CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Fabrício Moraes de Almeida
(Organizador)

Atena Editora
Ano 2023

CONSTRUÇÃO **E DIFUSÃO** DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

Fabrício Moraes de Almeida
(Organizador)

Atena Editora
Ano 2023

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Camila Alves de Cremo
Ellen Andressa Kubisty
Luiza Alves Batista
Nataly Evilin Gayde
Thamires Camili Gayde
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Construção e difusão do conhecimento matemático

Diagramação: Ellen Andressa Kubisty
Correção: Flávia Roberta Barão
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Fabrício Moraes de Almeida

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C758 Construção e difusão do conhecimento matemático / Organizador Fabrício Moraes de Almeida. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2023.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-1625-8
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.258231508

1. Matemática. I. Almeida, Fabrício Moraes de (Organizador). II. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

A organização, construção e difusão do conhecimento matemático são processos interconectados, essenciais para o desenvolvimento e o avanço da matemática. De forma geral, a organização do conhecimento matemático é o processo de classificar, categorizar e estruturar o conhecimento matemático para maximizar sua compreensão e aplicabilidade.

Destarte, a construção do conhecimento matemático é o processo de desenvolver novos conceitos, teoremas e resultados matemáticos. Já a difusão do conhecimento matemático é o processo de compartilhar o conhecimento matemático. Isso pode ser realizado de várias maneiras, incluindo: ensinar matemática em escolas e universidades; publicar artigos e livros matemáticos, por exemplo. Usualmente, a organização, construção e difusão do conhecimento matemático são processos essenciais para o desenvolvimento e o avanço da matemática e da ciência. Eles permitem que os matemáticos propaguem seus conhecimentos, o que promove o aprendizado e a compreensão da matemática em amplo espectro.

Portanto, o livro apresenta uma fundamentação teórico-prática nos resultados obtidos pelos diversos autores e coautores no desenvolvimento de cada capítulo com conhecimento técnico-científico e com a didática adequada. Além disso, a Atena Editora oferece uma divulgação científica com qualidade e excelência, primordial para conquistar o destaque entre as melhores editoras do Brasil.

Fabrício Moraes de Almeida

SUMÁRIO

EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER EN DISTRIBUCIONES PERIÓDICAS

Data de aceite: 02/08/2023

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

RESUMEN: En este artículo probamos la existencia y unicidad de solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en el espacio distribucional periódico P'. Además, probamos que la solución depende continuamente respecto al dato inicial en P' . Introduciendo una familia de operadores lineales débilmente continuos, probamos que esta familia es un grupo en P'. Luego, con esta familia de operadores, conseguimos una versión fina del Teorema de existencia y dependencia continua obtenido.
Finalmente, damos las generalizaciones, conclusiones y observaciones derivados de este estudio.
PALABRAS CLAVE: Teoría de grupos, existencia de solución, ecuación de Schrödinger, espacio distribucional periódico, operadores débilmente continuos.

EXISTENCE OF SOLUTION OF A SCHRÖDINGER EQUATION IN PERIODIC DISTRIBUTIONS

ABSTRACT: In this article, we prove the existence and uniqueness solution of the homogeneous Schrödinger equation in the periodic distributional space P'. Furthermore, we prove that the solution depends continuously respect to the initial data in P'. Introducing a family of weakly continuous linear operators, we prove that this family is a group in P'. Then, with this family of operators, we get a fine version of the existence and dependency continuous theorem obtained.
Finally, we give the generalizations, conclusions and remarks derived from this study.
KEYWORDS: Groups theory, existence of solution, Schrödinger equation, periodic distributional space, continuous weakly operators.
MSC 2010: 47D03, 35J10, 81Q05, 46T30, 46F10.

1 I INTRODUCCIÓN

Primero queremos comentar que de [3] se tiene probado la existencia de solución de la ecuación de Schrödinger en el espacio de Hilbert H^s_{per}. También en [3] se introduce una familia de operadores acotados en el espacio de Hilbert H^s_{per} se prueba que forma un grupo unitario. Así, motivados por esas ideas resolveremos el problema (P_1) en el dual topológico de P : P', que no es un espacio de Banach.

En este artículo, probaremos la existencia y unicidad de solución de (P_1) en P', y además demostraremos la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial en P', considerando la convergencia débil en P'. Y probaremos que la familia de operadores introducida forma un grupo de operadores lineales débilmente continuos. Así, con esta familia reescribimos nuestro resultado en una version fina.

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos las referencias usadas. En la sección 3, colocamos los resultados obtenidos de nuestro estudio. Esta sección la dividimos en tres sub-secciones. Así, en la subsección 3.1 probamos que el problema (P_1) posee una única solución y además demostramos que la solución depende continuamente del dato inicial. En la subsección 3.2, introducimos una familia de operadores lineales débilmente continuas en P' que logran formar un grupo. En la subsección 3.3 mejoramos el Teorema 3.1. En la subsección 3.4 comentamos algunas generalizaciones.

Finalmente, en la sección 4 damos las conclusiones y observaciones de este estudio.

2 | METODOLOGÍA

Como marco teórico en este artículo usamos las referencias [1], [2], [3], [4] y [6] para la Teoría de Fourier en el espacio distribucional periódico, espacios de Sobolev periódico, espacios vectoriales topológicos, operadores débilmente continuos y existencia de solución de una ecuación diferencial distribucional.

3 | PRINCIPALES RESULTADOS

La presentación de los resultados obtenidos lo hemos organizado en subsecciones y es del siguiente modo.

3.1 Solución de la Ecuación de Schrödinger (P_1)

En esta subsección estudiaremos la existencia de solución del problema (P_1) y la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial en P'.

Teorema 3.1 *Sea $\mu > 0$ y el problema distribucional homogéneo*

$$(P_1) \quad \left| \begin{array}{l} u \in C(I\!R, P') \\ \partial_t u - i\mu \partial_x^2 u = 0 \ \in P' \\ u(0) = f \in P' \, . \end{array} \right.$$

entonces (P_1) posee una única solución $u \in C^1(IR, P^j)$. Además, la solución depende continuamente del dato inicial. Esto es, dados f_n, $f \in P^j$ tal que $f_n \xrightarrow{P'} f$ implica $u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)$, $\forall t \in IR$, donde u_n es solución de (P_1) con dato inicial f_n y u es solución de (P_1) con dato inicial f.

Prueba.- La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma.

1. Supongamos que existe $u \in C(IR, P^j)$ satisfaciendo (P_1), entonces tomando la transformada de Fourier a la ecuación

$$\partial_t u - i\mu\partial_x^2 u \ = \ 0$$

conseguimos

$$0 \ = \ \partial_t \hat{u} - i\mu(ik)^2\hat{u} \ = \ \partial_t \hat{u} + i\mu k^2 \hat{u}$$

que para cada $k \in Z$ es una EDO con dato inicial $\hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k)$.

Así, planteamos un sistema no acoplado de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden homogéneo

$$(\Omega_k) \left| \begin{array}{l} \hat{u} \in C(I\!R, S'(Z)) \\ \partial_t \hat{u}(k,t) + i\mu k^2 \hat{u}(k,t) = 0 \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \text{ con } \hat{f} \in S'(Z) \end{array} \right.$$

$\forall k \in Z$ y conseguimos

$$\hat{u}(k,t) = e^{-i\mu k^2 t}\hat{f}(k)$$

de donde obtenemos la expresión de u, candidato a solución:

$$\begin{aligned} u(t) \ &= \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t)\phi_k \ = \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu k^2 t}\hat{f}(k)\phi_k\,, && (3.1) \\ &= \ \left[\left(\hat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}. && (3.2) \end{aligned}$$

Como $f \in P^j$ entonces $\hat{f} \in S^j(Z)$, afirmamos que

$$\left(\hat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z} \in S'(Z)\,, \quad \forall t \in I\!R\,. \qquad (3.3)$$

En efecto, sea $t \in IR$, como $\hat{f} \in S^j(Z)$ entonces satisface: $\exists C > 0$, $N \in IN$ tal que $|\hat{f}(k)| \leq C\,|k|^N$, $\forall k \in Z - \{0\}$, usando esto obtenemos

$$|\hat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}| = |\hat{f}(k)||e^{-i\mu k^2 t}| = |\hat{f}(k)| \leq C|k|^N\,.$$

Luego,

$$\left(\hat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z} \in S'(Z)\,.$$

Si definimos

$$u(t) := \left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \right)_{k \in Z} \right]^{\vee}, \qquad \text{para todo } t \in I\!R, \qquad (3.4)$$

vemos que $u(t) \in P'$, $\forall t \in IR$, pues aplicamos la transformada inversa de Fourier a

$\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \right)_{k \in Z} \in S'(Z)$

2. Probaremos que u definido en (3.4) es solución de (P_1).

Evaluando (3.2) en $t = 0$, obtenemos

$$u(0) = \left[\left(\widehat{f}(k) \right)_{k \in Z} \right]^{\vee} = \left[\widehat{f} \right]^{\vee} = f\,.$$

Además, se verifican

a. $\partial_t u(t) = i\mu\, \partial_x^2 u(t)$ en P', $\forall t \in I\!R$. Esto es, probaremos que se satisface:

$$\underbrace{\lim_{h \to 0} < \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \varphi >}_{<\partial_t u(t), \varphi> :=} = i\mu < \partial_x^2 u(t), \varphi >, \ \forall \varphi \in P, \quad t \in I\!R.$$

En efecto, sea $t \in IR$, $\phi \in P$ y $h \in IR - \{0\}$, denotamos

$$I_{h,t} := < \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \varphi >$$

Así, obtenemos

$$\begin{aligned}
I_{h,t} &= \frac{1}{h} \{ < u(t+h), \varphi > - < u(t), \varphi > \} \\
&= \frac{1}{h} \left\{ \lim_{n \to +\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 (t+h)} \phi_k, \varphi > \right. \\
&\qquad \left. - \lim_{n \to +\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \phi_k, \varphi > \right\} \\
&= \frac{1}{h} \left\{ \lim_{n \to +\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \left(e^{-i\mu k^2 h} - 1 \right) \phi_k, \varphi > \right\} \\
&= \lim_{n \to +\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \left(\frac{e^{-i\mu k^2 h} - 1}{h} \right) \phi_k, \varphi > \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \left(\frac{e^{-i\mu k^2 h} - 1}{h} \right) \underbrace{< \phi_k, \varphi >}_{= 2\pi \widehat{\varphi}(-k)} \right\} \\
&= \lim_{n \to +\infty} 2\pi \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \left(\frac{e^{-i\mu k^2 h} - 1}{h} \right) \widehat{\varphi}(-k) \right\} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \left(\frac{e^{-i\mu k^2 h} - 1}{h} \right) \widehat{\varphi}(-k)\,. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Sea $h > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} e^{-i\mu k^2 h} - 1 &= \int_0^h [e^{-i\mu k^2 s}]'\, ds \\ &= \int_0^h (-i\mu k^2) e^{-i\mu k^2 s}\, ds\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tomando norma a la igualdad (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned} |e^{-i\mu k^2 h} - 1| &\leq \int_0^h \mu k^2 \underbrace{|e^{-i\mu k^2 s}|}_{=1}\, ds \\ &= \mu k^2 \underbrace{\int_0^h ds}_{=h} = \mu k^2 h\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Esto es, de (3.7) conseguimos

$$\left| \frac{e^{-i\mu k^2 h} - 1}{h} \right| \leq \mu k^2\,. \tag{3.8}$$

Si $h < 0$, procedemos análogamente al caso h positivo, obteniendo:

$$\begin{aligned} |1 - e^{-i\mu k^2 h}| &\leq \int_h^0 \mu k^2 \underbrace{|e^{-i\mu k^2 s}|}_{=1}\, ds \\ &= \mu k^2 \underbrace{\int_h^0 ds}_{=-h} = \mu k^2 (\underbrace{-h}_{=|h|})\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Esto es,

$$\left| \frac{e^{-i\mu k^2 h} - 1}{h} \right| \leq \mu k^2\,. \tag{3.10}$$

Sea $h \in I\!R - \{0\}$, de (3.8) y (3.10) tenemos

$$\left| \frac{e^{-i\mu k^2 h} - 1}{h} \right| \leq \mu k^2\,. \tag{3.11}$$

Usando la desigualdad (3.11) y que $\hat{f} \in S'(Z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \underbrace{|e^{-i\mu k^2 t}|}_{=1} |\widehat{\varphi}(-k)| \left| \frac{e^{-i\mu k^2 h} - 1}{h} \right| &\leq \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)||\widehat{\varphi}(-k)| k^2 \\ &\leq C\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| \\ &= C\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2} |\widehat{\varphi}(J)| < \infty \end{aligned}$$

pues $\hat{\varphi} \in S(Z)$.

Usando el M-Test de Weierstrass, la serie $I_{h,t}$ converge absoluta y uniformemente. Luego, podemos tomar límite y obtener

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} I_{h,t} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{h\to 0}\left\{\frac{e^{-i\mu k^2 h}-1}{h}\right\}}_{=-i\mu k^2} \\ &= (-i\mu)2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\varphi}(-k)k^2 . \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Usando (3.12) tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} I_{h,t} &= (-i\mu)2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t} \underbrace{\widehat{\varphi}(-k)}_{=\frac{1}{2\pi}<\varphi,\phi_k>} k^2 \\ &= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t} < \varphi, \underbrace{-k^2\phi_k}_{=(ik)^2\phi_k} > \\ &= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t} \underbrace{< \varphi, \phi_k'' >}_{=<\varphi'',\phi_k>} \\ &= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t} < \phi_k, \varphi'' > \\ &= i\mu \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t} < \phi_k, \varphi'' > \\ &= i\mu \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\phi_k, \varphi'' > \\ &= i\mu < u(t), \varphi'' > \qquad (3.13) \\ &= i\mu < \partial_x^2 u(t), \varphi > .\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$< \partial_t u(t), \varphi > \;=\; i\mu < \partial_x^2 u(t), \varphi >, \quad \forall \varphi \in P, \quad \forall t \in I\!R .$$

i.e.

$$\partial_t u(t) = i\mu\, \partial_x^2 u(t) \qquad \text{en } P', \quad \forall t \in I\!R .$$

b. $u \in C(IR, P')$. Esto es, probaremos que

$$u(t+h) \xrightarrow{P'} u(t) \text{ cuando } h \to 0 , \forall t \in IR .$$

En efecto, sea $t \in IR$ y $\phi \in P$, probaremos que

$$H_{t,h} := < u(t+h) - u(t), \phi > \to 0 , \text{ cuando } h \to 0 .$$

Sabemos que si $\phi \in P$ entonces $\widehat{\phi} \in S(Z)$. Usando (3.5) tenemos

$$H_{t,h} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \left(e^{-i\mu k^2 h} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k) \,.$$

Sea $h \in IR - \{0\}$ tal que $|h| < 1$, de (3.11) conseguimos

$$\left| e^{-i\mu k^2 h} - 1 \right| \leq \mu k^2 |h| < \mu k^2 \,. \tag{3.14}$$

Usando (3.14) y que $\hat{f} \in S'(Z)$ obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \underbrace{|e^{-i\mu k^2 t}|}_{=1} \left| e^{-i\mu k^2 h} - 1 \right| |\widehat{\varphi}(-k)| \\ &\leq C\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| \\ &= C\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2} |\widehat{\varphi}(J)| \, < \, \infty \end{aligned}$$

pues $\widehat{\phi} \in S(Z)$.

Usando el M-Test de Weierstrass concluimos que la serie $H_{t,h}$ converge absoluta y uniformemente. Luego es posible tomar límite y obtener

$$\lim_{h \to 0} H_{t,h} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{h \to 0} \left\{ e^{-i\mu k^2 h} - 1 \right\}}_{=0} \, = \, 0 \,.$$

Como $t \in IR$ fue tomado arbitrariamente, entonces podemos concluir que

$$u \in C(IR, P') \,.$$

c. $\partial_t u \in C(IR, P')$. Esto es, probaremos que

$$\partial_t u(t+h) \xrightarrow{P'} \partial_t u(t) \;\; \text{cuando} \;\; h \to 0 \,, \; \forall t \in I\!R \,.$$

En efecto, sea $t \in IR$ y $\phi \in P$, usando el item a) tenemos

$$\begin{aligned} &< \partial_t u(t+h), \varphi > - < \partial_t u(t), \varphi > \\ &\quad = i\mu \{ < \partial_x^2 u(t+h), \varphi > - < \partial_x^2 u(t), \varphi > \} \\ &\quad = i\mu \underbrace{\{ < u(t+h), \varphi'' > - < u(t), \varphi'' > \}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

cuando $h \to 0$, desde que vale el item b) con $\phi'' \in P$.

De b) y c) tenemos que $u \in C^1(IR, P')$.

d. Ahora, para $t \in IR$ fijo y arbitrario, si $f_n \xrightarrow{P'} f$ probaremos que:

$$u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)\,, \quad \forall t \in I\!R\,.$$

Sabemos que si $f_n \xrightarrow{P'} f$ entonces $\widehat{f_n} \xrightarrow{S'(Z)} \widehat{f}$, i.e.

$$< \widehat{f_n} - \widehat{f}, \beta > \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \to +\infty\,, \quad \forall \beta \in S(Z)\,. \tag{3.16}$$

Queremos probar que:

$$< u_n(t), \psi > \longrightarrow < u(t), \psi > \quad \text{cuando } n \to +\infty\,, \quad \forall \psi \in P\,.$$

Así, sea $t \in IR$ fijo y $\psi \in P$, usando la identidad de Parseval generalizada, obtenemos las siguientes igualdades:

$$< u_n(t), \psi > \;=\; 2\pi < \left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > \tag{3.17}$$

$$< u(t), \psi > \;=\; 2\pi < \left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > \,. \tag{3.18}$$

De (3.17) y (3.18) obtenemos:

$$\begin{aligned} &< u_n(t), \psi > - < u(t), \psi > \\ &\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)\} \underbrace{e^{-i\mu k^2 t}\widetilde{\widehat{\psi}}(k)}_{\beta_k :=} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando n $\to \infty+$, desde que $\beta := (\beta_k)_{k\in Z} \in S(Z)$ pusto que vale (3.16).

Corolario 3.1 *La única solución de (P_1) es*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\phi_k = \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}$$

donde $\phi_k(x) = e^{ikx}$, $x \in IR$.

3.2 Grupo de Operadores en P^j

En esta subsección, introduciremos una familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in IR}$ en P^j y probaremos que son lineales, continuas en el sentido d´ebil y que satisfacen las propiedades de grupo.

Teorema 3.2 *Sea $t \in IR$, definimos:*

$T(t) : Pj \quad \to P^j$

$f \to T(t)f := \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^\vee \in P^j$

entonces $\{T(t)\}_{t\in IR}$ *satisface los siguientes enunciados:*

1. $T(0) = I$.
2. $T(t)$ *es* $\not\subset$ *- lineal y continua* $\forall t \in IR$*. Esto es, para cada* $t \in IR$*, si* $f_n \xrightarrow{P'} f$ *entonces* $T(t)f_n \xrightarrow{P'} T(t)f$.
3. $T(t + r) = T(t) \circ T(r)$, $\forall t, r \in IR$.
4. $T(t)f \xrightarrow{P'} f$ *cuando* $t \to 0$, $\forall f \in P^j$.

Esto es, para todo $f \in P^j$ *fijado, se cumple:*

$$< T(t)f, \psi \to < f, \psi >, \text{ cuando } t \to 0 \text{ , } \forall \psi \in P \text{ .}$$

Prueba.- Primero debemos probar que $T(t)$ está bien definida para todo $t \in IR$. En efecto, sea $f \in P^j$ entonces $\hat{f} \in S^j(Z)$. Luego, de (3.3) tenemos

$$\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z} \in S'(Z)\,;$$

tomando la transformada inversa de Fourier, obtenemos

$$\underbrace{\left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^\vee}_{=T(t)f} \in P'\,, \quad \forall t \in I\!R\,.$$

Esto es, $T(t)$ está bien definida para todo $t \in IR$.

1. Fácilmente obtenemos:

$$T(0)f = \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 0}\right)_{k\in Z}\right]^\vee = \left[\left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^\vee = \left[\widehat{f}\right]^\vee = f\,, \quad \forall f \in P'\,.$$

2. Sea $t \in IR$, probaremos que $T(t) : P^j \to P^j$ es $\not\subset$ -lineal. En efecto, sean $a \in \not\subset$, $(\phi, \psi) \in P^j \times P^j$, tenemos

$$\begin{aligned}
T(t)(a\phi+\psi) &= \left[\left(e^{-i\mu k^2 t}[a\phi+\psi]^\wedge(k)\right)_{k\in Z}\right]^\vee \\
&= \left[\left(e^{-i\mu k^2 t}[a\widehat{\phi}(k)+\widehat{\psi}(k)]\right)_{k\in Z}\right]^\vee \\
&= \left[a\left(e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z} + \left(e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\psi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^\vee \\
&= a\left[\left(e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^\vee + \left[\left(e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\psi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^\vee \\
&= a\,T(t)\phi + T(t)\psi\,.
\end{aligned}$$

Ahora, para $t \in IR$ probaremos que $T(t) : P^{j} \to P^{j}$ es continua. Esto es, si $f_n \xrightarrow{P'} f$ probaremos que $T(t)f_n \xrightarrow{P'} T(t)f$.

Sabemos que si $f_n \xrightarrow{P'} f$ entonces $\hat{f}_n \xrightarrow{S'} \hat{f}$, i.e.

$$< \hat{f}_n, \beta > \to < \hat{f}, \beta >, \text{ cuando } n \to +\infty \text{ , } \forall \beta \in S(Z) \text{ .}$$

i.e.

$$< \hat{f}_n - \hat{f}, \beta > \to 0 \text{ , cuando } n \to +\infty \text{ , } \forall \beta \in S(Z) \text{ . (3.19)}$$

Queremos probar que:

$$< T(t)f_n, \psi > \to < T(t)f, \psi > \text{ cuando } n \to +\infty \text{ , } \forall \psi \in P \text{ .}$$

Así, sea $t \in IR$ fijo y $\psi \in P$, usando la identidad de Parseval generalizada, obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} < T(t)f_n, \psi > &= < \left[\left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}, \psi > \\ &= 2\pi < \left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widehat{\widetilde{\psi}} > . \end{aligned} \qquad (3.20)$$

$$\begin{aligned} < T(t)f, \psi > &= < \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}, \psi > \\ &= 2\pi < \left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widehat{\widetilde{\psi}} > . \end{aligned} \qquad (3.21)$$

De (3.20) y (3.21) obtenemos

$$\begin{aligned} & < T(t)f_n, \psi > - < T(t)f, \psi > \\ &= 2\pi \left\{ < \left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widehat{\widetilde{\psi}} > - < \left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widehat{\widetilde{\psi}} > \right\} \\ &= 2\pi \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\widetilde{\psi}}(k) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\widetilde{\psi}}(k) \right\} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)\} \underbrace{e^{-i\mu k^2 t}\widehat{\widetilde{\psi}}(k)}_{\beta_k :=} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$, desde que $\beta := (\beta_k)_{k\in Z} \in S(Z)$ y puesto que vale (3.19), esto es $< \hat{f}_n - \hat{f}, \beta > \longrightarrow 0$ cuando $n \to +\infty$.

3. Sean $t, r \in IR - \{0\}$, probaremos que $T(t) \circ T(r) = T(t+r)$. En efecto, sea $\phi \in P^{j}$,

$$
\begin{aligned}
T(t+r)\phi &= \left[\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2(t+r)}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= \left[\left(\underbrace{\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}}\cdot e^{-i\mu k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} .
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Como $\phi \in P^j$, usando (3.3) tenemos que

$$
\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}\right)_{k\in Z} \in S'(Z)\,, \quad \forall r \in I\!R\,. \tag{3.23}
$$

Luego, tomando la transformada inversa de Fourier obtenemos:

$$
\left[\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P'\,, \quad \forall r \in I\!R\,.
$$

Así, definimos:

$$
g_r := \left[\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P'\,.
$$

Esto es,

$$
g_r := T(r)\phi\,. \tag{3.24}
$$

Tomando la transformada de Fourier a g_r conseguimos:

$$
\widehat{g_r} = \left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}\right)_{k\in Z}
$$

esto es

$$
\widehat{g_r}(k) = \widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}\,, \quad \forall k \in Z\,. \tag{3.25}
$$

Usando (3.25) en (3.22) y de (3.24) tenemos:

$$
\begin{aligned}
T(t+r)\phi &= \left[\left(\widehat{g_r}(k)e^{-i\mu k^2 r}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P' \\
&= T(t)g_r \\
&= T(t)(T(r)\phi) \\
&= [T(t)\circ T(r)](\phi)\,, \quad \forall t, r \in I\!R - \{0\}\,.
\end{aligned}
$$

Así,

$$
T(t+r) = T(t) \circ T(r)\,,\ \forall t,\ r \in I\!R - \{0\}\,. \tag{3.26}
$$

Si $t = 0$ o $r = 0$ entonces la igualdad (3.26) también es verdadera. En efecto, si $t = 0$ tenemos

$$
T(0+r) = T(r) = I \circ T(r) = T(0) \circ T(r)\,.
$$

Así, con esto concluimos la prueba de

$$
T(t+r) = T(t) \circ T(r)\,, \qquad \forall t,\ r \in I\!R\,. \tag{3.27}
$$

4. Sea $f \in P^j$, probaremos que:

$$T(t)f \xrightarrow{P'} f \text{ cuando } t \to 0 .$$

Esto es, probaremos que:

$$< T(t)f, \phi > \longrightarrow < f, \phi > \text{cuando } t \to 0 , \ \forall \phi \in P .$$

En efecto, sea $\phi \in P$, tenemos

$$\begin{aligned}
H_t &:= < T(t)f, \varphi > - < f, \varphi > \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left\{ < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} \phi_k, \varphi > - < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\phi_k, \varphi > \right\} \\
&= \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right) \phi_k, \varphi > \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right) < \phi_k, \varphi > \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2\pi \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k) \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k) . \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

Sea $t > 0$, de (3.7) obtenemos

$$\left| e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right| \leq \mu k^2 t . \qquad (3.29)$$

Sea $t < 0$, de (3.9) tenemos

$$\left| e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right| \leq \mu k^2 |t| . \qquad (3.30)$$

De (3.29) y (3.30) conseguimos

$$\left| e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right| \leq \mu k^2 |t| , \quad \forall t \in I\!R . \qquad (3.31)$$

De (3.31) con $|t| < 1$, tenemos:

$$\left| e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right| \leq \mu k^2 . \qquad (3.32)$$

Luego, usando (3.32) y que $f \in P^j$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \left| e^{-i\mu k^2 t} - 1 \right| |\widehat{\varphi}(-k)| &\leq C\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| \\
&= C\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2} |\widehat{\varphi}(J)| < \infty
\end{aligned}$$

pues $\phi \in S(Z)$.

Usando el M-Test de Weierstrass concluimos que la serie H_t converge absoluta y uniformemente. Luego,

$$\lim_{t\to 0} H_t \;=\; 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{t\to 0}\{e^{-i\mu k^2 t} - 1\}}_{=0} \;=\; 0 \;.$$

Así, hemos probado

$$\lim_{t\to 0} < T(t)f, \varphi > = < f, \varphi > \;.$$

Teorema 3.3 *Para todo $f \in P^j$ fijado y la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in IR}$ del Teorema 3.2, tenemos que la aplicación*

$$\begin{aligned} \xi : IR &\to P^j \\ t &\to T(t)f \end{aligned}$$

es continua en IR. Esto es,

$$T(t+h)f \xrightarrow{P'} T(t)\, f \text{ cuando } h \to 0,\ \forall t \in IR \qquad (3.33)$$

(es la continuidad en t).

La convergencia (3.33) nos dice que para cada $t \in IR$ fijado, vale

$$< T(t+h)f, \psi > \longrightarrow < T(t)f, \psi >, \text{ cuando } h \to 0\ ,\ \forall\, \psi \in P\,.$$

Si $t = 0$, se tiene la continuidad de ξ en 0, que es el item 4) del Teorema 3.2.

Prueba.- Sea $t \in R - \{0\}$, fijo arbitrario y $f \in P^j$, entonces $g := T(t)f \in P^j$. Usando el item 4) del Teorema 3.2, tenemos que $T(h)g \xrightarrow{P'} g$ cuando $h \to 0$. Esto es

$$\underbrace{T(h)(T(t)f)}_{=\underbrace{[T(h)\circ T(t)]f}_{=T(h+t)f}} \xrightarrow{P'} T(t)f \text{ cuando } h \to 0\,,$$

donde usamos el item 3) del Teorema 3.2.

Observacion 3.1 *Los resultados obtenidos en los Teoremas 3.2 y 3.3 también son v´alidos para la familia de operadores $\{S(t)\}_{t\in IR}$ definida como*

$$\begin{aligned} S(t) : P' &\longrightarrow P' \\ f &\rightarrow S(t)f := \left[\left(e^{i\mu k^2 t}\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}, \end{aligned}$$

para $t \in IR$. Su prueba es similar.

3.3 Versión del Teorema 3.1 mediante la Familia $\{T(t)\}_{t\in IR}$

Mejoraremos el enunciado del Teorema 3.1, usando la familia de Operadores débilmente continuos $\{T(t)\}_{t\in IR}$.

Teorema 3.4 *Sea* $f \in P'$ *y la familia de operadores* $\{T(t)\}_{t\in IR}$ *del Teorema 3.2, definiendo* $u(t) := T(t)f \in P'$, $\forall t \in IR$, *entonces* $u \in C(IR, P')$ *es la única solución de* (P_1). *Además, u depende continuamente de f. Esto es, dados* f_n, $f \in P'$ *tal que* $f_n \xrightarrow{P'} f$ *implica* $u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)$, $\forall t \in IR$, *donde* $u_n(t) := T(t)f_n$, $\forall t \in IR$ *(i.e.* u_n *es solución de* (P_1) *con dato inicial* f_n*).*

Prueba.- La prueba es análoga a la prueba del Teorema 3.1.

Corolario 3.2 *Sea* $f \in P'$ *fijado y la familia de operadores* $\{T(t)\}_{t\in IR}$ *del Teorema 3.4, entonces* $\exists\ \partial_t T(t)f$, $\forall t \in IR$ *y la aplicacion*

$$\begin{array}{rcl} : \ I\!R & \to & P' \\ t & \to & \partial_t T(t)f = i\mu\partial_x^2 T(t)f \end{array}$$

es continua en IR. Esto es,

$$\partial_t T(t+h)f \xrightarrow{P'} \partial_t T(t)f \quad cuando\ h \to 0\,, \quad \forall t \in I\!R\,. \tag{3.34}$$

(3.34) nos dice que para cada $t \in IR$ *fijado, vale:*

$$< \partial_t T(t+h)f, \phi > \longrightarrow\ < \partial_t T(t)f, \phi > cuando\ h \to 0\ ,\ \forall \phi \in P\,.$$

Prueba.- Tenemos

$$\begin{aligned} &< \partial_t T(t+h)f, \varphi > \ - \ < \partial_t T(t)f, \varphi > \\ &\quad = i\mu\{< \partial_x^2 T(t+h)f, \varphi > - < \partial_x^2 T(t)f, \varphi >\} \\ &\quad = i\mu\{\underbrace{< T(t+h)f, \varphi'' > - < T(t)f, \varphi'' >}_{\longrightarrow 0}\} \ \longrightarrow \ 0 \end{aligned}$$

cuando $h \to 0$, debido al Teorema 3.3 con $\psi := \phi''$, desde que $\phi'' \in P$.

Corolario 3.3 *Sea* $f \in P'$ *fijado y la familia de operadores* $\{T(t)\}_{t\in IR}$ *del Teorema 3.4, entonces la solución de* (P_1): $u(t) := T(t)f$, $\forall t \in IR$, *satisface* $u \in C^1(IR, P')$.

Prueba.- Sale como consecuencia del Corolario 3.2.

3.4 Comentarios de generalización

A continuación daremos algunas importantes observaciones de generalización.

Observación 3.2 *Este estudio nos permite generalizar el problema* (P_1) *y obtener resultados de existencia de solución en* P' *para el problema:*

$$(\mathcal{W}_m) \quad \left| \begin{array}{l} u \in C^1(I\!R, P') \\ \partial_t u - i\mu\partial_x^m u = 0 \ \in P' \\ u(0) = f \in P' . \end{array} \right.$$

cuando m es un número par no múltiplo de cuatro. Además, introduciendo una familia de operadores débilmente continuos $\{T_m(t)\}_{t\in IR}$, *definidas por*

$$\begin{array}{rcl} T_m(t): P' & \longrightarrow & P' \\ f & \longrightarrow & T_m(t)f := \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^m t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P' , \end{array}$$

se consigue mejorar los resultados para (W_m). *Para esto podemos citar [5].*

Observación 3.3 *Cuando m es par múltiplo de cuatro, el problema* (W_m) *también posee solución en* P^j, *y en este caso se debe introducir una familia de operadores débilmente continuos* $\{S_m(t)\}_{t\in IR}$, *definidas por*

$$\begin{array}{rcl} S_m(t): P' & \longrightarrow & P' \\ f & \longrightarrow & S_m(t)f := \left[\left(\widehat{f}(k)e^{i\mu k^m t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P' , \end{array}$$

para mejorar los resultados. Para esto, seguir ideas expuestas en esta sección, considerando que $(ik)^m = k^m$ *para todo* $k \in Z$.

Observación 3.4 *Se satisfacen los siguientes enunciados:*

1. *Para cada* $m \in IN$ *se tiene que la familia* $\{T_m(t)\}_{t\in IR}$ *es un grupo de oper- adores en* P^j. *Así, nosotros usamos el caso m par no múltiplo de cuatro en la observación 3.2.*

2. *Para cada* $m \in IN$ *se tiene que la familia* $\{S_m(t)\}_{t\in IR}$ *es un grupo de operadores en* P^j. *Así, nosotros usamos el caso m par múltiplo de cuatro en la observación 3.3.*

CONCLUSIONES

En nuestro estudio de la ecuación de Schrödinger en el espacio distribucional periódico P^j, para el caso homogéneo (P_1) hemos obtenido los siguientes resultados:

1. Probamos la existencia, unicidad y regularidad de solución del problema (P_1). Así también probamos la dependencia continua de la solución respecto al dato inicial.

2. Introducimos una familia de operadores en P^j: $\{T(t)\}_{t\in IR}$ y probamos que estas son lineales y débilmente continuos en P^j. Además demostramos que forman un grupo de operadores lineales débilmente continuos en P^j.

3. Con la familia de operadores $\{T(t)\}_{t\in IR}$ mejoramos el Teorema 3.1.

4. En contraste a lo obtenido en P^j con lo que fue estudiado en H^s_{per} vemos que los operadores $T(t)$ no son unitarios debido a la topología de P^j.

5. Está matemáticamente enriquecido desde que generamos familias de operadores.

6. Tratamos su generalización y damos algunas observaciones.
7. Finalmente, debemos indicar que esta técnica puede ser aplicada a otras ecuaciones de evolución en P^j.

REFERENCIAS

1. Iorio, R. and Iorio V. (2001) Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University.

2. Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02): 207-230.

3. Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación de Schrödinger no homogénea en espacios de Sobolev Periódico. Se- lecciones Matem´atica. 2021; 08(01): 37-51.

4. Santiago Ayala, Y. Results on the well posedness of a distributional differential problem. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(02): 348-359.

5. Santiago Ayala, Y. Existencia de solución de un problema distribucional para una ecuación de Schrödinger generalizada. Selecciones Matemáticas. 2022; 09(01): 91-101.

6. Santiago Ayala, Y. Group of weakly continuous operators associated to a generalized Schrödinger type homogeneous model. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2023; 11(04): 919-932.

CAPÍTULO 2

STUDY OF THE REGULARITY OF THE KIRCHHOFF PLATE WITH INTERMEDIATE DAMPING

Data de aceite: 02/08/2023

Fredy Maglorio Sobrado Suárez
Departamento de Matemática - Campus Pato Branco
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
https://orcid.org/0000-0002-3975-0584

Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano
Departamento de Matemática- Campus Pato Branco
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
https://orcid.org/0000-0001-8943-1082

João Biesdorf
Departamento de Matemática- Campus Pato Branco
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
https://orcid.org/0000-0002-9261-7280

ABSTRACT: In this work, we study the regularity of the Kirchhoff plate equation with intermediate damping. The intermediate damping is given by $A^\theta u_t$, where u is the displacement of the plate, $A^\theta = (-\Delta)^\theta$ is a strictly positive self-adjoint operator on a complex Hilbert space for any real value of the parameter θ, here we will consider $\theta \in [0, 2]$. In 2020 Vila et al. [2], published the study of the polynomial decay of this model considering the parameter $\theta \in [0, 1)$. More recently, in 2021, Tebou [23] published a study of asymptotic behavior and regularity considering intermediary damping, but considering $\theta \in [0, 2]$ and also considering a new parameter that considers the plate equations intermediate between the Euler-Bernoulli and Kirchoff plates. Our research, like the two previous ones, also uses the theory of semigroups for the existence, asymptotic behavior, and regularity of the semigroup $S(t)$ associated with the model, we use the good properties of the operator $-\Delta$ to perform a spectral analysis of the model and demonstrate our results in a direct and friendly way: We show that the semigroup $S(t)$ associated with the model is exponentially stable for $\theta \in [1, 2]$, we address the study of the analytic of $S(t)$ for $\theta \in [\frac{3}{2}, 2]$ and that $S(t)$ is not analytic

when $\theta \in [0, \frac{3}{2})$. In the last part of our investigation we show that for $1 < \theta < \frac{3}{2}$, $S(t)$ has Gevrey Sharp classes given by $s > \frac{1}{2\theta - 2}$, it is also shown that when the parameter $\theta \in [0,1]$ the semigroup $S(t)$ does not admit Gevrey classes. For the study of existence, stability and regularity, semigroup theory is used together with frequency domain techniques, multipliers, and spectral analysis of the fractional operator A^θ for $\theta \in [0, 2]$ and inequality interpolation.

KEYWORDS: Asymptotic behaviour, Stability, Regularity, Gevrey Sharp-class, Analyticity, Kirchhoff Plates.

1 I INTRODUCTION

This research work studies the asymptotic behavior and the regularity of the solutions of the following Kirchhoff plate equation: Consider Ω a bounded open set of R^n with smooth boundary,

$$u_{tt} - \gamma \Delta u_{tt} + \beta \Delta^2 u + \alpha(-\Delta)^\theta u_t = 0 \text{ in } \Omega \times (0, \infty), \tag{1}$$

satisfying the boundary conditions

$$u = 0, \qquad \Delta u = 0 \quad \text{on} \qquad \Sigma = \partial\Omega \times (0, \infty), \tag{2}$$

and the initial data

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad u_t(x, 0) = u_1(x) \qquad x \in \Omega. \tag{3}$$

Here, the rotational inertia coefficient γ, the elasticity coefficient β and the damping coefficient α, are positive and the exponent θ is considered in the interval $[0, 2]$. The term $(-\Delta)^\theta u_t$ in equation (1) sets up an intermediate dissipation which includes the frictional damping ($\theta = 0$), structural damping ($\theta = 1$) and the strong or viscous damping ($\theta = 2$).

In 2020 see [2] the study of the asymptotic behavior of the semigroup associated to the system (1)-(3) with the fractional damping term $(-\Delta)^\theta u_t$ for values of the parameter θ varying in the interval $[0, 1)$ and show that the semigroup decays polynomially in time, with the rate $O(t^{\frac{-1}{2-\theta}})$ and that these rates depend on the values of the parameter θ are optimal. More recently in 2021, see [23] studied the plate model with fixed or articulated boundary conditions. Rotation and damping forces involve the spectral fractional Laplacian with powers $\theta \in [0, 1]$ and $\delta \in [0, 2]$, respectively for model:

$$y_{tt} + (-\Delta)^\theta y_{tt} + \alpha \Delta^2 y + b(-\Delta)^\delta y_y = 0 \text{ in } \Omega \times (0, \infty),$$

for boundary conditions

$$(\textbf{Hinged plate})\ y = 0,\ \Delta y = 0 \text{ on } \Sigma = \partial\Omega \times (0, \infty),$$

or, else

$$(\textbf{Clamped plate})\ y = 0,\ \partial_\nu y = 0 \text{ on } \Sigma = \partial\Omega \times (0, \infty),$$

where a and b are positive constants, θ and δ are constants with $(\theta, \delta) \in [0, 1] \times [0, 2]$. Using the frequency domain approach and the appropriate interpolation inequalities, they show that the semigroup associated with the model is: (a) analytic for all $\theta \in [0, 1]$ and $\delta \in [(2 + \theta)/2, 2]$, (b) is not analytic for all $\theta \in [0, 1]$ and $\delta \in (\theta, (2 + \theta)/2)$, (c) of the Gevrey class $\alpha > (2\ \theta)/2(1 - \delta)$ for all $\theta \in [0, 1]$ and $\theta < \delta < (2 + \theta)/2$. I also prove that for every admissible value of θ, the semigroup is exponentially stable for $\delta \geq \theta$, and only polynomially stable, with rate $O(t^{-\frac{2-\theta}{2(\theta-\delta)}})$, for $\delta < \theta$, when $\theta > 0$. In particular, in the case of the hinged plate, they show that the polynomial decay rate is optimal. It is well-known that the semigroup of the system (1)–(3) is exponentially stable when the damping in equation (1) is structural. There exist many works about the stability of the solutions of plate models with some dissipative mechanisms. A variety of plate models can be found in the books [14] and [18].

First, investigations of the controllability and stabilization of Kirchhoff Plates can be read in the references [15, 16] and [13]. Other relevant investigations on asymptotic behavior and regularity of Kirchoff plates can be read at [5, 17, 22]. In the last 5 years various studies have emerged on the asymptotic behavior and regularity of coupled plate models, thermoelastic plates with various types of damping and boundary conditions, some of these investigations can be read at [1, 4, 9, 10, 11, 19, 20].

