

Ciências exatas e da terra:

teorias e princípios

2

Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua
(ORGANIZADOR)

The background of the cover is a dark gray field filled with a complex, repeating pattern of light gray geometric shapes. These shapes include cubes, hexagons, and other polygons, some of which are rendered in a 3D perspective. Small, light gray arrows are scattered throughout the pattern, pointing in various directions, creating a sense of movement and depth.

Ciências exatas e da terra:

teorias e princípios

2

Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua
(ORGANIZADOR)

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Camila Alves de Cremona

Ellen Andressa Kubisty

Luiza Alves Batista

Nataly Evilin Gayde

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2023 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2023 Os autores

Copyright da edição © 2023 Atena

Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará

Profª Drª Glécilla Colombelli de Souza Nunes – Universidade Estadual de Maringá

Profª Drª Iara Margolis Ribeiro – Universidade Federal de Pernambuco

Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense

Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande

Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª Drª Maria José de Holanda Leite – Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Prof. Dr. Milson dos Santos Barbosa – Universidade Tiradentes

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte

Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Nilzo Ivo Ladwig – Universidade do Extremo Sul Catarinense

Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas

Profª Dr Ramiro Picoli Nippes – Universidade Estadual de Maringá

Profª Drª Regina Célia da Silva Barros Allil – Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí

Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Ciências exatas e da terra: teorias e princípios 2

Diagramação: Luiza Alves Batista
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)	
C569	<p>Ciências exatas e da terra: teorias e princípios 2 / Organizador Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2023.</p> <p>Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-65-258-1537-4 DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.374230208</p> <p>1. Ciências exatas. 2. Ciências da terra. I. Paniagua, Cleiseano Emanuel da Silva (Organizador). II. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDD 509</p>
Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166	

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

O e-book: “Ciências exatas e da terra: teorias e princípios 2” é constituído por seis capítulos de livros que apresentam estudos de aplicação de modelos matemáticos, mudanças climáticas, importância das diferentes fontes de águas para fins potáveis e a presença de contaminantes que podem tanto afetar a qualidade da água, quanto se constituir em um meio no qual contaminantes com propriedades de modificar o sistema endócrino de animais e seres humanos.

O primeiro capítulo apresenta o estudo de modelos matemáticos que regulariza dois sistemas de vigas termoelásticas definidas, conforme: o modelo de Timoshenko e a teoria de Green-Naghdiy do tipo III. Tais modelos se diferenciam por seus termos de acoplamento, como consequência da constitutiva leis consideradas no presente estudo. O capítulo dois se propôs a avaliar a estabilidade e regularidade do sistema constituído pela equação de vidração de terceira ordem de Moore-Gilson- Thompson associada à equação clássica de calor com a lei de Fourier, demonstrou que tais modelos associados ao modelo MGT-Fourier são exponencialmente estáveis e analíticos.


O terceiro capítulo investigou a caracterização e o comportamento de dados da Irradiância Global Horizontal (GHI) e Irradiância Difusa Horizontal (DHI) na cidade de Natal/RN, cujos resultados foram significativos ao se comparar o período de inverno e verão, com valores de 21,7% (GHI) e de 19,1% (DHI). Entretanto, para se identificar os fatores que ocasionaram este comportamento, faz-se necessário investigar a combinação das inúmeras variáveis que envolvem este estudo. O capítulo quatro se constitui em um estudo de revisão da literatura em relação ao tema “Mudanças climáticas”, com ênfase na mitigação e adaptação que se constituem em um conjunto de ações a serem implementadas e desenvolvidas, com o intuito de reduzir a emissão de gases que contribuem para o efeito estufa e a minimização do uso de energia elétrica.

O quinto capítulo avaliou a presença de diferentes classes de esteroides e suas respectivas capacidades de promover alterações nas atividades biológicas de organismos vivos, após entrar em diferentes ecossistemas aquáticos e promover inúmeras alterações nos diferentes organismos, sendo denominados de poluentes com propriedades de modificar o sistema endócrino. Por fim, o capítulo seis apresenta os conceitos de água subterrâneas e superficiais, bem como sua ocorrência, abundância e qualidade para fins potáveis. Além disso, realiza uma abordagem geral em relação aos principais aquíferos no Brasil.

Nesta perspectiva, a Atena Editora vem trabalhando de forma a estimular e incentivar cada vez mais pesquisadores do Brasil e de outros países a publicarem seus trabalhos com garantia de qualidade e excelência em forma de livros, capítulos de livros e artigos científicos.


CAPÍTULO 1 1**REGULARITY OF THE TIMOSHENKO'S SYSTEM WITH THERMOELASTICITY OF TYPE III AND FRACTIONAL DAMPING**

Fredy Maglorio Sobrado Suárez
 Lesly Daiana B. Sobrado
 Filomena Barbosa Rodrigues Mendes

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3742302081>

CAPÍTULO 230**STABILITY AND REGULARITY THE MGT-FOURIER MODEL WITH FRACTIONAL COUPLING**

Filomena Barbosa Rodrigues Mendes
 Fredy M. Sobrado Suárez
 Santos Richard W. Sanguino Bejarano

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3742302082>


CAPÍTULO 355**ANÁLISE ESTATÍSTICA DO COMPORTAMENTO DA RADIAÇÃO DE ONDA CURTA PARA A CIDADE DE NATAL, RN**

Thiago Gonçalves da Silva
 José Augusto Ferreira Neto
 Paula Andressa Alves de Araújo
 Everton Felipe de Souza Pinheiro
 Eduardo Almeida da Silva
 Matheus Henrique Bezerra de Melo
 Albert Smith Feitosa Suassuna Martins
 Israel Walter Hilário da Silva
 Lorena Santos da Silva
 Glenda Yasmin Pereira de Carvalho
 Raphaelly de Miranda Pereira
 Daniel Felipe da Silva

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3742302083>

CAPÍTULO 466**MITIGAÇÃO E ADAPTAÇÃO: DUAS ESTRATÉGIAS PARA COMBATE À MUDANÇA CLIMÁTICA**

Hantz Emmanuel Loidor
 João Paulo Leandro de Oliveira

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3742302084>

CAPÍTULO 577**ESTUDOS RECENTES DA BIOTRANSFORMAÇÃO DA PROGESTERONA POR MICRORGANISMOS**

Ligia Breda e Vasconcelos
 Samuel Filipe Cardoso de Paula
 André Luiz Meleiro Porto


 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3742302085>

CAPÍTULO 6 102

INTRODUÇÃO ÀS ÁGUAS SUBTERRÂNEAS: CONCEITOS E OCORRÊNCIAS
NO BRASIL

Thyago Anthony Soares Lima

Paulo de Tarso Amorim Castro

 <https://doi.org/10.22533/at.ed.3742302086>

SOBRE O ORGANIZADOR 130

ÍNDICE REMISSIVO 131

REGULARITY OF THE TIMOSHENKO'S SYSTEM WITH THERMOELASTICITY OF TYPE III AND FRACTIONAL DAMPING

Data de aceite: 03/07/2023

Fredy Maglorio Sobrado Suárez

Department of Mathematics, Federal
University of Technology of Paraná, Brazil

Lesly Daiana B. Sobrado

Institute of Mathematics, Federal
University of Rio of Janeiro, Brazil

Filomena Barbosa Rodrigues Mendes

Department of Electrical Engineering,
Federal University of Technology of
Paraná, Brazil.

viscous damping will be faced, respectively. The main contribution of this article is to show that the corresponding semigroup $S_i(t) = e^{B_i t}$, with $i = 1, 2$, is of Gevrey class $s > \frac{1}{\min\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\}}$, with $(\tau, \sigma, \xi) \in$

$R_{CG} := (0, 1]^3$. It is also showed that $S_1(t) = e^{B_1 t}$ is analytic in the region $R_{A_1} := \{(\tau, \sigma, \xi) \in [\frac{1}{2}, 1]^3\}$ and $S_2(t) = e^{B_2 t}$ is analytic in the region $R_{A_2} := \{(\tau, \sigma, \xi) \in [\frac{1}{2}, 1]^3 / \tau = \xi\}$.

KEYWORDS: Gevrey class, Analyticity, Fractional damping, Semigroup theory.

ABSTRACT: The article presents the study of the regularity of two thermoelastic beam systems defined by the Timoshenko beam model coupled with the heat conduction of Green-Naghdi theory of type III, both mathematical models are differentiated by their coupling terms that arise as a consequence of the constitutive laws initially considered. The systems presented in this work have 3 fractional dampings: $\mu_1(-\Delta)^\tau \phi$, $\mu_2(-\Delta)^\sigma \psi$, and $K(-\Delta)^\xi \theta$, where ϕ , ψ and θ are transverse displacement, rotation angle and empirical temperature of the beam respectively and the parameters $(\tau, \sigma, \xi) \in [0, 1]^3$. It is noted that for values 0 and 1 of the parameter τ , the so-called frictional or

1 | INTRODUCTION

In this article, it is investigated the regularity of the semigroup associated with the thermoelastic beam system where the transversal vibrations are given by Timoshenko's model (See Timoshenko [24]) and the balance of the energy is described by the Green-Naghdi theory, known as thermo-elasticity of type III (See Green and Naghdi [7]). The equation of motion and energy balance for this thermoelastic Timoshenko system is given by

$$\begin{aligned} \rho A \phi_{tt} - S_x &= 0, & x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+, \\ \rho I \psi_{tt} - M_x + S &= 0, & x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

$$\rho_3 u_t + q_x + \gamma \psi_{xt} = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

The constant ρ denotes the density, the cross-sectional area, and I the area moment of inertia. By S one denotes the shear force, M is the bending moment and q is the heat flux. The function ϕ is the transverse displacement, ψ is the rotation angle of a filament of the beam and u is the temperature difference. Here, t is the time variable and x is the coordinate space along the beam.

In this investigation, two systems that differ only in their coupling terms are analyzed, which are obtained by starting from similar constitutive laws.

The first best-known mathematical model in the literature, and studied for example in [5], [14] and [15], starts from the following constitutive laws:

$$S = kAG(\phi_x + \psi), \quad M = EI\psi_x + \beta u \quad \text{and} \quad q = -\delta\alpha_x - K\alpha_{xt}, \quad (1)$$

where α is the so-called thermal displacement whose time derivative is the empirical temperature u , i.e., $\alpha_t = u$, E and G are elastic constants, k the shear coefficient for measuring the stiffness of materials ($k < 1$), δ and K denote the thermal conductivity, β the coefficient of linear thermal expansion and γ a coupling constant.

To simplify the notation let us denote by $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $\kappa = kAG$ and $b = EI$. Under these conditions, the system can be written as

$$\rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\phi_x + \psi) + \beta u_x = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3)$$

$$\rho_3 u_{tt} - \delta u_{xx} + \gamma \psi_{tx} - K u_{txx} = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (4)$$

In order to exhibit the dissipative natural of system (2)–(4), it is convenient to introduce a new variable (see [25]):

$$\theta(t, x) = \int_0^t u(s, x) ds + \frac{1}{\delta} \chi(x), \quad (5)$$

where $\chi \in H_0^1(0, L)$ solves the following Cauchy problem

$$\begin{cases} \chi_{xx} = \rho_3 u_1 - K u_{0xx} + \gamma \psi_{1x} & \text{in } (0, L), \\ \chi(x) = 0, & x = 0, L. \end{cases} \quad (6)$$

Then, considering 3 fractional damping $\mu_1(-\Delta)^\tau \phi_t$, $\mu_2(-\Delta)^\sigma \psi_t$ and $K(-\Delta)^\xi \theta_t$ and using (5) and (6) the starting system (2)–(4) is transformed to

$$\rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x + \mu_1(-\Delta)^\tau \phi_t = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (7)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\Delta\psi + \kappa(\phi_x + \psi) + \beta\theta_{tx} + \mu_2(-\Delta)^\sigma \psi_t = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (8)$$

$$\rho_3 \theta_{tt} - \delta\Delta\theta + \gamma\psi_{tx} + K(-\Delta)^\xi \theta_t = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (9)$$

where the parameters τ , σ and ξ take values in the range $[0, 1]$ and μ_1, μ_2 are positive real constants.

The second mathematical model addressed in this research that was proposed in 2017 by Santos et al. [17], which consists of adjusting the couplings of the first system

couplings to satisfy type III heat conduction that acts mainly on the shear force, and as a result, the transverse shear force $S = \kappa(\phi_x + \psi)$ is obtained from the transverse distribution of shear stresses acting on each cross-section of the beam. For this purpose, it is necessary to start with the used constitutive laws

$$S = \kappa(\phi_x + \psi) - \mu u, \quad M = b\psi_x \quad \text{and} \quad q = -\delta\alpha_x - K\alpha_{xt}, \quad (10)$$

where α is the so-called thermal displacement, the time derivative of which is the empirical temperature u , i.e., $\alpha_t = u$. From these constitutive laws, by making appropriate changes, one arrives at the system to follow (for more details see [17]):

$$\rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x + \mu \theta_{tx} + \mu_1 (-\Delta)^\tau \phi_t = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (11)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b \Delta \psi + \kappa(\phi_x + \psi) - \mu \theta_t + \mu_2 (-\Delta)^\sigma \psi_t = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (12)$$

$$\rho_3 \theta_{tt} - \delta \Delta \theta + \mu(\phi_x + \psi)_t + \gamma (-\Delta)^\xi \theta_t = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (13)$$

To make the calculations in the results of the test more practical, the two systems are abstractly rewritten by using the operator: $A : D(A) \subset L^2(0, L) \rightarrow L^2(0, L)$, where

$$A = -\Delta = -(\cdot)_{xx}, \quad D(A) = H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L). \quad (14)$$

It is known that the operator given in (14) is self-adjoint, positive, and has inverse compact on a complex Hilbert space $D(A^0) = L^2(0, L)$. Therefore, the operator A^ν is self-adjoint positive for all $\nu \in \mathbb{R}$, bounded by $\nu \leq 0$, and the embedding

$$D(A^{\nu_1}) \hookrightarrow D(A^{\nu_2}),$$

is continuous for $\nu_1 > \nu_2$. Here, the norm in $D(A^\nu)$ is given by $\|u\|_{D(A^\nu)} := \|A^\nu u\|$, $u \in D(A^\nu)$, where $\|\cdot\|$ denotes the norm in the Hilbert space $L^2(0, L) = D(A^0)$. Some of these spaces are: $D(A^{1/2}) = H_0^1(0, L)$, $D(A^0) = L^2(0, L)$ and $D(A^{-1/2}) = H^{-1}(0, L)$.

Studying the regularity (Gevrey class and/or Analyticity) of systems is relevant to science. In applied sciences, obtaining information about the solutions of the mathematical model under study such as regularity (smoothness) has the same importance as knowing the asymptotic behavior of the model's solution. From a mathematical point of view, when one talks about the regularity of solutions, concepts like differentiable, Gevrey class, and analyticity come to mind. It is already known that semigroups $S(t) = e^{Bt}$ of the Gevrey class have better regular properties than a differentiable semigroup, but are less regular than an analytic semigroup. The Gevrey rate $s > 1$ 'measures' the degree of divergence of its power series. It should be noted that the Gevrey class or analyticity of the model in particular implies three very important properties: The first one is the property of the smoothing effect on initial data, i.e., no matter how irregular the initial data is, the solutions of the models become very smooth in positive finite-time. The second property is that systems are exponentially stable. Finally, these systems benefit from the property of linear stability, which means that the type of the semigroup is equal to the spectral limit of its infinitesimal operator.

During the last decades, various authors have studied some physical phenomena

for the Timoshenko beam system formulated in different mathematical models. Most of them focused on studying the asymptotic behavior, always trying to obtain the best decay rate and using dissipations in some of the system equations. In the following paragraphs, some of these investigations are mentioned.

In 1987, Kim and Renardy [9] studied the asymptotic behavior of the Timoshenko beam considering two boundary dissipations. They demonstrated the exponential decay of energy associated with the model using the multiplier technique and also determined numerical estimates of the eigenvalues of the operator associated with this system. Later in 2008, Messaoudin and Said-Houari [14] also studied the asymptotic behavior of the Type III thermoelastic Timoshenko system with mixed boundary conditions (Dirichlet-Dirichlet-Neuman), they demonstrated using the energy method that if the velocities of the waves associated with the hyperbolic part of the system are equal, then the system decays exponentially. The complement of the study of the asymptotic behavior of this same system due to different mixed conditions (Neumann-Dirichlet-Neumann) was studied again in 2013 by Messaoudin and Fareh [15], in this new research they show that if the speeds of the waves associated with the hyperbolic part of the system are different, then the system decays polynomially. In the following year, the work of Fatori et al. [5] who also studied this same system, but with two types of boundary conditions (Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet) and (Dirichlet-Neumann-Dirichlet), using semigroup technique they showed that the corresponding semigroup is exponentially stable if and only if the velocities associated with the hyperbolic part of the system are equal, in the absence of exponential decay they show that the corresponding semigroup is polynomially stable and the determined rate is optimal.

More recently, in 2017, Santos et al. [17] studied the type III thermoelastic Timoshenko beam system given by:

$$\begin{aligned}\rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x + \mu \theta_{tx} &= 0, & x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\phi_x + \psi) - \mu \theta_t &= 0, & x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+, \\ \rho_3 \theta_{tt} - \delta \theta_{xx} + \mu(\phi_x + \psi)_t - \gamma \theta_{txx} &= 0, & x \in (0, L), t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

and the boundary conditions (Dirichlet-Dirichlet-Dirichlet) given by

$$\phi(0, t) = \phi(L, 0) = \psi(0, t) = \psi(L, 0) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \quad \forall t > 0,$$

or with the boundary conditions (Dirichlet-Neumann-Neumann) given by

$$\phi(0, t) = \phi(L, 0) = \psi_x(0, t) = \psi_x(L, 0) = \theta_x(0, t) = \theta_x(L, t) = 0, \quad \forall t > 0,$$

note that this system differs slightly from the terms of coupling. In this research, the authors also applied the semigroup technique and showed that the associated semigroup can be exponentially or polynomially stable depending on the relationships between the wave propagation velocity coefficients, specifically in the case of polynomial decay it was proved that the rate found is optimal.

About investigations the regularity of semigroups associated with various mathematical models, one could mention the paper/article of Fatori et al.[4], whose work the authors studied the differentiability and analyticity, in addition to studying the asymptotic behavior via semigroups. For analyticity, they used a theorem that can be found in the Liu-Zheng book[12] or the work of Hao et al.[8]. Other more recently published works have explored the regularity of solutions using the Gevrey class introduced in Taylor's thesis [19] (1989). In the same direction, one could mention [1, 2, 6].

Among recent research that has studied the asymptotic behavior and/or regularity of models with fractional damping, one could mention the works of Sare et al.[18], in that paper, the authors investigated coupled systems thermoelastic type, where they address two cases with Fourier's heat law and the other with Cattaneo considering in both cases the rotational inertial term. Furthermore, they, study the exponential stability, possible regions of loss of exponential stability and polynomial stability, and, more recently, the work of Keyantuo et al.[20](2020) to be published. In this latter work, the authors studied the thermoelastic plate model with a fractional Laplacian between the Euler-Bernoulli and Kirchhoff model with two types of boundary conditions. In addition to studying the asymptotic and analytical behavior, the authors show that the underlying semigroups are of Gevrey class s for every $s > \frac{2-\theta}{2-4\theta}$ for both the clamped and hinged boundary conditions when the parameter θ lies in the interval $(0, 1/2)$. Moreover, one could cite the investigations [3, 10, 11, 16, 22, 23].

One motivation for deciding to study the regularity (determination of the Gevrey classes and analyticity) of Timoshenko's systems was in the direction of complementing the work published in 2005 by Raposo et al. [21], in this work the authors study the asymptotic behavior (exponential decay of the Timoshenko system), the studied system considers two weak (frictional) dampings given by the speed of the transversal and rotational movements. The investigated model is given by

$$\begin{aligned}\rho_1 u_{tt} - k(u_x - \psi)_x + u_t &= 0 \quad \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(u_x - \psi) + \psi_t &= 0, \quad \text{in } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = u(L, t) = \psi(0, t) = \psi(L, t) &= 0 \quad t > 0.\end{aligned}$$

The authors use the frequency domain technique (spectral characterization) to study the asymptotic behavior via semigroups.

This article is organized as follows. In section 2, using the theory of semigroup, the well-posedness of both systems is studied. Section 3 is dedicated to the study of the regularity of both models, this subsection is subdivided into two parts: in subsection 3.1 Gevrey class of the semigroup associated with the first system $S(t) = e^{B_1 t}$ in the region $R_{GC} = (0, 1]^3$ is determined and it is shown that $S(t) = e^{B_1 t}$ is analytic in the region R_{A_1} . Finally, in subsection 3.2 we show that the Gevrey class of $S(t) = e^{B_2 t}$ is $s > \frac{1}{\min\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\}}$ for the parameters (τ, σ, ξ) within the region R_{GC} and this subsection is finished by proving that $S(t) = e^{B_2 t}$ is analytic when the 3 parameters τ , σ , and ξ take values in the closed

interval $[\frac{1}{2}, 1]$ such that $\tau = \xi$. The investigation ends with an observation regarding the asymptotic behavior of $S(t) = e^{Bt}$ in which it is illustrated that the necessary estimates given in Propositions(5) and (6) imply that the semigroup associated with the system (15)–(17) and (21)–(22) and the system (18)–(22) respectively are exponentially stable for $(\tau, \sigma, \xi) \in [0, 1]^3$.

