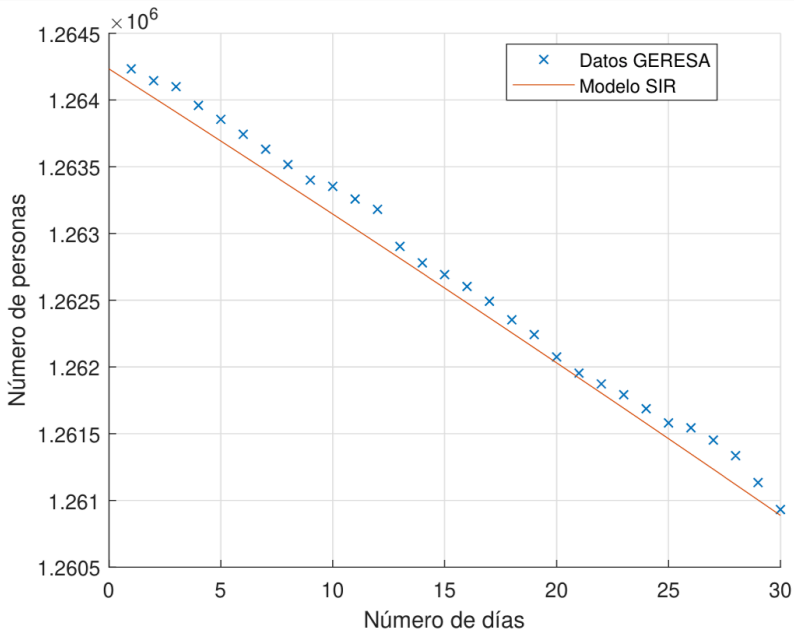


Figura 28. Solución del modelo SIR para los susceptibles del mes de noviembre 2020

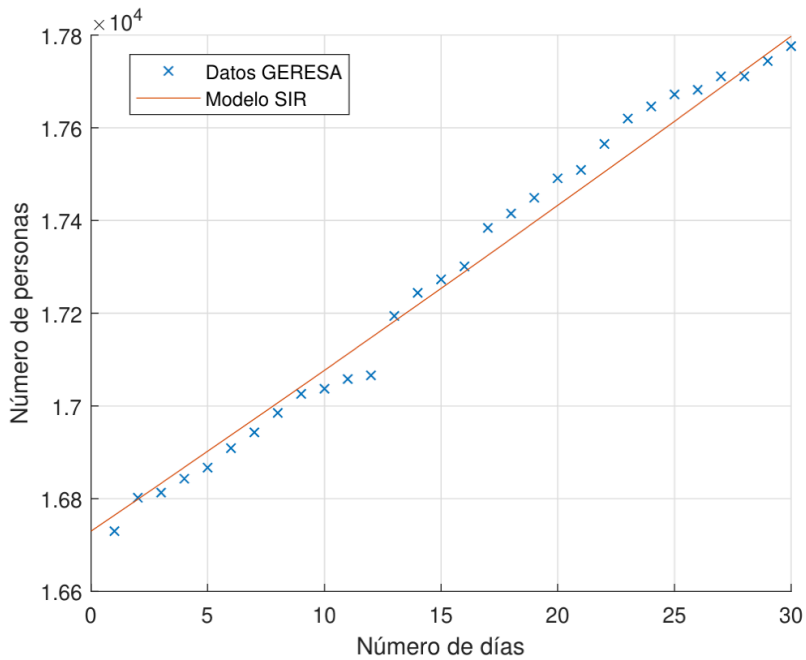


Figura 29. Solución del modelo SIR para los removidos del mes de noviembre 2020

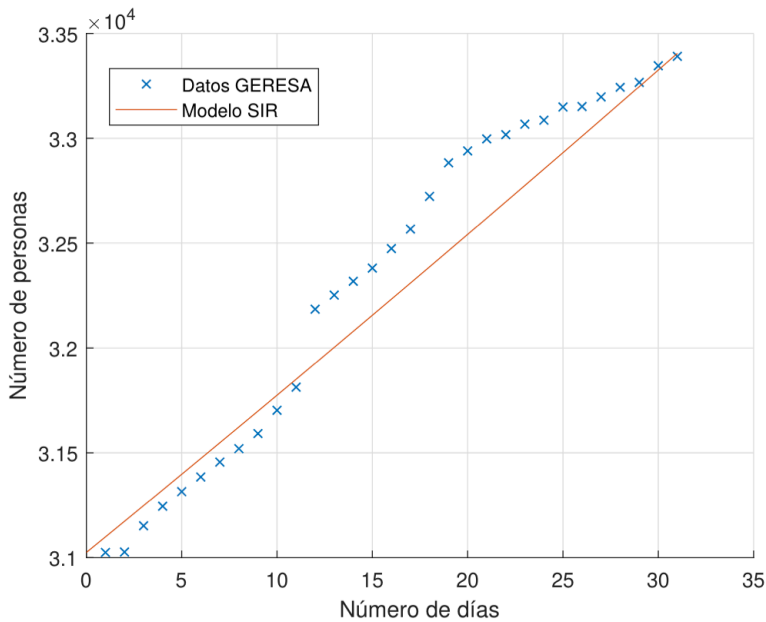


Figura 30. Solução do modelo SIR para os infectados do mês de dezembro 2020

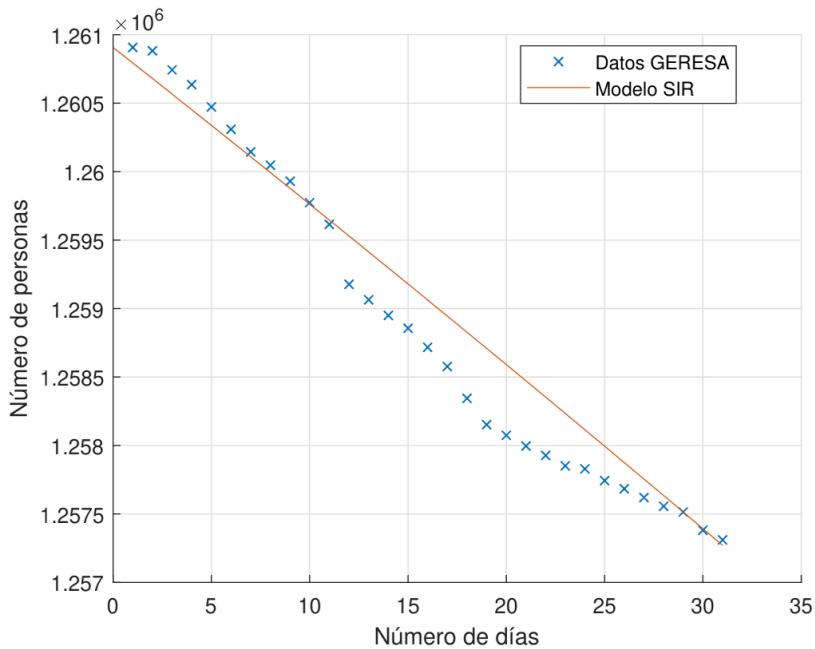


Figura 31. Solução do modelo SIR para os suscetíveis do mês de dezembro 2020

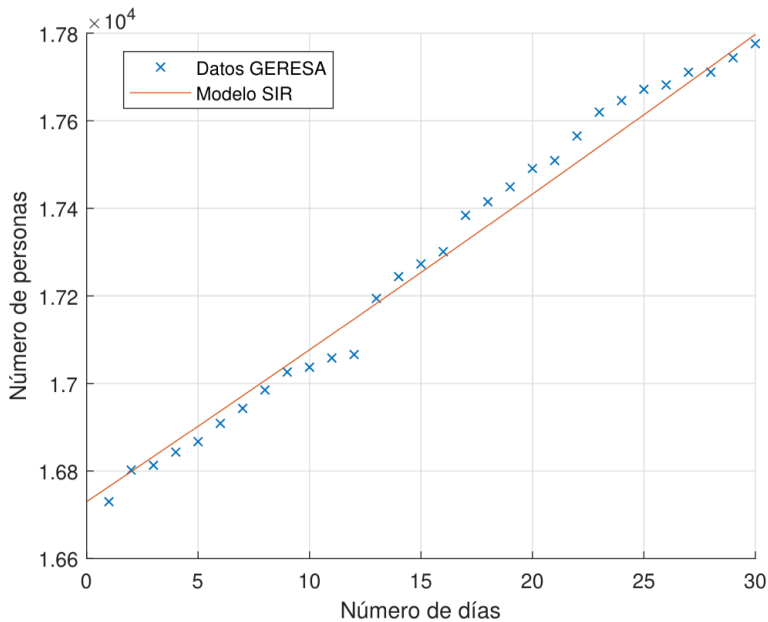


Figura 32. Solución del modelo SIR para los removidos del mes de diciembre 2020

Como se puede apreciar desde la figura 3 hasta la figura 32, los datos obtenidos de la solución del modelo SIR con los parámetros establecidos para los 3 grupos de personas (susceptibles, infectados y removidos) están próximos a los datos que maneja la GERESA Lambayeque con respecto a la pandemia del Covid-19, por lo que se afirma que el modelo SIR describe de manera óptima la evolución del Covid-19 en la región Lambayeque.

## DISCUSIÓN

El objetivo principal de este trabajo fue la aplicación del modelo SIR para describir la pandemia del Covid-19 en la región Lambayeque durante el año 2020; para ello fue necesario hacer un cálculo de los parámetros  $I$  (tasa de contagio) y de  $\gamma$  (tasa de recuperación) que se aproximen mejor a los datos que maneja la GERESA sobre la pandemia. Para este cálculo se consideraron las fórmulas (3) y (4), para luego tomar las medias de dichos datos de cada mes.

Los modelos matemáticos demuestran ser efectivos para modelar diferentes pandemias, en particular el modelo básico epidemiológico SIR destaca por su simplicidad y extensibilidad para el estudio de epidemias (Hernández, 2016) y ha sido utilizado por investigadores para predecir el comportamiento de algunas pandemias en plazos cortos de tiempo ya que se requiere pocos datos simples para su aplicación. Sin embargo, a largo plazo no es muy útil pues no toma en cuenta ciertas suposiciones ni parámetros que influyen en una población, como la reinfección, aislamiento, tasa de nacimiento, etc.

En este trabajo se obtuvo una buena aproximación del número de personas susceptibles, infectadas y removidas de la pandemia del Covid-19 en la región Lambayeque durante el año 2020; para ello se utilizaron parámetros mensuales y se compararon dichas simulaciones con la data de la GERESA.

Los resultados obtenidos muestran que el modelo básico epidemiológico SIR describe aceptablemente la evolución del Covid-19 en la región Lambayeque.

Para la resolución del modelo SIR se utilizó el método de Runge Kutta de cuarto orden para poder obtener una solución aproximada del modelo. En todas las figuras mostradas en este estudio se pueden ver que las funciones  $S(t)$ ,  $I(t)$  y  $R(t)$  tienen un comportamiento similar al obtenido en otras investigaciones consultadas como en Abelló et al. (2020), Espínola et al. (2020), Vergara et. al (2020), Vinitzky et al. (2021), entre otros, lo que nos confirma la validez de nuestros resultados.

Cabe indicar que el modelo utilizado solo considera dos parámetros, la tasa de infección y la tasa de recuperación, no considerando otros parámetros que pueden influir en el comportamiento de una pandemia, es por eso que, para futuras proyecciones, los resultados dependerán de las condiciones iniciales y de otros parámetros.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se aplicó el modelo básico epidemiológico SIR para describir la evolución del Covid-19 en la región Lambayeque durante el año 2020, teniendo como datos los proporcionados por la Dirección Regional de Salud de Lambayeque (GERESA). Se identificaron las variables del modelo básico epidemiológico SIR, para determinar los datos iniciales de las personas susceptibles, infectadas y removidas. Este modelo no considera parámetros como la tasa de nacimientos, tasa de defunciones o tasa de vacunación.

Se estimaron los parámetros del modelo básico epidemiológico SIR de acuerdo a los índices proporcionados por la Gerencia Regional de Salud de la región Lambayeque.

Al comparar los resultados del modelo básico epidemiológico SIR con los datos oficiales de la GERESA (números de personas susceptibles, infectadas y removidas) se concluye que existe una buena aproximación de los valores.

## REFERENCIAS

I. A. Abelló, R. Guinovart, y W. Morales, **El modelo SIR básico y políticas antiepidémicas de salud pública para la COVID – 19 en Cuba**. *Revista Cubana de Salud Pública*, 46, 1 – 24. (2020). <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&AuthType=ip,sso&db=asn&AN=148054398&lang=es&site=ehostive&scope=site&custid=s9226804>.

M, Borbón & H. Borbón, **Modelación de la propagación de enfermedades infectocontagiosas: Revisión de literatura**. *Informe quincenal Epidemiológico Nacional*, 19(2), 15-27. (2014). <https://www.ins.gov.co/buscador/IQEN/IQEN%20vol%2019%202014%20num%202.pdf>.



M. Espínola, A. Racchumí, S. Sanca, S. Espínola, P. Arango, C. Saldaña, J. S. Paredes & M. Mejico. **Pandemia de covid-19 y efecto de medidas de contención en población peruana: Un modelamiento matemático SIR.** *Revista del Cuerpo Médico del Hospital Nacional Almanzor Aguinaga Asenjo*, 13(2), 110-115. (2020). <https://doi.org/10.35434/rcmhnaaa.2020.132.656>

A. García. **Modelos de ecuaciones diferenciales para la propagación de enfermedades infecciosas** (Tesis doctoral). Universidad de Cantabria. (2014). <https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/7125>.

GERESA, L. **Comportamiento Covid-19 Región Lambayeque** (Sala situacional Covid 19). Oficina de Epidemiología. Lambayeque. (2020). [https://sigina.regionlambayeque.gob.pe/docs/ainformacion/0604202012245069949\\_983.pdf](https://sigina.regionlambayeque.gob.pe/docs/ainformacion/0604202012245069949_983.pdf)

E. K. Grillo, L. E. Bravo, R. Guerrero & J. Santaella, J. **Mathematical models and the coronavirus, COVID 19.** *Colombia Médica*. (2020). <https://doi.org/10.25100/cm.v51i2.4277>

A. Hernández. **Estudio numérico de un modelo de propagación de enfermedades** (Tesis doctoral). Universidad de Zaragoza. Zaragoza, España. (2016).

W. Kermack & A. McKendrick. **A contribution to the mathematical theory of epidemics** *Proceedings of the Royal Society*. (1927)

F. G. Manrique, C. A. Agudelo, V. M. González, O. Gutiérrez, C. F. Téllez & G. Herrera. **Modelo SIR de la pandemia de covid-19 en Colombia.** *Revista de Salud Pública*, 22(2), 1 – 9. (2020)

<https://doi.org/10.15446/rsap.v22n2.85977>

J. A. L. Marques, F. N. B. Gois, J. Xavier- Neto & S. Fong. **Predictive models for decision support in the COVID-19 crisis.** Springer. (2021).

R. E. Olivera & A. M. L. Rivera. **Modelo SIR de la tendencia pandémica de COVID-19 en Perú** [Number: 3]. *Revista de la Facultad de Ciencias Médicas de Córdoba*, 78(3), 236-242. (2021).

<https://doi.org/10.31053/1853.0605.v78.n3.31142>

S. Pedersen. **(algunos) modelos matemáticos para (algunas) enfermedades contagiosas: Transmisión, infección, tratamiento** (Tesis doctoral). Universidad de Buenos Aires. Argentina (2015).

N. Pino, P. Soto & R. Quispe. **A segmented SIR-d mathematical model for coronavirus propagation dynamics (COVID-19) in Peru.** *Selecciones Matemáticas*, 7(1), 162- 171. (2020). <https://doi.org/10.17268/sel.mat.2020.01.15>

J. S. Santamaría. **Modelización y simulación del comportamiento epidemiológico de la gripe en la ciudad de Barcelona** (Tesis doctoral). Universidad Politécnica de Catalunya. Barcelona, España. (2015).