Our proposal here is to approach the Kirchoff plate system, making the parameter vary for [0, 2] and using the good properties of the operator $(-\Delta)^\theta$ of being self-adjoint and positive definite for $\theta \in R$ to do spectral analysis and study the asymptotic behavior and regularity of the system in a more didactic way than the works of [2] and [23].

This research work is organized as follows: in section 2, we present the semigroup of the system (4)-(5) in abstract form using the operator $A := -\Delta$ and we show that our model is well defined using semigroup theory. In section 3, we state and demonstrate the main Result of this work: We start with a subsection dedicated to spectral analysis, followed by subsections dedicated to exponential decay, analyticity, and Gevrey Sharp's classes. We would like to point out that the spectral analysis subsection made it possible to prove the lack of analyticity when $\theta \in [0, \frac{3}{2})$, to show that for $\theta \in (1, \frac{3}{2})$ the determined Gevrey classes are Sharp and also helped to show that the semigroup $S(t)$ does not admit Gevrey classes when $\theta \in [0, 1]$.

2 | WELL-POSEDNESS OF THE SYSTEM

In this section, we will use the semigroup theory to assure the existence and uniqueness of strong solutions for the system (4)–(5). It is well known that the operator $A = -\Delta$ defined in the space $\mathfrak{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ is a positive self-adjoint operator in the Hilbert space $L^2(\Omega)$. Even more, this operator has compact inverse. Using this notation for the operator $-\Delta$ the system (1)-(3) can be written in the following abstract setting

$$u_{tt} + \gamma A u_{tt} + \beta A^2 u + \alpha A^\theta u_t = 0, \tag{4}$$

satisfying the initial conditions

$$u(0) = u_0,\ u_t(0) = u_1. \tag{5}$$

It is important recalling that as A, is a positive self-adjoint operator with compact inverse in the Hilbert space $\mathfrak{D}(A^0) := L^2(\Omega)$. Then the operator A^θ is self-adjoint, positive for $\theta \in R$ and the embedding

$$\mathfrak{D}(A^{\theta_1}) \hookrightarrow \mathfrak{D}(A^{\theta_2}),$$

is compact for $\theta_1 > \theta_2$. Here, the norm in the space $\mathfrak{D}(A^\theta)$ is given by $\|u\|_{\mathfrak{D}(A^\theta)} := \|A^\theta u\|$, where $\|\cdot\|$ denotes the norm of the Hilbert space $\mathfrak{D}(A^0)$. More details about fractional operators can be found in [6]. Note that,

$$\begin{aligned} (I+\gamma A)\colon \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}) &\longrightarrow \mathfrak{D}(A^{-\frac{1}{2}}), \\ v &\longmapsto (I+\gamma A)v \end{aligned}$$

is an isometrical bijection when the norm of $H^1_0(\Omega) = \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}})$ is given by

$$\|v\|^2_{\mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}})} = \|v\|^2_{\mathfrak{D}(A^0)} + \gamma \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2_{\mathfrak{D}(A^0)}.$$

Indeed, one has: $\|v\|_{\mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}})} = \|(I+\gamma A)v\|_{\mathfrak{D}(A^{-\frac{1}{2}})} \qquad \forall v \in \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}).$

Taking the duality product between equation(4) and u_t and using advantage of the self-adjointness of the powers of the operator A and using the identity $v = u_t$, for every solution of the system (4)-(5) the total energy $\mathfrak{E}: R^+ \to R^+$ is given in the t by

$$\mathfrak{E}(t) = \frac{1}{2}\left[\|v\|^2 + \gamma\|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 + \beta\|Au\|^2\right] \tag{6}$$

and satisfies

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{E}(t) = -\alpha\|A^{\frac{\theta}{2}}v\|^2 \quad \text{for} \quad 0 \leq \theta \leq 2. \tag{7}$$

Now, if we consider the vector $U(t) = (u, u_t) = (u, v)$, then the system (4)-(5) can be written in an abstract framework as

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathbb{B}U(t), \quad U(0) = U_0, \tag{8}$$

where $U_0 = (u_0, u_1)$, $U = (u, v)$ and the operator $\mathbb{B}$: $D(\mathbb{B}) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ is given by

$$\mathbb{B}U := \Big(v, -(I+\gamma A)^{-1}\{\beta A^2 u + \alpha A^\theta v\}\Big), \tag{9}$$

for $U = (u, v)$. This operator will be defined in a suitable subspace of the phase space

$$\mathbb{X} := \mathfrak{D}(A) \times \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}),$$

where the inner product is defined by

$$\langle U_1, U_2\rangle_{\mathbb{X}} := \langle v_1, v_2\rangle + \gamma\langle A^{\frac{1}{2}}v_1, A^{\frac{1}{2}}v_2\rangle + \beta\langle Au_1, Au_2\rangle,$$

for $U_i = (u_i, v_i)$, $i = 1, 2$. Here, $\langle \cdot\, , \cdot\rangle$ on the right side of this equation denotes the inner product in the space $\mathfrak{D}(A^0)$. With theses considerations, the domain of the operator $\mathbb{B}$ is defined by

$$\mathfrak{D}(\mathbb{B}) := \{U \in \mathbb{X}\colon v \in \mathfrak{D}(A),\ u \in \mathfrak{D}(A^{\frac{3}{2}})\}. \tag{10}$$

To show that the operator $\mathbb{B}$ is the generator of a C_0-semigroup, we invoke a result from Liu-Zheng' [18].

Theorem 1 (see Theorem 1.2.4 in [18]) *Let* $\mathbb{B}$ *be a linear operator with domain* $\mathfrak{D}(\mathbb{B})$ *dense in a Hilbert space* $\mathbb{X}$. *If* $\mathbb{B}$ *is dissipative and* $0 \in \rho(\mathbb{B})$, *the resolvent set of* $\mathbb{B}$, *then* $\mathbb{B}$ *is the generator of a* C_0*-semigroup of contractions on* $\mathbb{X}$.

Proof: Let us see that the operator $\mathbb{B}$ given in (9) satisfies the conditions of this theorem. Clearly, we see that $\mathfrak{D}(\mathbb{B})$ is dense in $\mathbb{X}$. Taking the inner product of $\mathbb{B}U$ with U, we have

$$\text{Re}\langle \mathbb{B}U, U\rangle_{\mathbb{X}} = -\alpha\|A^{\frac{\theta}{2}}v\|^2 \leq 0, \quad \forall\, U \in \mathfrak{D}(\mathbb{B}) \qquad \text{and} \qquad 0 \leq \theta \leq 2, \tag{11}$$

then, the operator $\mathbb{B}$ is dissipative. To complete the conditions of the above theorem, it remains to show that $0 \in \rho(\mathbb{B})$. Therefore we must show that $(0I - \mathbb{B})^{-1}$ exists and is bounded in $\mathbb{X}$. We will first prove that $(0I - \mathbb{B})^{-1}$ exists, then it must be proved that $\mathbb{B}$ is bijective. Here we are going to affirm that $\mathbb{B}$ is surjective, then for all $F = (f^1, f^2)^T \in \mathbb{X}$ the stationary problem $\mathbb{B}U = F$ has a solution for $U = (u, v)^T \in \mathfrak{D}(\mathbb{B})$. From definition of the operator $\mathbb{B}$ in (9), this system can be written as

$$v = f^1 \in \mathfrak{D}(A) \qquad \text{and} \qquad \beta A^2 u = -\alpha A^\theta f^1 - (I+\gamma A)f^2 \quad \in \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}). \tag{12}$$

From these equations, this problem can be placed in a variational formulation: $u \in \mathfrak{D}(A)$ and we write the second equation of (12) in a variational form, using the sesquilinear form b:

$$b\,(u, \eta) = \langle h, \eta\rangle \tag{13}$$

where $h = -\alpha A^{\theta} f^{1} - (I + \gamma A) f^{2} \in \mathfrak{D}(A^{-1})$ and the sesquilinear form b is given by

$$b\,(u, \eta) = \beta\langle A^{2}u, \eta\rangle. \tag{14}$$

as $\mathfrak{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow \mathfrak{D}(A^{0}) \hookrightarrow \mathfrak{D}(A^{-\frac{1}{2}}) \hookrightarrow \mathfrak{D}(A^{-1})$, this sesquilinear form is coercive in the space $\mathfrak{D}(A)$. As $h \in \mathfrak{D}(A^{-1})$ from Lax-Milgram's Lemma the variational form has unique solution $u \in \mathfrak{D}(A)$ and it satisfies (12), such that (13) is verify for $\eta \in \mathfrak{D}(A)$. From (14) and for all $\eta \in \mathfrak{D}(A)$, we have

$$\beta\langle A^{2}u, \eta\rangle = \langle -\alpha A^{\theta} f^{1} - (I + \gamma A) f^{2}t, \eta\rangle, \ \forall \eta \in \mathfrak{D}(A) \tag{15}$$

then

$$\beta A^{2}u = -\alpha A^{\theta} f^{1} - (I + \gamma A) f^{2} \text{ in } \mathfrak{D}(A^{-1}). \tag{16}$$

(16) is solution in the weak sense. From $F = (f^{1}, f^{2})^{T} \in X$ then $(I + \gamma A) f^{2} \in D(A^{-\frac{1}{2}})$ and $0 \leq \theta \leq 2$, we have

$\mathfrak{D}(A^{2}) \hookrightarrow \mathfrak{D}(A^{\theta}) \hookrightarrow \mathfrak{D}(A^{0}) \hookrightarrow \mathfrak{D}(A^{\frac{-1}{2}})$, from (16), we have

$$u = \frac{1}{\beta}\Big[-\alpha A^{\theta-2} f^{1} - (A^{-2} + \gamma A^{-1}) f^{2}\Big] \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}(A^{\frac{3}{2}}). \tag{17}$$

From first equation of (12), we have

$$v = f^{1} \in \mathfrak{D}(A) \tag{18}$$

therefore, $U = (u, v) \in \mathfrak{D}(B)$.

The injectivity of B follows from the uniqueness given by the Lemma of Lax- Milgram's. It remains to show that B^{-1} is a bounded operator. From equations (17) and (18), we get

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathbb{X}}^{2} &= \|f^{1}\|^{2} + \gamma\|A^{\frac{1}{2}} f^{1}\|^{2} + \beta\left\|A\frac{1}{\beta}\Big[-\alpha A^{\theta-2} f^{1} - (A^{-2} + \gamma A^{-1}) f^{2}\Big]\right\|^{2} \\ &\leq C\|Af^{1}\|^{2} + C\|Af^{1}\|^{2} + C\left\|A^{\theta-1} f^{1}\right\|^{2} + C\left\|A^{-1} f^{2}\right\|^{2} + C\left\|A^{0} f^{2}\right\|^{2} \end{aligned} \tag{19}$$

Using continuous embedding $\mathfrak{D}(A) \hookrightarrow \mathfrak{D}(A^{\theta-1}) \hookrightarrow \mathfrak{D}(A^{-1})$, $1 \geq \theta - 1 \geq -1$ and $\frac{1}{2} \geq -1$, $\mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow \mathfrak{D}(A^{-1})$ then

$$\|U\|_{\mathbb{X}}^2 \leq C\left\|Af^1\right\|^2 + C\left\|A^{\frac{1}{2}}f^2\right\|^2 + C\left\|f^2\right\|^2 \tag{20}$$

therefore, of definition of the norm $\|F\|_{X}$, we get

$$\|U\|_{\mathbb{X}}^2 = \|\mathbb{B}^{-1}F\|_{\mathbb{X}}^2 \leq C\|F\|_{\mathbb{X}}^2.$$

Therefore B^{-1} is bounded. So we come to the end of the proof of this theorem.

As a consequence of the previous Theorem 1, we obtain

Theorem 2 *Given* $U_0 \in H$ *there exists a unique weak solution U to the problem* (8) satisfying

$$U \in C([0, +\infty), X).$$

Futhermore, if $U_0 \in \mathfrak{D}(Bk)$, $k \in N$, *then the solution U of* (8) *satisfies*

$$U \in \bigcap_{j=0}^{k} C^{k-j}([0,+\infty), \mathfrak{D}(\mathbb{B}^j)).$$

Theorem 3 (Lions' Interpolation) *Let* $\alpha < \beta < \gamma$. *The there exists a constant* $L = L(\alpha, \beta, \gamma)$ *such that*

$$\|A^\beta u\| \leq L\|A^\alpha u\|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \cdot \|A^\gamma u\|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}$$

for every $u \in \mathfrak{D}(A^\gamma)$

Proof: See Theorem 5.34 [6]

Theorem 4 (Hilla-Yosida) *A linear (unbounded) operator* B *is the infinitesimal generator of a* C_0 – *semigroup of contractions* $S(t)$, $t \geq 0$, *if and only if*

I. B *is closed and* $\mathfrak{D}(B) = X$,

II. the resolvent set $\rho(B)$ *of* B *contains* R^+ *and for every* $\lambda > 0$,

$$\|(\lambda I - \mathbb{B})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Proof: See [8].

3 I STABILITY AND REGULARITY

3.1 Spectral Analysis of the fractional operator A^θ for $\theta \in [0, 2]$

Since A is a positive self-adjoint operator with compact resolvent, its spectrum is constituted by positive eigenvalues φ_n, $n \in N$, with $\varphi_n \to \infty$. Let us denote by (e_n) the corresponding eigenvectors, that is

$$Ae_n = \varphi_n e_n,\ n \in \mathrm{N} \text{ and } A^r e_n = \varphi_n^r e_n,\ r \in \mathrm{R}.$$

We consider $F_n = (0, -\tilde{e}_n) \in X$ where $\tilde{e}_n = \frac{e_n}{\|A^{\frac{1}{2}} e_n\|}$, then the solution $U = (u, v)$ of the system $(i\lambda I - \mathrm{B})U = F_n$ satisfies the following conditions:

$$v = i\lambda u \text{ and } i\lambda v + (I + \gamma A)^{-1}\{\beta A^2 u + \alpha A^\theta v\} = -\tilde{e}_n.$$

By substituting the first identity and applying the operator $(I + \gamma \mathrm{A})$ in the second equation, we obtain

$$\lambda^2(I + \gamma A)u - \beta A^2 u - i\alpha\lambda \mathrm{A}^\theta u = (I + \gamma A)\tilde{e}_n.$$

Now, we are going to look for by solutions of the form $u = \eta\ \tilde{e}_n$ for some complex number η. Therefore, the coefficient η must satisfy the equation

$$\lambda^2(I+\gamma A)\left(\eta\frac{e_n}{\|A^{\frac{1}{2}}e_n\|}\right) - \beta A^2\left(\eta\frac{e_n}{\|A^{\frac{1}{2}}e_n\|}\right) - i\alpha\lambda A^\theta\left(\eta\frac{e_n}{\|A^{\frac{1}{2}}e_n\|}\right) = (I+\gamma A)\left(\frac{e_n}{\|A^{\frac{1}{2}}e_n\|}\right),$$

equivalent

$$\left[\frac{1}{\|A^{\frac{1}{2}}e_n\|}\right]\left[\lambda^2(I+\gamma A)(\eta e_n) - \beta A^2(\eta e_n) - i\alpha\lambda A^\theta(\eta e_n)\right] = \left[\frac{1}{\|A^{\frac{1}{2}}e_n\|}\right](I+\gamma A)(e_n).$$

Then

$$\lambda^2(1+\gamma\phi_n)\eta - \beta\phi_n^2\eta - i\alpha\lambda\phi_n^\theta\eta = (1+\gamma\phi_n). \tag{21}$$

Solving this equation we have

$$\eta = \frac{1+\gamma\phi_n}{\lambda^2(1+\gamma\phi_n) - \beta\phi_n^2 - i\alpha\lambda\phi_n^\theta}. \tag{22}$$

In this point, taking

$$\lambda^2 = \lambda_n^2 := \frac{\beta\phi_n^2}{1+\gamma\phi_n} \tag{23}$$

using (23) in (22), we obtain

$$\eta = \eta_n = i\frac{1+\gamma\phi_n}{\alpha\lambda_n\phi_n^\theta}. \tag{24}$$

If we introduce the notation $x_n \approx y_n$ meaning $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n|}{|y_n|}$ is a positive real number, then from (23) and (24) we can assert that $|\lambda_n| \approx |\varphi_n|^{\frac{1}{2}}$ and $|\eta_n| \approx |\lambda_n|^{1-2\theta}$.

Therefore, if $U_n = (u_n, v_n)$ is the solution of the system $(i\lambda_n - A)U_n = F_n$, we obtain

$$\|A^{\frac{1}{2}}v_n\| = \|\lambda_n A^{\frac{1}{2}}u_n\| = |\lambda_n||\eta_n|\|A^{\frac{1}{2}}\tilde{e}_n\| \geq K|\lambda_n|^{2-2\theta},$$

for some $K > 0$ and n large enough. From this estimative, we conclude that

$$\|U_n\|_{\mathbb{X}} \geq \gamma\|A^{\frac{1}{2}}v_n\| \geq \gamma K|\lambda_n|^{2-2\theta} \qquad \text{for} \qquad 0 \leq \theta \leq 2. \tag{25}$$

3.2 Exponential decay of the semigroup $S(t) = e^{t\mathbb{B}}$ for $\theta \in [1, 2]$

In this section, we will study the asymptotic behavior of the semigroup of the system (4)-(5). We will use the following spectral characterization of exponential stability of semigroups due to Gearhart[7](Theorem 1.3.2 book of Liu-Zheng [18]).

Theorem 5 (see [18]) *Let* $S(t) = e^{t\mathbb{B}}$ *be a* C_0*-semigroup of contractions on a Hilbert space* X. *Then* $S(t)$ *is exponentially stable if and only if*

$$\rho(\mathbb{B}) \supseteq \{i\lambda/\lambda \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \tag{26}$$

and

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|(i\lambda I - \mathbb{B})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} < \infty \tag{27}$$

holds.

Remark 6 *Note that to show the condition* (27) *it is enough to show that: Let* $\delta > 0$. *There exists a constant* $C_\delta > 0$ *such that the solutions of the system* (4)- (5) *for* $|\lambda| > \delta$, *satisfy the inequality*

$$\|U\|_X \leq C_\delta \|F\|_X \text{ for } 1 \leq \theta \leq 2. \tag{28}$$

In view this Theorem 5, we will try to obtain some estimates for the solution $U = (u, v) \in \mathfrak{D}(\mathbb{B})$ of the system

$$(i\lambda I - \mathbb{B})U = F \tag{29}$$

where $F = (f, g) \in$ X. This system, written in components, reads

$$i\lambda u - v = f \text{ in } \mathfrak{D}(A) \tag{30}$$

$$i\lambda(I + \gamma A)v + \beta A^2 u + \alpha A^\theta v = (I + \gamma A)g \text{ in } \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}) \tag{31}$$

From (11), we have the first estimate

$$\alpha\|A^{\frac{\theta}{2}}v\|^2 = \text{Re}\langle(i\lambda I - \mathcal{B})U, U\rangle_{\mathbb{X}} = \text{Re}\langle F, U\rangle_{\mathbb{X}} \leq \|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}}. \qquad (32)$$

Next, we show some lemmas that will lead us to the proof of the main theorem of this section.

Lemma 7 *Let* $\delta > 0$. *There exists* $C_\delta > 0$ *such that the solutions of the system* (4)-(5) *for* $|\lambda| > \delta$, *satisfy*

$$\begin{array}{rrcllr} (i) & \|Au\|^2 & \leq & C_\delta\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}} & \text{for} \quad 1 \leq \theta \leq 2. & (33)\\ (ii) & \|v\|^2 + \gamma\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 & \leq & C_\delta\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}} & \text{for} \quad 1 \leq \theta \leq 2. & (34) \end{array}$$

Proof: (*i*) Taking the duality product between equation (31) and u, taking advan- tage of the self-adjointness of the powers of the operator A, we obtain

$$\begin{aligned} \beta\|Au\|^2 &= \langle (I+\gamma A)v, i\lambda u\rangle - \alpha\langle A^\theta v, u\rangle + \langle (I+\gamma A)g, u\rangle \\ &= \|v\|^2 + \gamma\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \langle v, f\rangle + \gamma\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}f\rangle - i\alpha\lambda\|A^{\frac{\theta}{2}}u\|^2 \\ &\quad -\alpha\langle Af, A^{\theta-1}u\rangle + \langle g, u\rangle + \gamma\langle A^{\frac{1}{2}}g, A^{\frac{1}{2}}u\rangle. \qquad (35) \end{aligned}$$

Taking real part, applying Cauchy-Schwarz inequality and norms $\|F\|_{\mathbb{X}}$ and $\|U\|_{\mathbb{X}}$, and estimative (32), finish proof of item (*i*) this lemma.

Proof: (*ii*) It is enough to observe that, if $1 \leq \theta \leq 2$ then $\frac{1}{2} \leq \frac{\theta}{2}$. Applying continuous immersions and estimative (32), we finish the proof of item (*ii*) this lemma. Q

Theorem 8 *The semigroup* $S(t) = e^{t\mathcal{B}}$ *is exponentially stable when the parameter* θ *assumes values in the interval* $[1, 2]$.

Proof: Adding the estimates (33) and (34) of Lemma 7, we have

$$\|U\|^2_{\mathbb{X}} \leq C_\delta\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}} \text{ for } 1 \leq \theta \leq 2. \qquad (36)$$

Therefore, the condition (27) for $\theta \in [1, 2]$ is verified. Next, we show the condition (26) of Theorem 5.

Lemma 9 *Let* $\rho(\mathcal{B})$ *be the resolvent set of operator* $\mathcal{B}$. *Then*

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{B}). \qquad (37)$$

Proof: Since $\mathcal{B}$ is the infinitesimal generator of a C_0– semigroup of contractions $S(t)$, $t \geq 0$, from Theorem 4, $\mathcal{B}$ is a closed operator, and as $\mathfrak{D}(\mathcal{B})$ has compact embedding into the energy space $\mathbb{X}$, the spectrum $\sigma(\mathcal{B})$ contains only eigenvalues. Therefore, to prove $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{B})$ by using an argument by contradiction, so we suppose that $i\mathbb{R} \not\subset \rho(\mathcal{B})$. As $0 \in \rho(\mathcal{B})$ and $\rho(\mathcal{B})$ is open, we consider the highest positive number λ_0 such that the $]-i\lambda_0, i\lambda_0[\subset \rho(\mathcal{B})$ then $i\lambda_0$ or $-i\lambda_0$ is an element of the spectrum $\sigma(\mathcal{B})$. We Suppose $i\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{B})$ (if $-i\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{B})$ the proceeding is similar) such that the non-trivial eigenfunction is $U = (u, v) \in \mathfrak{D}(\mathcal{B})$, then $\mathbb{B}U = i\lambda_0 U$, on the other hand, from the stationary equation (29) for $i\lambda_0$ and $F = 0$, from estimates (36) with $F = 0$, we get $U = 0$, which is a contradiction, since U is the eigenfunction associated with the imaginary eigenvalue $i\lambda_0$. Hence, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathbb{B})$. This completes the proof of this lemma.

Therefore the semigroup $S(t) = e^{t\mathbb{B}}$ is exponentially stable for $\theta \in [1, 2]$, thus we finish the proof of this theorem.

3.3 Regularity

The study of the regularity of the solutions of the model of this research is centralized to study the analyticity and the existence of Gevrey classes; in the first subsection, we will demonstrate that the semigroup $S(t)$ is analytic when the parameter θ assumes values in the interval $[\frac{3}{2}, 2]$ we also show the lack of analyticity when θ $[0, \frac{3}{2})$, in the second part we show that when the parameter θ assumes values in the range $(1, \frac{3}{2})$, $S(t)$ supports Gevrey Sharp classes and when θ $[0, 1]$, $S(t)$ does not support Gevrey classes. Here we would like to point out that the semigroup being analytic is more regular than only admitting Gevrey classes. Analyticity or Gevrey Classes imply differentiability of the semigroup.

3.4 Study of Analyticity and Lack Analyticity of the semi- group $S(t) = e^{t\mathbb{B}}$

In this subsection, we will show that the semigroup $S(t)$, is analytic for the parameter $\frac{3}{2} \leq \varphi \leq 2$ and is not analytic when the parameter assumes values in the interval $[0, \frac{3}{2})$.

The following theorem characterizes the analyticity of the semigroups $S(t)$.

Theorem 10 (see [18]) *Let $S(t) = e^{t\mathbb{B}}$ be C_0-semigroup of contractions on a Hilbert space* $\mathbb{X}$. *Suppose that*

$$\rho(\mathbb{B}) \supseteq \{i\lambda/\lambda \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}. \tag{38}$$

Then $S(t)$ is analytic if and only if

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} \|\lambda(i\lambda I - \mathbb{B})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} < \infty, \tag{39}$$

holds.

3.4.1 Analyticity for $\theta \in [\frac{3}{2}, 2]$

Theorem 11 *The semigroup $S(t) = e^{t\mathbb{B}}$ is analytic for $\frac{3}{2} \leq \theta \leq 2$.*

Proof: From Lemma(9), (38) is verified. Therefore, it remains to prove (39), for that it is enough to show that, let $\delta > 0$. There exists a constant $C_\delta > 0$ such that the solutions of the system (4)-(5) for $|\lambda| > \delta$, satisfy the inequality

$$|\lambda|\frac{\|U\|_{\mathbb{X}}}{\|F\|_{\mathbb{X}}}\leq C_\delta \quad\Longleftrightarrow\quad |\lambda|\|U\|^2_{\mathbb{X}}\leq C_\delta\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}}<\infty, \quad \text{for}\quad \frac{3}{2}\leq\theta\leq 2. \qquad (40)$$

Lemma 12 *Let* $\delta > 0$*. There exists* $C_\delta > 0$ *such that the solutions of the system* (4)- (5) *for* $|\lambda| > \delta$*, satisfy*

$$\begin{aligned} (i)\quad |\lambda|\|Au\|^2 &\leq C_\delta\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}} \quad \text{for}\quad \frac{3}{2}\leq\theta\leq 2, \qquad (41)\\ (ii)\quad |\lambda|\left[\|v\|^2+\gamma\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2\right] &\leq C_\delta\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}} \quad \text{for}\quad \frac{3}{2}\leq\theta\leq 2. \qquad (42)\end{aligned}$$

Proof: (*i*) Using equation (30) in (31), we have

$$i\lambda(I+\gamma A)v+\beta A^2u+i\lambda\alpha A^\theta u-\alpha A^\theta f=(I+\gamma A)g. \qquad (43)$$

Applying the duality product the equation (43) with $A^{2-\theta}u$ and taking into account that the fractional powers of the operator A are self-adjoint and using (30), we obtain

$$\begin{aligned} i\lambda\alpha\|Au\|^2 &= \langle (I+\gamma A)v, A^{2-\theta}(i\lambda u)\rangle-\beta\|A^{\frac{4-\theta}{2}}u\|^2+\alpha\langle Af,Au\rangle+\langle (I+\gamma A)g, A^{2-\theta}u\rangle\\ &= \|A^{\frac{2-\theta}{2}}v\|^2+\gamma\|A^{\frac{3-\theta}{2}}v\|^2+\langle A^{1-\theta}v,Af\rangle+\gamma\langle A^{2-\theta}v,Af\rangle-\beta\|A^{\frac{4-\theta}{2}}u\|^2\\ &\quad +\alpha\langle Af,Au\rangle+\langle A^{\frac{1}{2}}g,A^{\frac{3}{2}-\theta}u\rangle+\gamma\langle A^{\frac{1}{2}}g,A^{\frac{5}{2}-\theta}u\rangle. \qquad (44)\end{aligned}$$

As for $\frac{3}{2}\leq\theta\leq 2$ we have $1-\theta<2-\theta\leq\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{2}-\theta<\frac{5}{2}-\theta\leq 1$, taking imaginary part in (44) and applying Cauchy-Schwarz inequality and continuous immersion, we finish the proof of item (*i*) this lemma.

Proof: (*ii*) Now, applying the duality product the equation (31) with v and taking into account that the fractional powers of the operator A are self-adjoint and using (30), we obtain

$$\begin{aligned} i\lambda\left[\|v\|^2+\gamma\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2\right] &= -\beta\langle A^2u, i\lambda u-f\rangle-\alpha\|A^{\frac{\theta}{2}}v\|^2+\langle (I+\gamma A)g,v\rangle\\ &= i\beta\lambda\|Au\|^2+\beta\langle Au,Af\rangle-\alpha\|A^{\frac{\theta}{2}}v\|^2\\ &\quad +\langle A^{\frac{1}{2}}g,A^{-\frac{1}{2}}v\rangle+\gamma\langle A^{\frac{1}{2}}g,A^{\frac{1}{2}}v\rangle, \qquad (45)\end{aligned}$$

finally, taking imaginary part, now applying Cauchy-Schwarz and item (*i*) this lemma, we finish the proof of item (*ii*) this lemma.

Finally, from estimates of Lemma 12, finish to proof of theorem.

3.4.2 Lack Analyticity for $\theta\in[0, 3)$

Multiplying by $|\lambda_n|$ both sides gives inequality (25), we have

$$|\lambda_n|\|U_n\|_{\mathbb{X}}\geq\gamma\|A^{\frac{1}{2}}v_n\|\geq\gamma K|\lambda_n|^{3-2\theta} \quad \text{for } 0\leq\theta\leq 2.$$

As $3-2\theta>0 \Longleftrightarrow \theta<\frac{3}{2}$, then if $\theta\in[0, \frac{3}{2})$, we have $|\lambda_n|\|U_n\|_{\mathbb{X}}\to\infty$ when $|\lambda_n|\to\infty$. Therefore $S(t)$ is not analytic when $\theta\in[0, \frac{3}{2})$.

3.5 Gevrey Sharp-class and Lack of Gevrey Class

In this subsection, we will show that the semigroup $S(t)$, has Gevrey sharp-classes depending on the parameter θ, for parameter values in the range $(1, \frac{3}{2})$ and has no Gevrey classes when the parameter θ assumes values in the range $[0, 1]$.

Before exposing our results, it is useful to recall the next definition and result presented in [3, 10] (adapted from [21], Theorem 4, p. 153]).

Definition 13 *Let $t_0 \geq 0$ be a real number. A strongly continuous semigroup $S(t)$, defined on a Banach space $\mathbb{X}$, is of Gevrey class $s > 1$ for $t > t_0$, if $S(t)$ is infinitely differentiable for $t > t_0$, and for every compact set $K \subset (t_0, \infty)$ and each $\mu > 0$, there exists a constant $C = C(\mu, K) > 0$ such that*

$$||S^{(n)}(t)||_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} \leq C\mu^n(n!)^s, \text{ for all t K, n = 0, 1, 2...} \tag{46}$$

Theorem 14 ([21]) *Let $S(t)$ be a strongly continuous and bounded semigroup on a Hilbert space $\mathbb{X}$. Suppose that the infinitesimal generator $\mathbb{B}$ of the semigroup $S(t)$ satisfies the following estimate, for some $0 < \Psi < 1$:*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \sup |\lambda|^{\Psi} ||(i\lambda I - \mathbb{B})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} < \infty. \tag{47}$$

Then $S(t)$ is of Gevrey class s for $t > 0$, for every $s > \frac{1}{\Psi}$.

3.5.1 Gevrey Sharp-Class for $\theta \in (1, \frac{3}{2})$

Lemma 15 *Let $\delta > 0$. There exists $C_\delta > 0$ such that the solutions of the system (4)-(5) for $|\lambda| > \delta$, satisfy*

$$\begin{aligned}
(i) \quad \|A^{\frac{1+\theta}{2}}u\|^2 &\leq C_\delta\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}} \quad \text{for} \quad 1 \leq \theta \leq \frac{3}{2}, &(48)\\
(ii) \quad |\lambda|\|A^{\frac{2\theta-1}{4}}v\|^2 &\leq C_\delta\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}} \quad \text{for} \quad 1 \leq \theta \leq \frac{3}{2}, &(49)\\
(iii) \quad |\lambda|^{2\theta-2}\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 &\leq C_\delta\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}} \quad \text{for} \quad 1 \leq \theta \leq \frac{3}{2}. &(50)
\end{aligned}$$

Proof: (i) Applying the duality product the equation (31) with $A^{\theta-1}u$ and taking into account that the fractional powers of the operator A are self-adjoint and using (30), we obtain

$$\begin{aligned}
\beta\|A^{\frac{1+\theta}{2}}u\|^2 &= \langle (I+\gamma A)v, A^{\theta-1}i\lambda u\rangle - \alpha\langle A^\theta(i\lambda u - f), A^{\theta-1}u\rangle + \langle (I+\gamma A)g, A^{\theta-1}u\rangle\\
&= \|A^{\frac{\theta-1}{2}}v\|^2 + \gamma\|A^{\frac{\theta}{2}}v\|^2 - i\lambda\alpha\|A^{\frac{2\theta-1}{2}}u\|^2 + \alpha\langle Af, A^{2\theta-2}u\rangle\\
&\quad + \langle A^{\frac{1}{2}}g, A^{\theta-\frac{3}{2}}u\rangle + \gamma\langle A^{\frac{1}{2}}g, A^{\theta-\frac{1}{2}}u\rangle + \langle v, A^{\theta-1}f\rangle + \gamma\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\theta-\frac{1}{2}}f\rangle. \quad (51)
\end{aligned}$$

Taking real part and for $1 \leq \theta \leq \frac{3}{2}$ we have $\frac{\theta-1}{2} < \frac{\theta}{2}$, $2\theta - 2 \leq 1$, applying continuous embedding, we obtain

$$\|A^{\frac{1+\theta}{2}}u\|^2 \leq C_\delta\{\|A^{\frac{\theta}{2}}v\|^2 + \|Af\|\|Au\| + \|A^{\frac{1}{2}}g\|\|Au\| + \|A^{\frac{1}{2}}v\|\|A^{\theta-\frac{1}{2}}f\|\}.$$

From (32) and items *i* and (*ii*) of Lemma 7, we finish the proof of item (*i*) this lemma.

Proof: (*ii*) Applying the duality product the equation (31) with $A^{\theta-\frac{3}{2}}v$ and taking into account that the fractional powers of the operator A are self-adjoint and using (30), we obtain

$$i\lambda\left[\|A^{\frac{2\theta-3}{4}}v\|^2+\gamma\|A^{\frac{2\theta-1}{4}}v\|^2\right] = -\beta\langle A^{\frac{1+\theta}{2}}u, A^{\frac{\theta}{2}}v\rangle - \alpha\|A^{\frac{4\theta-3}{4}}v\|^2$$
$$+\langle A^{\frac{1}{2}}g, A^{\theta-2}v\rangle + \gamma\langle A^{\frac{1}{2}}g, A^{\theta-1}v\rangle.$$

Taking imaginary part and applying Cauchy-Schwarz, Young inequalities and as for $1\leq \theta \leq \frac{3}{2}$ we have $\theta - 1 \leq \frac{1}{2}$ applying continuous immersions, we obtain

$$|\lambda|\left[\|A^{\frac{2\theta-3}{4}}v\|^2+\gamma\|A^{\frac{2\theta-1}{4}}v\|^2\right] \leq C_\delta\{\|A^{\frac{1+\theta}{2}}u\|^2$$
$$+\|A^{\frac{\theta}{2}}v\|^2+\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}}\} \quad \text{for} \quad 1\leq\theta\leq\frac{3}{2}. \quad (52)$$

Finally of estimative (32) and item (*i*) this lemma, we finish the proof of item (ii) this lemma.

Proof: (*iii*) As for $1 \leq \theta \leq \frac{3}{2}$, we have $\frac{1}{2} \in [\frac{2\theta-1}{4}, \frac{\theta}{2}]$. We are going to use an interpolation inequality Theorem 3. Since

$$\frac{1}{2}=\phi\left(\frac{2\theta-1}{4}\right)+(1-\phi)\frac{\theta}{2}, \quad \text{for } \phi = 2\theta - 2.$$

using inequalities (32) and (48) we get that

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 &\leq C\|A^{\frac{2\theta-1}{4}}v\|^{2\phi}\|A^{\frac{\theta}{2}}v\|^{2(1-\phi)}\\ &\leq C_\delta|\lambda|^{2-2\theta}\{\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}}\}^{2\theta-2}\{\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}}\}^{3-2\theta}.\end{aligned}$$

Therefore, we conclude the proof this item (*iii*).

Lemma 16 *Let* $\delta > 0$. *There exists* $C_\delta > 0$ *such that the solutions of the system* (1)-(3) *for* $|\lambda| > \delta$, *satisfy*

$$\begin{aligned}(i) \quad |\lambda|\|A^{\frac{2\theta+1}{4}}u\| &\leq C_\delta\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}} \quad \text{for} \quad 1\leq\theta\leq\frac{3}{2} \qquad (53)\\ (ii) \quad |\lambda|^{2\theta-2}\|Au\|^2 &\leq C_\delta\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}} \quad \text{for} \quad 1\leq\theta\leq\frac{3}{2}. \qquad (54)\end{aligned}$$

Proof: (*i*) Applying the duality product to the second equation of (30) with $A^{\frac{2\theta+1}{2}}$ and taking into account that the fractional powers of the operator A are self-adjoint and using (31), we obtain

$$\begin{aligned}i\lambda\|A^{\frac{2\theta+1}{4}}u\|^2 &= \langle A^{\frac{2\theta-3}{2}}v, A^2u\rangle + \langle Af, A^{\theta-\frac{1}{2}}u\rangle\\ &= \frac{1}{\beta}\langle A^{\frac{2\theta-3}{2}}v, -i\lambda(I+\gamma A)v-\alpha A^\theta v+(I+\gamma A)g\rangle+\langle Af, A^{\frac{2\theta-1}{2}}u\rangle\\ &= \frac{i\lambda}{\beta}\|A^{\frac{2\theta-3}{4}}v\|^2+\frac{i\gamma\lambda}{\beta}\|A^{\frac{2\theta-1}{4}}v\|^2-\frac{\alpha}{\beta}\|A^{\frac{4\theta-3}{4}}v\|^2+\frac{1}{\beta}\langle A^{\theta-2}v, A^{\frac{1}{2}}g\rangle\\ &\quad+\frac{\gamma}{\beta}\langle A^{\theta-1}v, A^{\frac{1}{2}}g\rangle+\langle Af, A^{\frac{2\theta-1}{2}}u\rangle. \qquad (55)\end{aligned}$$

Taking imaginary part and for $1 \leq \theta \leq \frac{3}{4}$ we have $\frac{2\theta-3}{4} < \frac{2\theta-1}{4} \leq \frac{1}{2}$, $\theta - 1 \leq \frac{1}{2}$ and $\frac{2\theta-1}{2}$

≤ 1 applying continuous embedding and item (*ii*) of Lemma 15, finish the proof of item (*i*) this lemma.

Proof (*ii*) As for $1 \leq \theta \leq \frac{3}{2}$, we have $1 \in [\frac{2\theta+1}{4}, \frac{1+\theta}{2}]$. We are going to use an interpolation inequality Theorem 3. Since

$$1 = \phi\left(\frac{2\theta+1}{4}\right) + (1-\phi)\left(\frac{1+\theta}{2}\right), \quad \text{for} \quad \phi = 2\theta - 2,$$

using inequalities (53) and (54) we get that

$$\begin{aligned} \|Au\|^2 &\leq C\|A^{\frac{2\theta+1}{4}}v\|^{2\phi}\|A^{\frac{1+\theta}{2}}v\|^{2(1-\phi)} \\ &\leq C_\delta|\lambda|^{2-2\theta}\{\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}}\}^{2\theta-2}\{\|F\|_{\mathbb{X}}\|U\|_{\mathbb{X}}\}^{3-2\theta}. \end{aligned}$$

Therefore, we conclude the proof this item (*ii*).

Our main result in this subsection is as follows:

Theorem 17 *Let* $S(t) = e^{t\mathbb{B}}$ *strongly continuos-semigroups of contractions on the Hilbert space* H*, the semigroups* $S(t)$ *is of Grevrey class s, for every* $s > \frac{1}{2\theta-2}$ *for* $\theta \in (1, \frac{3}{2})$*, such that we have the resolvent estimative:*

$$\limsup_{|\lambda|\to\infty} |\lambda|^{2\theta-2}\|(i\lambda I - \mathbb{B})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} < \infty, \qquad \text{for} \quad 1 < \theta < \frac{3}{2}. \tag{56}$$

Proof: Note that the estimate

$$|\lambda|^{2-2\theta}\|(i\lambda I - \mathbb{B})^{-1}F\|_{\mathbb{X}} = |\lambda|^{2-2\theta}\|U\|_{\mathbb{X}} \leq C_\delta\|F\|_{\mathbb{X}} \quad \text{for} \quad 1 < \theta < \frac{3}{2} \tag{57}$$

implies the inequality (56). Adding the estimates (50) of Lemma 15 and (54) of Lemma 16 and as $|\lambda|^{2\theta-2}\|v\|^2 \leq C|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2$, finish proof this theorem.

[Gevrey Sharp-class] The Gevrey class determined above is Sharp, meaning by "Gevrey Sharp", the statement of the following theorem:

Theorem 18 *The Gevrey class determined by the function* $\Psi(\theta) = 2\theta - 2$ *for* $\theta \in (1, \frac{3}{2})$ is sharp, in the sense:

If $\Phi = \Psi + \delta_1 = 2\theta = 2 + \delta_1$ for all $\delta_1 > 0$

such that $0 < \Phi < 1$ and $1 < \theta < \frac{3}{2}$, (58)

then

$$s > \frac{1}{\Phi} \text{ for } 1 < \theta < \frac{3}{2},$$

is not a Gevrey class of the semigroup $S(t) = e^{t\mathbb{B}}$.

Proof: We will use the results (56) of Theorem 17 and the estimative (25), for $\delta_1 > 0$, we have

$$|\lambda_n|^{\Phi} \|U_n\|_X = |\lambda_n|^{2\theta-2+\delta_1} \|U_n\|_H \geq K|\lambda_n|^{\delta_1} \to \infty, \text{ when } |\lambda_n| \to \infty$$

Therefore Φ not verify the conditions (56) of the Theorem 17 concerning class Gevrey. Then the Gevrey classe $s > \frac{1}{2\theta-2}$ for $\theta \in (1, \frac{3}{2})$ the semigroup $S(t)$ is Sharp.