2 | WELL-POSEDNESS: SEMIGROUP APPROACH

Using the A operator defined in (14) the system (7)–(9) will be given by

$$\rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x + \mu_1 A^\tau \phi_t = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (15)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} + bA\psi + \kappa(\phi_x + \psi) + \beta\theta_{tx} + \mu_2 A^\sigma \psi_t = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (16)$$

$$\rho_3 \theta_{tt} + \delta A\theta + \gamma\psi_{tx} + KA^\xi \theta_t = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (17)$$

And again using the A operator on (11)–(13), leads to

$$\rho_1 \phi_{tt} - \kappa(\phi_x + \psi)_x + \mu\theta_{tx} + \mu_1 A^\tau \phi_t = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (18)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} + bA\psi + \kappa(\phi_x + \psi) - \mu\theta_t + \mu_2 A^\sigma \psi_t = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (19)$$

$$\rho_3 \theta_{tt} + \delta A\theta + \mu(\phi_x + \psi)_t + \gamma A^\xi \theta_t = 0, \quad x \in (0, L), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (20)$$

Additionally, the appropriate initial conditions for both systems are considered

$$\varphi(0, \cdot) = \phi_0, \quad \varphi_t(0, \cdot) = \phi_1, \quad \psi(0, \cdot) = \psi_0, \quad \psi_t(0, \cdot) = \psi_1, \quad \theta(0, \cdot) = \theta_0 \quad \text{and} \quad \theta_t(0, \cdot) = \theta_1, \quad (21)$$

and boundary conditions for both systems of type Dirichlet–Dirichlet–Dirichlet

$$\phi(t, 0) = \phi(t, L) = 0, \quad \psi(t, 0) = \psi(t, L) = 0, \quad \theta(t, 0) = \theta(t, L) = 0 \quad t > 0. \quad (22)$$

Taking $\Phi = \phi$, $\Psi = \psi$, $\Theta = \theta$, considering $U = (\phi, \phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta)$ and $U_0 = (\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1, \theta_0, \theta_1)$, both systems, can be written in the following abstract framework

$$\frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{B}_i U(t), \quad U(0) = U_0, \quad (23)$$

where for the operator \mathcal{B}_1 for the first system is defined by

$$\mathcal{B}_1 U := \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1} [\kappa(\phi_x + \psi)_x - \mu_1 A^\tau \Phi] \\ \Psi \\ -\frac{1}{\rho_2} [bA\psi + \kappa(\phi_x + \psi) + \beta\Theta_x + \mu_2 A^\sigma \Psi] \\ \Theta \\ -\frac{1}{\rho_3} [\delta A\theta + \gamma\Psi_x + KA^\xi \Theta] \end{bmatrix}, \quad (24)$$

and the operator \mathcal{B}_2 for the second system is defined by

$$\mathcal{B}_2 U := \begin{bmatrix} \Phi \\ \frac{1}{\rho_1} [\kappa(\phi_x + \psi)_x - \mu\Theta_x - \mu_1 A^\tau \Phi] \\ \Psi \\ \frac{1}{\rho_2} [-bA\psi - \kappa(\phi_x + \psi) + \mu\Theta - \mu_2 A^\sigma \Psi] \\ \Theta \\ \frac{1}{\rho_3} [-\delta A\theta - \mu(\Phi_x + \Psi) - \gamma A^\xi \Theta] \end{bmatrix}, \quad (25)$$

for $U = (\phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta)$. Both operators are defined in the energy space

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} := [D(A^{\frac{1}{2}}) \times D(A^0)]^3.$$

\mathcal{H}_1 is a Hilbert space with the inner product given by

$$\begin{aligned} \langle U, U^* \rangle_{\mathcal{H}_1} &:= \rho_1 \beta \gamma \langle \Phi, \Phi^* \rangle + \rho_2 \kappa \gamma \langle \Psi, \Psi^* \rangle + \beta \kappa \gamma \langle \phi_x + \psi, \phi_x^* + \psi^* \rangle + b \kappa \gamma \langle \psi_x, \psi_x^* \rangle \\ &\quad + \beta \delta \kappa \langle \theta_x, \theta_x^* \rangle + \beta \kappa K \langle \Theta, \Theta^* \rangle, \end{aligned}$$

for $U = (\phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta)$, $U^* = (\phi^*, \psi^*, \Psi^*, \theta^*, \Theta^*) \in \mathcal{H}$, and induced norm

$$\|U\|_{\mathcal{H}_1}^2 := \rho_1 \beta \gamma \|\Phi\|^2 + \rho_2 \kappa \gamma \|\Psi\|^2 + \beta \kappa \gamma \|\phi_x + \psi\|^2 + b \kappa \gamma \|A^{\frac{1}{2}} \psi\|^2 + \beta \delta \kappa \|A^{\frac{1}{2}} \theta\|^2 + \beta \kappa K \|\Theta\|^2.$$

In these conditions, the domain of \mathcal{B}_1 is defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{B}_1) &:= \{ U \in \mathcal{H} / \mathcal{B}(U) \in \mathcal{H} + \text{boundary conditions (22)} \} \\ &:= D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}}) \cap D(A^\tau) \times D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}}) \cap D(A^\sigma) \times D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}}) \cap D(A^\xi). \end{aligned} \quad (26)$$

And \mathcal{H}_2 is a Hilbert space with the inner product given by

$$\langle U, U^* \rangle_{\mathcal{H}_2} := \rho_1 \langle \Phi, \Phi^* \rangle + \rho_2 \langle \Psi, \Psi^* \rangle + \kappa \langle \phi_x + \psi, \phi_x^* + \psi^* \rangle + b \langle \psi_x, \psi_x^* \rangle + \delta \langle \theta_x, \theta_x^* \rangle + \rho_3 \langle \Theta, \Theta^* \rangle,$$

for $U = (\phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta)$, $U^* = (\phi^*, \psi^*, \Psi^*, \theta^*, \Theta^*) \in \mathcal{H}$, and induced norm

$$\|U\|_{\mathcal{H}_2}^2 := \rho_1 \|\Phi\|^2 + \rho_2 \|\Psi\|^2 + \kappa \|\phi_x + \psi\|^2 + b \|A^{\frac{1}{2}} \psi\|^2 + \delta \|A^{\frac{1}{2}} \theta\|^2 + \rho_3 \|\Theta\|^2.$$

In these conditions, the domain of \mathcal{B}_2 is defined as

$$\mathcal{D}(\mathcal{B}_2) := D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}}) \cap D(A^\tau) \times D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}}) \cap D(A^\sigma) \times D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}}) \cap D(A^\xi). \quad (27)$$

To show that both operators \mathcal{B}_i , $i = 1, 2$ are generators of a C_0 semigroup we invoke a result from Liu-Zheng' book[12].

Theorem 1 (see Theorem 1.2.4 in [12]) *Let \mathcal{B}_i be a linear operator with domain $\mathcal{D}(\mathcal{B}_i)$ dense in a Hilbert space \mathcal{H} . If \mathcal{B}_i is dissipative and $0 \in \rho(\mathcal{B}_i)$, the resolvent set of \mathcal{B}_i , then \mathcal{B}_i is the generator of a C_0 -semigroup of contractions on \mathcal{H} .*

Next, we apply the Theorem 1 only for the first system, the proof of the second system is completely similar. Let us see that the operator \mathcal{B}_1 defined in (24) satisfies the conditions of this theorem. Clearly, $\mathcal{D}(\mathcal{B}_1)$ is dense in \mathcal{H} . Effecting the internal product of $\mathcal{B}_1 U$ with U , lead to

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{B}_1 U, U \rangle = -\beta \gamma \mu_1 \|A^{\frac{\tau}{2}} \Phi\|^2 - \kappa \gamma \mu_2 \|A^{\frac{\sigma}{2}} \Psi\|^2 - \frac{\beta \kappa K^2}{\rho_3} \|A^{\frac{\xi}{2}} \Theta\|^2, \quad \forall U \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_1), \quad (28)$$

that is, the operator \mathcal{B}_1 is dissipative.

To complete the conditions of the above theorem, it remains to show that $0 \in \rho(B_1)$. Let $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in H$, let us see that the stationary problem $B_1 U = F$ has a solution $U = (\phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta)$. From the definition of the operator B_1 given in (24), this system can be written as

$$\Phi = f^1, \quad \kappa(\phi_x + \psi)_x = \rho_1 f^2 + \mu_1 A^\tau f^1, \quad (29)$$

$$\Psi = f^3, \quad bA\psi + \kappa(\phi_x + \psi) = -\rho_2 f^4 - \mu_2 A^\sigma f^3 - \beta f_x^5, \quad (30)$$

$$\Theta = f^5, \quad \delta A\theta = -\gamma f_x^3 - KA^\xi f^5 - \rho_3 f^6. \quad (31)$$

Therefore, it is not difficult to see that there exists only one solution ϕ, ψ and θ of the system

$$\begin{aligned} \kappa(\phi_x + \psi)_x = \rho_1 f^2 + \mu_1 A^\tau f^1 &\in D(A^0), \\ bA\psi + \kappa(\phi_x + \psi) = -\rho_2 f^4 - \mu_2 A^\sigma f^3 - \beta f_x^5 &\in D(A^0), \\ \delta A\theta = -\gamma f_x^3 - KA^\xi f^5 - \rho_3 f^6 &\in D(A^0). \end{aligned} \quad (32)$$

Therefore:

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}},$$

which in particular implies that $\|B_1^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}$, so we have that 0 belongs to the resolvent set $\rho(B_1)$. Consequently, from Theorem 1 we have B_1 as the generator of a contractions semigroup.

As a consequence of the above Theorem(1), it follows

Theorem 2 *Given $U_0 \in H$ there exists a unique weak solution U to the problem (23) satisfying*

$$U \in C([0, +\infty), \mathcal{H}).$$

Futhermore, if $U_0 \in D(B_1^k)$, $k \in \mathbb{N}$, then the solution U of (23) satisfies

$$U \in \bigcap_{j=0}^k C^{k-j}([0, +\infty), D(B_1^j)).$$

3 I REGULARIZATION RESULTS

This section is divided into two subsections, in each of them, the Gevrey class and analytics of the corresponding systems are studied. Using the characterization results presented in [20] (adapted from [19], Theorem 4, p. 153]) it is shown that the corresponding semigroups $S(t) = e^{B_1 t}$ are of Gevrey class $s > \frac{1}{r}$ for $r = \min \left\{ \frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi} \right\} \in (0, 1)$, with $(\tau, \sigma, \xi) \in R_{CG} := (0, 1]^3$. And for the study of analyticity the main tool used is the characterization of analytical semigroups due to Liu and Zheng[12] (See the book by Liu-Zheng - Theorem 1.3.3). It has proved that $S_1(t) = e^{B_1 t}$ is analytic in the region $R_{A_1} := [1/2, 1]^3$ and $S_2(t) = e^{B_2 t}$ is analytic in the region $R_{A_2} := \{(\tau, \sigma, \xi) \in [1/2, 1]^3 / \tau = \xi\}$.

In what follows: C , C_δ and C_ε will denote positive constants that assume different

values in different places.

3.1 Regularity of the first system

Next, two lemma are presented where two estimates are tested which are fundamental for the determination of Gevrey class and the analytics of the associated semigroup $S(t) = e^{B_1 t}$.

Lemma 3 *Let $S(t) = e^{B_1 t}$ be a C_0 -semigroup on contractions on Hilbert space $H=H_1$, the solutions of the system (15)–(17) and (21)–(22) satisfy the inequality*

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - B_1)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty. \quad (33)$$

Proof: To show the (33) inequality, it suffices to show that, given $\delta > 0$ there exists a constant $C_\delta > 0$ such that the solutions of the system (15)–(17) and (21)–(22) for $|\lambda| > \delta$ satisfy the inequality

$$\frac{\|U\|_{\mathcal{H}}}{\|F\|_{\mathcal{H}}} \leq C_\delta \iff \|U\|_{\mathcal{H}} = \|(i\lambda I - B_1)^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq C_\delta \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (34)$$

If $\lambda \in \mathbb{R}$ and $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in H$ then the solution $U = (\phi, \psi, \Psi, \Theta, \theta, \Theta) \in D(B_1)$ the resolvent equation $(i\lambda I - B_1)U = F$ can be written in the form

$$i\lambda\phi - \Phi = f^1 \quad \text{in } D(A^{\frac{1}{2}}), \quad (35)$$

$$i\lambda\Phi - \frac{\kappa}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x + \frac{\mu_1}{\rho_1}A^\tau\Phi = f^2 \quad \text{in } D(A^0), \quad (36)$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f^3 \quad \text{in } D(A^{\frac{1}{2}}), \quad (37)$$

$$i\lambda\Psi + \frac{b}{\rho_2}A\psi + \frac{\kappa}{\rho_2}(\phi_x + \psi)_x + \frac{\beta}{\rho_2}\Theta_x + \frac{\mu_2}{\rho_2}A^\sigma\Psi = f^4 \quad \text{in } D(A^0), \quad (38)$$

$$i\lambda\theta - \Theta = f^5 \quad \text{in } D(A^{\frac{1}{2}}), \quad (39)$$

$$i\lambda\Theta + \frac{\delta}{\rho_3}A\theta + \frac{\gamma}{\rho_3}\Psi_x + \frac{K}{\rho_3}A^\xi\Theta = f^6 \quad \text{in } D(A^0). \quad (40)$$

Using the fact that the operator B_1 is dissipative, result in

$$\begin{aligned} \beta\gamma\mu_1\|A^{\frac{\pi}{2}}\Phi\|^2 + \kappa\gamma\mu_2\|A^{\frac{\pi}{2}}\Psi\|^2 + \frac{\beta\kappa K^2}{\rho_3}\|A^{\frac{\xi}{2}}\Theta\|^2 \\ = \operatorname{Re}\langle (i\lambda - B_1)U, U \rangle = \operatorname{Re}\langle F, U \rangle \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (41)$$

On the other hand, performing the duality product of (36) for $\beta\gamma\rho_1\phi$, and remembering that the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjoint, resulting in

$$\begin{aligned} \beta\kappa\gamma\langle (\phi_x + \psi)_x, \phi_x \rangle &= \beta\gamma\rho_1\|\Phi\|^2 + \beta\gamma\rho_1\langle \Phi, f^1 \rangle \\ &\quad - i\lambda\mu_1\beta\gamma\|A^{\frac{\pi}{2}}\phi\|^2 + \mu_1\beta\gamma\langle A^{\frac{\pi}{2}}f^1, A^{\frac{\pi}{2}}\phi \rangle + \beta\gamma\rho_1\langle f^2, \phi \rangle, \end{aligned}$$

now performing the duality product of (38) for $\beta\gamma\rho_2\psi$, and remembering that the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjoint, leading to

$$\begin{aligned} \beta\kappa\gamma\langle(\phi_x + \psi), \psi\rangle + b\beta\gamma\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 &= \beta\gamma\rho_2\|\Psi\|^2 + \beta\gamma\rho_2\langle\Psi, f^3\rangle \\ &+ \beta^2\gamma\langle\Theta, \psi_x\rangle - i\lambda\beta\gamma\mu_2\|A^{\frac{\sigma}{2}}\psi\|^2 + \beta\gamma\mu_2\langle A^{\frac{\sigma}{2}}f^3, A^{\frac{\sigma}{2}}\psi\rangle + \beta\gamma\rho_2\langle f^4, \psi\rangle. \end{aligned}$$

Adding the last 2 equations, result in

$$\begin{aligned} \beta\kappa\gamma\|\phi_x + \psi\|^2 + b\beta\gamma\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 &= \beta\gamma\rho_1\|\Phi\|^2 + \beta\gamma\rho_2\|\Psi\|^2 - i\lambda\beta\gamma\{\mu_1\|A^{\frac{\tau}{2}}u\|^2 \\ &+ \mu_2\|A^{\frac{\sigma}{2}}\psi\|^2\} + \beta\gamma\rho_1\langle\Phi, f^1\rangle + \beta\gamma\rho_2\langle\Psi, f^3\rangle \\ &+ \beta\gamma\mu_1\langle A^{\frac{\tau}{2}}f^1, A^{\frac{\tau}{2}}\phi\rangle + \beta\gamma\mu_2\langle A^{\frac{\sigma}{2}}f^3, A^{\frac{\sigma}{2}}\phi\rangle \\ &+ \beta\gamma\rho_1\langle f^2, \phi\rangle + \beta\gamma\rho_2\langle f^4, \psi\rangle + \beta^2\gamma\langle\Theta, \psi_x\rangle. \quad (42) \end{aligned}$$

Taking real part, using norm $\|F\|_{\mathcal{H}}$ and $\|U\|_{\mathcal{H}}$ and applying Cauchy-Schwarz and Young Inequalities, for $\varepsilon > 0$ exists $C_\varepsilon > 0$ which does not depend on λ such that

$$\beta\kappa\gamma\|\phi_x + \psi\|^2 + b\beta\gamma\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 \leq \beta\gamma\rho_1\|\Phi\|^2 + \beta\gamma\rho_2\|\Psi\|^2 + \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + C_\varepsilon\|\Theta\|^2 + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

From estimative (41) and the fact $0 \leq \frac{\tau}{2}$, $0 \leq \frac{\sigma}{2}$ and $0 \leq \frac{\xi}{2}$, the continuous embedding $D(A^{\theta_2}) \rightarrow D(A^{\theta_1})$, $\theta_2 > \theta_1$, lead to

$$\beta\kappa\gamma\|\phi_x + \psi\|^2 + b\beta\gamma\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (43)$$

On the other hand, performing the duality product of (40) for $\beta\kappa\rho_3\theta$, and remembering that the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjoint and from (39), result in

$$\begin{aligned} \beta\kappa\delta\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 &= \delta\beta\kappa\|\Theta\|^2 + \beta\kappa\rho_3\langle\Theta, f^5\rangle + \beta\kappa\gamma\langle\Psi, \theta_x\rangle \\ &- i\kappa\beta\kappa\lambda\|A^{\frac{\xi}{2}}\theta\|^2 + \kappa\beta\kappa\langle A^{\frac{\xi}{2}}f^5, A^{\frac{\xi}{2}}\theta\rangle + \beta\kappa\rho_3\langle f^6, \theta\rangle \end{aligned}$$

Taking real part and by using the inequalities Cauchy-Schwarz and Young and norms $\|F\|_{\mathcal{H}}$ and $\|U\|_{\mathcal{H}}$, from $|\lambda| > 1$, for $\varepsilon > 0$ exists $C_\varepsilon > 0$ which does not depend on λ such that

$$\beta\kappa\delta\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 \leq C\{\|\Theta\|^2 + \|\Theta\|\|f^5\| + \|A^{\frac{\xi}{2}}f^5\|\|A^{\frac{\xi}{2}}\theta\| + \|f^6\|\|\theta\|\} + C_\varepsilon\|\Psi\|^2 + \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2.$$

Then, from estimative (41) and the fact $0 \leq \frac{\sigma}{2}$ and $0 \leq \frac{\xi}{2} \leq \frac{1}{2}$ the continuous embedding $D(A^{\theta_2}) \rightarrow D(A^{\theta_1})$, $\theta_2 > \theta_1$, lead to

$$\beta\kappa\delta\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (44)$$

Finally, from estimates (41), (43) and (44), the proof of this lemma is completed.

