

$$M = C \cdot (1+i)^n$$

$$i = \left(\frac{M}{C}\right)^{1/n} - 1$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)}$$

$$P = R + R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

Conceitos e Aplicações

Adriano Rodrigues Teixeira

$$C = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{R \cdot a_{\overline{n}|i}}{(1+i)^k}$$

$$i = \left(\frac{M}{C}\right)^{1/n} - 1$$

$$P = \frac{R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}{(1+i)^k}$$

$$\text{Prestação} = \frac{PV \cdot i \cdot (1+i)^n}{[(1+i)^n - 1]}$$

$$\text{Juro Real} = \left[\frac{1 + \frac{\text{Juro Nominal}}{100}}{1 + \frac{\text{Inflação}}{100}} - 1 \right] \times 100$$

Atena
Editora

Ano 2023

$$M = C \cdot (1+i)^n$$

$$i = \left(\frac{M}{C}\right)^{1/n} - 1$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)}$$

$$P = R + R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}$$

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

Conceitos e Aplicações

Adriano Rodrigues Teixeira

$$C = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$P = \frac{R \cdot a_{\overline{n}|i}}{(1+i)^k}$$

$$i = \left(\frac{M}{C}\right)^{1/n} - 1$$

$$P = \frac{R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{(1+i)^k}$$

$$\text{Prestação} = \frac{PV \cdot i \cdot (1+i)^n}{[(1+i)^n - 1]}$$

$$\text{Juro Real} = \left[\frac{1 + \frac{\text{Juro Nominal}}{100}}{1 + \frac{\text{Inflação}}{100}} - 1 \right] \times 100$$

Atena
Editora

Ano 2023

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Camila Alves de Cremo

Ellen Andressa Kubisty

Luiza Alves Batista

Nataly Evilin Gayde

Thamires Camili Gayde

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2023 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2023 Os autores

Copyright da edição © 2023 Atena

Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo do texto e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva do autor, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos ao autor, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial**Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará

Prof. Dr. Fabrício Moraes de Almeida – Universidade Federal de Rondônia

Profª Drª Glécilla Colombelli de Souza Nunes – Universidade Estadual de Maringá

Profª Drª Iara Margolis Ribeiro – Universidade Federal de Pernambuco

Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense

Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande

Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª Drª Maria José de Holanda Leite – Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Prof. Dr. Milson dos Santos Barbosa – Universidade Tiradentes

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte

Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Nilzo Ivo Ladwig – Universidade do Extremo Sul Catarinense

Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas

Profª Dr Ramiro Picoli Nippes – Universidade Estadual de Maringá

Profª Drª Regina Célia da Silva Barros Allil – Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí

Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Matemática financeira: conceitos e aplicações

Diagramação: Thamires Camili Gayde
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: O autor
Autor: Adriano Rodrigues Teixeira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

T266 Teixeira, Adriano Rodrigues
Matemática financeira: conceitos e aplicações / Adriano Rodrigues Teixeira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2023.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-1605-0
DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.050231008>

1. Matemática financeira. 2. Juros. I. Teixeira, Adriano Rodrigues. II. Título.

CDD 332.6

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora

Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DO AUTOR

O autor desta obra: 1. Atesta não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao conteúdo publicado; 2. Declara que participou ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certifica que o texto publicado está completamente isento de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirma a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhece ter informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autoriza a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

Agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Conselho Gestor do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) que, em parceria com o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), o Conselho de Apoio à Pesquisa (CAPES) e a Universidade Federal de Goiás (UFG) realizaram o mestrado que me ajudou a desenvolver esse trabalho. Obrigado pela oportunidade e pelo apoio financeiro no período de 2 anos.

Agradeço ao prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho, meu orientador pela atenção especial, amizade e compreensão demonstradas durante a elaboração desse trabalho.

Agradeço a Deus, por sempre estar presente nos momentos difíceis, onde o cansaço falava mais alto e por me guiar com todo amor em meio a tanta turbulência para que encontrasse o caminho certo para meus estudos.

Agradeço especialmente à minha família - Leidiany, Anna Sophia e José Gabriel - pela força e compreensão durante a realização de mais esse sonho.

O trabalho traz os principais conceitos da Matemática Financeira, buscando sempre fazer uma ligação imediata com os acontecimentos ao nosso redor. A saber, discorreremos sobre juros, descontos, séries periódicas e sistemas de amortizações. Além disso, aplicaremos o Método de Newton para determinar da taxa de juros de séries de pagamentos.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática Financeira, Juros e Método de Newton.

The essay brings the main concepts of Financial Mathematics, looking to directly connect it to the events in our surroundings. As such, we descant about interest, discounting, periodic cycles and amortization systems. We will also apply Newtons Method in order to determine the interest rates on payment series.

KEYWORDS: Financial Mathematics, Interest and Newtons Method.

CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO	
CAPÍTULO 2	2
CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA	
2.1 CONCEITO DE JUROS	2
2.2 OPERAÇÕES COMERCIAIS	3
CAPÍTULO 3	6
CAPITALIZAÇÕES	
3.1 CAPITALIZAÇÃO SIMPLES	6
3.1.1 MONTANTE E DESCONTO	7
3.2 CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA	8
3.2.1 MONTANTE E DESCONTO A JUROS COMPOSTOS.....	8
3.3 A CALCULADORA HP 12C COMO INSTRUMENTO AUXILIAR.....	10
3.3.1 USO DA HP 12C PARA O CÁLCULO DE JUROS SIMPLES.....	11
3.4 EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS A JUROS COMPOSTOS.....	13
CAPÍTULO 4	15
TAXA DE JUROS	
4.1 TAXA DE JUROS NOMINAL	15
4.2 CALCULANDO O MONTANTE A JUROS NOMINAIS	15
4.3 TAXA PROPORCIONAL	16
4.4 TAXA EFETIVA	17
4.5 CALCULANDO A TAXA EFETIVA A PARTIR DA NOMINAL	17
4.6 EQUIVALÊNCIA ENTRE TAXAS.....	19
4.7 TAXA OVER.....	21
4.8 TAXA DE JUROS EFETIVA EQUIVALENTE À TAXA OVER	22
4.9 TAXA DE JUROS APARENTE E TAXA DE JUROS REAL.....	23

CAPÍTULO 5	25
OPERAÇÕES A CURTO PRAZO	
5.1 DESCONTO	25
5.1.1 DESCONTO SIMPLES	25
5.1.2 DESCONTO RACIONAL SIMPLES	25
5.1.3 DESCONTO COMERCIAL SIMPLES	26
5.1.4 TAXA DE DESCONTO EFETIVA	27
5.1.5 TAXA DE DESCONTO EFETIVA LINEAR	27
5.1.6 TAXA DE DESCONTO EFETIVA EXPONENCIAL	28
CAPÍTULO 6	30
TÍTULOS PÚBLICOS	
CAPÍTULO 7	34
SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES	
7.1 VALOR PRESENTE DE SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES	35
7.2 MONTANTE DE SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES	36
7.3 CÁLCULO DA TAXA DE JUROS EM SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES	38
7.4 TAXA APROXIMADA: INTERPOLAÇÃO LINEAR	39
CAPÍTULO 8	41
PLANOS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS	
8.1 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (TABELA PRICE)	42
8.2 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)	45
8.3 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTA (SAM)	47
CAPÍTULO 9	51
ENCONTRANDO TAXAS ATRAVÉS DO MÉTODO DE APROXIMAÇÃO DE RAÍZES	
9.1 MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO DE RAÍZES	51
9.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	51

9.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON NA MATEMÁTICA FINANCEIRA..52

CAPÍTULO 10.....56

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

CAPÍTULO 11.....63

CONSIDERAÇÕES FINAIS

REVISÃO SOBRE PROGRESSÕES.....64

A.1 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS (PA).....64

A.2 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS (PG).....66

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....68

SOBRE O AUTOR69

INTRODUÇÃO

Muitas pessoas pensam que a Matemática é uma disciplina em que só se trabalha com um grande número de fórmulas sem sentido e com cálculos intermináveis. Este trabalho tem como objetivo principal destacar a importância da aprendizagem da Matemática Financeira. Considerando que este é um assunto de grande relevância no cotidiano de todas as pessoas que se servem ou virão a servir do sistema bancário, do comércio ou até mesmo para fins de auxiliar em suas próprias finanças.

Verificando o fato de que, após a estabilização da economia nacional devido à criação do plano real, as pessoas passaram a adquirir financiamentos e empréstimos com maior frequência, se justifica uma sólida aprendizagem e futura aplicação da Matemática Financeira.

Para tanto, foram analisados os principais livros utilizados no Ensino Médio, como [4] e [10], que trazem várias abordagens sobre conceitos da matemática financeira, além de livros que trazem um aprofundamento da Matemática Financeira em alguns conceitos, com o intuito de verificar como estão sendo tratados os principais tópicos da mesma. A partir desta análise, pode-se elaborar um aspecto geral referente a essa área da Matemática, mostrando sugestões e exemplos para que os professores do Ensino Médio possam orientar e enriquecer sua prática pedagógica de maneira adequada. Além disso, apontar os pré-requisitos fundamentais para a assimilação dos conteúdos, fazendo com que eles sejam estudados com a devida conexão.

Esse trabalho tem a intenção de, com o apoio de diversas técnicas, atividades, problemas e inclusive, da parte histórica, ajudar as pessoas a compreender a Matemática financeira. Inicialmente, tratamos de conceitos iniciais de taxas de juros, descontos e capitalizações, com direito a demonstrações de fórmulas e exemplos onde são colocadas situações cotidianas para melhor visualização dos conceitos. Passamos por alguns assuntos não abordados no ensino médio como considerações sobre títulos públicos, séries periódicas uniformes e sistemas de amortização, mas no intuito de fornecer ferramentas básicas para a tomada de decisão em nosso dia a dia, onde estão dispostos os conceitos, fórmulas e suas demonstrações, sendo de grande valia ressaltar que elas partem de pressupostos reais, e que não são inventadas. Estudamos além disso tudo ferramentas que auxiliam na determinação de taxas de juros em algumas situações, que são os métodos de aproximação de raízes, com uma atenção especial ao Método de Newton.

E para finalizar é colocado para o leitor um capítulo sobre as aplicações da Matemática Financeira no cotidiano dos alunos de forma que os mesmos se interessem pelo conteúdo fazendo com que tenha um destaque maior no ensino médio. Sendo assim, prova-se que a Matemática não é abstrata a ponto de não se conseguir aplicar em nada, uma vez que ela pode e deve estar ao alcance de todos.

CONCEITOS BÁSICOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

2.1 CONCEITO DE JUROS

A definição de juros segundo [1] se dá pelo fato de quando uma pessoa empresta uma quantia de dinheiro a outra por um determinado período, ela recebe um rendimento mensal pelo empréstimo que está diretamente ligado a uma porcentagem no qual foi combinado no ato da concessão do dinheiro. Quando uma pessoa contrai uma dívida no banco ou com terceiros, ela também paga mensalmente um valor que é determinado por uma taxa até a quitação do valor total, que neste caso pode chegar à até 200% da dívida.

Ao emprestar ou adquirir uma determinada quantia, o indivíduo deve ficar atento a alguns fatores, como:

- Risco: pode ocorrer do devedor não pagar a dívida.
- Despesas: ficar atento ao custo de todas as despesas, seja operacionais, contratuais ou tributárias que serão necessárias para formalização do empréstimo e à futuras cobranças.
- Inflação: ter uma atenção especial ao índice de desvalorização da moeda previsto para o período do empréstimo.
- Ganho: fixar uma meta em função das oportunidades de investimentos.

Um outro conceito de juros pode ser o seguinte: uma certa compensação ao credor pelo tempo que o mesmo ficará sem utilizar o dinheiro, e um certo alívio para o devedor, pois irá suprir algumas necessidades imediatas, mas que após um certo tempo terá que pagar um acréscimo pela utilização do dinheiro ou pelo parcelamento da totalidade do valor contraído. A fim de determinar o valor dos juros, são definidas taxas percentuais (taxas de juros) em determinados períodos pelo credor. O cálculo dessas taxas são realizados de acordo com alguns fatores como, a inflação no período com o que foi acordado no contrato, com o risco do empréstimo para o credor ou ainda o tipo de bem adquirido (pode desvalorizar ou valorizar). As taxas podem ser maiores ou menores numa relação proporcional ao tamanho do risco ou ao valor do bem.

Segundo [1], a taxa utilizada pelos bancos no Brasil é a Taxa Selic (Sistema Especial de Liquidação e Custódia), que se trata de uma referência básica no cálculo dos juros. Essa taxa foi criada em 1979 pelo Banco Central do Brasil e é muito utilizada na delimitação das taxas para o comércio, onde bancos ou empresas de crédito respeitam essa determinação para que não haja abusos com o consumidor. No mercado financeiro, existem diversas modalidades de juros: juros simples, juros compostos, juros nominais, juros de mora, juros reais, juros rotativos, juros sobre o capital próprio, entre outras. Veremos adiante algumas dessas modalidades.

2.2 OPERAÇÕES COMERCIAIS

As operações comerciais tratam de movimentações realizadas com o intuito de obtenção de lucro. Nessas operações estão inclusos o preço de custo, preço de venda (ou receita) e o lucro. Veremos do que se trata cada um desses elementos:

- preço de custo: valor pago por um determinado produto em que o comprador tem a intenção de obter um valor acima do que pagou quando for vender esse produto.
- preço de venda ou receita: valor estipulado pelo vendedor para repassar o produto ao consumidor (comprador) com a intenção de receber um valor superior ao da compra do produto.
- lucro: é o valor que o vendedor recebeu a mais na venda do produto, pois pagou um valor e vendeu por outro superior.

Caso o preço de venda seja inferior ao preço de custo pode-se dizer que o vendedor teve prejuízo, ou se o preço for superior ao do custo ele obteve lucro. Podemos chamar custo de C , receita de R e lucro de L e assim determinar a relação que fornece o lucro ou prejuízo ao vendedor:

$$L = R - C$$

Analisando agora a questão do lucro e prejuízo temos:

- Se $R > C$, então $L > 0$ (lucro).
- Se $R < C$, então $L < 0$ (prejuízo).

A seguir, veremos exemplos de aplicações desses conceitos em situações problemas, que podem ser colocadas para alunos do ensino, com o objetivo de mostrar a importância dos conceitos aos mesmos.

Exemplo 1 Em uma indústria metalúrgica o custo de produção de uma peça automotiva corresponde a um custo fixo mensal de R\$ 5000, 00 acrescido de um custo variável de R\$ 55, 00 por unidade produzida mais 25% de impostos sobre o custo variável. Considerando que o preço de venda dessa peça pela indústria aos comerciantes é de R\$ 102, 00, determine:

- a função custo da produção de x peças.
- a função receita referente a venda de x peças.
- a função lucro na venda de x peças.
- o lucro obtido na venda de 500 unidades.

Resolução:

a. A função custo será dada pela somatória do custo fixo, do custo variável e do imposto cobrado de acordo com o custo variável.

$$C = 5000 + 55x + 0,25 \cdot 55x$$

b. A função receita é dada por:

$$R = 102x$$

c. A função lucro é obtida subtraindo a função receita da função custo.

$$L = 102x - (5000 + 55x + 0,25 \cdot 55x)$$

$$L = 102x - 5000 - 55x - 0,25 \cdot 55x$$

$$L = 102x - 55x - 13,75x - 5000$$

$$L = 33,25x - 5000$$

Quando calculamos a função lucro determinamos uma expressão capaz de determinar o lucro líquido obtido da venda de x peças, isto descontados os custos de produção e os impostos municipais, estaduais e federais.

d. O lucro obtido com a venda de 500 unidades corresponde a:

$$f(x) = 33,25x - 5000$$

$$f(500) = 33,25 \cdot 500 - 5000$$

$$f(500) = 16625 - 5000$$

$$f(500) = 11625$$

Exemplo 2 Um fabricante pode produzir calçados ao custo de R\$ 20,00 o par. Estima-se que, se cada par for vendido por x reais, o fabricante venderá por mês $80 - x$ ($0 \leq x \leq 80$) pares de sapatos. Assim, o lucro mensal do fabricante é uma função do preço de venda. Qual deve ser o preço de venda, de modo que o lucro mensal seja máximo?

Resolução: Custo: valor de produção de cada par de sapatos vezes o número de sapatos fabricados.

$$C(x) = 20 \cdot (80 - x)$$

Receita: número de sapatos vendidos no mês multiplicado pelo valor de venda x .

$$R(x) = (80 - x) \cdot x$$

Lucro: diferença entre a receita $R(x)$ e o custo $C(x)$

$$L(x) = (80 - x) \cdot x - 20 \cdot (80 - x)$$

$$L(x) = 80x - x^2 - 1600 + 20x$$

$$L(x) = -x^2 + 100x - 1600$$

O lucro dado é representado por uma função polinomial do 2º grau decrescente, isto é, seu gráfico possui concavidade voltada para cima ou valor máximo. Para determinarmos o preço de venda do sapato, no intuito de obter o lucro máximo, basta calcular o valor do vértice x da parábola, dado por $X_v = -\frac{b}{2a}$.

$$L(x) = -x^2 + 100x - 1600$$

como $a = -1$, $b = 100$, $c = -1600$, então

$$X_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-1)} = \frac{100}{2} = 50$$

Para que se obtenha lucro máximo, o preço de venda do par de sapatos deve ser R\$ 50,00.