3.5.2 Lack Gevrey class for $\theta \in [0, 1]$

Finally, if there is a Gevrey class for $S(t)$ when $\theta \in [0, 1]$, there must exist a $\Phi \in (0, 1)$ such that the identity

$$\lim_{|\lambda_n|\to\infty} \sup |\lambda_n|^{\Phi} ||(i\lambda I - \mathbb{B})^{-1}||_{\mathcal{L}(\mathbb{X})} < \infty. \tag{59}$$

is verified. Although, multiplying both sides of the inequality (25) by $|\lambda_n|^{\Phi}$ for $\Phi \in (0, 1)$ and considering $\theta \in [0, 1]$, we have

$$|\lambda_n|^{\Phi} \|U_n\|_H \geq K|\lambda|^{2-2\theta+\Phi}.$$

Therefore, to verify (59) we must have $2 - 2\theta + \Phi \leq 0 \Longleftrightarrow \Phi \leq 0$, this is absurd, because to have Gevrey classes $\Phi \in (0, 1)$. Consequently the semigroup $S(t)$ does not admit a Gevrey class for $\theta \in [0, 1]$. We emphasize that this was already expected from the results of [2].

REFERENCES

K. Ammari, F. Shel and L. Tebou, Regularity of the semigroups associated with some damped coupled elastic systems II: A nondegenerate fractional damping case, Mathematical Methods in the Applied Sciences, (2022).

J.C. V. Bravo, H. P. Oquendo and J.E.M. Rivera, Optimal Decay for Kirchhoff Plates with Intermediate Damping, Tema: Tendˆencias em Matem´atica Aplicada e Computacional,21 N.2, (2020), 261-269.

S. Chen and R. Triggiani, Gevrey Class Semigroups Arising From Elastic Sys- tems With Gentle Dissipation: The Case $0 < \alpha <^{1}$, Proceedings of the Amer- ican Mathematical Society, Volume 110, Number 2, Outober (1990), 401-415.

M. Conti, L. Liverani, and V. Pata, Thermoelasticity with Antidissipation, Discrete and Continuous Dynamical Systems,- Series S, 15-8 (2022) 2173-2188.

F. Dell'Oro, J. E. M. Rivera and V. Pata, Stability properties of an abstract system with applications to linear thermoelastic plates, Journal of Evolution Equations, Vol 13 N 4 (2013), 777-794.

K. J. Engel & R. Nagel, One-parameter semigroups for linear evolution equa- tions, Springer (2000).

Gearhart. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 236 (1978), 385-394.

A. Pazy. Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer, New York, (1983).

H.P. Oquendo and F.M.S. Su´arez, Exact decay rates for coupled plates with partial fractional damping. Zeitschrift fu¨r angewandte Mathematik und Physik- ZAMP(online)V1, (2019), 70–88.

V. Keyantuo, L. Tebou and M. Warma, A Gevrey Class Semigroup for a Thermoelastic Plate Model with a Fractional Laplacian: Berween the Euler- Bernoulli and Kirchhoff Models. Discrete and Continuous Dynamical System, Vol 40. Number 5, May (2020), 2875-2889.

Z. Kuang, Z. Liu, and H. D. F. Sare, Regularity analysis for an abstract ther- moelastic system with inertial term, ESAIM: Control, Optimisation, and Cal- culus of Variations, S24, 27 (2021).

Z. Kuang, Z. Liu, and L. Tebou, Optimal semigroup regularity for velocity cou- pled elastic systems: A degenerate fractional damping case. ESAIM: Control, Optimisation, and Calculus of Variations 28, 46 (2022).

V. Komornik. Exact controllability and stabilization. The multiplier method. RAM: Research in Applied Mathematics. Masson, Paris; John Wiley & Sons, (1994).

J. Lagnese. Boundary stabilization of thin plates. SIAM Studies in Applied Mathematics 10. Philadelphia, PA, (1989).

I. Lasiecka and R. Triggiani. Exact Controllability and Uniform Stabilization of Kirchoff Plates with Boundary Control Only on Δw_{Σ} and Homogeneous Boundary Displacement. Journal of Differential Equations 93, (1991), 62-101.

I. Lasiecka and R. Triggiani. Analyticity of thermo-elastic semigroups with free boundary conditions. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 27 (1998), 457- 482.

Z. Liu and M. Renardy. A note on the equations of the thermoelastic plate, Appl. Math. Lett., 8, (1995), 1-6.

Z. Liu and S. Zheng, Semigroups associated with dissipative systems, Chapman & Hall CRC Research Notes in Mathematics, Boca Raton, FL, 398 (1999).

H. D. F. Sare, Z. Liu, and R. Racke, Stability of abstract thermoelastic systems with inertial terms, Journal of Differential Equations, Volume 267, Issue 12, 5 December (2019), 7085–7134.

B.T.S. Sozzo, J. E. M. Rivera, The Gevrey class of the Euler-Bernoulli beam model, Journal of Mathematical Analysis and Applications,505 (2022).

S. W. Taylor, Gevrey Regularity of Solutions of Evolution Equations and Boundary Controllability, Thesis (Ph.D.) The University of Minnesota, (1989), 182 pp.

L. Tebou, Uniform analyticity and exponential decay of the semigroup associ- ated with a thermoelastic plate equation with perturbed boundary conditions, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 351 (2013), 539-544.

L. Tebou, Regularity, and Stability for a plate model involving fractional rota- tional forces and damping, Zeitschrift fu¨r Angewandte Mathematik and Physik ZAMP, 72:158 (2021).

CAPÍTULO 3

EL ESPACIO DISTRIBUCIONAL PERIÓDICO L^2 ([– π, π]) COMO COMPLETAMIENTO DEL ESPACIO P

Data de aceite: 02/08/2023

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

RESUMEN: En este trabajo estudiamos el espacio distribucional periódico $L^2([-\pi, \pi])$ como completamiento del espacio *P* de funciones infinitamente diferenciables y periódicas con periodo 2π. Probamos importantes resultados y su conexión con $\ell^2(Z)$, mediante la transformada de Fourier. Tratamos inmersiones continuas y densas de algunos subespacios de P'.
Finalmente, damos algunos comentarios y aplicaciones.
PALABRAS CLAVE: Transformada de Fourier, espacio de Hilbert, espacio distribucional periódico, inmersiones continuas, existencia de solución.

THE $L^2([-\pi, \pi])$ PERIODIC DISTRIBUTIONAL SPACE AS COMPLETEMENT FROM *P* SPACE

ABSTRACT: In this work we study the $L^2([-\pi, \pi])$ periodic distributional space as completement from infinitely differentiable and periodic functions *P* space with period 2π. We prove important results and its connection with $\ell^2(Z)$, through the Fourier transform. We treat continuous and dense immersions of some subspaces of P'.
Finally, we give some comments and applications.
KEYWORDS: Fourier transform, Hilbert space, periodic distributional space, continuous immersions, existence of solution.

1 I INTRODUCCIÓN

En este artículo estudiaremos al espacio distribucional periódico $L^2([-\pi, \pi])$, como completamiento del espacio *P* de las funciones infinitamente diferenciables y periódicas con periodo 2π. Probaremos que este espacio infinito dimensional es un es- pacio de Hilbert. Este espacio es importante pues al ser de Hilbert permitirá generar una familia de espacios infinito dimensionales de Hilbert, conocidos como los espacios de Sobolev periódicos: $\left\{H^s_{per}\right\}_{s\in\mathbb{R}}$. Para visualizar esto citamos Iorio [1] y Santiago [8]. Estos espacios son útiles en el análisis de existencia de solución de ecuaciones diferenciales, citamos [1], [2], [3], [4], [5], [6] y [9].

Probaremos en detalle que $L^2([-\pi, \pi])$ está completamente caracterizado con $l^2(\mathbb{Z})$ v´ıa la Teor´ıa de Fourier y también se obtendr´a inmersiones estrictas, continuas y densas de algunos subespacios de P^j.

Como referencia para este estudio citamos a Iorio [1].

Nuestro artículo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, indicamos la metodología usada y citamos las referencias usadas. En la sección 3, colocamos los resultados obtenidos de nuestro estudio. Esta sección la dividimos en cinco subsecciones. Así, en la subsección 3.1 probamos que P es normado con $\| \cdot \|_2$ pero no completo. En la subsección 3.2, estudiamos las sucesiones de Cauchy en P con $\| \cdot \|_2$ versus convergencias en P^j. En la subsección 3.3, introducimos un subespacio distribucional periódico y probaremos que este es un espacio de Hilbert. En la subsección 3.4, estudiaremos la caracterización de $L^2([-\pi, \pi])$ vía la transformada de Fourier. En la subsección 3.5, estudiaremos a la distribución Delta de Dirac e inmersiones continuas y densas de subespacios.

Finalmente, en la sección 4 damos las conclusiones y observaciones de este estudio.

2 | METODOLOGÍA

Rápidamente introduciremos algunas definiciones que serán usadas en este artículo.

Definición 2.1 *Sea*

$$P := C^{\infty}_{per}([-\pi, \pi]),$$

el espacio de las funciones $f : IR \to \mathbb{C}$ *infinitamente diferenciable y periódica con periodo* 2π.

Ahora, introducimos lo siguiente.

Definición 2.2 *Definimos la aplicación*

$$\begin{aligned} d : P \times P &\to [0, +\infty) \\ (f, g) &\to d(f, g), \end{aligned}$$

donde

$$d(f,g) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \left(\frac{\|f^k - g^k\|_\infty}{1 + \|f^k - g^k\|_\infty} \right)$$

aquí, estamos denotando por $f^{0} := f$ *y* f^{n} *representa la derivada de f de orden n o simplemente la n-ésima derivada de f. También, estamos usando* $\|F\|_\infty := \max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |F(x)|$, $\forall\ F \in P$.

Así, el par (P, d) es un espacio métrico completo y además la métrica d no viene de una norma.

También,

P' := {$T : P \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal tal que $\exists \psi_n \in P$ y

$$< T, \varphi >= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\varphi(x)\,dx\ ,\ \forall \varphi \in P \Big\}$$

$$= \quad (P)'\,.$$

Esto es, P' es el dual topológico de P . Así, P' es llamado el espacio de las Distribuciones Periódicas.

Definición 2.3 *Denotamos por S(Z) al espacio de las sucesiones Rápidamente Decrecientes (R.D.), definido por*

$$S(\mathbb{Z}) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\in Z}\ ,\ \alpha_k \in \mathbb{C}\ /\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty\ y\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k||k|^n < \infty\ ,\ \forall n \geq 1 \right\}$$

y $S'(\mathbb{Z})$ *es el espacio de las sucesiones de Crecimiento Lento (C.L.), definido por*

$S'(\mathbb{Z}) := \{\alpha = (\alpha_k)_{k\in Z}\ ,\ \alpha_k \in \mathbb{C}\ /\ \exists\ C > 0\ ,\ \exists\ N \in IN$ *con* $|\alpha_k| \leq C|k|^N\ ,\ \forall k \neq 0\}$.

Para ver propiedades de P , P', $S(\mathbb{Z})$ y $S'(\mathbb{Z})$ citamos [1].

3 I PRINCIPALES RESULTADOS

Sabemos que P es un espacio métrico completo. A seguir veremos que este espacio vectorial llega a ser normado pero no completo. Así, determinaremos el espacio completo donde se sumerge de modo denso.

3.1 *P* es normado con $\|\cdot\|_2$ pero no completo

Definición 3.1 *Definimos la siguiente aplicación:*

$\|\cdot\|_2 : P \to IR$

$$f \to \|f\|_2 := \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

que está bien definida desde que $f \in C([-\pi, \pi])$ *y además satisface:*

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \\ &\leq \left[\max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|\right]^2 \int_{-\pi}^{\pi} dx \\ &= 2\pi\|f\|_\infty^2 . \end{aligned}$$

Así, hemos probado:

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_\infty \,,\ \forall f \in P\,. \tag{3.1}$$

Proposición 3.1 *La aplicacion* $\|\cdot\|_2$ *satisface en P:*

1. $\|\phi\|_2 \geq 0$, $\forall \varphi \in P$.
2. $\|\alpha\varphi\|_2 = |\alpha|\|\varphi\|_2$, $\forall \varphi \in P$ *y* $\forall \alpha \in \not\subset$.
3. $\varphi = 0$ *si y solo si* $\|\varphi\|_2 = 0$.

Prueba.- En efecto, la aplicación $\|\cdot\|_2$ satisface:

1. Esto se obtiene desde que $|\varphi|^2 \geq 0$ y la integral mantiene la desigualdad.
2. Se consigue esto debido a la linealidad de la integral.
3. Es evidente que si $\varphi = 0$ entonces $\|\varphi\|_2 = 0$. Ahora, probaremos que si $\|\varphi\|_2 = 0$ entonces $\varphi = 0$. En efecto, si $\|\varphi\|_2 = 0$ entonces $\int_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x)|^2dx = 0$ y como $|\varphi|^2 \geq 0$ y continua, obtenemos $|\varphi(x)|^2 = 0$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, i.e. $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, i.e. $\varphi = 0$ en P .

Proposición 3.2 (La Desigualdad de Hölder) ***Si*** $\varphi, \psi \in P$ ***entonces***

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)\psi(x)|\ dx \leq \|\varphi\|_2\|\psi\|_2\,. \tag{3.2}$$

Prueba.- Si $\varphi = 0$ o $\psi = 0$, se cumple (3.2). Supongamos que $\|\varphi\|_2 > 0$ y $\|\psi\|_2 > 0$. Usando que $ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$ tenemos

$$\frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|_2}\frac{|\psi(x)|}{\|\psi\|_2} \leq \frac{1}{2}\frac{|\varphi(x)|^2}{\|\varphi\|_2^2} + \frac{1}{2}\frac{|\psi(x)|^2}{\|\psi\|_2^2}\,. \tag{3.3}$$

Integrando la desigualdad (3.3), obtenemos

$$\frac{1}{\|\varphi\|_2\|\psi\|_2}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)\psi(x)|\,dx \leq \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 \ = \ 0\,. \tag{3.4}$$

De (3.4) se concluye.

Proposición 3.3 (La Desigualdad de Minkowski)

$$\|\varphi + \psi\|_2 \leq \|\varphi\|_2 + \|\psi\|_2 \text{ , } \forall \varphi, \psi \in P \text{ .} \tag{3.5}$$

Prueba.- Si $\varphi = 0$ o $\psi = 0$, se cumple (3.5). Supongamos que $\varphi \neq 0$ y $\psi \neq 0$. *Sea* $x \in [-\pi, \pi]$, usando la desigualdad triangular del modulo tenemos

$$\begin{aligned} |\varphi(x) + \psi(x)|^2 &= |\varphi(x) + \psi(x)||\varphi(x) + \psi(x)| \\ &\leq \{|\varphi(x)| + |\psi(x)|\}|\varphi(x) + \psi(x)| \\ &= |\varphi(x)||\varphi(x) + \psi(x)| + |\psi(x)||\varphi(x) + \psi(x)| \text{ .} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Integrando (3.6) y usando la desigualdad de Hölder en los dos términos del lado derecho de (3.6) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x) + \psi(x)|^2 \, dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(x)||\varphi(x) + \psi(x)| \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(x)||\varphi(x) + \psi(x)| \, dx \\ &\leq \|\varphi\|_2\|\varphi + \psi\|_2 + \|\psi\|_2\|\varphi + \psi\|_2 \\ &= \{\|\varphi\|_2 + \|\psi\|_2\}\|\varphi + \psi\|_2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

De (3.7) se tiene Esto es,

$$\|\varphi + \psi\|_2^2 \leq \{\|\varphi\|_2 + \|\psi\|_2\}\|\varphi + \psi\|_2 \text{ .}$$

Esto es,

$$\|\varphi + \psi\|_2 \left(\|\varphi + \psi\|_2 - \{\|\varphi\|_2 + \|\psi\|_2\}\right) \leq 0 \text{ ,}$$

de donde concluimos $\|\varphi + \psi\|_2 - \{\|\varphi\|_2 + \|\psi\|_2\} \leq 0$.

Proposición 3.4 *Se satisface* $|\|\varphi\|_2 - \|\psi\|_2| \leq \|\varphi - \psi\|_2$, $\forall \varphi, \psi \in P$.

Prueba.- Sale de usar la desigualdad de Minkowski.

Proposición 3.5 *La aplicación* $\|\cdot\|_2$ *es una norma en el* ₵ *- espacio vectorial* P.

Prueba.- Se sigue de la Proposición 3.1 y desigualdad de Minkowski: Proposición 3.3.

Así, hemos probado que $(P, \|\cdot\|_2)$ es un ₵ - espacio normado.

Proposición 3.6 *El espacio normado* $(P, \|\cdot\|_2)$ *no es completo.*

Prueba.- Aquí, evidenciamos a una sucesión de Cauchy en P con norma $\|\cdot\|_2$, que no es convergente en P. Para esto, definimos la función

$$H(x) := \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & \pi < x \leq 2\pi \\ H(x+2\pi) = H(x)\,, & \forall x \in I\!R\,. \end{cases}$$

Se observa que H es periódica y de periodo 2π y que H no es continua en $\{k\pi\}_{k\in}Z$. Así, $H \notin C_{per}([-\pi, \pi])$, y por consiguiente $H \notin P$.

Ahora, a partir de H definimos T_H:

$$< T_H, \varphi >:= \int_{-\pi}^{\pi} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\pi} \varphi(x)dx\,,\ \forall \varphi \in P\,.$$

Evidentemente $T_H : P \to ¢$ es $¢$ -lineal, desde que la integral es lineal.

Para cada $n \in IN$, definimos:

$$\psi_n(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{nx}e^{\frac{-1}{1-nx}}} & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \leq \pi \\ e^{\frac{-1}{1-n(x-\pi)}e^{\frac{-1}{n(x-\pi)}}} & \pi < x < \pi + \frac{1}{n} \\ 0 & \pi + \frac{1}{n} \leq x \leq 2\pi \\ \psi_n(x+2\pi) = \psi_n(x)\,, & \forall x \in I\!R\,. \end{cases}$$

Así, ψ_n satisface:

1. $\psi_n \in P$, $\forall_n \in IN$.
2. $0 \leq \psi_n(x) \leq 1$, $\forall x \in IR$.
3. $\psi_n(x) \to H(x)$ cuando $n \to +\infty$, $\forall x \in IR$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi n\,(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\pi}\ \varphi(x)dx$.
5. $T_H \in P'$ y $T\psi_n \xrightarrow{P'} T_H$.

Ahora, nos interesa probar que

$$\|\psi_n - H\|_2 \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty\,. \tag{3.8}$$

Antes de probar (3.8) queremos indicar que de (3.8) se deducen rápidamente:

1. La sucesión (ψ_n) es de Cauchy en P con norma $\|\cdot\|_2$.

2. $P \ni \psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} H \notin P$.

3. $T_H \in L^2([-\pi, \pi])$ y $\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} T_H$, donde el espacio $(L^2([-\pi, \pi]), |||\cdot|||_2)$ será introducido más adelante.

Ahora demostraremos (3.8):

$$\begin{aligned}
\|\psi_n - H\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |\psi_n(x) - H(x)|^2 \, dx \\
&= \int_{-\pi}^{-\pi+\frac{1}{n}} \left| e^{\frac{-1}{1-n(x-\pi)}} e^{\frac{-1}{n(x-\pi)}} \right|^2 dx + \int_0^{\frac{1}{n}} \left| e^{\frac{-1}{nx}} e^{\frac{-1}{1-nx}} - 1 \right|^2 dx \\
&\leq \int_{-\pi}^{-\pi+\frac{1}{n}} dx + 4 \int_0^{\frac{1}{n}} dx \longrightarrow 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$.

Observación 3.1 *Los resultados obtenidos: desigualdad (3.1), Proposiciones: 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6 son también válidos en* $C_{per}([-\pi, \pi])$.

3.2 Sucesiones de Cauchy en P versus convergencias en P'

Lema 3.1 *Si* (φ_n) *es una sucesion de Cauchy en P con la norma* $\|\cdot\|_2$. *Entonces* $\exists f \in P'$ *tal que* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ *cuando* $n \to +\infty$ *(i.e.* $< T_{\varphi n}, \varphi > \to < f, \varphi >$ *cuando* $n \to +\infty$, $\forall \varphi \in P$*), donde* $< T_{\varphi n}, \varphi > = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\varphi(x)\, dx$.

Prueba.- Como $\varphi_n \in P$ entonces $T_{\varphi n} \in P'$. Sea $\varphi \in P$ arbitrario, afirmamos que $(< T_{\varphi n}, \varphi >)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$. En efecto, usando la Desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
| < T_{\varphi_n}, \varphi > - < T_{\varphi_m}, \varphi > | &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_n(x) - \varphi_m(x))\varphi(x) \, dx \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)||\varphi(x)| \, dx \\
&\leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_2 \|\varphi\|_2 \longrightarrow 0 \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

cuando $n, m \to +\infty$. Desde que $\mathbb{C}$ es completo, la sucesión $(< T_{\varphi n}, \varphi >)_{n=1}^{\infty}$ es convergente para cada $\varphi \in P$, luego

$$\exists \lim_{n \to +\infty} < T_{\varphi_n}, \varphi > = \mathcal{X}_{\varphi} .$$

Definimos

$$\begin{aligned}
f : P &\to \mathbb{C} \\
\varphi &\to < f, \varphi > := \chi_{\varphi} .
\end{aligned}$$

Afirmamos que $f \in P'$. En efecto, como fue definida vale:

$$< f, \varphi > := \mathcal{X}_{\varphi} = \lim_{n \to +\infty} < T_{\varphi_n}, \varphi > = \lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\varphi(x) \, dx . \qquad (3.10)$$

Resta probar que f es $\mathbb{C}$ -lineal. En efecto, sean φ_1 y φ_2 elementos arbitrarios de P y $\alpha \in \mathbb{C}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
< f, \varphi_1 + \alpha\varphi_2 > &= \lim_{n\to+\infty} < T_{\varphi_n}, \varphi_1 + \alpha\varphi_2 > \\
&= \lim_{n\to+\infty} \{< T_{\varphi_n}, \varphi_1 > + \alpha < T_{\varphi_n}, \varphi_2 >\} \\
&= \mathcal{X}_{\varphi 1} + \alpha \mathcal{X}_{\varphi 2} \\
&= < f, \varphi_1 > + \alpha < f, \varphi_2 > \ .
\end{aligned}
$$

Proposición 3.7 *Sean (φ_n) y (ψ_n) sucesiones de Cauchy en P con la norma $\|\cdot\|_2$. Entonces son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ *y* $\psi_n \xrightarrow{P'} f$ *cuando* $n \to +\infty$.
2. $\|\varphi_n - \psi_n\|_2 \to 0$ *cuando* $n \to +\infty$.

Prueba.- Primero probaremos que 2) implia 1). De la hipótesis, tenemos que

$$\exists f \in P' \text{ tal que } \varphi_n \xrightarrow{P'} f$$
$$\exists g \in P' \text{ tal que } \psi \xrightarrow{P'} g\ ,$$

luego $\varphi_n - \psi_n \xrightarrow{P'} f - g$. Así, probaremos que $f = g$. Esto es, basta demostrar que $\varphi_n - \psi_n \xrightarrow{P'} 0$ (i.e. $< \varphi_n - \psi_n, \varphi > \to 0$ cuando $n \to +\infty$). En efecto, usando la Desigualdad de Hölder tenemos

$$
\begin{aligned}
| < \varphi_n - \psi_n, \varphi > | &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \{\varphi_n(x) - \psi_n(x)\}\varphi(x)\, dx \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x) - \psi_n(x)||\varphi(x)|\, dx \\
&\leq \|\varphi_n - \psi_n\|_2 \|\varphi\|_2 \to 0
\end{aligned}
$$

cuando $n \to +\infty$.

Así, $< f - g, \varphi > = 0$, $\forall \varphi \in P$. Esto es, $f = g$ en P'. Recíprocamente, sabemos que $\exists f \in P'$ tal que .

$$\varphi_n \xrightarrow{P'} f \text{ (i.e. } < \varphi_n, \varphi > \to < f, \phi >, \forall \phi \in P)$$
$$\psi_n \xrightarrow{P'} f \text{ (i.e. } < \psi_n, \psi > \to < f, \psi >, \forall \psi \in P)$$

Ahora, definimos

$$\theta_n := \varphi_n - \psi_n \in P\ .$$

Afirmamos que $\theta_n \xrightarrow{P'} 0$ (i.e. $\forall \varphi \in P$, $< \theta_n, \varphi > \to 0$ cuando $n \to +\infty$). En efecto, esto es evidente pues

$$
\begin{aligned}
| < \theta_n, \varphi > | &= | < \varphi_n - \psi_n, \varphi > | \\
&= | < \varphi_n, \varphi > - < \psi_n, \varphi > \pm < f, \varphi > | \\
&\leq | < \varphi_n, \varphi > - < f, \varphi > | + | < f, \varphi > - < \psi_n, \varphi > | \to 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

cuando $n \to +\infty$.

También, afirmamos que (θ_n) es una sucesión de Cauchy con la norma $\| \cdot \|_2$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\|\theta_n - \theta_m\|_2 &= \|\varphi_n - \psi_n - (\varphi_m - \psi_m)\|_2 \\
&\leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_2 + \|\psi_m - \psi_n\|_2 \to 0 + 0 = 0
\end{aligned}
$$

cuando $n, m \to +\infty$.

Ahora, como la sucesión (θ_n) es de Cauchy con la norma $\| \cdot \|_2$, tenemos dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in I\!N$ tal que $\|\theta_n - \theta_m\| < \epsilon$, $\forall n, m \geq N$. (3.11)

Sea $m \geq N$, usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$
\begin{aligned}
0 \leq \|\theta_m\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)\overline{\theta_m(x)}\, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)(\overline{\theta_m(x)} - \overline{\theta_n(x)})\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)\overline{\theta_n(x)}\, dx \\
&= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)(\overline{\theta_m(x)} - \overline{\theta_n(x)})\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)\overline{\theta_n(x)}\, dx \right| \\
&\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)(\overline{\theta_m(x)} - \overline{\theta_n(x)})\, dx \right| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} \theta_m(x)\overline{\theta_n(x)}\, dx \right| \\
&\leq \|\theta_m\|_2 \|\theta_m - \theta_n\|_2 + \left| \overline{\int_{-\pi}^{\pi} \theta_n(x)\overline{\theta_m(x)} dx} \right| \\
&< \epsilon \|\theta_m\|_2 + \left| \int_{-\pi}^{\pi} \theta_n(x)\overline{\theta_m(x)}\, dx \right| \\
&< \epsilon \|\theta_m\|_2 + | < \theta_n, \overline{\theta_m} > | . \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Fijando el m y haciendo tender n al infinito, de la primera afirmación obtenemos que $< \theta_n, \overline{\theta_m} >$ tiende a cero y por consiguiente $| < \theta_n, \overline{\theta_m} > |$ también tiende a cero. Así, de (3.12) tenemos

$$\|\theta_m\|_2^2 < \epsilon \|\theta_m\|_2 , \forall m \geq N .$$

i.e.

$$\|\theta_m\|_2 (\|\theta_m\|_2 - \epsilon) < 0 .$$

Entonces $\|\theta_m\|_2 - \epsilon < 0$, i.e. Dado $\epsilon > 0$, $\|\theta_m\|_2 < \epsilon$ para todo $m \geq N$, esto nos permite concluir que $\theta_m \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$ cuando $m \to +\infty$.

3.3 $L^2([-\pi, \pi])$ es un espacio de Hilbert

Ahora introducimos el siguiente conjunto en P^j.

Definición 3.2

$L^2([-\pi, \pi]) := \{f \in P^j, \exists(\varphi_n)$ *sucesión de Cauchy en* P *con* $\| \cdot \|_2$ *y* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f\} \subset P^j$

Proposición 3.8 $L^2([-\pi, \pi])$ *es un* $\mathbb{C}$ *- espacio vectorial.*

Prueba.- En efecto, sean $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$, probaremos que $f + g \in L^2([-\pi, \pi])$ y que $\alpha f \in L^2([-\pi, \pi])$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$. Así, tenemos que

$$\exists(\varphi_n) \text{ sucesión de Cauchy en } P \text{ con la norma } \| \cdot \|_2 \text{ y } \varphi_n \xrightarrow{P'} f \tag{3.13}$$

$$\exists(\psi_n) \text{ sucesión de Cauchy en } P \text{ con la norma } \| \cdot \|_2 \text{ y } \psi_n \xrightarrow{P'} g\,. \tag{3.14}$$

Usando la desigualdad triangular de $\| \cdot \|_2$ obtenemos

$$\|(\varphi_n + \psi_n) - (\varphi_m + \psi_m)\|_2 \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_2 + \|\psi_n - \psi_m\|_2$$

y haciendo $n, m \to +\infty$ tenemos que $(\varphi_n + \psi_n)_n$ es una sucesion de Cauchy en P con $\| \cdot \|_2$. También, como

$$< T_{\varphi n}, \varphi > \to < f, \varphi >, \forall \varphi \in P \tag{3.15}$$

$$< T_{\psi n}, \varphi > \to < g, \varphi >, \forall \varphi \in P \tag{3.16}$$

entonces

$$\begin{aligned} < T_{\varphi_n+\psi_n}, \varphi > &= < T_{\varphi_n} + T_{\psi_n}, \varphi > \\ &= < T_{\varphi_n}, \varphi > + < T_{\psi_n}, \varphi > \\ & \qquad\quad \downarrow \qquad\qquad\quad \downarrow \\ & \qquad < f, \varphi > \; + \; < g, \varphi > = < f + g, \varphi > \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$, $\forall \varphi \in P$. Esto es,

$$\varphi_n + \psi_n \xrightarrow{P'} f + g.$$

Fácilmente, para $\alpha \in \mathbb{C}$ la sucesión $(a_{\varphi n})_n$ es de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$, pues

$$\|a\varphi_n - a\varphi_m\|_2 = |a|\|\varphi_n - \varphi_m\|_2$$

y haciendo $n, m \to +\infty$ tenemos que $(a_{\varphi n})_n$ es una sucesión de Cauchy en P con norma $\|\cdot\|_2$.

También,

$$< T_{a\varphi n}, \varphi > = < aT_{\varphi n}, \varphi > = a < T_{\varphi n}, \varphi > \to a < f, \varphi > = < af, \varphi >$$

cuando $n \to +\infty$, $\forall \varphi \in P$. Esto es,

$$a_{\varphi n} \xrightarrow{P'} \alpha f\,, \;\; \forall \alpha \in \mathbb{C}\,.$$

Proposición 3.9 *Si* (φ_n) *es una sucesion de Cauchy en* P *con* $\|\cdot\|_2$ *entonces*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_2\,.$$

Prueba.- Como

$$|\|\varphi_n\|_2 - \|\varphi_m\|_2| \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_2$$

entonces $(\|\varphi_n\|_2)_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ y desde que $\mathbb{C}$ es completo se tiene que la sucesión $(\|\varphi_n\|_2)_n$ es convergente.

Observacion 3.2 *La proposicion 3.9 también es válida para sucesiones de Cauchy en* $C_{per}([-\pi, \pi])$ *con* $\|\cdot\|_2$.

Proposición 3.10 *Si* (φ_n) *y* (ψ_n) *son sucesiones de Cauchy en* P *con* $\|\cdot\|_2$ *entonces*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\,dx\,.$$

Prueba.- Usando la desigualdad de Hölder y la proposición 3.9, tenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_m(x)\overline{\psi_m(x)}\,dx\right| \\
&\quad = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \{\varphi_n(x)(\overline{\psi_n(x)} - \overline{\psi_m(x)}) + (\varphi_n(x) - \varphi_m(x))\overline{\psi_m(x)}\}\,dx\right| \\
&\quad \leq \left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)(\overline{\psi_n(x)} - \overline{\psi_m(x)})\,dx\right| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_n(x) - \varphi_m(x))\overline{\psi_m(x)}\,dx\right| \\
&\quad \leq \|\varphi_n\|_2\|\psi_n - \psi_m\|_2 + \|\varphi_n - \varphi_m\|_2\|\psi_m\|_2 \\
&\quad \leq C_1\|\psi_n - \psi_m\|_2 + C_2\|\varphi_n - \varphi_m\|_2 \to 0
\end{aligned}$$

cuando n, $m \to +\infty$; luego $\left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\, dx\right)_n$ es una sucesión de Cauchy en ₵, y desde que ₵ es completo se tiene que la sucesión $\left(\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\, dx\right)_n$ es convergente en ₵ .

La siguiente observación es una consecuencia inmediata de la proposición 3.10.

Observación 3.3 *Si f, $g \in L^2([-\pi, \pi])$ (i.e. $\exists(\varphi_n)$ sucesión de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$ verificando $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ y $\exists(\psi_n)$ sucesión de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$ satisfaciendo $\psi_n \xrightarrow{P'} g$), entonces*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\, dx\, .$$

Proposición 3.11 *Si f, $g \in L^2([-\pi, \pi])$ (i.e. $\exists(\varphi_n)$ sucesion de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$ verificando $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ y $\exists(\psi_n)$ sucesión de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$ satisfaciendo $\psi_n \xrightarrow{P'} g$), entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n^*(x)\overline{\psi_n^*(x)}\, dx\, .$$

siempre que $\varphi_v^* \xrightarrow{P'} f$ y $\psi_v^* \xrightarrow{P'} g$, con (φ_v^*) y (ψ_v^*) sucesiones de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$. Así,

"El valor del límite es independiente de la sucesión de Cauchy considerada".

Prueba.- En efecto, usando la desigualdad de Hölder, la acotación de las sucesiones de Cauchy en $\|\cdot\|_2$ y las proposiciones 3.9 y 3.7, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n^*(x)\overline{\psi_n^*(x)}\, dx\right| \\
&\quad = \left|\int_{-\pi}^{\pi} \left\{\varphi_n(x)\{\overline{\psi_n(x)} - \overline{\psi_n^*(x)}\} + \{\varphi_n(x) - \varphi_n^*(x)\}\overline{\psi_n^*(x)}\right\} dx\right| \\
&\quad \leq \left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\{\overline{\psi_n(x)} - \overline{\psi_n^*(x)}\}\, dx\right| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} \{\varphi_n(x) - \varphi_n^*(x)\}\overline{\psi_n^*(x)}\, dx\right| \\
&\quad \leq \|\varphi_n\|_2\|\psi_n - \psi_n^*\|_2 + \|\varphi_n - \varphi_n^*\|_2\|\psi_n^*\|_2 \\
&\quad \leq C_1\|\psi_n - \psi_n^*\|_2 + C_3\|\varphi_n - \varphi_n^*\|_2 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$.

Ahora, estamos listos para introducir la siguiente definición.

Definición 3.3 *Sean f, $g \in L^2([-\pi, \pi])$ (i.e. $\exists(\varphi_n)$ sucesion de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$ verificando $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ y $\exists(\psi_n)$ sucesión de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$ satisfaciendo $\psi_n \xrightarrow{P'} g$) podemos definir*

$$(f, g) := \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\psi_n(x)}\, dx\, .$$

Por los resultados previos vemos que el número (f, g) existe y es independiente de las sucesiones de Cauchy en P con $\| \cdot \|_2$, consideradas para f y g.

Proposición 3.12 *La aplicacion* $(\cdot, \cdot)$ *es un producto interno en el* $\mathbb{C}$ *-espacio vectorial* $L^2([-\pi, \pi])$.

Prueba.- En efecto, fácilmente verificamos

1. $(f_1 + \lambda f_2, g) = (f_1, g) + \lambda(f_2, g)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall f_1, f_2, g \in L^2([-\pi, \pi])$.
2. $(f, g_1 + g_2) = (f, g_1) + (f, g_2)$, $\forall f, g_1, g_2 \in L^2([-\pi, \pi])$.
3. $(f, \lambda g) = \overline{\lambda}(f, g)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall f, g \in L^2([-\pi, \pi])$.

También, obtenemos

$$\begin{aligned}
\overline{(g,f)} &= \overline{\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \overline{\int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\psi_n(x)}\varphi_n(x)\,dx \\
&= (f,g)\,.
\end{aligned}$$

Además, se tiene

$$\begin{aligned}
(f,f) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x)|^2\,dx \;\geq\; 0\,.
\end{aligned}$$

Ahora, probaremos que si $f \in L^2([-\pi, \pi])$ con $(f, f) = 0$ implica $f = 0$. En efecto, sea (φ_n) una sucesión de Cauchy en P con $\| \cdot \|_2$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$, tenemos

$$0 = (f,f) = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x)|^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_2^2\,.$$

Luego, $\|\varphi_n\|_2 \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Sea $\varphi \in P$,

$$\begin{aligned}
0 \leq | < f, \varphi > | &\leq | < f, \varphi > - < T_{\varphi n}, \varphi > | + | < T_{\varphi n}, \varphi > | \\
&\leq | < f, \varphi > - < T_{\varphi n}, - > | + \|\varphi_n\|_2 \|\varphi\|_2 \to 0
\end{aligned}$$

cuando, $n \to +\infty$.

Así, $< f, \varphi > = 0$, $\forall \varphi \in P$, i.e. $f = 0$ en P^j.

A seguir probaremos que si $f = 0$ en $L^2([-\pi, \pi])$ entonces $(f, f) = 0$. En efecto, existe (φ_n) sucesión de Cauchy en P con $\| \cdot \|_2$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$, i.e.

$$< \varphi_n, \varphi > \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty \, , \, \forall \varphi \in P \, . \tag{3.17}$$

Sabemos que para la sucesión (φ_n) se verifica que $\exists \lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_2 = M$, por lo tanto $\exists \lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_2^2 = M^2$, desde que $|\|\varphi_n\|_2^2 - M^2| = |(\|\varphi_n\|_2 - M)(\|\varphi_n\|_2 + M)| \leq |\|\varphi_n\|_2 - M| (C + M)$.

Afirmamos que $M = 0$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe N_2 tal que

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_2 < \frac{\epsilon}{2C} \, , \, \forall n, m \geq N_2 \, . \tag{3.18}$$

De (3.17) para $\varphi := \overline{\varphi_N}$, con $N \geq N_2$ fijado, existe $N_1 > 0$ tal que

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \overline{\varphi_N(x)} \, dx \right| = | < \varphi_n, \overline{\varphi_N} > | < \frac{\epsilon}{2} \, , \; \forall n \geq N_1 \, . \tag{3.19}$$

Para $n \geq N_3 := \text{máx}\{N_1, N_2\}$, usando (3.18) y (3.19) tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_n(x)|^2 \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(x)} \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \{ \overline{\varphi_n(x)} - \overline{\varphi_N(x)} \} \, dx + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \overline{\varphi_N(x)} \, dx \\ &\leq \|\varphi_n\|_2 \|\varphi_n - \varphi_N\|_2 + | < \varphi_n, \overline{\varphi_N} > | \\ &< C \frac{\epsilon}{2C} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \, . \end{aligned}$$

Así, $\|\varphi_n\|_2^2 \to 0$, cuando $n \to +\infty$. Luego $\|\varphi_n\|_2 \to 0$, cuando $n \to +\infty$, i.e. $M = 0$ y $(f, f) = M^2 = 0$.

Observacion 3.4 *El producto interno* $(\cdot, \cdot)$ *en* $L^2([-\pi, \pi])$ *induce una norma, que denotaremos por* $|\| \cdot \||_2$*, así, en dicho espacio se tiene*

$$|\|f\||_2 := (f, f)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_2^2} = \lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n\|_2 \, , \quad \textit{para } f \in L^2([-\pi, \pi]) \, ,$$

donde (φ_n) *es una sucesión de Cauchy en* P *con* $\| \cdot \|$ *tal que* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$.

Previamente, antes de probar que $L^2([-\pi, \pi])$ es un espacio de Hilbert queremos introducir tres importantes resultados:

Proposición 3.13 *Se verifica las siguientes inclusiones*

$$P \subset C_{per}([-\pi, \pi]) \subset L^2([-\pi, \pi]) \subset P'$$

Prueba.- En efecto, si $\varphi \in C_{per}([-\pi, \pi])$, entonces

$$P \ni S_n(\varphi) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \varphi. \tag{3.20}$$

Afirmamos que $T_{S_n}(\varphi) \xrightarrow{P'} T_\varphi$. En efecto,

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi} S_n(\varphi)(x)\psi(x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\psi(x)\,dx\right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(\varphi)(x)-\varphi(x)||\psi(x)|\,dx \\ &\leq \|S_n(\varphi)-\varphi\|_2\|\psi\|_2 \to 0 \qquad (3.21)\end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$.

Así, de (3.20) y (3.21) se tiene que la sucesión $(S_n(\varphi))_n$ es de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$ y $T_{Sn(\varphi)} \xrightarrow{P'} T_\varphi$. Luego, $T_\varphi \in L([-\pi, \pi])$.

Ahora, desde que la aplicación lineal

$$\begin{aligned} T : C_{per}([-\pi, \pi]) &\to L^2([-\pi, \pi]) \\ \varphi &\to T_\varphi \end{aligned}$$

es inyectiva, concluimos que

$$C_{per}([-\pi, \pi]) \subset L^2([-\pi, \pi]) \ .$$

Las otras dos inclusiones son evidentes.

Ahora, queremos rescatar lo siguiente

Observación 3.5 *La aplicación*

$$\begin{aligned} T : C_{per}([-\pi, \pi]) &\to L^2([-\pi, \pi]) \\ \varphi &\to T_\varphi \end{aligned}$$

es lineal, inyectiva y continua.