Lemma 4 Let $\delta > 0$. There exists a constant $C_\delta > 0$ such that the solutions of the system (15)–(17) and (21)–(22) for $|\lambda| \geq \delta$ satisfy the inequalities

$$(i) \quad |\lambda|\beta\gamma[\kappa\|\phi_x + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2] \leq |\lambda|\beta\gamma[\rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2] + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (45)$$

$$(ii) \quad \beta\kappa\delta|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 \leq \beta\kappa\rho_3|\lambda|\|\Theta\|^2 + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (46)$$

Proof: Item (i): Performing the duality product of (36) for $\beta\gamma\rho_1\lambda\phi$, and remembering that the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjunct, result in

$$\begin{aligned}\beta\kappa\gamma\lambda\langle(\phi_x + \psi), \phi_x\rangle &= \beta\gamma\rho_1\lambda\|\Phi\|^2 + \beta\gamma\rho_1\langle\lambda\Phi, f^1\rangle - i\mu_1\beta\gamma\|A^{\frac{\pi}{2}}\Phi\|^2 \\ &\quad - i\mu_1\beta\gamma\langle A^T\Phi, f^1\rangle + i\beta\gamma\rho_1\langle f^2, \Phi\rangle + i\beta\gamma\rho_1\langle f^2, f^1\rangle.\end{aligned}$$

Now performing the duality product of (38) for $\beta\gamma\rho_2\lambda\psi$, and remembering that the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjunct leads to

$$\begin{aligned}\lambda\beta\gamma[\kappa\langle(\phi_x + \psi), \psi\rangle + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2] &= \beta\gamma\rho_2\lambda\|\Psi\|^2 + \beta\gamma\rho_2\langle\lambda\Psi, f^3\rangle + i\beta^2\gamma\langle\Theta, \psi_x\rangle \\ &\quad + i\beta^2\gamma\langle\Theta, f_x^3\rangle - i\mu_2\beta\gamma\|A^{\frac{\pi}{2}}\Psi\|^2 - i\mu_2\beta\gamma\langle A^\sigma\Psi, f^3\rangle \\ &\quad + i\beta\gamma\rho_2\langle f^4, \Psi\rangle + i\beta\gamma\rho_2\langle f^4, f^3\rangle.\end{aligned}$$

Adding the last 2 equations, result in

$$\begin{aligned}\lambda\beta\gamma[\kappa\|\phi_x + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2] &= \lambda\beta\gamma[\rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2] - i\beta\gamma\{\mu_1\|A^{\frac{\pi}{2}}\Phi\|^2 \\ &\quad + \mu_2\|A^{\frac{\pi}{2}}\Psi\|^2\} + \beta\gamma\rho_1\langle\lambda\Phi, f^1\rangle + \beta\gamma\rho_2\langle\lambda\Psi, f^3\rangle - i\beta\gamma\{\mu_1\langle A^T\Phi, f^1\rangle \\ &\quad + \mu_2\langle A^\sigma\Psi, f^3\rangle\} + i\beta\gamma\rho_1\langle f^2, \Phi\rangle + i\beta\gamma\rho_2\langle f^4, \Psi\rangle + i\beta\gamma\rho_1\langle f^2, f^1\rangle \\ &\quad + i\beta\gamma\rho_2\langle f^4, f^3\rangle + i\beta^2\gamma\langle\Theta, \psi_x\rangle + i\beta^2\gamma\langle\Theta, f_x^3\rangle.\end{aligned}\quad (47)$$

On the other hand, from (36) and (38), result in

$$\begin{aligned}\beta\gamma\{\rho_1\langle\lambda\Phi, f^1\rangle + \rho_2\langle\lambda\Psi, f^3\rangle\} &= i\beta\gamma\{\kappa\langle(\phi_x + \psi), f_x^1\rangle \\ &\quad + \mu_1\langle A^T\Phi, f^1\rangle - \rho_1\langle f^2, f^1\rangle + b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}f^3\rangle + \kappa\langle(\phi_x + \psi), f^3\rangle \\ &\quad - \beta\langle\Theta, f_x^3\rangle + \mu_2\langle A^\sigma\Psi, f^3\rangle - \rho_2\langle f^4, f^3\rangle\}.\end{aligned}\quad (48)$$

Using the identity (48) in the (47) equation and simplifying, lead to

$$\begin{aligned}\lambda\beta\gamma[\kappa\|\phi_x + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2] &= \lambda\beta\gamma[\rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2] \\ &\quad - i\{\mu_1\|A^{\frac{\pi}{2}}\Phi\|^2 + \mu_2\|A^{\frac{\pi}{2}}\Psi\|^2\} + i\beta\gamma\kappa\langle\phi_x, f_x^1\rangle + i\beta\gamma\kappa\langle\psi, f_x^1\rangle \\ &\quad + i\beta\gamma\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}f^3\rangle i\beta\gamma\kappa\langle\phi_x, f^3\rangle + i\beta\gamma\kappa\langle\psi, f^3\rangle \\ &\quad + i\beta\gamma\rho_1\langle f^2, \Phi\rangle + i\beta\gamma\rho_2\langle f^4, \Psi\rangle + i\beta^2\gamma\langle\Theta, \psi_x\rangle.\end{aligned}\quad (49)$$

As for $\varepsilon > 0$ exists $C_\varepsilon > 0$ such that $\|i\beta^2\gamma\Theta, \psi\| \leq \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + C_\varepsilon\|\Theta\|^2$, taking the real part, and applying the Cauchy-Schwarz and Young inequalities, estimative (34) of Lemma(3) and using the definitions of the F and U norm in (49) the proof of item (i) this lemma is completed.

On the other hand, performing the duality product of (40) for $\beta\kappa\rho_3\lambda\theta$, and remembering that the operators A^θ for all $\theta \in \mathbb{R}$ are self-adjunct, result in

$$\beta\kappa\delta\lambda\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 = \beta\kappa\rho_3\langle\lambda\Theta, i\lambda\theta\rangle - \beta\kappa\gamma\langle\psi_x, \lambda\theta\rangle + \beta\kappa K\langle A^\varepsilon\Theta, \lambda\theta\rangle + \beta\kappa\rho_3\langle f^6, \lambda\theta\rangle. \quad (50)$$

As

$$\begin{aligned}\rho_3\langle\lambda\Theta, i\lambda\theta\rangle &= \rho_3\lambda\|\Theta\|^2 + \rho_3\langle\lambda\Theta, f^5\rangle \\ &= \rho_3\lambda\|\Theta\|^2 + i\delta\langle A^{\frac{1}{2}}\theta, A^{\frac{1}{2}}f^5\rangle - i\gamma\langle\Psi, f_x^5\rangle + iK\langle A^\varepsilon\Theta, f^5\rangle - i\rho_3\langle f^6, f^5\rangle.\end{aligned}\quad (51)$$

$$-\gamma\langle\psi_x, \lambda\theta\rangle = -i\gamma\langle\psi_x, \Theta\rangle - i\gamma\langle\psi_x, f^5\rangle. \quad (52)$$

$$K\langle A^\varepsilon\Theta, \lambda\theta\rangle = -iK\|A^{\frac{\varepsilon}{2}}\Theta\|^2 - iK\langle A^\varepsilon\Theta, f^5\rangle. \quad (53)$$

$$\rho_3\langle f^6, \lambda\theta\rangle = i\rho_3\langle f^6, \Theta\rangle + i\rho_3\langle f^6, f^5\rangle. \quad (54)$$

Using (51)–(54) in (50), lead to

$$\begin{aligned} \beta\kappa\delta\lambda\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 &= \beta\kappa\rho_3\lambda\|\Theta\|^2 + i\beta\kappa\delta\langle A^{\frac{1}{2}}\theta, A^{\frac{1}{2}}f^5 \rangle - i\beta\kappa\gamma\langle \Psi, f_x^5 \rangle - i\beta\kappa\gamma\langle \psi_x, \Theta \rangle \\ &\quad - i\beta\kappa\gamma\langle \psi_x, f^5 \rangle - i\beta\kappa K\|A^{\frac{5}{2}}\Theta\|^2 + i\beta\kappa\rho_3\langle f^6, \Theta \rangle. \end{aligned} \quad (55)$$

Taking real part of the equation (55) and using the inequalities Cauchy-Schwarz and Young and norms $\|F\|_{\mathcal{H}}$ and $\|U\|_{\mathcal{H}}$, from $|\lambda| > 1$, for $\varepsilon > 0$ exists $C_\varepsilon > 0$ such that

$$\begin{aligned} \beta\kappa\delta|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 &\leq \beta\kappa\rho_3|\lambda|\|\Theta\|^2 + C\{\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|\|A^{\frac{1}{2}}f^5\| + \|\Psi\|\|f_x^5\| \\ &\quad + \|\psi_x\|^2 + \|\Theta\|^2 + \|\psi_x\|\|f^5\| + \|f^6\|\|\theta\|\}. \end{aligned}$$

Then, from Lemma(3) and as $\|\psi_x\|^2 = \|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2$, the proof of item (ii) of this lemma is finished. Q

3.1.1 Gevrey class of the first system

Definition 5 Let $t_0 \geq 0$ be a real number. A strongly continuous semigroup $S(t)$, defined on a Banach space H , is of Gevrey class $s > 1$ for $t > t_0$, if $S(t)$ is infinitely differentiable for $t > t_0$, and for every compact set $K \subset (t_0, \infty)$ and each $\mu > 0$, there exists a constant $C = C(\mu, K) > 0$ such that

$$\|S^n(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C\mu^n (n!)^s, \text{ for all } t \in K, n = 0, 1, 2, \dots \quad (56)$$

Theorem 6 ([19]) Let $S(t)$ be a strongly continuous and bounded semigroup on a Hilbert space. Suppose that the infinitesimal generator of the semigroup $S(t)$ satisfies the following estimate, for some $0 < r < 1$:

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \sup |\lambda|^r \|(i\lambda I - \mathcal{B})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty. \quad (57)$$

Then $S(t)$ is of Gevrey class s for $t > 0$, for every $s > \frac{1}{r}$.

The main result of this subsection is as follows:

Theorem 7 The semigroup $S(t) = e^{\mathcal{B}t}$ associated to the system (15)–(17) and (21)–(22) is of Gevrey class s for every $s > \frac{1}{r}$ for $r = \min\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\} \in (0, 1)$, with $(\tau, \sigma, \xi) \in R_{CG} := (0, 1)^3$.

Proof: From the resolvent equation $F = (i\lambda I - \mathcal{B}_1)U$ for $\lambda \in \mathbb{R}$, $U = (i\lambda I - \mathcal{B}_1)^{-1}F$. Furthermore, show (57) of theorem(6) it is enough to show, that for $\varepsilon > 0$ exists $C_\varepsilon > 0$, such that:

$$\frac{|\lambda|^r \|(i\lambda I - \mathcal{B}_1)^{-1}F\|_{\mathcal{H}}}{\|F\|_{\mathcal{H}}} \leq C_\varepsilon \iff |\lambda|^r \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad F \in \mathcal{H} \text{ and } C_\varepsilon > 0.$$

Equivalent to

$$|\lambda|^r \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_\varepsilon \{\|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}\} \quad \text{for } r \in (0, 1). \quad (58)$$

where $r = \min\left\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\right\}$, $0 < \tau \leq 1$, $0 < \sigma \leq 1$ and $0 < \xi \leq 1$.

Next, $|\lambda|^{\frac{\tau}{1+\tau}} \|\Phi\| + |\lambda|^{\frac{\sigma}{1+\sigma}} \|\Psi\| + |\lambda|^{\frac{\xi}{1+\xi}} \|\Theta\|$ will be estimated.

Let's start by estimating the term $|\lambda|^{\frac{\tau}{1+\tau}} \|\Phi\|$: It is assume that $|\lambda| > 1$, some ideas

could be borrowed from [13]. Set $\phi = \phi_1 + \phi_2$, where $\phi_1 \in D(A)$ and $\phi_2 \in D(A^0)$, with

$$i\lambda\Phi_1 + A\Phi_1 = f^2, \quad i\lambda\Phi_2 = \frac{\kappa}{\rho_1}A\phi + \frac{\kappa}{\rho_1}\psi_x - \frac{\mu_1}{\rho_1}A^\tau\Phi + A\Phi_1. \quad (59)$$

Firstly, applying in the product duality the first equation in (59) by ϕ_1 , then by $A\phi_1$ and recalling that the operator A is self-adjoint, resulting in

$$i\lambda\|\Phi_1\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\Phi_1\|^2 = \langle f^2, \Phi_1 \rangle, \quad (60)$$

taking first the imaginary part of (60) and in the sequence, the real part in addition to applying Cauchy-Schwarz inequality, results in

$$|\lambda|\|\Phi_1\| \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \quad \text{and} \quad \|A^{\frac{1}{2}}\Phi_1\| \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (61)$$

Applying the $A^{-\frac{1}{2}}$ operator on the second equation of (59), result in

$$i\lambda A^{-\frac{1}{2}}\Phi_2 = \frac{\kappa}{\rho_1}A^{\frac{1}{2}}\phi + \frac{\kappa}{\rho_1}A^{-\frac{1}{2}}\psi_x - \frac{\mu_1}{\rho_1}A^{\tau-\frac{1}{2}}\Phi + A^{\frac{1}{2}}\Phi_1,$$

then, as $\|A^{-\frac{1}{2}}\psi_x\|^2 = \langle -A^{-\frac{1}{2}}\psi_{xx}, A^{-\frac{1}{2}}\psi \rangle = \langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{-\frac{1}{2}}\psi \rangle = \|\psi\|^2$ and $\tau - \frac{1}{2} \leq \frac{\tau}{2}$ taking into account the continuous embedding $D(A^{\theta_2}) \rightarrow D(A^{\theta_1})$, $\theta_2 > \theta_1$ and using (60), result in

$$|\lambda|\|A^{-\frac{1}{2}}\Phi_2\| \leq C\{\|A^{\frac{1}{2}}\phi\| + \|A^{\frac{\tau}{2}}\Phi\| + \|\psi\|\} + \|A^{\frac{1}{2}}\Phi_1\|, \quad (62)$$

using (34), (41) and second estimative the equation (61), lead to

$$\|A^{-\frac{1}{2}}\Phi_2\|^2 \leq C|\lambda|^{-2}\{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\}. \quad (63)$$

On the other hand, from $\phi_2 = \phi - \phi_1$, (41) and as $\frac{\tau}{2} \leq \frac{1}{2}$ the inequality of (60), result in

$$\|A^{\frac{\tau}{2}}\Phi_2\|^2 \leq C\{\|A^{\frac{\tau}{2}}\Phi\|^2 + \|A^{\frac{\tau}{2}}\Phi_1\|^2\} \leq C\{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\}. \quad (64)$$

By Lions' interpolations inequality $0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}]$, result in

$$\|\Phi_2\|^2 \leq C(\|A^{-\frac{1}{2}}\Phi_2\|^2)^{\frac{\tau}{1+\tau}}(\|A^{\frac{\tau}{2}}\Phi_2\|^2)^{\frac{1}{1+\tau}}. \quad (65)$$

Then, using (63) and (64) in (65), for $|\lambda| > 1$, result in

$$\|\Phi_2\|^2 \leq C|\lambda|^{\frac{-2\tau}{1+\tau}}\{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\}. \quad (66)$$

Therefore, as $\|\phi\|^2 \leq \|\phi_1\|^2 + \|\phi_2\|^2$ from first inequality of (61), (66) and $|\lambda|^{-2} \leq |\lambda|^{\frac{-2\tau}{1+\tau}}$, result in

$$|\lambda|^{\frac{\tau}{1+\tau}}\|\Phi\| \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}} \iff |\lambda|\|\Phi\|^2 \leq C_\delta|\lambda|^{\frac{1-\tau}{1+\tau}}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{for} \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (67)$$

On the other hand, let's now estimate the missing term $|\lambda|^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}\|\Psi\|$: It is assumed that $|\lambda| > 1$. Set $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, where $\Psi_1 \in D(A)$ and $\Psi_2 \in D(A^0)$, with

$$i\lambda\Psi_1 + A\Psi_1 = f^4 \quad \text{and} \quad i\lambda\Psi_2 = -\frac{b}{\rho_2}A\psi - \frac{\kappa}{\rho_2}\phi_x - \frac{\kappa}{\rho_2}\psi - \frac{\beta}{\rho_2}\Theta_x - \frac{\mu_2}{\rho_2}A^\sigma\Psi + A\Psi_1. \quad (68)$$

Firstly, applying the product duality the first equation in (68) by Ψ_1 , and as the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjoint, result in

$$i\lambda\|\Psi_1\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\Psi_1\|^2 = \langle f^4, \Psi_1 \rangle. \quad (69)$$

Taking first the imaginary part of (69) and in the sequence, the real part in addition to applying Cauchy-Schwarz inequality, results in

$$|\lambda|\|\Psi_1\| \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \quad \|A^{\frac{1}{2}}\Psi_1\| \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (70)$$

As follows from the second equation in (68) that

$$i\lambda A^{-\frac{1}{2}}\Psi_2 = -\frac{b}{\rho_2}A^{\frac{1}{2}}\psi - \frac{\kappa}{\rho_2}A^{-\frac{1}{2}}\phi_x - \frac{\kappa}{\rho_2}A^{-\frac{1}{2}}\psi - \frac{\beta}{\rho_2}A^{-\frac{1}{2}}\Theta_x - \frac{\mu_2}{\rho_2}A^{\sigma-\frac{1}{2}}\Psi + A^{\frac{1}{2}}\Psi_1,$$

then, as $\|A^{-\frac{1}{2}}\phi_x\|^2 = \langle -A^{-\frac{1}{2}}\phi_{xx}, A^{-\frac{1}{2}}\phi \rangle = \|\phi\|^2$, $\|A^{-\frac{1}{2}}\Theta_x\|^2 = \|\Theta\|^2$ and $\sigma - \frac{1}{2} \leq \frac{\sigma}{2}$ taking into account the continuous embedding $D(A^{\theta_2}) \rightarrow D(A^{\theta_1})$, $\theta_2 > \theta_1$, lead to

$$|\lambda|\|A^{-\frac{1}{2}}\Psi_2\| \leq C\{\|A^{\frac{1}{2}}\phi\| + \|\psi\| + \|\Theta\| + \|A^{\frac{\sigma}{2}}\Psi\| + \|A^{\frac{1}{2}}\Psi_1\| \quad (71)$$

Using estimative (34) and estimative (68), for $|\lambda| > 1$, result in

$$\|A^{-\frac{1}{2}}\Psi_2\|^2 \leq C|\lambda|^{-2}\{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\}. \quad (72)$$

On the other hand, from $\Psi_2 = \Psi - \Psi_1$, (41) and as $\frac{\sigma}{2} \leq \frac{1}{2}$ the inequality (70), result in

$$\|A^{\frac{\sigma}{2}}\Psi_2\|^2 \leq C\{\|A^{\frac{\sigma}{2}}\Psi\|^2 + \|A^{\frac{\sigma}{2}}\Psi_1\|^2\} \leq C\{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\}. \quad (73)$$

Now, by Lions' interpolations inequality $0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{\sigma}{2}]$, lead to

$$\|\Psi_2\|^2 \leq C(\|A^{-\frac{1}{2}}\Psi_2\|^2)^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}(\|A^{\frac{\sigma}{2}}\Psi_2\|^2)^{\frac{1}{1+\sigma}}. \quad (74)$$

Then, using (72) and (73) in (74), for $|\lambda| > 1$, result in

$$\|\Psi_2\|^2 \leq C|\lambda|^{\frac{-2\sigma}{1+\sigma}}\{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\}. \quad (75)$$

Therefore, as $\|\Psi\|^2 \leq \|\Psi_2\|^2 + \|\Psi_1\|^2$ from inequality (70), (75) and $|\lambda|^{-2} \leq |\lambda|^{\frac{-2\sigma}{1+\sigma}}$, result in

$$|\lambda|^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}\|\Psi\| \leq C_{\delta}\|F\|_{\mathcal{H}} \iff |\lambda|\|\Psi\|^2 \leq |\lambda|^{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}}\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{for } 0 \leq \sigma \leq 1. \quad (76)$$

Finally, let's now estimate the missing term $|\lambda|^{\frac{\xi}{1+\xi}}\|\Theta\|$: Now we assume $|\lambda| > 1$.