CAPITALIZAÇÕES

3.1 CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

No regime de capitalização a juros simples, os juros referentes a um único período, em qualquer época são, (por definição) calculados sobre o valor presente P , incidindo sobre o mesmo uma taxa percentual na referente época determinada. Os juros mensais são constantes e no final do prazo obtemos o rendimento total pelo produto do juro de 1 mês com o total de meses. Somando esse rendimento ao capital obtemos o montante.

Chamando valor presente de P , tempo da aplicação de n (sempre compatível com a taxa) e taxa de juros de i podemos calcular os juros da seguinte forma:

$$J = Pin,$$

em que J representa os juros. A taxa percentual sempre aparece na resolução dividindo por 100. Em uma aplicação de capital P e taxa i obtemos os seguintes juros:

$$1^{\circ}\text{mês: } J = iP$$

$$2^{\circ}\text{mês: } J = iP$$

$$3^{\circ}\text{mês: } J = iP$$

$$n - \text{ésimo mês: } J = iP$$

Os juros totais podem ser calculados através da somatória dos n meses:

$$J = Pin \quad (3-1)$$

Exemplo 3 Qual o valor dos juros correspondentes a um empréstimo de R\$ 18.000,00, pelo prazo de 18 meses, sabendo-se que a taxa cobrada é de 4,5% a.m.?

Resolução:

$$\text{Dados: } P = \text{R\$ } 18.000,00 \quad n = 18 \quad i = 4,5\% \text{ a.m.}$$

$$J = P \cdot i \cdot n$$

$$J = 18000 \cdot 0,045 \cdot 18$$

$$J = \text{R\$ } 14.580,00$$

Exemplo 4 Uma aplicação de R\$ 75.000,00 pelo prazo de 230 dias obteve um rendimento de R\$ 21.450,00. Qual a taxa anual correspondente a essa aplicação?

Resolução:

$$\text{Dados: } P = \text{R\$ } 75.000,00 \quad J = \text{R\$ } 21.450,00 \quad n = 230 \text{ dias}$$

$$\text{Taxa anual: } 0,124\% \cdot 360 = 44,64\% \text{ a.a.}$$

3.1.1 MONTANTE E DESCONTO

O montante de uma aplicação trata-se do valor presente acrescido dos juros recebidos no prazo estipulado.

O montante no final de cada mês é dado por:

$$1^{\circ}\text{mês: } M = P + iP = P(1 + i)$$

$$2^{\circ}\text{mês: } M = P + iP = P(1 + i)$$

E assim por diante até o n-ésimo mês. Mas o montante acumulado ao final de cada mês pode ser calculado da seguinte forma:

$$1^{\circ}\text{mês: } M = P(1 + i)$$

$$2^{\circ}\text{mês: } M = P + Pi = P(1 + i^2)$$

$$3^{\circ}\text{mês: } M = P + Pi = P(1 + i^3)$$

$$n - \text{ésimo mês: } M = P + Pin = P(1 + in)$$

Daí podemos definir a fórmula do montante:

$$M = P(1 + in) \quad (3-2)$$

O desconto pode ser considerado um valor atual de um montante futuro, ou seja, é o valor antecipado de uma dívida em que o credor concede um valor mais baixo para pagamento devido a antecipação. A visualização é melhor através de um fluxo de caixa, que segundo [2] serve para mostrar graficamente as transações financeiras em um certo período de tempo. Existe uma linha horizontal que representa o tempo e nessa linha colocamos setas para representar saídas e entradas. As setas com sentido para cima representam recebimentos (entradas) e as com sentido para baixo representam pagamentos (saídas).

$$\begin{array}{c} \text{capitalização} \Rightarrow \uparrow M = C(1 + i.n) \\ \xrightarrow{\text{tempo}} \\ M = C(1 + i.n)^{-1} \downarrow \end{array}$$

Figura 3.1: Entradas e Saídas

Exemplo 5 *Sabe-se que certo capital aplicado, aplicado durante 8 bimestres, à taxa de 48% a.a. rende R\$ 86.000, 00 de juros, determine o montante dessa aplicação.*

Resolução: Dados: $P = \text{R\$ } 86.000, 00$ $n = 8$ $i = 48\% \text{ a.a.}$

A taxa corresponde a: $48: 6(\text{bimestres}) = 8\% \text{ a.b.}$

Calculando o valor presente:

$$P = \frac{86000}{0,08.8}$$

$$P = R\$ 134.375, 00$$

Como $M = P + J$, temos:

$$M = 134.375, 00 + 86.000, 00$$

$$M = R\$ 220.375, 00$$

Exemplo 6 *Um empréstimo de R\$50.000, 00 deverá ser quitado por R\$75.000, 00 no final de 10 meses. Determine as taxas mensal e anual cobradas nessa operação.*

Resolução: Dados: $P = R\$ 50.000, 00$ $n = 10$ $M = R\$ 75.000, 00$

Os juros cobrados serão de:

$$J = M - P$$

$$J = 75000 - 50000$$

$$J = R\$ 25.000,00$$

Calculando a taxa mensal:

$$i = \frac{25000}{50000.10}$$

$$i = 0, 05.(100)$$

$$i = 5\%a.m.$$

Calculando a taxa anual: $5\% \times 12 = 60\% a.a.$

3.2 CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

O regime de capitalização a juros compostos baseando em [1] e [2] são aqueles em que o juro do mês é incorporado ao capital, constituindo um novo capital a cada mês para o cálculo de novos juros. Esse processo de incorporação dos juros ao capital pode ser chamado de capitalização. Esse tipo de rendimento é muito vantajoso, sendo utilizado pelo atual sistema financeiro. As instituições financeiras utilizam esse método de capitalização nas aplicações financeiras, como na elaboração de financiamentos.

3.2.1 MONTANTE E DESCONTO A JUROS COMPOSTOS

Pode-se dizer também que o dinheiro rende mais a juros compostos do que a juros simples. Veremos como podemos determinar uma relação para poder calcular o montante resultante de juros compostos em um determinado período:

$$1^{\circ}\text{mês: } M = P + Pi$$

$$2^{\circ}\text{mês: } M = (P + Pi) + (P + Pi)i = P + 2Pi + Pi^2 \\ = P(1 + 2i + i^2) = P(1 + i)^2$$

$$3^{\circ}\text{mês: } M = P + 2Pi + Pi^2 + [(P + Pi) + (P + Pi)i]i \\ = P + 3Pi + 3Pi^2 + Pi^3 \\ = P(1 + 3i + 3i^2 + i^3) = P(1 + i)^3$$

$$n - \text{ésimo: } M = P(1 + i)^n \quad (3-3)$$

onde n representa o prazo estipulado.

Essa é a fórmula que permite calcular diretamente o montante depois de um determinado período, descartando a necessidade de calcular mês após mês. Na fórmula a taxa de juros deve estar na mesma unidade de tempo que o período se encontra. O termo $(1 + i)^n$ representa o fator de capitalização ou fator de valor futuro e devemos multiplicá-lo pelo valor inicial para obtermos o valor futuro. O valor presente ou capital inicial pode ser calculado através da mesma fórmula, bastando apenas monopolizá-la a fim de isolar o valor de P , ficando então assim:

$$P = M \left[\frac{1}{(1 + i)^n} \right] \text{ ou } P = M(1 + i)^{-n} \quad (3-4)$$

Quando representamos através do fluxo de caixa o fator $(1 + i)^n$ leva as grandezas para frente, permitindo o cálculo do montante ou valor futuro, ocorrendo assim a capitalização do principal a uma data posterior. Já o fator $(1 + i)^{-n}$ leva as grandezas para trás, permitindo o cálculo do desconto ou valor presente, ocorrendo assim o desconto de um valor futuro em uma data anterior a do vencimento.

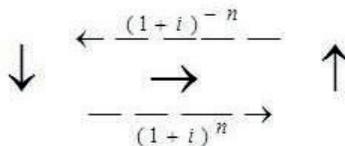


Figura 3.2: Fluxo de Caixa

Abaixo segue um exemplo que mostra a aplicação da fórmula (3-4).

Exemplo 7 *A juros compostos de 15% a.a., qual será o montante de R\$2.700,00 em cinco anos?*

Dados: $P = R\$ 2.700,00$ $n = 5$ $i = 15\% \text{ a.a.}$

Resolução:

$$M = P(1 + i)^n$$
$$M = 2700(1 + 0,15)^5$$
$$M = 2700(1,15)^5$$
$$M = 2700(2,0113)$$
$$M = R\$ 5.430,51$$

Exemplo 8 *Uma pessoa realiza um depósito de R\$ 3.000,00 na poupança. Três meses depois, deposita mais R\$ 4.000,00 e, dois meses depois do último depósito, realiza uma retirada de R\$ 2.500,00. Qual será o saldo da poupança ao final do sexto mês, considerando que a taxa de juros composta obtida é de 20% a.m.?*

Resolução:

Levando o depósito até o sexto mês temos:

$$3000(1,2)^6 = R\$ 8.957,95$$

Agora levando o segundo depósito até os três últimos meses:

$$4000(1,2)^3 = R\$ 6.912,00$$

Levando a retirada para o último mês temos:

$$-2500(1,2) = -R\$ 3.000,00$$

Somando os montantes, obtemos o saldo final:

$$8957,95 + 6912 - 3000 = R\$ 12.869,95.$$

3.3 A CALCULADORA HP 12C COMO INSTRUMENTO AUXILIAR

Uma máquina que é bastante utilizada como auxílio para o cálculo financeiro é a calculadora HP 12c. Nela é possível encontrar teclas que possibilitam o cálculo direto de montante e juros tanto simples como composto. Essa calculadora possui três tipos de teclas, que ativam funções diferentes: brancas, amarelas e azuis. As teclas brancas são as principais de utilização comum e as amarelas e azuis são teclas que ativam funções pouco utilizadas no cotidiano, mas muito útil na matemática geral, principalmente na matemática financeira.

Veremos na tabela abaixo algumas operações básicas da HP 12c por [3]:

3.3.1 USO DA HP 12C PARA O CÁLCULO DE JUROS SIMPLES

Dado um valor principal P aplicado em um período de n dias (transformar caso esteja em meses ou anos) a uma taxa $i\%$ ao ano (transformar caso esteja em meses ou dias),

Cálculo	Tecla a ser utilizada
Ligar a calculadora	(ON)
Apagar o que está no visor	(CLX)
Apagar o conteúdo das memórias financeiras	(f) (FIN)
Realizar um cálculo simples	(número) (ENTER) (número) (operação)
Calcular porcentagem	(número) (ENTER) (percentual) (%)
Calcular o exponencial (potenciação)	(número) (ENTER) (potência) (yx)
Armazenar na memória:	(número) (ENTER) (STO) (número qualquer da memória)
Fixar a quantidade de casas decimais:	(f) (número de casas decimais desejado)
Exemplos	Calculadora
$22 + 43 = 65$	22(ENTER)43(+)
$201 \times 8 = 1608$	201(ENTER)8(x)
$(12 + 43) / 5 = 11$	12(ENTER)43(+):5(:)
$\sqrt[2]{64} = 8$	2(ENTER)6(y ^x)
$\sqrt[4]{2^8}$	(ENTER)8(ENTER)4(:)(y ^x)

podemos determinar os juros e o montante através de algumas operações com a calculadora conforme a sequência abaixo:

- entre com o número de dias n
- entre com a taxa anual i
- entre com o valor principal CHS PV
- tecla f INT : obtém-se os juros
- tecla + para obter o montante.

Exemplo 9 *Determine os juros produzidos e o montante ao final de 8 meses, de um capital de \$ 1500,00 aplicados à taxa de juros simples de 40% a.a.*

Na HP:

240n

40i

1500 CHS PV

f INT (resultado no visor: 400)

+ (resultado no visor: 1900)

Resolução: Juros = \$ 400, 00 e Montante = \$ 1900, 00 Uma tecla bastante útil é a LSTX, que se trata de um registrador automático que preserva o valor que aparece no visor antes da execução de uma função, podendo o mesmo ser recuperado para ser corrigido ou utilizado em um outro cálculo. Além de ser muito útil nos cálculos financeiros, pode ser utilizada também em outras situações como no exemplo abaixo.

Exemplo 10 *Recuperação de um valor para utilização em outro cálculo*

O faturamento mensal de uma empresa nos últimos 4 meses foi o seguinte:

Mês	Faturamento
Janeiro	R\$ 50348, 00
Fevereiro	R\$ 57900, 20
Março	R\$ 69480, 24
Abril	R\$ 81.986, 68

Calcular a evolução mensal de crescimento (em porcentagem)

Resolução:

Janeiro para Fevereiro = 50348, 00 ENTER 57900, 20Δ%
VISOR: 15

Fevereiro para Março = g LSTX
VISOR : 57900, 20
69480, 24Δ%
VISOR : 20

Março para Abril = gLSTX
VISOR : 69480, 24
81986, 68Δ%
VISOR : 18

Outros exemplos de [9] sobre a utilização da calculadora em cálculo financeiro

Exemplo 11 *Uma mercadoria cujo preço de venda era R\$ 1800, 00, sofreu aumentos mensais de 6%, 8% e 12%. Calcular:*

a) o preço de venda da mercadoria após os aumentos;

Resolução:

f REG
1800 ENTER
6% +
8% +
12% +
VISOR : 2307, 92

b) o percentual de aumento do trimestre.

Resolução:

```
f      REG
1800  ENTER 2307, 92D%
VISOR : 28, 22
```

Exemplo 12 *Uma mercadoria, cujo preço de venda era de R\$ 12000, 00, sofreu sucessivos descontos de 6%, 10% e 12%.*

a) Qual o preço de venda após as sucessivas remarcações?

Resolução:

```
f      REG
12000 ENTER
6%    -
10%   -
12%   -
VISOR : 8933, 76
```

b) Qual o percentual de desconto do período?

Resolução:

```
f      REG
12000 ENTER 8933, 76D%
VISOR : -25, 55
```

3.4 EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS A JUROS COMPOSTOS

Dois capitais são equivalentes se comparados em uma mesma data, descontados ou capitalizados por uma mesma taxa de juros produzem um mesmo valor presente, ou capital.

Então: “x” é equivalente a “y” se e somente se:

$$y = x(1 + i)^n \text{ Capitalizando o "x"}$$



$$x = \frac{y}{(1 + i)^n} \text{ Capitalizando o "y"}$$



Exemplo 13 *Em vendas à vista, uma loja oferece 5% de desconto; pagando-se com cheque pré-datado para um mês, não há cobrança de juros; em cheques pré-datados para dois meses, há um acréscimo de 3%. Qual a melhor forma de pagamento, se o rendimento do dinheiro for de 3, 5% a.m.? Por [2].*

Resolução:

O primeiro passo é calcular a taxa de juros embutida.

Pagamento a um mês: por equivalência de capitais, o valor presente do pagamento referente a um mês deve ser igual ao valor do pagamento à vista:

$$\frac{P}{1+i} = 0,95P \Rightarrow i = \frac{1}{0,95} - 1 = 0,052632 = 5,2632\% \text{ a.m.}$$

Pagamento a dois meses: por equivalência de capitais, o valor presente do pagamento referente a dois meses deve ser igual ao valor do pagamento à vista:

$$\frac{1,03P}{(1+i)^2} = 0,95P \Rightarrow i = \frac{1,03}{0,95}^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,041254 = 4,1254\% \text{ a.m.}$$

A melhor forma de pagamento é à vista, já que o rendimento do dinheiro é menor que a taxa cobrada pela loja nas outras duas formas de pagamento possíveis.

TAXA DE JUROS

A taxa de juros é um índice utilizado em economia e finanças para registrar a rentabilidade de uma poupança ou o custo de um crédito. Podemos defini-la como os diferentes tipos de índice que se empregam na medida de rentabilidade das poupanças ou que se incorporam ao valor de um crédito, ou como uma relação entre dinheiro e o tempo dado que podem beneficiar a um poupador que decide investir seu dinheiro em um fundo bancário, ou seja, que se soma ao custo final de uma pessoa ou entidade que decide obter um empréstimo ou crédito. É aplicada em todos os tipos de operações financeiras e é considerada o valor de maior importância na hora de realizar transações econômicas a curto, médio e longo prazo.

As taxas de juros podem assumir diferentes formas dentro do mercado financeiro, são elas: taxa nominal, taxa proporcional, taxa efetiva, taxa over, taxa aparente e taxa real. Veremos um pouco do conceito de cada.

4.1 TAXA DE JUROS NOMINAL

A taxa de juro nominal é a taxa de juro propriamente dita, ou seja, é fixada pelo período de um ano, onde não sofre variações. É considerada um referencial em que os juros são incorporados ao capital mais de uma vez no período a que a taxa se refere. Esta taxa deve ser mencionada em todos os contratos de crédito e aplicações bancárias.