Observación 3.6 $\forall \varphi \in C_{per}([-\pi, \pi])$ *vale:*

$$|||T_\varphi|||_2 = \lim_{n\to+\infty} \|S_n(\varphi)\|_2 = \|\varphi\|_2 \ ,$$

que es lo mismo decir que $|||\cdot|||_2$ *reestricto a* $C_{per}([-\pi, \pi])$ *es* $\|\cdot\|_2$*, que denotamos por*

$$|||\cdot|||_2 \, | C_{per}([-\pi,\pi]) = \|\cdot\|_2 \ ,$$

y por consiguiente también vale que $|||\cdot|||_2$ *reestricto a P es* $\|\cdot\|_2$*, esto es,*

$$|||\cdot|||_2\,|_P = \|\cdot\|_2 \,.$$

Proposición 3.14 *Sea* φ_n *una sucesion de Cauchy en P con la norma* $\|\cdot\|_2$ *tal que* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$*, entonces* $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ *.*

Prueba.- En efecto, sea n fijo, tenemos

$$|||T_\varphi n - f|||_2 := \lim_{n\to+\infty} \|S_m(\varphi_n) - \varphi_m\|_2 \,,$$

y tomando límite a la desigualdad:

$$\|S_m(\varphi_n) - \varphi_m\|_2 \leq \|S_m(\varphi_n) - \varphi_n\|_2 + \|\varphi_n - \varphi_m\|_2$$

cuando n, m tienden a $+\infty$, concluimos.

Proposición 3.15 *Sea* φ_n *una sucesion de Cauchy en P con la norma* $\|\cdot\|_2$ *tal que* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$*. Si f es una función (seccionalmente continua o continua, por ejemplo) periódica, entonces* $\varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ *.*

Prueba.- En efecto, supongamos que f es continua periódica, siguiendo las ideas de la prueba de la proposición 3.7 conseguiremos probarlo.

Afirmamos que $\varphi_n - f$ es una sucesión de Cauchy con la norma $\|\cdot\|_2$. En efecto,

$$\|(\varphi_n - f) - (\varphi_m - f)\|_2 = \|\varphi_n - \varphi_m\|_2 \to 0$$

cuando $n, m \to +\infty$.

Ahora como $\varphi_n - f$ es una sucesión de Cauchy en $C_{per}([-\pi, \pi])$ con la norma $\|\cdot\|_2$ tenemos

dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in IN$ tal que $\|(\varphi_n - f) - (\varphi_m - f)\|_2 < \epsilon$, $\forall n, m \geq N$. (3.22)

Sea $m \geq N$,

$$\begin{aligned}
0 \le \|\varphi_m - f\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_m(x) - f(x))(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \{(\varphi_m(x) - f(x)) \pm (\varphi_n(x) - f(x))\}(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \{(\varphi_m(x) - f(x)) - (\varphi_n(x) - f(x))\}(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\,dx \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_n(x) - f(x))(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\,dx \\
&= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \{(\varphi_m(x) - f(x)) - (\varphi_n(x) - f(x))\}(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\,dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_n(x) - f(x))(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\,dx \right| \\
&\le \left| \int_{-\pi}^{\pi} \{(\varphi_m(x) - f(x)) - (\varphi_n(x) - f(x))\}(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\,dx \right| \\
&\quad + \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi_n(x) - f(x))(\overline{\varphi_m(x) - f(x)})\,dx \right| \\
&\le \|(\varphi_m - f) - (\varphi_n - f)\|_2 \|\varphi_m - f\|_2 + |<\varphi_n - f, \overline{\varphi_m - f}>| \\
&< \epsilon \|\varphi_m - f\|_2 + |<\varphi_n - f, \overline{\varphi_m - f}>| \,. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Fijando m y haciendo tender n al infinito, tenemos que $<\varphi_n - f, \overline{\varphi_m - f}>$ tiende a cero y por consiguiente $|<\varphi_n - f, \overline{\varphi_m - f}>|$ también tiende a cero. Así de (3.23) tenemos

$$0 \le \|\varphi_m - f\|_2^2 < \epsilon \|\varphi_m - f\|_2 \,,\ \forall m \ge N$$

i.e. $\|\varphi_m - f\|_2(\|\varphi_m - f\|_2 - \epsilon) < 0$.

Entonces $\|\varphi_m - f\|_2 - \epsilon < 0$. Esto es, dado $\epsilon > 0$, $\|\varphi_m - f\|_2 < \epsilon\ \forall m \ge N$. Esto nos permite cocluir que $\varphi_m - f \xrightarrow{\|\cdot\|_2} 0$ cuando $m \to +\infty$.

Proposición 3.16 *$L^2([-\pi, \pi])$ es un ₵- espacio de Hilbert.*

Prueba.- Ya probamos que $L^2([-\pi, \pi])$ es un ₵ - espacio vectorial con producto interno. Ahora probaremos que $L^2([-\pi, \pi])$ es completo. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $L^2([-\pi, \pi])$ con $|||\cdot|||_2$.

Para cada f_n existe una sucesión φ_{nm} sucesión de Cauchy en P con la norma $\|\cdot\|_2$ tal que $\varphi_{nm} \xrightarrow{P'} f_n$, cuando $m \to +\infty$ entonces $\varphi_{nm} \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f_n$, cuando $m \to +\infty$.

Así, dado $\epsilon_1 = 1$, existe N_1 tal que $|||\varphi_{1m} - f_1|||_2 < \frac{1}{j}$, $\forall m \ge N_1$. Luego escojo um m de esa familia no acotada, denotandolo como m_1^* y fijandolo. Ahora denoto a $\varphi_{1m_1^*}$ como ψ_1 y tenemos que

$$\exists \psi_1 \in P \text{ tal que } |||f_1 - \psi_1|||_2 < 1 \,.$$

Así, procedemos, dado $\epsilon_j = \frac{1}{j}$, existe N_j tal que $|||\varphi_{jm} - f_j|||_2 < \frac{1}{j}\ \forall m \ge N_j$. Luego escojo um m de esa familia no acotada, denotandolo como m_j^* y fijandolo. Así, es conveniente denotar a $\varphi_{jm_j^*}$ como ψ_j. Luego, tenemos que

$$\exists \psi_j \in P \text{ tal que } |||f_j - \psi_j|||_2 < \tfrac{1}{j} \, . \tag{3.24}$$

Afirmamos que ψ_j es una sucesión de Cauchy en $L^2([-\pi, \pi])$ con la norma $||| \cdot |||_2$. En efecto, usando la desigualdad triangular y la desigualdad (3.24) tenemos:

$$\begin{aligned} |||\psi_j - \psi_k|||_2 &\leq |||\psi_j - f_j|||_2 + |||f_k - \psi_k|||_2 + |||f_j - f_k|||_2 \\ &< \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + |||f_j - f_k|||_2 \to 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

cuando $j, k \to +\infty$.

Como $\|\psi_j - \psi_k\|_2 = |||\psi_j - \psi_k|||_2$, usando (3.25) tenemos que ψ_j es una sucesión de Cauchy en P con la norma $\| \cdot \|_2$, luego por el Lema 3.1 y la proposición 3.14 tenemos

$$\exists f \in L^2([-\pi, \pi]) \text{ tal que } \psi_j \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f \, . \tag{3.26}$$

Usando (3.24) y (3.26)

$$\begin{aligned} |||f_n - f\,|||_2 &\leq |||f_n - \psi_n|||_2 + |||\psi_n - f\,|||_2 \\ &< \frac{1}{n} + |||\psi_n - f\,|||_2 \to 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$. Así, hemos probado que $\exists f \in L^2([-\pi, \pi])$ tal que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$.

3.4 Caracterización de $L^2([-\pi, \pi])$ vía Fourier

Sabemos que $P^j \xrightarrow{\widehat{\ }} S^j$. A continuación daremos una caracterización de $L^2([-\pi, \pi])$, vía Fourier en P^j.

Teorema 3.1 (Caracterización) *La transformada de Fourier restricta a* $L^2([-\pi, \pi])$ *es biyectiva entre* $L^2([-\pi, \pi])$ *y* $l^2(\mathbb{Z})$. *Además:*

1. *Denotando por* $S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) \varnothing k$ *vale*

$$S(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f, \qquad \forall f \in L^2([-\pi, \pi]) \, . \tag{3.27}$$

i.e. la serie de Fourier de f es f en $L^2([-\pi, \pi])$ *con* $||| \cdot |||_2$.

2. Se satisface la Identidad de Parseval:

$$|||f|||_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 = 2\pi \|\hat{f}\|_2^2\ , \ \forall f \in L^2([-\pi, \pi]). \tag{3.28}$$

Además, (3.28) es equivalente a 3.29:

$$(f, g) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)} = 2\pi(\hat{f}, \hat{g})_{l}^{2}\ , \ \forall f \in L^2([-\pi, \pi]), \tag{3.29}$$

con $(f, g) = \text{lím}_{n\to+\infty} < \varphi_n, \psi_n >_2$, *donde* (φ_n) *es una sucesión de Cauchy en P con* $\|\cdot\|_2$ *tal que* $\varphi_n \xrightarrow{P'} f$ *y también* (ψ_n) *es sucesion de Cauchy en P con* $\|\cdot\|_2$ *tal que* $\psi \xrightarrow{P'} g$, *y* $< \varphi, \psi > = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\, dx$.

Prueba.- La prueba la hemos organizado de la siguiente forma.

Probaremos que ˆes sobreyectiva. Así, sea $\alpha = (\alpha_k)_{k\in}Z \in l^2(Z)$, definimos

$$\psi_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \underbrace{e^{ikx}}_{\phi_k(x):=} = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \phi_k(x)$$

luego observamos que $\psi_n \in P$.

Además observamos que si $n < m$ se tiene

$$\psi_m - \psi_n = \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\phi_k + \sum_{k=-m}^{-(n+1)} \alpha_k\phi_k = \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\phi_k + \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_{-k}\phi_{-k}\,. \tag{3.30}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\phi_k\right\|_2^2 &= < \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\phi_k, \sum_{j=n+1}^{m} \alpha_j\phi_j > \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k \sum_{j=n+1}^{m} \overline{\alpha_j} \underbrace{< \phi_k, \phi_j >}_{=2\pi\delta_{kj}} \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\overline{\alpha_k}2\pi \\
&= 2\pi \sum_{k=n+1}^{m} |\alpha_k|^2\,.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Análogamente, obtenemos

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{m} \alpha_{-k}\phi_{-k}\right\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=n+1}^{m} |\alpha_{-k}|^2\,. \tag{3.32}$$

También como $k \neq j$, tenemos

$$
\begin{aligned}
< \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\phi_k, \sum_{j=-m}^{-(n+1)} \alpha_j\phi_j > &= \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k \sum_{j=-m}^{-(n+1)} \overline{\alpha_j} \underbrace{< \phi_k, \phi_j >}_{=0} \\
&= 0\,. \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

Ahora, como $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k|^2 < \infty$, luego la sucesión $\sum_{k=-n}^{n} |\alpha_k|^2$ es de Cauchy en ₵ . Así, para $n < m$ se satisface

$$
\underbrace{\sum_{k=-m}^{m} |\alpha_k|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\alpha_k|^2}_{=\sum_{n+1\leq|k|\leq m} |\alpha_k|^2} \longrightarrow 0 \qquad (3.34)
$$

cuando $n, m \to +\infty$.

De (3.30), (3.31), (3.32) y (3.33) tenemos para $n < m$,

$$
\begin{aligned}
\|\psi_m - \psi_n\|_2^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k\phi_k + \sum_{j=n+1}^{m} \alpha_{-j}\phi_{-j} \right\|_2^2 \\
&= 2\pi \sum_{n+1\leq|k|\leq m} |\alpha_k|^2\,. \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

Usando (3.34) cuando tomamos límite a la expresión (3.35) cuando $n, m \to +\infty$, obtenemos que la sucesión (ψ_n) es de Cauchy en P con la norma $\|\cdot\|_2$. Luego usando el Lema 3.1 y proposición 3.14, tenemos que

$$
\exists f \in L^2([-\pi, \pi]) \text{ tal que } \psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f\,.
$$

Desde que ^ es único en P^j tenemos que $\hat{f} = \alpha$. También, se tiene

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(k) &:= \frac{1}{2\pi} < f, \phi_{-k} > \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to+\infty} < \psi_m, \phi_{-k} > \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-m}^{m} \alpha_j\phi_j(x)\phi_{-k}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to+\infty} \sum_{j=-m}^{m} \alpha_j \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \phi_j(x)\phi_{-k}(x)\,dx}_{2\pi\delta_{kj}} \\
&= \lim_{m\to+\infty} \sum_{j=-m}^{m} \alpha_j\delta_{kj} \\
&= \alpha_k
\end{aligned}
$$

i.e. $\hat{f} = \alpha$. Osea ^: $L^2([-\pi, \pi]) \to l^2$ es sobreyectiva.

2. Ahora probaremos que si $g \in L^2([-\pi, \pi])$ entonces $\hat{g} \in l^2(\mathbb{Z})$. En efecto, sea $g \in L^2([-\pi, \pi])$, entonces $\exists\psi_n$ sucesión de Cauchy en P con norma $\|\cdot\|_2$ 2 tal que

$\psi_n \xrightarrow{P'} g$ y también $\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} g$. Así,

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) := &= \frac{1}{2\pi} < g, \phi_{-k} > \\ &= \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{2\pi} < T_{\psi_m}, \phi_{-k} > \\ &= \lim_{m\to+\infty} \widehat{T_{\psi_m}}(k) \\ &= \lim_{m\to+\infty} \widehat{\psi_m}(k)\,. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Aplicando la identidad de Parseval en P tenemos

$$\|\psi_n - \psi_m\|_2^2 = 2\pi\|\widehat{\psi_n} - \widehat{\psi_m}\|_2^2$$

y usando que (ψ_n) es de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$, tenemos que la sucesión $\left(\widehat{\psi_n}\right)$ es de Cauchy en l (Z). Luego $\exists\alpha \in l^2$ (Z) tal que $\widehat{\psi_n} \xrightarrow{l^2(\mathbb{Z})} \alpha$.

Como

$$|\alpha_k - \widehat{\psi_m}(k)|^2 \leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j - \widehat{\psi_m}(j)|^2 = \|\alpha - \widehat{\psi_m}\|_2^2 \to 0$$

cuando $m \to +\infty$, tenemos

$$\alpha_k = \lim_{m\to+\infty} \widehat{\psi_m}(k)\,. \tag{3.37}$$

De (3.36) y (3.37) tenemos que $\hat{g}(k) = \alpha k$, $\forall_k \in$ Z, i.e. $\hat{g} = \alpha \in l^2$ (Z).

3. La inyectividad de ^ en $L^2([-\pi, \pi])$ se tiene de la inyectividad de ^ en P^j. Esto es inmediato debido a la Identidad de Parseval Generalizado. Supongamos que para $f, g \in L^2([-\pi, \pi])$, $\hat{f} = \hat{g}$,

$$< f - g, \varphi >= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\widehat{f - g}(k)}_{=0} \widehat{\varphi}(-k) = 0\,, \ \forall \varphi \in P\,.$$

Luego $f = g$.

4. Luego de haber demostrado que ^ es biyectivo de $L^2([-\pi, \pi])$ en l^2(Z), estamos listos para probar:

$$S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f\,, \quad \forall f \in L^2([-\pi, \pi])\,.$$

En efecto, Como $S_n(f) \in P$ y $\hat{f} \in l^2$(Z) tenemos para $n < m$

$$\|S_m(f) - S_n(f)\|_2^2 = 2\pi \sum_{n+1\leq|k|\leq m} |\hat{f}(k)|^2 \to 0$$

cuando $n, m \to +\infty$. Por lo tanto $(S_n(f))$ es una sucesión de Cauchy en P con $\|\cdot\|_2$. Usando el lema 3.1 y proposición 3.14, tenemos

$$\exists s \in P^j \text{ tal que } S(f) \xrightarrow{P'} s$$

i.e

$$s \in L^2([-\pi, \pi]) \text{ tal que } S(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} s\,.$$

Afirmamos que $\hat{s}(k) = \hat{f}(k)$, $\forall k \in Z$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\widehat{s}(k) &:= \frac{1}{2\pi} < s, \phi_{-k} > \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to+\infty} < S_m(f), \phi_{-k} > \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=-m}^{m} \widehat{f}(j)\phi_j\phi_{-k}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{m\to+\infty} \sum_{j=-m}^{m} \widehat{f}(j) \int_{-\pi}^{\pi} \phi_j\phi_{-k}\,dx \\
&= \lim_{m\to+\infty} \sum_{j=-m}^{m} \widehat{f}(j)\delta_{kj} \\
&= \widehat{f}(k)
\end{aligned}$$

i.e. $\hat{s} = \hat{f}$. Por la inyectividad de ^ en P^j (por consiguiente en $L^2([-\pi, \pi])$), concluimos que $s = f$ y por lo tanto

$$S(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f\,.$$

5. Previamente, sabemos que

$$\begin{aligned}
\widehat{S_n(f)}(j) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\widehat{\phi_k}(j) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\delta_{kj}\,,
\end{aligned}$$

luego

$$\widehat{S_n(f)}(j) = \begin{cases} \widehat{f}(j) & \text{si } j \in \{-n, \ldots, n\} \\ 0 & \text{si } j \notin \{-n, \ldots, n\}\,. \end{cases} \tag{3.38}$$

Usando la Identidad de Parseval en P y (3.38), tenemos

$$\|S_n(f)\|_2^2 = 2\pi \left\|\widehat{S_n(f)}\right\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 . \tag{3.39}$$

Tomando límite a la igualdad (3.39), cuando $n \to +\infty$, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \|S_n(f)\|_2^2 &= \lim_{n\to+\infty} 2\pi \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= 2\pi \left\|\widehat{f}\right\|_2^2 . \end{aligned} \tag{3.40}$$

Como $S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ cuando $n \to +\infty$, entonces $|||S_n(f)|||_2 \to |||f|||_2$ cuando $n \to +\infty$. En consecuencia,

$$\underbrace{|||S_n(f)|||_2^2}_{=\|S_n(f)\|_2^2} \longrightarrow |||f|||_2^2 \text{ cuando } n \to +\infty . \tag{3.41}$$

Usando (3.41) en la igualdad (3.40) obtenemos

$$|||f|||_2^2 = 2\pi\, |||\hat{f}|||_2^2.$$

6. La equivalencia de la Identidad de Parseval con $(f, g) = 2\pi(\hat{f}, \hat{g})$, es consecuencia de la identidad de Polaridad.

Corolario 3.1 *La biyección lineal*

$$\wedge : L^2([-\pi, \pi]) \to l^2(\mathbb{Z})$$

es continua con inversa continua.

Prueba.- Es consecuencia de la Identidad de Parseval en $L^2([-\pi, \pi])$, que acabamos de demostrar.

3.5 La Distribución Periódica Delta de Dirac

Ahora, para

$$H(x) := \begin{cases} 1 & 0 < x \leq \pi \\ 0 & \pi < x \leq 2\pi \\ H(x+2\pi) = H(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

debemos recordar que $T_H \in L^2([-\pi, \pi])$ pero $H \notin C_{per}([-\pi, \pi])$; esto nos permite deducir que la siguiente inclusión es propia

$$C_{per}([-\pi, \pi]) \subsetneq L^2([-\pi, \pi]) \,.$$

Por otro lado, también es evidente que la siguiente inclusión es propia

$$P \subsetneq C_{per}([-\pi, \pi]) \,.$$

Por ejemplo, basta considerar la función

$$f(x) := \begin{cases} |x| & \text{si } x \in (-\pi, \pi] \\ \text{con } f(x + 2\pi) = f(x)\,, & \forall x \in I\!R\,, \end{cases}$$

de donde se tiene que $f \in C_{per}([-\pi, \pi])$ pero $f \notin P$.

A seguir, introduciremos una aplicación y probaremos que ella es una distribución periódica que no está en $L^2([-\pi, \pi])$.

Definición 3.4 *Definimos* $<\delta_x, \varphi> = \varphi(x)$, $\forall \varphi \in P$.

Proposición 3.17 *La aplicación* $\delta_x : P \to ₵$ *es* ₵ *- lineal y además* $\delta_x \in P^j$.
"δ_x *es conocida como la distribuci´on Delta de Dirac".*

Prueba.- En efecto,

$$<\delta_x, \varphi + c\psi> = (\varphi + c\psi)(x) = \varphi(x) + c\psi(x) =<\delta_x, \varphi> + c <\delta_x, \psi> \forall \varphi, \psi \in P\,, \forall\, c \in ₵\,.$$

Ahora, consideremos el núcleo de Fejér de orden n,

$$K_n := \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \phi_k$$

y recordemos que este núcleo es una identidad aproximada. Ahora, denotemos por $\Psi_n(\cdot) := \frac{1}{2\pi} K_n(x - \cdot) \in P$ entonces vale

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(y)\varphi(y)dy = \lim_{n \to +\infty} (K_n * \varphi)(x) = \varphi(x) =<\delta_x, \varphi>\,,$$

$\forall \varphi \in P$.

Así tenemos que $\delta_x \in P^j$.

H

Proposición 3.18 $\delta_x \notin L^2([-\pi, \pi])$, $\forall x \in IR$.

Prueba.- De la proposición previa tenemos que $\delta_x \in P^j$, ahora probaremos que δ_x

$\notin L^2([-\pi, \pi])$.

Vemos que

$$\widehat{\delta_x}(k) \;=\; \frac{1}{2\pi} < \delta_x, \phi_{-k} >= \frac{1}{2\pi}\phi_{-k}(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-ikx}\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

Luego

$$|\widehat{\delta_x}(k)| = \frac{1}{2\pi}|e^{-ikx}| = \frac{1}{2\pi}\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

Por lo tanto $\hat{\delta}_x \notin l^2(\mathbb{Z})$, desde que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{\delta_x}(k)|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi}(2n+1) = +\infty\,.$$

Así, $\delta_x \notin L^2([-\pi, \pi])$.

Observacion 3.7 *De la proposición 3.18, tenemos* $\delta_x \in P' - L^2([-\pi, \pi])$, $\forall x \in IR$. *Así,*

$$\{\delta_x\}_{x\in IR} \subset P' - L^2([-\pi, \pi]) \neq \emptyset$$

Esto es, la siguiente inclusión es propia

$$L^2([-\pi, \pi]) \subsetneq P'\,.$$

Observación 3.8 *Resumiendo tenemos que las siguientes inclusiones son propias*

$$P \subsetneq C_{per}([-\pi, \pi]) \subsetneq L^2([-\pi, \pi]) \subsetneq P'\,.$$

Observación 3.9 *Las siguientes inclusiones son continuas y con imagen densa respectivamente.*

$$\begin{array}{ccccc} P & \hookrightarrow & L^2([-\pi,\pi]) & \hookrightarrow & P' \\ \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee \\ S(\mathbb{Z}) & \hookrightarrow & l^2(\mathbb{Z}) & \hookrightarrow & S'(\mathbb{Z}) \end{array}$$

En efecto, la densidad es en el sentido: todo elemento del espacio mayor es aproximado por una sucesion de elementos del espacio menor con la topología del espacio mayor.

Finalmente,

Observación 3.10 *Cabe resaltar que* $L^2([-\pi, \pi])$ *es el caso* $s = 0$ *de los espacios de Sobolev periódico* H^s_{per} *, donde* H^r_{per} *es Hilbert para todo* $r \in IR$*. Para ver esto* citamos [1] y [8].

Podemos citar algunos trabajos, donde se usan los resultados obtenidos, que abordan problemas de existencia de solución de algunas ecuaciones, por ejemplo [1], [4], [5], [6] y [7].

CONCLUSIONES

En nuestro estudio del espacio $L^2([-\pi, \pi])$ hemos realizado lo siguiente:

1. Introducimos la aplicación $\|\cdot\|_2$ en P y haciendo cálculos simples probamos que es una norma en P que no es completa.
2. Para introducir el espacio $L^2([-\pi, \pi])$, estudiamos a las sucesiones de Cauchy en P y lo conectamos con convergencia de sucesiones en su dual topológico: P^j. Los resultados obtenidos nos permitieron introducir un producto interno y probar que $L^2([-\pi, \pi])$ es un espacio de Hilbert.
3. Probamos importantes propiedades del espacio infinito dimensional $L^2([-\pi, \pi])$ resaltando su conexi´on con $l^2(Z)$ mediante la transformada de Fourier.
4. Estudiamos inmersiones estrictas, continuas y densas de subespacios en P^j.
5. Las propiedades del espacio distribucional $L^2([-\pi, \pi])$ permiten generalizar y generar los espacios de Sobolev periódico H^s_{per} para todo $s \in IR$; y aplicarlo en el estudio de la existencia de solución de ecuaciones diferenciales.
6. Finalmente, este estudio también es válido cuando sustituimos π por $l > 0$ y consideramos $P := C^{\infty}_{per}([-l, l])$ funciones infinitamente diferenciables y periódicas con periodo $2l$.

REFERENCIAS

1. Iorio, R. and Iorio V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University. 2001.

2. Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02): 207-230.

3. Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existencia y regularidad de solución de la ecuaci´on de Schr¨odinger no homogénea en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(01): 37-51.

4. Santiago Ayala, Y. Results on the well posedness of a distributional differential problem. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(02): 348-359.

5. Santiago Ayala, Y. Existencia de solución de un problema distribucional para una ecuaciõn de Schrödinger generalizada. Selecciones Matemáticas. 2022; 09(01): 91-101.

6. Santiago Ayala, Y. Group of weakly continuous operators associated to a generalized Schrödinger type homogeneous model. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2023; 11(04): 919-932.

7. Santiago Ayala, Y. Semigroup of weakly continuous operators associated to a generalized Schrödinger equation. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2023; 11(04): 1061-1076.

8. Santiago Ayala, Y. Inmersiones y propiedades de los espacios de Sobolev periódico. Matemática: O sujeito e o conhecimento matemático 2. 2023; 66-87.

9. Terence, T. Nonlinear dispersive equations: Local and Global Analysis. Regional Conference Series in Mathematics, No. 106. American Mathematical Society; 2006.

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS: INTERFACES COM OUTRAS ÁREAS DE CONHECIMENTO

Data de aceite: 02/08/2023

Antonio Tadeu Pellison
Faculdade de Tecnologia de Bauru, Brasil
https://orcid.org/0009-0002-7163-0651

RESUMO: A busca por novos métodos de ensino da matemática, é fundamental no âmbito escolar. A matemática é a ciência base de várias áreas do conhecimento, portanto, a busca por maior eficiência no processo de ensino se justifica. O estudo da matemática envolve a resolução de problemas e sua aplicação no dia a dia, e a interdisciplinaridade com as outras áreas do conhecimento. O uso da tecnologia potencializa as maneiras de resolução de problemas, recursos, tais como: calculadora, aplicativos da internet, software, programas computacionais e outros. Nesta perspectiva, a resolução de problemas é fundamental para o ensino da matemática, contribuir para a resolução de diversas situações oriundas de práticas sociais, de outras áreas do conhecimento e sua própria estrutura, com o auxílio da tecnologia. Utilização da plataforma Arduino para o desenvolvimento e estudo matemático. Essa seria uma grande contribuição que o lado relacional da Matemática teria a oferecer com o desenvolvimento de temáticas interdisciplinares. O processo de ensino e de aprendizagem da matemática, não existe um caminho único, porém, conhecer diversas possibilidades para o trabalho docente é essencial ao se visar sua prática de maneira qualificada e alternativa, envolvendo outras áreas do conhecimento.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de matemática; aprendizagem baseada em projetos; ferramentas tecnológicas.

ABSTRACT: The search for new methods of teaching mathematics is fundamental in the school environment. Mathematics is the base science of several areas of knowledge, therefore, the search for greater efficiency in the teaching process is justified. The study of mathematics involves problem solving and its application in everyday life, and interdisciplinarity with other areas of knowledge. The use of technology enhances ways of solving problems, resources such as: calculator, internet applications, software, computer programs and others. In this perspective, problem solving is fundamental for teaching mathematics, contributing to the resolution of different situations arising from social practices, from other areas of knowledge and its own structure, with the

help of technology. Use of the Arduino platform for mathematical development and study. This would be a great contribution that the relational side of Mathematics would have to offer with the development of interdisciplinary themes. The process of teaching and learning mathematics, there is no single path, however, knowing different possibilities for teaching work is essential when aiming at its practice in a qualified and alternative way, involving other areas of knowledge.
KEYWORDS: Mathematics teaching; project-based learning; technological tools.

1 I INTRODUÇÃO

A busca por novos métodos de ensino da matemática é fundamental no âmbito escolar, considerando que a matemática é uma ciência base para várias áreas do conhecimento. A matemática proporciona habilidades e conhecimentos essenciais para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, além de ser fundamental para o avanço tecnológico e científico da sociedade.

A adoção de métodos de ensino eficientes pode ajudar os alunos a compreender e aplicar conceitos matemáticos de forma mais significativa. Isso significa que os estudantes podem adquirir um entendimento mais profundo dos princípios matemáticos e desenvolver habilidades de resolução de problemas, raciocínio lógico e pensamento crítico (SANTOS et. Al., 2022).

Existem várias abordagens que podem ser exploradas para melhorar o ensino da matemática. Alguns exemplos incluem:

- **Aprendizagem ativa:** Promover a participação ativa dos alunos em atividades práticas, resolução de problemas, discussões em grupo e projetos. Isso ajuda os estudantes a desenvolverem habilidades de pensamento independente e a aplicar conceitos matemáticos em situações do mundo real.

- **Tecnologia educacional:** Utilizar recursos tecnológicos, como softwares, aplicativos e plataformas online, para tornar o ensino da matemática mais interativo e envolvente. Isso pode incluir simulações, jogos educacionais e ferramentas de visualização que auxiliam na compreensão de conceitos matemáticos complexos.

- **Abordagem contextualizada:** Contextualizar os conceitos matemáticos, relacionando-os a situações do cotidiano, para que os alunos percebam sua relevância e apliquem-nos em contextos reais. Isso torna o aprendizado mais significativo e ajuda a combater a percepção de que a matemática é uma disciplina abstrata e desconectada da realidade.

- **Diferenciação instrucional:** Reconhecer as diferenças individuais dos alunos e adaptar a abordagem de ensino para atender às suas necessidades. Isso pode envolver a utilização de estratégias diferenciadas, recursos de apoio e avaliações formativas para acompanhar o progresso de cada aluno.

É importante ressaltar que os professores desempenham um papel fundamental na implementação desses métodos de ensino. Eles precisam ser capacitados e apoiados na adoção de abordagens inovadoras, além de terem acesso a recursos adequados e oportunidades de desenvolvimento profissional.

Ao buscar maior eficiência no processo de ensino da matemática, contribui-se para uma formação mais completa e preparando os alunos para enfrentarem os desafios do mundo contemporâneo, que exigem habilidades matemáticas cada vez mais avançadas.

2 | REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 INTERDICIPLINARIDE COM OUTRAS ÁREAS

O estudo da matemática envolve a resolução de problemas e sua aplicação em situações do dia a dia. Além disso, a interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento é cada vez mais valorizada, pois a matemática está presente em diversos campos, como ciências naturais, engenharia, economia, entre outros (NOÉ, 2021).

Os conceitos e ferramentas matemáticas, como comparações, porcentagens, gráficos, lógica, análise, medições e estatística, são fundamentais para compreender e resolver problemas em diferentes contextos.

A abordagem interdisciplinar é indispensável para explorar a relação entre a matemática e outras disciplinas. Ao integrar a matemática com outras áreas do conhecimento, os alunos têm a oportunidade de aplicar conceitos matemáticos em situações do mundo real e compreender sua importância prática (CHAS, 2016).

Em ciências naturais, a matemática é usada para analisar dados experimentais, realizar cálculos de probabilidade e estatística, modelar fenômenos físicos e entender padrões matemáticos subjacentes. Na economia, a matemática é utilizada para calcular juros, interpretar gráficos de demanda e oferta, analisar tendências e fazer previsões. Esses são apenas alguns exemplos de como a matemática se integra a outras disciplinas (PIMENTEL, 2020).

O papel do professor de matemática como facilitador é essencial nesse processo. Os alunos devem desenvolver habilidades de resolução de problemas, pensamento crítico e raciocínio lógico. Além disso, o professor também poderá estimular a conexão entre a matemática e outras disciplinas, mostrando aos alunos como os conceitos matemáticos são aplicados em diferentes contextos.

A resolução de problemas matemáticos pode ser dividida em quatro fases:

a. **Compreensão do problema:** Nesta fase, os alunos devem ler atentamente o problema, identificar os dados relevantes, compreender o que está sendo solicitado e estabelecer uma compreensão clara do problema em si.

b. **Estabelecimento de um plano de resolução:** Nessa etapa, os alunos devem pensar em diferentes estratégias e abordagens possíveis para resolver o problema. Isso pode envolver a identificação de padrões, o uso de modelos ou representações visuais, a decomposição do problema em partes menores, entre outras estratégias.

c. **Execução do plano**: Aqui, os alunos colocam em prática o plano estabelecido, realizando cálculos, aplicando fórmulas, manipulando equações, entre outras ações necessárias para chegar à solução.

d. **Retrospecto:** Após encontrar a solução, é importante que os alunos reflitam sobre o processo que os levou a ela. Essa fase de retrospecto permite que eles revisitem o caminho percorrido, analisem possíveis erros, identifiquem alternativas de resolução e compreendam melhor os conceitos matemáticos envolvidos.

Ao seguir essas fases, os alunos desenvolvem uma abordagem sistemática e metacognitiva para a resolução de problemas, o que os auxilia a enfrentar desafios matemáticos de forma mais eficiente e autônoma.

Além disso, a colaboração entre professores de diferentes disciplinas pode ser uma estratégia eficaz para desenvolver materiais e abordagens interdisciplinares. Compartilhar experiências, recursos e ideias com outros educadores pode ajudar na criação de materiais adequados e enriquecer as práticas de ensino.

A busca por alternativas e o desenvolvimento de materiais adequados são desafios importantes, mas também podem abrir espaço para a criatividade e a inovação no ensino da matemática. O importante é continuar explorando maneiras de integrar a matemática em diferentes disciplinas, permitindo que os alunos entendam e apliquem conceitos matemáticos em uma variedade de contextos e promovam uma aprendizagem significativa.

O professor desempenha um papel fundamental ao orientar e apoiar os alunos em cada uma dessas fases, promovendo discussões em sala de aula, fornecendo feedback adequado e incentivando a reflexão sobre os processos utilizados. Dessa forma, os estudantes podem aprimorar suas habilidades matemáticas e compreender a importância da matemática em sua vida cotidiana.

2.2 DIRETRIZES CURRICULARRES DE MATEMÁTICA E O USO DA TECNOLOGIA

As Diretrizes Curriculares de Matemática enfatizam a importância de incorporar a história da matemática no ensino, utilizando problemas históricos como base para a compreensão dos conceitos matemáticos. Essa abordagem permite que os alunos percebam a matemática como um campo em constante construção e desenvolvam uma visão mais ampla e contextualizada da disciplina (BNCC, 2020).

O uso da tecnologia, como calculadoras, aplicativos da internet, softwares e programas computacionais, desempenha um papel importante na potencialização das maneiras de resolução de problemas. Esses recursos podem oferecer diferentes abordagens, estratégias e representações visuais, facilitando a compreensão dos conceitos matemáticos e auxiliando os alunos em sua resolução (LIMA, 2020; MOREIRA et. al., 2021).

Ao utilizar a tecnologia, os alunos podem explorar visualizações interativas, realizar cálculos complexos de forma mais eficiente, experimentar e testar hipóteses, além de terem acesso a informações e referências adicionais. Isso amplia as possibilidades de abordagem e enriquece a experiência de aprendizagem, tornando-a mais envolvente e significativa (SANTOS, 2018).

A resolução de problemas matemáticos é de fato fundamental para o ensino da matemática, pois permite que os alunos apliquem conceitos e habilidades matemáticas em contextos reais e relevantes. Essa abordagem ajuda a desenvolver o pensamento crítico, o raciocínio lógico, a capacidade de tomada de decisões e a resolução de problemas do cotidiano.

Além disso, a resolução de problemas matemáticos também contribui para a interdisciplinaridade, permitindo que os alunos apliquem conceitos e métodos matemáticos em situações oriundas de práticas sociais e de outras áreas do conhecimento. Dessa forma, a matemática se torna uma ferramenta poderosa para a compreensão e resolução de desafios em diferentes campos.

A combinação da história da matemática, resolução de problemas e o uso da tecnologia proporciona uma abordagem enriquecedora para o ensino da matemática, permitindo que os alunos compreendam conceitos de forma mais profunda, desenvolvam habilidades de resolução de problemas e apreciem a relevância da matemática em diversas áreas da vida (DEMARTINI, et. al., 2022).

2.3 O ENSINO DA MATEMÁTICA UTILIZANDO PROJETOS

O ensino da matemática utilizando projetos é uma abordagem pedagógica que busca envolver os alunos de forma prática e contextualizada, permitindo a aplicação dos conceitos matemáticos em situações reais e significativas. Essa metodologia tem se mostrado eficaz no desenvolvimento do pensamento crítico e na motivação dos estudantes, pois os desafia a resolver problemas reais utilizando os conceitos matemáticos aprendidos em sala de aula (PIMENTEL, 2020; SANTOS, 2018).

Um dos principais benefícios do ensino da matemática utilizando projetos é a sua capacidade de tornar a aprendizagem mais concreta e conectada à realidade dos estudantes. Os projetos permitem que os alunos se apropriem do conhecimento matemático ao aplicá-lo em situações reais, como calcular a área de um terreno, simular uma situação financeira, analisar gráficos de dados reais, entre outros. Essa abordagem ajuda a tornar a matemática mais significativa na vida dos alunos, tornando-os mais engajados e interessados no processo de aprendizado (PEGO, 2014; OLIVEIRA, et. al 2023).

Além disso, o uso de projetos no ensino da matemática estimula o desenvolvimento de habilidades como o trabalho em equipe, a comunicação eficaz, a resolução de problemas complexos e a capacidade de tomar decisões fundamentadas. Os projetos geralmente envolvem atividades práticas e colaborativas, o que permite aos estudantes compartilharem ideias, discutirem soluções e apresentarem seus resultados. Essas habilidades são essenciais para a formação dos alunos como cidadãos críticos e atuantes na sociedade.

Existem diversos recursos e ferramentas que podem ser utilizados no ensino da matemática por meio de projetos. Um exemplo é a utilização de tecnologias como softwares matemáticos, planilhas eletrônicas e aplicativos, que auxiliam na visualização e na resolução de problemas complexos. Também é possível explorar materiais manipulativos, jogos, desafios e estudos de caso para tornar a aprendizagem mais dinâmica e envolvente.

2.4 ESCALA DODECAFÔNICA TEMPERADA

Ao longo dos séculos, vários matemáticos e músicos contribuíram para o desenvolvimento da teoria musical e da afinação. A escala dodecafônica temperada, também conhecida como escala cromática temperada, é o resultado dessas contribuições ao longo do tempo (PEREIRA, 2013).

Embora Pitágoras seja frequentemente mencionado como um dos primeiros a investigar as relações matemáticas na música, a compreensão e o refinamento da teoria musical e da afinação continuaram a evoluir ao longo dos séculos. Outros matemáticos e músicos, como Aristóxeno, Euclides, Zarlino, Rameau, Euler e muitos outros, dedicaram-se ao estudo das relações matemáticas na música.

No decorrer desses estudos, foi percebido que a aplicação rigorosa do sistema pitagórico de afinação resultava em intervalos que não se encaixavam perfeitamente na divisão em 12 partes iguais da oitava. Isso levou ao desenvolvimento de abordagens de afinação temperada, com o objetivo de equalizar os intervalos dentro do sistema temperado.

A escala dodecafônica temperada, baseada nesse sistema temperado, divide a oitava em 12 semitons iguais. Essa abordagem permite que todas as tonalidades sejam transponíveis e executáveis em qualquer instrumento afinado de acordo com a escala temperada.

Embora Pitágoras tenha sido um dos pioneiros na exploração das relações matemáticas na música, a escala dodecafônica temperada é resultado do trabalho e dos avanços de vários matemáticos e músicos ao longo dos séculos, que contribuíram para a teoria musical e para o desenvolvimento da afinação (PEREIRA, 2013)..

Se na escala original de Pitágoras as notas eram em número de sete, na cromática, cinco novas notas foram acrescentadas entre as originais, resultando na seguinte escala: Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, Lá, Lá#, Si, Dó. Entre as notas Ré e Mi temos um tom e entre Mi e Fá, temos um semitom.

A música é efeito sonoro e o som é formado por ondas. O número de ondas repetidas em um determinado intervalo de tempo (vibrações por segundo) é denominado de frequência e sua unidade de medida é o Hertz (Hz). A nota musical Lá, referência na escala cromática, tem frequência de 440 Hz.

A escala cromática é dividida em intervalos de oito notas cada, denominados de oitavas. Cada oitava é constituída por 12 semitons. A frequência da extremidade superior é o dobro da frequência da extremidade inferior, pois quando uma frequência é duplicada, a nota permanece a mesma. Na escala cromática, cada intervalo de meio tom é 1,059 vezes o anterior. Esse valor foi obtido da seguinte forma: de Dó até Dó, 2 para 1, temos doze intervalos.

A relação entre as frequências das notas consecutivas na escala cromática é aproximadamente 1,0595.

Essa relação é derivada do conceito de equalização dos intervalos dentro da escala temperada. A divisão da oitava em 12 semitons iguais implica em cada intervalo de meio tom ser multiplicado por um fator de aproximadamente 1,0595 em relação ao intervalo anterior.

Cada oitava é constituída por 12 semitons. A frequência da extremidade superior é o dobro da frequência da extremidade inferior, pois quando uma frequência é duplicada, a nota permanece a mesma.

Tal relação é importante para a afinidade dos instrumentos musicais e para a transposição e execução de músicas em diferentes tonalidades.

3 | METODOLOGIA

A habilidade de resolver problemas é essencial para o desenvolvimento pessoal e profissional. Neste projeto, a resolução de problemas pela criação de músicas utilizando a lógica matemática, comunicação efetiva e a plataforma Arduino. Envolve a capacidade de compreender e analisar a situação em questão, identificar as informações relevantes, avaliar hipóteses e chegar a uma solução lógica.

Objetivos:

- desenvolver habilidades de resolução de problemas utilizando a lógica matemática;
- aprender a identificar informações relevantes e descartar informações irrelevantes;
- ampliar a capacidade de comunicação efetiva para transmitir ideias e soluções de maneira clara e coerente;
- criação de musicas e efeitos sonoros;
- fomentar a criatividade, a inovação e a capacidade crítica diante de problemas

diversos.