Set $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$, where $\Theta_1 \in D(A)$ and $\Theta_2 \in D(A^0)$, with

$$i\lambda\Theta_1 + A\Theta_1 = f^6 \quad \text{and} \quad i\lambda\Theta_2 = -\frac{\delta}{\rho_3}A\theta - \frac{\gamma}{\rho_3}\Psi_x - \frac{K}{\rho_3}A^{\xi}\Theta + A\Theta_1. \quad (77)$$

Firstly, applying the product duality the first equation in (77) by Θ_1 and as the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjoint, lead to

$$i\lambda\|\Theta_1\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\Theta_1\|^2 = \langle f^6, \Theta_1 \rangle. \quad (78)$$

Taking first the imaginary part of (78) and in the sequence, the real part and applying Cauchy-Schwarz inequality, result in

$$|\lambda| \|\Theta_1\| \leq C \|F\|_{\mathcal{H}} \quad \text{and} \quad \|A^{\frac{1}{2}} \Theta_1\| \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (79)$$

As follows from the second equation in (77) that

$$i\lambda A^{-\frac{1}{2}} \Theta_2 = -\frac{\delta}{\rho_3} A^{\frac{1}{2}} \theta - \frac{\gamma}{\rho_3} A^{-\frac{1}{2}} \Psi_x - \frac{K}{\rho_3} A^{\xi-\frac{1}{2}} \Theta + A^{\frac{1}{2}} \Theta_1,$$

then, as $\|A^{-\frac{1}{2}} \Psi_x\|^2 = \|\Psi\|^2$ and $-\frac{1}{2} \leq 0$, $\xi - \frac{1}{2} \leq \frac{\xi}{2}$ taking into account the continuous embedding $D(A^{\theta_2}) \rightarrow D(A^{\theta_1})$, $\theta_2 > \theta_1$, result in

$$|\lambda| \|A^{-\frac{1}{2}} \Theta_2\| \leq C \{ \|A^{\frac{1}{2}} \theta\| + \|A^{\frac{\xi}{2}} \Theta\| + \|\Psi\| \} + \|A^{\frac{1}{2}} \Theta_1\| \quad (80)$$

Using estimatites (34), (41) and second estimative of equation (79), for $|\lambda| > 1$, lead to

$$\|A^{-\frac{1}{2}} \Theta_2\|^2 \leq C |\lambda|^{-2} \{ \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \}. \quad (81)$$

On the other hand, from $\Theta_2 = \Theta - \Theta_1$, (41) and as $\frac{\xi}{2} \leq \frac{1}{2}$ the second inequality of (79), result in

$$\|A^{\frac{\xi}{2}} \Theta_2\|^2 \leq C \{ \|A^{\frac{\xi}{2}} \Theta\|^2 + \|A^{\frac{\xi}{2}} \Theta_1\|^2 \} \leq C \{ \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \}. \quad (82)$$

Now, by Lions' interpolations inequality $0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{\xi}{2}]$, result in

$$\|\Theta_2\|^2 \leq C (\|A^{-\frac{1}{2}} \Theta_2\|^2)^{\frac{\xi}{1+\xi}} (\|A^{\frac{\xi}{2}} \Theta_2\|^2)^{\frac{1}{1+\xi}}. \quad (83)$$

Then, using (81) and (82) in (83), for $|\lambda| > 1$, result in

$$\|\Theta_2\|^2 \leq C |\lambda|^{\frac{-2\xi}{1+\xi}} \{ \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \}. \quad (84)$$

Therefore, as $\|\Theta\|^2 \leq \|\Theta_2\|^2 + \|\Theta_1\|^2$ from first inequality of (79), estimative (84) and $|\lambda|^{-2} \leq |\lambda|^{\frac{-2\xi}{1+\xi}}$, result in

$$|\lambda|^{\frac{\xi}{1+\xi}} \|\Theta\| \leq C_{\delta} \|F\|_{\mathcal{H}} \iff |\lambda| \|\Theta\|^2 \leq C_{\delta} |\lambda|^{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \text{for} \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (85)$$

Using the estimates (67) and (76) in the inequality item (i) of Lemma(4), result in

$$\beta\gamma\kappa \|\phi_x + \psi\|^2 + \beta\gamma b \|A^{\frac{1}{2}} \psi\|^2 \leq C_{\delta} \{ |\lambda|^{\frac{-2\tau}{1+\tau}} + |\lambda|^{\frac{-2\sigma}{1+\sigma}} \} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{\delta} |\lambda|^{-1} \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (86)$$

Furthermore using estimative (85) in estimate (46) item (ii) of the Lemma 4, we have

$$\beta\kappa\delta \|A^{\frac{1}{2}} \theta\|^2 \leq \beta\kappa\rho_3 \|\Theta\|^2 + C_{\delta} |\lambda|^{-1} \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\delta} |\lambda|^{\frac{-2\xi}{1+\xi}} \|F\|^2 + C_{\delta} |\lambda|^{-1} \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (87)$$

Finally summing the estimates (67),(76), (85),(86) and (87), we have

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_{\delta} \left\{ |\lambda|^{\frac{-2\tau}{1+\tau}} + |\lambda|^{\frac{-2\sigma}{1+\sigma}} + |\lambda|^{\frac{-2\xi}{1+\xi}} \right\} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{\delta} |\lambda|^{-1} \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}},$$

as for $(\tau, \sigma, \xi) \in [0, 1]^3$, we have $-1 \leq 2 \max\{-\frac{\tau}{1+\tau}, -\frac{\sigma}{1+\sigma}, -\frac{\xi}{1+\xi}\} = -2 \min\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\}$, then

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_{\delta} |\lambda|^{-2 \min\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\}} \left[\|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \right]$$

Equivalently

$$|\lambda|^{\min\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\}} \|U\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\delta} \|F\|_{\mathcal{H}} \quad \text{for} \quad (\tau, \sigma, \xi) \in [0, 1]^3.$$

As $r = \min\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\} \in (0, 1)$ for $(\tau, \sigma, \xi) \in (0, 1]^3$ the proof of this theorem is finished.

3.1.2 Analyticity of $S(t) = e^{B_1 t}$ for $(\tau, \sigma, \xi) \in [\frac{1}{2}, 1]^3$

Next, we announce the Liu-Zheng Book Theorem that will be applied in the proof of the analyticity of $S(t) = e^{B_i t}$ for $i = 1, 2$ in their respective regions.

Theorem 8 (see [12]) *Let $S(t) = e^{B_i t}$ be C_0 -semigroup of contractions on a Hilbert space H . Suppose that*

$$\rho(B) \supseteq \{i\lambda/\lambda \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \quad (88)$$

Then $S(t)$ is analytic if and only if

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|\lambda(i\lambda I - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty \quad (89)$$

holds.

Before proving the main result of this section, the following two lemmas will be proved.

Lemma 9 *The C_0 -semigroup of contractions $S(t) = e^{B_1 t}$ satisfies the condition*

$$\rho(B_1) \supseteq \{i\lambda/\lambda \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}. \quad (90)$$

Proof: Let's prove $i\mathbb{R} \subset \rho(B_1)$ by contradiction, it is supposed that $i\mathbb{R} \not\subset \rho(B_1)$. As $0 \in \rho(B_1)$ and $\rho(B_1)$ is open, the highest positive number λ_0 is considered such that the interval $(-i\lambda_0, i\lambda_0) \subset \rho(B_1)$, then $i\lambda_0$ or $-i\lambda_0$ is an element of the spectrum $\sigma(B_1)$. It is supposed that $i\lambda_0 \in \sigma(B_1)$ (if $-i\lambda_0 \in \sigma(B_1)$ the proceeding is similar). Then, for $0 < v < \lambda_0$ there exist a sequence of real numbers (λ_n) , with $0 < v \leq \lambda_n < \lambda_0$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, and a vector sequence $U_n = (\phi_n, \phi_n, \psi_n, \psi_n, \theta_n, \theta_n) \in D(B_1)$ with unitary norms, such that

$$\|(i\lambda_n - B_1)U_n\|_{\mathcal{H}} = \|F_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0,$$

as $n \rightarrow \infty$. From (43) for $0 \leq \tau \leq 1$ and $0 \leq \sigma \leq 1$, result in

$$\beta\kappa\gamma \|\phi_{xn} + \psi_n\|^2 + b\beta\gamma \|A^{\frac{1}{2}}\psi_n\|^2 \leq C_{\delta} \|F_n\|_{\mathcal{H}} \|U_n\|_{\mathcal{H}}.$$

From (44), for $0 \leq \xi \leq 1$, result in

$$\beta\kappa\delta \|A^{\frac{1}{2}}\theta_n\|^2 \leq C_{\delta} \|F_n\|_{\mathcal{H}} \|U_n\|_{\mathcal{H}}. \quad (91)$$

In addition to the estimative (41), for $0 \leq \tau \leq 1$ and $0 \leq \sigma \leq 1$, result in

$$\beta\gamma\mu_1\|A^{\frac{\tau}{2}}\Phi_n\|^2 + \kappa\gamma\mu_2\|A^{\frac{\sigma}{2}}\Psi_n\|^2 + \frac{\beta\kappa K}{\rho_3}\|A^{\frac{\xi}{2}}\Theta_n\|^2 \leq C_\delta\|F_n\|_{\mathcal{H}}\|U_n\|_{\mathcal{H}}.$$

Consequently, $\|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 \rightarrow 0$. Therefore, lead to $\|U_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ but this is absurd, since $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$. Thus, $iR \subset \rho(B_1)$. This completes the proof.

Lemma 10 *Let $\delta > 0$. There exists a constant $C_\delta > 0$ such that the solutions of (18)–(20) and (21)–(22) for $|\lambda| \geq \delta$ satisfy the inequality*

$$(i) \quad |\lambda|\|\Phi\|^2 \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1. \quad (92)$$

$$(ii) \quad |\lambda|\|\Psi\|^2 \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1. \quad (93)$$

$$(iii) \quad |\lambda|\|\Theta\|^2 \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq \xi \leq 1. \quad (94)$$

Proof: **Item (i):** of this lemma will be initially shown, performing the duality product of (36) for $\frac{\rho_1}{\mu_1} A^{-\tau} \lambda \phi$, and recalling that the operator A^v is self-adjoint for all $v \in \mathbb{R}$, results in

$$\begin{aligned} \lambda\|\Phi\|^2 &= \frac{\kappa}{\mu_1} \langle \lambda(-A\phi + \psi_x), A^{-\tau}\Phi \rangle + \frac{\rho_1}{\mu_1} \langle f^2, \lambda A^{-\tau}\Phi \rangle - i \frac{\rho_1}{\mu_1} \lambda^2 \|A^{-\frac{\tau}{2}}\Phi\|^2 \\ &= i \frac{\kappa}{\mu_1} \langle (A\Phi + Af^1), A^{-\tau}\Phi \rangle - i \frac{\kappa}{\mu_1} \langle \Psi_x + f_x^3, A^{-\tau}\Phi \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\mu_1} \langle f^2, i\kappa A^{1-\tau}\phi - i\kappa A^{-\tau}\psi_x + i\mu_1\Phi - i\rho_1 A^{-\tau}f_2 \rangle - i \frac{\rho_1}{\mu_1} \lambda^2 \|A^{-\frac{\tau}{2}}\Phi\|^2 \\ &= i \frac{\kappa}{\mu_1} \|A^{\frac{1-\tau}{2}}\Phi\|^2 + i \frac{\kappa}{\mu_1} \langle A^{\frac{1}{2}}f^1, A^{\frac{1}{2}-\tau}\Phi \rangle + i \frac{\kappa}{\mu_1} \langle \Psi, A^{-\tau}\Phi_x \rangle - i \frac{\kappa}{\mu_1} \langle f_x^3, A^{-\tau}\Phi \rangle \\ &\quad - i \langle f^2, \Phi \rangle - i \frac{\kappa}{\mu_1} \langle f^2, A^{1-\tau}\phi \rangle + i \frac{\kappa}{\mu_1} \langle A^{-\tau}f^2, \psi_x \rangle + i \frac{\rho_1}{\mu_1} \|A^{-\frac{\tau}{2}}f^2\|^2 \\ &\quad - i \frac{\rho_1}{\mu_1} \lambda^2 \|A^{-\frac{\tau}{2}}\Phi\|^2. \end{aligned}$$

Noting that: $\|A^{-\tau}\Phi_x\|^2 = \langle A^{-\tau}\Phi_x, A^{-\tau}\Phi_x \rangle = \langle -A^{-\tau}\Phi_{xx}, A^{-\tau}\Phi \rangle = \|A^{\frac{1-2\tau}{2}}\Phi\|^2$, taking real part and considering that $\frac{1}{2} \leq \tau \leq 1$ using estimative (41) and using Cauchy-Schwarz and Young inequalities, for $\varepsilon > 0$ exists C_ε , such that

$$|\lambda|\|\Phi\|^2 \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \varepsilon\|A^{-\tau}\Phi_x\|^2 + C_\varepsilon\|\Psi\|^2.$$

As $0 \leq \frac{\sigma}{2}$, then from estimative (41) $\|\Psi\|^2 \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}$. From the continuous embedding for $|\lambda| \geq 1$, the proof of item (i) of this lemma is finished.

Item (ii): Again similarly, performing the duality product of (38) for $\frac{\rho_2}{\mu_2} A^{-\sigma} \lambda \Psi$, using (37), and recalling the self-adjointness of A^v , $v \in \mathbb{R}$, leads to

$$\begin{aligned} \lambda\|\Psi\|^2 &= -\frac{b}{\mu_2} \langle A\lambda\psi, A^{-\sigma}\Psi \rangle - \frac{\kappa}{\mu_2} \langle \lambda(\phi_x + \psi), A^{-\sigma}\Psi \rangle + \frac{\rho_2}{\mu_2} \langle f^4, \lambda A^{-\sigma}\Psi \rangle - i \frac{\rho_2}{\mu_2} \lambda^2 \|A^{-\frac{\sigma}{2}}\Psi\|^2 \\ &= i \frac{b}{\mu_2} \|A^{\frac{1-\sigma}{2}}\Psi\|^2 + i \frac{b}{\mu_2} \langle A^{\frac{1}{2}}f^3, A^{\frac{1}{2}-\sigma}\Psi \rangle + i \frac{\kappa}{\mu_2} \langle A^{-\sigma}\Phi_x, \Psi \rangle + i \frac{\kappa}{\mu_2} \langle f_x^1, A^{-\sigma}\Psi \rangle \\ &\quad + i \frac{\kappa}{\mu_2} \|A^{-\frac{\sigma}{2}}\Psi\|^2 + i \frac{\kappa}{\mu_2} \langle f^3, A^{-\sigma}\Psi \rangle - i \frac{b}{\rho_2} \langle f^4, A^{1-\sigma}\psi \rangle - i \frac{\kappa}{\mu_2} \langle f^4, A^{-\sigma}\phi_x \rangle \\ &\quad - i \frac{\kappa}{\mu_2} \langle f^4, A^{-\sigma}\psi \rangle - i \frac{\beta}{\mu_2} \langle f^4, A^{-\sigma}\Theta \rangle - i \langle f^4, \Psi \rangle + i \frac{\rho_2}{\mu_2} \|A^{-\frac{\sigma}{2}}f^4\|^2 - i \frac{\rho_2}{\mu_2} \lambda^2 \|A^{-\frac{\sigma}{2}}\Psi\|^2. \end{aligned}$$

Noting that: $\|A^{\frac{1-2\sigma}{2}}\Phi\|^2 = \|A^{-\sigma}\Phi_x\|^2$, taking real part, considering $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$, using

Cauchy-Schwarz and Young inequalities, for $\varepsilon > 0$ exists C_ε such that

$$|\lambda| \|\Psi\|^2 \leq C_\delta \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + C_\varepsilon \|A^{\frac{1-2\sigma}{2}} \Phi\|^2 + \varepsilon \|\Psi\|^2.$$

As $-\frac{1-2\sigma}{2} \leq 0 \iff \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$. Considering $|\lambda| \geq 1$, using estimative (34), norms $\|F\|_{\mathcal{H}}$ and $\|U\|_{\mathcal{H}}$, the proof of item (ii) of this lemma is finished.

Item (iii): Finally, let's prove the (iii) item of this lemma, performing the duality product of (40) for $\frac{\rho_3}{K} A^{-\xi} \lambda \Theta$, using (37), and recalling the self-adjointness of A^v , $v \in \mathbb{R}$, result in

$$\begin{aligned} \lambda \|\Theta\|^2 &= -i\lambda^2 \frac{\rho_3}{K} \|A^{-\frac{\xi}{2}} \Theta\|^2 + i \frac{\delta}{K} \|A^{\frac{1-\xi}{2}} \Theta\|^2 + i \frac{\delta}{K} \langle A^{\frac{1}{2}} f^5, A^{\frac{1}{2}-\xi} \Theta \rangle - i \frac{\delta}{K} \langle f^6, A^{1-\xi} \theta \rangle \\ &\quad + \frac{\gamma}{K} \langle \sqrt{|\lambda|} \Psi, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}} A^{-\xi} \Theta_x \rangle - i \frac{\gamma}{K} \langle f^6, A^{-\xi} \Psi_x \rangle - i \langle f^6, \Theta \rangle + i \frac{\rho_3}{K} \|A^{-\frac{\xi}{2}} f^6\|^2. \end{aligned}$$

Taking the real part, applying Cauchy-Schwarz and Young inequalities, for $\varepsilon > 0$ exists $C_\varepsilon > 0$ such that

$$\begin{aligned} |\lambda| \|\Theta\|^2 &\leq C \{ \|A^{\frac{1-\xi}{2}} \Theta\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} f^5\| \|A^{\frac{1}{2}-\xi} \Theta\| \\ &\quad + \|f^6\| \|A^{1-\xi} \theta\| + \|f^6\| \|A^{-\xi} \Psi_x\| \} + C_\varepsilon |\lambda| \|\Psi\|^2 + \varepsilon |\lambda| \|A^{-\xi} \Theta_x\|^2. \end{aligned} \quad (95)$$

Considering $\frac{1}{2} \leq \xi \leq 1$, $\frac{1-2\xi}{2} \leq 0$, and remembering the identities $\|A^{-\xi} \Psi_x\|^2 = \|A^{\frac{1-2\xi}{2}} \Psi\|^2$, $\|A^{-\xi} \Theta_x\|^2 = \|A^{\frac{1-2\xi}{2}} \Theta\|^2$ in addition to using the item (ii) of this lemma the proof of the item (iii) of this lemma is finished.

The main result of this subsection is the following theorem

Theorem 11 *The semigroup $S(t) = e^{B_1 t}$ associated to the system (15)–(17) and (21)–(22) is analytic when the three parameters τ , σ and ξ vary in the interval $[\frac{1}{2}, 1]$.*

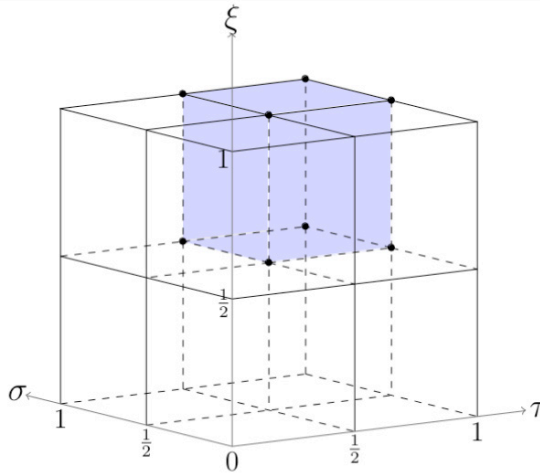


FIG. 01: Region R_{A_1} of Analyticity de $S(t) = e^{B_1 t}$

Proof: We will prove this theorem will be proved using the Theorem 8, so the two

conditions (88) and (89) must be proved. From Lemma 9, the condition (88) is verified, it remains to verify the condition (89), note that proving this condition is equivalent to: let $\delta > 0$ there exists a constant $C_\delta > 0$ such that the solutions of (15)–(21) for $|\lambda| \geq \delta$ satisfy the inequality

$$|\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_\delta \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (96)$$

It is not difficult to see that this inequality (96) arises from the inequalities of the Lemmas 4 and 10, so the proof of this theorem is finished.

3.2 Regularity of the second system

Next, two fundamental Lemmas for the determination of the Gevrey class and the proof of the analyticity of the semigroup $S(t) = e^{B_2 t}$ are presented.

Lemma 12 *Let $S(t) = e^{B_2 t}$ be a C_0 -semigroup on contractions on Hilbert space $H = H_2$, the solutions of the system (18)–(22) satisfy the inequality*

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - B_2)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty. \quad (97)$$

Proof: To show the (33) inequality, it suffices to show that, given $\delta > 0$ there exists a constant $C_\delta > 0$ such that the solutions of the system (18)–(22) for $|\lambda| > \delta$ satisfy the inequality

$$\frac{\|U\|_{\mathcal{H}}}{\|F\|_{\mathcal{H}}} \leq C_\delta \iff \|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \|(i\lambda I - B_2)^{-1} F\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_\delta \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (98)$$

If $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6) \in H$ then the solution $U = (\phi, \psi, \Psi, \theta, \Theta) \in D(B_2)$ the resolvent equation $(i\lambda I - B_2)U = F$ can be written in the form

$$i\lambda\phi - \Phi = f^1 \quad \text{in } D(A^{\frac{1}{2}}), \quad (99)$$

$$i\lambda\Phi - \frac{\kappa}{\rho_1}(\phi_x + \psi)_x + \frac{\mu}{\rho_1}\Theta_x + \frac{\mu_1}{\rho_1}A^\tau\Phi = f^2 \quad \text{in } D(A^0), \quad (100)$$

$$i\lambda\psi - \Psi = f^3 \quad \text{in } D(A^{\frac{1}{2}}), \quad (101)$$

$$i\lambda\Psi + \frac{b}{\rho_2}A\psi + \frac{\kappa}{\rho_2}(\phi_x + \psi) - \frac{\mu}{\rho_2}\Theta + \frac{\mu_2}{\rho_2}A^\sigma\Psi = f^4 \quad \text{in } D(A^0), \quad (102)$$

$$i\lambda\theta - \Theta = f^5 \quad \text{in } D(A^{\frac{1}{2}}), \quad (103)$$

$$i\lambda\Theta + \frac{\delta}{\rho_3}A\theta + \frac{\mu}{\rho_3}(\Phi_x + \Psi) + \frac{\gamma}{\rho_3}A^\xi\Theta = f^6 \quad \text{in } D(A^0). \quad (104)$$

Using the fact that the operator is dissipative B_2 , result in

$$\mu_1 \|A^{\frac{\tau}{2}}\Phi\|^2 + \mu_2 \|A^{\frac{\sigma}{2}}\Psi\|^2 + \gamma \|A^{\frac{\xi}{2}}\Theta\|^2 = \operatorname{Re}(\langle (i\lambda I - B_2)U, U \rangle) = \operatorname{Re}\langle F, U \rangle \leq \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (105)$$

On the other hand, performing the duality product of (100) for $\rho_1\phi$, and as the operators A^ν for all $\nu \in \mathbb{R}$ are self-adjoint, lead to

$$\kappa \langle (\phi_x + \psi), \phi_x \rangle = \rho_1 \|\Phi\|^2 + \rho_1 \langle \Phi, f^1 \rangle - i\lambda\mu_1 \|A^{\frac{\tau}{2}}\phi\|^2 + \mu_1 \langle A^{\frac{\tau}{2}}f^1, A^{\frac{\tau}{2}}\phi \rangle + \rho_1 \langle f^2, \phi \rangle + \mu \langle \Theta, \phi_x \rangle,$$

now performing the duality product of (99) for $\rho_2\psi$, and as the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjoint, result in

$$\begin{aligned} \kappa\langle(\phi_x + \psi), \psi\rangle + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 &= \rho_2\|\Psi\|^2 + \rho_2\langle\Psi, f^3\rangle \\ &\quad + \mu\langle\Theta, \psi\rangle - i\lambda\mu_2\|A^{\frac{\sigma}{2}}\psi\|^2 + \mu_2\langle A^{\frac{\sigma}{2}}f^3, A^{\frac{\sigma}{2}}\psi\rangle + \rho_2\langle f^4, \psi\rangle. \end{aligned}$$