Para melhor compreensão veremos um exemplo:

Exemplo 14 *Um empréstimo de R\$ 50.000, 00 será quitado por meio de um único pagamento de R\$ 42.000, 00 dentro de um mês. Sabendo que foi pago no ato da contratação uma tarifa de 4% referentes a serviços bancários, sobre o valor do empréstimo, qual a taxa nominal cobrada?*

Resolução:

$$\text{taxa nominal} = \frac{\text{juros pagos}}{\text{empréstimo nominal}} = \frac{R\$ 50000 - R\$ 42000}{R\$ 42000} = 19,05\%a.m.$$

4.2 CALCULANDO O MONTANTE A JUROS NOMINAIS

Se considerarmos um determinado capital aplicado a uma taxa de juros efetiva ao ano, onde os juros serão capitalizados uma única vez ao ano, o montante ao término do primeiro ano será:

$$M = P(1 + i)$$

Se a taxa de juros for nominal ao ano, capitalizada bimestralmente (seis vezes por ano), o montante ao final de um ano será:

$$M = P \left(1 + \frac{j}{6} \right)^{6.1}$$

Se a taxa de juros for nominal ao ano, capitalizada semestralmente (duas vezes ao ano), o montante ao final de do quarto ano será:

$$M = P \left(1 + \frac{j}{2} \right)^{2.4}$$

De forma generalizada podemos definir o montante de um capital aplicado pelo prazo n a uma taxa nominal j com juros capitalizados k vezes durante o período referente a taxa nominal:

$$M = P \left(1 + \frac{j}{k} \right)^{k.n} \quad (4-1)$$

4.3 TAXA PROPORCIONAL

Esse tipo de taxa é determinada relacionando-se taxas nominais (taxa considerada na operação financeira) e o número de períodos capitalizados (quantidade de vezes no qual os juros ocorrem). São taxas de juros fornecidas em unidades de tempo diferentes que, ao serem aplicadas a um mesmo principal durante um mesmo prazo, produzem um mesmo montante acumulado no final daquele prazo, no regime de juros simples.

Exemplo 15 *12% ao ano é proporcional a 6% ao semestre; 1% ao mês é proporcional a 12% ao ano.*

Como o próprio nome já fala, as taxas proporcionais seguem uma proporção entre os períodos e as taxas, como por exemplo: A taxa proporcional de 4% *a.m.*, para cinco meses é de 20%; ou a taxa de 36% *a.a.*, para sete meses é de 21%. Então as taxas proporcionais devem seguir a seguinte regra:

$$n_1 \cdot i_1 = n_2 \cdot i_2$$

onde n_1 e n_2 representam os prazos de cada taxa; e i_1 e i_2 os percentuais das taxas consideradas.

4.4 TAXA EFETIVA

Segundo [2], a taxa de juro efetiva é a taxa de juro que expressa o rendimento

obtido de uma aplicação financeira assumindo juros compostos, isto é, assumindo que os juros pagos durante o prazo de aplicação são reinvestidos na mesma aplicação. É facilmente calculada recorrendo à fórmula de cálculo do juro composto. A taxa de juro efetiva normalmente anunciada pelos bancos refere-se ao período exato de um ano e designa-se taxa anual efetiva (TAE). Os juros antecipados, impostos, comissões e artifício usados no cálculo de juros fazem com que, tanto no regime de capitalização simples como na composta, as taxas efetivas e nominais se diferem. Exemplos de aplicações de taxas efetivas:

- operações de capital de giro;
- captação mediante venda de Certificados de Depósito Bancário (CDBs);
- 14% *a.m.* capitalizados mensalmente;
- 82% *a.s.* capitalizados semestralmente.

Quando o período da taxa de juros coincide com a periodicidade de capitalização dos juros, pode-se dizer que a taxa assumida é a própria taxa efetiva, ficando assim implícito o período de capitalização.

4.5 CALCULANDO A TAXA EFETIVA A PARTIR DA NOMINAL

Quando a taxa for nominal, podemos determinar a taxa proporcional por períodos de capitalização através do quociente entre a taxa nominal e a frequência de suas capitalizações:

$$i = \frac{j}{k}$$

Esse período corresponde ao mesmo período das capitalizações da taxa nominal. Por exemplo, uma taxa nominal de 36% *a.a.* capitalizadas semestralmente quando dividida pela frequência das capitalizações, o resultado será uma taxa efetiva semestral:

$$i_s = \frac{j}{k} = \frac{36\% \text{ a.a.}}{2} = 18\% \text{ a.s.}$$

Agora ao aplicarmos o processo de capitalização composta, calculamos a taxa efetiva anual equivalente à taxa nominal de 36% *a.a.*, capitalizada semestralmente:

$$i_a = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k \cdot n} - 1 = \left(1 + \frac{0,36}{2}\right)^{2 \cdot 1} - 1 = (1 + 0,18)^2 - 1 = 39,24\% \text{ a.a.}$$

Se observarmos a resolução anterior atentamente, a taxa efetiva *i* para *n* períodos de capitalização pode ser obtida a partir de uma taxa nominal *j* capitalizada *k* vezes, de acordo com a seguinte fórmula:

$$i_a = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n - 1$$

Agora, se aplicarmos um capital C durante n anos a uma taxa efetiva ao ano, o montante será:

$$M = P(1 + j_a)^n$$

Se o mesmo capital for aplicado pelo mesmo período a uma taxa nominal anual j , capitalizada k vezes, o montante será:

$$M = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k.n}$$

As taxas nominal e efetiva devem resultar no mesmo montante se forem equivalentes. A fórmula para calcular a taxa efetiva ao ano é encontrada quando igualamos os

$$P(1 + i_a)^n = P \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k.n} - 1 \Rightarrow i_a = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^k - 1$$

A fim de exemplificar a importância de se trabalhar apenas com taxas efetivas, consideremos a seguinte situação:

- Consórcio A: 12% *a.a.* capitalizada diariamente;
- Consórcio B: 12, 7% *a.a.* capitalizada bimestralmente;
- Consórcio C: 12, 8% *a.a.* capitalizada semestralmente.

Pensando em realizar um consórcio a fim de guardar dinheiro, qual das taxas será melhor e qual consórcio escolher?

Resolução: Inicialmente devemos calcular as taxas efetivas anuais equivalentes a essas taxas nominais declaradas.

$$\begin{aligned} i_a &= \left(1 + \frac{j}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0,12}{360}\right)^{360} - 1 = 12,73\% \text{ a.a. } \text{Consórcio A} \\ &= \left(1 + \frac{0,127}{6}\right)^6 - 1 = 13,41\% \text{ a.a. } \text{Consórcio B} \\ &= \left(1 + \frac{0,128}{2}\right)^2 - 1 = 13,21\% \text{ a.a. } \text{Consórcio C} \end{aligned}$$

Podemos com esses cálculos ter algumas considerações:

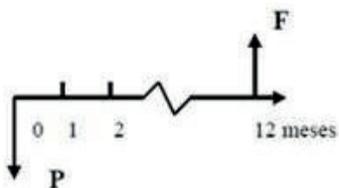
1. Nem sempre a taxa mais baixa é necessariamente a melhor.
2. A quantidade de capitalizações durante o ano pode levar a uma diferença significativa entre a taxa nominal cotada e a taxa efetiva que você recebe ou paga.

A frequência das capitalizações de uma taxa nominal afeta diretamente o montante de uma aplicação, pois quanto maior é a frequência, maior será o montante final e consequentemente maior será também a taxa efetiva cobrada na operação.

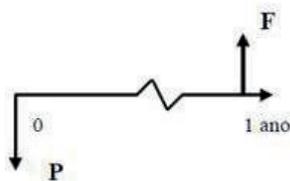
4.6 EQUIVALÊNCIA ENTRE TAXAS

Quando as taxas de juros são fornecidas em unidades de tempo diferentes que ao serem aplicadas a um mesmo principal durante um mesmo prazo e produzem um mesmo montante acumulado no final daquele prazo, no regime de juros compostos, são denominadas equivalentes. O conceito de taxas equivalentes está, portanto, diretamente ligado ao regime de juros compostos. Podemos dizer então, que a diferença entre taxas equivalentes e taxas proporcionais se prende exclusivamente ao regime de juros considerado, ou seja, as taxas proporcionais se baseiam em juros simples, e as taxas equivalentes se baseiam em juros compostos. Toda taxa de juros que se encontra em determinado prazo, pode ser convertida para outro prazo qualquer sem que ocorra alteração em seu valor inerente, viabilizando o cálculo dos juros em operações.

Veja abaixo como podemos relacionar a equivalência entre taxas, baseando em [2]:



$$F = P(1 + i_m)^{12} \quad (1)$$



$$F = P(1 + i_A)^1 \quad (2)$$

Como $1 = 12$, temos que:

$$(1 + i_m)^{12} = (1 + i_A)^1$$

E assim do mesmo modo, podemos relacionar as taxas em diferentes períodos:

$$(1 + j_d)^{360} = (1 + i_m)^{12} = (1 + i_A)^1 = (1 + j_s)^2$$

Quando convertemos uma unidade de tempo menor para uma unidade de tempo

maior, como de mês para ano, deve-se elevar a taxa de juros pelo número de períodos correspondentes. No sentido contrário, de ano para mês, devemos elevar ao inverso do período.

Vejam os exemplos:

Exemplo 16 *Qual é a taxa nominal anual, capitalizada semestralmente, equivalente à taxa efetiva de 40% a.a.?*

Resolução: $i_a = 40\% a.a.$, $k = 2$, $m = 1$, $j = ?$

$$(1 + i_A) = \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k.m}$$

$$1,40 = \left(1 + \frac{j}{2}\right)^{2.1} \Rightarrow j = 36,64 \text{ a.a.}$$

Exemplo 17 *Calcular a taxa nominal anual, capitalizada trimestralmente, equivalente à taxa nominal de 120% a.a., capitalizada mensalmente.*

Resolução: $j = 120\% a.a.$, $k = 12$, $j = \% a.a.$, $k = 4$, $m = 1$

Vamos determinar o fator mensal, dividindo a taxa nominal de 120% a.a. pela frequência das capitalizações (no caso, 12):

$$(1 + i_m) = \left(1 + \frac{1,2}{12}\right) = 1,1$$

Podemos obter também o fator trimestral, dividindo a taxa nominal anual pela frequência das capitalizações (no caso, 4):

$$(1 + i_5) = \left(1 + \frac{j}{4}\right)$$

Agora vamos relacionar o fator trimestral com o fator mensal, onde podemos determinar a taxa nominal pedida:

$$(1 + i_t) = (1 + i_m)^3$$

$$\left(1 + \frac{j}{4}\right) = (1,1)^3$$

$$j = [(1,1)^3 - 1]4 = 132,40\% .a.$$

4.7 TAXA OVER

É uma taxa usada pelo mercado financeiro para determinar a rentabilidade por dia útil, normalmente é multiplicada por 30 (conversão do mercado financeiro); onde podemos destacar uma importante aplicação que é as operações de CDIs (Certificados de Depósitos Interbancários). Nas empresas, em geral, podemos dizer que é utilizada para escolher uma outra melhor taxa para um determinado investimento. Esta prática ganhou maior importância principalmente no início dos anos 90.

A aplicabilidade do conceito de Taxa Over não deve ser limitada às operações de mercado financeiro e bancário, assim como os demais conceitos da matemática financeira, pois pode ser usada também em operações comerciais, como no financiamento de uma venda de mercadoria a um determinado cliente, por exemplo.

Uma das dificuldades para utilização da Taxa Over é a informação do número de dias úteis (ndu), devido ao grande número de feriados do calendário nacional. Uma alternativa é conseguir junto à rede bancária um calendário que contenha o número de dias úteis, já contemplando os feriados nacionais. Este calendário é próprio para calcular a quantidade de dias úteis nas aplicações financeiras. Podemos considerar como alternativa tradicional contar no próprio calendário, o que muitas vezes pode se tornar uma dificuldade no processo.

Se for o caso de realizar uma operação de mais de um dia, utilizamos a taxa nominal para realizar a conversão de taxa over para um dia e, em seguida, a taxa efetiva para capitalizar a taxa de um dia para o prazo necessário. Pode-se calcular o montante de um capital aplicado à taxa over mensal por um determinado prazo em dias, através da relação:

$$M = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30} \right)^{du}$$

4.8 TAXA DE JUROS EFETIVA EQUIVALENTE À TAXA OVER

Em [2] podemos determinar o montante de um capital aplicado à taxa over durante um certo período (dias úteis) através da seguinte relação:

$$M = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30} \right)^{du}$$

O montante desse mesmo capital aplicado agora durante dias corridos a uma taxa efetiva i é:

$$M = P(1 + i)^{\frac{dc}{n}}$$

n = referência da taxa i

Igualando os dois montantes, podemos chegar a uma relação de taxas equivalentes:

$$\left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du} = (1 + i)^{\frac{dc}{n}} \Rightarrow i = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du \cdot \frac{n}{dc}} - 1$$

Onde: i = taxa efetiva em n dias;

dc = dias corridos;

du = dias úteis;

n = referência de taxa i (30 para taxa mensal).

Podemos obter dc (número de dias corridos) pela diferença entre as duas datas. Já du (número de dias úteis) pode ser obtido a partir da diferença entre as duas datas, descontando-se sábados e domingos, além do número de feriados regulares e especiais entre essas datas.

Exemplo 18 *Uma operação com duração de 50 dias corridos foi contratada a uma taxa over de 2, 1% a.m. Se durante esse prazo houve 35 dias úteis, determine a taxa efetiva mensal e o montante ao término do prazo, considerando-se que foram aplicados R\$ 100.000, 00.*

Resolução:

Cálculo do montante:

$$M = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du} = 100000 \cdot \left(1 + \frac{0,021}{30}\right)^{35} = \text{R\$ } 102479,38$$

Cálculo da taxa efetiva:

$$i = \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30}\right)^{du \cdot \frac{n}{dc}} - 1 = \left(1 + \frac{0,021}{30}\right)^{35 \cdot \frac{30}{50}} - 1 = 1,48\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 19 *A cada R\$ 3000, 00 aplicados foram recebidos R\$ 3048, 36. Considerando que a operação foi contratada a uma taxa over de 2% a.m., calcular o número de dias úteis.*

Resolução:

$$M = P \left(1 + \frac{\text{taxa over}}{30} \right)^{du}$$

$$3048,36 = 3000 \cdot \left(1 + \frac{0,02}{30} \right)^{du} \Rightarrow du = \frac{\ln \left(\frac{3048,36}{3000} \right)}{\ln \left(1 + \frac{0,02}{30} \right)} = 24 \text{ dias}$$

4.9 TAXA DE JUROS APARENTE E TAXA DE JUROS REAL

A Taxa Aparente é a taxa efetiva de juros em que não são considerados os efeitos da inflação dentro de uma operação financeira, ou seja, se a inflação for zero, tanto a taxa aparente, quanto a taxa real serão iguais. Já a Taxa de Juros Real é determinada desconsidera os efeitos da inflação e é correspondente ao período da operação, sendo uma taxa que reflete com maior precisão o ganho real de um investimento por considerar a perda com a desvalorização causada pela inflação do período. Existe uma relação matemática entre a taxa aparente, taxa real e inflação definida por [2].

$$(1 + i) = (1 + i_r) \cdot (1 + I) \quad (4-2)$$

Onde: i = taxa aparente

i_r = taxa real

I = taxa de inflação

Exemplo 20 Uma aplicação financeira rende juros nominais de 8% a.a., capitalizados mensalmente. Considerando uma inflação de 6, 5% a.a., determinar as taxas de juros aparente e real obtidas pela aplicação.

Resolução:

Cálculo da taxa efetiva aparente:

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{j}{k} \right)^k$$

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{0,085}{12} \right)^{12} \Rightarrow i_a = 8,84\% \text{ a.a.}$$

Cálculo da taxa efetiva real:

$$i_r = \frac{1 + i_a}{1 + I} - 1 = \frac{1,0884}{1,065} - 1 = 2,2\% \text{ a.a.}$$

Exemplo 21 *Um capital aplicado por três anos e meio à taxa aparente de 15% a.a., capitalizada mensalmente, rendeu R\$ 1.800,00 de juros. Considerando uma inflação anual de 10%, calcular o capital e as taxas de rentabilidade aparente e real da aplicação. [2] adaptado.*

Resolução:

I) Cálculo do capital:

$$\begin{aligned}
 J &= M - C \\
 1800,00 &= C \left(1 + \frac{j}{k}\right)^{k \cdot m} - C \\
 1800,00 &= C \left[\left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12 \cdot 3,5} - 1 \right] \Rightarrow C = \frac{1800,00}{(1,0125)^{42} - 1} = R\$ 2627,85
 \end{aligned}$$

II) Cálculo da taxa de rentabilidade aparente:

$$(1 + i_a) = \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12} \Rightarrow i_a = 16,07\% \text{ a.a.}$$

III) Cálculo da taxa de rentabilidade real:

$$i_r = \frac{1 + \text{Taxa de rentabilidade aparente}}{1 + \text{Taxa de inflação}} - 1 = \frac{1 + 0,1607}{1 + 0,1} - 1 = 5,52\% \text{ a.a.}$$

OPERAÇÕES A CURTO PRAZO

5.1 DESCONTO

O desconto é uma modalidade de empréstimo a curto prazo destinado ao capital de giro de uma empresa, e que é concedido através de adiantamento, mediante a cobrança de uma determinada taxa de desconto, sobre um título ou nota promissória de crédito com recebimento futuro. A cobrança de juros é feita antecipadamente na data de liberação dos recursos baseada na taxa de juros (taxa de desconto) e no prazo a decorrer de cada título.