Para isso, será necessário que os alunos dominem conceitos básicos de lógica matemática, como operações matemáticas, expressões booleanas, sequências lógicas e outras habilidades que permitam a programação da plataforma Arduino.

O projeto será desenvolvido em três fases. Na primeira fase, serão realizados estudos teóricos sobre lógica matemática e técnicas de resolução de problemas, por meio de livros, artigos e vídeos.

Nessa fase, os participantes deverão desenvolver uma lista de problemas que serão resolvidos ao longo do projeto. O professor, apresentará a Escala Cromática de Pitágoras

Na segunda fase, será necessário que os alunos se comuniquem entre si que possam organizar suas ideias, trocar experiências (vários alunos da sala estudam música ou possuem experiencia musical, provavelmente) e avançar no processo de criação.

Na terceira fase, os participantes deverão selecionar um dos problemas apresentados na fase anterior para trabalhar em equipe na elaboração de uma solução utilizando as técnicas de lógica matemática e comunicação efetiva.

Primeira música: “parabéns para você”. Cada grupo deverá apresentar sua programação desenvolvida.

Os resultados esperados do desenvolvimento desse projeto são: o desenvolvimento de habilidades em resolução de problemas utilizando a lógica matemática e a comunicação efetiva e programação utilizando a plataforma Arduino, a compreensão das etapas necessárias para a elaboração de soluções coerentes e criativas e a utilização dessas habilidades para enfrentar problemas do cotidiano de maneira mais efetiva. Além disso, oferecer uma educação mais criativa e tecnológica aos alunos, permitindo que eles desenvolvam suas habilidades de forma integrada e prática.

DESENVOLVIMENTO:

Título do Projeto: Tocando “Parabéns pra Você” com Arduino e Escala Cromática de Pitágoras

Objetivo: Criar um dispositivo com Arduino que reproduza a melodia de “Parabéns pra Você” utilizando a escala cromática de Pitágoras.

Materiais necessários:

- Placa Arduino Uno
- Buzzer piezoelétrico
- Cabos de ligação

Passos do projeto:

Configuração do hardware:

- Conectar o buzzer piezoelétrico ao Arduino.
- Configuração do software:
- Abrir a IDE do Arduino no seu computador e crie um novo projeto.
- Definir as configurações de pinagem do buzzer no código.
- Importar a biblioteca necessária para controlar o buzzer.

Implementação do código:

- Escrever o código para reproduzir a melodia de "Parabéns pra Você" utilizando a escala cromática de Pitágoras.
- Mapear as notas da melodia para as frequências adequadas na escala de Pitágoras.
- Utilizar a função de controle do buzzer para reproduzir cada nota por um tempo específico.
- Implementar a sequência de notas correspondente à melodia completa da música.

Upload e teste:

- Conectar o Arduino ao computador e faça o upload do código para a placa.
- Verificar se o buzzer piezoelétrico está corretamente conectado.
- Executar o projeto e ouça a melodia de "Parabéns pra Você" sendo tocada pela escala cromática de Pitágoras.

Código Fonte:

```
#define NOTE_G4  392
#define NOTE_A4  440
#define NOTE_B4  494
#define NOTE_C5  523
#define NOTE_D5  587
#define NOTE_E5  659
#define NOTE_F5  698
#define NOTE_G5  784

int melody[] = {
 NOTE_G4, NOTE_G4, NOTE_A4, NOTE_G4, NOTE_C5, NOTE_B4,
 NOTE_G4, NOTE_G4, NOTE_A4, NOTE_G4, NOTE_D5, NOTE_C5,
 NOTE_G4, NOTE_G4, NOTE_G5, NOTE_E5, NOTE_C5, NOTE_B4, NOTE_A4,
 NOTE_F5, NOTE_F5, NOTE_E5, NOTE_C5, NOTE_D5, NOTE_C5
};
```

```
int noteDurations[] = {
  4, 4, 8, 8, 8, 2,
  4, 4, 8, 8, 8, 2,
  4, 4, 8, 8, 8, 8, 2,
  4, 4, 8, 8, 8, 2
};

void setup() {
}

void loop() {
  for (int i = 0; i < sizeof(melody) / sizeof(melody[0]); i++) {
    int noteDuration = 1000 / noteDurations[i];
    tone(8, melody[i], noteDuration);
    delay(noteDuration * 1.3);
    noTone(8);
    delay(50);
  }
}
```

4 I DISCUSSÃO

A busca por novos métodos de ensino da matemática e a aplicação interdisciplinar são de fato fundamentais no âmbito escolar. A matemática desempenha um papel central em várias áreas do conhecimento e sua compreensão é essencial para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, e seu ensino deve ir além da simples memorização de fórmulas e procedimentos.

A abordagem interdisciplinar permite que os estudantes façam conexões entre a matemática e outras disciplinas, tornando o aprendizado mais significativo. Ao relacionar a matemática com temas transversais, como conforto térmico, energia, agronegócio e impactos ambientais, e até mesmo canções musicais os alunos têm a oportunidade de ver a aplicação prática dos conceitos matemáticos em situações reais. Isso promove uma compreensão mais profunda e ampla da matemática, além de incentivar a resolução de problemas.

Além disso, a história da matemática desempenha um papel importante no ensino dessa disciplina. Ao introduzir problemas históricos, os alunos podem compreender como os conceitos matemáticos foram desenvolvidos ao longo do tempo e como a matemática é um campo em constante evolução. Isso contribui para uma visão mais abrangente da matemática e estimula o pensamento crítico e criativo.

A tecnologia, como a plataforma Arduino, é uma ferramenta valiosa para o ensino da matemática. Ela proporciona recursos e possibilidades para a resolução de problemas, análise de dados e simulações, o que enriquece a experiência dos alunos e torna o aprendizado mais envolvente. O uso de calculadoras, aplicativos, softwares e programas computacionais facilita a visualização e a experimentação de conceitos matemáticos, possibilitando uma maior compreensão e aplicação prática.

No entanto, é importante ressaltar que não existe um caminho único no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Cada professor, e também as escolas, devem propor e explorar diferentes abordagens e metodologias, adaptando-as às necessidades e características dos alunos. O diálogo e a troca de experiências entre os professores são fundamentais para o aprimoramento da prática docente e para a busca por alternativas que tornem o ensino da matemática mais efetivo e significativo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao enfatizar a resolução de problemas e a aplicação prática de projetos da matemática no dia a dia com o uso da tecnologia, os alunos desenvolvem habilidades de pensamento crítico, criatividade e raciocínio lógico.

As Diretrizes Curriculares de Matemática destacam a importância da história da matemática na elaboração de atividades, pois isso permite aos alunos compreender os conceitos matemáticos como parte de um campo do conhecimento em constante evolução. Além disso, o uso da tecnologia, como calculadoras, aplicativos, software e programas computacionais, amplia as possibilidades de resolução de problemas e enriquece o processo de ensino-aprendizagem.

A abordagem interdisciplinar da matemática é essencial, pois ela está presente em diversas áreas do conhecimento.

O uso da plataforma Arduino no ensino da matemática é uma forma interessante de promover a interdisciplinaridade e a aplicação prática dos conceitos matemáticos. Através de projetos envolvendo a escala cromática de Pitágoras, por exemplo, os alunos podem explorar a relação entre matemática e música, aplicando conceitos de frequência, intervalos e notas musicais.

O processo de ensino e aprendizagem da matemática requer uma abordagem diversificada e interdisciplinar, envolvendo a resolução de problemas, a contextualização dos conceitos matemáticos e a utilização de recursos tecnológicos. O professor desempenha um papel crucial como facilitador desse processo, buscando alternativas, desenvolvendo projetos e explorando diversas metodologias para proporcionar aos alunos uma experiência de aprendizagem enriquecedora e significativa.

REFERÊNCIAS

Base Nacional Comum Curricular. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 19 out. 2020.

CHAS, Dijalmary Matos Prates. Matemática e interdisciplinaridade: um estudo sobre os materiais didáticos. **Estação Científica (UNIFAP)**, Macapá, v. 6, n. 3, p. 97-109, set./dez. 2016.

DEMARTINI, Susana S.; LARA, Isabel C. M. **O ensino de matemática na realidade pandêmica: ferramentas tecnológicas utilizadas nos anos finais do ensino fundamental**, 2022. Disponível em: https://preprints.scielo.org/index.php/scielo/preprint/view/3633/version/3846 . Acessado em: Acessado em: 04 de jul. 2023.

LIMA, D. A.; COSTA, J. C. B. **Construção de uma metodologia para ensinar e aprender matemática - um estudo de caso da segunda série do ensino médio**. Disponível em: <http://www. diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/928-4.pdf >. Acesso em: 21 out. 2020.

MOREIRA, Marília M.; SILVA, Amsranon G.; ALVES, Francione, C. **O Ensino de Matemática na Educação Contemporânea: o devir entre a teoria e a práxis**. Iguatu, CE : Quipá Editora, 2021.

NOÉ, Marcos. **Interdisciplinaridade no Ensino da Matemática**, 2021. Disponível em: https:// educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/interdisciplinaridade-no-ensino-matematica.htm . Acessado em: 04 de jul. 2023.

CAMPO, D. M. ***A resolução de problemas como uma interface interdisciplinar entre a matemática e o ensino de ciências***. 2015. 73p. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

OLIVEIRA, Francisco G. , SILVEIRA, Ana L., MARTINS, Elcimar S. **O ensino de matemática através de projetos: tecendo experiências na educação de jovens e adultos.** Disponível em: http://editorarealize.com.br/editora/anais/join/2017/TRABALHO_EV081_MD1_SA75_ ID1977_13092017075459.pdf . Acessado em: 13 de jun. de 2023.

PEGO, Rudnei N. , NUNES, Vanessa B. O ensino-apredizagem de matemática por meio de projetos envolvendo profissões: um estudo de caso no ensino fundamental. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, ISSN: 2236-2150 - V. 04, N. 01, p. 52 - 51, Junho, 2014.

PEREIRA, Marcos. **Matemática e Música - De Pitágoras aos dias de hoje**. UNIRIO, Rio de Janeiro, RJ. 2013.

PIMENTEL, Ronaldo; SANTOS, F. M. Sobre a Efetividade da Matemática nas Ciências Naturais: Uma abordagem Pragmática Estruturalista. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, vol. 42, 2020.

SANTOS, Bruno H. M.; ARTUR, L. S.; OLIVEIRA, Elinelson G.; LEITE, Lidianne L.; PONTES, Edel A. S. Jogos Matemáticos como ferramenta educacional lúdica no processo de ensino e aprendizagem de matemática na educação básica. **Revista Brasileira de Ensino e Aprendizagem**, v.4, p.246-254, 2022.

SANTOS, D. N.; SOARES, M. A. S. **Relação entre a matemática e outras áreas do conhecimento: análise de uma coleção de livros didáticos de matemática do ensino médio.** Universidade Federal do Pampa - Campus Caçapava do Sul, Caçapava do Sul, 2018.

IDENTIDAD DOCENTE INCLUSIVA EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA

Data de aceite: 02/08/2023

Maite Otondo Briceño
Universidad Católica de La Santísima Concepción
https://Orcid.org/0000-0001-9513-3794

Gabriela Monserrat Barra Torres
Universidad Católica de La Santísima Concepción

Viviana Catalina Candia Ponce
Universidad Católica de La Santísima Concepción

Fabiola Valentina Muñoz Conejeros
Universidad Católica de La Santísima Concepción

Josette Gyubel Vega Olivos
Universidad Católica de La Santísima Concepción

*Asociado al proyecto interno de la Universidad Católica de la Santísima Concepción DIN 12/2021

RESUMEN: En la investigación se analiza el impacto de la formación inicial docente en una identidad profesional para la educación inclusiva del profesorado en formación y formadores de Pedagogía en Educación Media en Matemática en una Universidad de la región del Biobío. El objetivo es analizar sobre la mirada inclusiva que otorgan tanto el estudiantado de la carrera, egresados y el profesorado que la imparte. El estudio se realiza con un enfoque metodológico cualitativo y la recogida de datos e información se sustrae por medio de entrevistas semiestructuradas. El análisis cualitativo se ejecuta mediante el análisis de contenido de las entrevistas y matriz de cruzamientos entre todos los actores. Cabe mencionar que en este estudio participan diez informantes claves de las cuales cuatro pertenecen al estudiantado en formación, tres egresados y finalmente tres pertenecen al profesorado. Se concluye que la inclusión educativa no es uno de los aspectos más cruciales abordados en la malla curricular de la Universidad investigada, lo que proporciona escasas herramientas de apoyo, para llevar a cabo metodologías que respondan a la diversidad en el aula. Es por esto, que la identidad docente inclusiva del profesorado de matemáticas se ve obstaculizada por carentes aprendizajes basados en la inclusión.

PALABRAS CLAVE: Formación inicial docente; Inclusión educativa; identidad profesional docente; necesidades educativas especiales.

ABSTRACT: This research analyzes the impact of initial teacher training on a professional identity for inclusive education of teachers in training and trainers of Pedagogy in Secondary Education in Mathematics at a University in the Biobío region. The objective is to analyze the inclusive view given by students, graduates and the teaching staff. The study was conducted with a qualitative methodological approach and the data and information was collected through semi-structured interviews. The qualitative analysis was executed by means of the interview analysis and crossover matrix. It is worth mentioning that ten key informants participate in this study, of which four belong to the student body in formation, three graduates and finally three belong to the teaching staff. It is concluded that educational inclusion is not one of the most crucial aspects addressed in the curriculum of the investigated university, which provides few support tools to carry out methodologies that respond to diversity in the classroom. Therefore, the inclusive teaching identity of mathematics teachers is hindered by a lack of learning based on inclusion.
KEYWORDS: Inclusive education, teacher professional identity, initial teacher training, special educational needs. initial teacher training, special educational needs

INTRODUCCIÓN

La identidad docente inclusiva se construye a través de la formación, la teorización y la práctica, las cuales permiten generar experiencias enriquecedoras al docente en cuestión.

La educación inclusiva es un pilar común para los sistemas educativos, y tiene como objetivo último proporcionar entornos de aprendizaje efectivos para todo el estudiantado. El camino que ha necesitado, para lo anterior, demanda la responsabilidad de la comunidad educativa, especialmente del profesorado, ya que ellos son los actores fundamentales para implementar la inclusión en las aulas (Espinoza et al.,2020).

La influencia del profesorado en el logro del aprendizaje es algo ineludible. Lo anterior, es un desafío, ya que, en los sistemas educativos confluyen alumnado con diversas características y necesidades educativas especiales (Espinoza et al., 2020), y para que éstos puedan tener acceso y participación del currículum académico y recibir una educación integral, considerando su diversidad, es preciso que el docente se caracterice por una identidad docente inclusiva en sus prácticas pedagógicas de aula.

IDENTIDAD DOCENTE

La Identidad Docente (ID), para algunos autores, se basa en dos elementos fundamentales los cuales son: el ámbito personal y el ámbito profesional, y, son aquellos que se ven complementados en la práctica pedagógica y en procesos reflexivos. Según Fingermann (2018) la identidad es aquella que nos entrega cualidades que nos da distinción, es decir nos distingue de otros, de forma individual o grupal. Esta se va construyendo de forma dinámica y continua, relacionada con el contexto social, desarrollando el actuar de modo responsable, para ser a la vez, ejemplo y líder, comunicador, autoridad y apoyo al estudiantado. La ID comienza a construirse desde la formación inicial, de manera individual y social, con las vivencias personales, colaborativas que se van adquiriendo con el paso del tiempo en las prácticas pedagógicas, esto quiere decir que se considera un proceso evolutivo.

Los docentes tienen el compromiso de actualizarse de forma periódica, por los cambios que existen en la sociedad, como en las herramientas para enseñar, metodologías de enseñanza incorporando las tecnologías, diversificar las estrategias de enseñanza para que todos los estudiantes puedan acceder al objetivo de aprendizaje, respetando sus tiempos y estilos para aprender, estas son muy relevantes para la ID porque con ella se puede observar qué tan vinculado se encuentra el docente con el proceso de enseñanza-aprendizaje con su estudiantado.

Un eje muy importante que es partícipe activo del proceso de identidad docente es la reflexión, en el cual el profesorado puede dar cuenta que esta influye en la toma de decisiones, en su actuar de forma cotidiana, permite aprender de las experiencias propias y de otros, mejora considerablemente en las actividades pedagógicas e incluso genera conciencia por cada experiencia, lo que genera un impacto positivo. Es un proceso de construcción de sí mismo profesionalmente el cual incluye el compromiso personal, disposición por enseñar, sin embargo, se forma en un contexto colectivo social, es decir de la interacción con los demás, a través de este proceso de sociabilidad los docentes internalizan una identidad según satisfaga sus expectativas, aprendiendo unos de otros.

INCLUSIÓN EDUCATIVA

Si bien el concepto de educación inclusiva es tentador de llevar a cabo, se requiere una escala procesual para su completa aplicación, con esto nos referimos a que si nos adherimos totalmente a esta metodología de educación deberíamos haber practicado la integración anteriormente o como lo plantea Pamela Iturra "La reestructuración hacia una educación inclusiva es aún un proceso en marcha, con distintos niveles de logro y enfrentando diferentes desafíos dependiendo del contexto cultural y social" (Iturra, 2019, p.4) Es por este motivo que la inclusión educativa se ve como un proceso que requiere haber superado ciertas etapas para llegar a una inclusión en su plenitud.

La educación inclusiva tiene como objetivo identificar y eliminar aquellas barreras que no le permitan a los estudiantes sentirse cómodos e incluidos dentro del contexto educativo, donde el establecimiento en el cual está inmerso tiene la obligación de generar cambios y modificaciones en sus contenidos adaptándose a los intereses, características, capacidades y necesidades de aprendizajes con las que cuentan sus educandos, así también estas responsabilidades descritas anteriormente recaen en los docentes y comunidad educativa que participa en el establecimiento, como se afirma en García et al. (2018)

Desde una perspectiva inclusiva todo el estudiantado importa y cada uno tiene el mismo nivel de importancia. Consecuentemente, las diferencias individuales no pueden ser vistas como problemas a ser resueltos, sino como oportunidades para democratizar y enriquecer la enseñanza y aprendizaje. Así también Infante (2010) plantea que:

> El concepto de inclusión ha adquirido un énfasis especial durante los últimos años en el contexto educativo latinoamericano y particularmente el chileno, visibilizando en ámbitos como políticas públicas y acciones gubernamentales. Esta representación del concepto de inclusión regula no sólo las prácticas educacionales (enseñanza, metodología, currículum, entre otras) sino las ideas sobre situaciones de exclusión, diversidad y de manera significativa, sobre la construcción de identidades. (p.288)

Es por este motivo que se destaca el término de educación inclusiva, si bien alude a la educación, es fundamental que sea implementado a nivel global dentro de un país tal así como lo indica UNESCO (2017) "el sistema educativo está tratando de aplicar el principio de inclusión a través de cambios en las políticas y en la cultura" (p.18), ya que de este modo, no sería necesario modificar prácticas docentes o contextos para aquellos estudiantes que lo requieran, ya que, el fin único de la inclusión es generar contextos donde nada ni nadie le impida al estudiantado acceder al currículum o como lo plantea Infante (2010) "hacer las prácticas inclusivas en educación accesibles a todas las personas" (p.288) Clarke y Faragher (2015) perciben la inclusión educativa como una muestra de valores dentro del contexto educativo, donde al llevarla a la práctica se debe incorporar con estrategias y acercamientos que involucren a la filosofía, como desarrollo de la educación inclusiva. La cual acuña el termino de educación especial que es el primer término que se emplea en el contexto educativo haciendo alusión a las necesidades educativas especiales que puedan presentar los estudiantes, los cuales eran observados desde una perspectiva clínica antes que educativa, haciendo alusión a que aquellas personas tenían posibilidades de sanar en algún sentido. De acuerdo con Godoy, Meza y Salazar 2004 (citado en Ramos, 2014) "la educación especial, desde sus inicios, ha estado estrechamente vinculada con las ciencias de la medicina y la psicología (p. 3), construyendo una visión del sujeto con discapacidad como alguien que debe ser curado o corregido" (p.39) debido a esto se cree necesario implementar una estrategia inclusiva en el sistema escolar chileno que atendiera a el alumnado con alguna NEE es así como se crea el Programa de integración escolar que busca contribuir en el mejoramiento de la calidad de la educación, favoreciendo la participación, logro de los aprendizajes y permanencia en el aula de todos los estudiantes especialmente de aquellos que presenten necesidades educativas transitorias o permanentes. Acerca a los niños al currículum desde una metodología de enseñanza diversa, que se enfoca en las capacidades e intereses de los alumnos para desde allí abordar los contenidos dentro del aula y fuera de ella con un trabajo más individualizado. Trabajando la interacción social de los niños brindándoles las oportunidades de desarrollos necesarias para su participación en el sistema educativo, eliminando todas las barreras posibles. Todo lo anteriormente regido por el decreto 170. De acuerdo con Pozo Lobos (2016)

> Es una estrategia educativa con enfoque inclusivo, en la medida en que su propósito es favorecer la participación y el logro de los objetivos de aprendizaje de todos los estudiantes, aportando recursos y equiparando las oportunidades educativas especialmente para aquellos que presentan mayores necesidades de apoyo para progresar en sus aprendizajes. (p.9)

Dicho decreto se encarga de la subvención a los niños y niñas con necesidades educativas especiales, nace en base a la respuesta a la educación especial surge en el año 2007, se promulga en el año 2009 y publicado en el año 2010 bajo el gobierno de Michelle Bachelet. Según el MINEDUC 2010) "Fija normas para determinar los alumnos con necesidades educativas especiales que serán beneficiarios de las subvenciones para la educación especial". ¿Pero a que llamamos Necesidades educativas especiales?

A aquellas barreras tanto cognitivas, psicológicas y/o sociales con las que cuente el educando para lograr llegar al proceso de aprendizaje - enseñanza efectivo, dichas necesidades pueden presentarse de forma permanente en la vida del individuo o transitorias la temporalidad de la patología determinará los apoyos y recursos que se deben entregar al alumno.

Según Granado (2006) Es recomendable analizar las necesidades educativas especiales desde 3 puntos de vista las ciencias biológicas- médicas que se basan en la neurología, genética, pediatría o psiquiatría, ciencias psicológicas aportan información de acuerdo con el comportamiento del aprendizaje, diagnóstico, trastorno o déficit, inteligencia y memoria, entre otros y las ciencias de la educación que se centran en intervenir en el diagnóstico, desde diferentes contextos, aula, familia y sociedad en conjunto teniendo la misión de orientar al estudiante en sus procesos de aprendizajes. Para que este proceso se lleve a cabo de una forma idónea se implementa la Ley N°20.845 de Inclusión Escolar en junio del 2015 establece un hito fundamental en esta dirección, a través de la generación de condiciones para el avance hacia un sistema educacional más inclusivo a través de la eliminación de la selección en los procesos de admisión y el fin del copago en establecimientos que reciben subvención del Estado. De esta manera, su implementación favorecerá una distribución más heterogénea de la población escolar en los diferentes establecimientos educacionales. Complementariamente, y haciéndose cargo de que una distribución más equitativa y heterogénea de la matrícula constituye un primer paso que requiere un correlato estratégico en la definición de los caminos de mejoramiento de cada comunidad educativa, la ley establece también la necesidad de que todos los establecimientos desarrollen "planes de apoyo a la inclusión" (MINEDUC et al., 2016, p.2)

MATEMÁTICAS INCLUSIVAS

Godino et. al. (2017) presentan un modelo que intenta articular categorías de conocimientos y las competencias didácticas que debería tener el profesor de matemáticas para impartir clases. En este artículo se destaca la importancia de "evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio (p.94)" Todo esto acompañado de un análisis del contexto donde se desenvuelve el profesorado, entregando al estudiantado las herramientas matemáticas que serán relevantes para su desarrollo en la vida. Por lo anterior mencionado, se concluye que el profesorado de matemáticas debe contar con competencias que, por una parte, le permitan adecuarse al ambiente donde se desarrolla, y por otra, entregar los conocimientos elementales a su estudiantado. Por otra parte, Aké (2016) comenta que la investigación existente evidencia que una de las principales barreras al momento de impartir clases de matemáticas en la educación secundaria es la formación inadecuada de los profesores para enseñar a los estudiantes con necesidades educativas especiales, tales como: Conocimiento Didácticos Matemáticos; Idoneidad Didáctica; Idoneidad epistémica; Idoneidad cognitiva; Idoneidad interaccional; Idoneidad mediacional; Idoneidad afectiva; Idoneidad ecológica.

Este modelo considera muchos aspectos relevantes a considerar al momento de realizar las planificaciones de cada clase, y para el área curricular de matemáticas es elemental considerar todos los factores expuestos. Esto debido a que la didáctica de la matemática considera un desafío, el cual es "el estudio de las condiciones para que todos los estudiantes aprendan matemáticas dentro de la escuela. Adoptar esta posición no implica negar las diferencias, sino responsabilizarse de la diversidad generando las mejores condiciones específicas para cada caso o situación" (Broitman y Sancha, 2021).

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

El método para llevar a cabo la investigación fue de carácter cualitativo. De acuerdo a Herrera (2017) los investigadores cualitativos estudian la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar, los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas. (p.8).

En la investigación correspondió a estudiar y analizar el contexto del profesorado en formación, ex alumnos y profesorado acerca de su formación o labor docente en la inclusión, posteriormente se interpretaron los resultados, para finalmente visualizar las similitudes y diferencias de cada vivencia o experiencia.

Se empleó el paradigma interpretativo, ya que se recogió la información a partir de entrevistas, contando con experiencias personales, puntos de vista y metodologías de trabajo.

El diseño utilizado fue fenomenológico, ya que se enfocó en el análisis de la experiencia del estudiantado, egresados y profesorado de una Universidad de la región del Biobío frente a inclusión educativa. Siendo éstas el principal centro de indagación, donde se busca "hallar leyes que gobiernan lo real, donde la persona es concebida como un objeto más de naturaleza" (Fuster, 2019, p. 203).

El tipo fue estudio de caso de datos no numéricos, porque fue enfocado en un grupo determinado de personas, investigando sus experiencias, para con ellas nutrir respecto a formación e identidad inclusiva y en el desarrollo determinar los resultados (Yin, 2018).

Por lo anterior, fue importante conocer la perspectiva de los tres grupos entrevistados, ya que cada acción los impacta de forma distinta, creando su propio criterio.

INSTRUMENTO DE RECOGIDA DE INFORMACIÓN

El instrumento para recopilar información fue la entrevista semi estructurada, ya que se "buscó recopilar la interpretación que cada evaluado posee en base a su experiencia" (Fuster, 2019, p. 210). Se utilizaron dos guiones de entrevistas, uno enfocado a estudiantes y egresados el mismo y otro para profesorado. En general, las preguntas estuvieron orientadas a recopilar información sobre las doce categorías. En las siguientes tablas se exponen los guiones utilizados para realizar las entrevistas a los estudiantes, egresados y profesorado de la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática:

Tabla 1

Guion entrevista estudiantes y egresados de la carrera

Tema	**Subtemas**
Identificación	Autopresentación
Identidad docente	Concepto de inclusión educativa
Experiencias en inclusión educativa	Experiencias en educación inclusiva en enseñanza
Desarrollo laboral e integración al contexto pedagógico	Roles en el aula
	Co-enseñanza en el aula
Internalización de la inclusión educativa	Motivaciones sobre la carrera lectiva
	La inclusión en el ámbito educativo y personal.

En síntesis, el guion de entrevista de estudiantes y egresados constaba con: 5 temas o categorías de análisis y 7 sub temas o categorías de análisis, cada una de ellas con las preguntas correspondientes.

Tabla 2

Guion entrevista profesorado de la carrera

Tema	Subtemas
Identificación	Autopresentación
Identidad docente	Concepto de inclusión educativa
Experiencias en inclusión educativa Experiencias en educación inclusiva en enseñanza	
Desarrollo laboral e integración al contexto pedagógico	Roles en el aula
	Co-enseñanza en el aula
Internalización de la inclusión educativa	Motivaciones sobre la carrera lectiva y su desarrollo docente en la inclusión.
	Estudios posteriores o acciones concretas que realiza para potenciar la inclusión en sus estudiantes.

Asimismo, el guion de entrevista de profesorado constaba con: 5 temas o categorías de análisis y 7 sub temas o subcategorías de análisis, cada una de ellas con las preguntas correspondientes.

Muestra

La constituyeron estudiantado titulado y profesorado de una Universidad de la región del Biobío de la provincia de Concepción. El muestreo número 1, conformado por estudiantado de Pedagogía en Educación Media en Matemática y el muestreo número 2, conformado por titulados de Pedagogía en Educación Media en Matemática. Finalmente se encuentra el muestreo número 3, correspondiente al profesorado formadores que imparten clases en Pedagogía en Educación Media en Matemática.

Tabla 3

Muestra

Participantes	Descripción	Cantidad
Estudiantes	Estudiantes de 3° o 4° año de la carrera Pedagogía en Educación Media en Matemática	4
Egresados	Titulados que llevan al menos 5 años de egresados de la carrera Pedagogía en Educación Media en Matemática.	3
Profesorado	Profesores de la carrera Pedagogía en Educación Media en Matemática.	3

Con un total de 10 actores que conforman el estudio se realizaron entrevistas personalizadas para cada uno de los involucrados con consentimiento previo y autorización institucional para llevarlas a cabo.

Tabla 4

Validación de expertos

Académicos validadores	Instrumento validado	Para quienes es la entrevista
- Académico 1 - Académico 2 - Académico 3 - Académico 4 - Académico 5	Entrevista dirigida a profesorado.	Profesorado que imparte clases en una Universidad de la región del Biobío en la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemáticas.
- Profesorado 1 - Profesorado 2 - Profesorado 3 - Profesorado 4 - Profesorado 5	Entrevista dirigida a estudiantes y ex estudiantes.	Estudiantes de Pedagogía en Educación Media en Matemáticas de Universidades de del Biobío. Egresados de Pedagogía en Educación Media en Matemáticas en una Universidades del Biobío.

Mediante académicos y profesores idóneos que realizaron la validación, posteriormente se llevó a cabo su aplicación.

Cuando se recibieron las validaciones de las entrevistas, se procedió a realizar las modificaciones pertinentes del guion y su posterior aplicación.

Finalizando el proceso de entrevistas, se realizó la transcripción correspondiente de éstas, para posteriormente realizar el análisis de primer orden, es decir, análisis de contenido, mediante un libro de códigos, donde se presentaron los conceptos pedagógicos principales, las citas relacionadas a cada uno y su frecuencia en los relatos. Este libro de códigos se dividió en los 3 distintos actores (estudiantado, egresados y profesorado).

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Se llevó a cabo la transcripción de las entrevistas en base a un libro de códigos, donde se plasmaron aquellas citas que se consideraron más relevantes para la investigación. En la tabla 5 se muestra el libro de códigos utilizados en la investigación:

Tabla 5

Libro de códigos

Concepto	Código	Descripción
Perspectiva personal	PPIE	Observación de la visión respecto a inclusión educativa.
Docente inclusivo	DI	Observar la percepción personal de lo que significa ser un docente inclusivo desde el rol profesional.
Experiencia inclusión educativa	EIE	Observar y describir las experiencias en inclusión educativa.
Responsabilidad inclusiva	RI	Observar y describir la responsabilidad inclusiva dentro de su enseñanza.
Metodologías de enseñanza	ME	Observar las metodologías para responder a la inclusión educativa.
Diversificación del aula	DA	Observar y describir los roles de la diversificación del aula.
Trabajo colaborativo	TC	Analizar la perspectiva personal de trabajo colaborativo de un profesor de matemática y una profesora diferencial.
Preparación profesional inclusiva (docentes)	PPI	Análisis del nivel de preparación profesional de educación inclusiva de la universidad en la formación inicial docente.
Preparación profesional inclusiva (ellos)	PPI	Análisis personal de preparación profesional inclusiva para impartir clases significativas y motivadoras.
Motivaciones de carrera de interés	MCI	Observaciones de motivos de elección de carrera de interés.
Acciones de inclusión dentro del aula	AIDA	Observación de acciones de inclusión dentro del aula, enfocadas en metodologías didácticas y/o inclusión.
Estilos de aprendizaje.	EA	Descripción de la presencia o ausencia de análisis de estilos de aprendizaje dentro del aula.

El libro de códigos se utilizó en base a una categorización, que hace referencia a dividir los actores por categorías de acuerdo al proceso de adquisición de la educación inclusiva, es decir, por estudiantado, egresados y profesorado.

Luego se procedió a realizar el análisis cualitativo, donde extrajeron datos relevantes de las citas seleccionadas para luego realizar conclusiones de la misma que nos permite de mejor manera comprender el problema de la investigación.

Finalmente se concluyó con una matriz de cruzamiento por hallazgo de descriptores, convergencias y divergencias la cual nos lleva a un análisis cualitativo sobre el nivel de conocimiento e instrucción previa que han adquirido los diversos actores a través de experiencias y formaciones en la educación inclusiva al igual que la ausencia de esta.

RESULTADOS

Resultados del Análisis de las Entrevistas

La siguiente tabla representa el resultado del análisis del actor 1, correspondiente al estudiantado de la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática de una Universidad de la Región del Biobío, con una muestra total de 4 estudiantes.

Tabla 7

Matriz de cruzamiento de hallazgo por descriptor, convergencias y divergencias de estudiantado

Descriptor	Convergencias	Divergencias
Perspectiva personal de la inclusión educativa	Los entrevistados consideran que la inclusión es relevante. Se ve desde una mirada de que todos los estudiantes deben participar e involucrarse en el proceso de enseñanza.	Un relato hace referencia hacia las necesidades educativas especiales, el resto tiene una mirada de respeto y con mayor referencia a trabajo colaborativo.
Docente inclusivo	La labor docente inclusiva como principio personal moral e investigar el contexto escolar y las NEE para saber abordarlas. Asimismo, conocer el contexto de la clase y sus estudiantes.	Un relato hace referencia a que la educación inclusiva ya está inculcada en los docentes. Los demás comentan que para ser inclusivos deben informarse. Un relato comenta que es responsabilidad del docente la inclusión.
Experiencias de inclusión educativa	Experiencias en inclusión educativa no fueron positivas, en su mayoría, aprendieron de estas mismas para mejorar en sus acciones inclusivas.	Algunos viven la experiencia de inclusión educativa aisladamente, sin generar cambios. No todos son capaces de mencionar la necesidad educativa especial que está involucrada en su experiencia.
Responsabilidad Inclusiva	Todos los actores creen que al ser docentes cumplen con las responsabilidades inclusivas.	Un relato hace referencia a no suplir a un profesional como psicólogo, profesora diferencial, entre otros. Otro hace alusión a las acciones que llevan a la inclusión (hechos) y otros plantean la inclusión de una manera más curricular, modifican su metodología.
Metodologías de enseñanza	Todos protagonizan al estudiante para crear una metodología de enseñanza, estilos de aprendizaje, etc.	Cada relato hace relación a diferentes metodologías de enseñanza.
Diversificación en el aula	Todos hacen referencia a que el profesor de asignatura y la profesora de educación diferencial son los principales encargados.	Hacen hincapié en: diversificación en el aula está compuesta por varios actores, hacen alusión sólo al profesor de aula.
Trabajo colaborativo	Todos mencionan que requieren de una educadora diferencial para ejercer el trabajo colaborativo.	Hacen alusión a la cordialidad entre profesora diferencial y profesor de asignatura, pero no compartir conocimientos trabajo colaborativo.
Preparación profesional inclusiva (Docentes)	Se hace alusión a la falta de herramientas con características inclusivas para afrontar a estudiantes que tengan necesidades educativas especiales.	Pocas acciones inclusivas se asocian a ciertos profesores, lo hacen porque quieren hacerlo.
Preparación profesional inclusiva (ellos)	La universidad les otorga un bajo nivel de preparación profesional inclusiva.	No existen divergencias en el análisis de este concepto.

Motivaciones de la carrera de interés	Eligieron la carrera debido a que les gusta el proceso de enseñanza, eligieron enseñar matemáticas debido a que eran buenos en eso.	Un estudiante que asocia la elección de su carrera con la formación que le dieron sus profesores en el colegio.
Acciones de inclusión dentro del aula	Se hace referencia a conocer el contexto y la diversidad que se encuentra en el aula, para poder dar respuesta a esta misma.	Solo un estudiante habla de metodologías didácticas concretas para realizar acciones de inclusión dentro del aula.
Estilos de aprendizaje	Importancia de conocer los estilos de aprendizaje de los estudiantes, no han creado instancias para conocerlos.	No se observan divergencias en los relatos.

En esta tabla se realizó el análisis de los resultados obtenidos en las entrevistas, la cual se encuentra evidenciada en su respectiva matriz de cruzamiento de hallazgos entre convergencias y divergencias por descriptor, de las reflexiones obtenidas, se presenta a continuación los resultados del análisis de las entrevistas en la tabla 8.

La siguiente tabla representa el resultado del análisis del actor 2, correspondiente a egresados de la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática de una Universidad de la Región del Biobío, con una muestra total de 3 egresados.

Tabla 8

Matriz de cruzamiento de hallazgo por descriptor, convergencias y divergencias de titulados.

Descriptor	**Convergencias**	**Divergencias**
Perspectiva personal de la inclusión educativa	Consideran que la inclusión es importante priorizando las necesidades de los estudiantes siendo un desafío continuo para estos.	Un entrevistado hace referencia a la inclusión como un desafío personal.
Docente inclusivo	Mencionan y promueven el respeto de no segregar a ningún estudiante.	Un relato hace relevancia en que la responsabilidad de un docente inclusivo parte desde la vocación.
Experiencias de inclusión educativa	Experiencias positivas, fueron reflexivas y enriquecedoras tolerantes, empáticas, comprensivas, instancias generadas por la universidad.	Predominan las negativas.
Responsabilidad Inclusiva	No se observan.	Diversas, el primero, depende del clima de aula, el segundo, responsabilidad que sus estudiantes aprendan el contenido y el tercero, sin responsabilidad por no tener una formación.
Metodologías de enseñanza	Sus metodologías no varían en absoluto.	Utiliza metodologías personalizadas. Generan ideas, pero si ejecutar, usan métodos arcaicos, en cursos avanzados no los nivelan.

Diversificación en el aula	No se observan convergencias.	El profesor de asignatura asume el rol, pero también la profesora diferencial cumple un rol fundamental.
Trabajo colaborativo	No se observan convergencias.	No es claro el papel de la profesora diferencial, debiese especializarse para ser más valorada. Otro, prioriza preparar una buena clase para sus estudiantes que trabajar de forma colaborativa.
Preparación profesional inclusiva (Docentes)	Falta formación profesional docente.	Hacen alusión a realizar esfuerzos para implementar una preparación profesional inclusiva con otros colegas, no se han contemplado los resultados.
Preparación profesional inclusiva (ellos)	No presentan convergencias en el relato.	Creen contar con las habilidades para impartir clases inclusivas, y otro, falta preparación, tienen la necesidad de nutrirse de dicho conocimiento.
Motivaciones de la carrera de interés	Eligieron la carrera debido a que les gusta la enseñanza. Eligieron enseñar matemáticas porque eran buenos en eso.	Buscan aportar de forma significativa a los estudiantes con respecto al área observada, en cambio a otros los motiva el hecho de crear cosas nuevas para aportar a dicha ciencia.
Acciones de inclusión dentro del aula	No presentan convergencias.	Las prácticas “inclusivas” son variadas ya que uno se centra en su intuición y el otro le pregunta a sus estudiantes lo que necesitan.
Estilos de aprendizaje	Todos presentan algún concepto de estilos de aprendizaje.	No es su deber conocer los estilos de aprendizaje, es de otros profesionales. Otros comentan que relaciona los estilos de aprendizaje con las metodologías, basadas en los intereses de los estudiantes.

En esta tabla se realizó un análisis de los resultados obtenidos en las entrevistas, la cual se encuentra evidenciada en su respectiva matriz de cruzamiento de hallazgos entre convergencias y divergencias por descriptor, de las reflexiones obtenidas de las matrices de hallazgos de entrevistas pertenecientes a cada una de los actores analizados con anterioridad, se presenta a continuación los resultados del análisis de las entrevistas en la tabla 9.

La siguiente tabla representa el resultado del análisis del actor 3, correspondiente al profesorado de la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática de una Universidad de la Región del Biobío, con una muestra total de 3 profesores.

Tabla 9

Matriz de cruzamiento de hallazgo por descriptor, convergencias y divergencias de profesorado.

Descriptor	Convergencias	Divergencias
Perspectiva personal de la inclusión educativa	La inclusión educativa se presencia la diversidad en el aula y atender a todos los estudiantes. El déficit de capacitación conoce los diferentes tipos de NEE.	Mencionan la intención de inclusión como acción social de cambio cultural. Otros asocian la intención de inclusión a un ámbito institucionalizado, es decir, llevado solo al ámbito de aprendizaje.
Docente inclusivo	Considerar a los estudiantes en su proceso de enseñanza, resaltar el protagonismo, a la responsabilidad moral, ética profesional y personal de instruirse en la educación inclusiva. Fomentar la inclusión educativa a los docentes en formación, aunque es difícil realizarlo.	Dividen la inclusión docente en tres dimensiones; la responsabilidad personal, profesional y social. Otros, no todos los estudiantes entienden lo que se les enseña y desde ahí tomar medidas para llegar a todos los estudiantes. Uno llama a la no discriminación.
Experiencias de inclusión educativa	La interpretan como un despertar y un camino por recorrer, falta de visibilización y capacitación de la inclusión docente, igualmente toda experiencia en la inclusión ha creado consciencia en sus vidas.	Comentan poseer formación en inclusión educativa, fomentan las charlas en sus estudiantes, otro refleja la docencia inclusiva a través de acciones concretas, el último, admite no tener formación y utilizar la medida de retroalimentación.
Responsabilidad Inclusiva	Se promueve la visibilización de la inclusión, sin embargo, hay carencia de capacitación solo hay una intención institucional de la responsabilidad, pero es genérica.	Un relato considera que los profesores part time no tienen la intención y/o interés de formarse como docentes inclusivos.
Metodologías de enseñanza	Todos nombran transferir la inclusión a la práctica e indagar en los estudiantes para implementar modificaciones en el curriculum.	Mención de adecuación de acceso por medio de la implementación de recursos, mencionan que debido al interés de los estudiantes promueven hablar más sobre inclusión.
Diversificación en el aula	No se observan convergencias.	No se observan divergencias.
Trabajo colaborativo	Mención del centro de innovación y desarrollo docente de la universidad como un apoyo, pero prefieren trabajar con colegas con mayor afinidad, obteniendo resultados provechosos, creando una nivelación y crecimiento constante a nivel profesional.	Transmitir el trabajo colaborativo entre sus estudiantes y no menciona el trabajo colaborativo en su ocupación como docente de la universidad. Otro a plataformas digitales que facilitan el avance de los estudiantes.
Preparación profesional inclusiva (Docentes)	El protagonista de su enseñanza son los estudiantes, por lo que adquiere total relevancia al momento de planificar sus clases.	Uno se ha capacitado profesionalmente, no comenta medidas impartidas en sus clases. Uno afirma que confiar en los estudiantes en su proceso de formación docente es crucial, Un entrevistado se considera muy desconectado.
Preparación profesional	No existen convergencias en todos los relatos.	Hacen referencia a que han tenido alguna formación, otros que admiten no tener ninguna.