A. Sedaghat, S. Band, A. Mosavi. & L. Nadai. **Predicting COVID-19 (coronavirus disease) outbreak dynamics using SIR-based models: Comparative analysis of SIRD and weibull-SIRD.** 2020 IEEE 3rd International Conference and Workshop in Obuda on Electrical and Power Engineering (CANDO-EPE), 283-288. (2020). <https://doi.org/10.1109/CANDO-EPE51100.2020.9337791>

H. B. Vargas, E. A. Coayla & E. Tejada. **El modelo epidemiológico SIRD aplicado a la propagación de la COVID-19 en la región peruana de Tacna**. *Selecciones Matemáticas*, 9(1), 137-144. (2022). <https://doi.org/10.17268/sel.mat.2022.01.10>

R. D. Vásquez. **Estabilidad de un modelo matemático de la obesidad con factor genético-ambiental** (Tesis doctoral). Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima. (2018).

E. Vergara, R. León, J. More, D. Arteaga, R. Asmat, J. Peralta, C. Quito, H. Vargas & O. Rubio. **Basic epidemiologic model SIR for COVID-19: Case of peruvian regions**. *Selecciones Matemáticas*, 7(1), 151-161. (2020). <https://doi.org/10.17268/sel.mat.2020.01.14>

S. I. Vinitzky, A. A. Gusev, V. L. Derbov, P. M. Krassovitskiy, F. M. Penkov, & G. Chuluunbaatar. **Reduced SIR model of COVID-19 pandemic**. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 61(3), 376-387. (2021). <https://doi.org/10.1134/S0965542521030155>

L. A. Zárate. **Modelación de enfermedades infecciosas con información geográfica**. (Tesis de maestría). Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa. (2012). <https://doi.org/10.24275/uami.jw827b83g>

# THE EFFECTIVENESS OF USING NEAR-PEER ROLE MODELS AND MENTORING: A PHENOMENOLOGICAL REFLECTION ON STEM FOR SUCCESS

---

*Data de aceite: 01/04/2024*

### **Bruce Bukiet**

Professor of Mathematical Sciences,  
Associate Dean, College of Science  
and Liberal Arts. New Jersey Institute of  
Technology. NJ, USA  
<https://orcid.org/0000-0001-8172-3937>

### **Cristo Ernesto Yáñez León**

Director of Research, College of Science  
and Liberal Arts. New Jersey Institute of  
Technology. NJ, USA  
<https://orcid.org/0000-0002-0930-0179>

### **James Lipuma**

Director of Collaborative for Leadership,  
Education, and Assessment Research.  
New Jersey Institute of Technology, NJ,  
USA  
<https://orcid.org/0000-0002-9778-3843>

COVID-19 challenges, the project provided online STEM demonstrations and produced freely available digital resources. The project's after-school opportunities are crucial in engaging girls in STEM activities and developing 21st-century skills. The project's mission continues through STEM for Success, which provides positive STEM experiences for girls in elementary grades and collaborates with other organizations to promote STEM education. The LiFE project can serve as a model for organizations seeking to promote STEM interest among girls in elementary school.

**KEYWORDS:** STEM Education, Broader Participation, Collective Impact, Elementary Education, Women in STEM, Co-design, Professional Development, Convergence Approach, Underrepresented Groups, Trans-disciplinary Communication, Phenomenological Research.

**ABSTRACT:** The LiFE project is a National Science Foundation-funded initiative that aims to promote STEM interest among girls in grades 2 through 6 in seven school districts in New Jersey. The project utilized a collective impact approach and involved stakeholders in designing and implementing activities, which included professional development experiences, STEM club support, and student showcases. Despite

## INTRODUCTION: THE LIFE PROJECT – OVERVIEW AND OBJECTIVES

The LiFE (Leadership and iSTEAM for Females in Elementary School) project was a National Science Foundation-funded initiative that was active from April 2018 through August 2021. The project, based at the New Jersey Institute of Technology (NJIT), aimed to study the implementation of a holistic research-based approach to promote STEM interest among girls in grades 2 through 6 in three school districts in New Jersey.

LiFE supported and encouraged STEM clubs for girls by providing professional development opportunities, STEM club support, which included providing supplies and visits from NJIT female undergraduate students studying for STEM degrees, and organizing and hosting showcases for students to present their STEM creations and engage in positive STEM experiences. At its core, LiFE employed a *Collective Impact Approach* (Easterling, 2013; Kania & Kramer, 2011; Kenney et al., 2016) and Co-Designed (Calvo & Sclater, 2021; Lipuma & Leon, 2021; Roschelle et al., 2006) its activities with stakeholders.

## METHODOLOGY

The study utilized a phenomenological qualitative research design to investigate the experiences of female engineering students who participated in a peer mentorship program. The researchers drew upon several resources, including scholarly articles by Dennehy and Dasgupta (2017) and Wu, Thiem, and Dasgupta (2022) that explored the positive impact of female peer mentorship on academic experiences and retention in engineering, as well as research collaboration best practices outlined by Misra (2020). Additional federal reports (Barabino et al., 2023; National Science Foundation, 2018, 2020; NSF & NCSES, 2023) and resources were consulted to explore the dimensions of Broaden Participation and Impacts, highlighting the “Model of Intercultural Sensitivity” (Bennett, 2017; Organizing Engagement, 2019).

The researchers interviewed a specific group of female engineering students who had taken part in a peer mentorship program. They analyzed the data collected from these interviews using a method called interpretative phenomenological analysis (IPA) to identify recurring themes in the participants’ experiences with the program. The findings revealed that the peer mentorship program had a positive impact on the participants’ academic experiences and overall well-being. The program helped the participants build confidence, develop strong relationships, and acquire valuable skills and knowledge from their mentors. The participants also reported feeling more connected to their peers, the engineering community, and the university as a whole.

The study underscores the importance of peer mentorship programs for female engineering students and highlights the need for continued efforts to promote diversity, equity, and inclusion in STEM fields. The findings have implications for the development of effective mentorship programs and policies that can support the success of female students in STEM. The study also serves as a model for future phenomenological research that explores the experiences of underrepresented groups in STEM fields.

## STRATEGIES AND ACTIVITIES IMPLEMENTED BY LIFE

LIFE began by supporting clubs in 4 schools in 3 districts in its first year and expanded to partner with 7 schools in 5 districts by the time COVID struck in the Spring of 2020. The project provided ongoing STEM experiences for approximately 400 elementary school girls and 20 teachers as well as one-time experiences for approximately 1500 students. Participant feedback demonstrated the project's influence in increasing student participation, interest, and academic performance in STEM. The strategies employed by LIFE included involving girls in STEM activities while building auxiliary skills such as leadership and communication (Bukiet et al., 2019).

## RESULTS AND IMPACT

Among the results and lessons learned through LIFE was that providing a supportive environment for exploration as fostered by the club led to K-12 students being enthusiastic about STEM and comfortably sharing their designs and efforts. Engaging students with multiple hands-on activities, with opportunities to choose which one(s) to participate in, and including longer-term projects fosters STEM interest. In addition, 21<sup>st</sup>-century skills are fostered by opportunities for students to communicate and showcase their efforts to a friendly audience. The combination of LIFE's many activities and events cultivated a sense of community among students and staff across participating schools. Teachers, given time and opportunity to interact with other teachers from their own or different schools, develop valuable ideas. Supported by project leadership to implement them, these ideas greatly improved the effectiveness of LIFE. Furthermore, given this time and opportunities for collaboration increased teacher confidence in their ability to implement hands-on activities and projects.

The project was able to achieve these positive results in large part by building respect among various constituencies and breaking down hierarchical barriers to communication among those working toward common goals but with different positions and titles. By meeting regularly in person or virtually, university personnel, school administrators, teachers, and undergraduate STEM majors were able to discuss, plan, and share in an open, supportive environment. In this way, many project activities were recommended by stakeholders who have day-to-day interactions with students rather than being imposed by project leaders at NJIT. Because of the relationships built during the project, when COVID shut things down, the mission of LIFE continued while the particular activities required adjustment.

## **COLLABORATIVE APPROACH: HOW LIFE BUILT RELATIONSHIPS AND BROKE DOWN HIERARCHICAL BARRIERS**

One of the key aspects of a collective impact approach is to engage in continuous two-way communication. The personnel involved in LiFE ranged from elementary school teachers, to science supervisors and principals and university students and faculty. Often people with different titles are hesitant to share ideas in the presence of those who hold “higher” positions in their own or other partner organizations. For example, the project leadership found early on that the teachers are often reluctant to speak up in front of school administration and university professors. Therefore, it is imperative to break down the barriers that hinder open communication. Thus, it was stressed over and over that the work is a true partnership and that ideas, especially from those doing the hands-on work need to be expressed. The PI team cultivated input from the teachers by demonstrating respect for the contributions of our K-12 partners. The result was that many of the ideas that were put into play based on this input greatly enhanced the LiFE project and were crucial to the project’s success. One suggestion made was to hold an end-of-year event for all participating students from various schools, which would involve a fun and educational day at a science museum. Another contribution was organizing a Professional Development event outside of NJIT, where teachers could attend with sponsorship from the project. Additionally, the project evaluator recognized the significance of continuously keeping all stakeholders informed and encouraging their input. This helped foster a strong sense of belonging and partnership among the team as they worked towards achieving their goals.

Another way that continuous, respectful, and open communication benefited the project arose when there was turnover in administration and teachers at the partner districts. During the project’s three years, two of the partner districts each had three superintendents. In addition, several teachers did not continue due to issues in their schools (not with the project). Regular and open communication as well as support from project leadership and other teachers enabled the project to continue smoothly and deal with these situations.

It is crucial to promote STEM literacy effectively across all levels of education to combat the widespread acceptance of misinformation and promote critical thinking. Effective communication and collaboration among STEM professionals and the general public are also important in advancing scientific progress and sharing knowledge. It is necessary to assess whether the broader impacts of research supported by NSF are reaching and influencing the public. Early interventions can be effective in combating misconceptions and promoting recognition of pseudo-science and non-science. Teacher and STEM professional training can also play a significant role in promoting higher levels of STEM literacy and encouraging greater participation in STEM. Investment in STEM education and communication can have far-reaching benefits, including scientific discoveries, innovations, and desired societal outcomes. Furthermore, it can help address real-world challenges and contribute to the

advancement of technology and economic growth. For further insights on this topic, the book “Reflections on Communication, Collaboration, and Convergence: Strategic models for STEM education and research” (1st ed.) by Lipuma, Yáñez León, and Guzmán Zarate, provides additional information on the STEM for Success case (2023).

## **TRANSITION DURING COVID**

When the pandemic struck, LiFE had to cease in person events and school visits by STEM role models. Instead, LiFE hosted online STEM demonstrations that students could perform at home, under adult supervision, through the STEM for Success YouTube channel. LiFE produced freely available persistent digital resources, such as videos, activity plans, and a project playbook (Lipuma et al., 2021) that can be used by clubs or families. When schools reopened, STEM for Success re-established interactions with LiFE partner schools. All the original schools and some of the ones added during the project continued having the STEM clubs operate in their schools (Lipuma & Leon, 2019). Though the project’s funding has ended, STEM for Success continues its mission to broaden participation in STEM by providing positive STEM experiences for girls in the elementary grades, including hosting online events for educators and facilitating interactions with female STEM role models through its Ambassador program, aligning STEM for Success’s vision with the findings presented on the “Diversity and STEM: Women, Minorities, and Persons with Disabilities” (NSF & NCSSES, 2023). STEM for Success also works with New Jersey STEM Pathways Network to promote STEM in K-12 schools during NJ STEM Month’s STEM Interest Sweepstakes and organizes an annual “State of STEM event” for educators, now in its second year. Continued collaborations with LiFE partner districts continue to enhance our efforts, including with the Morris Plains School District, which has hosted the STEM for Success Ambassadors and helped organize the State of STEM 2023 webinar. “At the most general level, the idea of collaboration is a measure of the degree that individuals are working together and sharing a vision for the goals and measures of success” (Lipuma & Yáñez León, 2022, p. 359).

## **REPLICABLE STRATEGIES: SCALING THE LIFE PROJECT TO BENEFIT GIRLS IN OTHER COMMUNITIES**

LiFE was designed with the purpose of implementing strategies that are easily reproducible, allowing for scalability and adaptation to meet the needs of various communities throughout the country. The implications of this work demonstrate that after-school opportunities for girls to work on STEM are valuable in engaging them in STEM activities and encouraging them to pursue other STEM experiences such as competitions, showcases, or demonstrations, whether in or outside their school environments “Girls and women can and do excel in engineering and computing. When they participate in these

fields, they increase their economic security, contribute to technological advancements, and bring a diversity of perspectives and experiences to the table” (Corbett & Hill, 2015, p. 2). The evidence demonstrates high participant interest in the activities and increased motivation to engage in key 21st-century skills. STEM for Success continues this important mission.

## CONCLUSION

In conclusion, the LiFE project’s approach to promoting STEM interest among girls in elementary school has been a resounding success, demonstrated by the increased participation, interest, and academic performance of the project’s participants. The strategies and activities implemented by LiFE have not only engaged girls in STEM activities but also helped develop critical 21st-century skills such as leadership and communication.

Furthermore, the project’s collaborative approach, which involved stakeholders in the planning and implementation of activities, helped build relationships and break down hierarchical barriers, resulting in the creation of widely reproducible strategies that can benefit other communities across the nation.

The mission of STEM for Success, the program that continues the LiFE project’s work, is to broaden participation in STEM by providing positive STEM experiences for girls in elementary grades. It aims to foster interest in STEM, encourage girls to pursue STEM-related careers, and inspire the next generation of female STEM leaders.

Encouraging girls’ interest and participation in STEM at a young age is extremely important. It can help bridge the gender gap in STEM fields where women are still not well-represented. To achieve this, we need to provide girls with opportunities to engage in STEM activities and develop their skills. Supporting programs like LiFE and STEM for Success can help girls pursue their interests in STEM and achieve their maximum potential. This not only benefits them as individuals but also contributes to the progress of our society and economy as a whole.

## REFERENCES

Barabino, G. A., Fiske, S. T., Scherer, L. A., & Vargas, E. A. (Eds.). (2023). *Advancing Antiracism, Diversity, Equity, and Inclusion in STEMM Organizations: Beyond Broadening Participation*. National Academies Press. <https://doi.org/10.17226/26803>

Bennett, M. (2017). *Developmental Model of Intercultural Sensitivity*. <https://doi.org/10.1002/9781118783665.ieicc0182>

Bukiet, B., Lipuma, J., & Steffen-Fluhr, N. (2019). LiFE: An Integrated Approach to Increase the Number of Women Pursuing Careers in STEM. *STEM for Success Resources*. <https://digitalcommons.njit.edu/stemresources/19>

Calvo, M., & Sclater, M. (2021). Creating Spaces for Collaboration in Community Co-design. *International Journal of Art & Design Education*, 40(1), 232–250. <https://doi.org/10.1111/jade.12349>