5.1.1 DESCONTO SIMPLES

Define como sendo um desconto em que a taxa incide sempre sobre o valor futuro (ou montante). Ele é utilizado no Brasil de maneira vasta e generalizada, principalmente em operações bancárias, como desconto de duplicatas. Nessa metódica, o desconto simples é classificado em duas categorias: desconto racional (desconto por dentro) e desconto comercial ou bancário (desconto por fora).

5.1.2 DESCONTO RACIONAL SIMPLES

É aquele onde a referência para o cálculo percentual do desconto é o valor líquido, isto é, sobre o valor atual, sendo calculado a juros simples. Podemos calcular o desconto da seguinte maneira:

$$D_r = N - A = N - \frac{N}{1 + i.n} \Rightarrow D_r = \frac{N.i.n}{1 + i.n}$$

Onde i representa a taxa de juros simples, n corresponde ao prazo decorrido até o vencimento do título e A é o valor atual na data do desconto. É importante a observação da proporcionalidade entre as grandezas “taxa de juro” e “prazo de operação”.

Exemplo 22 Um título com valor nominal de R\$ 3.200, 00 foi resgatado dois meses antes do seu vencimento, com um desconto racional simples à taxa de 30% a.m.. De quanto foi o valor pago pelo título?

Resolução:

$$A = \frac{N}{1 + i.n} \Rightarrow A = \frac{3200}{1 + 0,3.2} = \frac{3200}{1,6} = \text{R\$ } 2000,00$$

5.1.3 DESCONTO COMERCIAL SIMPLES

É aquele onde a referência para o cálculo percentual do desconto é o valor nominal. Pode ser calculado pelo produto do valor nominal do título pela taxa de desconto fornecida pelo banco e pelo prazo a decorrer até o vencimento do título:

$$D = N.d.n$$

Em que d representa a taxa de desconto comercial (taxa por fora), n o prazo e N o valor nominal do título. Aqui também dá pra observar a proporcionalidade entre as grandezas “taxa” e prazo da operação. Podemos obter uma expressão para o valor liberado através da seguinte relação:

$$\begin{aligned} D &= N - V \\ N.d.n &= N - V \\ V &= N.(1 - d.n) \end{aligned} \tag{5-1}$$

Já o desconto bancário é considerado uma expansão do desconto comercial, bastando acrescentar a TSB - Taxa de Serviço Bancário ‘s’, que frequentemente incide sobre o valor nominal. Assim, as expressões para cálculo do valor do desconto e valor liberado passam a ser as seguintes:

$$\begin{aligned} D &= N.(s + d.n) \\ V &= N.(1 - s - d.n) \end{aligned} \tag{5-2}$$

Considerando-se que o valor do desconto é o juro pago sobre o valor nominal do título, podemos expressar a taxa mensal de desconto em função do valor do desconto (D) e do valor nominal (N):

$$d = \left(\frac{D}{N}\right) \cdot \left(\frac{30}{n}\right) \tag{5-3}$$

n = prazo em dias

Exemplo 23 Qual é o valor do desconto bancário (comercial) sofrido por uma nota promissória no valor de R\$ 3.000, 00, à taxa de 8% a.m., 3 meses antes do seu vencimento?

Resolução:

Primeiro calculamos o valor atual comercial

$$A = N.(1 - i.n) = 3000.(1 - 0,08.3) = 3000.0,76 = \text{R\$ } 2280,00$$

E finalmente, calculamos o valor do desconto

$$D = N - A = 3000 - 2280 = \text{R\$ } 720,00$$

5.1.4 TAXA DE DESCONTO EFETIVA

É um tipo de taxa que efetivamente será cobrada em operações de desconto. Essa taxa, quando aplicada sobre o valor que foi descontado, gera um montante igual ao valor nominal do título (gera juros iguais ao valor do desconto).

5.1.5 TAXA DE DESCONTO EFETIVA LINEAR

Podemos determinar essa taxa da seguinte maneira:

$$V.(1 + i.n) = N$$

$$N(1 - d.n).(1 + i.n) = N$$

$$i = \frac{d}{1-d.n}$$

Observando a expressão, podemos perceber que a taxa de desconto racional efetiva linear é a própria taxa de juros simples que, aplicada ao valor descontado do título (valor atual), durante um prazo equivalente ao que falta para seu vencimento, produz como montante o valor nominal do título.

De acordo com [2], no desconto comercial, a taxa efetiva (i) é maior que a taxa de desconto fornecida (d), pelo motivo de que, no desconto comercial, os juros são pagos antecipadamente e, em consequência, podem ser reaplicados pelo banco, levando a um maior ganho.

$$i = \left(\frac{D}{N}\right) \cdot \left(\frac{30*}{n}\right) \quad (5-4)$$

*= 30 se for considerada base mensal e 360 em base anual. O prazo n sempre será em dias.

No desconto bancário, a cobrança de uma certa taxa de serviço que incide sobre o valor nominal do título é muito comum no Brasil, além de encargos provenientes de impostos, como o IOF (Imposto sobre Operações Financeiras), sendo tudo responsabilidade do financiado. Incorporando essas taxas no cálculo da taxa efetiva, temos:

$$V.(1 + i.n) = N$$

$$N.(1 - d.n - s - IOF.n).(1 + i.n) = N$$

$$i = \left(\frac{d.n + s + IOF.n}{1 - d.n - s - IOF.n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \quad (5-5)$$

CONCLUSÕES:

Não havendo outras despesas envolvidas, como, por exemplo, despesas bancárias ou administrativas, pode-se afirmar que:

1. No desconto comercial simples, a taxa de desconto efetiva linear será sempre maior que a taxa de desconto simples.
2. No desconto racional simples, a taxa de desconto efetiva linear será sempre igual à taxa de desconto simples.

Exemplo 24 *Se a taxa de desconto comercial for de 4% a.m., e o prazo de vencimento de uma duplicata for de 3 meses, qual a taxa mensal de juros simples da operação?*

Resolução:

$$i = \frac{d}{1-d.n} = \frac{0,04}{1-0,04.3} = 0,0455 = 4,55\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 25 *Determinar a taxa de desconto “por fora” de um título negociado 60 dias antes de seu vencimento, sendo seu valor de resgate igual a R\$ 26.000,00 e valor atual na data do desconto de R\$ 24.436,10.*

Resolução:

$$i = \left(\frac{D}{V}\right) \left(\frac{30}{n}\right) = \left(\frac{26000 - 24436,10}{26000}\right) \cdot \left(\frac{30}{60}\right) = 0,06015.0,5 = 0,03 = 3\% \text{ a.m.}$$

5.1.6 TAXA DE DESCONTO EFETIVA EXPONENCIAL

O cálculo da taxa de desconto efetiva linear não incorpora o real comportamento exponencial dos juros. A mesma foi apresentada anteriormente por motivos didáticos e em função das eventuais necessidades do leitor. A taxa efetiva exponencial acompanha o real crescimento dos juros. Podemos obter uma expressão para calcular diretamente a taxa efetiva exponencial considerando que, se a taxa for aplicada sobre o valor liberado, durante o prazo da operação, resultará em um montante igual ao valor nominal do título:

$$V \cdot (1 + i_e)^{\frac{n}{30}} = N$$
$$i_e = \left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{30}{n}} - 1 \quad (5-6)$$

Onde n é o prazo da operação em dias. Essa taxa tem cálculos mais rigorosos do que a taxa efetiva linear, devido ao real comportamento exponencial dos juros, sendo assim a forma mais apropriada de calcular o verdadeiro custo de uma operação de desconto.

Exemplo 26 *Uma duplicata de R\$ 4.000,00 foi descontada comercialmente,*

resultando em um crédito de R\$ 3.400,00 na conta do cliente. Considerando uma taxa de desconto de 4% a.m., calcular o prazo do vencimento do título, a taxa de desconto efetiva linear e a taxa de desconto efetiva exponencial.

Resolução: Dados: $N = R\$ 4.000,00$ $V = R\$ 3.400,00$ $d = 4\% a.m.$

- Prazo do título:

$$D = N.d.n4000 - 3400 = 4000.0,04.(n/30)n = 112,5 \text{ dias}$$

- Taxa de desconto efetiva linear:

$$i = \frac{d}{1 - d.n} i = \frac{0,04}{1 - 0,04.(112,5/30)} i = 0,0471.(100) i = 4,71\% a.m.$$

- Taxa de desconto efetiva exponencial:

$$j_e = (N/V)^{30/n} - 1 j_e = (4000/3400)^{30/112,5} - 1 j_e = 0,0457.(100) j_e = 4,57\% a.m.$$

A taxa efetiva exponencial é o verdadeiro custo da operação, pois incorpora o real comportamento exponencial dos juros.

TÍTULOS PÚBLICOS

O Governo Federal, através do Tesouro Nacional, emite títulos para financiar a dívida do país. Esses títulos podem ser pré-fixados, pós-fixados ou diretamente ligados à inflação e, assim como os CDB (Certificado de Depósito Bancário), têm um prazo de vencimento e um modo de remuneração diferentes, pois são definidos no momento em que são emitidos. Se pensarmos bem, por qual motivo alguém emprestaria dinheiro para o governo? Simples: porque o risco é muito baixo. O Governo equivale a uma empresa muito grande, com grande geração de caixa, e por isso possui menos risco que uma outra empresa qualquer ou banco. Caso o Governo esteja no limite, ele dispõe de outros instrumentos para quitar suas dívidas, como por exemplo o aumento de impostos ou a fabricação de mais dinheiro.

Algumas pessoas podem ainda se perguntar: e por que o governo toma dinheiro emprestado se pode simplesmente imprimir mais? A resposta a essa pergunta é que ao imprimir mais dinheiro o governo estaria aumentando a oferta de dinheiro na economia, reduzindo assim o seu valor e gerando altos índices de inflação. Como nós todos estamos cansados de saber, isso não é uma boa alternativa.

Existem diversos tipos de títulos públicos, mas vamos nos resumir nos mais usados.

São eles:

- LFT (Letras Financeiras do Tesouro): Títulos pós-fixados que são remunerados pela taxa Selic. O CDI, que remunera os CDB pós-fixados, acompanha a taxa Selic. E por razões técnicas, o CDI é um pouco menor que a taxa Selic corrente. Uma estratégia comum que emprega esses títulos é a reserva de emergência, já que possuem alta liquidez.
- LTN (Letras do Tesouro Nacional): Títulos pré-fixados, ou seja, tem um valor fixo pelo qual serão resgatados na data do vencimento. Junto com as LFT, são os títulos mais comuns. Em geral são utilizadas em estratégias de curto ou médio prazo, pois costumam render mais que as LFT. Também é comum em estratégias de investimento mensal.
- NTN-F (Notas do Tesouro Nacional, Série F): Títulos pré-fixados como as LTN, porém com pagamentos de juros semestrais (cupons). A ideia central é a mesma da LTN, mas tem um tratamento matemático mais complicado. Em geral, tem um prazo de vencimento mais longo, mas não são tão atrativas para pessoas físicas por causa da tributação dos cupons.
- NTN-B (Notas do Tesouro Nacional, Série B): Títulos indexados à inflação, corrigidos pelo IPCA e acrescidos de uma remuneração pré-fixada. Assim como a NTN-F, tem pagamentos semestrais de juros. É uma opção para quem quer proteção contra a inflação. Existe uma variação desse título no Tesouro Direto chamada NTN- B Principal, que não tem pagamentos semestrais de juros (cupons) e paga toda a remuneração acumulada no vencimento. A NTN-B Principal está para a NTN-B como a LTN está para a NTN-F, sendo bastante utiliza-

da para objetivos de longo prazo, como aposentadoria ou faculdade dos filhos. Outra aplicação comum é em estratégias de investimento mensal.

As operações com títulos públicos são consideradas como um reflexo das operações de desconto comercial. Então, se a taxa de desconto fornecida estiver em base anual (considerando o ano comercial), o valor da operação pode ser calculado da seguinte forma:

$$V = N \left[1 - d \cdot \left(\frac{n}{360} \right) \right] = N \cdot PU \quad (6-1)$$

O fator $1 - d \cdot 360$ é denominado PU (preço unitário), que significa o valor líquido comercial de uma unidade monetária ($N = R\$ 1$). A taxa efetiva linear pode ser calculada dividindo-se a taxa de desconto pelo PU das letras:

$$i = \frac{d}{\left[1 - d \cdot \left(\frac{n}{360} \right) \right]} = \frac{d}{PU} \quad (6-2)$$

A taxa efetiva exponencial anualizada usando dias corridos é:

$$i_e = \left(\frac{1}{PU} \right)^{\frac{360}{n}} - 1 \quad (6-3)$$

Em relação a títulos públicos, podemos dizer que não existe nada mais seguro em um país do que emprestar para o Governo, pois nenhum investidor deveria aceitar qualquer alternativa de investimento que tenha expectativa de render menos que os títulos públicos, exceto pelos custos. Infelizmente essa não é a realidade, pois a poupança ainda é o investimento mais comum e considerado como o mais seguro, o que não é verdade. Além disso, os bancos costumam disponibilizar diversos produtos que exploram a falta de conhecimento dos investidores, fazendo com que percam ganhos.

Exemplo 27 Uma operação com letras que possui 95 dias corridos a decorrer até seu vencimento está sendo negociada a uma taxa de desconto de 15,4% a.a.. Calcule o PU do título.

Resolução: Dados: $n = 95$ dias $d = 15,4\%$ a.a.

$$PU = [1 - d \cdot (n/360)] = [1 - 0,154 \cdot (95/360)] = 0,9594$$

Quer dizer então que se o $PU = 0,9594$, então o valor de compra da letra é de R\$ 0,9594 para cada R\$1,00 de valor nominal ou valor de face.

Exemplo 28 *Considerando que determinado banco deseja rentabilidade efetiva exponencial de 44% a.a. em operações de compras de letras a prazo de 90 dias, calcule o fator PU sobre o qual se deve negociar em termos de desconto comercial.*

Resolução: Dados: $n = 90$ dias $d = 44\%$ a.a.

$$i_e = \left(\frac{1}{PU}\right)^{360/n} - 10,44 = \left(\frac{1}{PU}\right)^{360/90} - 1PU = 0,9174$$

Abaixo veremos algumas operações financeiras que estão diretamente ligadas a esses títulos segundo [2].

1. **FACTORING**: trata-se de uma atividade comercial, mista e irregular, que soma prestação de serviços à compra de acionados financeiros. A operação de Factoring é um mecanismo de fomento mercantil que possibilita à empresa fomentada vender seus créditos, gerados por suas vendas à prazo, a uma empresa de Factoring, resultando no recebimento imediato desses créditos futuros, o que aumenta seu poder de negociação. Por exemplo, nas compras à vista de matéria-prima utiliza-se esse tipo de operação, pois assim a empresa não perde capital. A Factoring também presta serviços à empresa - cliente, em outras áreas administrativas, deixando o empresário com mais tempo e recursos para produzir e vender. A finalidade principal da empresa de Factoring é o fomento mercantil, onde acontece o fomento, a assessoria e a ajuda ao pequeno e médio empresário a solucionar seus problemas do dia a dia.
2. **HOT MONEY**: trata-se de uma operação de curtíssimo prazo, em que os recursos podem migrar de um mercado para outro com muita rapidez. Esses recursos são administrados por indagadores no mercado de câmbio e caracterizam-se por alta volatilidade, em oposição às aplicações de bancos centrais, bancos de investimento ou investidores domésticos. Por essa particularidade, são considerados causadores de turbulências nos mercados financeiros, em algumas situações. No Brasil, o termo hot money, aplica-se também a empréstimos de curtíssimo prazo (de 1 a 29 dias), com a finalidade de financiar o capital de giro das empresas para cobrir necessidades imediatas de recursos.
3. **COMMERCIAL PAPERS**: são títulos de curto prazo emitidos pelas sociedades por ações, exceto as instituições financeiras, as sociedades corretoras e distribuidoras de valores mobiliários e sociedades de arrendamento mercantil (empresas de leasing), com a finalidade de captar recursos no mercado interno para financiar suas necessidades de capital de giro. É considerada uma alternativa às operações de empréstimos bancários convencionais, pois, geralmente permitem uma redução nas taxas de juros pela eliminação da intermediação financeira, ou seja, elimina o spread bancário.
4. **EXPORT NOTE**: é uma alternativa de investimento, remunerada por taxa de juros e vinculada à variação cambial, com lastro aceitável de exportação. É uma aplicação direcionada a empresas que tenham interesse em investimento indexado à variação cambial, com risco de oscilações. Podem ser consideradas como alternativa de hedge para empresas que possuem exposições a moeda

estrangeira, com uma possibilidade de resgate a qualquer momento, a preço de mercado, além de ser uma opção para operações de renda fixa conjugada com operação de swap cambial. É um produto exclusivo para Pessoas Jurídicas.