Motivaciones de la carrera de interés	Quieren mejorar la FID, trabajando teóricamente en la construcción del conocimiento para enseñar matemáticas y traspasar experiencias y conocimientos a las nuevas generaciones.	Quiere cambiar las cosas por lo que vivió trabajando en su primer colegio. Otro, nació cuando realizó su post grado y tesis de esta misma. Otro, siempre quiso enseñar.
Acciones de inclusión dentro del aula	Concluyen que deben hacer cumplir las acciones de inclusión en el aula, deben caminar hacia la mejora, donde se representan estas acciones de forma más precisa.	No hay divergencias entre los relatos.
Estilos de aprendizaje	Existe conocimiento sobre el concepto de "estilos de aprendizaje" y busca respetarse.	Respetan los estilos de aprendizaje, utilizando diversas metodologías. Otros relatos hacen alusión a la necesidad de formarse, tienden a utilizar la misma metodología para todos. Otro, los estudiantes también son responsables.

En esta tabla se puede observar que en el descriptor de diversificación en el aula no existen convergencias y divergencias a estipular.

DISCUSIÓN

Perspectiva Personal de la Inclusión Educativa

Todos los actores, consideran importante la formación en inclusión educativa, para poder dar respuesta a los objetivos de aprendizaje a abordar en sus clases de matemáticas. Asimismo, consideran que el estudiantado debe participar e involucrarse por igual en el proceso de aprendizaje-enseñanza, respetando a todos, se condice con lo que plantean, López-Torrijo (2009 como se citó en Aké, 2016):

> La concepción de los alumnos con Necesidad Educativas Especiales tiende a cambiar desde un enfoque médico y clínico centrado en el déficit que presenta el alumno, hacia un enfoque pedagógico e interactivo referido a la influencia del entorno, considerado éste, tanto como meta de su integración social, cuanto como elemento condicionador del propio desarrollo autónomo y social. (pp.18-19)

Sin embargo, estos autores plantean la meta como integración social, condicionador de desarrollo autónomo y social. Por el contrario, los actores sólo consideran que la inclusión educativa debe estar presente para dar respuesta al acceso de los contenidos matemáticos, reflejado en el relato, donde plantea que inclusión educativa corresponde a x

Esta idea se pone en contraparte con el relato donde se plantea que *"La vegetación de muchas cosas quedan como una declaración interesante intencionada, pero en la práctica no se ve tan … tan efectiva porque muchas veces no va acompañada de una capacitación o de acciones de fortalecimiento en la construcción de esas ideas que permita* *cambios culturales reales (...) que todos tengamos las mismas posibilidades de acceso, de oportunidad, etcétera."*

Docente Inclusivo

Los resultados revelan tener una fuerte indagación sobre lo que significa ser un docente inclusivo. Pero, reiteran la escasa capacitación. Tal como Bruno y Noda (2010), citado en Aké (2016, p.25) manifiestan una falta de estudios sobre cómo tratar la formación de los profesores de matemáticas que trabajan junto a los alumnos con necesidades educativas especiales. Es por esto, que no se ejecutan acciones concretas las cuales demuestran las ideas que mencionan. En concordancia con lo que plantea el relato *"Uno tiene que buscar herramientas para irse perfeccionando, no todo lo entrega la universidad, a medida que van avanzando los años, van apareciendo cosas nuevas, uno si quiere tener un buen desempeño dentro del aula, tiene que buscar distintas herramientas, pensando en sus estudiantes."*

Experiencias de Inclusión Educativa

Los docentes, titulados y profesores en formación cuentan con experiencias significativas de inclusión educativa, las cuales los motivan a realizar cambios curriculares y pedagógicos. Sin embargo, al no poseer las herramientas metodológicas necesarias, no logran llevar estas instancias a algo concreto. No obstante, comentan su disposición para nutrirse de estas herramientas puesto que consideran que poseerlas es de suma importancia, aun así, no son capaces de generar instancias para adquirir estas. Por el contrario, Infante (2010) plantea que:

> Es necesaria la formación de un profesional que lidere las acciones educativas relacionadas con la diversidad desde la inclusión. Este sujeto no sólo debe concentrarse en la elaboración de herramientas técnicas que le permitan eliminar las barreras de acceso y participación de ciertos estudiantes a la educación sino analizar críticamente los propios sistemas de inclusión/exclusión y las representaciones y supuestos culturales adscritos a los diferentes marcadores de la subjetividad" (p. 296).

La autora hace alusión a que no basta con conocer estrategias de inclusión, sino que hay que ir más allá, hacia un análisis más profundo y personal.

Los resultados indican las acciones a realizar en sus experiencias, sin embargo, son pocos los casos que nos sugieren autocuestionamiento en el proceso para concretar estas acciones, tal como lo indican los relatos del estudiantado de la carrera. *"Tuve que investigar qué es un trastorno, para poder relacionarme a nivel de persona" y "Una situación me marcó ya que empecé a ver a los chicos, ya no sólo necesariamente como "desordenados o cacho", si no que empezar como a preguntarse ¿Por qué es así? Algo* *debe estar ocurriendo.”*

A pesar de lo anterior, existen relatos que desarrollan la autocrítica como en el proceso de poder llevar a cabo la inclusión, dando a entender una dificultad en sus acciones pedagógicas, así como lo expone el relato “*Defino mis experiencias con inclusión como decepcionantes, así como, brutal… Porque igual la inclusión es super buena.”*

Como se visualiza hay una gran variedad de experiencias por los diferentes tipos de formación que han tenido las tres generaciones; estudiantes, egresados y profesorado.

Responsabilidad Inclusiva

Los resultados manifiestan responsabilidad pedagógica más responsabilidad inclusiva, ya que para sus respuestas se basan en los compromisos que un docente idóneo debe emplear, por ejemplo, conocer el contexto en que realizan clases. A pesar de esto, no quiere decir que dichas responsabilidades vayan de la mano a la inclusión, puesto que se acuñan a términos y metodologías básicas de enseñanza y quehacer pedagógico, no así a metodologías o estilos de enseñanza inclusiva.

Además, consideran que las NEE, se deben abordar desde una perspectiva distinta, excluyéndolos del curso. Esto se condice con lo que plantea Muñoz, Lopez y Assaél (2015); García et al. (2018): “El profesorado suele tener una perspectiva individual basada en un modelo médico/rehabilitador, que entiende las dificultades de aprendizaje como surgidas exclusivamente de los déficits del estudiantado” (p.4)

La falta de responsabilidad inclusiva se convierte en una barrera, ya que no existe internalización de esta, *“Trato, intento, trato de ir ajustándome a lo nuevo ya que si bien no es algo que me apasione de aprender, siento que es necesario pero tampoco veo muchas herramientas”* Igualmente se manifiesta una privación de formación inicial docente en la inclusión educativa, tal como lo afirma el relato mismo relato: *“Es complejo de asimilar cómo me preparo para ser algo que requiere multi competencias, ¿Por dónde empiezo?(...) siempre te llega la sorpresa de cómo abordarlo porque no tienes una formación base.”*

Metodologías de Enseñanza

Las metodologías de los entrevistados se centran en escasas estrategias didácticas enfocadas a responder las características de los estudiantes que no presentan dificultades en su aprendizaje. No logran generar metodologías diversificadas para los distintos ritmos de aprendizaje, capacidades, intereses y estilos de aprendizaje, dejando en evidencia falta de estrategias para generar clases que aborden todas las necesidades del estudiantado.

Esto se evidencia en los tres actores, puesto que fluctúan en la preparación de implementar diversas metodologías.García et al. 2018) afirma que:

> estos desafíos suelen ser una tarea difícil para el profesorado, especialmente

> si se considera que las políticas educativas se transforman velozmente y que no ha existido una comprensión compartida acerca de lo que constituye una buena práctica docente en materia de educación inclusiva (p.3)

Al igual que el relato nueve asimila "la visión que tienen de esta educación inclusiva es muy teórica, entonces hay que hacerla bajar a algo práctico". Se puede patentizar que la mayoría de los entrevistados realizan metodologías ligadas al objetivo de aprendizaje a modo curso, por lo que no consideran la diversificación del aula.

Diversificación en el Aula

Los docentes en formación no tienen un consenso de quién es el encargado de promover la diversificación de la enseñanza en el aula, pero sí se comenta que el profesor de asignatura y la educadora diferencial deben ser partícipes de este proceso. Como afirma el relato uno: "Sinceramente creo que la diversificación del aula debe ser un trabajo dual, entre la educadora diferencial y el profesor".

Los egresados distribuyen esta función a los estudiantes, ya que son ellos quienes deben aceptar y conocer en primera instancia su ambiente en el que se desenvuelven. Así mismo lo afirma el relato: "la inclusión es una tarea de todos partiendo por el estudiante, partiendo por él, por la comunidad escolar en particular, pero partiendo por el estudiante".

Los profesores formadores no responsabilizan a ningún ente, pero dejan en manifiesto que la diversidad en el aula es para el bienestar laboral y cultural de los estudiantes. Con los relatos recabados queda claro que los participantes no llegan a un consenso en base a dicho concepto, por lo tanto, su conocimiento y ejecución de la diversificación es escasa.

Finalmente, Castillo (2016):

> Es todo un gran reto para aquellos maestros que asuman esta visión inclusiva, pero las exigencias de la sociedad y el mundo actual así lo están demandando, no se puede dar el lujo de escoger, es entrarle a esta labor educativa, si realmente se quiere servir a los demás y formar parte activa de la comunidad, es importante cambiar de actitud, romper paradigmas, no quedarse en la inamovilidad, ser pasivos, ya no entra en este mundo, es cuestión de involucrarse e involucrar a los demás, arrastrarlos, pero con el ejemplo, con acciones y los demás verán el compromiso y ser activos e invitar colegas a unirse a este enfoque." (p. 272).

Trabajo Colaborativo

El estudiantado y los egresados entrevistados no tienen una visión clara de cómo se debe llevar a cabo un trabajo colaborativo eficaz en las escuelas, ya que no se comparte una idea general de lo que significa. Existen puntos en común, por ejemplo, el hecho de considerar una educadora diferencial en el trabajo colaborativo, pero no se tienen claro los roles de los participantes en estas instancias, esto genera una poca comunicación entre las personas que abordan el curso. Así se ve demostrado en el relato uno: "Tenían una buena relación en cuanto a persona, pero no se comunicaban en cuanto a contenidos. Si no que era más que nada una conversación como “tú me caes bien, yo te caigo bien”, pero compartir contenidos, nada.”

El profesorado menciona que el trabajo colaborativo que ellos realizan, se basa desde la afinidad que existe entre pares en el ámbito de universidad lo que genera una transmisión de conocimientos. De esta forma lo demuestra el relato nueve: “Al final uno anda buscando esa afinidad personal o amistad que va naciendo con ciertas personas, ahí uno puede lograr, así como un grupo de trabajo, donde ojalá se mezclen las especialidades y eso pueda enriquecer también el trabajo”.

Finalmente se puede decir, que en gran parte el trabajo colaborativo no se ejecuta de forma correcta tanto en el ámbito de universidad como el de colegio, lo cual deja en evidencia que los entrevistados tienden a discutir los contenidos entre pares con diversas especialidades, antes que generar instancias de colaboración con la educadora diferencial, lo que conlleva a una falta de diversas metodologías y acciones de trabajo, que puedan guiar a los estudiantes a aprender, desencadenando una serie de sucesos que no benefician al estudiantado por la falta de preparación profesional inclusiva en los docentes.

Preparación Profesional Inclusiva (docentes)

Tanto los docentes en formación de la carrera como los egresados sólo tienen acceso a herramientas inclusivas generales, pero no específicas, así como lo menciona el relato dos “depende de hartos factores, de la manera que uno aborda el concepto de inclusión. Ya que el ramo que yo tuve, se aborda de forma más sociocultural, entonces se puede abordar en situaciones donde se hable de la diversidad cultural que hay en la sala”. Esto dificulta su actuar en el aula, ya que se ven enfrentados ante situaciones que implican un mayor conocimiento sobre inclusión. En ese mismo relato, se comentó sobre las asignaturas enfocadas a la inclusión en la carrera: “Estos ramos de inclusión, fueron muy generales. No habló de casos muy específicos que nos hubieran ayudado y nos podrían ayudar ahora como profesor.” Los pocos espacios donde se estimula la inclusión en la carrera, se asocian netamente a un par de profesores en específico, no a todos. Es por esto que según Infante (2010)

> es fundamental una transformación de la formación y abrir espacios en el currículum universitario de carreras relacionadas con la pedagogía que permitan reflexionar sobre cuál es la construcción de diversidad e inclusión que cada sujeto elabora, con anterioridad al desarrollo de técnicas y herramientas pragmáticas de trabajo (metodologías de enseñanza, evaluación, etc.). (p.293).

Relacionado con lo anterior, el profesorado de la carrera menciona utilizar diversas estrategias acordes para la preparación profesional inclusiva. Sin embargo, no todos cumplen con las expectativas que se proponen ni implementan las adecuaciones mencionadas. Tal como lo plantea el relato tres del estudiantado, “La universidad ha entregado herramientas, pero quizás las herramientas no toman en cuenta a estas personas con ese tipo de déficits de aprendizaje.”

En consecuencia, se puede determinar que la visión del profesorado es adversa con la visión que tienen aquellas personas que cursan y cursaron la carrera, ya que estos últimos expresan una insuficiencia en preparación profesional inclusiva. Debido a esto, no logran implementar ni preparar a sus estudiantes para una educación inclusiva. Infante (2010 citado en Iturra, 2019) hace hincapié a “la necesidad de trabajar en una perspectiva inclusiva desde la formación inicial docente, desarrollando una comprensión profunda del significado de la inclusión entre los profesores” (p.9).

Preparación Profesional Inclusiva (estudiantes)

Las personas entrevistadas pertenecientes al profesorado en formación no se sienten preparadas para llevar a cabo la inclusividad en su actuar de forma espontánea, ya que no se les infunden desde la universidad. Esto puede ocasionar que, ante situaciones emergentes, no sepan cómo reaccionar. Se condice con lo que Tenorio, (2011, citado en García et al. 2018) afirma:

> La mayoría del estudiantado indica no haber recibido formación en las temáticas de diversidad, integración escolar y necesidades educativas especiales, y no se siente preparado para la inclusión, lo que atribuyen al excesivo foco de sus carreras en el saber disciplinar, en desmedro del saber pedagógico (p.5).

Por otro lado, los ex alumnos consideran que es de su responsabilidad contar con una preparación profesional inclusiva o buscar las herramientas necesarias para adquirir dichas capacidades, ya que estas no fueron entregadas en su formación inicial docente. Así lo afirma el relato siete, de los egresados: “En la universidad por carrera ninguna siendo sincero, porque no tienes asignaturas, los profesores de especialidad en realidad no son profesores, son ingenieros expertos en estadística en álgebra lineal, investigadores de la matemática, en tema de asignatura, por ejemplo, los profesores de los ramos pedagógicos en mi tiempo no lo abordaban, a lo más se hablaba y las experiencias era en los ramos de práctica”.

Motivaciones de la Carrera de Interés

En su mayoría, asocian la elección de su carrera al gusto por enseñar y en base a eso, eligieron un área en el que tuvieran mayor habilidad y concluyeron en pedagogía en educación media en matemáticas. Eso se puede asociar a un interés relacionado con la docencia, las relaciones humanas, el proceso de aprendizaje-enseñanza, entre otros. Como lo plantea el relato tres de los estudiantes: “Mis mismos profesores me motivaron para estudiar la carrera. En realidad, bueno, el ser siempre bueno para matemáticas me hizo elegir matemáticas, pero el hecho de que pasé casi 8 horas al día en un establecimiento, ver profesores que se preocupaban por ti, ese sentimiento de ver que pasan personas por tu vida, que después ves y dices "fui parte de su formación" la persona que es hoy en día es algo que yo también forjé en él".

Los entrevistados consideran que la carrera elegida de interés fue en base al gusto por la pedagogía antes que, por las matemáticas, significando que el principal foco de interés es el proceso formativo de los estudiantes. Sin embargo, las motivaciones que los llevaron a estudiar esta carrera son diferentes, ya que algunos se enfocan en la enseñanza, mientras que otros en generar metodologías para una mejora en el área de las matemáticas.

Acciones de Inclusión Dentro del Aula

A los estudiantes y los egresados se les dificulta manejar acciones de inclusión concretas para llevar a cabo en el aula, además en las entrevistas sólo se hace referencia a conocer el contexto estudiantil donde se desenvuelven. Así se menciona más en profundidad en el relato uno: "Conocerme, humanizarme con ellos, como te digo, trabajamos con personas. Conocer contextos, situaciones, no tanto personal, pero me centraría en investigar qué casos con Necesidades educativas tengo. Más que nada para investigar por mi parte, ya que me interesa investigar sobre eso. (...) Lógicamente ahí debería utilizar de mi tiempo para investigar la diversidad del aula, ¿Qué necesidades educativas especiales tengo?".

A pesar de que es importante conocer el contexto escolar, se refleja una falta de precisión a las acciones inclusivas en la carrera por lo que se deja en manifiesto que, si bien cumplen con algún objetivo mínimo de inclusión, no son lo suficientemente relevantes para un buen manejo y cumplimiento de la misma. Por el contrario, los docentes toman ciertas acciones inclusivas en el ámbito de la universidad, que algunas veces son guiadas por la misma institución, para generar que el contenido llegue por igual para todos los estudiantes. Así lo expone el relato 10 del profesorado: "No sé si exijo el cumplimiento, pero me ocupo y me preocupo de poder tenerlas en consideración, tal vez no soy de imponer, cierto, pero sí de sensibilizar a los estudiantes, a mis estudiantes, respecto de la temática y de paso me sirve para yo estar sensibilizado y estar consciente de aquello, no sé si siempre lo haré como debiera ser, pero trato estar de ahí como alerta, para tener en consideración los alcances de la inclusión y del aula donde estoy desempeñándome".

A pesar de esto, se evidencia una clara necesidad e interés para mejorar aún más estas acciones:

> La educación inclusiva es un concepto en desarrollo, con un significado dinámico que ha progresado a través del tiempo y continuará evolucionando. Existe un consenso global sobre la urgente transformación de los sistemas

> educativos, para ofrecer una respuesta igualitaria ante las necesidades educativas de cada estudiante (p.11).

Estilos de Aprendizaje

Los docentes analizados conocen el concepto estilos de aprendizajes. Sin embargo, no generan instancias para evaluar a sus alumnos explícitamente, ni tampoco para intervenir según ellos. Incorporan el término a sus clases de una manera indirecta apuntando hacia todos los estilos presentes en ella. Tal y como se comenta en el relato “La verdad, no … no, lo que hago es tratar de hacer actividades que vayan para todos lados nomas (...) pero igual trato de hacer un poquito de todo”.

El profesorado, en cambio se divide en quienes han investigado e implementado diversas estrategias a través de la gran gama de estilos de aprendizaje que existen en sus aulas, al contrario de otros que han admitido abiertamente no investigar, tal como lo ejemplifica el relato : “ Bueno, para realizar mis clases, debo confesar que no he estudiado absolutamente a nada para atender a mis estudiantes de los distintos cursos que imparto en estrategias que sean pertinentes para determinadas NEE, creo que me falta, por un lado, más apropiación, más formación en esa área, pero tengo una presunción, creo que es una creencia y puedo estar absolutamente equivocado en lo que te voy a plantear, pero creo que debería haber también, una identificación temprana a través de un mecanismo discreto, privado para que los profesores del aula universitaria, tengamos referencias que tenemos un determinado estudiante con diagnóstico certero de alguna NEE y a partir de ello, cierto, hacer las consultas o requerir apoyo para abordar las NEE”. Esto evidencia que, a pesar de no investigar, ellos reiteran ver una falta de anticipación por parte de la universidad de generar instrumentos, instancias e indagación en conocer los diagnósticos de todos sus estudiantes y brindar el apoyo requerido según la persona.

Finalmente, los estudiantes, egresados y profesorado conocen el significado de los estilos de aprendizaje, no investigan estos en sus aulas de clases, por lo cual no hay estrategias acordes para todos los estudiantes, lo que se traduce a una inclusión educativa deficiente. Así lo afirman Muñoz et al. (2015, citado en García et al., 2018) declarando que: “En el contexto chileno, se ha visto que las barreras para la inclusión asociadas a la docente se encuentran instaladas en las concepciones de los profesores y en las estrategias que implementan en aula”. (p. 4)

CONCLUSIÓN

A continuación, se presentan las principales conclusiones del estudio que surgieron a partir de la discusión de los resultados expuestos en los capítulos anteriores, junto con las limitaciones que se percibieron en la investigación, y las proyecciones para futuros estudios.

Respecto al impacto de la formación inicial docente en una identidad profesional para la educación inclusiva del profesorado en formación y formadores de Pedagogía en Educación Media en Matemática en una Universidad de la región del Biobío según el análisis los/as actores participantes en esta investigación se concluye que: la formación inicial docente de este profesorado, en la universidad estudiada, cuenta con herramientas didácticas y un sello formativo significativo para el estudiantado, egresados y profesorado que imparte docencia, que según ellos y ellas destaca del resto de las universidades existentes. Sin embargo, no hay evidencia suficiente de una formación robusta, profunda en inclusión educativa que los lleve a generar acciones concretas en los ámbitos de sus quehaceres profesionales.

En la misma línea anterior, la universidad analizada no prioriza una formación inicial docente inclusiva en la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática, puesto que, en primera instancia, releva, en el itinerario formativo, especialistas en el área disciplinar de matemática, por lo que hay una carencia en el manejo de estrategias, herramientas, metodologías enfocadas al área de la inclusión educativa. En cambio, cuentan con herramientas didácticas que encubren su falta en las aulas, generando clases motivadoras y atrayentes, pero que no responden a la diversidad.

En la universidad existen instancias de experiencias sobre inclusión educativa, hacia su estudiantado, egresados y profesorado, a través de las prácticas pedagógicas y cursos en el área para el profesorado, sin embargo, estas no son suficientes y/o significativas para poder abarcar una experiencia total en educación inclusiva, al igual se visualiza la falta de autoformación en inclusión ya que, otorgan que esa responsabilidad es de la profesora diferencial. No se observa la iniciativa para instruirse de los entrevistados, para lograr ser mejores docentes inclusivos.

Asimismo, esta investigación evidencia la ausencia de preparación y aplicación inclusiva en el aula de clases del profesorado de la carrera de Pedagogía en educación media en matemática de una Universidad de la Región del Biobío. Sus niveles de preparación acerca de la formación profesional docente son desiguales entre ellos y ellas, algunos han perfeccionado sus saberes y lo promueven a través de charlas, mientras que otros han preferido inferir o buscar medios informales para informarse sobre inclusión educativa, lo cual es preocupante, puesto que hay una irregularidad en los profesionales impartiendo clases a los mismos estudiantes en diversas áreas. El profesorado entiende la inclusión como una temática y no como un modelo educativo, no aluden en hacer modificaciones de inclusión, sino que de didáctica.

Dentro de los facilitadores que se encuentran en la carrera para llevar a cabo una educación inclusiva, es que hay una asignatura en la malla curricular enfocada a la inclusión, sin embargo, queda plasmado que ésta sólo aborda este término de forma general y sociocultural. Además, el estudiantado que se encuentra cursando la carrera actualmente demuestran un interés por informarse de manera autónoma sobre aspectos que los ayudarán para abordar de mejor forma a su estudiantado en la sala de clases, lo que se condice con el avance de la sociedad actual en términos de inclusión. También se evidencia que existen ciertos docentes dispuestos a transmitir la inclusión de manera concreta en sus cátedras, aunque actualmente no cuenten en su mayoría con las herramientas y formación necesaria para hacerlo.

Las principales barreras son la falta de actividades curriculares y visitas pedagógicas a centros de inclusión educativa, asimismo, prácticas pedagógicas enfocadas a la temática, ya que de esta manera irían adquiriendo experiencias y saberes pedagógicos. En síntesis, la formación inicial docente carente de inclusión educativa mediante el profesorado que imparte las clases, no los prepara para la realidad de los diversos contextos que enfrentan como futuros docentes.

Finalmente, las experiencias ilustradas por los entrevistados están basadas en acciones experimentadas en establecimientos educacionales correspondientes a sus prácticas pedagógicas y situaciones específicas llevadas a cabo en la universidad. Sin embargo, no se realiza un análisis o retroalimentación concreta sobre estas experiencias, lo que ocasiona que se genere un autoaprendizaje en base a estas, otorgando toda la responsabilidad de interpretación al estudiantado de la carrera. Es relevante crear instancias donde los educandos aprendan de las experiencias evidenciadas, para poder generar debates y autoreflexiones que formen a profesionales capacitados para enfrentar la educación inclusiva.

REFERENCIAS

Aké, L., Castro, W. & Godino, J. (2015). *Niveles de razonamiento algebraico en la actividad matemática de maestros en formación: análisis de una tarea estructural.* En Flores, Rebeca (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 1525-1533). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Aké, L. (2016). Matemáticas y Educación Especial: realidades y desafíos en la formación de profesores. En J. López-Mojica y J. Cuevas (Coords.), *Educación especial y matemática educativa: una aproximación desde la formación docente y procesos de enseñanza*, 15-32. https://www.researchgate.net/publication/329488916_Matematicas_y_Educacion_Especial_realidades_y_desafios_en_la_formacion_de_profesores

Broitman, J. y Sancha, I. (2021). Diálogos ineludibles entre didáctica de la matemática y educación inclusiva. En P. Cabeñas, V. Grimaldi, C. Broitman, I. Sancha y M. Escobar (Coords.), *La enseñanza de las matemáticas a alumnos con discapacidad (pp.105-207)*. Editorial de la Universidad de la Plata. Argentina.

Castillo, J.R (2016). *Docente inclusivo, aula inclusiva. Revista nacional e internacional de educación inclusiva.* 9 (264-275). https://educrea.cl/docente-inclusivo-aula-inclusiva/#:~:text=El%20maestro%20tiene%20que%20ser,un%20trabajo%20global%20e%20integrado.

Clarke y Faragher (2015). Inclusive practices in the teaching of mathematics: Supporting the work of effective primary teachers. In M. Marshman, V. Geiger, y A. Bennison (Eds.). Proceedings of the 38th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (p. 173–180). Sunshine Coast: MERGA.

Clavijo Castillo, R. G., & Bautista-Cerro, M. J. (2019). La educación inclusiva. Análisis y reflexiones en la educación superior ecuatoriana. *Alteridad*, *15*(1), 113–124. https://doi.org/10.17163/alt.v15n1.2020.09

Decreto Exento 83 de 2015 [Ministerio de Educación de Chile]. Aprueba criterios y orientaciones de adecuación curricular para estudiantes con Necesidades Educativas Especiales de Educación Parvularia y Educación Básica.

Derecho a la Educación y Libertad de Enseñanza | Ayuda Mineduc. (s. f.). Ayuda mineduc. https://www.ayudamineduc.cl/ficha/derecho-la-educacion-y-libertad-de-ensenanza-11

Espinoza, L., Hernández, K., & Ledezma, D. (2020). Prácticas inclusivas del profesorado en aulas de escuelas chilenas: Un estudio comparativo. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *46*(1), 183-201. Espinoza, L., Hernández, K., & Ledezma, D. (2020). Prácticas inclusivas del profesorado en aulas de escuelas chilenas: Un estudio comparativo. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *46*(1), 183-201. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052020000100183.

Fingermann, H. (2018). La guía: "*Identidad Docente".* Educación. https://educacion.laguia2000.com/ensenanza/la-identidad-docente

Fuster, D. (2019). Investigación cualitativa: Método fenomenológico hermenéutico. Propósitos y Representaciones, 7(1), 201-229. Doi: http://dx.doi.org/10.20511/pyr2019.v7n1.267

García-González, Carolina, Herrera-Seda, Constanza, & Vanegas-Ortega, Carlos. (2018). Competencias Docentes para una Pedagogía Inclusiva. Consideraciones a partir de la Experiencia con Formadores de Profesores Chilenos. *Revista latinoamericana de educación inclusiva*, 12(2), 149-167. https://dx.doi.org/10.4067/S0718-73782018000200149

Granado, M. (2006). El contexto científico de la educación especial: Bases psicológicas para el diseño y desarrollo de prácticas educativas adaptadas. *Revista de Ciencias de la Educación*, 205, 112–141. https://redined.educacion.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/34927/205_6_%20Granado%20Alc%c3%b3n.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Godino, J. D. et al. (2017). *Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas*. Versión revisada y ampliada de la comunicación presentada en el XX Simposio de la SEIEM con el título: Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. Reconocimiento: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869, EDU2013-41141-P y EDU2015-64646-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO). Bolema: Boletim de Educação Matemática [online]. 2017, v. 31, n. 57 pp. 90-113. Disponible en: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>. ISSN 1980-4415. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05.

Godoy, M. P., Meza, M. L., & Salazar, A. (2004). Antecedentes históricos, presente y futuro de la educación especial en Chile. Godoy, M. P., Meza, M. L., & Salazar, A. (2004). Antecedentes históricos, presente y futuro de la educación especial en Chile. http://especial.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/31/2016/08/201304151210180.doc_Antecedentes_Ed_Especial.pdf

Gov.CO. (2021) *Formación inicial.* La Educación es de todos. Mineducación. Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1780/w3-propertyvalue-48467.html?_noredirect=1#:~:text=La%20formaci%C3%B3n%20inicial%20de%20docentes,labor%20como%20profesional%20de%20educaci%C3%B3n.

Herrera, J. (2017, 26 julio). *Repositorio UDGVirtual: La investigación cualitativa*. UDGvirtual. http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/handle/123456789/1167

Iturra, P. (2019). *Dilemas de la inclusión educativa en el Chile actual*, 8, 1–13. https://doi.org/10.35811/rea.v8i0.7l

Infante, M. (2010). *Challenges to teacher education: Educational inclusion*. Scielo. Recuperado 8 de junio de 2022, de https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-07052010000100016&lng=en&nrm=iso&tlng=en

Ministerio de Educación (2009). *Ley General de Educación.* Gobierno de Chile. http://bcn.cl/2fe30

Ministerio de Educación (2012). *“Estándares orientadores, para carreras de pedagogía en educación media” (p. 93-132).* https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2019/03/Estándares_Media.pdf

Ministerio de educación. (2012, mayo). “*Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media”*. (p.7) https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2019/03/Estándares_Media.pdf

Ministerio de educacion. (2010, abril). “Fija normas para determinar los alumnos con necesidades educativas especiales que serán beneficiarios de las subvenciones para la educación especial” https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17433/DTO-170_21-ABR-2010.pdf?sequence=1&isAllowed=y

MINEDUC (2014). Una nueva educación para Chile. Documento base para la participación ciudadana en la reforma educacional. Plan nacional de participación ciudadana. http://reformaeducacional.gob.cl/participacion/wp-content/uploads/documento_base_dialogos.pdf

Ministerio de educación. (2016). Misión - Ministerio de educación. Recuperado 6 de junio de 2022, de https://www.mineduc.cl/ministerio/mision/

Ministerio de Educación, División de Educación General, Coordinación Nacional de Inclusión y Diversidad, Opazo, C., & Fontecilla, M. (2016). *Orientaciones para la construcción de comunidades educativas inclusivas*. (N.o 1). Ministerio de Educación, República de Chile. https://www.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/19/2017/03/Documento-Orientaciones-28.12.16.pdf

Muñoz Villa, M. L., López Cruz, M., & Assaél, J. (2015). Concepciones docentes para responder a la diversidad: ¿Barreras o recursos para la inclusión educativa?. *Psicoperspectivas*, *14*(3), 68-79. http://www.psicoperspectivas.cl/index.php/psicoperspectivas/article/view/646

Pozo Lobos, A. (2016). *Programa de Integración Escolar Manual de apoyo a la Inclusión Escolar PIE* (Ministerio de Educación, Ed.). Coordinación del Programa de Integración Escolar y Unidad de Educación Especial de la División de Educación General. https://especial.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/31/2021/09/MANUAL-PIE-2021-1.pdf#:~:text=En%20el%20marco%20descrito%2C%20el%20Programa%20de%20Integraci%C3%B3n,calidad%20de%20la%20educaci%C3%B3n%20en%20el%20establecimiento%20educacional.

Ramos, L. (2014). Educación Especial y Educación Inclusiva en Chile: ¿en punto de estancamiento? *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*, 7(2), 37–46.

Tenorio, S. (2011). Formación inicial docente y necesidades educativas especiales. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *37*(2), 249-265. https://doi.org/10.4067/S0718-07052011000200015

UNESCO. (2017). *ODS4: EDUCACIÓN*. es.unesco.org. https://es.unesco.org/gem-report/node/1346#:~:text=Objetivo%204.,toda%20la%20vida%20para%20todos

Yin, R. K. (2018). *Case Study Research and Applicacions: Design and methods* (6.a ed.). SAGE Publications. https://lccn.loc.gov/2017040835

CONTRIBUIÇÕES DO JOGO PIFF GEOMÉTRICO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DAS FORMAS GEOMÉTRICAS ESPACIAIS NO 20 ANO DO ENSINO MÉDIO

Data de submissão: 05/06/2023 *Data de aceite: 02/08/2023*

Raquel Soares da Silva
Egresso da Universidade de Pernambuco - UPE
Petrolina – Pernambuco
http://lattes.cnpq.br/0137858379197615

Lucília Batista Dantas Pereira
UPE- Universidade de Pernambuco
Petrolina – Pernambuco
http://lattes.cnpq.br/7751208084431086

RESUMO: A Matemática contribui para a formação social e intelectual do sujeito e seu ensino se torna indispensável na educação escolar. Entretanto, a Matemática que tem sido ensinada nas escolas é por vezes desinteressante baseada em métodos tradicionais, sem significado para o aluno, por isso, os Jogos Matemáticos aparecem como um promotor da aprendizagem e do desenvolvimento, ao ser inserido na situação de jogo em que a criança absorve tanto a estrutura lógica da brincadeira como a estrutura Matemática. Nesse sentido, este trabalho apresenta os Jogos Matemáticos como proposta de ensino, tendo como objetivo investigar as contribuições do jogo Piff Geométrico no processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Este estudo tem uma abordagem qualitativa, a qual contemplou uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Petrolina-PE, totalizando 29 estudantes. Inicialmente, foi aplicado um teste de sondagem para verificar as dificuldades e os conhecimentos prévios dos alunos em relação as formas geométricas espaciais; depois se vivenciou o jogo Piff Geométrico que relaciona os sólidos geométricos a suas respectivas fórmulas e propriedades (faces, vértices e arestas), com o intuito de facilitar a aprendizagem. Posteriormente, aplicou-se um questionário sobre a atividade vivenciada. Foi constatado que, apesar dos resultados terem sido parcialmente satisfatórios, os estudantes destacaram algumas contribuições do jogo Piff Geométrico, tais como: a interação, a diversão, a possibilidade de aprender brincando, a saída da rotina, a facilidade na apropriação dos conceitos, além de maior motivação para a aula. Assim, concluiu-se que, mesmo com os resultados apresentados, o jogo Piff Geométrico, desde que se planejem bem as ações, pode sim ser utilizado como ferramenta facilitadora na aprendizagem das formas geométricas espaciais.

PALAVRAS-CHAVE: Jogos Matemáticos; Formas Geométricas Espaciais,

Aprendizagem.

CONTRIBUTIONS OF THE GEOMETRIC PIFF GAME IN THE TEACHING AND LEARNING OF SPATIAL GEOMETRIC SHAPES IN THE 2ND YEAR OF HIGH SCHOOL

ABSTRACT: Mathematics contributes to the social and intellectual formation of the subject and its teaching becomes indispensable in school education. However, the Mathematics that has been taught in schools is sometimes uninteresting based on traditional methods, without meaning for the student, so Mathematical Games appear as a promoter of learning and development, when inserted in the game situation in which the child absorbs both the logical structure of play and the mathematical structure. In this sense, this work presents Mathematical Games as a teaching proposal, aiming to investigate the contributions of the Geometric Piff game in the teaching and learning process of students. This study has a qualitative approach, which included a class of the 2nd year of high school in a public school in Petrolina-PE, totaling 29 students. Initially, a probing test was applied to verify the difficulties and previous knowledge of the students in relation to spatial geometric shapes; then, the Geometric Piff game was experienced, which relates geometric solids to their respective formulas and properties (faces, vertices and edges), with the aim of facilitating learning. Subsequently, a questionnaire was applied about the activity experienced. It was found that, despite the results being partially satisfactory, the students highlighted some contributions of the Geometric Piff game, such as: interaction, fun, the possibility of learning while playing, getting out of routine, the ease in appropriating concepts, in addition to more motivation for the class. Thus, it was concluded that, even with the results presented, the Geometric Piff game, provided that the actions are well planned, can indeed be used as a facilitating tool in the learning of spatial geometric shapes.

KEYWORDS: Math Games; Spatial Geometric Shapes, Learning.

1 I INTRODUÇÃO

A Matemática tem um papel preponderante na vida do ser humano, pois além de desenvolver o raciocínio lógico está presente em inúmeras situações do cotidiano, desde um simples cálculo de um troco de dinheiro ao desenvolvimento de noções mais complexas, como a utilização de equações diferenciais para resolução de problemas de movimento, crescimento e decrescimento, termodinâmica e outros fenômenos físicos. Segundo Xavier e Pereira (2015, p.198), “o ensino da matemática é um dos elementos fundamentais para a formação social e intelectual do aluno, fazendo deste um indivíduo dotado de capacidade de análise, senso crítico e capacidade de argumentação”.

Por isso, o ensino da Matemática se torna indispensável na educação escolar, não apenas porque desenvolve o raciocínio lógico, “[...] mas pela sua utilidade na resolução dos problemas do dia a dia, sua colaboração para a melhoria da qualidade de vida das civilizações, seu papel como auxiliar no conhecimento da natureza que nos cerca” (MARIM;

BARBOSA, 2010, p. 228).

Pensar no ensino de Matemática com este fim é reconhecer a necessidade de se propor um trabalho que vá de encontro à realidade do aluno. Para tanto, é preciso que o professor se desprenda dos métodos de ensino tradicionais, nos quais a aprendizagem se resume a repetição e memorização, com uso apenas do livro didático e listas exaustivas de exercícios, que desmotivam os alunos, inferiorizam os que não conseguem acompanhar o processo, e não garantem uma aprendizagem significativa, conforme afirmam Marim e Barbosa (2010) a respeito do ensino de Matemática.

Nessa perspectiva, os Jogos Matemáticos aparecem como promotor da aprendizagem e do desenvolvimento, pois ao ser inserido na situação de jogo, o discente tem a possibilidade de se aproximar dos conteúdos culturais transmitidos pela escola, além de desenvolver novas estruturas cognitivas, pois em situações lúdicas, a criança absorve tanto a estrutura lógica da brincadeira como a estrutura Matemática (MOURA, 2006).

Assim, a realização desta pesquisa se justifica pela necessidade de esclarecer a influência do uso do lúdico no processo de ensino, bem como promover uma interação significativa entre docentes e discentes, a fim de se comprovar a importância da utilização dos jogos na sala de aula como facilitador da aprendizagem. Para isso, pode-se destacar a seguinte questão pesquisa: Como o jogo Piff Geométrico pode contribuir para o ensino e aprendizagem dos sólidos geométricos, principalmente suas propriedades e fórmulas no 2º ano do Ensino Médio?

Diante disso, o objetivo geral desse estudo é investigar as contribuições do jogo Piff Geométrico no processo de ensino e aprendizagem dos sólidos geométricos, principalmente suas propriedades e fórmulas no 2º ano do ensino médio. Tendo como objetivos específicos: compreender as possibilidades e dificuldades envolvidas nas atividades com jogos matemáticos na sala de aula e averiguar se o jogo Piff Geométrico favorece a interação entre os alunos.

2 | JOGOS MATEMÁTICOS NO ENSINO

O homem, desde a infância, tem a necessidade de desenvolver atividades lúdicas, ou seja, atividades cujo fim é o próprio prazer que ela pode oferecer. Segundo Grando (2004, p.8) “as atividades lúdicas são inerentes ao ser humano. Cada grupo étnico apresenta sua forma particular de ludicidade, sendo que o jogo se apresenta como um objeto cultural”.

A criança brinca pela satisfação que a brincadeira proporciona, sem a intenção de ganhar ou perder. A respeito da relação das crianças com brincadeiras e jogos, Ribeiro (2009, p.18) diz o seguinte, “nos momentos em que estão concentradas em atividades lúdicas, as crianças envolvem-se de tal modo que deixam de lado a realidade e entregam-se às fantasias e ao mundo do brincar”. Dessa forma, aprendem de maneira prazerosa, criando estratégias para chegar ao objetivo e superando seus limites. A esse respeito Silva e Kodama (2004, p.3) afirmam que,

> quando uma criança brinca, demonstra prazer em aprender e tem oportunidade de lidar com suas pulsões em busca da satisfação de seus desejos. Ao vencer as frustrações aprende a agir estrategicamente diante das forças que operam no ambiente e reafirma sua capacidade de enfrentar os desafios com segurança e confiança.