- Corbett, C., & Hill, C. (2015). Solving the Equation: The Variables for Women's Success in Engineering and Computing. In *American Association of University Women*. American Association of University Women. <https://eric.ed.gov/?id=ED580805>
- Dennehy, T. C., & Dasgupta, N. (2017). Female peer mentors early in college increase women's positive academic experiences and retention in engineering. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 114(23), 5964–5969. <https://doi.org/10.1073/pnas.1613117114>
- Easterling, D. (2013). Getting to Collective Impact: How Funders Can Contribute Over the Life Course of the Work. *The Foundation Review*, 5(2). <https://doi.org/10.9707/1944-5660.1157>
- Kania, J., & Kramer, M. (2011). Collective Impact. *Stanford Social Innovation Review*, 7.
- Kenney, M. A., Dukes, J. S., Lips, K. R., & Hellmann, J. J. (2016). Engagement 2.0: Increasing our collective impact. *Frontiers in Ecology and the Environment*, 14(8), 403–403. <https://doi.org/10.1002/fee.1416>
- Lipuma, J., Bukiet, B., & Leon, C. (2021). Hands-on Developmental Playbook for STEM Clubs in Elementary Schools. *STEM for Success Resources*. <https://digitalcommons.njit.edu/stemresources/3>
- Lipuma, J., & Leon, C. (2019). LiFE: Collaboration Potentials and Partnerships. *Proceedings of an ERC-INCLUDES Capacity Building Institute*, 37. <https://www.washington.edu/doi/presentation-summaries-25>
- Lipuma, J., & Leon, C. (2021). Collaborative co-design for community change. *STEM for Success Resources*, 11. <https://digitalcommons.njit.edu/stemresources/11>
- Lipuma, J., & Yáñez León, C. E. (2022). Collaborating Toward Convergence Efforts for K-20 STEM Education [Review of *Collaborating Toward Convergence Efforts for K-20 STEM Education*, by B. Bukiet, S. Pal, & J. Wolf]. *The Journal on Systemics, Cybernetics and Informatics*, 20(1), 351–389. <https://doi.org/10.54808/JSCI.20.01>
- Misra, J. (2020). Research Collaboration Best Practices. *Tools*. <https://scholarworks.umass.edu/advance-it-tools/9>
- National Science Foundation. (2018). *NSF INCLUDES Report to the Nation I* (Report No. 1; NSF INCLUDES). National Science Foundation. [https://www.nsf.gov/news/special\\_reports/nsfincludes/pdfs/INCLUDES\\_report\\_to\\_the\\_Nation.pdf](https://www.nsf.gov/news/special_reports/nsfincludes/pdfs/INCLUDES_report_to_the_Nation.pdf)
- National Science Foundation. (2020). *NSF INCLUDES Report to the Nation II* (Report No. 2; NSF INCLUDES). National Science Foundation. [https://www.nsf.gov/publications/pub\\_summ.jsp?ods\\_key=nsf20099](https://www.nsf.gov/publications/pub_summ.jsp?ods_key=nsf20099)
- NSF & NCSES. (2023). *Diversity and STEM: Women, Minorities, and Persons with Disabilities* (p. 76). National Center for Science and Engineering Statistics (NCSES), Directorate for Social, Behavioral and Economic Sciences, National Science Foundation. <https://ncses.nsf.gov/pubs/nsf23315/>
- Organizing Engagement. (2019, November 1). Developmental Model of Intercultural Sensitivity. *Organizing Engagement*. <https://organizingengagement.org/models/developmental-model-of-intercultural-sensitivity/>
- Roschelle, J., Penuel, W., & Shechtman, N. (2006). *Co-design of Innovations with Teachers: Definition and Dynamics*. <https://repository.isls.org/handle/1/3563>
- Wu, D. J., Thiem, K. C., & Dasgupta, N. (2022). Female peer mentors early in college have lasting positive impacts on female engineering students that persist beyond graduation. *Nature Communications*, 13(1), Article 1. <https://doi.org/10.1038/s41467-022-34508-x>

# CONOCIMIENTOS TECNOLÓGICOS Y EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO IDÓNEO DE PROFESORES EN LA ENSEÑANZA DE CUADRILÁTEROS

*Fecha de envío: 13 de marzo 2024*

*Data de aceite: 01/04/2024*

### **Jesús Victoria Flores Salazar**

Pontificia Universidad Católica del Perú,  
Departamento de Ciencias  
Instituto de Investigación sobre la  
Enseñanza de las Matemáticas (IREM  
PUCP)  
Lima-Perú  
<https://orcid.org/0000-0002-0036-140X>

### **Morella Cristina Théry Romero**

Instituto de Investigación sobre  
Enseñanza de las Matemáticas (IREM  
PUCP)  
Lima-Perú  
<https://orcid.org/0000-0002-8844-4364>

### **Daysi Julissa García Cuéllar**

Pontificia Universidad Católica del Perú,  
Departamento de Ciencias  
Instituto de Investigación sobre la  
Enseñanza de las Matemáticas (IREM  
PUCP)  
Lima-Perú  
<https://orcid.org/0000-0003-0243-6353>

**RESUMEN:** Este trabajo, que forma parte de un proyecto de investigación en proceso, busca analizar el conocimiento tecnológico y el Espacio de Trabajo Matemático idóneo (ETM) de profesores al enseñar geometría, específicamente cuadriláteros. El estudio

integra el Conocimientos Tecnológico Pedagógico y del Contenido (TPACK) con la teoría ETM para comprender cómo los profesores incorporan la tecnología en la enseñanza de cuadriláteros. Se emplea un método cualitativo en tres fases. En este estudio, participan docentes de matemática de nivel secundaria que interactúan con diversos recursos tecnológicos con el propósito de optimizar su TPACK y planificar la enseñanza de cuadriláteros. En este trabajo, se propone una tarea usando una pizarra de manipulables llamada Polypad sobre el área de un trapecio isósceles en la que, a través del recorte, arrastre y giro se configura un rectángulo y se muestra que el área del trapecio es equivalente al área de la figura reconfigurada. Se concluye que la tarea permite desarrollar conocimientos tecnológicos y aumenta la confianza de los profesores en el uso del Polypad. Por otro lado, el uso de este artefacto implica reconocer la importancia de la exploración y visualización. Además, se muestra cómo profesores de matemática pueden enseñar cuadriláteros utilizando artefactos digitales. Se evidencian algunas relaciones entre el TPACK y el ETM idóneo de profesores.

**PALABRAS-CLAVE:** Geometría, Tecnología, formación, conocimientos.

## TECHNOLOGICAL KNOWLEDGE AND THE SUITABLE MATHEMATICAL WORKSPACE OF TEACHERS IN THE TEACHING OF QUADRILATERALS

**ABSTRACT:** This research, forms part of a project, aims to analyze the technological knowledge and the suitable Mathematical Working Space (MWS) of teachers while teaching quadrilaterals. The study integrates the Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) model with the MWS theory to understand how teachers incorporate technology into the teaching of geometry, specifically in quadrilaterals. The importance of the integration of technology in the teaching of quadrilaterals is highlighted, with tasks that promote the activation of different genesis and planes and the use of digital artifacts. The methodology used involves a three-phase qualitative approach. As part of the research, in-service teachers training participates in a workshop where they interact with various technological tools to improve their TPACK and plan the teaching of quadrilaterals. In this work, a task is proposed using a manipulative board called Polypad to find the area of an isosceles trapezoid in which, through cutting, dragging, and turning, a trapezoid is configured, and it is shown that the area of the trapezoid is equivalent to the area of the reconfigured figure. It is concluded that the task allows the development of technological knowledge and increases the teachers' confidence in the use of the Polypad. On the other hand, the use of this artifact implies recognizing the importance of exploration and visualization. In addition, it is shown how mathematics teachers can teach quadrilaterals using digital artifacts. Relations between TPACK and the suitable MWS of teachers are established.

**KEYWORDS:** Geometry, Technology, professional development, knowledge.

### INTRODUCCIÓN

El presente trabajo, que forma parte de un proyecto de investigación en proceso, tiene como foco de interés analizar los conocimientos tecnológicos de profesores de matemáticas de nivel secundaria (enseñan estudiantes de 12 a 14 años) que enseñan geometría, específicamente cuadriláteros, y su Espacio de Trabajo Matemático idóneo.

Con relación a la enseñanza de la geometría, investigaciones reportan que el aprendizaje de la geometría es un proceso más complejo en relación con otras áreas de la matemática. Según Duval (2005), la actividad cognitiva que se requiere en geometría es más exigente que en otras áreas de la matemática, pues es necesario que se efectúen de manera simultánea transformaciones figurales y discursivas. En ese sentido, la literatura destaca la importancia de la enseñanza de la geometría pues conlleva a procesos de percepción, representación, construcción y denominación de los objetos geométricos (Chamorro, 2006; Torregrosa & Quesada, 2007; Marmolejo & Vega, 2012; Bahamón & Bonelo, 2015). Además, las investigaciones de Houdement & Kuzniak (1999; 2006) se centraron en caracterizar tres paradigmas para la enseñanza y aprendizaje de Geometría que denominaron, geometría I (geometría natural), geometría II (geometría natural axiomática), geometría III (geometría axiomática formal). Gracias a esta caracterización, Kuzniak & Rauscher (2011) señalan que es posible analizar y comprender algunas dificultades presentes en la enseñanza y

aprendizaje de la geometría. Además, también enfatizan la necesidad de articular, en la enseñanza, la geometría con otras áreas de la matemática.

Por otro lado, en esta investigación la tecnología digital tiene un papel preponderante donde cobra importancia los “artefactos digitales” para la enseñanza y aprendizaje de la matemática que, de acuerdo con Salazar, Gaona y Richard (2022) son un conjunto de proposiciones caracterizadas por ser ejecutables por una máquina electrónica que contienen inteligencia histórica y una validez epistemológica relativa. Además, Santos-Trigo et al. (2016) mencionan que el uso de tecnología convierte a estudiantes y profesores en participantes activos ya que se genera su espacio de trabajo matemático, porque brinda una variedad de formas para representar y explorar tareas y, por ende, para solucionar los problemas.

Además, Drijvers et al. (2016) presentan los resultados obtenidos por el gobierno de China en el 2015 usando el modelo TPACK específicamente para matemática, donde identifican los factores e impacto del proyecto sobre el rendimiento de estudiantes. Además, Bueno, Lieban y Ballejo (2021) realizan una investigación con profesores de matemática en un curso de formación continua en el que diseñaron una secuencia de actividades para desarrollar aplicaciones y juegos lógicos con GeoGebra utilizando el modelo TPACK para su análisis. Igualmente, Padilla y Conde-Carmona (2020) utilizan el modelo TPACK para explorar si los profesores de matemática están preparados para incorporar en sus clases tecnologías que contribuyan a favorecer habilidades y respondan a las nuevas características y necesidades de los estudiantes. Los resultados obtenidos refieren que existe una desconexión entre el discurso de los profesores y su práctica pedagógica pues los docentes dan valor y refieren los beneficios de las herramientas tecnológicas y, por el contrario, en la práctica continúan siguiendo métodos tradicionales.

Así mismo, Kuzniak et al. (2020) mencionan que cuando los profesores en formación inicial usan herramientas clásicas o digitales por separado presentan dificultades en su uso.

Por otra parte, existen otros factores como la necesidad de que los docentes incorporen la tecnología en la enseñanza se evidencia en la creación de marcos y descripciones de los perfiles con las capacidades docentes. Así, respecto a las competencias que un docente debe tener la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2023) ha creado un Marco de Competencia digital que puede ser usado para evaluar diferentes planos del desarrollo de los docentes.

## **CONOCIMIENTOS TECNOLÓGICO, PEDAGÓGICO Y DE CONTENIDO**

Con respecto al modelo del Conocimientos Tecnológico, Pedagógico y de Contenido (TPACK), en nuestro caso, contenido matemático, este plantea que los profesores cuentan con conocimientos que determinan cómo será la enseñanza, porque los docentes toman decisiones en base a ellos. Además, de conocimientos pedagógico y del contenido es deseable que los profesores tengan conocimientos tecnológicos para integrar tecnologías digitales en la enseñanza (KOEHLER; MISHRA; CAIN, 2015).

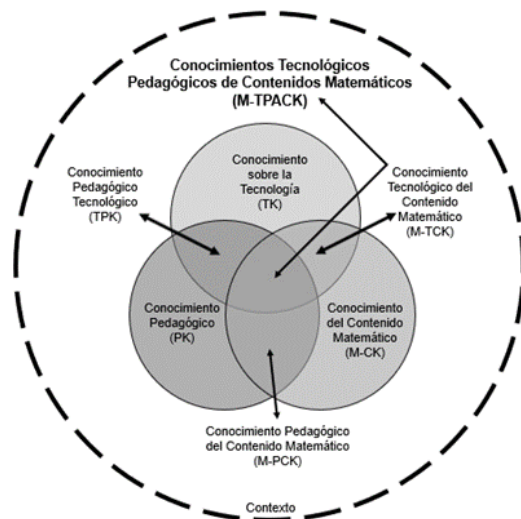


Figura 1: TPACK y los conocimientos que lo componen.

Fuente: Adaptado de Koehler et al. (2015)

Como se evidencia en la figura 1, estos conocimientos pueden estar en las siguientes dimensiones Conocimiento Pedagógico (PK), Conocimiento del Contenido Matemático (en el caso del TPACK para matemática) (M-CK), Conocimientos Tecnológico (TK), Conocimientos Contextuales o contexto (XK) y sus intersecciones (PCK; PTK; TCK; TPACK).

## ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO (ETM)

Respecto a la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM), Kuzniak, Montoya y Vivier (2016) señalan que el trabajo matemático consiste en resolver problemas matemáticos, identificar problemas y organizar contenidos dentro de un dominio específico. Con relación a la tarea explican que, una tarea es considerada como cualquier tipo de problema matemático, con preguntas establecidas de manera explícita y clara, que requiere un tiempo predecible para su resolución.

También, explican que en el ETM se articulan los planos epistemológico y cognitivo a través de la Génesis Semiótica que es el proceso asociado a signos y representamen (o significantes); la Génesis Instrumental que permite hacer operativos a los artefactos mediante los procesos de construcción que contribuyen a alcanzar el trabajo matemático y; la Génesis Discursiva que utiliza las propiedades del sistema del referencial teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático.

Además, como se muestra en la figura 2, se identifican tres planos verticales cada uno de los cuales está definido por la interacción de dos génesis: semiótica e instrumental [Sem-Ins]; instrumental y discursiva [Ins-Dis]; y semiótica y discursiva [Sem-Dis].

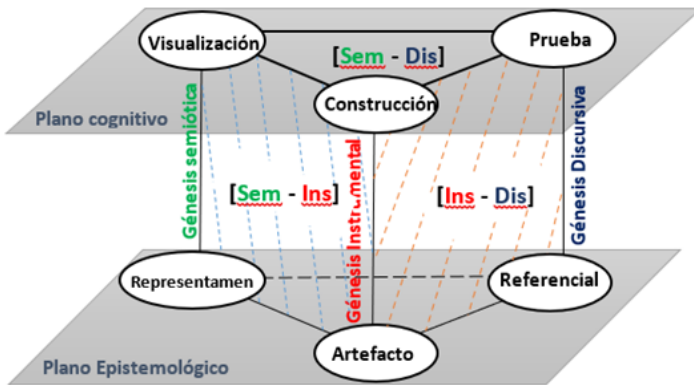


Figura 2. Esquema del ETM

Fuente: Adaptado Kuzniak et al. (2016, p.248)

Asimismo, el plano [Sem-Ins], asociado a la génesis semiótica y a la génesis instrumental está orientado hacia la construcción de los resultados (figuras, gráficos) y hacia la interpretación de la información brindada por los artefactos; el plano [Ins-Dis], asociado a una génesis discursiva de la prueba y a la génesis instrumental, comprende la apropiación y selección de artefactos a través de la deducción e inducción; y, en el plano [Sem-Dis], asociado a las génesis semiótica y discursiva, se distinguen los razonamientos argumentativos.

También, se diferencian tres tipos de ETM: ETM de referencia, que toma en cuenta la matemática desarrollada a nivel institucional; ETM idóneo, que consiste en el tratamiento que da el docente al proceso de enseñanza con el propósito de favorecer el trabajo matemático de los estudiantes; y ETM personal, que es el trabajo matemático que desarrolla un individuo (profesor o estudiante).

En suma, como nos interesa investigar sobre los conocimientos tecnológicos (TK, TCK, TPK y TPACK) y el ETM idóneo del profesor de matemática evidenciamos algunas interrelaciones que podría haber entre los TCK y los TPK con el ETM idóneo. Los TCK podrían tener interacción con el plano [Ins-Dis], porque este conocimiento se refiere a conocer artefactos digitales que sean apropiados para un objeto matemático de acuerdo con sus propiedades. De igual forma, los TPK podrían relacionarse con el plano [Sem-Ins], porque el profesor usa sus conocimientos para seleccionar los artefactos que mejor representen y sirvan para enseñar el objeto matemático según su criterio.

## METODOLOGÍA

Con el propósito de analizar los conocimientos tecnológicos y el Espacio de Trabajo Matemático idóneo de profesores cuando enseñan cuadriláteros, la presente investigación es de corte cualitativo (HERNÁNDEZ-SAMPIERI; FERNÁNDEZ; BAPTISTA, 2014). La investigación se ha organizado metodológicamente en tres fases.

Primera fase: Se realiza el estudio de la literatura existente sobre aspectos relacionados con la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) en el dominio de la geometría y sobre el Conocimiento Tecnológico, Pedagógico y de Contenido (TPACK).

Segunda fase: Se construye y aplica la secuencia didáctica, en un curso de capacitación docente. La secuencia consta de cuatro tareas en la que se utilice tecnología digital. Las tareas promueven la participación de los docentes y ello conlleva que realicen diferentes trabajos matemáticos al interactuar con artefactos digitales como Polypad, GeoGebra y geoplanos digitales. Para este trabajo se analiza la segunda tarea de la secuencia en la que se utiliza Polypad. Luego, con base en el ETM y el TPACK, se debe realizar un análisis de la producción esperada.

Tercera fase: Los datos se recolectan y organizan (archivos). Las grabaciones de las sesiones (Zoom) y los archivos de las producciones de los participantes recolectados en la plataforma Google Classroom para analizar la información con base en TPACK y ETM.