5. **CONTA GARANTIDA:** é um limite de crédito rotativo disponível para utilização sempre que uma empresa precisar. Esta solução garante cobertura diária ao saldo devedor da conta de pessoas jurídicas durante a vigência do contrato.

SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES

Em grande parte das aplicações financeiras o capital pode ser pago ou recebido de uma só vez ou através de uma sucessão de pagamento ou de recebimentos (séries de pagamentos). Se o objetivo é constituir um capital em uma data futura, pode-se dispor de um processo de Capitalização, mas se quer pagar uma dívida, tem-se um processo de Amortização. As séries periódicas uniformes ou rendas certas é o nome que se dá aos pagamentos sucessivos tanto em nível de amortização quanto de investimentos. Podemos destacar importantes definições a cerca dessas séries:

- **ANUIDADES:** refere-se a cada pagamento feito em determinados intervalos de tempo (Ex: mensal, bimestral, anual, etc.).
- **INTERVALOS DE PAGAMENTO:** intervalo de tempo decorrido entre pagamentos sucessivos.
- **VALOR PRESENTE:** é a soma dos valores presentes de cada um dos pagamentos, calculados numa determinada data focal, anterior às datas de disponibilidade desses pagamentos, com uma taxa também dada.
- **VALOR FUTURO:** é a soma dos valores futuros de cada um dos pagamentos, calculados numa data focal determinada, posterior às datas de disponibilidade desses pagamentos, com uma taxa também dada.
- **SEQUENCIA UNIFORME DE PAGAMENTOS:** quando todos os pagamentos ou anuidades são iguais, os períodos e as taxas de juros também são iguais. Podemos também classificar as Séries de Pagamento uniformes segundo [1] e [2]. Elas se dividem em:
- **SÉRIES UNIFORMES POSTECIPADAS:** caracteriza-se pelo fato de os pagamentos ocorrerem no final de cada intervalo de tempo, ou seja, não existem pagamentos na data zero. É a sistemática normalmente adotada pelo mercado. Ex: Pagamento da fatura do cartão de crédito.
- **SÉRIES UNIFORMES ANTECIPADAS:** caracteriza-se pelo fato de os pagamentos ocorrerem no início de cada intervalo de tempo, ou seja, a primeira prestação ocorre na data zero. Exemplo: Compra em uma loja para pagamento em 4 prestações mensais, iguais, sendo uma de entrada.
- **SÉRIES UNIFORMES DIFERIDAS:** são aquelas séries de pagamento que se iniciam após decorrido um certo número de períodos sem pagamentos. Caracteriza-se pelo fato de existir uma carência entre a data zero e o primeiro pagamento da série. Exemplo: Financiamento pelo prazo de 9 meses, com carência de 3 meses, para pagamento em 6 parcelas mensais, iguais e consecutivas, a partir do quarto mês.

Lembrando que as séries acima mencionadas, independentemente da sua classificação, estão inseridas no contexto de capitalização composta já vista anteriormente,

ou seja, cada pagamento R será capitalizado ou descapitalizado à luz de uma taxa de juros i , durante um certo período de tempo n .

7.1 VALOR PRESENTE DE SÉRIES PERIÓDICAS UNI- FORMES

Podemos determinar o valor presente de uma série de parcelas uniformes e postecipadas através da soma das parcelas atualizadas para a data inicial do fluxo (data 0).

Neste caso, [2] nos mostra que o valor presente dos termos da série é dado por:

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

Colocando R como fator comum temos:

$$P = R[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + \dots + (1+i)^{-n}]$$

O que está entre colchetes representa uma soma dos termos de uma P.G. finita. Aplicando a fórmula da soma dos termos de uma P.G. (confira apêndice), podemos desenvolver uma expressão para o valor presente de uma série uniforme com n termos postecipados capitalizados à taxa efetiva i :

$$P = R \left[\frac{a_1 - a_n \cdot q}{1 - q} \right]$$

Onde: a_1 representa o termo $(1+i)^{-1}$;
 a_n representa o termo $(1+i)^{-n}$;
 q representa o termo $(1+i)^{-1}$ (razão da série).

Substituindo as expressões, obtemos as seguintes fórmulas para o cálculo do valor presente:

$$P = R \left[\frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \cdot (1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}} \right] \Rightarrow P = R \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right] = R \cdot a_{n \overline{i}\%}$$

Ou podemos isolar o valor de R e obter a seguinte expressão:

$$P = R \left[\frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n} \cdot (1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}} \right] \Rightarrow P = R \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right]$$

$$R = \frac{P}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right]} = \frac{P}{a_{n \overline{i}\%}} \quad \dots \quad (7-1)$$

A expressão entre colchetes é conhecida como fator de valor presente de séries uniformes recebendo o símbolo $a_{n \overline{i}\%}$, em que n representa o número de termos da série

e i a taxa de capitalização.

Exemplo 29 *Um determinado bem custa R\$ 6.000,00 à vista e será pago em sete prestações mensais e iguais que vencem ao fim de cada mês. Considerando que o juro composto cobrado é de 4% a.m., calcular o valor das prestações.*

Resolução: Dados: $P = R\$6.000,00$ $i = 4\% \text{ a.m.}$ $n = 7$

$$R = \frac{P}{a_{\overline{7}|4\%}} = \frac{6000}{\left[\frac{(1,04)^7 - 1}{(1,04)^7 \cdot 0,04} \right]} = \frac{6000}{6,0057} = R\$999,05$$

Exemplo 30 *A juros efetivos de 4% a.m., determinar o tempo necessário para liquidar um financiamento de R\$ 1.230,50 por meio de prestações mensais postecipadas de R\$ 105,00.*

Resolução: Dados: $P = R\$: 1.230,50$ $i = 4\% \text{ a.m.}$ $R = R\$: 105,00$

$$P = R \cdot a_{\overline{n}|4\%} \quad 1230,50 = 105 \left[\frac{(1,04)^n - 1}{1,04^n \cdot 0,04} \right] \quad (1,04)^n = 1,88253$$

Aplicando logaritmo nos dois lados da igualdade temos:

$$\log(1,04)^n = \log(1,88253)$$

$$n = \frac{\log(1,88253)}{\log(1,04)}$$

$n = 16 \text{ meses}$

7.2 MONTANTE DE SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES

Quando somamos os montantes de cada prestação em uma data futura dada, obtemos o valor futuro ou montante de uma série de pagamentos ou recebimentos uniformes. A expressão para obter o montante pode ser obtida ao capitalizarmos por n períodos o valor presente da série:

$$S = P(1+i)^n = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right] \cdot (1+i)^n$$

$$S = R \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] = R \cdot s_{\overline{n}|i\%} \quad (7-2)$$

Ou ainda em função de R , temos:

$$R = \frac{S}{\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]} = \frac{S}{s_{n \cdot i\%}} \quad (7-3)$$

Essas fórmulas que foram apresentadas por [2] permitem o cálculo do montante e dos termos da série postecipada. A expressão que está entre colchetes é conhecida como fator valor futuro de séries uniformes, sendo representado internacionalmente pelo símbolo $s_{n \cdot i\%}$. A fim de entendermos melhor esse processo de capitalização que se encontra implícito nas fórmulas de cálculo de séries de pagamentos uniformes, construiremos um quadro com todos os cálculos necessários para chegar ao montante de quatro depósitos mensais iguais, aplicados a juros efetivos de 8% a.m.:

Mês	Depósito	Períodos de capitalização	Cálculo	Montante no 4º mês
1	500	3	$500 \cdot (1,08)^3$	629,86
2	500	2	$500 \cdot (1,08)^2$	583,20
3	500	1	$500 \cdot (1,08)^1$	540,00
4	500	0	$500 \cdot (1,08)^0$	500,00
-	-	-	Total	2253,06

Cada depósito acima foi capitalizado até o quarto mês de modo que possamos calcular o montante nessa data. Agora realizaremos o cálculo através da equação (7-2):

$$S = R \cdot s_{n \cdot i\%} = 500 \cdot \left[\frac{(1,08)^4 - 1}{0,08} \right] = 500 \cdot 4,506112 = 2253,06$$

A fórmula indiscutivelmente é o modo mais simples de calcular esse montante, mas no quadro acima podemos claramente entender o mecanismo de capitalização implícito quando feito diretamente pela fórmula.

Exemplo 31 Se uma pessoa depositasse no final de cada mês R\$ 280,00, por um período de 22 meses, quanto irá acumular se a taxa de juros efetivos é de 5,5% a.m.?

Resolução: Dados: $n = 22$ $R = \text{R\$} : 280,00$ $i = 5,5\% \text{ a.m.}$

$$S = R \cdot s_{22 \cdot 5,5\%} = 280 \cdot \frac{(1,055)^{22} - 1}{(0,055)} = 280 \cdot 40,8643 = \text{R\$} : 11.442,01$$

Exemplo 32 Um investidor deseja dispor de R\$ 21.000,00 dentro de 8 meses. Para isso, começa imediatamente a depositar todo início do mês em uma aplicação que paga 3% a.m. de juros efetivos. Qual deve ser o valor de cada depósito antecipado que o investidor

deverá realizar para que disponha no início do oitavo mês da quantia?

Resolução: Dados: $n = 8$ $R = R\$21.000,00$ $i = 3\%a.m.$

$$R = \frac{21000}{s_{8|3\%}} = \frac{21000}{\left[\frac{(1,03)^8 - 1}{0,03} \right]} = \frac{21000}{8,89234} = R\$: 2.361,58$$

7.3 CÁLCULO DA TAXA DE JUROS EM SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES

A taxa que capitaliza os termos de uma determinada série é a taxa de juros de um fluxo constante de pagamentos ou recebimentos. Essa taxa pode ser determinada através da seguinte equação:

$$P - \frac{R}{(1+i)^1} - \frac{R}{(1+i)^2} - \frac{R}{(1+i)^3} - \dots - \frac{R}{(1+i)^n} = 0 \quad (7-4)$$

Na equação (7-4) também proposta por [2] P representa o valor presente (inicial) do fluxo de caixa e R, o valor unitário dos termos da série. O cálculo da taxa de juros pode ser realizado por uma calculadora financeira para facilitar, pois se for manual é um processo muito demorado e cansativo. Outro método que pode ser utilizado é o por tentativas ou por interpolação linear, no entanto, esses processos são respectivamente penosas e imprecisas. Podemos destacar alguns métodos iterativos que podem ser utilizados, como: o método de aproximação de Newton-Raphson, de Baily-Lenzi, de Gauss-Cantelli e o de Karpin. Desses métodos o mais simples e exato que pode ser usado é o de Baily-Lenzi, pois oferece melhores resultados. Podemos calcular a taxa de juros dependendo do número de termos utilizando a seguinte equação:

Para $ni \leq 3$

$$i = h \left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \right] \quad (7-5)$$

Para $3 < ni < 5,5$

$$i = \frac{12h - 6k - (n-1)h^2}{6 - (n-1)h} \quad (7-6)$$

Onde:

$$h = \left(\frac{nR}{P} \right)^{2/(n+1)} - 1 \quad (7-7)$$

E:

$$K = \left[\frac{nh}{1 - (1+h)^{-n}} \right]^{2/(n+1)} - 1 \quad (7-8)$$

Podemos então definir:

- P = valor principal (financiamento efetivo);
- R = valor das prestações postecipadas;
- n = número de prestações.

A equação (7-5) é utilizada para valores menores de i e n , resultando assim em valores mais precisos. Já a equação (7-6) é recomendada para altos valores de $n \times i$. A utilização da equação adequada, dependendo das faixas de variações de ni , resulta em erros inferiores a 1%.

Veremos a seguir um exemplo no qual ilustramos o uso de equações:

Exemplo 33 *Dados:* $P = R\$76.840,90$, $R = R\$11.000,00$ $n = 30$

Resolução:

$$h = \left(\frac{nR}{P} \right)^{2/(n+1)} - 1 = \left(\frac{30 \cdot 11000}{76840,90} \right)^{2/31} - 1 = 0,09856$$

$$K = \left[\frac{nh}{1 - (1+h)^{-n}} \right]^{2/(n+1)} - 1 = \left[\frac{30 \cdot 0,09856}{1 - (1+0,09856)^{-30}} \right]^{2/31} - 1 = 0,07669$$

$$i = h \left[\frac{12 - (n-1)h}{12 - 2(n-1)h} \right] = 0,09856 \left[\frac{12 - (29)0,09856}{12 - 2(29)0,09856} \right] = 0,14339 = 14,34\% \text{ a.m.}$$

$$i = \frac{12h - 6k - (n-1)h^2}{6 - (n-1)h} = \frac{12(0,09856) - 6(0,07669) - 29(0,09856)^2}{6 - 29(0,09856)} = 0,14033 = 14,03\% \text{ a.m.}$$

A partir dos resultados, basta observar qual das fórmulas é mais eficiente no cálculo da taxa, ou seja, qual se aproxima mais.

7.4 TAXA APROXIMADA: INTERPOLAÇÃO LINEAR

Quando não é possível calcular a taxa de juros exata que está implícita em uma série de pagamentos ou recebimentos, podemos utilizar o processo de interpolação linear, que consiste em ensaiar vários valores de “ i ”. Começa-se por estimar um valor que nos pareça próximo da solução final. Se o valor atual (P) resultar positivo, ensaia-se um valor de “ i ” superior. Se o P resultar negativo, ensaia-se um valor de “ i ” inferior. Quando os dois pontos assim obtidos estiverem suficientemente próximos um do outro, pode interpolar-

se linearmente, obtendo-se $i =$ “taxa aproximada”, correspondente ao $P = 0$. Apesar de existir uma diferença entre a taxa real e a taxa aproximada, a taxa obtida pelo método de interpolação linear é bastante aceitável.

Exemplo 34 *Um financiamento será pago em 22 prestações mensais de R\$130.000, 00. Considerando o valor do financiamento de R\$1.220.340, 00, calcular a taxa efetiva cobrada.*

Resolução: Dados: $P = R\$1.220.340, 00$, $R = R\$130.000, 00$ $n = 22$

$$P = R \cdot a_{n \over i\%}$$

$$1220340 = 130000 \cdot a_{22 \over i\%}$$

$$a_{22 \over i\%} = \frac{1220340}{130000} = 9,38723$$

Consultando as tabelas financeiras do Apêndice desse trabalho, observa-se que $i = 9\%$. A taxa é determinada por uma aproximação e após feito, consulta-se a tabela.

PLANOS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS E FINANCIAMENTOS

Amortização é um processo que extingue dívidas através de pagamentos periódicos, ou seja, é a extinção de uma dívida através da quitação da mesma. Nesse processo, cada prestação é uma parte do valor total, incluindo os juros e o saldo devedor restante.

Amortização é um termo muito utilizado em contabilidade, administração financeira e matemática e traduz-se pela soma do reembolso do capital ou do pagamento dos juros do saldo devedor. A mesma também está presente na área da contabilidade, que é o processo que torna inatingível os ativos classificados na conta do balanço patrimonial, e pode ser relacionado também com a depreciação, que é a redução dos valores dos bens, à medida que são utilizados.

Dentro da amortização, estão incluídos o prazo, que é o tempo necessário para o pagamento de todas as parcelas, as parcelas de amortização, que é o valor devolvido periodicamente e as prestações, que é a soma da amortização, com o acréscimo de juros e impostos. Existem vários sistemas de amortização, entre os principais e mais utilizados temos: Sistema de Amortização Francês (conhecido também como Sistema Price), Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema de Amortização Americano e o Sistema Misto conhecido como Sistema de Amortização Crescente (Sacre). Muitas vezes os bancos e as instituições financeiras criam sistemas de amortização específicos, não-convencionais, adequados a determinadas situações ou características do mercado ou dos clientes.

Para melhor compreensão dos termos utilizados em empréstimos e amortizações, apresentaremos a seguir as definições de alguns destes termos:

- Mutuante ou credor: aquele que dispõe do dinheiro e concede o empréstimo.
- Mutuário ou devedor: aquele que recebe o empréstimo.
- Taxa de juros: é a taxa contratada entre as partes. Pode referir-se ao custo efetivo do empréstimo ou não, dependendo das condições adotadas, e é sempre calculada sobre o saldo devedor.
- IOF: Imposto sobre Operações Financeiras.
- IOC: Imposto sobre Operações de Crédito.
- Crédito: Transação comercial em que um comprador recebe imediatamente um bem ou serviço adquirido, mas só fará o pagamento depois de algum tempo determinado. Essa transação pode também envolver apenas dinheiro. O crédito inclui duas noções fundamentais: confiança, expressa na promessa de pagamento, e tempo entre a aquisição e a liquidação da dívida.
- Prazo de utilização: corresponde ao intervalo de tempo durante o qual o empréstimo é transferido do credor para o devedor. Caso seja em uma parcela, este

prazo é dito unitário.