O uso de jogos nas aulas proporciona "a inserção do estudante em sua cultura, na medida em que a dimensão lúdica está enraizada nela. Os jogos seriam, assim, mais uma forma de exploração da realidade do estudante" (PERNAMBUCO, 2012, p. 36). Assim, o sujeito se sente motivado diante dos problemas propostos pelo jogo, isso o faz mobilizar todos os conceitos adquiridos na aula, na tentativa de solucionar o problema. Para Ribeiro (2009), a inserção dos jogos no contexto escolar possibilita ao aluno aprender brincando à medida que contribui para o seu desenvolvimento cognitivo, afetivo e social.

O jogo satisfaz a uma necessidade de ação da criança. Essa ação determinada pelo jogo estimula a imaginação, e possibilita o desenvolvimento do pensamento abstrato à medida que a criança busca resoluções para os problemas propostos pelo jogo (GRANDO, 2004). Ainda de acordo com Grando (2004, p.19),

> é no jogo e pelo jogo que a criança é capaz de atribuir aos objetos, mediante sua ação lúdica, significados diferentes; desenvolver a sua capacidade de abstração e começar a agir independentemente daquilo que vê, operando com os significados diferentes da simples percepção dos objetos.

O jogo pode representar uma simulação matemática, pois se utiliza de situações irreais para trazer significado a um conceito matemático a ser compreendido pelo aluno. Dessa forma, traça-se um caminho que vai da imaginação a abstração, levando a assimilação e sistematização de conceitos matemáticos (GRANDO, 2004).

Para Moura (2006, p.85) "a importância do jogo está nas possibilidades de aproximar a criança do conhecimento científico, levando-a a vivenciar virtualmente situações de solução de problemas que a aproximem daquelas que o homem realmente enfrenta ou enfrentou". Dessa forma, aproxima-se a Matemática do aluno a partir de situações irreais, projetadas pelo professor, semelhantes a que o aluno se depara cotidianamente, em que é necessário utilizar seus conhecimentos prévios para a construção de conhecimentos mais elaborados.

O jogo também possibilita aos estudantes estabelecerem uma relação positiva com a aquisição de conhecimento, principalmente para aqueles alunos que tem dificuldade em Matemática e sentem-se incapacidades para aprendê-la. À medida que jogam vão modificando a imagem negativa do ato de conhecer e tendo uma experiência de aprendizagem interessante e envolvente (SILVA; KODAMA, 2004). Logo, o jogo se apresenta como um facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas de difícil compreensão para os alunos (GRANDO, 2004).

Na situação de jogo, o aluno é levado a pensar, criticar, analisar e corrigir suas ações. Assim, ganha autonomia no processo de construção do seu próprio conhecimento. Para Lara (2004, p.2), por meio dos jogos "é possível desenvolvermos nos alunos, além de habilidades matemáticas, a sua concentração, a sua curiosidade, a consciência de grupo, o coleguismo, o companheirismo, a sua auto-confiança e a sua auto-estima".

Assim, a utilização de jogos no ensino de Matemática contribui tanto para estruturação do pensamento e do raciocínio dedutivo, como na aquisição de atitudes. Possibilitando o desenvolvimento do conhecimento matemático e também da linguagem, visto que o aluno terá que lidar com situações conflitantes em seu cotidiano (LARA, 2004).

Nos jogos também se desenvolvem relações de respeito, compartilhamento e cooperação, uma vez que, para se chegar ao objetivo, os jogadores precisam estar articulados, respeitando as regras colocadas. Como também desenvolvem a capacidade de superação dos obstáculos à medida que são levados a pensar e criar soluções para o problema proposto. Nesse sentido, se faz necessário repensar a dimensão lúdica nas atividades escolares com base nos seguintes critérios citados por Macedo, Petty e Passos (2005): é preciso que tenham prazer funcional; serem desafiadoras; criarem possibilidades ou disporem delas; possuírem dimensão simbólica e; expressarem-se de modo construtivo ou relacional.

O prazer funcional remete à vontade que o aluno tem em desenvolver a atividade pelo simples prazer que ela proporciona. Segundo Macedo, Petty e Passos (2005, p. 18) "o espírito lúdico refere-se a uma relação da criança ou do adulto com uma tarefa, atividade ou pessoa pelo prazer funcional que despertam".

Para que uma atividade seja interessante para a criança ela precisa ser clara, simples e direta. Ou seja, que aborde algo compreensível ao aluno e realizável nos seus tempos, além de surpreendente e lúdica (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2005). Atividades extensas e complexas só deixam os alunos desmotivados e alheios à proposta. Além disso, a atividade deve representar um desafio para o estudante, algo que implica alguma dificuldade. Que requer esforço e atenção na superação dos obstáculos. Só assim ele terá motivação para cumprir o objetivo.

O aluno tem que enxergar a atividade como algo possível de ser resolvido e conectado ao seu contexto, além de compreensível. Como afirmam Macedo, Petty e Passos (2005, p.19), "na perspectiva do sujeito, as atividades devem ser necessárias e possíveis". Pois as crianças vão precisar de recursos internos e externos para realização da tarefa, os recursos internos são as habilidades e competências e os recursos externos são os objetos, espaço, tempo e as pessoas. Tarefas impossíveis geram desmotivação e respostas vazias (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2005).

Portanto, o jogo aparece como o importante recurso capaz de promover uma aprendizagem significativa. De acordo com Ribeiro (2009, p.24), "um trabalho com jogos matemáticos pode representar a mudança para uma nova configuração escolar, voltada ao desenvolvimento de sujeitos críticos, criativos, reflexivos, inventivos, entusiastas, num exercício permanente de promoção da autonomia”.

2.1 OS JOGOS MATEMÁTICOS E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Por meio dos jogos é possível explorar a metodologia de Resolução de Problemas, a partir de situações reais e concretas que se assemelhem ao contexto problemático em que a comunidade está inserida, a fim de desenvolver a criatividade e provocar uma reação do estudante (MARIM; BARBOSA, 2010).

Segundo Marim e Barbosa (2010, p.231), “no ensino por meio da resolução de problemas, o aluno se defronta com situações reais e concretas e tem muitas alternativas, tanto para compreender o problema, perceber suas implicações, como para pensar em alternativas de solução”.

A resolução de problemas é uma metodologia de trabalho que permite a exploração do potencial dos jogos no desenvolvimento das habilidades do sujeito, o raciocínio lógico e o intuitivo. De acordo com Silva e Kodama (2004, p.4), as situações- problema “têm como objetivo principal promover análise e questionamentos sobre a ação de jogar, tornando menos relevante o fator sorte e as jogadas por ensaio e erro”.

As situações-problema podem ocorrer oralmente, por meio da explicação de uma jogada que está acontecendo, levando o sujeito à análise de suas ações. Segundo Silva e Kodama (2004, p.4), “a análise das ações, neste contexto, permite que o sujeito enriqueça suas estruturas mentais e rompa com o sistema cognitivo que determinou os meios inadequados ou insuficientes para a produção de determinado resultado”. Dessa forma, o professor tem a oportunidade de intervir, promovendo um momento de estudo dos erros ou ações do jogador que comprometeram o resultado almejado.

O jogo, de acordo com Grando (2004), possibilita o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas na medida em que permite a exploração do conceito por meio da estrutura matemática por trás do jogo. Dentro da metodologia de resolução de problemas, o jogo representa uma situação-problema determinada por regras, na qual o sujeito cria e recria estratégias com o objetivo de vencer ou solucionar o problema.

Tanto o jogo como a resolução de problemas propiciam a criação e construção de conceitos. Com base nisso, Grando (2004, p.30) afirma que “o jogo apresenta-se como um problema que “dispara” para a construção do conceito, de forma lúdica, dinâmica, desafiadora e mais motivante ao aluno”. Ambos envolvem o pensamento e planejamento a partir da situação-problema proposta.

2.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS NO TRABALHO COM JOGOS MATEMÁTICOS

A inserção de jogos na sala de aula de Matemática implica em vantagens e desvantagens, citadas por Grando (2004), que o professor precisa estar ciente ao incluir os jogos na sua prática pedagógica. Apresentando algumas vantagens, de acordo com a autora, tem-se: possibilita a participação ativa do sujeito na construção do seu próprio conhecimento, à medida que contribui para a interação social e o trabalho em equipe; o jogo desperta o interesse do aluno para a atividade, e contribui para o desenvolvimento da criatividade, criticidade, participação, observação; os jogos permitem ao professor identificar as dificuldades dos alunos.

Em contrapartida também têm suas desvantagens, seguem algumas: se não houver planejamento, o jogo pode se resumir a uma atividade de recreação, sem um fim na aprendizagem; o tempo gasto em uma atividade de jogo é maior, por isso se o professor não se programar pode ter que descartar outros conteúdos; o mito de que se pode ensinar todos os conceitos por meio dos jogos pode fazer a sala parecer um verdadeiro cassino, sem contribuição para a aprendizagem; a interferência constante do professor no jogo pode levar a perda da ludicidade. E a obrigatoriedade em participar do jogo destrói a voluntariedade, e desmotiva o aluno (GRANDO, 2004).

Com o intuito de evitar essas desvantagens, aborda-se brevemente sobre a importância do planejamento antes de se aplicar um jogo, pois é necessário que o professor tenha bem traçados o objetivo e as ações que devem ser desencadeados pelo jogo. Além disso, o ambiente da sala precisa favorecer o desenvolvimento da imaginação, por meio do contato com o grupo, permitindo o diálogo sobre as ações desencadeadas. "Um diálogo entre alunos e entre professor e aluno que possa evidenciar as formas e/ou estratégias de raciocínio que vão sendo utilizadas e os problemas que vão surgindo do decorrer da ação" (GRANDO, 2004, p.33).

Grando (2004) ainda cita que a melhor forma de organização dos alunos para o jogo é em grupos de quatro, jogando-se dupla contra dupla. Principalmente, porque existem muitos alunos reprimidos, e o trabalho em grupo facilita o envolvimento dos mesmos. Ainda de acordo com Grando (2004, p.33 e 34), "a disputa com parcerias implica na divisão de frustações e/ou de alegrias quando se perde ou vence o jogo, contribuindo para uma atitude mais favorável em relação aos jogos e para o processo de "aprender a ganhar e perder", importantes para a vida emocional do indivíduo".

Jogar em parcerias permite aos alunos, dialogar, levantar e testar hipóteses, criar estratégias, a fim de chegarem a um consenso que leve ao objetivo. Nesse processo os alunos analisam o jogo, essa análise para Grando (2004, p.34) "propicia a reflexão conceitual e apreensão dos conceitos matemáticos". Em atividades em grupo o sujeito tem a possibilidade de conhecer seus limites, capacidade e potencialidades.

2.3 A IMPORTÂNCIA DO PLANEJAMENTO NA ABORDAGEM DOS JOGOS

Para se aplicar um jogo na sala de aula é necessário planejamento, é preciso também verificar se realmente despertará a curiosidade do aluno, se representa um desafio, que gere envolvimento e desperte-o para ação. Além de estabelecer uma conexão com o conteúdo a ser explanado. De acordo com Grando (2004, p. 25 e 26), "o importante é que os objetivos com o jogo estejam claros, a metodologia a ser utilizada seja adequada ao nível em que se está trabalhando e, principalmente, que represente uma atividade desafiadora ao aluno para o desencadeamento do processo".

É importante destacar que os jogos podem ser utilizados para introduzir, amadurecer e aprofundar conteúdo. E deve-se ter o cuidado para que o jogo não se torne apenas uma atividade de recreação, mas um recurso facilitador na aprendizagem de conceitos matemáticos, reduzindo os bloqueios dos estudantes quanto à disciplina (MARIM; BARBOSA, 2010).

Na atividade lúdica, "os estudantes não ficam na posição de meros observadores, tomando conhecimento de novos fatos, mas se transformam em elementos ativos na tentativa de ganhar a partida ou na busca de um caminho para a solução do problema posto a sua frente" (PERNAMBUCO, 2012, p. 37). Por isso é importante que o professor estude minuciosamente o jogo antes da aplicação, de preferência que jogue para ter noção das possibilidades e limitações, e também para que esteja preparado para lidar com as situações que podem surgir, pois podem emergir perguntas que vão além do que propõe o jogo. A esse respeito Silva e Kodama (2004, p. 5) afirmam,

> um cuidado metodológico que o professor deve considerar antes de levar os jogos para a sala de aula, é o de estudar previamente cada jogo, o que só é possível jogando. Através da exploração e análise de suas próprias jogadas e da reflexão sobre seus erros e acertos é que o professor terá condições de colocar questões que irão auxiliar seus alunos e ter noção das dificuldades que irão encontrar.

O jogo permite a interação entre os alunos e a comparação de suas jogadas. Dessa forma, o aluno pode conhecer seu potencial e suas limitações, buscando a melhoria de suas estratégias e o desenvolvimento de suas potencialidades.

O envolvimento dos estudantes com a proposta do jogo é necessário, porém isto não é o suficiente para garantia da aprendizagem, é preciso à intervenção pedagógica (GRANDO, 2004). Assim, o professor é fundamental em sala de aula, é ele quem lidera a situação e é responsável pelo desenvolvimento do aluno. Segundo Silva e Kodama (2004, p. 5), o professor "cria as situações e arma os dispositivos iniciais capazes de suscitar problemas úteis aos alunos, e organiza contra-exemplos que levem à reflexão e obriguem ao controle das soluções demasiado apressadas".

O professor, para Moura (2006, p. 84), tem o trabalho de "organizador de situações de ensino que possibilitem ao aluno tomar consciência do significado do conhecimento a ser adquirido e de que para que o apreenda torna-se necessário um conjunto de ações a serem executadas com métodos adequados". Assim, o professor pode intervir, mas sem prejudicar a atividade exploratória dos sujeitos, aprimorando o seu trabalho pedagógico, a partir da observação dos erros e acertos dos estudantes.

A partir das atividades com jogos, o professor pode identificar as dificuldades dos alunos, verificar se o assunto foi bem assimilado, para assim poder sanar as lacunas na aprendizagem (MARIM; BARBOSA, 2010).

3 I METODOLOGIA

A pesquisa é de natureza qualitativa que, segundo Rodrigues (2006, p.90) é "utilizada para investigar problemas que os procedimentos estatísticos não podem alcançar ou representar, em virtude de sua complexidade". Fez-se uso desse olhar no momento da aplicação do jogo, observando-se o desempenho e participação dos estudantes. Bem como as estratégias usadas para resolver o problema proposto, as potencialidades e fragilidades apresentadas por eles no decorrer das jogadas.

A pesquisa foi desenvolvida em uma turma de 2° ano do Ensino Médio, de uma escola pública do município de Petrolina-PE, com aplicação do jogo Piff geométrico desenvolvido por Quartieri, Rehfeldt e Giongo (2004), que aborda as formas geométricas espaciais, suas fórmulas e aplicações, e se dividiu em três momentos.

No primeiro momento, foi aplicado um questionário de sondagem para os alunos, abordando a aplicação das fórmulas de área e volume dos sólidos geométricos, bem como as propriedades envolvidas. O questionário continha perguntas de múltipla escolha e abertas, para verificar as dificuldades e os conhecimentos prévios que os alunos possuíam com relação às formas geométricas espaciais. Nas perguntas de múltipla escolha, os alunos tiveram algumas opções de respostas, das quais, apenas uma era a correta. Ainda segundo Marconi e Lakatos (2017, p. 225),

> a técnica da escolha múltipla é facilmente tabulável e proporciona exploração em profundidade quase tão boa quanto a de perguntas abertas. A combinação de respostas de múltipla escolha com respostas abertas possibilita mais informações sobre o assunto, sem prejudicar a tabulação.

No segundo momento, ocorreu a aplicação do jogo Piff geométrico. A turma foi dividida em grupos de quatro pessoas, para jogar dupla contra dupla, conforme recomendado por Grando (2004), e, participaram da pesquisa 29 alunos. Um dos grupos ficou com cinco, e foram- se revezando durante as partidas para que todos pudessem jogar.

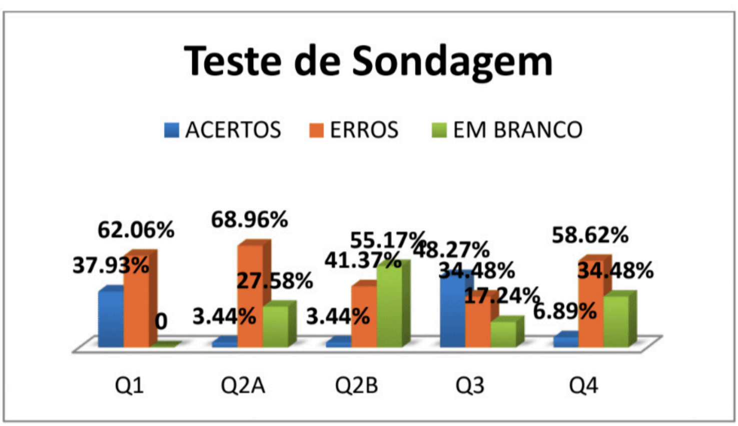
No terceiro momento, foi aplicado um questionário sobre a atividade lúdica vivenciada. Com o objetivo de saber se gostaram do jogo, os pontos positivos e negativos envolvidos na atividade e as contribuições na compreensão das formas geométricas espaciais. Nas perguntas abertas, os estudantes puderam responder livremente, usando uma linguagem própria, que de acordo com Marconi e Lakatos (2017, p. 222), esses tipos de perguntas "possibilitam investigações mais profundas e precisas".

A interpretação dos dados foi feita a partir da análise das repostas dos alunos aos questionários, pela observação dos meios de construção de suas resoluções, seus erros e acertos, em comparação com material teórico. Esse tipo de análise se assemelha a estratégia de "Construção iterativa de uma explicação", citada por Fiorentini e Lorenzato (2012). Nela "as hipóteses explicativas são simultaneamente desenvolvidas e verificadas, ao longo do processo de análise e interpretação, em um processo de vai e vem que envolve reflexão, observação, comparação, contraste e interpretação" (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 139).

4 I ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS COM O TESTE DE SONDAGEM.

Antes da aplicação do jogo Piff Geométrico foi aplicado na turma de 2º ano um questionário de sondagem. Em seguida, os dados obtidos com a aplicação do questionário foram analisados, percebendo-se que os alunos não obtiveram um bom desempenho, tendo em vista que a quantidade de erros sobressaiu a de acertos, conforme pode ser visto na figura 1, que mostra o desempenho da turma no teste de sondagem, associando a quantidade de erros, acertos e questões em branco.

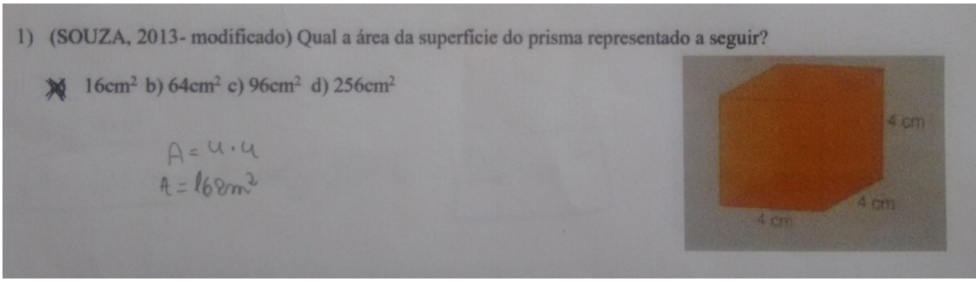
Figura 1- Resultados do teste de sondagem.



Fonte: Dados da pesquisa.

A primeira questão pedia para calcular a área de um cubo, e 11 alunos acertaram. Dos demais, 11 alunos calcularam apenas a área de uma face, mostrando dificuldade em saber diferenciar a figura plana de um sólido geométrico. Como pode ser visto na resposta do(a) aluno(a) na figura 2.

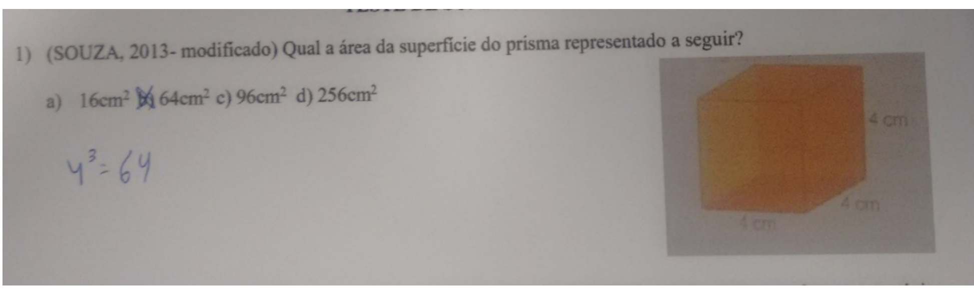
Figura 2- Resposta do(a) aluno(a) A.



Fonte: Dados da pesquisa.

Outra dificuldade apresentada foi vista na resolução de 7 alunos, que calcularam o volume, evidenciando não saber o conceito de área e volume. A figura 3 mostra a resolução do(a) aluno(a) B.

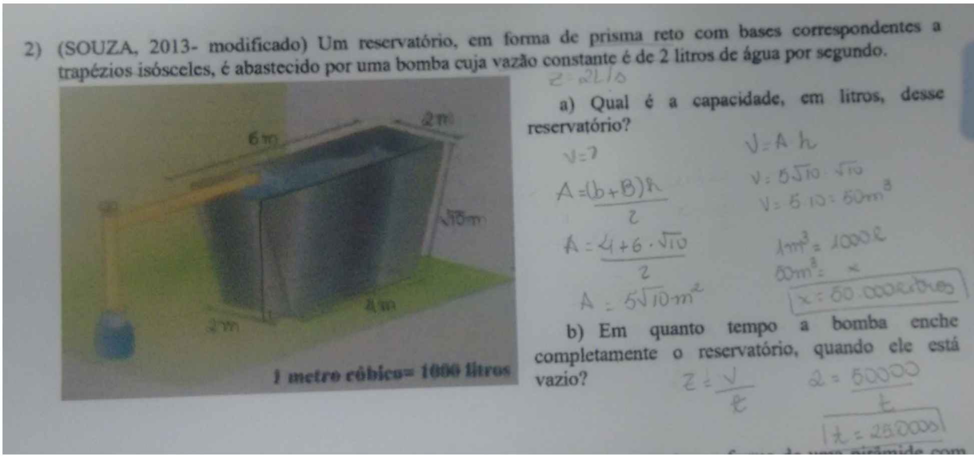
Figura 3- Resposta do(a) aluno(a) B.



Fonte: Dados da pesquisa.

A segunda questão foi a que os alunos tiveram mais dificuldade, apenas um aluno conseguiu acertar. A maior parte tentou resolver, mas acabaram não acertando, pois não interpretaram que seria necessário calcular a altura do trapézio, considerando um valor incorreto. Porém requeria um pouco de atenção na interpretação do enunciado, como também era necessário lembrar a fórmula de cálculo do volume de um prisma e saber aplicá-la corretamente, o que dificultou para os estudantes.

Figura 4- Resposta do(a) aluno(a) C.

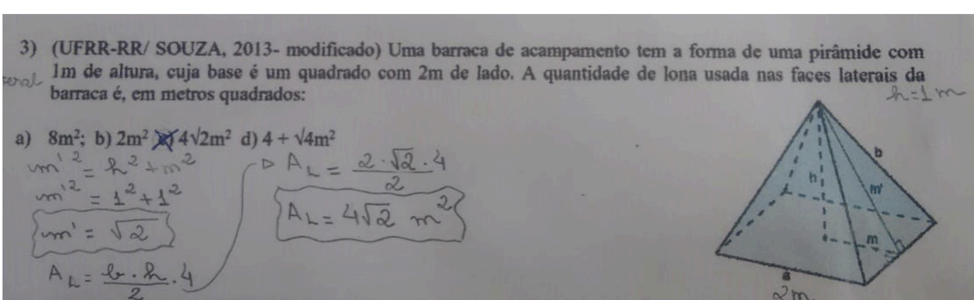


Fonte: Dados da pesquisa.

Para calcular o volume do prisma da segunda questão, era necessário calcular primeiro a área de uma das bases, que era um trapézio isósceles. O aluno C errou a questão (ver figura 4), pois considerou a altura da base igual a √10, esquecendo que para encontrar a altura de um trapézio isósceles é preciso traçar uma reta perpendicular, de maneira que se forme um triângulo retângulo. Além disso, prosseguiu no erro, pois considerou a altura do prisma igual a √10. Essa sequência de erros comprometeu toda a questão, e esse raciocínio também foi seguido por outros alunos.

A terceira questão foi a que obteve a maior quantidade de acertos, ela abordava apótema lateral e apótema da base em uma pirâmide. Veja na figura 5, a resposta do aluno(a) D que respondeu corretamente.

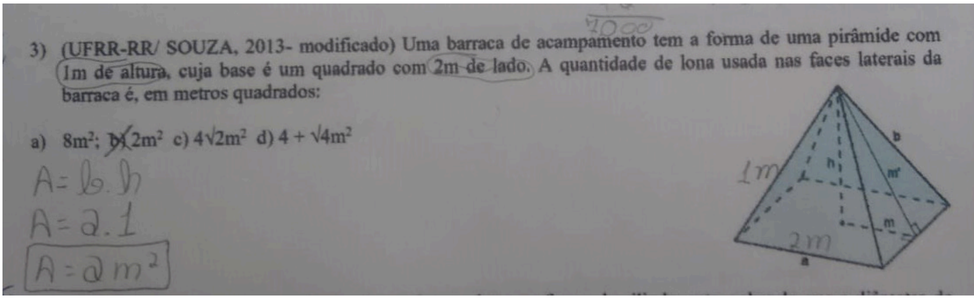
Figura 5- Resposta do(a) aluno(a) D.



Fonte: Dados da pesquisa.

Porém, dois alunos usaram a altura da pirâmide, como se fosse à altura da face lateral e fizeram um cálculo incorreto, como pode ser visto na figura 6. Mostrando não ter conhecimento sobre o apótema lateral e apótema da base das pirâmides.

Figura 6- Resposta do(a) aluno(a) E.


3) (UFRR-RR/ SOUZA, 2013- modificado) Uma barraca de acampamento tem a forma de uma pirâmide com 1m de altura, cuja base é um quadrado com 2m de lado. A quantidade de lona usada nas faces laterais da barraca é, em metros quadrados:

a) $8m^2$; b) $2m^2$ c) $4\sqrt{2}m^2$ d) $4 + \sqrt{4}m^2$

$A = b.h$

$A = 2.1$

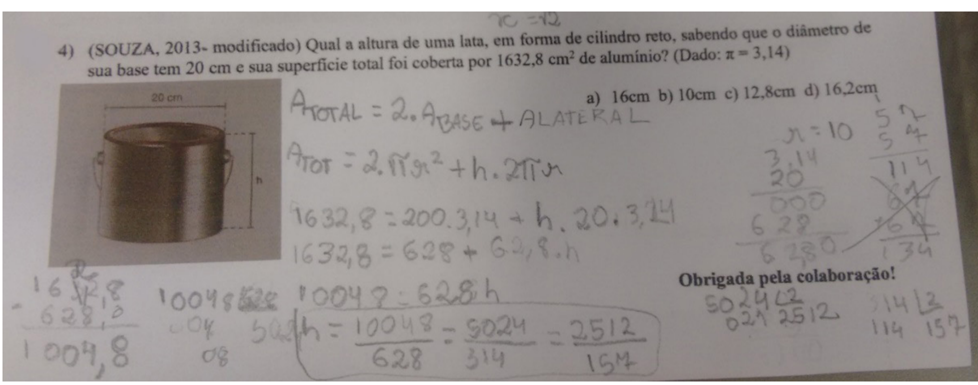
$\boxed{A = 2\,m^2}$

Fonte: Dados da pesquisa.

A quarta e última questão pedia para encontrar a altura de uma lata em forma de cilindro reto, para isso era só substituir os valores na fórmula da área de um cilindro. Entretanto, para a maioria dos alunos, a questão se tornou mais complexa, pois o professor não tinha introduzido ainda os sólidos de revolução. É comum que os estudantes tenham mais dificuldade quando se trata desse conteúdo.

Porém, mesmo assim, alguns alunos conseguiram iniciar a questão, só não conseguiram concluir, como pode ser observado na figura 7

Figura 7- Resposta do(a) aluno(a) F.


4) (SOUZA, 2013- modificado) Qual a altura de uma lata, em forma de cilindro reto, sabendo que o diâmetro de sua base tem 20 cm e sua superfície total foi coberta por 1632,8 cm^2 de alumínio? (Dado: $\pi = 3,14$)

a) 16cm b) 10cm c) 12,8cm d) 16,2cm

$A_{TOTAL} = 2.A_{BASE} + A_{LATERAL}$

$A_{TOT} = 2.\pi r^2 + h.2\pi r$

$1632,8 = 200.3,14 + h.20.3,14$

$1632,8 = 628 + 62,8.h$

$1004,8 = 62,8\,h$

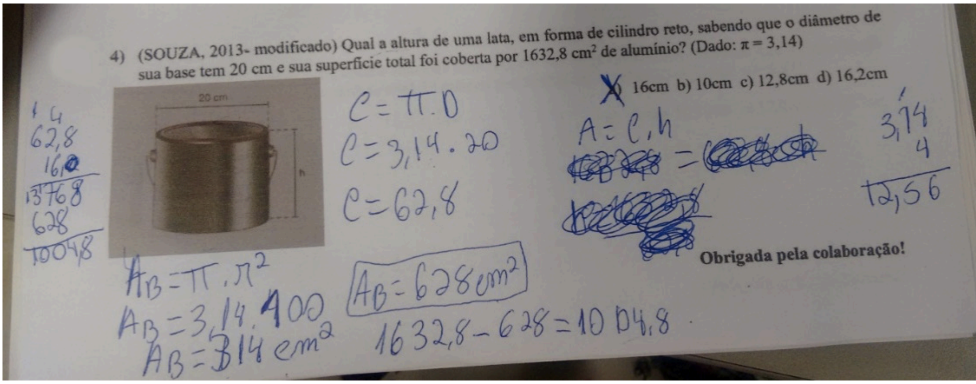
$h = \frac{10048}{628} = \frac{5024}{314} = \frac{2512}{157}$

Obrigada pela colaboração!

Fonte: Dados da pesquisa.

Alguns alunos usaram uma estratégia interessante para resolver, calculando primeiro a área das bases e subtraindo do total, a fim de obter a área lateral. E por fim, substituíram na fórmula, ÁREA LATERAL= C.H, onde C é o comprimento da circunferência e H a altura, dessa forma obtiveram a altura da lata. Como pode ser visto na figura 8:

Figura 8- Resposta do(a) aluno(a) G.



Fonte: Dados da pesquisa.

Com isso, foi observado que muitos alunos até conhecem as fórmulas dos sólidos geométricos, porém, muitas vezes, não sabem de que sólido se trata, nem a situação correta para se aplicá-la ou como aplicá-la. Logo não basta conhecer as fórmulas, é preciso compreender como foram obtidas e como devem ser aplicadas.

5 | VIVÊNCIA DO JOGO PIFF GEOMÉTRICO

Durante a vivência do jogo, a turma foi dividida em grupos de quatro alunos para se jogar dupla contra dupla, essa forma de organização deles é melhor, de acordo com Grando (2004), pois ajuda a dividir as frustações, e ter uma relação positiva com o ato de ganhar ou perder. Inicialmente foi explicado o jogo e suas regras, alguns tiveram um pouco de dificuldade para compreender, mas à medida que jogavam foram melhorando. Vale ressaltar que os alunos se envolveram com a proposta do jogo, se empenharam em ganhar. Foram participativos, sempre perguntando sobre suas jogadas, se estavam corretas, tirando suas dúvidas sobre as propriedades que não sabiam. Além disso, interagiram com os ouros colegas, ajudando uns aos outros a chegar ao objetivo proposto pelo jogo.

A partir das jogadas dos alunos, pôde-se perceber algumas dificuldades apresentadas por eles, com relação à identificação das faces, vértices e arestas dos sólidos geométricos, a quantidade, o formato das faces; e as fórmulas de área e volume de cada sólido geométrico. Reforçando o que afirmam Marim e Barbosa (2010) a respeito das possibilidades no trabalho com jogos. E assim pude intervir, à medida que me chamavam para tirar suas dúvidas, perguntando se estavam relacionando corretamente as propriedades aos sólidos, e eu fui dizendo se estava correto ou não, e explicando. Dessa forma, ajudando-os a chegar ao objetivo, porém sem prejudicar a atividade exploratória dos mesmos, conforme recomendado por Moura (2006).

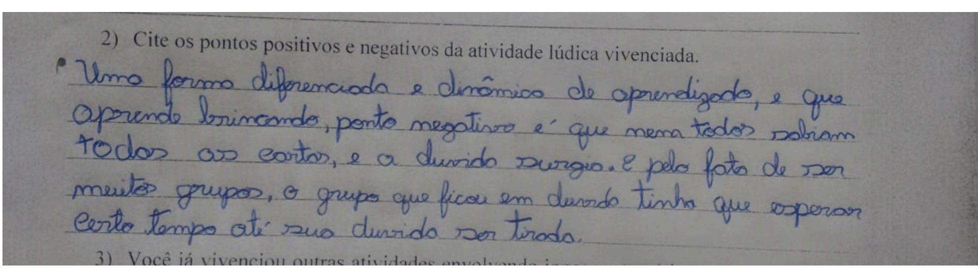
6 I ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS COM O QUESTIONÁRIO SOBRE A VIVÊNCIA DO JOGO PIFF GEOMÉTRICO

No terceiro momento, foi aplicado um questionário a respeito da vivência do jogo Piff Geométrico. Na primeira pergunta, com base na análise das respostas a maioria dos estudantes respondeu que o jogo contribuiu para a aprendizagem das fórmulas geométricas espaciais. Descrevendo que facilitou a associação das fórmulas aos sólidos, possibilitando o conhecimento de novas formas geométricas, e a percepção da semelhança com objetos do cotidiano. Reforçando o que afirma Ribeiro (2009) a respeito dos jogos.

Na segunda pergunta, os discentes apresentaram como pontos positivos a diversão, a fixação dos conteúdos, a convivência com os colegas e a interação em que todos se ajudam, assim como, afirma Lara (2004).

Como pontos negativos, alguns alunos abordaram a falta de compreensão do assunto, a abordagem sobre corpos redondos que não tinham estudado ainda, a competição, e as dúvidas, que tinham que esperar a disponibilidade do aplicador para saná-las, já que tinham muitos grupos (ver figura 9). De fato, a falta de conhecimento do conteúdo dificultou um pouco a execução do jogo, pois foram notadas algumas dúvidas dos alunos. Mas isso também é consequência de não terem se apropriado do conteúdo, pois o assunto abordado já tinha sido apresentado em sala pelo professor da turma, com exceção dos corpos redondos que o mesmo não conseguiu aprofundar, porém pode ser comprovado que tiveram contato com o conteúdo de corpos redondos, já que alguns estudantes conseguiram resolver a quarta questão dos testes.

Figura 19- Resposta do(a) aluno(a) I a pergunta 2.



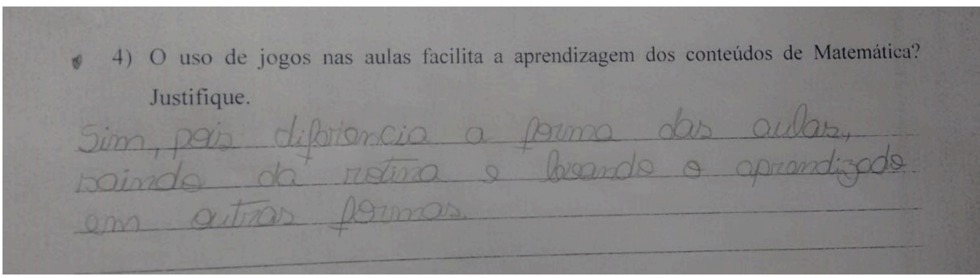
Fonte: Dados da pesquisa.

O surgimento de dúvidas durante a aplicação de um jogo é normal, é por isso que Grando (2004) fala a respeito da necessidade de um planejamento antes da aplicação de um jogo, e da necessidade da intervenção do professor como mediador do processo de construção do conhecimento pelos alunos.

Sobre a terceira pergunta, a maior parte dos estudantes afirmou nunca terem vivenciado atividades envolvendo jogos matemáticos, e dos que disseram que sim, descreveram situações com o Software Geogebra, que não é um jogo.

Na quarta pergunta, a maioria respondeu que sim, os jogos facilitam a aprendizagem dos conteúdos de Matemática. Afirmando que o jogo ajuda a fixar o conteúdo, desperta o interesse do aluno, diferencia as aulas, saindo da rotina, possibilita a aplicação do que se aprendeu em sala e a interação. Confirmando todos os benefícios, citados anteriormente por Moura (2006), Marim e Barbosa (2010), Ribeiro (2009), Grando (2004), Silva e Kodama (2004), Lara (2004), e Macedo, Petty e Passos (2005), que a utilização de jogos matemáticos nas aulas pode proporcionar. Conforme se verifica nas respostas dos alunos E e D nas figuras 10 e 11.

Figura 10- Resposta do(a) aluno(a) E.

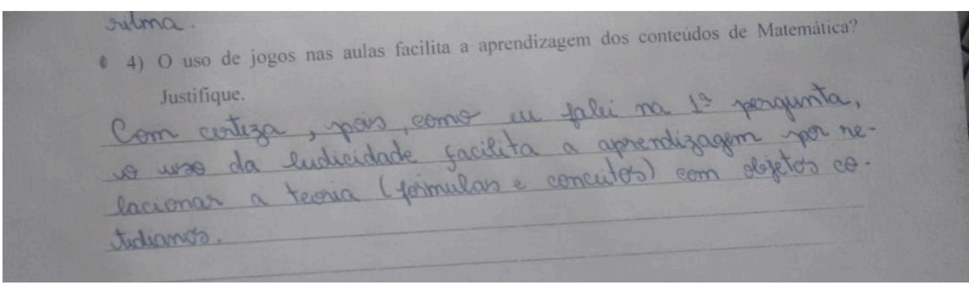

4) O uso de jogos nas aulas facilita a aprendizagem dos conteúdos de Matemática?

Justifique.

Sim, pois diferencia a forma das aulas, saindo da rotina e levando o aprendizado em outras formas.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 11- Resposta do(a) aluno(a) D.


rotina.

4) O uso de jogos nas aulas facilita a aprendizagem dos conteúdos de Matemática?

Justifique.

Com certeza, pois, como eu falei na 1ª pergunta, o uso da ludicidade facilita a aprendizagem por relacionar a teoria (fórmulas e conceitos) com objetos cotidianos.

Fonte: Dados da pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dessa pesquisa pode-se concluir que os jogos são um importante recurso didático que pode facilitar a aprendizagem em Matemática, proporcionando ao aluno um ambiente de aprendizagem mais agradável, reduzindo bloqueios e desenvolvendo potencialidades. Além de contribuir com desenvolvimento da interação entre os discentes, cooperação, concentração, e do pensamento abstrato. Essas ideias se confirmam nas respostas dos alunos sobre a vivência do jogo.

Contudo, os resultados obtidos com o questionário não foram satisfatórios. Isso pode ser consequência da falta de conhecimento sobre o conteúdo de formas geométricas espaciais, que era necessário para se jogar. Pois o jogo Piff Geométrico se classifica como um jogo de treinamento, conforme Marim e Barbosa (2010), sendo utilizado para reforçar conteúdos, basicamente relacionar os sólidos com suas fórmulas e propriedades (vértices, arestas, faces).

Outro ponto a ser abordado é que o jogo Piff Geométrico apresenta apenas as fórmulas, mas não aborda suas aplicações. Sendo que esse conhecimento era necessário para resolver o questionário, então o aluno que não sabia como aplicar as fórmulas não conseguiu responder corretamente as questões.

Portanto, concluiu-se que se faz necessária, além da aplicação do jogo, uma intervenção do professor trazendo a explicação das fórmulas abordadas, bem como sua aplicação em situações problemas, para que os estudantes pudessem compreender sua utilidade e se apropriar do conceito. Além disso, o jogo Piff Geométrico pode ser utilizado como um diagnóstico para saber as dificuldades dos alunos quanto ao conteúdo de formas geométricas espaciais, essa ideia pode ser utilizada em novas pesquisas sobre o tema.

REFERÊNCIAS

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** – 3. Ed. Ver. – Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

GRANDO, R. C. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

LARA, I. C. M.. O jogo como estratégia de ensino de 5ª a 8ª série. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA- ENEM**, 8. Anais. Recife: UFPE, 2004. .

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Os jogos e o lúdico na aprendizagem escola**r. – Porto Alegre: Artmed, 2005.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M.. **Fundamentos de metodologia científica**. – 8. Ed. São Paulo: Atlas, 2017.

MARIM, V.; BARBOSA, A. C. I.. Jogos matemáticos: uma proposta para o ensino das operações elementares. In: OLIVEIRA, C. C.; et al. **Educação matemática: contextos e práticas docentes.** Campinas, SP: editora Alínea, 2010. P. 225-239.

MOURA, M. O. A séria busca no jogo: do lúdico na Matemática. In: KISHIMOTO, T. M. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.** 9. ed. Cortez, p. 73-87, 2006.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação. Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco. Recife: SEE, 2012.

QUARTIERI, M. T.; REHFELDT, M. J.; GIONGO, I. M. Jogos para o Ensino Médio. Produção técnica adaptada a partir do minicurso desenvolvido VIII no Encontro Nacional de Educação Matemática, em 2004. Disponível em: https://www.univates.br/ppgece/docs/materiais2009/Jogos_Pedagogicos.pdf. Acesso em 29 Jan. 2014.

RODRIGUES, A. J. **Metodologia científica**. São Paulo: Avercamp, 2006.