## EXPERIMENTO Y ANALISIS

En esta etapa de la investigación, participan en el taller profesores de matemática en ejercicio y la formadora-investigadora. Los docentes participantes enseñan matemática en primero, segundo o tercero de secundaria (para estudiantes de 12 a 14 años de edad). Los instrumentos utilizados (cuestionario, planificación de sesión, fichas de la resolución de las tareas, etc.) permiten recolectar la información para identificar los conocimientos tecnológicos de los profesores y las génesis y planos verticales que privilegian al enseñar cuadriláteros.

Al inicio del curso de capacitación, se pide a cada profesor la planificación de una sesión de clase sobre el contenido de cuadriláteros. Además, se les solicita completar un cuestionario inicial (Google Forms) de dieciséis preguntas que tiene por finalidad identificar los conocimientos tecnológicos, la percepción y actitud de los profesores con respecto a la tecnología digital en la enseñanza de matemática y la interrelación con su práctica docente, esto se puede observar en la tabla 1.

Componente del conocimiento del profesor	Cantidad de preguntas
Tecnológico	4
Tecnológicos Pedagógicos	5
Tecnológicos del Contenido	2
Tecnológicos Pedagógicos del Contenido	5

Tabla 1. Cantidad de preguntas por Componente del Conocimiento del profesor

Durante el curso de formación, los profesores interactúan con diversos recursos tecnológicos como geoplano digital, Nearpod, **Polypad**, GeoGebra y Google Classroom, que deben ser utilizadas en las cuatro tareas. En este trabajo nos centramos en la segunda tarea en la que se utiliza Polypad.

Sobre las tareas de la secuencia, estas tienen por finalidad promover la activación de las génesis semiótica, discursiva e instrumental y los planos verticales [Sem-Dis] y [Sem-Ins] y están basadas tanto en el estudio de los cuadriláteros, sus propiedades, clasificación; como en el origen, la utilidad inicial y la actual de los cuadriláteros a través de animaciones y juegos con diferentes artefactos digitales. En el cuadro 1 se muestra cada tarea y su respectiva descripción.

	Tarea	Descripción
T1	Tensores de Cuerdas	Representar la relación entre el área y perímetro de cuadriláteros con ángulos de $90^\circ$ .
T2	<b>Área de un trapecio isósceles</b>	Reconfigurar un trapecio isósceles para encontrar su área.
T3	Propiedades de cuadriláteros	Representar cuadriláteros gráficamente a partir de sus definiciones y propiedades.
T4	Construcción con propiedades	Construir representaciones de cuadriláteros a partir de sus definiciones y propiedades.

Cuadro 1. Tareas y su descripción

Al término del curso de formación, los docentes tienen que responder un cuestionario final que busca identificar los conocimientos tecnológicos pedagógicas del contenido matemático que los profesores adquirieron, cómo los movilizarán al planificar nuevas sesiones de clases sobre cuadriláteros y cómo piensan que lo harán.

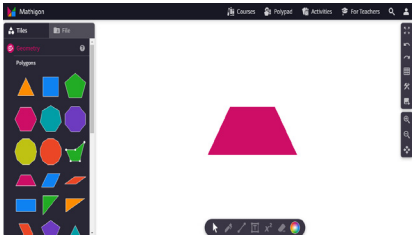
En el presente trabajo, presentamos la segunda tarea de la secuencia didáctica sobre el área de un trapecio isósceles (con lados no paralelos congruentes) en la cual, a través del recorte, arrastre y giro de figuras (reconfiguración) se configura un rectángulo y se muestra que el área del trapecio es equivalente al área de la figura reconfigurada (rectángulo).




En la tarea se pide responder la pregunta: *¿Cómo se puede encontrar el área de un trapecio isósceles sin utilizar la fórmula de dicha área?* Para resolverla debe utilizar la pizarra de manipulables Polypad (<https://polypad.amplify.com/p>).

Se espera que los profesores, reconozcan el trapecio de acuerdo con sus propiedades y utilicen las herramientas del artefacto digital para pegarlo en la pizarra. Luego, mediante la descomposición y composición de figuras, hagan cortes al trapecio isósceles, roten y arrastren el triángulo generado para formar un rectángulo. A partir de ello, usando la fórmula del área de un rectángulo, se espera que concluyan que las áreas de ambos cuadriláteros son equivalentes.



En términos del ETM, se espera activar la génesis semiótica al identificar y representar el trapecio isósceles, haciendo uso de sus propiedades. Luego, al manipular la figura se espera activar la génesis instrumental mediante el uso de las herramientas del artefacto digital. También activar la génesis instrumental al usar la fórmula del área de un rectángulo como un artefacto simbólico. Finalmente, al comprender y explicar que las áreas de ambos cuadriláteros son equivalentes, se espera la activación de la génesis discursiva y en consecuencia la activación de los planos verticales [Ins-Dis] y [Sem-Ins], esto se puede observar en el cuadro 2.

Tarea	Descripción	Génesis y Planos que busca activar
	<p>Identificar y seleccionar el trapecio isósceles entre los polígonos presentes en Polypad.</p>	<p>Génesis semiótica Representación de un trapecio isósceles.</p>
	<p>Cortar, voltear horizontalmente, girar y arrastrar cualquier polígono, cambiar el color de las figuras, modificar el tamaño (longitud de sus lados) de los polígonos.</p>	<p>Génesis instrumental Uso de un artefacto digital, al seleccionar herramienta adecuadas.</p>
	<p>Cortar el trapecio isósceles para obtener un triángulo rectángulo y un trapecio rectángulo.</p>	<p>Génesis instrumental.</p>
	<p>Seleccionar el triángulo y hacer predicciones sobre la posibilidad de formar un rectángulo reordenando las figuras.</p>	<p><i>Génesis instrumental y génesis discursiva.</i> Plano [Ins-Dis]. <i>Génesis semiótica</i> Representación de los cuadriláteros y visualización de un rectángulo.</p>

Tarea	Descripción	Génesis y Planos que busca activar
	<p>Voltear horizontalmente el triángulo cortado del trapecio (reflexión).</p>	<p><i>Génesis instrumental.</i> Usar herramientas del artefacto digital para realizar las acciones que permiten recomponer el trapecio como un rectángulo.</p>
	<p>Rotar el triángulo cortado (rotación). Se podría identificar un paralelogramo si se traslada el triángulo.</p>	<p><i>Génesis instrumental y génesis semiótica.</i> Plano [Sem-Ins].</p>
	<p>Arrastrar el triángulo hacia el otro lado del trapecio para formar un rectángulo (traslación). Explicar que las áreas de ambos cuadriláteros son equivalentes.</p>	<p>Génesis instrumental -génesis semiótica. Plano [Sem-Ins]. Génesis instrumental y génesis discursiva. Plano [Ins-Dis].</p>

Cuadro 2. Polypad: Área de un trapecio

Durante el desarrollo de esta tarea los profesores utilizaron las herramientas del Polypad, realizaron reconfiguraciones del trapecio y configuraron un rectángulo. Luego, utilizaron la fórmula para hallar área del rectángulo que coincide con el área del trapecio isósceles y consiguieron responder la pregunta planteada en la tarea.

Al término de la tarea, se pregunta a los profesores cómo apoyaría este artefacto digital en la enseñanza de cuadriláteros para que sus estudiantes comprendan cómo determinar el área de otros cuadriláteros como, por ejemplo, el paralelogramo. Es decir, se espera que los profesores reflexionen y describan cómo incluir tecnología para la enseñanza de cuadriláteros en su práctica docente. En el cuadro 3 sintetiza las preguntas del cuestionario final.

No.	Pregunta
CF1	a. ¿Usaré algún artefacto digital para enseñar cuadriláteros? (SÍ o NO) b. En caso de afirmativo, ¿Cómo planeo usarlo? ¿Qué desempeño u objetivo? c. Beneficio o desventaja con respecto a opciones sin tecnología
CF2	Me interesa continuar aprendiendo sobre estos y otros artefactos digitales para enseñar cuadriláteros.
CF3	Ahora tengo más conocimientos útiles sobre artefactos digitales para enseñar cuadriláteros.
CF4	Usaré los artefactos digitales vistos en este curso en mis sesiones sobre cuadriláteros.
CF5	Conocer más sobre tecnología me permite integrar tecnología, estrategias de enseñanza y conocimientos sobre cuadriláteros en la planificación de la enseñanza
CF6	Mis conocimientos sobre tecnología afectan la forma en la que planifico las sesiones de clases sobre cuadriláteros
CF7	Mis conocimientos sobre tecnología afectan el aprendizaje sobre cuadriláteros de mis estudiantes

Cuadro 3. Preguntas del cuestionario final

Como cierre del curso de capacitación, los profesores modifican la planificación de una sesión para enseñar cuadriláteros que compartieron antes del inicio del curso mediante el uso de tecnología digital.

## CONCLUSIONES

La tarea que se presenta en este trabajo, favorece el desarrollo de sus conocimientos tecnológicos y da seguridad a los profesores para su uso en sus sesiones de clase, es decir, que muestren un significativo TPACK que les permita integrar tecnología en su ETM idóneo representado, en este caso, en las planificaciones de las sesiones de clase sobre cuadriláteros.

El considerar el uso de tecnología con artefactos digitales como Polypad implica que los profesores reconozcan el beneficio de la exploración y la visualización. Además, este tipo de tareas busca configurar cómo un profesor puede enseñar cuadriláteros haciendo uso de artefactos digitales que permiten visualizar y manipular sus representaciones, es decir, que promueven la activación de las génesis semiótica, discursiva e instrumental y los planos verticales [Sem-Dis] y [Sem-Ins].

Se identificaron, además, algunas relaciones entre TPACK y ETM, es decir, entre los diferentes conocimientos y la activación de las diferentes génesis y planos verticales. A partir de esta investigación, se podrían generar nuevas investigaciones como, por ejemplo, la influencia del conocimiento de los profesores de herramientas tecnológicas diferentes y si existe variación por el nivel de enseñanza o tipo de institución a la que pertenece.

Se evidencia que los conocimientos tecnológicos de los profesores están interrelacionados con sus decisiones para la planificación de la enseñanza, en este caso de cuadriláteros, lo cual abre una variedad de oportunidades de investigación y profundización que se pueden desarrollar.

Tanto el TPACK como el ETM brindan aspectos y elementos relevantes para la comprensión de las características que tienen los conocimientos de los profesores para incorporar tecnología digital eficientemente en la enseñanza.

## RECONOCIMIENTO

Este trabajo fue financiado por la Dirección de Fomento a la Investigación de la Pontificia Universidad Católica del Perú, a través de la subvención **DFI 2022-C-0025 (PI0890)**.

Agradecemos también al Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP y a la Red Iberoamericana de Investigación en Trabajo Matemático RIITMA.

## REFERENCIAS

BAHAMÓN, L.; BONELO, Y. **Los procesos de construcción, visualización y razonamiento en el desarrollo del pensamiento geométrico: un experimento de enseñanza.** (Tesis de licenciatura). Universidad del Valle, Colombia, 2015.

BUENO, R.; LIEBAN, D.; BALLEJO, C. **Mathematics Teachers' TPACK Development Based on an Online Course with GeoGebra.** Open Education Studies, p.110-119, 2021. Disponible en: <https://doi.org/10.1515/edu-2020-0143>.

CHAMORRO, M. **Didáctica de la matemática.** México : Pearson. 2006.

DUVAL, R. **Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements.** Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, v.10, p. 5-53. 2005.

DRIJVERS, P. ; BALL, L. ; BARZEL, B. ; HEID, K. ; CAO, Y. ; MASCHIETTO, M. **Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education.** Springer Open. (2016). Disponible en: <https://www.springer.com/gp/book/9783319336657>.

HERNÁNDEZ-SAMPIERI, R.; FERNÁNDEZ, C.; BAPTISTA, P. **Metodología de la Investigación.** Editorial Mc Graw Hill Education. 2014. Disponible en: <https://www.uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf>.

HOUEMENT, C. ; KUZNIAK, A. **Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formations des maîtres.** Educational Studies in Mathematics, v. 40, p. 283-312.1999. Disponible en: <https://doi.org/10.1023/A:1003851228212>.

KOEHLER, M., MISHRA, P.; CAIN, W. **¿Qué son los Saberes Tecnológicos y Pedagógicos? Virtualidad, Educación y Ciencia.** n. 10. p. 9-23. 2015. Disponible en: <https://www.punyamishra.com/wp-content/uploads/2016/08/11552-30402-1-SM.pdf>.

- KUZNIAK, A.; MONTOYA, E.; VIVIER, L. **El espacio de trabajo matemático y sus génesis. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.** En Centro De Investigación y Formación en Educación Matemática (Ed.). v. 11, n. 15). p. 235-249. 2016. Disponible en: <https://core.ac.uk/download/pdf/129741803.pdf>
- KUZNIAK, A. ; RAUSCHER, J.C. **How do teachers' approach to geometric work relate to geometry students' learning difficulties ?** Educational Studies in Mathematics. v. 77. n.1. p. 129-147. 2011.
- KUZNIAK, A.; NECHACHE, A.; SALAZAR, J. **Student Teachers' Geometric Work and Flexible Use of Digital Tools.** Mathematics Education in the Digital Age (MEDA), Linz, Austria. 2020.
- MARMOLEJO, G.; VEGA, M. **La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje.** Educación Matemática. v. 24. n. 3. p. 7-32. 2012.
- ORGANIZACIÓN DE LAS NACIONES UNIDAS PARA LA EDUCACIÓN, LA CIENCIA Y LA CULTURA. **Marco de competencias para docentes en materia de TIC de la UNESCO.** (2023) Disponible: <https://www.unesco.org/en/digital-competencies-skills/ict-cft>
- PADILLA, I.; CONDE-CARMONA, R. **Uso y formación en TIC en profesores de matemáticas: un análisis cualitativo.** Revista Virtual Universidad Católica del Norte. v. 60. p. 116-136. 2020. Disponible en: <https://www.doi.org/10.35575/rvucln.n60a7>
- SALAZAR, J.V.F.; GAONA, J.; RICHARD, P. **Mathematical Work in the Digital Age. Variety of Tools and the Role of Geneses.** En Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E. y Richard, P. (Eds.), **Mathematical Work in Educational Context.** p.165-210. 2022. Disponible en: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_8)
- SANTOS-TRIGO, M.; MORENO-ARMELLA L.; CAMACHO-MACHÍN, M. **Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework.** ZDM Mathematics Education. 2016. Disponible en: <https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-016-0757-0>
- TORREGROSA, G.; QUESADA, H. **Coordinación de procesos cognitivos en Geometría.** Revista Latinoamericana en Matemática Educativa. v. 10. n. 2. p. 275-300. 2007.
- USECHE, M.; ARTIGAS, W.; QUEIPO, B.; PEROZO, E. **Técnicas e instrumentos de recolección de datos cuali-cuantitativos.** Universidad de la Guajira. 2019. Disponible en: <https://repositoryinst.uniguajira.edu.co/handle/uniguajira/467>

# USO DO MATLAB NO ESTUDO DE MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

*Data de submissão: 07/02/2024*

*Data de aceite: 01/04/2024*

### **Camila Fredegoto Santos**

Universidade Tecnológica Federal de  
Paraná  
Campo Mourão – Paraná  
<http://lattes.cnpq.br/5269307111893849>

### **Wellington José Corrêa**

Universidade Tecnológica Federal de  
Paraná  
Campo Mourão – Paraná  
<http://lattes.cnpq.br/1045931096324971>

as funcionalidades do MATLAB para resolver sistemas lineares de diferentes tamanhos e complexidades. Por fim, destacaremos as vantagens de utilizar o MATLAB para resolução de sistemas lineares, incluindo sua eficiência computacional, capacidade de lidar com sistemas grandes e complexos, e a facilidade de visualização de resultados sendo uma grande ferramenta para ajudar o aluno em seus estudos e pesquisas.