- Prazo de carência: corresponde ao período compreendido entre o prazo de utilização e o pagamento da primeira amortização. Caso as amortizações forem antecipadas, a primeira amortização acontecerá exatamente na data final de carência; no entanto, se as amortizações forem postecipadas, temos sempre mais um intervalo, que é característica das amortizações postecipadas. Durante o prazo de carência, portanto, o tomador do empréstimo pode pagar os juros, quando assim estiver combinado. Considera-se que existe carência quando este prazo é diferente ao período de amortização das parcelas. É possível também que as partes concordem em que os juros devidos no prazo de carência sejam capitalizados e pagos posteriormente, juntamente com o principal, ou numa só parcela na primeira amortização.
- Parcelas de amortização: correspondem às parcelas de devolução do principal, ou seja, do capital emprestado.
- Prazo de amortização: é o intervalo de tempo durante o qual são pagas as amortizações.
- Prestação: é o soma da amortização, juros e outros encargos, pago em dado período.
- Planilha: é um quadro, padronizado ou não, onde são colocados os valores referentes ao empréstimo, ou seja, o cronograma dos valores de recebimento ou de desembolso.
- Prazo total do financiamento: é a soma do prazo de carência com o prazo de amortização.
- Saldo devedor: é o valor do empréstimo a pagar ou receber em determinado momento. É o resultado do saldo anterior (menos) o valor da amortização ou, durante a carência, o saldo anterior + (mais) os juros não pagos.
- Período de amortização: é o intervalo de tempo existente entre duas amortizações sucessivas.

8.1 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (TABELA PRICE)

A Tabela Price, ou Sistema Francês de Amortização conforme [2], [1] e [3], é amplamente utilizada em todo o mundo ocidental por ser o único sistema que permite o pagamento em parcelas iguais, periódicas e sucessivas.

Embora a Tabela seja também muito utilizada no Brasil pelo mercado e segmentos financeiros, seu uso tem sido contestado perante a justiça brasileira, uma vez que a legislação brasileira permite o uso de juros compostos somente em determinadas operações que possuam previsão legal. Como os juros incidem sobre o saldo devedor que, por sua vez, decresce à medida que as prestações são pagas, eles são decrescentes e,

consequentemente, as amortizações do principal são crescentes.

O Sistema ou Tabela Price tem esse nome em homenagem ao economista inglês Richard Price, o qual incorporou a teoria do juro composto às amortizações de empréstimos, no século XVIII. Basicamente a Tabela Price é um caso particular do Sistema de Amortização Francês, em que a taxa de juros é dada em termos nominais (na prática é dada em termos anuais) e as prestações têm período menor que aquele a que se refere a taxa de juros (em geral, as amortizações são pagas em base mensal). Nesse sistema, o cálculo das prestações é feito usando-se a taxa proporcional ao período a que se refere a prestação, calculada a partir da taxa nominal.

Podemos representar o sistema através do seguinte gráfico:

No cálculo dos diversos parâmetros que compõe o sistema, iremos considerar a existência de um mercado de capitais perfeito, em que somente há uma taxa i para os financiamentos e para os excedentes de poupança postos à disposição dos ofertantes de recursos. Desse modo, admitindo o fluxo de caixa a seguir para um valor financiado P e as correspondentes n parcelas de pagamento M , nesse sistema teremos:

- Valor das prestações no período t (PMT):

$$PMT = P \cdot \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (8-1)$$

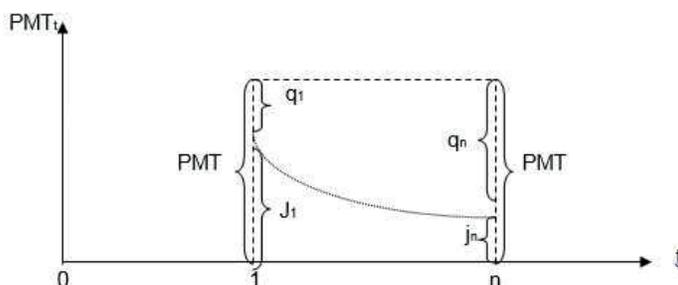


Figura 8.1: Sistema de Amortização Price

- Saldo devedor no período t (SD_t):

$$SD_t = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^{n-t} - 1}{i(1+i)^{n-t}} \right] \quad (8-2)$$

- Juros no período t (J_t):

$$J_t = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^{n-t+1} - 1}{(1+i)^{n-t+1}} \right] \quad (8-3)$$

- Amortização (Q_t):

$$Q_t = PMT - J_t \quad (8-4)$$

Exemplo 35 Um financiamento de R\$ 120.000,00 é solicitado pela tabela Price para ser amortizado durante 18 meses, sendo os 13 primeiros meses de carência, à taxa de 168% a.a. (nominal). Sabendo que as prestações são mensais antecipadas e que são pagos juros no período de carência, elaborar a planilha de desembolso para o financiamento.

Resolução:

$$P = R\$120.000,00$$

$n = 6$ prestações mensais antecipadas

$k = 13$ meses de carência

$i = 168\%$ a.a. cap. mensalmente, então

$$i = 168/12 = 14\% a.m.$$

São pagos juros no período de carência.

$$PMT = P \cdot \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] = 120000 \left[\frac{0,14(1+0,14)^6}{(1+0,14)^6 - 1} \right] = R\$30.858,40$$

$$Q_t = PMT - J_t$$

$$J_t = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^{n-t+1} - 1}{(1+i)^{n-t+1}} \right] = 30858,90 \left[\frac{(1+0,14)^{6-1+1} - 1}{(1+0,14)^{6-1+1}} \right] = R\$16.800,00$$

$$SD_t = PMT \cdot \left[\frac{(1+i)^{n-t} - 1}{i(1+i)^{n-t}} \right] = 30858,90 \left[\frac{(1+0,14)^{6-1} - 1}{0,14(1+0,14)^{6-1}} \right] = R\$105.941,00$$

Mê (t)	Saldo Devedor	Amortização $Q_t = PMT - J_t$	Juros	Prestações
0	120.000,00	-	-	-
1	120.000,00	-	16.800,00	16.800,00
2	120.000,00	-	16.800,00	16.800,00
3	120.000,00	-	16.800,00	16.800,00
4	120.000,00	-	16.800,00	16.800,00
5	120.000,00	-	16.800,00	16.800,00
6	120.000,00	-	16.800,00	16.800,00
7	120.000,00	-	16.800,00	16.800,00
8	120.000,00	-	16.800,00	16.800,00
9	120.000,00	-	16.800,00	16.800,00
10	120.000,00	-	16.800,00	16.800,00
11	120.000,00	-	16.800,00	16.800,00
12	120.000,00	-	16.800,00	16.800,00
13	105.941,00	14.058,90	16.800,00	30.858,90
14	89.913,95	16.027,15	14.831,75	30.858,90
15	71.643,00	18.270,95	12.587,95	30.858,90
16	50.814,12	20.828,88	10.030,02	30.858,90
17	27.069,20	23.744,92	7.113,98	30.858,90
18	0,00	27.069,21	3.789,69	30.858,90

8.2 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

Pelo SAC em [2], o principal é reembolsado em quotas de amortização iguais. Dessa maneira, nesse sistema as prestações são decrescentes, já que os juros diminuem a cada prestação. A amortização é calculada dividindo-se o valor do principal pelo número de períodos de pagamento. Esse tipo de sistema às vezes é usado pelo Sistema Financeiro de Habitação (SFH), pelos bancos comerciais em seus financiamentos imobiliários e também, em certos casos, em empréstimos às empresas privadas através de entidades governamentais.

Representação gráfica:

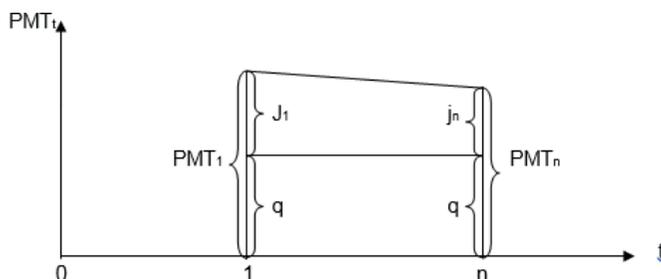


Figura 8.2: Sistema de Amortização SAC

Analisando o gráfico podemos concluir que: $q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_n = q$

Logo:

$$P = \sum_{t=1}^n q = nq$$

Nesse sistema teremos o seguinte:

1. Amortização: As quotas de amortização são constantes e calculadas dividindo-se o valor principal inicial pelo número de períodos de pagamento:

$$P = nq \implies q = \frac{P}{n} \quad (8-5)$$

2. Saldo devedor: O saldo devedor em um determinado período é igual ao principal inicial menos a soma das amortizações já pagas:

$$SD_t = P - tq \implies SD_t = P \left(1 - \frac{t}{n}\right) \quad (8-6)$$

3. Juros: Os juros em t são calculados sobre o saldo devedor em $t - 1$:

$$J_t = SD_{t-1} \quad (8-7)$$

Substituindo as expressões, simplificando e destacando J_t :

$$J_t = i \cdot P \left[1 - \frac{(t-1)}{n}\right] \quad (8-8)$$

4. Valor das prestações no período t : Os juros em t são calculados sobre o saldo devedor em $t - 1$:

$$PMT_t = q_t + J_t \quad (8-9)$$

Substituindo q_t e J_t na equação... e simplificando, tem-se:

$$PMT_t = \frac{P}{n} \cdot [1 + i(n - t + 1)] \quad (8-10)$$

Exemplo 36 *Elaborar a planilha de amortização para o seguinte financiamento:*

- Valor do financiamento de R\$ 200.000,00
- Reembolso em quatro meses pelo sistema SAC
- Taxa de juros efetiva de 10% a.m.

Resolução:

Cálculo das amortizações:

$$q = \frac{P}{n} = \frac{200000}{4} = 50.000$$

Mês (t)	Saldo Devedor $SD_t = P - tq$	Amortização (q)	Juros $J_t = iSD_{t-1}$	Prestações $PMT_t =$
0	200.000,00	-	-	-
1	150.000,00	50.000,00	20.000,00	70.000,00
2	100.000,00	50.000,00	15.000,00	65.000,00
3	50.000,00	50.000,00	10.000,00	60.000,00
4	-	50.000,00	5.000,00	55.000,00

Exemplo 37 Um empréstimo de R\$ 200.000,00, contratado a juros efetivos de 10% a.m., será pago em três prestações mensais com carência de três meses. Construir a planilha de amortização no sistema SAC.

Resolução: Durante a carência os juros são capitalizados e incorporados ao principal. Logo, a amortização deve ser calculada com base no financiamento capitalizado por dois meses ($k - 1$ meses, onde $k = 3$).

Cálculo das amortizações:

$$q = \frac{P}{n} \cdot (1 + i)^{k-1} = \frac{200000}{3} \cdot (1 + 0,1)^{3-1} = 80.666,67$$

Mês (t)	Saldo Devedor $SD_t = P - tq$	Amortização (q)	Juros $J_t = iSD_{t-1}$	Prestações $PMT_t =$
0	200.000,00	-	-	-
1	220.000,00	-	20.000,00	-
2	242.000,00	-	22.000,00	-
3	161.333,33	80.666,67	24.200,00	104.866,67
4	80.666,67	80.666,67	16.133,33	96.800,00
5	-	80.666,67	8.066,67	88.733,33

8.3 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTA (SAM)

No Sistema de Amortização Mista, conforme a própria denominação, é um misto do Sistema de Amortização Constante (SAC) com o Sistema Francês. Esse misto dos dois sistemas se caracteriza pelo fato de a prestação ser igual à média aritmética entre as prestações dos dois sistemas.

Sendo as prestações do SAM as médias aritméticas, respectivas, dos dois sistemas, SAC e Price, os juros também serão as médias aritméticas dos juros correspondentes dos dois sistemas, a cota de amortização serão as médias aritméticas correspondentes e o

saldo, bem como o saldo devedor.

Podemos então definir o cálculo da seguinte forma:

$$P_{SAM} = \frac{P_{PRICE} + P_{SAM}}{2} \quad (8-11)$$

Exemplo 38 Na compra de um sítio, Carmelita quer financiar a importância de R\$25.000,00 em uma instituição financeira que cobra juros compostos de 5% ao mês. Esse empréstimo será amortizado pelo sistema SAM, em 5 prestações mensais e consecutivas, vencendo a primeira um mês após a compra. Elaborar a planilha de financiamento.

Resolução:

Como o sistema SAM depende dos sistemas SAC e Price, vamos calcular o valor das prestações pelo sistema SAC:

- Amortização e Juros:

$$q = \frac{25000}{5} = 5000$$

$$J_t = i.P \left(1 - \frac{(t-1)}{n} \right)$$

$$J_t = 0,05.25000 \left(1 - \frac{(1-1)}{5} \right)$$

$$J_t = 0,05.25000 = 1250$$

- Primeira prestação no SAC:

$$PMT_1 = q_1 + J_1 = 5000 + 1250 = 6250$$

- Saldo Devedor (SD):

$$SD = P - q.1 = 25000 - 5000 = 20000$$

- Segunda prestação no SAC:

Juros

$$J = 20000.0,05 = 1000$$

$$PMT = 5000 + 1000 = 6000$$

$$SD = 20000 - 5000 = 15000$$

Já encontradas as duas primeiras prestações no SAC, iremos agora calcular as duas primeiras prestações no Price. Como elas serão iguais, basta calcular uma.

Cálculo das prestações:

$$PMT = P \cdot \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$PMT = 25000 \cdot \left[\frac{i(1+0,05)^5}{(1+0,05)^5 - 1} \right]$$

$$PMT = 25000 \cdot 0,23097 = 5774,25$$

Calcularemos agora as duas primeiras prestações no sistema SAM:

- Primeira prestação:

$$PMT_{SAM} = \frac{PMT_{SAC} + PMT_{Price}}{2}$$

$$PMT_{SAM} = \frac{6250 + 5774,25}{2}$$

$$PMT_{SAM} = 6012,13$$

- Amortização:

$$PMT = q + J$$

$$6012,13 = q + 1250$$

$$q = 4762,13$$

- Saldo devedor:

$$SD = P - q = 25000 - 4762,13 = 20237,87$$

- Segunda Prestação:

Já calculado o saldo devedor ao final da primeira prestação, podemos calcular a segunda prestação e o juro correspondente:

$$PMT_{SAM} = \frac{PMT_{SAC} + PMT_{Price}}{2}$$

$$PMT_{SAM} = \frac{6000 + 5774,25}{2}$$

$$PMT_{SAM} = 5887,13$$

$$J = 20237,88 \cdot 0,05 = 1011,89$$

- Amortização correspondente a segunda prestação:

$$q = PMT - J = 5887,13 - 1011,89 = 4875,24$$

- Saldo devedor:

$$SD = P - q = 20237,88 - 4875,24 = 15362,63$$

Para determinar a terceira, quarta e quinta prestações, devemos, inicialmente, calculá-las nos dois sistemas, SAC e Price, e depois proceder de forma análoga. Assim, a tabela do financiamento ficaria:

n	Juros	Amortização	Prestação	Saldo devedor
0	-	-	-	25.000,00
1	1.250,00	4.762,13	6.012,13	20.237,88
2	1.011,89	4.875,23	5.887,13	15.362,64
3	768,13	4.993,99	5.762,13	10.368,65
4	518,43	5.118,69	5.637,13	5.249,96
5	262,50	5.249,63	5.512,13	0
Total	3.810,96	24.999,67	28.810,63	-

Observe que os valores são aproximados.

ENCONTRANDO TAXAS ATRAVÉS DO MÉTODO DE APROXIMAÇÃO DE RAÍZES

9.1 MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO DE RAÍZES

Segundo [8], as raízes de polinômios de grau 2 foram expressas em função dos coeficientes há muito tempo atrás. Nesse tempo foram obtidas fórmulas para exprimir, mediante radicais, as raízes dos polinômios de terceiro e quarto graus em função dos coeficientes, mas sendo as mesmas complicadas demais para serem utilizadas em sistema computacional. Os métodos utilizados atualmente para determinar uma raiz do polinômio p localizado no intervalo $[a, b]$, sabendo que $p(a)$ e $p(b)$ possuem sinais opostos não se baseiam em fórmulas fechadas, como as obtidas para equações de grau ≤ 4 . Esses métodos são baseados em algoritmos aproximativos, que mostram o passo a passo de como obter uma sequência de número $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tais que os valores de $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n), \dots$ estão cada vez mais próximos de zero. Dentre os métodos podemos destacar:

- Método da Bissecção;
- Método do Ponto Fixo (MPF);
- Método da Secante;
- Método de Newton-Raphson.

Daremos agora ênfase ao método mais prático e preciso, que é o Método de Newton-Raphson.

9.2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Um algoritmo extremamente eficiente para obter a raiz de um polinômio $p(x) = 0$ é o Método de Newton. Conforme [8], o método diz que, se x_1 é um valor próximo de uma raiz, a sequência $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ de números reais, tais que os valores $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n), \dots$ estão cada vez mais próximos de zero. Esse método tenta garantir a aceleração do Método do Ponto Fixo escolhendo uma função de iteração $\phi(x)$, tal que $\phi'(x) = 0$. Para isso, usaremos a equação abaixo:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9-1)$$

O qual é denominado Método de Newton. Na equação (9-1), o denominador $f'(x_k)$ representa a derivada do polinômio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

A qual é, por definição:

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

O método iterativo pára quando:

$$\left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}} \right| < \epsilon$$

sendo ϵ um valor pré-estabelecido para a precisão.