Adding the last 2 equations, result in

$$\begin{aligned} \kappa\|\phi_x + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 &= \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 - i\lambda\{\mu_1\|A^{\frac{\tau}{2}}u\|^2 + \mu_2\|A^{\frac{\sigma}{2}}\psi\|^2\} \\ &\quad + \rho_1\langle\Phi, f^1\rangle + \rho_2\langle\Psi, f^3\rangle + \mu_1\langle A^{\frac{\tau}{2}}f^1, A^{\frac{\tau}{2}}\phi\rangle + \mu_2\langle A^{\frac{\sigma}{2}}f^3, A^{\frac{\sigma}{2}}\phi\rangle \\ &\quad + \rho_1\langle f^2, \phi\rangle + \rho_2\langle f^4, \psi\rangle + \mu\langle\Theta, \phi_x + \psi\rangle. \quad (106) \end{aligned}$$

Taking real part, applying Cauchy-Schwarz and Young inequalities, for $\varepsilon > 0$ exists $C_\varepsilon > 0$ such that

$$\kappa\|\phi_x + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 \leq \rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + \varepsilon\|\phi_x + \psi\|^2 + C_\varepsilon\|\Theta\|^2 + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}.$$

From estimative (102) and the fact $0 \leq \frac{\tau}{2}$, $0 \leq \frac{\sigma}{2}$ and $0 \leq \frac{\xi}{2}$ the continuous embedding $D(A^{\theta_2}) \rightarrow D(A^{\theta_1})$, $\theta_2 > \theta_1$, result in

$$\kappa\|\phi_x + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (107)$$

On the other hand, performing the duality product of (101) for $\rho_3\theta$, and remembering that the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjoint and from (100), lead to

$$\delta\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 = \rho_3\|\Theta\|^2 + \rho_3\langle\Theta, f^5\rangle + \mu\langle\Phi, \theta_x\rangle - \mu\langle\Psi, \theta\rangle - i\lambda\gamma\|A^{\frac{\xi}{2}}\theta\|^2 + \gamma\langle A^{\frac{\xi}{2}}f^5, A^{\frac{\xi}{2}}\theta\rangle + \rho_3\langle f^6, \theta\rangle.$$

Taking the real part, using the inequalities Cauchy-Schwarz and Young, for $\varepsilon > 0$ exists $C_\varepsilon > 0$ which does not depend on λ such that

$$\begin{aligned} \delta\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 &\leq C\{\|\Theta\|^2 + \|\Theta\|\|f^5\| + \|A^{\frac{\xi}{2}}f^5\|\|A^{\frac{\xi}{2}}\theta\| + \|f^6\|\|\theta\|\} \\ &\quad + C_\varepsilon\{\|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2\} + \varepsilon\{\|\theta\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2\}. \end{aligned}$$

Then, from estimative (102) and the fact $0 \leq \frac{\tau}{2}$, $0 \leq \frac{\sigma}{2}$ and $0 \leq \frac{\xi}{2} \leq \frac{1}{2}$ the continuous embedding $D(A^{\theta_2}) \rightarrow D(A^{\theta_1})$, $\theta_2 > \theta_1$, result in

$$\beta\kappa\delta\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (108)$$

Finally, from estimates (102), (104) and (105), the proof of this lemma is finished.

Lemma 13 *Let $\delta > 0$. There exists a constant $C_\delta > 0$ such that the solutions of (18)–(22) for $|\lambda| \geq \delta$ satisfy the inequalities*

$$(i) \quad |\lambda|[\kappa\|\phi_x + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2] \leq |\lambda|[\rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2 + C\|\Theta\|^2] + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (109)$$

$$(ii) \quad \delta|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 \leq C|\lambda|\{\|\Theta\|^2 + \|\Psi\|^2\} + C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (110)$$

Proof: Item (i): Performing the duality product of (100) for $\rho_1\lambda\phi$, and remembering that the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjunct, lead to

$$\begin{aligned}\kappa\lambda\langle(\phi_x + \psi), \phi_x\rangle &= \rho_1\lambda\|\Phi\|^2 + \rho_1\langle\lambda\Phi, f^1\rangle - i\mu_1\|A^{\frac{\pi}{2}}\Phi\|^2 \\ &\quad - i\mu_1\beta\gamma\langle A^\tau\Phi, f^1\rangle + i\rho_1\langle f^2, \Phi\rangle + i\rho_1\langle f^2, f^1\rangle + \mu\langle\Theta, \lambda\phi_x\rangle.\end{aligned}$$

Now performing the duality product of (99) for $\rho_2\lambda\psi$, and remembering that the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjunct, resulting in

$$\begin{aligned}\lambda[\kappa\langle(\phi_x + \psi), \psi\rangle + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2] &= \rho_2\lambda\|\Psi\|^2 + \rho_2\langle\lambda\Psi, f^3\rangle - i\mu_2\|A^{\frac{\pi}{2}}\Psi\|^2 - i\mu_2\langle A^\sigma\Psi, f^3\rangle \\ &\quad + i\rho_2\langle f^4, \Psi\rangle + i\rho_2\langle f^4, f^3\rangle + \mu\langle\Theta, \lambda\psi\rangle.\end{aligned}$$

Adding the last 2 equations, result in

$$\begin{aligned}\lambda[\kappa\|\phi_x + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2] &= \lambda[\rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2] - i\{\mu_1\|A^{\frac{\pi}{2}}\Phi\|^2 \\ &\quad + \mu_2\|A^{\frac{\pi}{2}}\Psi\|^2\} + \rho_1\langle\lambda\Phi, f^1\rangle + \rho_2\langle\lambda\Psi, f^3\rangle - i\{\mu_1\langle A^\tau\Phi, f^1\rangle \\ &\quad + \mu_2\langle A^\sigma\Psi, f^3\rangle\} + i\rho_1\langle f^2, \Phi\rangle + i\rho_2\langle f^4, \Psi\rangle + i\rho_1\langle f^2, f^1\rangle \\ &\quad + i\rho_2\langle f^4, f^3\rangle + \mu\langle\sqrt{|\lambda|}\Theta, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}(\phi_x + \psi)\rangle.\end{aligned}\quad (111)$$

On the other hand, from (100) and (102), result in

$$\begin{aligned}\rho_1\langle\lambda\Phi, f^1\rangle + \rho_2\langle\lambda\Psi, f^3\rangle &= i\{\kappa\langle(\phi_x + \psi), f_x^1\rangle - \mu\langle\Theta, f_x^1\rangle \\ &\quad + \mu_1\langle A^\tau\Phi, f^1\rangle - \rho_1\langle f^2, f^1\rangle + b\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}f^3\rangle + \kappa\langle(\phi_x + \psi), f^3\rangle \\ &\quad - \mu\langle\Theta, f^3\rangle + \mu_2\langle A^\sigma\Psi, f^3\rangle - \rho_2\langle f^4, f^3\rangle\}.\end{aligned}\quad (112)$$

Using the identity (112) in the (111) equation and simplifying, leads to

$$\begin{aligned}\lambda[\kappa\|\phi_x + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2] &= \lambda[\rho_1\|\Phi\|^2 + \rho_2\|\Psi\|^2] - i\{\mu_1\|A^{\frac{\pi}{2}}\Phi\|^2 + \mu_2\|A^{\frac{\pi}{2}}\Psi\|^2\} + i\kappa\langle\phi_x, f_x^1\rangle \\ &\quad + i\kappa\langle\psi, f_x^1\rangle - i\mu\langle\Theta, f_x^1\rangle + ib\langle A^{\frac{1}{2}}\psi, A^{\frac{1}{2}}f^3\rangle + i\kappa\langle\phi_x, f^3\rangle + i\kappa\langle\psi, f^3\rangle \\ &\quad - i\mu\langle\Theta, f^3\rangle + i\rho_1\langle f^2, \Phi\rangle + i\rho_2\langle f^4, \Psi\rangle + \mu\langle\sqrt{|\lambda|}\Theta, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}(\phi_x + \psi)\rangle.\end{aligned}\quad (113)$$

As for $\varepsilon > 0$, exists $C_\varepsilon > 0$, such that

$$\left| \mu\langle\sqrt{|\lambda|}\Theta, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}(\phi_x + \psi)\rangle \right| \leq C_\varepsilon|\lambda|\|\Theta\|^2 + \varepsilon|\lambda|\|\phi_x + \psi\|^2,$$

taking the real part of the equation (113), applying the Cauchy-Schwarz and Young inequalities and estimative (98) of Lemma 12, the proof of item (i) this lemma is completed.

On the other hand, performing the duality product of (104) for $\rho_3\lambda\theta$, and remembering that the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjunct, result in

$$\delta\lambda\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 = \rho_3\lambda\|\Theta\|^2 + i\mu\langle\Phi, \Theta_x\rangle - i\gamma\|A^{\frac{\xi}{2}}\Theta\|^2 + i\rho_3\langle f^6, \Theta\rangle - i\mu\langle\Psi, \Theta\rangle.\quad (114)$$

As

$$i\mu\langle\Phi, \Theta_x\rangle = i\mu\langle\Phi, i\lambda\theta_x - f_x^5\rangle = \mu\langle\sqrt{|\lambda|}\Phi, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}\theta_x\rangle - i\mu\langle\Phi, f_x^5\rangle.\quad (115)$$

Then, using (115) in (114) and taking real part, lead to

$$\delta|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 = \rho_3\lambda\|\Theta\|^2 + \mu\langle\sqrt{|\lambda|}\Phi, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}\theta_x\rangle - i\mu\langle\Phi, f_x^5\rangle + i\rho_3\langle f^6, \Theta\rangle - i\mu\langle\Psi, \Theta\rangle, \quad (116)$$

applying Cauchy-Schwarz and Young inequalities, for $\varepsilon > 0$ exists $C_\varepsilon > 0$, such that

$$\delta|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 \leq \rho_3|\lambda|\|\Theta\|^2 + \varepsilon|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 + C_\varepsilon|\lambda|\|\Phi\|^2 + C\{\|\Phi\|\|A^{\frac{1}{2}}f^5\| + \|f^6\|\|\Theta\| + \|\Phi\|^2 + \|\Theta\|^2\}.$$

Then, from Lemma 12, the proof of item (ii) of this lemma is finished.

3.2.1 Gevrey class of the second system

Theorem 14 *The semigroup $S(t) = e^{B_2 t}$ associated to system (18)–(22) is of Gevrey class v for every $s > \frac{1}{r}$ for $r = \min\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\} \in (0, 1)$, with $(\tau, \sigma, \xi) \in R_{CG} := (0, 1]^3$.*

Proof: From the resolvent equation $F = (i\lambda I_{B_2})U$ for $\lambda \in \mathbb{R}$, result in $U = (i\lambda I - B_2)^{-1}F$. Furthermore to show (57) this is theorem(6) it is enough to show:

$$|\lambda|^r \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_\delta \{ \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} \} \quad \text{for } r \in (0, 1). \quad (117)$$

where $r = \min\left\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\right\}$, $0 < \tau \leq 1$, $0 < \sigma \leq 1$ and $0 < \xi \leq 1$.

Next, $|\lambda|^{\frac{\tau}{1+\tau}} \|\Phi\|$, $|\lambda|^{\frac{\sigma}{1+\sigma}} \|\Psi\|$ and $|\lambda|^{\frac{\xi}{1+\xi}} \|\Theta\|$ will be estimated.

Let's start by estimating the term $|\lambda|^{\frac{\tau}{1+\tau}} \|\Phi\|$: It is assumed that $|\lambda| > 1$. Set $\phi = \phi_1 + \phi_2$, where $\phi_1 \in D(A)$ and $\phi_2 \in D(A^0)$, with

$$i\lambda\Phi_1 + A\Phi_1 = f^2, \quad i\lambda\Phi_2 = -\frac{\kappa}{\rho_1}A\phi + \frac{\kappa}{\rho_1}\psi_x - \frac{\mu}{\rho_1}\Theta_x - \frac{\mu_1}{\rho_1}A^\tau\Phi + A\Phi_1. \quad (118)$$

Firstly, applying the product duality the first equation in (118) by ϕ_1 , then by $A\phi_1$, and recalling that the operator A is self-adjoint, resulting in

$$i\lambda\|\Phi_1\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\Phi_1\|^2 = \langle f^2, \Phi_1 \rangle. \quad (119)$$

Taking first the imaginary part of (119) and in the sequence, the real part and applying Cauchy-Schwarz inequality, results in

$$|\lambda|\|\Phi_1\| \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \quad \|\Lambda^{\frac{1}{2}}\Phi_1\| \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (120)$$

Applying the $A^{-\frac{1}{2}}$ operator on the second equation of (118), lead to

$$i\lambda A^{-\frac{1}{2}}\Phi_2 = -\frac{\kappa}{\rho_1}A^{\frac{1}{2}}\phi + \frac{\kappa}{\rho_1}A^{-\frac{1}{2}}\psi_x - \frac{\mu}{\rho_1}A^{-\frac{1}{2}}\Theta_x - \frac{\mu_1}{\rho_1}A^{\tau-\frac{1}{2}}\Phi + A^{\frac{1}{2}}\Phi_1,$$

then, as $\|A^{-\frac{1}{2}}\psi_x\|^2 = \|\psi\|^2$ and $\tau - \frac{1}{2} \leq \frac{\tau}{2}$ taking into account the continuous embedding $D(A^{\theta_2}) \rightarrow D(A^{\theta_1})$, $\theta_2 > \theta_1$, result in

$$|\lambda|^2 \|A^{-\frac{1}{2}}\Phi_2\|^2 \leq C\{\|A^{\frac{1}{2}}\phi\|^2 + \|A^{\frac{\tau}{2}}\Phi\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\Theta\|^2\} + \|A^{\frac{1}{2}}\Phi_1\|^2 \quad (121)$$

Using (98) and second estimative of equation (120), result in

$$\|A^{-\frac{1}{2}}\Phi_2\|^2 \leq C|\lambda|^{-2}\{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\}. \quad (122)$$

On the other hand, from $\phi_2 = \phi - \phi_1$, (105) and as $\frac{\tau}{2} \leq \frac{1}{2}$ the inequality (120), result in

$$\|A^{\frac{\tau}{2}}\Phi_2\|^2 \leq C\{\|A^{\frac{\tau}{2}}\Phi\|^2 + \|A^{\frac{\tau}{2}}\Phi_1\|^2\} \leq C\{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\}. \quad (123)$$

Now, by Lions' interpolations inequality $0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}]$, result in

$$\|\Phi_2\|^2 \leq C(\|A^{-\frac{1}{2}}\Phi_2\|^2)^{\frac{\tau}{1+\tau}} (\|A^{\frac{\tau}{2}}\Phi_2\|^2)^{\frac{1}{1+\tau}}. \quad (124)$$

Then, using (122) and (123) in (124), result in

$$\|\Phi_2\|^2 \leq C|\lambda|^{\frac{-2\tau}{1+\tau}} \{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\}. \quad (125)$$

Therefore, as $\|\phi\|^2 \leq \|\phi\|^2 + \|\phi\|^2$ from inequality (120), (125) and $|\lambda|^{-2} \leq |\lambda|^{\frac{-2\tau}{1+\tau}}$, we have

$$|\lambda|^{\frac{\tau}{1+\tau}} \|\Phi\| \leq C_{\delta} \|F\|_{\mathcal{H}} \iff |\lambda| \|\Phi\|^2 \leq C_{\delta} |\lambda|^{\frac{-2\tau}{1+\tau}} \{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\} \quad \text{for } 0 \leq \tau \leq 1. \quad (126)$$

On the other hand, let's now estimate the missing term $|\lambda|^{\frac{\sigma}{1+\sigma}} \|\Psi\|$: Set $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$, where $\Psi_1 \in D(A)$ and $\Psi_2 \in D(A^0)$, with

$$i\lambda\Psi_1 + A\Psi_1 = f^4 \quad i\lambda\Psi_2 = -\frac{b}{\rho_2}A\psi - \frac{\kappa}{\rho_2}\phi_x - \frac{\kappa}{\rho_2}\psi + \frac{\mu}{\rho_2}\Theta - \frac{\mu_2}{\rho_2}A^{\sigma}\Psi + A\Psi_1. \quad (127)$$

Firstly, applying the product duality on the first equation in (127) by Ψ_1 , the by $A\Psi_1$ and recalling that the operator A is self-adjoint, resulting in

$$i\lambda\|\Psi_1\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\Psi_1\|^2 = \langle f^4, \Psi_1 \rangle. \quad (128)$$

Taking first the imaginary part of (128) and in the sequence, the real part and applying Cauchy-Schwarz inequality, lead to

$$|\lambda| \|\Psi_1\| \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \quad \text{and} \quad \|A^{\frac{1}{2}}\Psi_1\| \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (129)$$

It arises from the second equation in (127) that

$$i\lambda A^{-\frac{1}{2}}\Psi_2 = -\frac{b}{\rho_2}A^{\frac{1}{2}}\psi - \frac{\kappa}{\rho_2}A^{-\frac{1}{2}}\phi_x - \frac{\kappa}{\rho_2}A^{-\frac{1}{2}}\psi + \frac{\mu}{\rho_2}A^{-\frac{1}{2}}\Theta - \frac{\mu_2}{\rho_2}A^{\sigma-\frac{1}{2}}\Psi + A^{\frac{1}{2}}\Psi_1,$$

then, as $\|A^{-\frac{1}{2}}\phi_x\|^2 = \|\phi\|^2$, $\|A^{-\frac{1}{2}}\Theta_x\|^2 = \|\Theta\|^2$ and $\sigma - \frac{1}{2} \leq \frac{\sigma}{2}$ taking into account the continuous embedding $D(A^{\theta_2}) \rightarrow D(A^{\theta_1})$, $\theta_2 > \theta_1$, result in

$$|\lambda|^2 \|A^{-\frac{1}{2}}\Psi_2\|^2 \leq C\{\|\phi\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}\Theta\|^2 + \|A^{\frac{\sigma}{2}}\Psi\|^2\} + \|A^{\frac{1}{2}}\Psi_1\|^2 \quad (130)$$

Using estimative (98) of Lemma 12 and estimative (129), yields

$$\|A^{-\frac{1}{2}}\Psi_2\|^2 \leq C|\lambda|^{-2} \{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\}. \quad (131)$$

On the other hand, from $\Psi_2 = \Psi - \Psi_1$, (105) and as $0 \leq \frac{\sigma}{2} \leq \frac{1}{2}$, the inequality (129), result in

$$\|A^{\frac{\sigma}{2}}\Psi_2\|^2 \leq C\{\|A^{\frac{\sigma}{2}}\Psi\|^2 + \|A^{\frac{\sigma}{2}}\Psi_1\|^2\} \leq C\{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\}. \quad (132)$$

Now using interpolation inequality $0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{\sigma}{2}]$. Since

$$0 = \eta \left(-\frac{1}{2} \right) + (1 - \eta) \frac{\sigma}{2}, \quad \text{for } \eta = \frac{\sigma}{1 + \sigma},$$

using (131) and (132) we get that

$$\|\Psi_2\|^2 \leq C_\delta (\|A^{-\frac{1}{2}}\Psi_2\|^2)^\eta (\|A^{\frac{\sigma}{2}}\Psi_2\|^2)^{1-\eta} \leq |\lambda|^{\frac{-2\sigma}{1+\sigma}} \{ \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \}. \quad (133)$$

Also, as $\|\Psi\|_2 \leq C\{\|\Psi\| + \|\Psi\|_2\}$ from inequality (129), estimative (133) and as $|\lambda|^{-2} \leq |\lambda|^{\frac{-2\sigma}{1+\sigma}}$, result in

$$|\lambda|^{\frac{\sigma}{1+\sigma}} \|\Psi\| \leq C_\delta \|F\|_{\mathcal{H}} \iff |\lambda| \|\Psi\|^2 \leq C_\delta |\lambda|^{\frac{-2\sigma}{1+\sigma}} \{ \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \} \quad \text{for } 0 \leq \sigma \leq 1. \quad (134)$$

Finally, let's now estimate the missing term $|\lambda|^{\frac{\xi}{1+\xi}} \|\Theta\|$. Set $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$, where $\Theta_1 \in D(A)$ and $\Theta_2 \in D(A^0)$, with

$$i\lambda\Theta_1 + A\Theta_1 = f^6 \quad i\lambda\Theta_2 = -\frac{\delta}{\rho_3}A\theta - \frac{\mu}{\rho_3}\Phi_x - \frac{\mu}{\rho_3}\Psi - \frac{\gamma}{\rho_3}A^\xi\Theta + A\Theta_1. \quad (135)$$

Firstly, applying the product duality the first equation in (135) by Θ_1 , and as the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjoint, result in

$$i\lambda\|\Theta_1\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\Theta_1\|^2 = \langle f^6, \Theta_1 \rangle. \quad (136)$$