**PALAVRAS-CHAVE:** álgebra linear; MATLAB; sistemas lineares.

**RESUMO:** A resolução de sistemas lineares é uma tarefa fundamental em várias áreas da matemática e engenharia, desempenhando um papel crucial na solução de problemas do mundo real. O MATLAB, uma poderosa plataforma de computação numérica, oferece uma ampla gama de ferramentas e recursos para abordar eficientemente esse tipo de problema. No que concerne este artigo, exploraremos como o MATLAB pode ser utilizado para resolver sistemas lineares. Além disso, o MATLAB oferece a capacidade de trabalhar com matrizes, tornando-o particularmente adequado para lidar com sistemas de equações lineares representados nessa forma. Através de exemplos práticos, ilustraremos como utilizar

## USING MATLAB TO STUDY MATRICES AND LINEAR

**ABSTRACT:** Solving linear systems is a fundamental task in various fields of mathematics and engineering, playing a crucial role in addressing real-world problems. MATLAB, a powerful numerical computing platform, offers a wide range of tools and resources to efficiently tackle this type of problem. In this article, we will explore how MATLAB can be used to solve linear systems. Furthermore, MATLAB provides the capability to work with matrices, making it particularly suitable for handling systems of linear equations represented in that form. Through practical examples, we

will illustrate how to use MATLAB's features to solve linear systems of different sizes and complexities. Finally, we will highlight the advantages of using MATLAB for solving linear systems, including its computational efficiency, ability to handle large and complex systems, and ease of result visualization, making it a valuable tool for assisting students in their studies and research.

**KEYWORDS:** linear algebra; MATLAB; linear systems.

## INTRODUÇÃO

Sistemas lineares têm uma ampla gama de aplicações em matemática, física, engenharia, economia, ciência da computação e muitas outras disciplinas. Eles são usados para modelar e resolver problemas do mundo real, como circuitos elétricos, análise de estruturas, planejamento de produção e muito mais.

Um sistema de  $n$  equações lineares é descrito como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

onde  $a_{ij}, b_i \in R$  Denotando as matrizes  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_i)$  para  $1 \leq i, j \leq n$  podemos reescrever o sistema Eq.(1) como:

$$A \cdot X = B \quad (2)$$

Métodos numéricos para solução de sistemas de equações lineares são divididos em dois grupos:

(i) Métodos Exatos: são aqueles que conduzem à solução exata, à menos de erros de arredondamento introduzidos pela máquina, após um número finito de passos (operações). Seu objetivo é transformar o sistema linear em um sistema triangular superior ou inferior (dependendo do método adotado), tornando a resolução do sistema ou o cálculo da matriz inversa mais simples de se obter.

(ii) Métodos Iterativos: são métodos que, a partir de uma aproximação inicial  $x_0$ , permitem obter uma sequência de aproximação  $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$  que converge para a solução, considerando uma precisão definida a priori.

No que diz respeito aos métodos exatos descritos no item (i), nós estudamos os seguintes métodos:

- A fatoração  $LU$  (Lower-Upper). Ela decompõe a matriz em dois componentes, sendo tais: triangular inferior  $L$  e triangular superior  $U$ . Sua aplicação simplifica muitas resoluções de sistemas lineares.

- A fatoração  $LDL$  (Lower-Diagonal-Lower) é outra técnica de decomposição que representa uma matriz como o produto de três matrizes: diagonal  $D$ , matriz triangular inferior  $L$  (com  $a_{jj} = 1$ ) e a transposta da matriz triangular inferior  $L^T$  Essa fatoração é especialmente eficiente para resolver sistemas lineares simétricos, evitando a necessidade de calcular raízes quadradas, como na fatoração Cholesky.

- Já a fatoração de Cholesky, é um método para decompor matrizes simétricas e positivas, sendo também definida em duas outras matrizes: triangular inferior  $L$  e transposta  $L^T$ .
- Por fim, o pivotamento parcial é uma técnica importante na eliminação gaussiana e na resolução de sistemas lineares. Isso envolve selecionar a linha com o maior valor absoluto (eixo) na coluna atual e substituir essa linha pela linha atual antes de removê-la. Isto melhora a estabilidade numérica, reduz erros de arredondamento e melhora a precisão da solução.

No que concerne os métodos iterativos (item (ii)), estudamos o método de Gauss-Jacobi e o Método de Gauss-Seidel. No método de Gauss-Jacobi, todas as variáveis são atualizadas simultaneamente após cada iteração, com base nos valores das variáveis na iteração anterior. No método de Gauss-Seidel, as variáveis são atualizadas uma a uma à medida que são calculadas, com base nos valores atualizados já disponíveis.

É oportuno mencionar que, também estudamos vários tipos de matrizes, incluindo matrizes tridiagonais, estas que desempenham um papel essencial nos cálculos matemáticos. As matrizes tridiagonais têm uma estrutura especial com elementos diferentes de zero apenas nas três diagonais: principal, imediatamente acima e imediatamente abaixo. Tal conceito é muito útil em interpolação e discretização de equações diferenciais parciais. Como este trabalho se concentra no uso do MATLAB empregando estes métodos, para o estudo da teoria e aplicação dos métodos citados acima, recomendamos o leitor consultar as seguintes obras: (BURDEN, R. L.; FAIRES; BURDEN, A. M., 2016), (DORNELLES FILHO, 2016), (FRANCO, 2006) dentre outras.

## MATERIAIS E MÉTODOS

Como mencionado anteriormente, o escopo deste trabalho é utilizar o MATLAB para resolver sistemas lineares empregando métodos numéricos descritos em (i) e (ii). Segundo (DORNELLES FILHO, 2016), O MATLAB (acrônimo de Matrix Laboratory) é um software que permite ao usuário efetuar cálculos via digitação direta de comandos e também a construção de programas que automatizam procedimentos de cálculo mais complexos. O MATLAB é uma ferramenta de larga utilização tanto no mundo acadêmico (ensino, pesquisa, etc.) quanto no profissional (desenvolvimento de produtos, análise de problemas, etc.). Tem uma interface simples e intuitiva, e constitui ferramenta indispensável para o estudante de ciências exatas e engenharia.

Para cada um dos métodos expostos acima, foi gerado um arquivo na extensão (.m). Tal arquivo contém o código MATLAB, que pode incluir comandos para realizar cálculos, processar dados, criar gráficos e realizar uma variedade de tarefas numéricas. Eles são essencialmente scripts que podem ser executados no ambiente MATLAB para realizar tarefas específicas, contendo a sequência de comandos necessária para compilação. Especificamente em nosso trabalho, foram elaborados códigos dos métodos numéricos citados na introdução recorrendo aos pseudo-códigos dados em (BURDEN, R. L.; FAIRES; BURDEN, A. M., 2016). Em alguns códigos, basta o usuário inserir as matrizes  $A$  e  $B$  para obter a solução  $X$  do sistema Eq.



(2). Em outras situações, ao executar o código, o usuário pode optar em inserir um arquivo no formato (.DTA) contendo por exemplo, a matriz aumentada do sistema Eq. (2) no qual o código devolve a solução do referido sistema linear.

As Figura 1 e 2 se referem ao código implementado da fatoração de Cholesky e eliminação de Gauss com pivotamento parcial, respectivamente:

```
clear;
[ret, name] = system('hostname');
if ret ~= 0,
    if ispc
        name = getenv('COMPUTERNAME');
    else
        name = getenv('HOSTNAME');
    end
end
disp('data:');
disp(datetime('now'));
disp('Nome do computador:');
disp(name);
A = input('Insira as entradas da matriz A: por exemplo, [4 2 -4; 2 10 4; -4 4 9]\n ');
B=input('Insira a matriz B: por exemplo, [0; 6; 5]\n');
G=chol(A);
disp('A Matriz Triangular inferior G é');
disp(G);
disp('Solução do sistema linear G*Y=B:');
Y = G\B;
disp(Y);
disp('Solução do sistema linear G^t*X=Y:');
X=G\Y;
disp(X);
```

Figura 1 – Método de Cholesky

Fonte: Autoria própria (2023)

---

```
clear;
[ret, name] = system('hostname');
if ret ~= 0,
    if ispc
        name = getenv('COMPUTERNAME');
    else
        name = getenv('HOSTNAME');
    end
end
disp('data:');
disp(datetime('now'));
disp('Nome do computador:');
disp(name);
A = input('Insira as entradas da matriz A: por exemplo, [1 2 3; 3 1 0; 0 3 4]\n');
B=input('Insira a matriz B: por exemplo, [3; 4; 3]\n');
N = length(B);
X= zeros(N,1);
Aug = [A B];
disp('Matriz ampliada');
disp(Aug);
for j=1:N-1
    %partial pivoting
    [M,P] = max(abs(Aug(j:N,j)));
    C=Aug(j,:);
    Aug(j,:) = Aug(P+j-1,:);
    Aug(P+j-1,:) = C;
    %echlon form
    for i=j+1:N
        m = -Aug(i,j)/Aug(j,j);
        Aug(i,:) = Aug(i,:)+ m*Aug(j,:);
    end
    fprintf('%3s\n','Forma escalonada do sistema usando eliminação de Gauss com pivotamento parcial');
    fprintf('%3s\n','Matriz ampliada:');
    Aug;
    disp(Aug);
end

x=zeros(N,1);
for i= N:-1:1
    x(i) = (Aug(i,N+1)-Aug(i,1:N)*x)/Aug(i,i);
end
disp('A solução do sistema linear A*X=B é');
disp(x);
```

Figura 2 – Eliminação de Gauss com pivotamento parcial

Fonte: Autoria própria (2023)

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os algoritmos utilizados em nosso estudo forneceram como resultados apresentados, as saídas das implementações em MATLAB dos métodos estudados. As Figuras 3 e 4 nos dão as saídas dos códigos implementados apresentados nas Figuras 1 e 2, respectivamente:

```
Command Window
>> Cholesky
data:
19-Sep-2023 10:33:00

Nome do computador:
LAPTOP-OR9KOMMI

Insira as entradas da matriz A: por exemplo, [4 2 -4;2 10 4; -4 4 9]
[4 2 -4;2 10 4; -4 4 9]
Insira a matriz B: por exemplo, [0; 6; 5]
[0; 6; 5]
A Matriz Triangular inferior G é
    2     1    -2
    0     3     2
    0     0     1

Solução do sistema linear G*Y=B:
    0
    2
    1

Solução do sistema linear G^t*Y=X:
    1
    0
    1
fx >>
```

Figura 3 – Método de Cholesky

Fonte: Autoria própria (2023)

```
Command Window
Matriz ampliada
    1     2     3     3
    3     1     0     4
    0     3     4     3

Forma escalonada do sistema usando eliminação de Gauss com pivotamento parcial
Matriz ampliada:
    3.0000    1.0000     0    4.0000
     0    1.6667    3.0000    1.6667
     0    3.0000    4.0000    3.0000

Forma escalonada do sistema usando eliminação de Gauss com pivotamento parcial
Matriz ampliada:
    3.0000    1.0000     0    4.0000
     0    3.0000    4.0000    3.0000
     0     0    0.7778     0

A solução do sistema linear A*X=B é
    1
    1
    0
fx
```

Figura 4 – Eliminação de Gauss com pivotamento parcial

Fonte: Autoria própria (2023)

Note que na Figura 3, o código apresenta além da solução do sistema linear Eq. (2), a matriz triangular inferior  $G$  e as soluções dos sistemas triangulares  $GY = B$  e  $G^T X = Y$ . Por outro lado, a Figura 4, o código fornece além da solução, todas as matrizes ampliadas com pivotamento parcial. Em tais situações, além de fornecer a resposta do sistema linear proposto usando determinado método, tais códigos oferecem de forma didática a resolução do exercício, no qual o usuário e graduando em alguma disciplina que exija a solução de um sistema linear, pode conferir uma etapa intermediária à solução do sistema.

## CONCLUSÃO

O MATLAB se mostrou uma importante ferramenta na obtenção da solução de sistemas lineares dados em Eq. (2). Além disso, o MATLAB permite que os educadores ensinem conceitos matemáticos e científicos complexos de uma maneira mais acessível e visual. Ele pode ser usado para ilustrar conceitos de álgebra, cálculo, estatísticas, equações diferenciais, dentre outros, tornando o aprendizado desses tópicos mais concreto e prático.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador professor Dr. Wellington José Corrêa, pelo apoio e contribuições durante a atuação do projeto de pesquisa. Agradeço, também, ao CNPq pelo fomento financeiro.

## DISPONIBILIDADE DE CÓDIGO

A implementação computacional desenvolvida está disponível no Google Drive, por meio do link: <https://drive.google.com/drive/folders/1BhyffsosOb6wW9ilPXXfXNUk-giuxa8y?usp=sharing>.

## REFERÊNCIAS

BURDEN, Richard L; FAIRES, J Douglas; BURDEN, Annette M. **Análise numérica**. [S.l.]: Cengage Learning, 2016.

DORNELLES FILHO, Adalberto Ayjara. **Fundamentos de cálculo numérico**. [S.l.]: Bookman Editora, 2016.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo numérico**. [S.l.]: Pearson, 2006.

# A EVOLUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS: UMA PESQUISA HISTÓRICA

*Data de aceite: 01/04/2024*

**Pablo Ernandes Alves Santos**

Graduando em Licenciatura em Matemática. Instituto Federal do Tocantins

**Gabriella Stephany Camargo Pimenta**

Graduando em Licenciatura em Matemática. Instituto Federal do Tocantins

**Rosângela Costa Bandeira**

Professora Esp. Instituto Federal do Tocantins

**RESUMO:** Este artigo científico explora o desenvolvimento histórico dos Números Complexos. A criação desse conjunto numérico, frequentemente associada erroneamente à resolução de equações quadráticas, é revisada para revelar sua verdadeira origem e propósito, especialmente na resolução de equações cúbicas. O texto destaca uma lacuna no processo de ensino, sobretudo no ensino médio, evidenciando a resistência dos professores em abordar os Números Complexos. A falta de aplicação concreta e a remoção do tema do currículo após a implementação da Base Nacional Comum Curricular em 2018 são discutidas, enfatizando a importância de uma

aprendizagem significativa que conecte os conceitos matemáticos ao cotidiano dos alunos. A dificuldade de compreensão dos Números Complexos, devido ao alto nível de abstração, é abordada, destacando a Unidade Imaginária como um ponto crítico. Diante desse cenário, o objetivo do trabalho é desmistificar a história dos Números Complexos, revelando suas aplicações na realidade e revisando suas propriedades fundamentais. A metodologia adotada inclui uma pesquisa histórica baseada em produções acadêmicas de diversos autores, visando uma compreensão mais clara do presente e uma melhor previsão do futuro no campo da Matemática. O artigo propõe seguir um percurso histórico dos Números Complexos no desenvolvimento subsequente do trabalho.

**PALAVRAS-CHAVE:** Números Complexos. História. Aplicações. Propriedades.

## THE EVOLUTION OF COMPLEX NUMBERS: A HISTORICAL RESEARCH

**ABSTRACT:** This scientific article explores the historical development of Complex Numbers. The creation of this numerical set, often erroneously associated with the resolution of quadratic equations, is revisited to unveil its true origin and purpose, particularly in solving cubic equations. The text highlights a gap in the teaching process, especially in high school, revealing teachers' reluctance to address Complex Numbers. The lack of concrete application and the removal of the subject from the curriculum after the implementation of the National Common Curricular Base in 2018 are discussed, emphasizing the importance of meaningful learning that connects mathematical concepts to students' daily lives. The difficulty in comprehending Complex Numbers due to their high level of abstraction is addressed, emphasizing the Imaginary Unit as a critical point. Given this scenario, the objective of the work is to demystify the history of Complex Numbers, revealing their real-world applications, and reviewing their fundamental properties. The adopted methodology includes a historical research based on academic productions from various authors, aiming for a clearer understanding of the present and better predictions for the future in the field of Mathematics. The article proposes to follow a historical path of Complex Numbers in the subsequent development of the work.

**KEYWORDS:** Complex Numbers. History. Applications. Properties.

### INTRODUÇÃO

O desenvolvimento da Matemática, e das ciências em geral, advém das necessidades da espécie humana, da insuficiência dos paradigmas de cada época. Com os Números Complexos não foi diferente. Porém, os verdadeiros motivos pelos quais este conjunto numérico foi criado, na maioria dos casos, não são expostos durante o processo de ensino, já que sua criação é, erroneamente, associada à resolução de equações quadráticas, deixando de lado a resolução de equações cúbicas (discutiremos mais à frente).

Ainda no processo de ensino, principalmente durante o ensino médio, era notório um fator limitante para a aprendizagem dos conceitos relacionados aos Números Complexos, assim como Júnior (2009, p.8) expõe em sua dissertação:

É frequente percebermos, entre os professores de matemática, uma resistência em abordar este tema. Embora conheçam a teoria, que envolve definições, operações e as diferentes formas de representar estes números, eles parecem tímidos quanto à legitimidade de se ensinar este tópico, o que vêm provocando a sua eliminação prática de muitos currículos escolares. Muitos justificam este movimento por uma falta de aplicação concreta dos números complexos e pouco se discute sobre a importância destes entes matemáticos no desenvolvimento da própria ciência.