9.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Em algumas resoluções de exercícios sobre Matemática financeira chega-se a um ponto, no caso sobre equivalência de taxas, em que a calculadora científica (virtual) do computador apaga por falta de energia; ou então a calculadora científica ou financeira (real) em um dado momento, de repente descarregam-se. É nesse instante que o método de Newton é essencial na continuação da resolução do problema. Veremos agora exemplos de aplicações do método:

Exemplo 39 Se a taxa de juros, de uma aplicação financeira, foi de 13,14% em cinco meses, qual foi a taxa equivalente mensal?

Resolução:

Podemos resolver através de duas equações:

$$i_n = \sqrt[n]{1+i} - 1 \quad (9-2)$$

ou

$$i = (1 + in)^{n-1} \quad (9-3)$$

Onde: in = taxa correspondente ao menor período

i = taxa correspondente ao maior período

n = número de vezes em que o menor período está contido no maior

Utilizando a equação (9-2):

O maior período da taxa é 5 meses, logo $i = 13,14\%$ em 5 meses;

O menor período da taxa é mês, logo a taxa procurada é in ;

O menor período está contido 5 vezes no maior, logo $n = 5$.

Dados: $i = 13,14\%$, $n = 5$ $i_5 = ?$

$$x = \sqrt[5]{1,1314}$$

Elevando a quinta potência:

$$(x)^5 = (\sqrt[5]{1,1314})^5$$

$$x^5 = \left((1,1314)^{1/5} \right)^5$$

$$x^5 = 1,1314$$

$$x^5 - 1,1314 = 0$$

$$f(x) = x^5 - 1,1314$$

Calculando a derivada:

$$f'(x) = 5x^4 - 0 = 5x^4$$

Qualquer que seja o índice do radicando, sempre vamos ter a equação:

$$f(x) = x^n - \left(1 + \frac{i}{100} \right) \quad (9-4)$$

Utilizando a equação (9-1) vamos seguir os seguintes passos:

1. Divida a taxa pelo valor do expoente (essa é a primeira aproximação da taxa). Divida a taxa aproximada por 100 e some 1. Ao resultado vamos chamar de x_0 ($k = 0$);
2. Substitua o valor de x_0 na equação (9-1). O valor encontrado vamos chamar de y_1 ;
3. Eleve y_1 a n (nesse caso, $n = 5$), subtraia de 1 e multiplique por 100 e compare o valor com a taxa dada no problema. Se achar que a aproximação é boa para as finalidades, então, basta. Caso contrário continue seguindo o item 4;
4. Substitua o valor de y_1 na equação (9-1). o valor encontrado vamos chamar de y_2 . Se a aproximação for boa, pode parar, caso contrário repita o item 4.

Utilizando os passos, resolveremos o problema:

$$1. \frac{13,14\%}{5} = 2,628\% \quad x_0 = 1 + 0,02628 = 1,02628$$

$$2. y_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{(x_0)^5 - 1,1314}{5(x_0)^4} = 1,02628 - \frac{(1,02628)^5 - 1,1314}{5(1,02628)^4} = 1,025$$

$$3. [(1,025)^5 - 1]100 = 13,14\%$$

A taxa mensal equivalente à taxa de 13,14% em cinco meses é:

$$i_5 = (1,025 - 1)100 = 2,5\% \text{ a.m.}$$

Exemplo 40 Uma pessoa tomou um empréstimo de A reais, que acrescenta os juros no total antes de computar o pagamento mensal. Assim, se a taxa mensal de juros, em porcentagem, é i e o empréstimo é pelo prazo de n meses, a quantia total que o tomador concorda em pagar é:

$$C = A + An \frac{i}{100}$$

Isto é dividido por n para dar o total de cada pagamento P , ou seja:

$$P = \frac{C}{n} = A \left(\frac{1}{n} + \frac{i}{100} \right) \quad (9-5)$$

Isto é perfeitamente legal e muito usado em lojas de departamento (chamado de empréstimo com acréscimo). Mas a verdadeira taxa de juros que o tomador está pagando é alguma coisa além de $i\%$, porque ele não conserva o total do empréstimo por todo o período n . Ele está pagando-o de volta com o decorrer do tempo. A verdadeira taxa de juros pode ser encontrada pela determinação de uma raiz x da equação:

$$F(x) = (Ax - P)(1 + x)^n + P = 0 \quad (9-6)$$

Isto fornece a taxa de juros por período de pagamento, que pode ser convertida em taxa anual multiplicando-se a mesma por 12. Seja $A = R\$ 1.000,00$, $n = 24$, $i = 5\% \text{ a.m.} \Rightarrow 60\% \text{ a.a.}$. Determine a verdadeira taxa de juros.

Resolução:

Substituindo os dados na equação (9-5), temos:

$$P = 1000 \left(\frac{1}{24} + \frac{60}{100} \right) = 1000(0,5 + 0,6) = 1000(1,1) = R\$1.100,00$$

Agora, substituindo os valores de A , P e n na equação (9-6), temos:

$$F(x) = (1000x - 1100)(1 + x)^2 + 1100$$

$$10x^3 + 9x^2 - 12x = 0$$

$$x(10x^2 + 9x - 12) = 0$$

Repare que $x = 0$ é uma das raízes da equação. Mas como se trata de taxa de juros, essa raiz é descartada. Vamos tentar resolver com o Algoritmo de Briot-Ruffini associado ao Método de Newton-Raphson.

Pela tabela:

x	0	1	2	...
F(x)	-12	7	46	...

Vemos mudança no sinal de $F(x)$ para $x \in (0, 1)$.

Com uma aproximação inicial de $x_0 = 0,5$ temos:

	10	9	-12
0,5	10	14	-5 = p(5)
0,5	10	19 = p'(5)	

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 0,5 + \frac{5}{19} \approx 0,76$$

	10	9	-12
0,76	10	16,6	0,62 = p(0,76)
0,76	10	24,2 = p'(0,76)	

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = 0,76 + \frac{0,62}{24,2} \approx 0,73$$

	10	9	-12
0,73	10	16,3	-0,1 = p(0,73)
0,73	10	23,6 = p'(0,73)	

$$x_3 = x_2 - \frac{p(x_2)}{p'(x_2)} = 0,73 + \frac{0,1}{23,6} \approx 0,73$$

Então, $x \approx 0,73 \Rightarrow 73\%a.a. \Rightarrow 73/12 \Rightarrow 6,08\%a.m.$

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

O surgimento da Matemática Financeira se deu de forma espontânea, pela necessidade de comercializar bens e foi evoluindo gradativamente de acordo com as necessidades de operações financeiras. Pode-se dizer que o fato de não se ter muitos registros sobre a Matemática Financeira se deu por conta de que a mesma se desenvolveu juntamente com o comércio e passou a fazer parte da vida das pessoas.

No cotidiano das pessoas, podemos encontrar vários exemplos de aplicações da Matemática Financeira, como fazer compras à vista ou à prazo, realizar empréstimos, movimentar contas bancárias e principalmente no financiamento habitacional, o qual faz parte da vida de milhões de brasileiros. No entanto, essas situações são tão normais, que acabam passando despercebidas pelas pessoas, que em sua maioria não se preocupam em parar para analisar ou calcular a negociação que está fazendo, para saber se lhe é conveniente ou não. Apesar de estar incluída no currículo escolar, a Matemática Financeira não possui grande destaque entre os conteúdos de ensino médio, cabendo então ao professor ser um mediador colocando para os alunos situações problemas no qual os mesmos se identificam com o que ocorre na realidade de cada um e da atual situação que se encontra o nosso país, ajudando-o a construir um conhecimento mais amplo sobre os termos financeiros.

Quando o professor relaciona o ensino da matemática financeira com o cotidiano do aluno, não se espera que o mesmo seja um mestre das finanças, mas espera-se que ele tenha condições de analisar situações que envolvem conhecimentos financeiros para saber o que lhe é conveniente ou não enquanto consumidor, comerciante ou até mesmo pai de família. A relação desses conceitos com o cotidiano do aluno acaba dando praticidade a uma disciplina considerada por muitos como teórica, tornando-a em algo mais concreto e pouco abstrato, onde o aluno tem a oportunidade de verificar a aplicabilidade da matemática em sua vida.

No ensino médio, os alunos estudam conceitos de juros (simples e compostos), taxas de juros, empréstimos, descontos e acréscimos. Esses temas constituem um excelente instrumento de contextualização da matemática, pois se relacionam diretamente com o contexto social em que o aluno está inserido, fazendo com que ele veja algo mais concreto em seu dia-a-dia. Inicialmente ao introduzir o conteúdo de Matemática Financeira, pode ser colocado para o aluno exemplos do cotidiano como, reajustes de preços, empréstimos, compras à vista ou à prazo, rendimentos em aplicações e no financiamento habitacional. É importante o aluno ter consciência dos falsos anúncios de produtos, bem como as enganações ocultas por traz de tentadoras ofertas para facilitar a compra de eletrodomésticos caros e até mesmo carros zeros, para que não caia nessas armadilhas e

ainda conscientizem seus pais ou responsáveis, pois na maioria das vezes a compra fácil se torna dívida eterna devido aos juros abusivos cobrados pelas empresas de créditos ou bancos.

O aluno deve saber exercer a cidadania de forma correta, ou seja, saber contar, analisar, comparar, calcular, resolver problemas, raciocinar logicamente, argumentar e interpretar matematicamente certas situações. Devido ao comportamento consumista da população, a escola assume o papel de educar para o exercício da cidadania, resgatando a interdisciplinaridade e contextualização. Um desses papéis é abordar a matemática financeira, de modo que se torne interessante para o aluno, através de jornais, revistas, panfletos, talão de conta de água ou energia, extrato bancário e planilhas do excel.

O professor pode iniciar por exemplo, o conteúdo de juros com uma breve revisão de porcentagem através de uma visita a supermercados a fim de descobrir qual oferece menor preço em determinados produtos e fazer um quadro comparativo a outros em termos percentuais. Os alunos podem também realizar uma visita a garagens de revendas de automóveis a fim de saber a relação entre preço de custo, preço de venda e lucro que o dono obtém ao revender um automóvel, descobrindo o percentual de lucro em diferentes negociações. Outro exemplo bem claro em [11] é o de mostrar as diferentes taxas de juros simples e compostos nas diversas situações bancárias, como empréstimos pessoais ou rendimentos de poupanças, que irá auxiliar bastante o aluno a administrar melhor seu dinheiro. Além disso tudo, é muito importante fazer uma comparação entre juros simples e progressões aritméticas e juros compostos e progressões geométricas para que o aluno perceba que não se trata de um conteúdo isolado, mas sim de grande importância dentre os demais.

Podemos citar uma interdisciplinaridade enorme ao relacionar juros com progressões, pois não há exemplo maior do que o uso de progressões no estudo de juros simples e composto. Veremos mais detalhes a seguir.

Quando se trata de capitalização a juros simples, os juros referentes a um único período, em qualquer época são, determinados sobre o capital inicial ou valor presente P .

Aplicando a fórmula dos juros simples, para 1 (um) período, obtemos: $J = Pin = Pi1 = Pi$. Isto significa que os seus valores serão sempre iguais. Seja M o montante para um determinado período de aplicação, a sequência $(M_0, M_1, M_2, M_3, \dots, M_n)$ que representa os montantes formados, a partir da época 0 (o momento do empréstimo), pode ser obtida, a partir do capital inicial, somando-se sempre a mesma parcela (os juros de cada período unitário), caracterizando dessa forma uma P.A. (progressão aritmética) de primeiro termo $a_1 = P$ e razão $r = Pi$. Podemos classificar esse tipo de P.A. como crescente, uma vez que os valores do capital inicial e da taxa são sempre positivos.

Exemplo 41 Seja a aplicação a juros simples do capital de R\$ 800, 00, à taxa de 2%a.m., durante 6 meses. Elaborar a sequência dos montantes formados nesse período.

Resolução:

Dados: $P = R\$ 800,00$, $i = 2\%a.m.$, $n = 6$ Os juros para um período unitário é dado por:

$$J = Pi = 800 \times 0,02 = 16$$

Logo, a sequência será formada somando-se 16 a cada termo anterior, a partir do primeiro, ou seja, ao capital inicial. Dessa forma a sequência será a seguinte:

$$(800, 816, 832, 848, 864, 880)$$

A fim de mostrar a relação entre os termos de uma P.A. e a sequência dos montantes para um número n de períodos, será apresentado uma tabela abaixo relacionada com o exemplo anterior:

Observe que o n -ésimo termo da sequência dos montantes equivale ao $(n + 1)$ -ésimo termo da P.A..

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	\dots	a_{n+1}
$800 = 800 + 0 \cdot 16$	$800 = 800 + 1 \cdot 16$	$800 = 800 + 2 \cdot 16$	$800 = 800 + 3 \cdot 16$	$800 = 800 + 4 \cdot 16$	\dots	$800 = 800 + 16n$
$P = M_0$	$P = M_1$	$P = M_2$	$P = M_3$	$P = M_4$	\dots	$P = M_n$

Tabela 10.1: Relação entre P.A. e montante nos juros simples.

Aplicando-se a fórmula do termo geral da P.A., temos:

$$M_n = a_{n+1} = a_1 + [(n + 1) - 1]r = a_1 + nr$$

Substituindo a_1 por P e r por Pi na fórmula anterior, obtemos:

$$M_n = P + Pin = P(1 + in)$$

Enfim chegamos na fórmula comumente usada na Matemática Financeira para o cálculo do montante em juros simples.

Se tratando agora de capitalização a juros compostos, os juros para um único período, em uma época qualquer, são calculados sobre o montante do período imediatamente anterior à época considerada. Sendo assim, os juros relativos ao terceiro período é obtido multiplicando-se o montante M_2 do segundo período por i . Mas, como o montante M_3 relativo ao terceiro período é a soma do montante do período anterior com os juros relativos a esse período, temos:

$$M_3 = M_2 + M_2 \times i = M_2(1 + i)$$

Generalizando a situação, para um período n qualquer, obtemos:

$$M_n = M_{n-1}(1 + i)$$

Dizemos então que a sequência $(M_0, M_1, M_2, M_3, \dots, M_n)$ dos montantes no

regime de juros compostos, é obtida a partir do capital inicial P multiplicando-se sempre $(1 + i)$ ao montante do período anterior, caracterizando uma progressão geométrica, de primeiro termo $a_1 = P$ e razão $q = 1 + i$. Esse tipo de progressão também será sempre crescente, uma vez que a razão é sempre maior que 1 (um) em virtude de i ser sempre positivo.

Exemplo 42 Escrever a sequência dos montantes M_n para uma aplicação de R\$ 500,00 a juros compostos de 3% a.m. durante 5 meses.

Resolução: Dados: $P = R\$ 500,00$, $i = 3\%a.m.$, $1 + i = 1,03$, $n = 5$

A sequência que se obtém, com os valores aproximados, é a seguinte:

(500; 515; 530,45; 546,36; 562,75)

A tabela seguinte faz a correlação entre a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica e esta sequência:

a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{n+1}
$500 = 500 \cdot 1,03^0$	$515 = 500 \cdot 1,03^1$	$530,45 = 500 \cdot 1,03^2$	$546,36 = 500 \cdot 1,03^3$...	$500 \cdot 1,03^n$
$P = M_0$	$P = M_1$	$P = M_2$	$P = M_3$...	$P = M_n$

Tabela 10.2: Relação entre P.G. e montante nos juros compostos.

Aqui também ocorre a relação $M_n = a_{n+1}$. Usando-se a fórmula do termo geral da P.G., temos:

$$M_n = a_{n+1} = a_1 \cdot q^{(n+1)-1} = a_1 \cdot q^n$$

Por outro lado, substituindo a_1 por P e q por $1 + i$ na fórmula anterior, obtemos:

$$M_n = P(1 + i)^n$$

Observe que esta é a fórmula comumente usada para se calcular o montante no regime de capitalização a juros compostos.

Mais o principal exemplo de uma aplicação é o do financiamento habitacional onde está presente vários termos da matemática financeira, como taxas diferenciadas para realização da operação, assim como abatimentos utilizando o FGTS tanto no início do financiamento por meio de uma entrada, mas no meio através de abatimentos em parcelas ou no final com desconto sobre o saldo devedor. Além disso, pode ser utilizado conceitos iniciais sobre sistemas de amortização que é utilizado no financiamento para que o aluno tenha a curiosidade de estudar mais sobre estes conceitos.

Enfim, a contextualização da matemática financeira é de suma importância na vida do aluno, pois nesse período de turbulência que vivemos no nosso país, onde os altos

índices de juros sobre diversos produtos e a incerteza de compras e investimentos se torna cada vez mais perigoso na vida de todos, é muito importante que todos saibam onde investir e quando realizar compras para que não acabem como mais um inadimplente no país.