Taking first the imaginary part of (136) and in the sequence, the real part and applying Cauchy-Schwarz inequality, lead to

$$|\lambda| \|\Theta_1\| \leq C \|F\|_{\mathcal{H}} \quad \text{and} \quad \|A^{\frac{1}{2}}\Theta_1\| \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (137)$$

It arises from the second equation in (135) that

$$i\lambda A^{-\frac{1}{2}}\Theta_2 = -\frac{\delta}{\rho_3}A^{\frac{1}{2}}\theta - \frac{\mu}{\rho_3}A^{-\frac{1}{2}}\Phi_x - \frac{\mu}{\rho_3}A^{-\frac{1}{2}}\Psi - \frac{\gamma}{\rho_3}A^{\xi-\frac{1}{2}}\Theta + A^{\frac{1}{2}}\Theta_1,$$

then, as $\|A^{-\frac{1}{2}}\Phi_x\|^2 = \|\Phi\|^2$, $-\frac{1}{2} \leq 0$ and $\xi - \frac{1}{2} \leq \frac{\xi}{2}$ taking into account the continuous embedding $D(A^{\theta_2}) \rightarrow D(A^{\theta_1})$, $\theta_2 > \theta_1$ and using estimative (98) and second estimative of equation (137), lead to

$$\|A^{-\frac{1}{2}}\Theta_2\|^2 \leq C|\lambda|^{-2} \{ \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}} \}. \quad (138)$$

On the other hand, from $\Theta_2 = \Theta - \Theta_1$, (105) and as $\frac{\xi}{2} \leq \frac{1}{2}$ the inequality (137), result in

$$\|A^{\frac{\xi}{2}}\Theta_2\|^2 \leq C \{ \|A^{\frac{\xi}{2}}\Theta\|^2 + \|A^{\frac{\xi}{2}}\Theta_1\|^2 \} \leq C \{ \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \}. \quad (139)$$

Now we are going to use an interpolation inequality $0 \in [-\frac{1}{2}, \frac{\xi}{2}]$. Since

$$0 = \eta \left(-\frac{1}{2} \right) + (1 - \eta) \frac{\xi}{2}, \quad \text{for } \eta = \frac{\xi}{1 + \xi},$$

using (138) and (139) we get that

$$\|\Theta_2\|^2 \leq C_\delta (\|A^{-\frac{1}{2}}\Theta_2\|^2)^\eta (\|A^{\frac{\xi}{2}}\Theta_2\|^2)^{1-\eta} \leq |\lambda|^{\frac{-2\xi}{1+\xi}} \{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\} \quad (140)$$

Also as, $\|\Theta\|^2 \leq C\{\|\Theta_1\|^2 + \|\Theta_2\|^2\}$ from first inequality of (137), (140) and as $|\lambda|^{-2} \leq |\lambda|^{\frac{-2\xi}{1+\xi}}$, result in

$$|\lambda|^{\frac{\xi}{1+\xi}}\|\Theta\| \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}} \iff |\lambda|\|\Theta\|^2 \leq C_\delta|\lambda|^{\frac{-2\xi}{1+\xi}}\{\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}^2\} \quad \text{for } 0 \leq \xi \leq 1. \quad (141)$$

Finally, using the estimates (126), (134) and (141) in the inequality item (i) of Lemma 13, result in

$$\begin{aligned} \beta\gamma[\kappa\|\phi_x + \psi\|^2 + b\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|^2] &\leq C\{|\lambda|^{\frac{-2\tau}{1+\tau}} + |\lambda|^{\frac{-2\sigma}{1+\sigma}} + |\lambda|^{\frac{-2\xi}{1+\xi}}\}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + C_\delta|\lambda|^{-1}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (142)$$

And, using the estimates (126) and (141) in the inequality item (ii) of Lemma 13, result in

$$\delta\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 \leq C\{|\lambda|^{\frac{-2\tau}{1+\tau}} + |\lambda|^{\frac{-2\xi}{1+\xi}}\}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + C_\delta|\lambda|^{-1}\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (143)$$

As for $(\tau, \sigma, \xi) \in [0, 1]^3$, we have $-1 \leq 2 \max\{-\frac{\tau}{1+\tau}, -\frac{\sigma}{1+\sigma}, -\frac{\xi}{1+\xi}\} = -2 \max\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\}$, for $|\lambda| > 1$.

Finally, summing the the estimates (126), (134), (141), (142) and (143), we obtain

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_\delta|\lambda|^{-2 \min\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\}} [\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \|F\|_{\mathcal{H}}].$$

Equivalently:

$$|\lambda|^{\min\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\}}\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}} \quad \text{for } (\tau, \sigma, \xi) \in [0, 1]^3.$$

As $r = \min\{\frac{\tau}{1+\tau}, \frac{\sigma}{1+\sigma}, \frac{\xi}{1+\xi}\} \in (0, 1)$ for $(\tau, \sigma, \xi) \in (0, 1]^3$ the proof of this theorem is finished.

3.2.2 Analyticity of $S(t) = e^{B_2 t}$ for $(\tau, \sigma, \xi) [\frac{1}{2}, 1]^3$ such that $\tau = \xi$. Fig. 02

Before proving the main result of this section, the following lemma will be proved.

Lemma 15 Let $\delta > 0$. There exists a constant $C_\delta > 0$ such that the solutions of (18)–(22) for $|\lambda| \geq \delta$ satisfy the inequality

$$(i) \quad |\lambda|[\|\Phi\|^2 + \|\Theta\|^2] \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \tau = \xi \leq 1. \quad (144)$$

$$(ii) \quad |\lambda|\|\Psi\|^2 \leq C_\delta\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1. \quad (145)$$

Proof: Item (i): Realizing the duality product of (100) with $\frac{\rho_1}{\gamma} A^{-\tau} \lambda \phi$ and using the property that the operator A^ν is self-adjoint for all $\nu \in \mathbb{R}$ and using the equation (99), result in

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_1}{\gamma} \lambda \|\Phi\|^2 &= \frac{\kappa}{\gamma} \langle \lambda(-A\phi + \psi_x), A^{-\tau}\Phi \rangle + \frac{\rho_1}{\gamma} \langle f^2, \lambda A^{-\tau}\Phi \rangle - i \frac{\rho_1}{\gamma} \lambda^2 \|A^{-\frac{\tau}{2}}\Phi\|^2 - \frac{\mu}{\gamma} \langle \Theta_x, \lambda A^{-\tau}\Phi \rangle \\
&= i \frac{\kappa}{\gamma} \langle (A\Phi + A f^1), A^{-\tau}\Phi \rangle - i \frac{\kappa}{\gamma} \langle \Psi_x + f_x^3, A^{-\tau}\Phi \rangle - i \frac{\rho_1}{\gamma} \lambda^2 \|A^{-\frac{\tau}{2}}\Phi\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{\gamma} \langle f^2, i\kappa A^{1-\tau}\phi - i\kappa A^{-\tau}\psi_x + i\mu_1\Phi - i\rho_1 A^{-\tau}f_2 \rangle + \frac{\mu}{\gamma} \langle \Theta, \lambda A^{-\tau}\Phi_x \rangle.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_1}{\gamma} \lambda \|\Phi\|^2 &= i \frac{\kappa}{\gamma} \|A^{\frac{1-\tau}{2}}\Phi\|^2 + i \frac{\kappa}{\gamma} \langle A^{\frac{1}{2}}f^1, A^{\frac{1}{2}-\tau}\Phi \rangle + i \frac{\kappa}{\gamma} \langle \Psi, A^{-\tau}\Phi_x \rangle - i \frac{\kappa}{\mu_1} \langle f_x^3, A^{-\tau}\Phi \rangle \\
&\quad - i \langle f^2, \Phi \rangle - i \frac{\kappa}{\gamma} \langle f^2, A^{1-\tau}\phi \rangle + i \frac{\kappa}{\gamma} \langle A^{-\tau}f^2, \psi_x \rangle + i \frac{\rho_1}{\gamma} \|A^{-\frac{\tau}{2}}f^2\|^2 \\
&\quad - i \frac{\rho_1}{\gamma} \lambda^2 \|A^{-\frac{\tau}{2}}\Phi\|^2 + \frac{\mu}{\gamma} \langle \Theta, \lambda A^{-\tau}\Phi_x \rangle.
\end{aligned} \tag{146}$$

On the other hand, now performing the duality product of (104) for $\frac{\rho_3}{\gamma} A^{-\xi}\lambda\Theta$, using (101), and as the operators A^v for all $v \in \mathbb{R}$ are self-adjoint, result in

$$\begin{aligned}
\lambda \|\Theta\|^2 &= -i \lambda^2 \frac{\rho_3}{\gamma} \|A^{-\frac{\xi}{2}}\Theta\|^2 + i \frac{\delta}{\gamma} \|A^{\frac{1-\xi}{2}}\Theta\|^2 + i \frac{\delta}{\gamma} \langle A^{\frac{1}{2}}f^5, A^{\frac{1}{2}-\xi}\Theta \rangle - i \frac{\delta}{\gamma} \langle f^6, A^{1-\xi}\theta \rangle - i \frac{\mu}{\gamma} \langle f^6, A^{-\xi}\Phi_x \rangle \\
&\quad - i \frac{\mu}{\gamma} \langle f^6, A^{-\xi}\Psi \rangle - i \langle f^6, \Theta \rangle + i \frac{\rho_3}{\gamma} \|A^{-\frac{\xi}{2}}f^6\|^2 - \frac{\mu}{\gamma} \langle \lambda A^{-\xi}\Phi_x, \Theta \rangle.
\end{aligned} \tag{147}$$

Imposing the condition $\tau = \xi$ and since $\text{Re} \{ \langle \Theta, \lambda A^{-\tau}\phi_x - \lambda A^{-\tau}\phi_x, \Theta \rangle \} = 0$, adding the equations (146) and (147) and then taking the real part, result in

$$\begin{aligned}
\lambda \left[\frac{\mu_1}{\gamma} \|\Phi\|^2 + \|\Theta\|^2 \right] &= i \frac{\kappa}{\gamma} \langle A^{\frac{1}{2}}f^1, A^{\frac{1}{2}-\tau}\Phi \rangle + i \frac{\kappa}{\gamma} \langle \Psi, A^{-\tau}\Phi_x \rangle - i \frac{\kappa}{\mu_1} \langle f_x^3, A^{-\tau}\Phi \rangle - i \langle f^2, \Phi \rangle \\
&\quad - i \frac{\kappa}{\gamma} \langle f^2, A^{1-\tau}\phi \rangle + i \frac{\kappa}{\gamma} \langle A^{-\tau}f^2, \psi_x \rangle + i \frac{\delta}{\gamma} \langle A^{\frac{1}{2}}f^5, A^{\frac{1}{2}-\xi}\Theta \rangle \\
&\quad - i \frac{\delta}{\gamma} \langle f^6, A^{1-\xi}\theta \rangle - i \frac{\mu}{\gamma} \langle f^6, A^{-\xi}\Phi_x \rangle - i \frac{\mu}{\gamma} \langle f^6, A^{-\xi}\Psi \rangle - i \langle f^6, \Theta \rangle
\end{aligned}$$

From $|i \frac{\kappa}{\gamma} \langle \Psi, A^{-\tau}\Psi_x \rangle| \leq C \{ \|\Psi\|^2 + \|A^{\frac{1-2\tau}{2}}\Phi\|^2 \}$ and $\frac{1}{2} \leq \tau = \xi \leq 1$, applying Cauchy-Schwarz and Young inequalities, norms $\|F\|_H$ and $\|U\|_H$, the proof of item (i) of this lemma is finished.

Item (ii): Similarly, performing the duality product of (102) for $\frac{\rho_2}{\mu_2} A^{-\sigma}\lambda\Psi$, using (101), and recalling the self-adjointness of A^v , $v \in \mathbb{R}$, lead to

$$\begin{aligned}
\lambda \|\Psi\|^2 &= -i \frac{\rho_2}{\mu_2} \lambda^2 \|A^{-\frac{\sigma}{2}}\Psi\|^2 + i \frac{b}{\mu_2} \|A^{\frac{1-\sigma}{2}}\Psi\|^2 + i \frac{b}{\mu_2} \langle A^{\frac{1}{2}}f^3, A^{\frac{1}{2}-\sigma}\Psi \rangle - i \frac{\kappa}{\mu_2} \langle \Phi, A^{-\sigma}\Psi_x \rangle \\
&\quad + i \frac{\kappa}{\mu_2} \langle f_x^1, A^{-\sigma}\Psi \rangle + i \frac{\kappa}{\mu_2} \|A^{-\frac{\sigma}{2}}\Psi\|^2 + i \frac{\kappa}{\mu_2} \langle f^3, A^{-\sigma}\Psi \rangle \\
&\quad + \frac{\mu}{\mu_2} \langle \sqrt{|\lambda|}\Theta, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}} A^{-\sigma}\Psi \rangle - i \frac{b}{\mu_2} \langle f^4, A^{1-\sigma}\Psi \rangle - i \frac{\kappa}{\mu_2} \langle f^4, A^{-\sigma}\phi_x \rangle \\
&\quad - i \frac{\kappa}{\mu_2} \langle f^4, A^{-\sigma}\psi \rangle + i \frac{\mu}{\mu_2} \langle f^4, A^{-\sigma}\Theta \rangle - i \langle f^4, \Psi \rangle + i \frac{\rho_2}{\mu_2} \|f^4\|^2.
\end{aligned}$$

Noting that: For $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ lead to $\frac{1-\sigma}{2} \leq \frac{\sigma}{2}$, $\frac{1}{2} - \sigma \leq 0$ and $\frac{1-2\sigma}{2} \leq 0$, on the other hand as $\|A^{-\sigma}\Psi_x\|^2 = \|A^{\frac{1-2\sigma}{2}}\Psi\|^2$, taking real part and considering that $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ and using Cauchy-Schwarz and Young inequalities, norms $\|F\|_H$ and $\|U\|_H$, for $\varepsilon > 0$, exists $C_\varepsilon > 0$

independent of λ such that

$$|\lambda| \|\Psi\|^2 \leq C_\delta \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\{\|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2\} + C_\varepsilon |\lambda| \|\Theta\|^2 + \varepsilon |\lambda| \|\Psi\|^2.$$

Using estimative (98) and estimate (i) of this lemma, the proof of item (ii) of this lemma is finished.

The main result of this subsection is the following theorem

Theorem 16 *The semigroup $S(t) = e^{B_2 t}$ associated to the system (18)–(22) is analytic when the three parameters τ , σ and ξ vary in the interval $[\frac{1}{2}, 1]$ with $\tau = \xi$:*

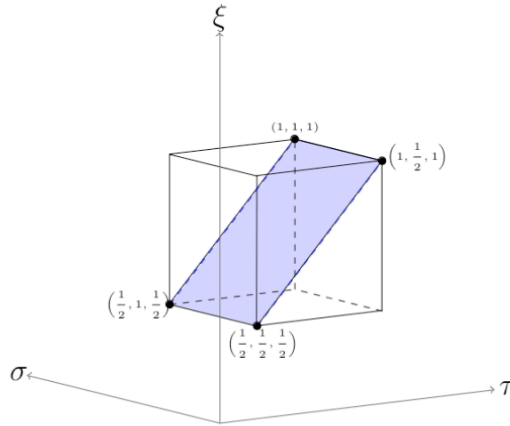


FIG. 02: Region R_{A_2} of Analyticity de $S(t) = e^{B_2 t}$

Proof: This theorem will be proved again using now the Theorem 8, so the two conditions (88) and (89) must be proved.

Here the condition's test (88) will be omitted because it is completely similar to the test already conducted for the first the first system.

Next, the condition (89) is proved, note that proving this condition is equivalent to show, let $\delta > 0$. There exists a constant $C_\delta > 0$ such that the solutions of (18)–(20) and (21)–(22) for $|\lambda| \geq \delta$ satisfy the inequality

$$|\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_\delta \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (148)$$

It is not difficult to see that this inequality (96) follows from the inequalities of the Lemmas 13 and 15, so the proof of this theorem is finished.

Remark 17 (Asymptotic Behavior) *It is emphasized that thanks to the Lemmas 3 and 9 the exponential decay of the first system is obtained when the 3 parameters take values in the closed interval $[0, 1]$, also for the second system using the Lemmas 12 and proving in a completely similar way to the proof of Lemma 9 which $\mathcal{R} \subset \rho(B_2)$ the corresponding semigroup $S(t) = e^{B_2 t}$, will be exponentially stable when the 3 parameters take values in the closed interval $[0, 1]$.*

REFERENCES

- [1] K. Ammari, F. Shel and L. Tebou, Regularity and stability of the semigroup associated with some interacting elastic systems I: a degenerate damping case, *Journal of Evolution Equations*, (2021).
- [2] G. G. A'valos, J.E. M. Rivera and E. O. Ochoa, Analiticity of the Type III Thermoelastic Euler Bernoulli Model with Tip, *Acta Applicandae Mathematicae*, 181:9 (2022).
- [3] V.R. Cabanillas and C. A. Raposo, Exponential stability for laminated Beams with interme- diate damping, *Archiv der Mathematik*, 24 March (2022).
- [4] L. H. Fatori, M. Z. Garay and J. E. M. Rivera, Differentiability, Analyticity and Optimal Rates of Decay for Damped Wave Equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol 2012 No 48 (2012), 1–13.
- [5] L.H. Fatori, J.E.M. Rivera and R. N. Monteiro, Energy Decay to Timoshenko's system with thermoelasticity of type III, *Asymptotic Analysis*, 86 (2014), 227–247.
- [6] G.G. A'valos, J. E. M. Rivera, Z. Liu, Gevrey class of locally dissipative Euler-Bernoulli beam equation, *SIAM: Journal Control and Optimization*, Vol 59, No. 3, November (1987), 2174– 2194.
- [7] A. E. Green and P.M. Naghdi, A re-examination of the basic postulates of thermomechanics, *Proceedings of the Royal Society of London Series A* 432 (1991), 171–194.
- [8] J. Hao, Z. Liu and J. Yong, Regularity analysis for an abstract system of coupled hyperbolic and parabolic equations. *Journal of Differential Equations* 259 (2015), 4763–4798.
- [9] J. U. Kim, Y. Renardy, Boundary control of the Timoshenko beam, *SIAM:Journal Control and Optimization*, Vol 25, No. 6, November (1987).
- [10] Z. Kuang, Z. Liu, H.D. F. Sare, Regularity Analysis for an abstract thermoelastic system with inertial term, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 27, S24 (2021).
- [11] Z. Kuang, Z. Liu, L. Tebou, Optimal Semigroup Regularity for velocity couple elastic sys- tem: A degenerate fractional damping case, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 46 (2022).
- [12] Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems*, Chapman & Hall CRC Research Notes in Mathematics, Boca Raton, FL, 398 (1999).
- [13] Z. Liu and M. Renardy, A note on the equations of thermoelastic plate, *Appl. Math. Lett.*, 8, (1995), 1–6.
- [14] S. A. Messaoudi and B. Said-Houari, Energy decay in a Timoshenko-type system of ther- moelasticity of the type III, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 348 (2008), 298–307.
- [15] S. A. Messaoudi and A. Fareh, Energy decay in a Timoshenko-type system of thermoelasticity of type III with different wave-propagation speeds, *Arabian Journal of Mathematics* 2, (2013), 199–207.
- [16] H.P. Oquendo and F.M.S. Suárez, Exact decay rates for coupled plates with partial fractional damping. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik-ZAMP(online)* V1, (2019), 70– 88.

- [17] M. L. Santos and D. S. Almeida Júnior, On Timoshenko-type system with type III thermoelasticity: Asymptotic behavior, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 448 (2017), 650–671.
- [18] H. D. F. Sare, Z. Liu and R. Racke, Stability of abstract thermoelastic systems with inertial terms, *Journal of Differential Equations*, Volume 267, Issue 12, 5 December (2019), 7085–7134.
- [19] S. W. Taylor, Gevrey Regularity of Solutions of Evolution Equations and Boundary Control-ability, Thesis (Ph.D.) The University of Minnesota. 1989, 182 pp.
- [20] V. Keyantuo, L. Tebou and M. Warma, A Gevrey Class Semigroup for a Thermoelastic Plate Model with a Fractional Laplacian: Between the Euler-Bernoulli and Kirchhoff Models. *Discrete and Continuous Dynamical System*, Vol 40. Number 5, May (2020), 2875–2889.
- [21] C.A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, N. N. O. Castro, Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings, *Appl. Math. Lett.*, 18, (2005), 535–541.
- [22] B.T.S. Sozzo, J. E. M. Rivera, The Gevrey class of the Euler-Bernoulli beam model, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 505 (2022).
- [23] L. Tebou, Regularity and stability for plate model involving fractional rotational forces and damping, *ZAMP: Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 72:158, (2021).
- [24] S. Timoshenko, On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Philos. Mag.* 41 (1921), 744–746.
- [25] X. Zhang and E. Zuazua, Decay of solutions of the system of thermoelasticity of type III, *Comm. contempt. Math.* 5(1), (2003), 25–83.