Esta falta de aplicação concreta pode ter sido um dos fatores determinantes para a remoção dos Números Complexos do ensino básico, após o advento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em 2018, ainda que o real motivo não seja citado no documento (CEDRON, 2021, p.10). De fato, uma aprendizagem significativa ocorre quando o aluno consegue enxergar além da sala de aula, relacionando os diferentes conteúdos estudados

com seu cotidiano. “Onde usarei isso na minha vida?” é uma das perguntas mais feitas aos professores de Matemática.

Outra problemática envolvendo os Complexos<sup>1</sup> é a dificuldade de apreensão dos conceitos devido ao nível de abstração necessário, principalmente no que tange a Unidade Imaginária, que será apresentada nas próximas seções. Ora, os próprios números Reais são de um considerável grau de abstração por não possuírem, como defendem alguns teóricos da Filosofia da Matemática, nenhuma relação causal conosco. Esta situação somada à falta de aplicabilidade do conteúdo, pode ter gerado a já mencionada remoção do conteúdo do ensino médio. Só no ensino superior é que somos introduzidos ao conjunto dos Números Complexos.

Em face do exposto, este trabalho tem como objetivo desmistificar a história dos Números Complexos, expor suas principais aplicações na Realidade e revisar algumas de suas propriedades fundamentais. Para tal, o percurso metodológico adotado parte de uma pesquisa histórica ancorada nas produções acadêmicas de diversos autores. Para Sigelmann (1984, p.144), a pesquisa histórica

[...] está interessada na determinação, avaliação e compreensão de eventos passados com o propósito primordial de obter compreensão mais clara sobre o presente e melhor previsão do futuro. É uma investigação crítica de eventos, desenvolvimentos e experiências do passado, análise cuidadosa da validade das fontes de informação sobre o passado e interpretação da evidência à luz de pressupostos teóricos.

Tendo estabelecido os objetivos e métodos, sigamos para o desenvolvimento, no qual faremos o percurso histórico dos Números Complexos.

## DESENVOLVIMENTO

A História nem sempre é contada da forma como realmente aconteceu. Partes são adulteradas ou esquecidas na medida em que o tempo avança. Um dos exemplos mais famosos na História da Matemática é a associação da criação dos Complexos à resolução de equações quadráticas. A verdadeira história por trás desta origem é bem diferente.

## DAS SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES CÚBICAS

Nosso passeio começa por volta do ano de 1510, na Itália. Um matemático chamado Scipione Del Ferro havia encontrado uma forma de resolver equações do tipo  $x^3 + px = q$ , com  $p$  e  $q$  positivos. Porém, não publicou seus resultados, mostrando-os apenas para alguns amigos bem próximos. Ele nasceu na cidade de Bolonha, em 1465. Filho de Floriano e Filippa Ferro, estudou na Universidade de Bolonha, onde foi nomeado professor de Aritmética e Geometria em 1496. Faleceu em 1526, com 61 anos.

---

1. O termo “Complexos” será utilizado no decorrer do artigo para se referir aos Números Complexos.

Entre esses amigos próximos, estava seu aluno Antonio Maria Fior. Possuindo do conhecimento que permitia resolver equações cúbicas daquele tipo, Fior desafia Nicolo Fontana (1550 – 1557), que era conhecido como Tartaglia (gago) pois, na infância, foi gravemente ferido com golpes de sabre, principalmente na região da boca, causando-lhe defeitos permanentes na fala. O desafio consistiu em resolver equações de terceiro grau. O que Fior não esperava, é que Tartaglia não só conseguiria resolver as equações propostas, como também, encontrar a fórmula resolutive de Del Ferro, enquanto Fior não conseguiu resolver nenhuma das equações propostas, uma vez que as equações de Tartaglia eram do tipo  $x^3 + px^2 = q$  (JÚNIOR, 2009, p. 13).

Ciente dos acontecimentos envolvendo este duelo, um novo nome entra na história dos Números Complexos: Girolamo Cardano (1501 – 1576). Ele propõe a Tartaglia que lhe contasse a fórmula resolutive das equações cúbicas, a fim de publicá-la, com a devida autoria, em sua obra *Pratica Arithmeticae* (1539). Tartaglia não aceitou a proposta, já que tinha a intenção de publicar sua descoberta por conta própria. Porém, após muito insistir, Cardano finalmente obtém a fórmula sem a demonstração e a publica, sem autorização, em sua obra *Ars Magna* (1545). Ele acabou demonstrando-a mais tarde, de modo semelhante à demonstração que se segue:

Partamos da equação do tipo  $x^3 + px + q = 0$ .

Agora, fazendo x ser a soma de duas parcelas, ou seja,  $x = u+v$ , obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}(u + v)^3 + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q &= 0\end{aligned}$$

Suponha que u, v e p são tais que  $3uv + p = 0$ , então obtemos as seguintes relações:

$$u^3 + v^3 = -q \text{ e } u^3v^3 = \frac{-p^3}{27}$$

Sabemos a soma e o produto dos números  $u^3$  e  $v^3$ , portanto, podemos considerá-los como sendo raízes da seguinte equação do segundo grau:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

Conclui-se que

$$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Estes são os valores de  $u^3$  e  $v^3$ . Como  $x = u + v$ ,

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}$$

E assim x fica determinado (JÚNIOR,2009, p. 20).

## DAS RAÍZES QUADRADAS DE NÚMEROS NEGATIVOS

Cardano conseguiu, então, demonstrar a fórmula resolutive de equações do terceiro grau. Contudo, surgiu um novo desafio. O matemático italiano Rafael Bombelli se depara com a seguinte equação cúbica em seu livro intitulado *Álgebra*:  $x^3 = 15x + 4$ . Aplicando a fórmula já demonstrada por Cardano, Bombelli obteve o seguinte valor para x:

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}\right)}$$

$$x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})}$$

Bombelli sabia que havia três números reais que satisfaziam essa equação, que são 4,  $-2 + \sqrt{3}$  e  $-2 - \sqrt{3}$ . O que tornou o problema intrigante foi o fato de aparecerem raízes reais a partir de uma fórmula que faz aparecer raízes quadradas de números negativos. Assim como na descoberta dos incomensuráveis (Irracionais) na antiga Grécia, o ser humano estava diante de uma nova “crise” na matemática; a crise dos Complexos.

Diante deste achado, Bombelli foi o primeiro matemático disposto a aceitar a existência de um novo tipo de número, mesmo que o termo número imaginário tenha sido adotado por René Descartes. Sua capacidade de manipular os números imaginários foi o que validou a aplicabilidade da fórmula de Cardano. Como declara Junior (2009, p.27):

Bombelli conseguiu enxergar que os valores complexos dos radicais  $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})}$  e  $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})}$  deveriam ser relacionados com os próprios radicais, ou seja, eles deveriam diferir apenas no sinal. Bombelli sabia que 4 era uma solução da cúbica mencionada acima, exibindo o fato extraordinário de que números reais poderiam ser obtidos através de operações com expressões contendo números imaginários.

Porém, como encontrar a raiz 4 dessa equação através destas duas parcelas já conhecidas? Segue o possível método utilizado pelo matemático italiano.

Consideremos  $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} = a + b\sqrt{-1}$  e  $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})} = a - b\sqrt{-1}$  com  $a > 0$  e  $b > 0$  ainda não conhecidos. Sendo assim, a relação implica que:  $2 + \sqrt{-121} = (a + b\sqrt{-1})^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} + 3ab^2(\sqrt{-1})^2 + b^3(\sqrt{-1})^3 = a(a^2 - 3b^2) + b(3a^2 - b^2)\sqrt{-1}$ .

Dessa igualdade, segue que  $a(a^2 - 3b^2) = 2$  e  $b(3a^2 - b^2) = 11$ . Se as soluções forem inteiras, a primeira dessas condições nos diz que deve ser igual a 1 ou 2, e a segunda condição nos diz que tem valor 1 ou 11. Como apenas as opções  $a = 2$  e  $b = 1$  satisfazem a ambas simultaneamente, obtemos as igualdades:



$$2 + \sqrt{-121} = (2 + \sqrt{-1})^3 \text{ e } 2 - \sqrt{-121} = (2 - \sqrt{-1})^3$$

Podemos concluir que uma das soluções para a equação cúbica  $x^3 + 15x + 4$  é dada por:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-121})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-121})} \\ x &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} \\ x &= (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}). \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Perceba que ao manipular essas expressões, surge um termo especialmente curioso, o  $\sqrt{-1}$ . Foi o matemático e cientista suíço Leonhard Euler (1707-1783) que substituiu este termo por uma letra do alfabeto, o  $i$ , que ficou conhecida como Unidade Imaginária. Além desta contribuição significativa, ele foi o primeiro a estudar os números da forma  $z = a + bi$ , com  $a$  e  $b$  reais, que veremos com mais rigor a seguir. Estes receberam o nome de Números Complexos (CEDRON, 2021, p.16).

## O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O surgimento dos números complexos representou uma revolução na compreensão matemática, desafiando concepções tradicionais e demandando uma formalização cuidadosa. Dada a natureza única desse novo conjunto numérico, contendo uma componente imaginária representada por  $\sqrt{-1}$  ou  $i$ , os matemáticos perceberam a necessidade de estabelecer uma base teórica sólida para os números complexos. Foi o trabalho notável do já citado Leonhard Euler, entre outros, que proporcionou uma formalização rigorosa desse conjunto, tratando números complexos como entidades algébricas que envolvem uma parte real e uma parte imaginária. Essa formalização não apenas consolidou a aceitação dos números complexos na matemática, mas também estabeleceu as bases para uma compreensão mais profunda das relações entre números reais e imaginários. A seguir, veremos como os complexos ficaram definidos.

O conjunto dos números complexos, denotado por  $\mathbb{C}$ , consiste em pares ordenados de números reais nos quais são definidas as operações de igualdade, adição e multiplicação. Comumente, utiliza-se a letra para representar um complexo, assim:

$$z \in \mathbb{C} \leftrightarrow z = (a, b), \text{ sendo } a, b \in \mathbb{R}$$

Para a sequência, é importante que saibamos sobre as três importantes definições citadas.

1) *Igualdade*: dois pares ordenados são iguais se, e somente se, possuírem primeiros termos iguais e segundos termos iguais.

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

1) *Adição*: chama-se soma de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujos primeiro e segundo termos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares dados.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

2) *Multiplicação*: chama-se produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par dado pelo segundo termo do outro.

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Outra importante definição é a de Unidade Imaginária, já mencionada anteriormente. Chamamos Unidade Imaginária ( $i$ ) o número complexo  $(0, 1)$ .

Perceba que:

$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$ , sendo esta a principal propriedade da unidade imaginária.

Ademais, como definido, todo complexo pode ser representado por um par ordenado de números reais, ou seja,  $z = (a, b)$ . Assim, temos:

$$z = (a, b)$$

$$z = (a, 0) + (0, b)$$

$$z = (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0)$$

$$z = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Como a unidade imaginária é representada pelo par ordenado  $(0, 1)$ , temos que:

$$z = a + bi$$

Na qual  $a$  é chamada parte real de  $z$ , e  $b$  é chamada de parte imaginária de  $z$ .

## FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM COMPLEXO

Outro meio de representar um número complexo é por sua forma trigonométrica. Para isso, precisamos ter em mente duas definições:

1) *Módulo*: Chama-se módulo ou valor absoluto de um complexo  $z = a + bi$  ao número real não negativo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Também usamos a letra grega  $\rho$  (rô) para representar o módulo.

2) Argumento: Chama-se argumento de um complexo  $z = a + bi$ , não nulo, ao ângulo  $\theta$  tal que

$$\cos \theta = \frac{a}{\rho} \text{ e } \operatorname{sen} \theta = \frac{b}{\rho}, \text{ em que } \rho = |z|$$

Destas relações decorre que  $a = \rho \cos \theta$  e  $b = \rho \operatorname{sen} \theta$ . Como a forma algébrica é  $z = a + bi$ , ao substituir, temos:

$$z = \rho \cos \theta + \rho \operatorname{sen} \theta \cdot i$$

$$z = \rho \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

E esta é chamada de forma trigonométrica ou polar de  $z$ .

## APLICAÇÕES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O processo educacional é uma jornada gradual que está intrinsecamente ligada à maneira como os conteúdos são abordados, tanto pelos educadores quanto pelos estudantes. Para que a aprendizagem alcance significado, é imperativo estabelecer uma vinculação com a realidade, promovendo uma conexão genuína com os objetos e situações do cotidiano. Uma abordagem fundamentada em exemplos concretos tende a ser mais eficaz durante os estágios de assimilação e acomodação de conceitos nas estruturas cognitivas individuais de cada aluno.

Para Valadares (2011),

Quando uma nova informação é relacionada (de um modo sistemático e concreto) com um subsunçor que o aprendente já possui, essa nova informação passa a ter significado para ele, um significado que é o seu, mais ou menos próximo ou afastado do chamado significado científico, ou seja, aquele que é comungado pelos membros da comunidade que domina cientificamente essa nova informação.

Neste contexto, é de fundamental importância expor as aplicações dos números complexos na realidade, uma tarefa que foi desafio para uma grande parcela de educadores.

### *Complexos na engenharia eletromagnética*

Os números complexos são ferramentas matemáticas poderosas que podem ser usadas para resolver muitos problemas em engenharia eletromagnética. São especialmente úteis na representação de campos elétricos e magnéticos, permitindo que os engenheiros combinem as componentes real e imaginária de um campo em uma única expressão:

$$E = E_1 + iE_2$$

Onde:

- $E_1$  é a componente real do campo elétrico
- $E_2$  é a componente imaginária do campo elétrico

Outra aplicação chave dos números complexos na engenharia eletromagnética é a resolução das equações de Maxwell, que descrevem o comportamento de campos elétricos e magnéticos no espaço e no tempo. Essas equações formam um sistema complexo de quatro equações diferenciais parciais que são difíceis de resolver analiticamente. No entanto, os números complexos oferecem uma maneira de transformar as equações de Maxwell em um sistema mais manejável de equações lineares, que podem ser resolvidas usando técnicas de análise complexa.

### *Complexos na física*

Na física quântica, os números complexos desempenham um papel fundamental na representação e análise das funções de onda associadas a partículas subatômicas, como elétrons e fótons. Estas funções de onda fornecem uma descrição probabilística da localização de uma partícula em um determinado ponto no espaço. A equação de Schrödinger, considerada a pedra angular da mecânica quântica, é uma equação diferencial parcial que modela o comportamento dessas funções de onda. A expressão complexa desta equação facilita sua resolução, simplificando o tratamento matemático.

Além disso, os números complexos são empregados na física quântica para representar operadores, entidades matemáticas que descrevem o comportamento das partículas subatômicas. O operador de energia, por exemplo, é utilizado para quantificar a energia associada a uma determinada partícula. Em aplicações mais específicas, os números complexos são utilizados de maneiras diversas: na determinação da probabilidade de encontrar um elétron em uma posição específica em um átomo, na avaliação da energia de um elétron através do operador de energia, e no cálculo da probabilidade de interação entre partículas subatômicas por meio do produto interno das funções de onda correspondentes. Essas aplicações ilustram a versatilidade e a eficácia dos números complexos como ferramentas essenciais na compreensão e modelagem dos fenômenos quânticos.

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

O presente artigo tomou como missão auxiliar no desenvolvimento da aprendizagem dos números complexos com uma abordagem histórica e material. Como vimos, este enfoque não apenas facilita a compreensão, mas também promove a retenção duradoura do conhecimento, fornecendo uma base sólida para o desenvolvimento contínuo do aprendizado. A análise histórica nos proporciona uma visão esclarecedora do processo de construção do conhecimento, contextualizando cada descoberta dentro das circunstâncias de sua época. Ao compreender esse processo, os alunos percebem que o conhecimento

não surge de maneira autônoma, mas é forjado através de interações complexas e influências específicas. Essa compreensão profunda ressalta que nenhum conhecimento é causa de si, eliminando a noção de acaso e realçando a importância de examinar as raízes e os fatores que contribuem para a formação de ideias e descobertas.