Veremos agora exemplos de aplicações no cotidiano, e que podemos utilizar no ensino da matemática financeira.

Exemplo 43 Muitas lojas com a intenção de mascarar os juros que cobram pela venda de mercadorias vendidas a prazo, utiliza o artifício de embutir os juros no valor da mercadoria, e dizendo conceder descontos nas vendas a vista acaba conquistando seus clientes.

Resolução:

Em uma loja de eletrodomésticos, um secador de cabelos está em oferta. No anúncio da loja consta o seguinte: “Na compra de um secador de cabelos à vista, você ganha 10% de desconto”. Sabendo que o valor normal, sem promoção é de R\$ 100,00, à vista fica R\$ 90,00. Na realidade o valor pago à vista é o preço real do secador, e que o desconto concedido nada mais é do que juros embutidos no valor real da mercadoria.

Se questionarmos pessoas sobre o valor da taxa de juros cobrados pela loja do exemplo, certamente a maior parte diria que a taxa de juros cobrados é de 10%. Mas, fazendo alguns cálculos veremos que não é bem assim.

Dinheiro	Porcentagem (%)
90,00	100
100,00	x

Através da tabela identificamos que o valor pago à vista, é o valor correspondente ao preço real total da mercadoria, por isso corresponde a 100%. Agora podemos descobrir a taxa de juros embutida através da regra de três, que é bem simples para alunos de ensino médio.

$$\frac{90}{100} = \frac{100}{x}$$

$$90x = 10000$$

$$x = 111,11\%\dots$$

O que corresponde a uma taxa de juros de aproximadamente 11,11%....

Poderíamos também utilizar a diferença entre o preço a prazo e o preço à vista, no lugar do valor à prazo, assim o resultado encontrado para x já seria a própria taxa de juros embutida.

Dinheiro	Porcentagem (%)
90	100
100 - 90	x

$$\frac{90}{10} = \frac{100}{x}$$

$$90x = 1000$$

$$x = 11,11...\%$$

Ao usarmos a regra de três para calcular a taxa de juros embutida, o preço à vista deve ser sempre correspondente a 100%.

Exemplo 44 De um modo geral, são raras as pessoas com idade superior a sessenta anos que nunca tenha contraído um empréstimo, em um momento ou outro, é necessário efetuar um empréstimo. Por isso, devemos estar atentos em relação aos juros quando formos contrair um empréstimo, tendo em vista que os juros relacionados a empréstimos, normalmente são calculados no regime de juros compostos, e que a maioria das pessoas que contraem um empréstimo tende a calcular sua dívida em regime de juros simples. Por isso, muita gente na hora de acertar seus débitos com as instituições financeiras, se espanta com o valor da dívida.

Devido a gastos imprevistos com saúde, as despesas ultrapassaram os ganhos na casa de Adriana, e ela não teve outra opção, a única solução encontrada por ela foi contrair um empréstimo. Ela fez um empréstimo de R\$ 1000, 00 a uma taxa de juros de 5% ao mês para pagar em um único pagamento seis meses após o empréstimo, quando Adriana foi saldar sua dívida se espantou com o valor que o funcionário da instituição financeira disse a ela, pois havia feito os cálculos em sua casa e o resultado obtido por ela era diferente do resultado do funcionário. Vejamos como cada um deles fez os cálculos.

$$1^\circ \text{ mês } _ 1000 + 0,05 \times 1000 = 1000 + 50 = 1050$$

$$2^\circ \text{ mês } _ 1050 + 0,05 \times 1000 = 1050 + 50 = 1100$$

$$3^\circ \text{ mês } _ 1100 + 0,05 \times 1000 = 1100 + 50 = 1150$$

$$4^\circ \text{ mês } _ 1150 + 0,05 \times 1000 = 1150 + 50 = 1200$$

$$5^\circ \text{ mês } _ 1200 + 0,05 \times 1000 = 1200 + 50 = 1250$$

$$6^\circ \text{ mês } _ 1250 + 0,05 \times 1000 = 1250 + 50 = 1300$$

De acordo com os cálculos realizados por Adriana, o total que ela teria que pagar pelo empréstimo seria R\$1300, 00. Mas não foi bem isso que aconteceu com os cálculos do funcionário.

Cálculos feitos pelo funcionário:

$$1^{\circ} \text{ mês } _ 1000 + 0,05 \times 1000 = 1000 + 50 = 1050$$

$$2^{\circ} \text{ mês } _ 1050 + 0,05 \times 1050 = 1050 + 52,50 = 1102,50$$

$$3^{\circ} \text{ mês } _ 1102,50 + 0,05 \times 1102,50 = 1102,50 + 55,12 = 1157,62$$

$$4^{\circ} \text{ mês } _ 1157,62 + 0,05 \times 1157,62 = 1157,62 + 57,88 = 1215,50$$

$$5^{\circ} \text{ mês } _ 1215,50 + 0,05 \times 1215,50 = 1215,50 + 60,78 = 1276,28$$

$$6^{\circ} \text{ mês } _ 1276,28 + 0,05 \times 1276,28 = 1276,28 + 63,80 = 1340,08$$

De acordo com os cálculos do funcionário, Adriana teria que pagar o total de R\$1340,08. Isso ocorre por ela ter feito os cálculos no regime de juros simples, e ele no regime de juros compostos. Então, ao contrair um empréstimo devemos esclarecer todas as dúvidas, para que não haja mal-entendido como esse do exemplo. Vale ressaltar que em alguns empréstimos bancários, além dos juros referentes ao empréstimo, são cobradas algumas tarifas bancárias. Como por exemplo, a pessoa toma um empréstimo de R\$10.000,00, mas R\$400,00 fica retido no banco para pagamento de outras tarifas bancárias, sendo assim o valor que a pessoa realmente tomou emprestado foi de R\$9600,00 e o valor que será calculado com os juros será de R\$10.000,00. Portanto, o empréstimo retirado pela pessoa não é o mesmo efetuado junto ao banco.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pode-se observar através desse trabalho que mais uma vez a Matemática como um todo, se mostra importante na medida em que a sociedade necessita e se utiliza dos seus conhecimentos, que por sua vez são essenciais para a inserção das pessoas como cidadãos no mundo do trabalho, da cultura e das relações sociais. Através da elaboração deste trabalho, espera-se que o mesmo possa ser de grande utilidade, principalmente para os professores do Ensino Médio, pois acho que a aprendizagem da Matemática Financeira não pode ser tratada sem a devida significação ou deixada de lado, pois o estudante que possui conhecimentos financeiros, poderá ser no futuro um consumidor mais prudente.

É importante esclarecer que em nenhum momento, houve a intensão de mostrar que a Matemática Financeira no Ensino Médio seja aprofundada similarmente como nos cursos de graduação, tais como: Administração, Contabilidade e Economia, e sim o desejo de que o conteúdo seja ensinado o bastante para que no futuro tanto os bancos quanto as instituições financeiras não consigam mais induzir o consumidor com propagandas que o levam a pagar juros altíssimos.

Em relação aos conceitos e fórmulas, houve a oportunidade de ver as demonstrações das mesmas, onde por si própria nos passa um melhor entendimento sobre sua validade. No que diz respeito às aplicações em nosso cotidiano, pudemos perceber a riqueza dos conceitos de progressões, e ao mesmo tempo, a flexibilidade dos mesmos em diferentes situações e assim validando uma das características principais para que se assegure a aprendizagem, pois o real interesse do aluno em aprender algo, é quando aquilo serve ou servirá para alguma situação que ele necessitará. Se pudermos assim fazer com que o mesmo construa melhor os conceitos, então vale a pena disponibilizar de um tempo a mais para prepararmos algumas aplicações.

Para que o aluno possa ter uma aprendizagem mais contextualizada, é necessário que os professores utilizem informações desta natureza durante seu processo de ensino, para enfim satisfazer a necessidade de uso imediato e prático dos conteúdos escolares, facilitando a motivação desse aluno e seu processo ensino-aprendizagem.

REVISÃO SOBRE PROGRESSÕES

A.1 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS (PA)

Segundo [10] podemos definir Progressões Aritméticas como sendo uma sequência de números reais ordenada em que a diferença entre um termo qualquer (após o segundo) e o termo antecedente é sempre a mesma (constante). Essa constante é denominada razão da P.A. e indicada por r . Vejamos alguns exemplos:

1. Na P.A. (4, 14, 24, ...) temos $r = 10$.

2. Na P.A. (2, 7/3, 8/3, ...) temos $r = 1/3$.

3. Na P.A. (6", 6, 6, ...) temos $r = 0$.

4. Na P.A. (13, 8, 3, ...) temos $r = -5$.

As Progressões Aritméticas podem ser classificadas de acordo com o sinal da razão, onde:

Quando $r > 0$, classificamos a P.A. em crescente.

Quando $r < 0$, classificamos a P.A. em decrescente.

Quando $r = 0$, classificamos a P.A. em constante.

Em uma P.A., é possível determinar qualquer termo ou a razão ou a quantidade de termos a partir de uma regra geral ou o "termo geral". Escrevendo a sequência:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

em função de a_1 e r temos:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$$

...

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \tag{A-1}$$

Ainda se tratando de uma sequência, podemos determinar a soma de seus termos através de uma equação que foi elaborada por um grande matemático: Carl Friedrich Gauss (1777-1855). A partir de um problema criado por seu professor que consistia em somar os 100 primeiros números naturais, ele desenvolveu uma técnica rápida e eficiente que se tratava de colocar em ordem crescente (1) e decrescente (2) como mostrado abaixo:

1. $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$

2. $S_2 = 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1$

Somando cada parcela de (1) com cada parcela de (2) respeitando a ordem temos:

$$2S = 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101$$

Como temos 100 parcelas, pode-se escrever:

$$2S = 100.101$$

$$2S = 10100$$

$$S = 5050$$

A fim de generalizar, podemos escrever utilizando os termos de uma PA qualquer as mesmas seqüências:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_2 = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1} + \dots + (a_n + a_1))$$

Como temos n parcelas iguais a $(a_1 + a_n)$, temos:

$$2.S = (a_1 + a_n).nS_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} \quad (\text{A-2})$$

A principal relação que podemos destacar entre Progressões Aritméticas e Juros Simples é a de que o saldo ou juros de determinada aplicação cresce constantemente seguindo uma razão conforme taxa de juros.

Exemplo 45 Uma aplicação de R\$ 300, 00 feita em uma caderneta de poupança rende juros de 0, 1% a.m.. Determine os juros recebidos no final de um ano.

Resolução:

Juros no 1º mês: $J = 300.0, 001 = 0, 3$

Juros no 2º mês: $J = 300.0, 001 = 0, 3$

Juros no 3º mês: $J = 300.0, 001 = 0, 3$

...

Juros no 12º mês: $J = 300.0, 001 = 0, 3$

Logo, no final de um ano teremos: $12.0, 3 = 3, 60$ de juros.

Enfim, os juros sempre serão os mesmos. Se colocarmos o capital somado ao juro de cada mês, teremos a seguinte seqüência: (300, 30; 300, 60; 300, 90;...; 303, 60).

Na seqüência os juros de 0,30 centavos correspondem a razão da P.A., conforme dito anteriormente.

A.2 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS (PG)

Seguindo o mesmo raciocínio sobre Progressões Aritméticas, temos que as Progressões Geométricas são sequências no qual o quociente entre cada termo (a partir do segundo) e seu antecedente é sempre o mesmo (constante). Essa constante também é denominada razão da P.G. e indicada por q . Exemplos:

1. Na P.G. (2, 4, 8, ...) temos $q = 2$.
2. Na P.G. (3, -12, 48, ...) temos $q = -4$.
3. Na P.G. (24, 12, 6, ...) temos $q = 1/2$.
4. Na P.G. (11, 11, 11, ...) temos $q = 1$.

De acordo com a razão podemos também classificar as Progressões Geométricas conforme descrito abaixo:

Quando $q > 1$, a P.G. ser crescente.

Quando $q < 1$, a P.G. ser decrescente.

Quando $q = 1$, a P.G. ser constante.

Podemos encontrar um termo qualquer da P.G., a partir do primeiro termo (a_1) e a razão (q). Segundo [12], isso é possível devido a uma lei especial de formação em que:

Seja

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

, uma P.G. de razão q , temos:

$$\frac{a_2}{a_1} = q \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$\frac{a_3}{a_2} = q \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$\frac{a_4}{a_3} = q \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$$\text{De modo geral: } a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{A-3}$$

Essa é a expressão conhecida por termo geral de uma P.G.

Ainda se baseando em [12], podemos encontrar uma expressão que permita calcular a soma finita dos termos de uma P.G. Temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \tag{A-4}$$

Multiplicando por q os dois membros da igualdade:

$$q \cdot S_n = q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \dots + a_n \cdot q$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot q \tag{A-5}$$

Fazendo (A-4) - (A-5), temos:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_n \cdot q - a_1$$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, vem:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1$$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot q^n - a_1$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (\text{A-6})$$

As Progressões Geométricas estão diretamente relacionadas com Juros Compostos, onde a razão corresponderá aos juros ganhos ou perdidos em uma aplicação financeira.

Exemplo 46 *Em uma aplicação financeira que rende 2% a.m. foram aplicados R\$3.000,00 durante 1 ano. Determine o rendimento no final da aplicação.*

Resolução:

Juros no 1º mês: $J = 3000 \cdot 0,02 = 60$

Juros no 2º mês: $J = 3060 \cdot 0,02 = 61,2$

Juros no 3º mês: $J = 3121,2 \cdot 0,02 = 62,424$

...

Juros no 12º mês: $J = 3730,12 \cdot 0,02 = 74,6$

No final de 12 meses teremos: $60 + 61,2 + 62,42 + \dots + 74,6 = 804,72$ reais. Se colocarmos os juros em ordem crescente, iremos obter a seguinte sequência:

$$(60; 61,2; 62,42; \dots; 74,6),$$

onde a razão da P.G. corresponde a taxa de juros, ou seja, cada sucessor tem o valor multiplicado por 1,02.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Vieira Sobrinho, José Dutra *Matemática Financeira*, 7. ed. 10. reimpr. Atlas, São Paulo. (2009)

Samanez, Carlos Patrício *Matemática Financeira: aplicações à análise de investimen- tos*, 4. ed. Pearson Prentice Hall, São Paulo. (2007)

Castelo Branco, Anísio Costa *Matemática Financeira Aplicada: método algébrico, HP- 12C, Microsoft Excel*, 2. ed. rev. Cengage Learning, São Paulo. (2008)

Ribeiro, Jackson *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, 2: ensino médio*, Scipi- one, São Paulo. (2010)

Iezzi, Gelson; Hazzan, Samuel *Fundamentos da matemática elementar 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas*, 6. ed. Atual, São Paulo. (1993)

Iezzi, Gelson e Hazzan, Samuel *Fundamentos da matemática elementar 1: Conjuntos e Funções*, 7. ed. Atual, São Paulo. (1993)

lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto; Wagner, Eduardo e Morgado, Augusto César *A matemática do ensino médio - volume 2*, 6. ed. SBM, Rio de Janeiro. (2006)

Lima, Elon Lages *Números e Funções Reais*, Coleção PROFMAT. SBM, Rio de Janeiro. (2013)

Escola Nacional de Seguros. Diretoria de Ensino Técnico *Matemática Financeira*, assessoria técnica de Hugo César Said Amazonas. 3. ed., 1. reip. Funenseg, Rio de Janeiro. (2015)

Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David e Périgo, Roberto *Matemática: volume único*, Atual Editora, São Paulo (2002)

Netto, Scipione Di Pierro; Filho, Sérgio Orsi *QUANTA - Matemática em Fascículos para o Ensino Médio: Fascículo 3*, 1. ed. Editora Saraiva, São Paulo. (2000)

Iezzi, Gelson; Dolce, Osvaldo; Degenszajn, David e Périgo, Roberto *Matemática: Ciência e Aplicações - volume 1*, Atual Editora, São Paulo (2001)

ADRIANO RODRIGUES TEIXEIRA - graduou-se em Matemática - Licenciatura Plena e Bacharelado - pela Universidade Luterana de Ensino Superior - ULBRA, em Itumbiara - GO; Gradou-se em Física – Licenciatura Plena pelo Centro Universitário ETEP; Especializou-se em Matemática Aplicada pela Universidade Federal de Uberlândia - UFU, em Uberlândia - MG, com o trabalho intitulado Equações Diferenciais Ordinárias e Algumas de suas aplicações. Ultimamente foi aluno bolsista da CAPES no programa de Mestrado Profissional e, atualmente, é professor universitário e trabalha no ensino médio na rede estadual de ensino de Itumbiara - GO, onde é concursado. Tem experiência nos níveis de Ensino Fundamental e Médio (16 anos); Ensino Superior (7 anos) e Coordenação na rede estadual de ensino.

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

Conceitos e Aplicações

 www.atenaeditora.com.br

 contato@atenaeditora.com.br

 [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)

 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

 Atena
Editora

Ano 2023

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

Conceitos e Aplicações

 www.atenaeditora.com.br

 contato@atenaeditora.com.br

 [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)

 www.facebook.com/atenaeditora.com.br

 Atena
Editora

Ano 2023