STABILITY AND REGULARITY THE MGT-FOURIER MODEL WITH FRACTIONAL COUPLING

Data de aceite: 03/07/2023

Filomena Barbosa Rodrigues Mendes

Department of Engenhary Electric, The
Federal University of Technological of
Paraná, Brazil

Fredy M. Sobrado Suárez

Department of Mathematics, Federal
University of Technological of Paraná,
Brazil

Santos Richard W. Sanguino Bejarano

Department of Mathematics, Federal
University of Technological of Paraná,
Brazil

ABSTRACT: In this work, we study the stability and regularity of the system formed by the third-order vibration equation in Moore-Gilson-Thompson time coupled with the classical heat equation with Fourier's law. We consider fractional couplings. He then fractional coupling is given by: $nA^\phi \theta$, $anA^\phi \theta_{u_{\parallel}}$ and $nA^\phi \theta_{u_{\perp}}$ where the operator A^ϕ is self-adjoint and strictly positive in a complex Hilbert space H and the parameter ϕ can vary between 0 and 1. When $\phi = 1$ we have the MGT-Fourier physical model, previously investigated, see; 2013[1] and 2022[9], in these works, the authors respectively showed that the semigroup $S(t) = e^{tB}$

associated with the MGT-Fourier model are exponentially stable and analytical. The model abstract of this research is given by: (3)–(5), we show directly that the semigroup $S(t)$ is exponentially stable for $\phi \in [0, 1]$, we also show that for $\phi = 1$, $S(t)$ is analytic and study of the Gevrey classes of $S(t)$. We show that for $\phi \in (\frac{1}{2}, 1)$ there are two families of Gevrey classes: $s_1 > 2$ when $\phi \in (1/2, 2/3]$ and $s_2 > \frac{\phi}{2\phi-1}$ when $\phi \in [2/3, 1)$, in the last part of our investigation using spectral analysis we tackled the study of the nonanalyticity and lack of Gevrey classes of $S(t)$ when $\phi \in [0, 1/2]$. For the study of the existence, stability, and regularity, semigroup theory is used together with the techniques of the frequency domain, multipliers, and spectral analysis of a system, using the property of the fractional operator A^ϕ for $\phi \in [0, 1]$.

KEYWORDS: Asymptotic behavior, Stability, Regularity, Gevrey Class, Analyticity, MGT-Fourier System.

1 | INTRODUCTION

Various researchers year after year have been devoting their attention to the study of asymptotic behavior; the model Moore-Gilson-Thompson equation

appearing in the context of acoustic wave propagation in viscous thermally relaxing fluids, in [14], they studied the model abstract:

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} + c^2 A u + b A u_t,$$

where A be a self-adjoint positive operator on H with a dense domain $D(A) \subset H$, show exponential stability requires $\gamma = \alpha - \frac{\tau c^2}{b} > 0$. In the complementary region of the parameters, the system is unstable ($\gamma < 0$) or marginally stable ($\gamma = 0$). Quite interestingly, it can be used as a model for the vibrations in a standard linear viscoelastic solid, for it can be obtained by differentiating in time the equation of viscoelasticity with an exponential kernel (see [8] for more details).

In [19], studies the decay of the energy of the Moore-Gibson-Thompson (MGT) equation with a viscoelastic term, this work is a generalization of the previous one (Part I) see [20], in the sense that it allows the kernel memory to be more general and shows that power decays the same way kernel memory does, exponentially or not. The model is given by

$$\tau u_{ttt} + \alpha u_{tt} + c^2 A u + b A u_t - \int_0^t g(t-s) A u(s) ds = 0, \quad (1)$$

where A is a positive self-adjoint operator defined in a real Hilbert space H . The convolution term $\int_0^t g(t-s) A u(s) ds$ reflects the memory effect of viscoelastic materials; the “memory kernel” $g(t): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ directly relates to whether or how the energy decays. Without this memory term, it is known the MGT equation has exponential energy decay in the non-critical regime, where $\gamma = \alpha - \frac{c^2 \tau}{b} > 0$ see [14].

One of the first investigations of the coupled MGT-Fourier model, was published in 2013, see Alves et al. [1] studied the exponential decay of the MGT-Fourier physical model given by

$$\begin{cases} \alpha u_{ttt} + u_{tt} - a^2 \Delta u - a^2 \beta \Delta u_t + \eta \Delta \theta = 0. \\ \theta_t - \Delta \theta - \alpha \eta \Delta u_{tt} - \eta \Delta u_t = 0. \end{cases}$$

where $x \in \Omega$, $t \in (0, \infty)$. The function $u = u(x, t)$ represents the vibration of flexible structures, and $\theta = \theta(x, t)$ is the difference of temperature between the actual state and a reference temperature. The constants α and β are positive, η is the coupling constant. Ω is a bounded open connected set in \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) having a smooth boundary $\Gamma = \partial\Omega$. The initial conditions are given by (5) and the boundary conditions: $u = 0$, $u_t = 0$, $\theta = 0$, on $\partial\Omega = \Gamma$.

In more recent research from 2022 [9] they studied the model abstract MGT- Fourier system:

$$\begin{cases} u_{ttt} + \alpha u_{tt} + \beta A^p u_t + \gamma A^p u = \eta A \theta, \\ \theta_t + \kappa A \theta = -\eta A u_{tt} - \eta \alpha A u_t, \end{cases}$$

in the subcritical regime $\beta > \cdot$, where the operator A is strictly positive selfadjoint. For any fixed $p \in [1, 2]$ the authors showed that the solution associated to the semigroup $S(t)$ is analytically and exponentially stable as well. Also in 2022 M. Conti et al [5], studied the model:

$$\begin{cases} u_{ttt} + \alpha u_{tt} + \beta \Delta^2 u_t + \gamma \Delta^2 u = -\eta \Delta \theta \\ \theta_t - \kappa \Delta \theta = \eta \Delta u_{tt} + \alpha \eta \Delta u_t. \end{cases} \quad (2)$$

His research is focused on analyzing the energy transfer between the two equations, mainly when the first one is in the supercritical regime and exhibits an antidissipative character. The leading actor becomes the coupling constant η , governing the competition between Fourier damping and MGT antidamping. In fact, they showed that a large enough η is always capable of stabilizing the system exponentially fast. One of the characteristics of this model is the presence of the bilaplacian in the first equation. With respect to the analogous model with the Laplacian, this forced to adjust the mathematical techniques. On the one hand, the energy estimation method does not seem to be applied directly, on the other hand, there is a gain in regularity that allows us to rely on analytical techniques for the properties of the semigroup associated with the model. In light of the above discussion, the natural question to be addressed is how the dissipation produced by the heat equation influences the asymptotic dynamics of the system. In the subcritical case, both equations in (2) are dissipative (actually exponentially stable) and good stabilization properties are expected. This idea was confirmed in [9], where it is shown that if $\mu = \gamma - \alpha\beta < 0$ then the semigroup associated to (2) is exponentially stable and also analytic. This means that the coupling allows not only a dissipation transfer between the equations, but also a regularity transfer. This research deals with the behavior of the system in the critical and supercritical regimes, that is, when $\mu \geq 0$. In these cases, the system (2) consists of a conservative system (if $\mu = 0$) or antidissipative (if $\mu > 0$). More recent research in this direction can be found at [4, 3, 11, 23].

In the last decade, the number of investigations focused on the regularity of the semigroups $S(t)$ associated with coupled systems has increased considerably. The interest is centered on Differentiability, Gevrey class, and/or Analyticity, among the model's considered systems with fractional couplings, different types of dissipation (internal, localized), and fractional dissipations. One of the motivations for this new research is that the analytic semigroups associated with linear systems imply that this type of semigroup admits Gevrey classes, which in turn implies the semigroup's differentiability. And depending on the regularity, the semigroup will have the best asymptotic behavior (Exponential Decay). More recent research in this direction can be found at [2, 6, 7, 13, 16, 17, 18, 24, 25, 26, 28, 29].

The paper is organized as follows. In section 2, we study the well-posedness of the system (3)-(5) through semigroup theory. We leave our main contributions for the last two

sections; in the third we dedicate to stability, and in the fourth, to regularity. In the section (3) we showed that the semigroup $S(t)$ is exponentially stable as $\phi \in [0, 1]$. In the last section (4) of the regularity, we studied the analyticity when $\phi = 1$, determine two family of Gevrey classes: $s_1 > 2$ when $\phi \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ and $s_2 > \frac{\phi}{2\phi-1}$ when $\phi \in [\frac{2}{3}, 1)$. And when the parameter ϕ assumes values in the interval $[0, \frac{1}{2}]$ it shows that $S(t)$ does not admit Gevrey classes and is not analytic. We prioritize direct proofs using semigroup-theory characterization together with frequency domain methods, multiplier, and spectral analysis of the fractional operator A^ϕ for $\phi \in [0, 1]$.

2 | WELL-POSEDNESS OF THE SYSTEM

In this section, we will use the semigroup theory to assure the existence and uniqueness of strong solutions for the system (3)–(5) where the operator A is defined to follow, let $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ be a strictly positive selfadjoint operator with compact inverse on a complex Hilbert space H , with a continuous embedded domain $D(A) \hookrightarrow H$. Consider the abstract linear system:

$$\alpha u_{ttt} + u_{tt} + a^2 Au + a^2 \beta Au_t - \eta A^\phi \theta = 0, \quad (3)$$

$$\theta_t + A\theta + \alpha \eta A^\phi u_{tt} + \eta A^\phi u_t = 0. \quad (4)$$

The initial conditions are given by

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), u_{tt}(x, 0) = u_2(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), \text{ in } \Omega. \quad (5)$$

Remark 1 It is known that this operator A is strictly positive, selfadjoint, has a compact inverse, and has compact resolvent. And the operator A^τ is self-adjoint positive for all $\tau \in \mathbb{R}$, bounded for $\tau \leq 0$, and the embedding

$$\mathfrak{D}(A^{\tau_1}) \hookrightarrow \mathfrak{D}(A^{\tau_2}),$$

is continuous for $\tau_1 > \tau_2$. Here, the norm in $D(A^\tau)$ is given by $\|u\|_{D(A^\tau)} := \|A^\tau u\|$, $u \in D(A^\tau)$, where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and $\|\cdot\|$ denotes the inner product and norm in the complex Hilbert space $H = D(A^0)$. Some of the most used spaces at work are $D(A^{\frac{1}{2}})$ and $(A^{-\frac{1}{2}})$.

Taking $v = u_t + u$, the system (3)–(4) can be rewritten as

$$v_{tt} + a^2 Av - a^2(\alpha - \beta)Au_t - \eta A^\phi \theta = 0, \quad (6)$$

$$\theta_t + A\theta + \eta A^\phi v_t = 0. \quad (7)$$

This system (6)–(7), for $\phi = 1$ is the model of a system of the coupled viscoelastic equation coupled with the heat equation given by Fourier's law. Taking the duality product between equation (6) and v_t , and (7) with θ , taking advantage of the self-adjointness of the powers of the operator A and using the identity $v = u_t + u$, Let $\beta - \alpha > 0$, for every solution of the system (3)–(5) the total energy $E: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ is given in the t by

$$\mathfrak{E}(t) = \frac{1}{2} \left[\|\alpha w + v\|^2 + a^2 \alpha (\beta - \alpha) \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 + a^2 \|\alpha A^{\frac{1}{2}} v + A^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \|\theta\|^2 \right] \quad (8)$$

and satisfies

$$\frac{d}{dt} \mathfrak{E}(t) = -a^2 (\beta - \alpha) \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 - \|A^{\frac{1}{2}} \theta\|^2. \quad (9)$$

Taking $u_t = v$ and $v_t = w$, the initial boundary value problem (3)-(5) can be reduced to the following abstract initial value problem for a first-order evolution equation

$$\frac{d}{dt} U(t) = \mathbb{B}U(t), \quad U(0) = U_0, \quad (10)$$

where $U(t) = (u, v, w, \theta)$, $U_0 = (u_0, u_1, u_2, \theta_0)$ and the operator $B: D(B) \subset H \rightarrow$

$$\mathbb{B}U := \left(v, w, -\frac{1}{\alpha} [a^2 Au + a^2 \beta Av - \eta A^\phi \theta + w], -[\eta A^\phi v + \alpha \eta A^\phi w + A\theta] \right)^T, \quad (11)$$

for $U = (u, v, w, \theta)$ for $U = (u, v, w, \theta)^T$. This operator will be defined in a suitable subspace of the phase space

$$\mathbb{H} := [\mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}})]^2 \times [\mathfrak{D}(A^0)]^2,$$

it is a Hilbert space with the inner product

$$\begin{aligned} \langle U_1, U_2 \rangle_{\mathbb{H}} := & a^2 \alpha (\beta - \alpha) \langle A^{\frac{1}{2}} v_1, A^{\frac{1}{2}} v_2 \rangle + a^2 \langle A^{\frac{1}{2}} u_1 + \alpha A^{\frac{1}{2}} v_1, A^{\frac{1}{2}} u_2 + \alpha A^{\frac{1}{2}} v_2 \rangle \\ & + \langle v_1 + \alpha w_1, v_2 + \alpha w_2 \rangle + \langle \theta_1, \theta_2 \rangle. \end{aligned}$$

for $U_i = (u_i, v_i, w_i, \theta_i) \in H$, $i = 1, 2$ and induced norm

$$\|U\|_{\mathbb{H}}^2 := a^2 \alpha (\beta - \alpha) \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 + a^2 \|A^{\frac{1}{2}} u + \alpha A^{\frac{1}{2}} v\|^2 + \|v + \alpha w\|^2 + \|\theta\|^2. \quad (12)$$

In these conditions, we define the domain of B as

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathbb{B}) := \left\{ U \in \mathbb{H} : (v, w) \in [\mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}})]^2, a^2 u + a^2 \beta v - \eta A^{\phi-1} \theta \in \mathfrak{D}(A), \right. \\ \left. \eta A^{\phi-1} v + \alpha \eta A^{\phi-1} w + \theta \in \mathfrak{D}(A) \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

To show that the operator B is the generator of a C_0 -semigroup, we invoke a result from Liu-Zheng' [22].

Theorem 2 (see Theorem 1.2.4 in [22]) Let B be a linear operator with domain $D(B)$ dense in a Hilbert space H . If B is dissipative and $0 \in \rho(B)$, the resolvent set of B , then B is the generator of a C_0 -semigroup of contractions on H .

Proof: Let us see that the operator B given in (11) satisfies the conditions of this theorem(2). Clearly, we see that $D(B)$ is dense in H . Taking the inner product of BU with U , we have

$$\operatorname{Re} \langle BU, U \rangle_{\mathbb{H}} = -a^2 (\beta - \alpha) \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 - \|A^{\frac{1}{2}} \theta\|^2 \leq 0, \quad \forall U \in \mathfrak{D}(\mathbb{B}), \quad (14)$$

and since $\beta > \alpha$, the operator B is dissipative.

To complete the conditions of the above theorem, it remains to show that $0 \in \rho(B)$. Therefore we must show that $(0I - B)^{-1}$ exists and is bounded in H. We will first prove that $(0I - B)$ exists, then it must be proved that B is bijective. Here we are going to affirm that B is surjective, then for all $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T \in H$ the stationary problem $BU = F$ has a solution for $U = (u, v, w, \theta)^T \in D(B)$. From definition of the operator B in (11), this system can be written as:

$$v = f^1, w = f^2 \text{ and}$$

$$a^2 Au = -\eta A^{\phi-1} f_4 - \eta^2 A^{2\phi-1} f^1 - \alpha \eta^2 A^{2\phi-1} f^2 - \alpha f^3 - a^2 \beta A f^1 - f^2, \quad (15)$$

$$A\theta = -f^4 - \eta A^\phi f^1 - \alpha \eta A^\phi f^2. \quad (16)$$

From these equations, this problem can be placed in a variational formulation: $v, w \in [D(\frac{1}{2})]^2$ and we write the last two equations (15)-(16) in a variational form, using the sesquilinear form b :

$$b(u, \theta; \psi_1, \psi_2) = \langle g_1, g_2; \psi_1, \psi_2 \rangle \quad (17)$$

Where

$$g_1 = -\eta A^{\phi-1} f_4 - \eta^2 A^{2\phi-1} f^1 - \alpha \eta^2 A^{2\phi-1} f^2 - \alpha f^3 - a^2 \beta A f^1 - f^2, g_2 = -f^4 - \eta A^\phi f^1 - \alpha \eta A^\phi f^2$$

and the sesquilinear form b is given by

$$b(u, \theta; \psi_1, \psi_2) = a^2 \langle A^{\frac{1}{2}} u, A^{\frac{1}{2}} \psi_1 \rangle + \langle A^{\frac{1}{2}} \theta, A^{\frac{1}{2}} \psi_2 \rangle. \quad (18)$$

as $D(A) \rightarrow D(A^{\frac{1}{2}}) \rightarrow D(A^0) \rightarrow D(A^{-\frac{1}{2}}) \rightarrow D(A^{-1})$, this sesquilinear form is coercive in the space $[D(A^{\frac{1}{2}})]^2$. As $g_1, g_2 \in [D(A^{-\frac{1}{2}})]^2$ from Lax-Milgram's Lemma the variational form has unique solution $(u, \theta) \in [D(A^{\frac{1}{2}}) \times D(A^{\frac{1}{2}})]$ and it satisfies (15)-(16), such that (17) is verify for $(\psi_1, \psi_2) \in [D(A^{\frac{1}{2}})]^2$. From (18) and for all $(\psi_1, \psi_2) \in [D(A^{\frac{1}{2}})]^2$, we have

$$a^2 \langle A^{\frac{1}{2}} u, A^{\frac{1}{2}} \psi_1 \rangle + \langle A^{\frac{1}{2}} \theta, A^{\frac{1}{2}} \psi_2 \rangle = \langle -f^4 - \eta A^\phi f^1 - \alpha \eta A^\phi f^2, \psi_2 \rangle + \langle -\eta A^{\phi-1} f_4 - \eta^2 A^{2\phi-1} f^1 - \alpha \eta^2 A^{2\phi-1} f^2 - \alpha f^3 - a^2 \beta A f^1 - f^2, \psi_1 \rangle, \quad (19)$$

choosing $\psi_2 = 0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ from (19) and $\forall \psi_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$, we have

$$a^2 \langle A^{\frac{1}{2}} u, A^{\frac{1}{2}} \psi_1 \rangle = \langle -\eta A^{\phi-1} f_4 - \eta^2 A^{2\phi-1} f^1 - \alpha \eta^2 A^{2\phi-1} f^2 - \alpha f^3 - a^2 \beta A f^1 - f^2, \psi_1 \rangle,$$

then

$$a^2 Au = -\eta A^{\phi-1} f_4 - \eta^2 A^{2\phi-1} f^1 - \alpha \eta^2 A^{2\phi-1} f^2 - \alpha f^3 - a^2 \beta A f^1 - f^2 \quad \text{in} \quad [\mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}})]' = \mathfrak{D}(A^{-\frac{1}{2}}). \quad (20)$$

On the other hand, choosing $\psi_1 = 0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ from (20) and $\forall \psi_2 \in D(A^{\frac{1}{2}})$, we have

$$\langle A\theta, \psi_2 \rangle = \langle -f^4 - \eta A^\phi f^1 - \alpha \eta A^\phi f^2, \psi_2 \rangle, \text{ then}$$

$$A\theta = -f^4 - \eta A^\phi f^1 - \alpha \eta A^\phi f^2 \quad \text{in} \quad [\mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}})]' = \mathfrak{D}(A^{-\frac{1}{2}}). \quad (21)$$

(20) and (21) are solutions in the weak sense. From $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T \in H$ and $0 \leq \phi \leq 1$ implies that $\frac{1}{2} \leq \frac{2\phi-1}{2} \leq \frac{1}{2}$, we have $D(A^{\frac{1}{2}}) \rightarrow D(A^{\frac{2\phi-1}{2}}) \rightarrow D(A^{-\frac{1}{2}}) \rightarrow D(A^{\frac{2\phi-1}{2}}) \rightarrow D(A^{\frac{1}{2}})$, from (20), we have

$$u = \frac{1}{a^2} \left[-\eta A^{\phi-2} f_4 - \eta^2 A^{2\phi-2} f^1 - \alpha \eta^2 A^{2\phi-2} f^2 - \alpha A^{-1} f^3 - a^2 \beta f^1 - A^{-1} f^2 \right] \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}). \quad (22)$$

Now from $0 \leq \phi \leq 1$ implies that $2 \geq 2 - \phi \geq 1 \geq \frac{2\phi-1}{2} \leq \frac{1}{2}$ we have $D(A^{\frac{1}{2}}) \rightarrow D(A^{\frac{2\phi-1}{2}}) \rightarrow D(A) \rightarrow D(A^0) \rightarrow D(A^{\phi-1}) \rightarrow D(A^{-1})$, from (21), we have

$$\theta = -A^{-1} f^4 - \eta A^{\phi-1} f^1 - \alpha \eta A^{\phi-1} f^2 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}). \quad (23)$$

Then $a^2 u + a^2 \beta v - \eta A^{\phi-1} \theta \in \mathfrak{D}(A)$ and $\eta A^{\phi-1} v + \alpha \eta A^{\phi-1} w + \theta \in \mathfrak{D}(A)$.