Ademais, destaca-se a abordagem material no processo educacional. Ao conectar os eventos históricos aos materiais de estudo tangíveis, proporciona-se aos alunos uma experiência mais imersiva e significativa. A contextualização por meio de materiais concretos não apenas enriquece a compreensão do passado, mas também estabelece pontes sólidas entre teoria e prática. Essa abordagem material não apenas torna o conhecimento mais acessível, mas também inspira uma apreciação mais profunda das complexidades do desenvolvimento do conhecimento ao longo do tempo. Dessa forma, ao reconhecer a importância do contexto histórico e adotar uma abordagem material, a educação se transforma em uma jornada envolvente, capacitando os alunos a apreciarem a interconexão entre o conhecimento, eventos históricos e o mundo que os cerca.

## REFERÊNCIAS

BOMBELLI, R. **L'Algebra**. (1972). G. Rossi. Bolonha, 1579.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

CARDANO, G. **Ars Magna**. Massachusetts Institute of Technology, 1968.

CEDRON, Lucas Wurster. **Números complexos: um estudo de suas aplicações**. 2021.

COSTA, J. M.; MELO, J. A. C. Aplicação de números complexos em engenharia eletromagnética. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n. 3, p. 377-390, 2006.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar – Complexos, polinômios e equações**. 7. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013. v. 6.

JÚNIOR, Ulício Pinto. **A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS**: “das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand”. 2009.

NAHIN, P. J. **An imaginary tale**. 1. ed. Princeton: Princeton University Press, 1998.

PINTO, José Eustáquio; LAUDARES, João Bosco. Objeto de Aprendizagem de Números Complexos com aplicações na área técnica em eletroeletrônica. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 9, n. 3, 2016.

SIGELMANN, Elida. Tipos de pesquisa: aspectos metodológicos específicos. **Arquivos Brasileiros de Psicologia**, v. 36, n. 3, p. 141-155, 1984.

VALADARES, Jorge. A teoria da aprendizagem significativa como teoria construtivista. **Aprendizagem Significativa em Revista**, v. 1, n. 1, p. 36-57, 2011.

# UM POUCO DA HISTÓRIA DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DESSE TEMA

*Data de submissão: 08/02/2024*

*Data de aceite: 01/04/2024*

### **Erick Felipe Maia Silva**

Estudante da Faculdade de Matemática -  
UFPA, Castanhal – PA  
<https://lattes.cnpq.br/7639019242351417>

### **Flávia Letícia Castro de França**

Estudante da Faculdade de Matemática -  
UFPA, Castanhal – PA  
<http://lattes.cnpq.br/3532733070765016>

### **Lucianny Wanessa Baia Pinheiro**

Estudante da Faculdade de Matemática -  
UFPA, Castanhal – PA

### **Arthur da Costa Almeida**

Professor Doutor da Faculdade de  
Matemática – UFPA, Castanhal – PA  
<https://lattes.cnpq.br/2014957882626187>

e Descartes. Descreve os métodos de Descartes e Leslie para resolver equações do segundo grau, ilustrando-os com diagramas. Enfatiza que contextualizar a matemática com sua história a torna mais humanizada e interessante, ajudando os alunos a entenderem sua evolução e aplicações práticas. Ressalta que a história da equação do segundo grau demonstra como diferentes culturas ao longo do tempo se dedicaram à resolução de problemas matemáticos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Equação do segundo grau. História da Matemática. Ensino. Aprendizagem.

### A BRIEF HISTORY OF THE QUADRATIC EQUATION FOR TEACHING AND LEARNING

**RESUMO:** O trabalho destaca a importância de contextualizar a equação do segundo grau com sua história para despertar o interesse e facilitar a aprendizagem dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Aborda a história da equação, desde as civilizações antigas (Egito, Babilônia, Mesopotâmia e outras) até a Europa medieval e moderna, reconhecendo as contribuições de matemáticos como Bhaskara, Euclides, Tartaglia, Cardano

**ABSTRACT:** This paper emphasizes the importance of contextualizing the quadratic equation with its historical background to stimulate interest and facilitate learning for 9th-grade students. It explores the equation's history from ancient civilizations (Egypt, Babylonia, Mesopotamia and others) to medieval and modern Europe, acknowledging the contributions of mathematicians such as Bhaskara, Euclid,

Tartaglia, Cardano, and Descartes. The paper also describes Descartes' and Leslie's methods for solving quadratic equations, illustrating them with diagrams. Emphasizes that contextualizing mathematics with its history makes it more humanized and interesting, helping students understand its evolution and practical applications. Highlights that the history of the quadratic equation demonstrates how different cultures throughout time have dedicated themselves to solving mathematical problems.

**KEYWORDS:** Quadratic equation. History of Mathematics. Teaching. Learning.

## INTRODUÇÃO

Na maioria dos casos, o professor de matemática se concentra na parte puramente matemática dos assuntos do curso. Entretanto, sabe-se hoje que juntar a história do tema ao próprio conteúdo, além de motivar o estudante, serve para mostrar que aquele conhecimento foi construído ao longo de gerações, às vezes por culturas distantes e diferentes. Além disso, esse conhecimento serve também para humanizar o assunto, tornando-o parte de nossa herança cultural comum.

É objetivo deste trabalho abordar um assunto bem conhecido, a equação algébrica do segundo grau, e mostrar como o professor pode acrescentar a ele a sua porção histórica e com isso facilitar o seu entendimento e aprendizagem e, principalmente, despertar o interesse do estudante pelo tema.

A história da equação do segundo grau é importante para o ensino/aprendizagem, pois permite entender como a matemática evoluiu ao longo do tempo e como a solução de problemas matemáticos já era uma questão importante desde a antiguidade. A equação do segundo grau é uma das equações mais importantes da matemática e sua resolução permite resolver diversos problemas práticos, como por exemplo, a determinação de áreas e volumes de figuras geométricas, cálculos envolvendo velocidade, aceleração, entre outros. Conhecer a história da equação do segundo grau também pode inspirar os estudantes a desenvolverem sua própria capacidade de solucionar problemas matemáticos e estimular o interesse pela matemática (EVES, 1995, p.61-108).

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Atualmente, ao se estudar a equação do 2º grau, usa-se a representação literária, herdada dos europeus, e a resolução fornecida pelos métodos dos hindus e dos árabes. Mas, assim como os demais ramos da matemática, são cheios de conceitos e fórmulas, passaram por anos de estudos e aprimoramento estabelecendo toda uma história. Desta forma, vimos que a equação do segundo grau precisou passar por muitas evoluções para chegar no que é estudado atualmente e, para isto, vários matemáticos tiveram papéis importantes nessa evolução, desde matemáticos do oriente até os matemáticos do ocidente, passando por épocas diferentes no decorrer do tempo (BRASIL, 1998).

## PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente trabalho constitui-se através de pesquisas bibliográficas e documentais envolvendo textos e sites confiáveis da internet.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

### Abordagem histórica da equação do 2º grau

Várias civilizações antigas deixaram registros de seu esforço para a resolução das equações do segundo grau. Dentre elas, os resultados mais importantes foram encontrados no Egito, Babilônia, Mesopotâmia, Índia, Grécia, Arábia e China, além de resultados mais recentes obtidos na Europa ocidental. Na Índia, o resultado mais importante foi a chamada fórmula de Bhaskara, que é a base da usada hoje em dia e é como a fórmula da solução geral é conhecida, muitas vezes.

A história da equação do segundo grau na Europa é bastante complexa e remonta a períodos antigos. A primeira solução conhecida para equações quadráticas foi apresentada por Euclides em “Os Elementos”, um livro de geometria escrito no século III a.c. Durante a Idade Média, a equação quadrática foi estudada principalmente pelos árabes, que expandiram a fórmula apresentada pelos matemáticos indianos. Foi somente durante o Renascimento que o estudo da equação do segundo grau se tornou mais sistemático e rigoroso. Matemáticos como Niccolò Fontana Tartaglia e Girolamo Cardano desenvolveram novas técnicas para resolver equações quadráticas e cúbicas. O desenvolvimento da álgebra e da matemática na Europa consolidou-se no século XVII, com a obra de René Descartes, que introduziu o conceito de coordenadas cartesianas e estabeleceu as bases da geometria analítica e da álgebra moderna (BOYER, 2010, p.180-196).

Durante todo o processo de construção da fórmula, muitos matemáticos articularam caminhos até que chegasse à fórmula final. Fórmula essa, que só adquiriu o aspecto que tem hoje, quando se generalizou o uso de letras para representar os coeficientes de uma equação, a partir dos trabalhos de René Descartes (1596-1650) e de François Viète (1540-1603), que foram uns dos que percorreram todo esse processo, de sua forma geral à sua fórmula final (BOYER, 2010, p.22-157).

### Método de Descartes

Em 1637, René Descartes (1596-1650), possuía uma notação que divergia da utilizada atualmente apenas pelo símbolo de igualdade, para obtenção da raiz positiva desenvolveu um método geométrico. No apêndice “La Géométrie” de sua obra “O Discurso do Método”, Descartes resolveu equações do tipo:  $x^2 = bx + c^2$ ,  $x^2 = c^2 - bx$  e  $x^2 = bx - c^2$ , com b e c sempre positivos. Por exemplo, para resolver equações do tipo:  $x^2 = bx + c^2$ .



Segundo Pedroso (2010, p. 11), o método utilizado por Descartes foi o seguinte: “Traça-se um segmento LM, de comprimento  $c$ , e, em L, levanta-se um segmento NL igual a  $\frac{b}{2}$  e perpendicular a LM. Com centro em N, constrói-se um círculo de raio  $\frac{b}{2}$  e traça-se a reta por M e N, que corta o círculo em O e P”.

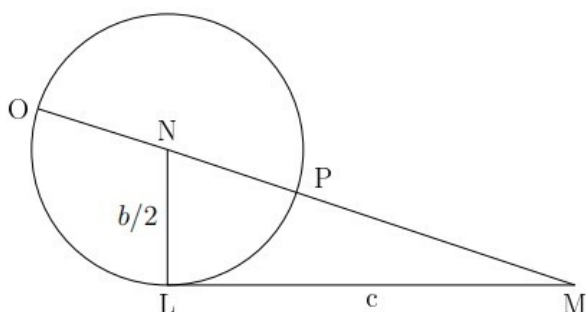


Figura 1: Método de Descartes

Fonte: PEDROSO, 2010, p.11.

Então a raiz procurada é o segmento OM. Com efeito, no triângulo MLN, se  $OM = x$ , tem-se:

$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$  e daí:  $x^2 - bx = c$ . Hoje, sabe-se que a segunda raiz é  $-OM$ , mas Descartes não considerava a raiz negativa.

## Método de Leslie

No século XVIII o inglês Sir John Leslie, em sua obra *Elements of Geometry*, apresentou o seguinte procedimento: Dada uma equação quadrática  $x^2 - bx + c = 0$ , sobre um sistema de coordenadas cartesiano, marcam-se os pontos  $A = (0, 1)$  e  $B = (b, c)$ . Traça-se o círculo de diâmetro AB. As abscissas dos pontos em que esse círculo corta o eixo  $x$ , se cortar, são as raízes da equação quadrática dada.

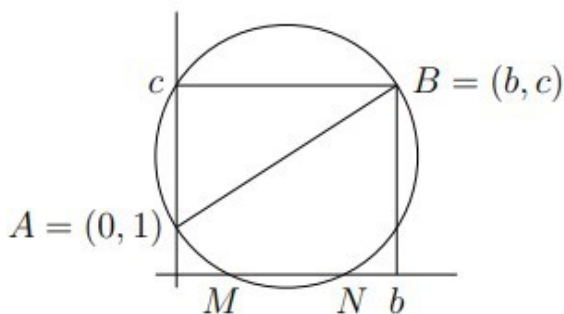


Figura 2: Método de Leslie

Fonte: PEDROSO, 2010, p.12.

Com efeito, a equação da circunferência traçada é:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+1}{2} - 1\right)^2.$$

E quando  $y = 0$ , tem-se  $x^2 - bx = -c$ .

## CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi evidenciar a importância da história da equação do 2º grau no ensino de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Ainda que de forma curta, a apresentação da abordagem histórica desse tema a esses alunos é necessária, para que haja um despertar a curiosidade de como o estudo desse tema foi usado pelos povos do passado e, ainda, permitir que eles descubram maneiras de se utilizar os conceitos e fórmulas matemáticas da equação do 2º grau no seu cotidiano.

Para isso, foi feita uma investigação histórica da equação do segundo grau com o objetivo de saber: como surgiram; quais os principais nomes que contribuíram para o seu estudo e desenvolvimento; como se desenvolveram durante o decorrer do tempo; qual a sua definição e onde elas podem ser aplicadas (BRASIL, 1998, p.42).

## REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática**/ prefacia de Isaac Asimov; revista pr. Uta C.Merzbach; tradução de Elza F. Gomide – 3. Ed – São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Câmara dos Deputados. **Sessão: 087.1.54**. O. Transcurso do Dia da Educação: Classificação do Brasil em 84º lugar no Índice de Desenvolvimento Educacional – IDE, 28/04/2011. Brasília, 2011. Disponível em:<https://documentcloud.adobe.com/link/review?uri=urn:aaid:scds:US:2df67eca-4502>. Acesso em 08 abr. 2023.

DESCARTES, René. Um método geométrico para a solução de equações quadráticas. **O Discurso do Método**, Paris, v. 1, n. 1, p. 116-120, jul./ago,1637.

EVES, Howard, **Introdução à história da matemática**/ Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

LESLIE, John. **Elements of Geometry**. Edinburgh: William Creech,1795.

PEDROSO, Hermes Antônio. **Uma breve história da equação do 2º grau**. Revista Eletrônica da Matemática (REMAT), Universidade Federal de Goiás, v.2, n.2, p.1-12, 2010.

# DOMINÓS E DADOS: ESTRATÉGIAS PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE ARITMÉTICA

*Data de submissão: 27/01/2024*

*Data de aceite: 01/04/2024*

### **Hilda Hildebrand Soriani**

Instituto Federal Farroupilha – Campus  
Frederico Westphalen (IFFar)  
Frederico Westphalen – RS  
<http://lattes.cnpq.br/3310438900948064>

### **Camila Dall’Asta Stival**

Instituto Federal Farroupilha – Campus  
Frederico Westphalen (IFFar);  
Frederico Westphalen – RS  
<http://lattes.cnpq.br/0323191633390397>

### **Mateus Piaia Pessotto**

Instituto Federal Farroupilha – Campus  
Frederico Westphalen (IFFar);  
Frederico Westphalen – RS  
<http://lattes.cnpq.br/5785250565818513>

### **Janine da Rosa Albarello**

Instituto Federal Farroupilha – Campus  
Frederico Westphalen (IFFar);  
Frederico Westphalen – RS  
<http://lattes.cnpq.br/7410529402387134>

### **Félix Afonso de Afonso**

Instituto Federal Farroupilha – Campus  
Frederico Westphalen (IFFar);  
Frederico Westphalen – RS  
<http://lattes.cnpq.br/9637720076347526>

**RESUMO:** Este trabalho apresenta uma intervenção pedagógica realizada com uma aluna da 7ª série do Ensino Fundamental diagnosticada com síndrome de Moebius. Como estratégia de ensino e aprendizagem utilizou-se materiais concretos, como as peças do jogo de dominó e dados, com o objetivo de facilitar a aprendizagem de aritmética, com foco nas operações de adição, subtração e multiplicação. O jogo, em seu aspecto pedagógico, pode ser um facilitador na aprendizagem de estruturas Matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação, desenvolvendo no aluno sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos com autonomia e cooperação. A prática foi executada em uma escola privada de Frederico Westphalen-RS, na sala de Atendimento Educacional Especializado (AEE) no contra turno de escolarização da aluna, utilizando-se um período (45 min). A intervenção foi estruturada em três atividades com nível crescente de dificuldade, sendo na primeira trabalhada a operação de adição com dominós, na segunda, a adição e a subtração com dominós e, na terceira atividade trabalhou-se a multiplicação utilizando-se dados. Na realização da intervenção observou-se que

o dominó e os dados auxiliaram a aprendizagem de aritmética de forma significativa, em razão da maior facilidade da aluna em somar os números das peças do dominó e da compreensão da operação de multiplicação. Portanto, conclui-se que tanto o dominó como os dados podem ser utilizados como uma ferramenta auxiliar por professores do ensino básico.