RIBEIRO, F. D. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática**. São Paulo: Saraiva, 2009.

SILVA, A. F.; KODAMA, H. M. Y. Jogos no ensino da matemática. In**: BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA**, 2. Anais. UFBA, 2004. 19p.

XAVIER, E. P. C.; PEREIRA, L. B. D.. Os jogos matemáticos como método facilitador no ensino-aprendizagem de matemática. In: MARINO, A. R.; SCHURSTER, K.. (Org.). **O programa de iniciação à docência na Universidade de Pernambuco: práticas interdisciplinares.** 1. Ed. Autografia, p.196-211, 2015.

O RACIOCÍNIO LÓGICO NO ENSINO FUNDAMENTAL I

Data de aceite: 02/08/2023

Edilene Severina da Silva

"Aprendizagem é a progressiva mudança de comportamento que está ligada, de um lado, a sucessivas apresentações de uma situação e, de outro, a repetidos esforços dos indivíduos para enfrentá-la de uma maneira eficiente".

Mc. CONNEL

RESUMO: Neste trabalho, motivados pelo diagnóstico dado por uma avaliação externa, a qual sinalizou que nossos alunos não possuem bem desenvolvida a capacidade de raciocínio lógico para resolver problemas, fizemos um estudo de caso com o 5º ano do Ensino Fundamental I, com o objetivo de verificar se haveria melhora se tal conteúdo fosse ensinado durante as aulas. Para alcançar esse objetivo, em um primeiro momento foi aplicado um questionário contendo algumas perguntas e um jogo sudoku para que os alunos fizessem como sabiam, somente em ouvir falar das regras, sem a explanação das mesmas, no entanto, não obtiveram um bom resultado. Posteriormente, eles tiveram aulas sobre raciocínio lógico e jogaram novamente, utilizando o puzzle Sudoku mostrando uma melhora significativa nos resultados. O que nos leva a crer que, se o raciocínio lógico for bem trabalhado em sala de aula, os alunos poderão desenvolver essa habilidade significativamente.
PALAVRAS-CHAVE: Raciocínio lógico. Sudoku. Ensino Fundamental I.

ABSTRACT : In this work, motivated by the diagnosis given by an external evaluation, which signaled that our students do not have a well-developed logical reasoning ability to solve problems, we made a case study with the 5th year of Elementary School, with the objective of verifying whether there would be improvement if such content were taught during classes. To achieve this goal, at first a questionnaire containing some questions and a sudoku game was applied so that the students could do as they knew, only in hearing about the rules, without explaining them, however, they did not obtain a good result. Subsequently, they took classes

on logical reasoning and played again, using the Sudoku puzzle showing a significant improvement in the results. Which leads us to believe that, if logical reasoning is well worked out in the classroom, students will be able to develop this skill significantly.
KEYWORDS: Logical reasoning. Sudoku. Elementary School.

1 I INTRODUÇÃO

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa), tradução de Programme for International Student Assessment, é um estudo comparativo internacional realizado a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Ele oferece informações sobre o desempenho dos estudantes na faixa etária dos 15 anos. Foram avaliados 72 países na edição de 2015 do Pisa, e a média geral dos brasileiros foi de 407 em leitura, 377 em matemática e 401 em ciências. A média dos estudantes dos países da OCDE foi de 493 em leitura, 490 em matemática e 493 em ciências. (Brasil. Inep. 2016).

Como resultado diagnosticado por este programa, os alunos brasileiros estão bem abaixo da média geral dos demais países. A pretensão deste trabalho é o de auxiliar os alunos a desenvolverem uma linha de raciocínio completa já no ensino fundamental I. Uma vez que pensamento crítico, argumentativo, flexibilidade de pensamento e raciocínio lógico são aplicáveis não só em situações escolares, mas também na resolução de problemas cotidianos, o ensino de lógica nos anos iniciais do ensino fundamental pode contribuir para que o aluno supere dificuldades com o encadeamento lógico necessário para resolução de problemas ao longo de sua trajetória.

GROENWALD, 1999 apud SILVA e GROENWALD, 2004, p.1, relata que

> A vida moderna exige, cada vez mais, o desenvolvimento de habilidades como: lógica de raciocínio; saber transferir conhecimentos de uma área para outra; saber comunicar–se e entender o que lhe é comunicado; trabalhar em equipe; interpretar a realidade; buscar, analisar, tratar e organizar a informação; adotar uma postura crítica, sendo consciente de que o conhecimento não é algo terminado e deve ser construído constantemente; tomar decisões, ganhando em autonomia e criatividade.

Segundo Dante (2010), o ensino de raciocínio lógico tem um papel importante para o desenvolvimento intelectual do aluno. A falta de uma disciplina específica, que leve ao aluno a ter um bom desenvolvimento em raciocínio lógico, pode creditar ao futuro adulto uma incapacidade de argumentação crítica significativa e organizada, a qual torna o mesmo vulnerável em relação ao pleno exercício de sua cidadania.

Com foco em trabalhar especificamente o jogo sudoku, um jogo que auxilia o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno (pensamento lógico) e, de alguma maneira mensurar os resultados obtidos após a explicação do que é raciocínio lógico, fizemos um estudo de caso, o qual foi realizado em uma turma de 16 alunos do 5º ano, do período vespertino, do Ensino Fundamental I, na Escola Municipal de Ensino Fundamental "Senhora Iracema de Moraes Marchezini", município de Santa Adélia, localizado no interior de São Paulo. O estudo de caso foi organizado em três momentos seguindo a seguinte estrutura:

> 1ª Aula – 06 de novembro de 2019: Aplicação do questionário e levantamento prévio sobre o que sabiam sobre o Jogo Sudoku.
>
> 2ª Aula - 13 de novembro de 2019: O que é Raciocínio lógico?
>
> 3ª Aula – 20 de novembro de 2019: Jogo Sudoku

Este estudo foi submetido ao Comitê de Ética em Pesquisa sob o número do Parecer: 3.685.630 –Aprovado em 05 de novembro de 2019.

Etapa 1. Apliquei um questionário simples para saber o quanto os alunos já conheciam sobre "o que raciocínio lógico?" e sobre Sudoku; e nesta primeira aula, após falar superficialmente as regras do passatempo Sudoku, (um jogo com uma grade 6X6 constituída de sub-grades 2X3 denominadas de regiões. Certas células já contêm números, chamados de dados, e a finalidade do jogo é preencher as células vazias, com um número em cada célula, de forma que cada coluna, linha e região contenham os números de 1 à 6 apenas uma vez), pedi para que resolvessem o jogo de acordo com o que sabiam, pois o jogo estava na mesma folha do questionário, assim como mostra o Anexo A. Vale ressaltar que o jogo foi adaptado para estes alunos, pois geralmente a grade principal é 9x9 e as sub-grades são 3x3;

Etapa 2. Ministrei aulas, que visavam trabalhar especificamente o raciocínio lógico dos alunos;

Etapa 3. Por fim, apliquei novamente o Sudoku, com o intuito de comparar o resultado obtido com os resultados da Etapa 1.

Em cada uma das etapas, os dados foram coletados e organizados, e serão apresentados no Capítulo 3.

No Capítulo 1, apresentamos uma ideia geral sobre o que é raciocínio lógico e como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) veem tal tema. No Capítulo 2 apresentamos maneiras de se trabalhar o raciocínio lógico no Ensino Fundamental I e, por fim, no Capítulo 3 descrevemos como foram realizadas as atividades no estudo de caso e apresentamos os resultados obtidos.

2 | O QUE É O RACIOCÍNIO LÓGICO?

O raciocínio lógico não se refere apenas a área lógico matemática, em outras áreas também ocorrem o uso da lógica, pois por meio do pensamento lógico é possível ser crítico, dedutivo, analisar e selecionar informações com clareza, ter interesse e propósito de vida, coerência, criatividade, planejamento estratégico. Segundo Copi, 1978, "O estudo da Lógica é o estudo dos métodos e princípios usados para distinguir o raciocínio correto do incorreto” (apud SCOLARI, 2007, p.2)

Embora o desenvolvimento do raciocínio lógico não é inerente ao campo de Matemática, mas em todas as disciplinas, na área matemática é indissociável. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) em O Papel Da Matemática No Ensino Fundamental, explicita sobre o uso do pensamento lógico como de suma importância para o desenvolvimento do aluno em toda a sua vida.

> A Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico.
>
> (...) é importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. (BRASIL,1988, p. 24).

-

Dentre os objetivos gerais para o ensino fundamental que os Parâmetros Curriculares Nacionais trazem, dois deles têm sua notoriedade no decorrer da vida escolar do aluno indicando que sejam capazes de:

> “Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
>
> Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação”. (BRASIL,1988, p.6)

Sendo assim, o desenvolvimento do raciocínio lógico na vida escolar faz com que o aluno atinja a vida adulta com habilidades essências necessárias para poder resolver os possíveis problemas apresentados em sua decorrência.

Em Seleção de conteúdos (PCNs) mostra a importância de ser trabalhado o desenvolvimento do raciocínio lógico em todas as disciplinas, haja visto, que não há uma disciplina especifica para o estudo deste conteúdo e sim que o mesmo deva ser aplicado em todas áreas, desta maneira o futuro do adulto estará menos vulnerável ao pleno exercício da sua cidadania.

> O desafio que se apresenta é o de identificar, dentro de cada um desses vastos campos, de um lado, quais conhecimentos, competências, hábitos e valores são socialmente relevantes; de outro, em que medida contribuem para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, na construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos. (BRASIL,1997, p. 38).

Para (Abar, 2006), o aprendizado da lógica auxilia os estudantes no raciocínio, na compreensão de conceitos básicos, na verificação formal de programas e melhor os prepara para o entendimento do conteúdo de tópicos mais avançados. (apud SCOLARI, 2007, p.2)

O desenvolvimento do raciocínio lógico auxilia na resolução de problemas, ao estimularmos o raciocínio lógico da criança estamos fazendo com que a mesma relacione algo que tenha conhecimento com algo novo, formando assim um novo pensamento lógico com estrutura.

Algumas atividades proporcionam diversão e aprendizagem, temos os jogos como exemplo bem clássico, os jogos de sequência e séries, legos, quebra-cabeças, jogos de memória, entre outros, além de proporcionar prazer, despertam autoconfiança, a autoestima, agilidade, memorização, concentração, foco, estímulo do raciocínio cognitivo e trazem algo que é inerente a essas atividades como é o caso de aprender com os próprios erros. Essa maneira de aprender é essencial para o progresso da criança, a qual viverá em uma sociedade altamente competitiva, em busca do perfeccionismo. Com a intervenção assertiva no momento do erro, onde a criança experimenta a sensação de êxito quando é corrigida a resposta incorreta, ela se surpreende com esta sensação, esse sentimento é capaz de motivá-la para o aprendizado, já que: joga-erra-corrigi-joga-acerta-sensação de sou capaz, tornando-se um cidadão com autoestima.

O jogo Sudoku é um exemplo claro desta metodologia, uma vez que exige concentração, foco, determinação durante o seu desenvolvimento e é possível avaliar o quanto a criança está engajada para atingir o objetivo final, além de descobrir quais dificuldades a mesma apresenta na hora do jogo.

Nos PCNs o uso dos jogos pelos alunos possibilita compreensão, geram satisfação, formam novos hábitos sistematizados, aprendem a lidar com símbolos, criam e pensam por analogia, vivenciam situações que se repetem, produzem linguagens, compreendendo e utilizando-as, capacitando-se para se submeterem a regras e dar explicações, favorecendo-se a integração num mundo social bastante complexo. Assim como os jogos com regras exigem o uso de pensamentos estruturados, as situações complexas apresentadas no cotidiano necessitam do desenvolvimento do raciocínio lógico para que se obtenha êxito na dissolução das mesmas.

Os jogos com regras têm um aspecto importante, pois neles o fazer e o compreender constituem faces de uma mesma moeda. A participação em jogos de grupo também representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para a criança e um estímulo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico.

A Base Curricular Nacional Comum apresenta competências e habilidades que devem ser desenvolvidas no decorrer do Ensino Fundamental, essas são necessárias para a análise de situações da vida cotidiana como: resolução de problemas, de investigação, desenvolvimento de projetos, estratégias para aprendizagem, comunicação e argumentação, saber propor soluções às questões que surgem em seu dia a dia ,utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade

Dentre as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental presentes na BNCC, a número dois indica que deve ser desenvolvido no aluno o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

A BNCC valoriza o pensamento, a criatividade, o afeto, destaca o pensamento lógico, as habilidades socioemocionais, o espírito investigativo, capacidades de observação, construir argumentações, uso inteligente de recursos disponíveis para propor soluções às questões que surgem dentro e fora da escola.

3 | ESTUDO DE CASO

O estudo de caso foi realizado na Escola Municipal de Ensino Fundamental Senhora Iracema de Moraes Marchezini, situada na cidade de Santa Adélia, interior de São Paulo em uma turma de 5° ano com dezesseis alunos do período vespertino.

O intuito do estudo foi verificar se há melhora, na capacidade de raciocínio lógico por parte dos alunos, se tal conteúdo for ensinado durante as aulas. Neste capítulo discorremos sobre como foi realizada tal pesquisa e apresentamos os resultados obtidos.

3.1 Sudoku – primeiro contato

Num primeiro momento, os alunos foram convidados a participar do jogo Sudoku. A origem do nome é uma simplificação da frase “suji wa dokushin ni kagiru”, que significa “os números têm que ser únicos” e se refere a um passatempo numérico de instruções. Mesmo com o nome japonês, as primeiras versões do puzzle são creditadas ao matemático suíço Leonhard Euler. A versão criada por Euler se chamava “quadrados latinos”, um jogo em que os algarismos devem aparecer apenas uma vez em cada linha e em cada coluna. O formato com 9 linhas e 9 colunas se tornou popular nos EUA, quando começaram a ser publicados na década de 70.

Para facilitar a compreensão por parte dos alunos, trabalhamos com uma variação do jogo, no caso utilizamos uma grade 6X6 constituída de sub-grades 2X3 denominadas de regiões.

As regras do jogo são simples. Na grade, algumas células já contêm números, chamados de dados, e a finalidade do jogo é preencher as células vazias, com um número em cada célula, de forma que cada coluna, linha e região contenham os números de 1 à 6 apenas uma vez, conforme Figura 1.

Figura 1 –Sudoku gerado em pelo site

3	4	6			
		2	3	6	
	2		4		3
	3	5		2	
2	6			4	
1	5			3	6

Fonte: https://www.sudokuweb.org/easy-sudoku-6x6-for-kids/

Neste primeiro contato com o jogo Sudoku, foi passado para os alunos uma breve introdução sobre as regras do mesmo, falando somente que não poderiam repetir os números de 1 à 6 nas linhas, colunas e sub-grades. Tais regras foram apresentadas aos alunos e eles jogaram, sem nenhum auxílio do professor e explanação das mesmas.

Após terminarem o preenchimento, coletamos os Sudokus preenchidos e organizamos segundo os erros mais comuns, conforme mostrados nas figuras a seguir.

3.1.1 ERROS COMETIDOS NO PREENCHIMENTO DO SUDOKU

Nas Figuras 2 a 7, apresentamos alguns dos Sudokus preenchidos pelos alunos, onde o erro é similar. Eles relataram ter preenchido o jogo por grade completando as regiões, olhando apenas para a sequência de 1 à 6, até completar todo jogo, o que incorre no erro de repetir números nas linhas e/ou colunas.

Figura 2: Sudoku desenvolvido por aluno.

1	2	3	5	4	6
5	6	4	1	2	3
1	3	4	6	5	2
6	5	2	3	1	4
4	5	2	3	6	2
6	3	1	4	1	5

Fonte: Arquivo do próprio autor.

Figura 3: Sudoku desenvolvido por aluno.

4	1	6	5	3	2
3	5	2	4	2	6
6	3	2	1	5	4
1	4	5	6	3	2
5	3	4	3	6	4
4	2	1	5	2	1

Fonte: Arquivo do próprio autor.

Figura 4: Sudoku desenvolvido por aluno.

3	4	1	3	2	6
5	6	2	1	5	4
5	4	3	1	3	4
1	6	2	5	6	2
6	1	2	6	5	3
4	3	5	2	4	1

Fonte: Arquivo do próprio autor

Figura 5: Sudoku desenvolvido por aluno.

3	2	5	1	4	6
1	4	6	3	2	5
5	1	2	6	3	2
6	3	4	5	1	4
4	6	3	2	5	1
2	5	1	4	6	3

Fonte: Arquivo do próprio autor

Figura 6: Sudoku desenvolvido por aluno.

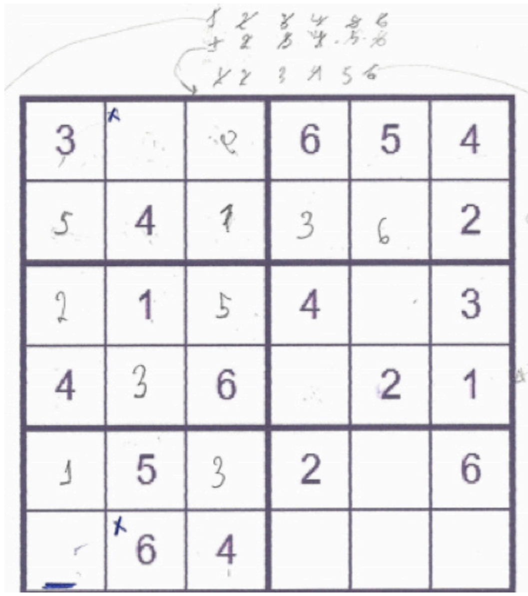
Fonte: Arquivo do próprio autor.

Figura 7: Sudoku desenvolvido por aluno.

Fonte: Arquivo do próprio autor.

Na Figura 8 o aluno usou como estratégia escrever todos os números de 1 à 6 para ir preenchendo linhas e colunas, eliminando o número o qual já existia para colocar o que faltava, no entanto não conseguiu preencher todos os quadrados com o mesmo tempo que foi dado a todos os demais alunos.

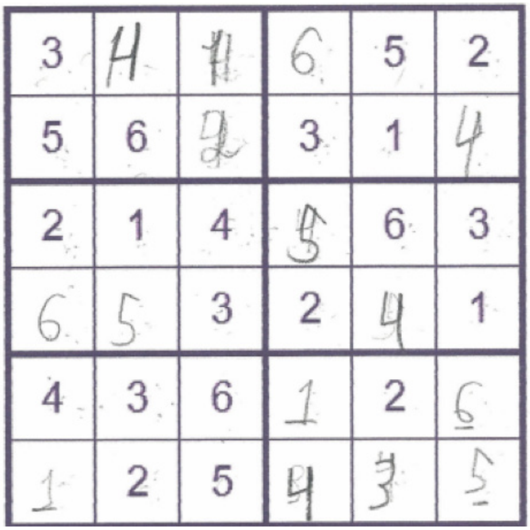
Figura 8: Sudoku desenvolvido por aluno.



Fonte: Arquivo do próprio autor.

Na Figura 9 o aluno começou o preenchimento da primeira grade debaixo para cima da esquerda para direita observando que esta grade tinha apenas um número que faltava, e assim foi até a sexta grade. Este aluno respondeu que conhecia o jogo Sudoku, bem como suas regras. Note que o aluno começou a conferência de cima para baixo e foi substituindo os números para chegar ao resultado ao qual almejava, fazendo a conferência por colunas, a qual no princípio está correta, no entanto quando se verifica por linhas não estão todas corretas, as duas últimas linhas haveria a necessidade de trocar o número 6 por 5 e 5 por 6. Como o tempo dado a todos foi o mesmo também não conseguiu completar o jogo corretamente.

Figura 9: Sudoku desenvolvido por aluno.



Fonte: Arquivo do próprio autor

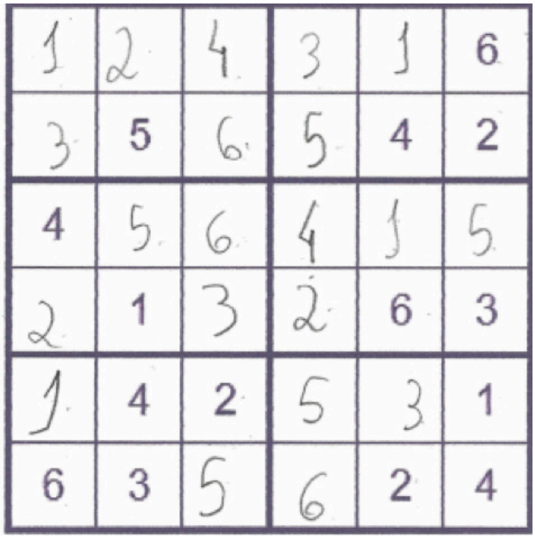
Na Figura 10 mostra que o aluno entendeu, de forma equivocada, que poderiam ser usados todos os algarismos de 0 à 9 para preenchimento do jogo. O aluno entregou o jogo sem terminar o preenchimento até o momento da entrega.

Figura 10: Sudoku desenvolvido por aluno.

Fonte: Arquivo do próprio autor.

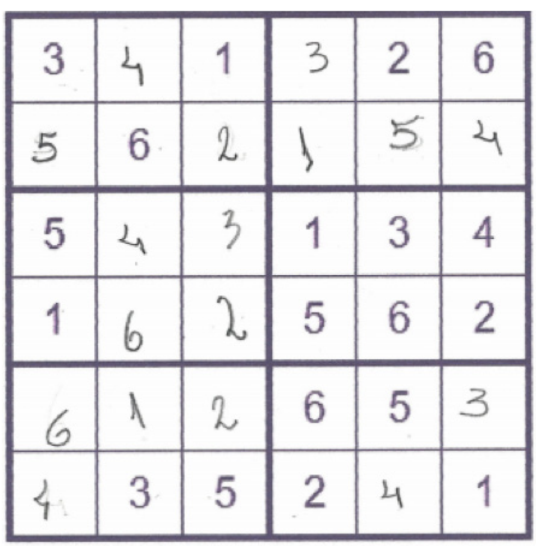
Nas Figuras 11 e 12, note que na coluna 3 existem 2 números 6 próximos, provando que o objetivo era preencher a grade de 1 à 6, os alunos relataram que foram preenchendo os espaços, tanto por coluna quanto por linha, somente para preencher os espaços.

Figura 11: Sudoku desenvolvido por aluno



Fonte: Arquivo do próprio autor

Figura 12: Sudoku desenvolvido por aluno



Fonte: Arquivo do próprio autor

Na Figura 13 o aluno iniciou por grade, pela única possibilidade, colocando o número 4, em seguida foi para a segunda coluna colocando o número 6, depois foi na grade da direita para a esquerda, colocando o número 1, e assim foi fazendo, em seguida foi completando com números aleatórios. O aluno começou a conferência por linha e ao chegar na 4º linha de cima para baixo mudou o número 4 para 5, mesmo vendo que o 4 estava correto, simplesmente por estar conferindo por linha “esqueceu” de verificar que a grade já estava correta.

Figura 13: Sudoku desenvolvido por aluno.

4	3	2	6	5	1
6	5	1	2	4	3
3	2	5	4	1	6
5	1	6	3	2	4
2	6	4	1	3	5
1	4	3	5	6	2

Fonte: Arquivo do próprio autor

Na Figura 14 o aluno iniciou o preenchimento por grade, eliminando a única possibilidade, em seguida foi na primeira linha, também eliminando a única possibilidade, foi na 3º grade eliminando a única possibilidade. Assim que os alunos começaram a entregar o jogo, ele preencheu os espaços aleatoriamente sem se importar com a repetição de números.

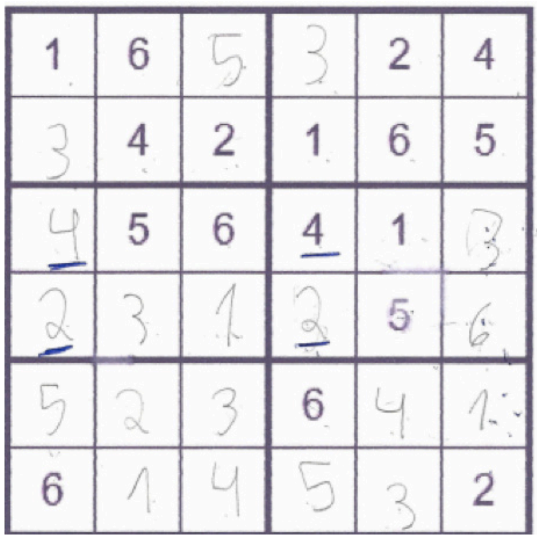
Figura 14: Sudoku desenvolvido por aluno.

3	6	1	4	2	5
2	5	4	3	1	6
6	4	5	1	3	2
1	2	3	6	5	4
4	1	5	2	6	2
6	3	2	3	1	5

Fonte: Arquivo do próprio autor

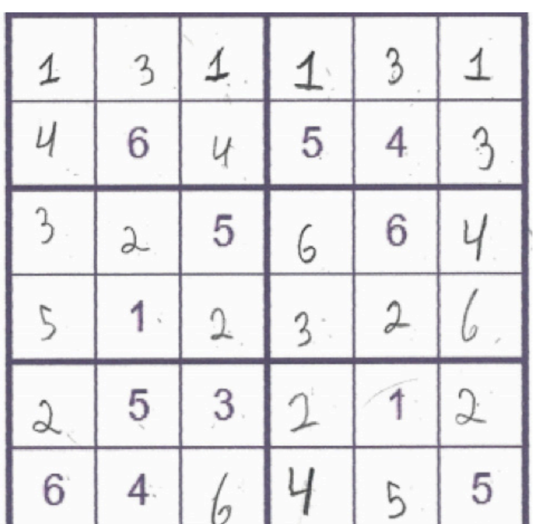
Nas Figuras 15 a 17 os alunos relataram preencher por colunas com números aleatoriamente, sendo que na Figura 17 o aluno não terminou de preencher até o momento da entrega.

Figura 15: Sudoku desenvolvido por aluno



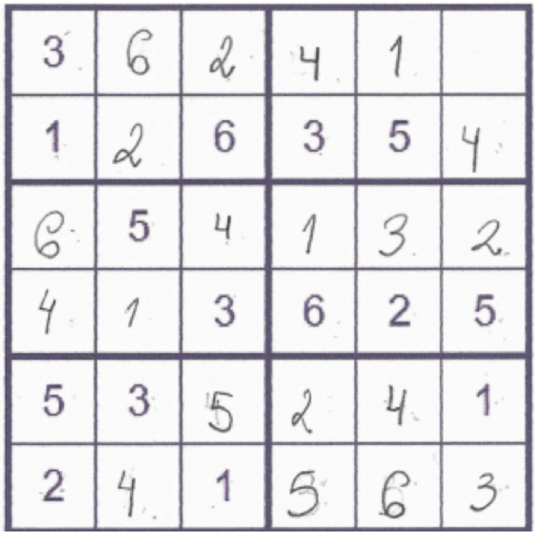
Fonte: Arquivo do próprio autor

Figura 16: Sudoku desenvolvido por aluno



Fonte: Arquivo do próprio autor

Figura 17: Sudoku desenvolvido por aluno



Fonte: Arquivo do próprio autor

3.2 QUESTIONÁRIO SOBRE SUDOKU E RACIOCÍNIO LÓGICO

A fim de verificar o que os alunos já sabiam sobre raciocínio lógico, Sudoku e resolução de problemas, aplicamos um questionário simples, com seis questões de alternativas (sim/não), cujas perguntas foram:

1. Você sabe o que é Sudoku?
2. Conhece as regras do Sudoku?
3. Você utilizou alguma conta para chegar ao resultado?
4. Você teve alguma dificuldade para preencher o Sudoku?
5. Você sabe o que é resolução de problemas?
6. Você já ouviu falar em raciocínio lógico?

Na Tabela 1 resumimos os resultados obtidos a partir do questionário.

Tabela 1 - Resumo do resultado do questionário aplicados aos 16 alunos da turma:

Pergunta	Sim (%)	Não (%)
1 - Você sabe o que é Sudoku?	50	50
2- Conhece as regras do Sudoku?	12,5	87,5
3 - Você teve alguma dificuldade para preencher o Sudoku?	6	94
4 - Você utilizou alguma conta para chegar ao resultado?	50	50
5 - Você sabe o que é resolução de problemas?	7	93
6 - Você já ouviu falar em raciocínio lógico?	14	86

Vimos que metade da sala já conhecia o jogo Sudoku, porém não sabiam como realizar o preenchimento correto do mesmo, uma vez que não tinham conhecimento aprofundado sobre as regras. A maioria apresentou dificuldades no preenchimento do Sudoku, e alguns até tentaram fazer “contas”, mas não obtiveram êxito. Ainda com base no questionário, verificamos que muitos alunos não conheciam o que era resolução de problemas e raciocínio lógico.

3.3 AULA SOBRE RACIOCÍNIO LÓGICO E REAPLICAÇÃO DO SUDOKU – RELATO

Neste capítulo apresentamos o relato da professora sobre como transcorreu as atividades com os alunos.

3.3.1 RELATO DA AULA 1

Ao ministrar a primeira aula, perguntei à sala se alguém conhecia o jogo Sudoku, apenas 1 aluno respondeu que sim, dizendo que não poderia repetir os mesmos números nos quadradinhos, os demais disseram não conhecer o jogo. Disse a eles que aquele jogo possuía 4 retângulos, onde cada retângulo/grade continha 6 espaços, alguns com números e outros vazios, esse jogo tem linhas e colunas e não pode repetir os mesmos números nas linhas e também nas colunas, e dentro de cada retângulo/grade/região só poderiam haver os números de 1 a 6 sem repeti-los. Pedi para que respondessem as questões também, pois ao perguntar se sabiam o que era raciocínio lógico e resolução de problemas, apenas 1 aluno disse que sabia o que era resolução de problemas e 2 alunos disseram já ter ouvido falar em raciocínio lógico. Entreguei e pedi para preencherem a tabela como havia explicado. Os alunos receberam o jogo com muito entusiasmo, para eles parecia um jogo simples, tanto que entre 2 e 10 minutos o primeiro e o último aluno entregaram o jogo preenchido e o questionário respondido, disse que eu iria levar para casa e fazer o levantamento dos dados.

3.3.2 RELATO DA AULA 2

Nesta segunda aula ao chegar na sala, os alunos perguntaram se iam jogar mais o Sudoku, falei que hoje explicaria o que era Raciocínio lógico, comecei explicando o que era raciocínio lógico. Peguei o estojo do aluno que estava próximo a mim e joguei no chão, pedi para ele pegar e ele pegou, joguei novamente e pedi para ele pegar e ele pegou, joguei pela última vez mais longe e disse para ele: Você não vai me perguntar "por que" estou jogando e nem se recusar a pegar? Ele disse - Por que você está jogando o meu estojo? Somente essa fala e foi pegar o estojo. Expliquei que precisamos pensar para podermos fazer tudo o que nos é pedido, temos que saber por que fazer? Quando fazer? Pra que fazer? O que estamos fazendo? Para onde vamos? Qual caminho devo seguir? Com quem? Perguntas deste tipo foram feitas. Temos que aprender a argumentar e criticar. Passei na lousa três etapas básicas para compreender o que é raciocínio lógico e exemplifiquei com a figura de um jogo sudoku que desenhei na lousa. Em lógica, pode-se distinguir três tipos de raciocínio lógico: dedução, indução e abdução. Dada uma premissa, uma conclusão, e uma regra segundo a qual a premissa implica a conclusão, eles podem ser explicados da seguinte forma: Dedução, indução e abdução.

- Dedução corresponde a determinar a conclusão. Utiliza-se da regra e sua premissa para chegar a uma conclusão.
- Indução é determinar a regra. É aprender a regra a partir de diversos exemplos de como a conclusão segue da premissa.
- Abdução significa determinar a premissa (ponto de partida/ ideia de que se parte para armar um raciocínio). Usa-se a conclusão e a regra para defender que a premissa poderia explicar a conclusão.

Temos como regras: números de 1 a 6, nenhuma linha ou coluna pode ter os números repetidos e cada grade tem que ter os números de 1 a 6 uma única vez. (Indução)

Com o jogo sudoku na lousa exemplifiquei que para fazer o sudoku devemos ter uma premissa, ou seja, um ponto de partida – Podemos começar na grade que tem menos espaços vazios, sempre analisando as linhas e colunas para não repetir números. (Abdução)

Usaremos as regras e as premissas para chegar à conclusão. (Dedução)

Ao final podemos ver se o jogo está correto fazendo a conferência linha a linha.

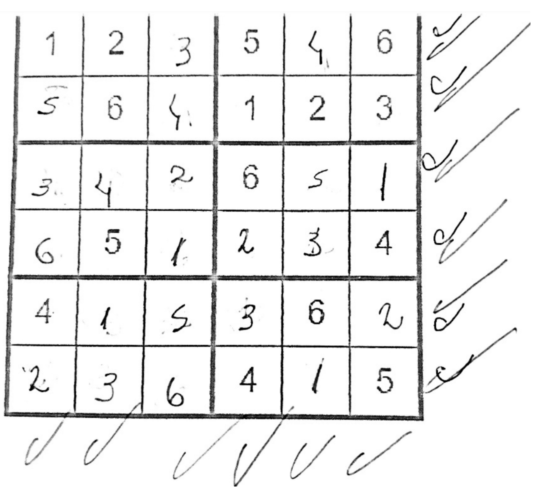
Ao preencherem comigo o jogo na lousa, os alunos já não estavam tão eufóricos para responderem como na primeira etapa, mas estavam muito mais concentrados, interagindo com pensamento lógico, faziam perguntas, colocava números em lugares que sabia que não podia e de pronto eles argumentavam o porquê eu estava colocando aquele número ali.

3.3.3 RELATO DA AULA 3 COM ANÁLISE DOS RESULTADOS.

Entreguei para cada aluno um Sudoku diferente para que fizessem e pude observar que houve uma melhora significativa na forma de raciocinar, na concentração e na maneira de preencher os números faltantes. Nem todos os alunos conseguiram preencher corretamente seu respectivo Sudoku, um aluno, cuja professora titular da sala relatou que tinha dificuldades no aprendizado não conseguiu. No entanto, esse mesmo aluno se esforçou muito para conseguir resolver, acabou entregando devido ao tempo e ver que todos haviam entregue. O sentimento de convicção (euforia) que conseguiriam realizar a atividade do início ao fim que houve na primeira aula, deu lugar a olhares pensativos, a batidas de dedos na mesa, a mão no queixo, ao silêncio. Demonstrações de que, para chegar ao objetivo era muito mais necessário pensar logicamente, do que só imaginar e preencher aleatoriamente. Ao ver a sala em silêncio tentando resolver o jogo, notei que a maturidade estava sendo trabalhada. Houve o momento, o qual um aluno se rendeu para uma pergunta: "Vem ver se é assim professora?" Interessante, pois era o que segundo a professora apresentava dificuldades no aprendizado.

A figura 18 exemplifica o resultado do desenvolvimento do jogo Sudoku após a explicação das regras, sendo notável que o próprio aluno fez a conferência para saber se havia preenchido certo o jogo, sendo este o comportamento de 15 alunos. Esses mesmos alunos concluíram com êxito o jogo final.

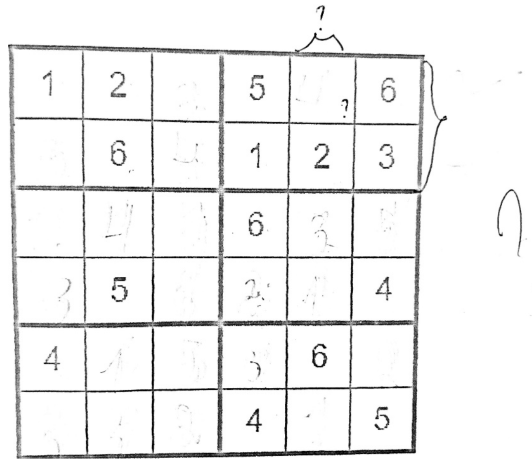
Figura 18: Sudoku desenvolvido por aluno



Fonte: Arquivo do próprio autor

A figura 19 mostra o resultado do aluno que não conseguiu concluir com êxito a jogada final.

Figura 19: Sudoku desenvolvido por aluno



Fonte: Arquivo do próprio autor

As explicações das estratégias para a resolução dos jogos, fez perceber que a criança tem uma facilidade em aprender brincando, ou no caso, jogando. Eles retiveram as estratégias com facilidade. Foi motivador vê-los entregando o jogo e perguntando se eu não voltaria mais, pois já havia comunicado que seria a última aula.

CONCLUSÃO

Como estes alunos estavam na faixa etária de 10 anos e de acordo com a análise dos dados a maioria não tinham ouvido falar sobre este jogo, o Sudoku trabalhado nesta pesquisa foi uma adaptação do jogo tradicional que contém 9 x 9 células para 6 x 6 células de nível fácil. Ao analisar os dados da pesquisa, pode-se notar que houve aproveitamento significativo na maneira de usar o raciocínio lógico. Essa evolução, ou melhor, desenvolvimento, foi a principal contribuição desta intervenção com o jogo Sudoku, o resultado final foi satisfatório e motivador, ressaltando a necessidade de adaptação ao jogo para alunos que apresentam maior dificuldade no processo de aprendizagem. E a partir desta pesquisa fica como sugestão fazer o estudo em turmas diferentes, ou até em escolas diferentes, em períodos mais longos.

O objetivo do presente trabalho foi o de aumentar o incentivo a prática de jogos como o Sudoku na vida escolar desde os anos iniciais do ensino fundamental de uma forma constante e gradual, com afinco nas fases de período de transição, em especial no 5º ano do ensino fundamental I, auxiliando no desenvolvimento e aperfeiçoamento do raciocínio lógico gerando uma força motivadora capaz de despertar um potencial infinito para minimizar a complexidade dos desafios apresentados pelo mundo contemporâneo, preparando o indivíduo para ter iniciativa, espirito explorador, criatividade, independência, além de desenvolver habilidades e competências para tomar decisões que sejam coerentes e eficientes em novas situações.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à DEUS.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus por nunca ter me abandonado e a me conceder a oportunidade de subir mais um degrau na escada da Vida.

Agradeço em especial, ao meu orientador Caio, por ter depositado sua confiança no meu projeto de pesquisa e ter guiado meus passos até a concretização deste trabalho.

Agradeço a minha família pelo carinho, dedicação e apoio que eles me deram durante toda a minha vida.

Sou grata a todos os professores do Instituto pelo apoio e colaboração durante todo o desenvolvimento do projeto, assim como todos os funcionários que contribuíram de forma direta e indiretamente para a conclusão do mesmo.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Brasil no Pisa 2015: Análises e reflexões sobre o desempenho dos estudantes brasileiros. Brasília, DF: MEC / INEP 2016. Disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/resultados/2015/pisa2015_completo_final_baixa.pdf. Acesso em: 24 ago. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa). Brasília, DF: MEC / INEP. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa. Acesso em 25 mar. 2021

BRASIL. Ministério de Educação. Secretaria de Educação Básica.

Base Nacional Comum Curricular: Ensino Fundamental. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 25 de julho de 2020

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais:

Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 25 de julho de 2020.

DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. 1. ed.- São Paulo: Ática, 2010.

SCOLARI, A. T.; BERNARDI, G.; CORDENOSSI, A. Z. **O Desenvolvimento do Raciocínio Lógico através de Objetos de Aprendizagem**. **RENOTE** - Revista Novas Tecnologias na Educação.V.5, N.2, p. 2, Dezembro 2007. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/14253/8169. Acesso em 15 set. 2020.

SILVA, C. K.; GROENWALD, C. L. O. **Perspectivas em educação matemática**. VII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife-PE. Jul. 2004. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/02/MC23993901053.pdf. Acesso em 31 ago. 2019.

ANEXO

ANEXO A

JOGO SUDOKU

1	6			2	4
	4	2	1	6	5
	5	6	4	1	
				5	
			6		
6					2

QUESTIONÁRIO

1. Você sabe o que é Sudoku?

   ( ) Sim ( ) Não

2. Conhece as regras do Sudoku?

   ( ) Sim ( ) Não

3. Você utilizou alguma conta para chegar ao resultado?

   ( ) Sim ( ) Não

4. Você teve alguma dificuldade em preencher o Sudoku?

   ( ) Sim ( ) Não

5. Você sabe o que é resolução de problema?

   ( ) Sim ( ) Não

6. Você já ouviu falar em raciocínio lógico?

   ( ) Sim ( ) Não

FABRÍCIO MORAES DE ALMEIDA: Possui graduação em Matemática pela UFMT (2000), Físico - Lei n. 13.691, de 10 de julho de 2018, Especialização em Física Básica - UFMT (2001), Esp. em Redes de Computadores - UNIRONDON (2009) , mestrado em Física pela Universidade Federal do Ceará (2002) e Doutorado em Física pela UFC (2005), Pós-doutorado - UFMT/CNPq (2009). E também com formação em Engenharia de Computação/Produção. Têm pesquisas cientificas com temas de Engenharia Elétrica, Computação/Produção; Inovação, Modelagem, Gestão e Desenvolvimento Regional; Modelagem Matemática e pesquisas interdisciplinares. É líder do grupo de pesquisa GEITEC/UFRO. Já orientou dezenas de teses e dissertações. Ademais, centenas de publicações cientificas em diversas revistas internacionais e nacionais.

Além disso, têm especializações pela FUNIP, em: Engenharia Elétrica, Engenharia de Produção, Engenharia de Controle e Automação Industrial; Engenharia de Software e Análise e Desenvolvimento de Sistemas. Tem experiência com: consultoria de pesquisa, tecnologia, engenharia, inovação e negócios; mais de 20 anos de experiência com administração e gerência de empresas públicas e privadas, com vasto conhecimento em gestão de projetos e possuí mais de 22 anos de estudos e pesquisas com computação e análise de dados. Atualmente, é professor associado 3 da Universidade Federal de Rondônia e docente do Programa de Pós-graduação: Doutorado/Mestrado em Desenvolvimento Regional e Meio Ambiente da Fundação Universidade Federal de Rondônia (para saber mais, acesse: http://lattes.cnpq.br/5959143194142131).

A

D

E

F

G

I

CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2023

CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2023