**PALAVRAS-CHAVE:** Jogos. Pessoa com deficiência. Material concreto.

## DOMINOES AND DICE: STRATEGIES FOR TEACHING AND LEARNING ARITHMETIC

**ABSTRACT:** This work presents a pedagogical intervention carried out with a 7th grade elementary school student diagnosed with Moebius syndrome. As a teaching and learning strategy, concrete materials were used, such as domino game pieces and dice, with the aim of facilitating arithmetic learning, focusing on the operations of addition, subtraction and multiplication. The game, in its pedagogical aspect, can be a facilitator in learning mathematical structures, which are often difficult to assimilate, developing the student's ability to think, reflect, analyze, understand mathematical concepts with autonomy and cooperation. The practice was carried out in a private school in Frederico Westphalen-RS, in the Specialized Educational Service room (SES) room during the student's school shift, using one period (45 min). The intervention was structured into three activities with an increasing level of difficulty, the first being the addition operation with dominoes, the second, addition and subtraction with dominoes and, in the third activity, multiplication using dice. During the intervention, it was observed that the dominoes and the dice helped the learning of arithmetic significantly, due to the student's greater ease in adding the numbers of the domino pieces and understanding the multiplication operation. Therefore, it is concluded that both dominoes and dice can be used as an auxiliary tool by primary school teachers.

**KEYWORDS:** Games. Person with a disability. Concrete material.

## INTRODUÇÃO

Um conteúdo de fundamental importância que o aluno possua, dentre os conteúdos básicos, é o domínio das quatro operações matemáticas: adição, subtração, multiplicação e divisão; assunto simples aos olhos de alguns, complexo a outros, mas sempre essencial para aprender os demais saberes matemáticos (CARDOSO; SILVA, 2021).

A aritmética é essencial no Ensino Fundamental, pois ajuda as crianças a desenvolverem habilidades matemáticas fundamentais, raciocínio lógico e pensamento abstrato, além disso, a aritmética fornece uma base sólida para conceitos matemáticos mais avançados e sua aplicação prática no dia a dia (CARDOSO; SILVA, 2021). A BNCC (BRASIL, 2018) destaca que uma das habilidades a ser adquirida pelo discente é a resolução e a elaboração de problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais e inteiros, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

Não existe um único modo de ensinar e aprender Matemática e a literatura da área, recentemente, vem discutindo diversas possibilidades de trabalho pedagógico e, algumas delas, voltam-se para a construção da aprendizagem matemática por parte do aluno, como os materiais concretos e as atividades lúdicas, capazes de despertar o interesse e a curiosidade dos alunos, mobilizando-os para a construção de saberes e o desenvolvimento de conceitos, assim como, propiciando um ambiente que favorece a aprendizagem.

O jogo em seu aspecto pedagógico apresenta-se produtivo ao professor que busca nele um aspecto instrumentador e, portanto, facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação, e também produtivo ao aluno, que desenvolveria sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las, com autonomia e cooperação (GRANDO, 2004).

O uso do jogo de dominós pode ser tratado como auxiliar na construção de conceitos matemáticos ou contribuir para o entendimento e fixação de conteúdos já estudados. A riqueza desse material lúdico permite o seu aproveitamento como recurso pedagógico em diferentes níveis de dificuldade e suas peças formam um conjunto discreto, enumerável e finito, sendo que sua própria constituição já permite ser tratada matematicamente (SILVA, 2017).

O objetivo desta intervenção pedagógica foi avaliar o uso de material manipulável, dominós e dados, como recurso pedagógico facilitador do processo de ensino e aprendizagem de aritmética para uma aluna da 7ª série do Ensino Fundamental diagnosticada com síndrome de Moebius. A utilização do material tem a finalidade de possibilitar o entendimento, a visualização e uma melhor compreensão das operações adição, subtração e multiplicação.

## REFERENCIAL TEÓRICO

A parte da matemática que estuda as propriedades dos números e suas operações chama-se Aritmética, termo que se originou da palavra grega *arimos*, que significa número (MORENO, 2021). Segundo Centurión (2002), realizamos uma operação toda vez que agimos sobre os objetos e realizamos neles alguma transformação, assim, podemos dizer que as operações aritméticas são ações que realizamos com números para transformá-los em outros números.

O conjunto dos números inteiros, denotado por  $\mathbb{Z}$ , compreende todos os números naturais positivos, o zero e seus simétricos ( $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ) (CASTRO, 2010) e, em  $\mathbb{Z}$  temos uma relação de ordem que estende a relação de ordem de  $\mathbb{N}$  (conjunto dos números naturais), onde declaramos  $a < b$  quando  $a$  se encontra à esquerda de  $b$  (HEFEZ, 2015).

No conjunto  $\mathbb{Z}$ , a adição é definida: “para todo número inteiro  $a$ , define-se  $a+b$  como sendo o número obtido pelo deslocamento de  $a$  para a direita de  $b$  posições, se  $b \geq 0$  ou de  $-b$  posições para a esquerda se  $b < 0$ ”. A adição no conjunto  $\mathbb{Z}$  continua tendo as propriedades comutativa e associativa e é compatível com a relação de ordem (HEFEZ, 2015).

Define-se a diferença  $b - a$  como sendo o número obtido deslocando  $b$  para a esquerda  $a$  posições, se  $a > 0$ ; e deslocando  $b$  para a direita  $-a$  posições, se  $a < 0$ , isto define uma operação em  $\mathbb{Z}$ , sem restrições, chamada de subtração. Assim, tem-se que a subtração é a operação inversa da adição e  $b - a = b + (-a)$  (HEFEZ, 2015).

O significado de multiplicação, na aritmética, é operar dois números para, por fim, somar um deles tantas vezes quantas forem as unidades do outro (MORENO, 2021). A multiplicação nos inteiros é definida como: “se  $a, b \geq 0$ , sabe-se o que é  $a \times b$ ”. Define-se  $(-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b)$ , e  $(-a) \times (-b) = a \times b$ . Assim,  $a \times b$  está definido para quaisquer inteiros  $a$  e  $b$ . A multiplicação em  $\mathbb{Z}$  continua sendo comutativa, associativa e distributiva com relação à adição e à subtração (HEFEZ, 2015).

A utilização de materiais manipuláveis e de jogos são ferramentas pedagógicas que podem ser empregadas para auxiliar no aprendizado das operações matemáticas. No caso do dominó, uma das vantagens, é que ele contém peças numeradas, o que ajuda as crianças a praticarem a contagem, sendo também uma maneira eficaz e divertida de introduzir conceitos de adição e subtração.

Moura (2017) propõe que a matemática deve buscar no jogo a ludicidade das soluções construídas para as situações-problema seriamente vividas pelo homem, unindo assim, o prazer proporcionado pelos jogos com situações cotidianas. Todo jogo por natureza desafia, encanta, traz movimento, barulho e uma certa alegria para o espaço no qual normalmente entram apenas o livro, o caderno e o lápis. Essa dimensão não pode ser perdida apenas porque os jogos envolvem conceitos de matemática, ao contrário, ela é determinante para que os alunos se sintam chamados a participar das atividades com interesse (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2015), principalmente quando as dificuldades advêm de transtornos e síndromes diagnosticadas nos alunos.

A aluna participante da intervenção tem o diagnóstico de síndrome de Moebius que consiste de paralisia congênita parcial ou completa do nervo facial, comumente associada a outros pares cranianos, sobretudo o nervo abducente (FONTENELLE, ARAÚJO, FONTANA, 2001; KUMAR, 1990). A criança pode apresentar também estrabismo em vários graus, incapacidade de movimentar lateralmente os olhos, problemas auditivos e da fala sendo que a cognição é geralmente normal, mas são encontrados graus variados de deficiência intelectual em cerca de 10 a 50% dos casos (KUMAR, 1990).

## ASPECTOS METODOLÓGICOS

Como metodologia principal, utilizou-se a sequência didática, que se caracteriza por um conjunto de atividades planejadas e interligadas para o ensino de um dado conteúdo. Em sua conceituação, uma sequência didática configura-se enquanto um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos (ZABALA, 1998). Essa ferramenta fornece aos alunos uma progressão lógica e coerente das informações, estimulando uma construção articulada.

Para o desenvolvimento da intervenção pedagógica foi escolhida uma escola privada de Frederico Westphalen-RS, que possui uma sala de Atendimento Educacional Especializado (AEE), com professora especializada no atendimento dos alunos. Os materiais utilizados na intervenção foram: um jogo de dominós, dados coloridos e cartelas com as atividades de soma, subtração e multiplicação (em papel plastificado) confeccionado antecipadamente pela discente e aprovado pela professora da disciplina de Prática de Ensino de Matemática VI, a qual supervisionou a escolha do conteúdo, a metodologia utilizada e o plano de aula. Materiais auxiliares como canetão, apagador, e palito de sorvete também foram utilizados, sendo os palitos ideia da professora responsável pelo AEE.

A aluna que participou da intervenção está no 7º ano do Ensino Fundamental (12 anos) e apresenta como diagnóstico a síndrome de Moebius (CID 10:q87.0if90.0), frequentando a sala de Atendimento Educacional Especializado (AEE) no contra turno da escolarização, e a intervenção ocorreu nesse período com duração de 45 minutos, sendo dividida em três atividades com nível crescente de dificuldade:

1ª atividade: adição com dominós – nessa atividade a aluna sorteou dois dominós por rodada e realizou a soma total de seus valores (Figura 1);



Figura 1 – Imagem da realização da atividade 1 (adição com dominós) pela aluna em ambiente de Atendimento Educacional Especializado (AEE).

2ª atividade: Adição e subtração com dominós – primeiramente a aluna sorteou os três dominós, realizou a soma dos valores dos dois primeiros e fez a subtração do valor do terceiro dominó. Para esta última operação (a subtração) a aluna utilizou como ferramenta auxiliar palitos de sorvete para determinar o valor final, devido sua dificuldade de realizar esse cálculo mentalmente (Figura 2);



Figura 2 – Imagem da realização da atividade 2 (adição e subtração com dominós) pela aluna em ambiente de Atendimento Educacional Especializado (AEE).

3ª) Multiplicação com dados – nesta última atividade a aluna lançava dois dados simultaneamente e os valores obtidos eram multiplicados. Como a aluna não possui o domínio da tabuada, foi realizado o cálculo utilizando-se o verso dos dominós como forma de contagem, por exemplo, para  $3 \times 5$  a aluna separou três colunas com cinco dominós cada e realizou a soma ( $5+5+5$ ), como mostrado na Figura 3.



Figura 3 – Imagem da realização da atividade 3 (multiplicação com dados) pela aluna em ambiente de Atendimento Educacional Especializado (AEE).



## RESULTADOS OBTIDOS

Primeiramente, quando a atividade foi proposta à aluna, ela prontamente disse que gostava de jogar dominó com o pai, o que impactou positivamente no desenvolvimento da atividade, pois já existia essa afinidade da aluna com o jogo.

A proposta de uso das peças do dominó e dos dados como estratégia para o aprendizado das operações adição, subtração e multiplicação transformou o ensino da matemática em algo mais leve, observado pela reação da aluna em realizar as atividades com entusiasmo e até mesmo descontração. A professora responsável pela sala de AEE mencionou que observou uma maior facilidade da aluna em somar os números das peças do dominó em relação ao uso dos dedos, por exemplo.

A aluna apresentou algumas dificuldades na adição e na multiplicação, sendo contornada na subtração pelo uso de palitos de sorvete, como material manipulável para a subtração dos números e, utilizando o verso dos dominós como forma de contagem na multiplicação.

Observou-se que essa atividade impactou positivamente no aprendizado da aluna, assim como já visto por outros professores que citam que por meio de um jogo simples e corriqueiro, pode-se ensinar assuntos e/ou fixá-los de forma dinâmica, podendo assim, mostrar que a matemática está em todo lugar, até mesmo na diversão. Portanto, conclui-se que tanto o dominó como os dados podem ser utilizados como uma ferramenta complementar para as aulas de Matemática no ensino das quatro operações.

## REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, 2018.

CARDOSO, V. C.; SILVA, J. H. A utilização do dominó como recurso para o ensino das quatro operações para uma turma do sexto ano do Ensino Fundamental. **Revista Educação Pública**, v. 21, nº 33, p. 1-6, 2021.

CASTRO, J. K. S. **Teoria dos números**. Licenciatura em Matemática. Fortaleza: UAB/IFCE, 2010. 112p.

CENTURIÓN, M. **Conteúdo e metodologia da matemática: números e operações**. São Paulo: Scipione, 2002. 328p.

FONTENELLE, L.; ARAÚJO, A. P. Q.; FONTANA, R. S. Síndrome de Moebius – Relato de caso. **Arquivos de Neuro-Psiquiatria**, v. 59, p. 812-814, 2001.

GRANDO, R. C. **O jogo e a Matemática no contexto da sala de aula**. 2ª ed. São Paulo: Paulus, 2004. 120 p.

HEFEZ, A. **Iniciação à Aritmética**. Rio de Janeiro: IMPA. 11ª ed. 2015. 127p.

KUMAR, D. Moebius syndrome. **Journal of Medical Genetics**, v.27, p. 122-126, 1990.

MORENO, H. M. C. **As Operações Aritméticas Fundamentais**. Suas implicações na expansão dos conjuntos numéricos e os números racionais não negativos. Secretaria de Tecnologia Educacional - SETEC/UFMT, Cuiabá - MT 2021. 56p.

MOURA, M. O. de. A séria busca no jogo: do lúdico na Matemática. In: KISHIMOTO, T. M (organizadora). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 14ª ed. São Paulo: Cortez, 2017. 208p.

SILVA, J. O. **Dominó: o uso das peças do dominó no cenário da matemática discreta**. Trabalho de Conclusão de Curso – Graduação de Licenciatura em Matemática – Universidade Federal Fluminense. Niterói/RJ. 2017. 54p.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; CÂNDIDO, P. **Resolução de Problemas**. Coleção: Matemática de 0 a 6. Porto Alegre: Artmed, 2015. 96 p.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224p.

**FABRÍCIO MORAES DE ALMEIDA:** Possui Doutorado em Física pela UFC (2005) com Pós-doutorado - UFMT/CNPq (2009), para saber mais, acesse: <http://lattes.cnpq.br/5959143194142131>.

E para outras informações, acessar o link: <https://www.researchgate.net/profile/Fabricio-Almeida>

**A**

Álgebra linear 84

Aprendizagem 90, 91, 97, 98, 99, 100, 101, 105, 106, 107

**B**

Border region 1, 2, 4, 8, 11

Brazil/Bolivia 1, 8, 13

Broader participation 65

**C**

Calidad del aire 18, 19, 20

Co-design 65, 70, 71

Collective impact 65, 66, 68, 71

Concrete material 106

Convergence approach 65

Covid 19 63

**E**

Elementary education 65

Eliminação de Gauss com pivotamento parcial 87, 88

ensino 86, 90, 91, 92, 101, 104, 105, 106, 107, 109, 111

Ensino 99, 100, 104, 105, 106, 107, 109, 111

Epidemiología 37, 38, 41, 43, 63

Equação do segundo grau 93, 100, 101, 102, 104

**G**

Games 106

Geometry 73, 83, 103, 104

**H**

Health conditions 1, 4, 14

Herramientas del polypad 80

História da matemática 92, 99, 100, 104

**M**

Materia en suspensión 18

MATLAB 36, 37, 84, 85, 86, 88, 89

Metales pesados 18, 19, 21, 28, 31, 32, 33, 34, 35

Método de Cholesky 87, 88

Modelación matemática 36, 37

Modelo SIR 37, 63

## **P**

Partículas atmosféricas 18

Performance index 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14

Person with a disability 106

Phenomenological research 65, 67

Professional development 65, 66, 68, 73

## **R**

Runge-Kutta 36, 37, 39

## **S**

Sistemas lineares 84, 85, 86, 89

STEM education 65, 68, 69, 71

## **T**

Technology 35, 65, 66, 69, 73, 82, 99

## **U**


Underrepresented groups 65, 67


## **W**

Women in STEM 65

# EXPLORANDO O UNIVERSO DA MATEMÁTICA

TEORIA E APLICAÇÕES 2

 [www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)

 [contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

 [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)

 [www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br)

# EXPLORANDO O UNIVERSO DA MATEMÁTICA

## TEORIA E APLICAÇÕES 2

-  [www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)
-  [contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)
-  [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
-  [www.facebook.com/atenaeditora.com.br](https://www.facebook.com/atenaeditora.com.br)