The injectivity of B follows from the uniqueness given by the Lemma of Lax-Milgram's. It remains to show that B is a bounded operator. From $v = f^1$, $w = f^1$, equations (22) and (23) and (12), we get

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathbb{H}}^2 &= \alpha a^2 (\beta - \alpha) \|A^{\frac{1}{2}} f^1\|^2 + a^2 \|\alpha A^{\frac{1}{2}} f^1 + \frac{1}{a^2} [-\eta A^{\phi-\frac{3}{2}} f_4 - \eta^2 A^{2\phi-\frac{3}{2}} f^1 - \alpha \eta^2 A^{2\phi-\frac{3}{2}} f^2 \\ &\quad - \alpha A^{-\frac{1}{2}} f^3 - a^2 \beta A^{\frac{1}{2}} f^1 - A^{-\frac{1}{2}} f^2]\|^2 + \|\alpha f^2 + f^1\|^2 \\ &\quad + \|-A^{-1} f^4 - \eta A^{\phi-1} f^1 - \alpha \eta A^{\phi-1} f^2\|^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Using norm IIFIH and applying inequalities Cauchy-Schwarz, Young and applying continuous embedding $D(A\tau_2) \rightarrow D(A\tau_1)$, $\tau_2 > \tau_1$, after making various estimates, we obtain

$$\|U\|_{\mathbb{H}}^2 = \|\mathbb{B}^{-1} F\|_{\mathbb{H}}^2 \leq C \|F\|_{\mathbb{H}}^2.$$

Therefore B^{-1} is bounded. So we come to the end of the proof of this theorem.

As a consequence of the previous Theorem 2, we obtain

Theorem 3 Given $U_0 \in H$ there exists a unique weak solution U to the problem (10) satisfying

$$U \in C([0, +\infty), \mathbb{H}).$$

Futhermore, if $U_0 \in D(B^k)$, $k \in \mathbb{N}$, then the solution U of (10) satisfies

$$U \in \bigcap_{j=0}^k C^{k-j}([0, +\infty), \mathfrak{D}(\mathbb{B}^j)).$$

Theorem 4 (Lions' Interpolation) Let $\alpha < \beta < \gamma$. Then there exists a constant $L = L(\alpha, \beta, \gamma)$ such that

$$\|A^\beta u\| \leq L \|A^\alpha u\|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \cdot \|A^\gamma u\|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}} \quad (25)$$

for every $u \in D(A^\gamma)$.

Proof: See Theorem 5.34 [10].

3 I STABILITY

3.1 Exponential decay of the semigroup $S(t) = e^{tB}$

In this section, we will study the asymptotic behavior of the semigroup of the system (3)-(5). We will use the following spectral characterization of exponential stability of semigroups due to Gearhart[12](Theorem 1.3.2 book of Liu-Zheng [22]).

Theorem 5 (see [22]) Let $S(t) = e^{tB}$ be a C_0 -semigroup of contractions on a Hilbert space H . Then $S(t)$ is exponentially stable if and only if

$$\rho(B) \supseteq \{i\lambda/\lambda \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \quad (26)$$

and

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty \quad (27)$$

holds.

Remark 6 Note that to show the condition (27) it is enough to show that: Let $\delta > 0$. There exists a constant $C\delta > 0$ such that the solutions of the system (3)-(5) for $|\lambda| > \delta$, satisfy the inequality

$$\frac{\|U\|_H}{\|F\|_H} \leq C\delta \iff \|U\|_H^2 \leq C\delta \|F\|_H \|U\|_H < \infty. \quad (28)$$

In view of this theorem(5), we will try to obtain some estimates for the solution $U = (u, v, w, \theta)$ of the system $(i\lambda I - B)U = F$, where $\lambda \in \mathbb{R}$ and $F = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T \in H$. This system, written in components, reads

$$i\lambda u - v = f^1 \quad \text{in } \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}) \quad (29)$$

$$i\lambda v - w = f^2 \quad \text{in } \mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}}) \quad (30)$$

$$i\alpha\lambda w + a^2 Au + a^2 \beta Av - \eta A^\phi \theta + w = \alpha f^3 \quad \text{in } \mathfrak{D}(A^0) \quad (31)$$

$$i\lambda \theta + \eta A^\phi v + \alpha \eta A^\phi w + A\theta = f^4 \quad \text{in } \mathfrak{D}(A^0) \quad (32)$$

From (14), we have the first estimate

$$\begin{aligned}
a^2(\beta - \alpha)\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 &= |a^2(\beta - \alpha)\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2| = |-\operatorname{Re}\langle \mathbb{B}U, U \rangle| \\
&= |\operatorname{Re}\{i\lambda\|U\|^2 - \langle \mathbb{B}U, U \rangle\}| = |\operatorname{Re}\{(i\lambda I - \mathbb{B})U, U\}| \\
&\leq |\langle F, U \rangle| \leq \|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}}.
\end{aligned}$$

Therefore

$$a^2(\beta - \alpha)\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 \leq \|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}}. \quad (33)$$

Next, we show some lemmas that will lead us to the proof of the main theorem of this section.

Lemma 7 Let $\delta > 0$. There exists $C\delta > 0$ such that the solutions of the system (3)-(5) for $|\lambda| > \delta$, satisfy

$$(i) \quad |\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 \leq C_{\delta}\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} \quad \text{for} \quad 0 \leq \phi \leq 1, \quad (34)$$

$$(ii) \quad |\lambda|^2\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 \leq C_{\delta}\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \quad \text{for} \quad 0 \leq \phi \leq 1, \quad (35)$$

$$(iii) \quad |\langle w, Au \rangle| \leq C_{\delta}\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \quad \text{for} \quad 0 \leq \phi \leq 1. \quad (36)$$

Proof:(i): Taking the duality product between equation(29) and Au , taking advantage of the self-adjointness of the powers of the operator A , we obtain

$$i\lambda\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 = \langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u \rangle + \langle A^{\frac{1}{2}}f^1, A^{\frac{1}{2}}u \rangle. \quad (37)$$

Applying Cauchy-Schwarz and Young inequalities and norms $\|F\|_{\mathbb{H}}$ and $\|U\|_{\mathbb{H}}$, for $\varepsilon > 0$, exists $C_{\varepsilon} > 0$ such that

$$|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 \leq C_{\varepsilon}\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + C_{\delta}\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}}. \quad (38)$$

Therefore for $|\lambda| > 1$, we have $\varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 \leq \varepsilon|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2$ and using (33) finish proof of item (i) this lemma.

Proof:(ii) On the other hand, multiplying by λ the equation (37) and applying Cauchy-Schwarz and Young inequalities, for $\varepsilon > 0$, exists $C_{\varepsilon} > 0$ such that

$$|\lambda|^2\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 \leq C_{\varepsilon}\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \varepsilon|\lambda|^2\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + C_{\varepsilon}\|F\|_{\mathbb{H}}^2, \quad (39)$$

from (33) finish proof of item (ii) this lemma.

Proof:(iii) Using identity $w = -\lambda^2u - i\lambda f^1 - f^2$, we have

$$\langle w, Au \rangle = \langle -\lambda^2u - i\lambda f^1 - f^2, Au \rangle = -\lambda^2\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 - i\langle A^{\frac{1}{2}}f^1, \lambda A^{\frac{1}{2}}u \rangle - \langle A^{\frac{1}{2}}f^2, A^{\frac{1}{2}}u \rangle.$$

Applying Cauchy-Schwarz and item (ii) this lemma, finish proof this item.

Theorem 8 The semigroup $S(t) = e^{t\mathbb{B}}$ is exponentially stable when the parameter ϕ assumes values in the interval $[0, 1]$.

Proof: Let's first check the condition (28), we will start by proving in the following lemma the estimate of the term $a^2 \|A^{\frac{1}{2}}u + \alpha A^{\frac{1}{2}}v\|^2$ and $\|v + \alpha w\|^2$ of $\|U\|^2$:

Lemma 9 Let $\delta > 0$. There exists $C\delta > 0$ such that the solutions of the system (3)-(5) for $|\lambda| > \delta$, satisfy

$$\|A^{\frac{1}{2}}u + \alpha A^{\frac{1}{2}}v\|^2 \leq C_\delta \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} \quad \text{for} \quad 0 \leq \phi \leq 1. \quad (40)$$

Proof: As $\|A^{\frac{1}{2}}u + \alpha A^{\frac{1}{2}}v\|^2 \leq C[\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2]$ and for $|\lambda| > 1$ from item (i) of Lemma 7 and estimate (33), we finish the proof of this lemma.

Lemma 10 Let $\delta > 0$. There exists $C\delta > 0$ such that the solutions of the system (3)-(5) for $|\lambda| > \delta$, satisfy

$$\|w\|^2 \leq C_\delta \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} \quad \text{for} \quad 0 \leq \phi \leq 1. \quad (41)$$

Proof: Taking the duality product between equation (30) and w and using (31), taking advantage of the self-adjointness of the powers of the operator A , we obtain

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= -\frac{1}{\alpha} \langle v, i\alpha \lambda w \rangle - \langle f^2, w \rangle = \frac{a^2}{\alpha} \langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u \rangle \\ &\quad + \frac{a^2\beta}{\alpha} \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 - \frac{\eta}{\alpha} \langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\phi-\frac{1}{2}}\theta \rangle + \frac{1}{\alpha} \langle v, w \rangle - \langle v, f^3 \rangle - \frac{1}{\alpha} \langle f^2, w \rangle. \end{aligned} \quad (42)$$

For $\varepsilon > 0$, exists $C\varepsilon > 0$ such that $|\langle v, w \rangle| \leq C\varepsilon \|v\| + \varepsilon \|w\|^2$. Applying estimates (33) and (49) of Lemma 14 for $|\lambda| > 1$, we finish to proof this is lemma.

Finally the following lemma estimates the term $\|v + \alpha w\|^2$ of $\|U\|^2$

Lemma 11 Let $\delta > 0$. There exists $C\delta > 0$ such that the solutions of the system (3)-(5) for $|\lambda| > \delta$, satisfy

$$\|v + \alpha w\|^2 \leq C_\delta \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} \quad \text{for} \quad 0 \leq \phi \leq 1. \quad (43)$$

Proof: As $\|v + \alpha w\|^2 \leq C(\|v\|^2 + \alpha^2 \|w\|^2)$ and as $0 \leq \phi$ applying continuous embedding, estimative (33) and Lemma 10, we finish to proof this is lemma.

Finally, using the Lemmas 9–11 and estimates (33), we get

$$\|U\|_{\mathbb{H}}^2 \leq C_\delta \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} \quad \text{for} \quad 0 \leq \phi \leq 1. \quad (44)$$

Therefore the condition (27) for $\phi \in [0, 1]$ of Theorem 5 is verified. Next, we show the condition (26) of Theorem 5.

Lemma 12 Let $\rho(B)$ be the resolvent set of operator B . Then

$$i\mathbb{R} \subset \rho(B). \quad (45)$$

Proof: Since B is a closed operator and $D(B)$ has compact embedding into the energy space H , the spectrum $\sigma(B)$ contains only eigenvalues. Let us prove that $i\mathbb{R} \subset \rho(B)$ by using an argument by contradiction, so we suppose that $i\mathbb{R} \not\subset \rho(B)$. As $0 \in \rho(B)$ and $\rho(B)$ is open, we consider the highest positive number λ_0 such that the $] -i\lambda_0, i\lambda_0[\subset \rho(B)$ then $i\lambda_0$ or $-i\lambda_0$ is an element of the spectrum $\sigma(B)$. We Suppose $i\lambda_0 \in \sigma(B)$ (if $-i\lambda_0 \in \sigma(B)$ the proceeding is

similar). Then, for $0 < \bar{\delta} < \lambda_0$ there exist a sequence of real numbers (λ_n) , with $\bar{\delta} \leq \lambda_n < \lambda_0$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, and a vector sequence $U_n = (u_n, v_n, w_n, \theta_n) \in D(B)$ with unitary norms, such that

$$\|(\lambda_n I - B)U_n\|_H = \|F_n\|_H \rightarrow 0,$$

as $n \rightarrow \infty$. From estimative (44), we have

$$\begin{aligned} \|U_n\|_H^2 &= a^2 \alpha (\beta - \alpha) \|A^{\frac{1}{2}} v_n\|^2 + a^2 \|A^{\frac{1}{2}} u_n + \alpha A^{\frac{1}{2}} v_n\|^2 \\ &\quad + \|v_n + \alpha w_n\|^2 + \|\theta_n\|^2 \leq C_\delta \|F_n\|_H \|U_n\|_H = C_\delta \|F_n\|_H \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Therefore, we have $\|U_n\|_H \rightarrow 0$ but this is absurd, since $\|U_n\|_H = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$. Thus, $i\mathbb{R} \subset p(B)$. This completes the proof of this lemma.

Therefore the semigroup $S(t) = e^{tB}$ is exponentially stable for $\phi \in [0, 1]$, thus we finish the proof of this Theorem 8.

4 I REGULARITY

4.1 Study of Analyticity of the semigroup $S(t) = e^{tB}$

In this subsection, we will show that the semigroup $S(t)$, is analytic for the parameter $\phi = 1$. The following theorem characterizes the analyticity of the semigroups $S(t)$.

Theorem 13 (see [22]) Let $S(t) = e^{tB}$ be C_0 -semigroup of contractions on a Hilbert space H . Suppose that

$$\rho(B) \supseteq \{i\lambda/\lambda \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}. \quad (47)$$

Then $S(t)$ is analytic if and only if

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|\lambda(i\lambda I - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty, \quad (48)$$

holds.

Before proving the main theorem of this subsection, we will prove some lemmas that will be used for analyticity for $\phi = 1$ and the determination of Gevrey classes para $\phi \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Lemma 14 Let $\bar{\delta} > 0$. There exists $C\bar{\delta} > 0$ such that the solutions of the system (3)-(5) for $|\lambda| > \bar{\delta}$, satisfy

$$(i) \quad |\lambda| \|A^{\frac{\phi}{2}} v\|^2 \leq C_\delta \|F\|_H \|U\|_H \quad \text{for} \quad 0 \leq \phi \leq 1, \quad (49)$$

$$(ii) \quad |\lambda|^2 \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} v\|^2 \leq C_\delta \{\|F\|_H \|U\|_H + \|F\|_H^2\} \quad \text{for} \quad 0 \leq \phi \leq 1. \quad (50)$$

Proof: (i) Taking the duality product between equation (30) and $A^\phi v$, we obtain

$$i\lambda \|A^{\frac{\phi}{2}} v\|^2 = \langle A^{\frac{2\phi-1}{2}} w, A^{\frac{1}{2}} v \rangle + \langle A^{\frac{1}{2}} f^2, A^{\frac{2\phi-1}{2}} v \rangle.$$

Applying Cauchy-Schwarz and Young inequalities and estimative (51) of Lemma 15, we finish the proof of item (i) of this lemma.

Proof: (ii) Applying the operator $A^{\frac{2\phi-1}{2}}$ in the equation (30) and then using Young

$$|\lambda|^2 \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} v\|^2 = C_\delta \{ \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} w\|^2 + \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} f^2\|^2 \}.$$

Using item (i) of the Lemma 15, we finish the proof this item.

Lemma 15 Let $\delta > 0$. There exists $C\delta > 0$ such that the solutions of the system (3)-(5) for $|\lambda| > \delta$, satisfy

$$(i) \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} w\|^2 \leq C_\delta \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} \quad \text{for} \quad 0 \leq \phi \leq 1, \quad (51)$$

$$(ii) |\lambda|^2 \|A^{\phi-1} w\|^2 \leq C_\delta \{ \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2 \} \quad \text{for} \quad 0 \leq \phi \leq \frac{3}{4}, \quad (52)$$

$$(iii) |\lambda| \|A^{\frac{\phi-1}{2}} w\|^2 \leq C_\delta \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} \quad \text{for} \quad 0 \leq \phi \leq 1, \quad (53)$$

$$(iv) |\langle \lambda \theta, A^{1-\phi} v \rangle| \leq C_\delta \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (54)$$

Proof: (i): Performing the duality product between equation (32) and $A^{\phi-1} w$, taking advantage of the self-adjointness of the powers of the operator A , we obtain

$$\begin{aligned} \eta \alpha \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} w\|^2 &= \frac{1}{\alpha} \langle A^{\phi-1} \theta, i \alpha \lambda w \rangle - \eta \langle A^{\frac{2\phi-1}{2}} v, A^{\frac{2\phi-1}{2}} w \rangle - \langle A^{\frac{1}{2}} \theta, A^{\frac{2\phi-1}{2}} w \rangle + \langle f^4, A^{\phi-1} w \rangle \\ &= -\frac{a^2}{\alpha} \langle A^{\frac{2\phi-1}{2}} \theta, A^{\frac{1}{2}} u \rangle - \frac{a^2 \beta}{\alpha} \langle A^{\frac{2\phi-1}{2}} \theta, A^{\frac{1}{2}} v \rangle + \frac{\eta}{\alpha} \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} \theta\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \langle A^{-\frac{1}{2}} \theta, A^{\frac{2\phi-1}{2}} w \rangle + \langle A^{\phi-1} \theta, f^3 \rangle - \eta \langle A^{\frac{2\phi-1}{2}} v, A^{\frac{2\phi-1}{2}} w \rangle \\ &\quad - \langle A^{\frac{1}{2}} \theta, A^{\frac{2\phi-1}{2}} w \rangle + \langle f^4, A^{\phi-1} w \rangle. \end{aligned} \quad (55)$$

Applying Young inequalities and from $-\frac{1}{2} \leq \frac{2\phi-1}{2} \leq \frac{1}{2}$ and $\phi - 1 \leq 0$, using continuous embedding, for $\varepsilon > 0$, exists $C\varepsilon > 0$ such that

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} w\|^2 &\leq C \{ \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} \theta\|^2 \} + C_\varepsilon \{ \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} \theta\|^2 \} \\ &\quad + \varepsilon \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} w\|^2 + C \|\theta\| \|f^3\| + C \|f^4\| \|w\|. \end{aligned} \quad (56)$$

For $|\lambda| > 1$, we have $\|A^{\frac{1}{2}} u\| \leq |\lambda| \|A^{\frac{1}{2}} u\|$, from Lemma 7, estimative (33), using norms $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ and $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ finish proof of item (i) this lemma.

Proof (ii): On the other hand, performing the duality product between equation (31) and λw , taking advantage of the self-adjointness of the powers of the operator A , we obtain

$$\begin{aligned} i \alpha |\lambda|^2 \|A^{\phi-1} w\|^2 &= -a^2 \langle \lambda A^{\frac{2\phi-1}{2}} u, A^{\frac{2\phi-1}{2}} w \rangle - a^2 \beta \langle \lambda A^{\frac{2\phi-1}{2}} v, A^{\frac{2\phi-1}{2}} w \rangle - \lambda \|A^{\phi-1} w\|^2 \\ &\quad + \eta \langle \lambda \theta, A^{3\phi-2} w \rangle + \alpha \langle f^3, \lambda A^{2(\phi-1)} w \rangle \\ &= -a^2 \langle \lambda A^{\frac{2\phi-1}{2}} u, A^{\frac{2\phi-1}{2}} w \rangle + i a^2 \beta \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} w\|^2 + \alpha \langle f^3, \lambda A^{2(\phi-1)} w \rangle \\ &\quad + i a^2 \beta \langle A^{\frac{1}{2}} f^2, A^{2\phi-\frac{3}{2}} w \rangle + \eta \langle \lambda \theta, A^{3\phi-2} w \rangle - \lambda \|A^{\phi-1} w\|^2, \end{aligned}$$

then, taking imaginary part, for $\varepsilon > 0$ exists $C\varepsilon > 0$, such that

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 \|A^{\phi-1} w\|^2 &\leq C_\delta \{ |\lambda|^2 \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} u\|^2 + \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} w\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} f^2\| \|A^{2\phi-\frac{3}{2}} w\| \\ &\quad + C_\varepsilon \|A^{\frac{1}{2}} \theta\|^2 + \varepsilon |\lambda|^2 \|A^{3\phi-\frac{5}{2}} w\|^2 + C_\varepsilon \|f^3\|^2 + \varepsilon |\lambda|^2 \|A^{2(\phi-1)} w\|^2 \}. \end{aligned} \quad (57)$$

Therefore, as $0 \leq \phi \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 0 \leq \frac{2\phi-1}{2} \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, of item (ii) Lemma 7, item (i) this lemma and estimative (33), finish proof this item.

Proof (iii): Multiplying by $A^{\phi-1}w$ the equation (31) and by $\eta A^{2\phi-2}w$ the equation (32) and adding the results, we have

$$\begin{aligned} i\alpha\lambda\|A^{\frac{\phi-1}{2}}w\|^2 + a^2\langle A^\phi u, i\lambda v - f^2 \rangle + a^2\beta\langle A^\phi v, i\lambda v - f^2 \rangle - \eta\langle A^\phi \theta, A^{\phi-1}w \rangle \\ + \|A^{\frac{\phi-1}{2}}w\|^2 + i\eta\langle \lambda \theta, A^{2\phi-2}w \rangle + \eta^2\langle A^\phi v, i\lambda A^{2\phi-2}v - A^{2\phi-2}f^2 \rangle \\ + \alpha\eta^2\|A^{\frac{3\phi-2}{2}}w\|^2 + \eta\langle A^\phi \theta, A^{\phi-1}w \rangle = \alpha\langle f^3, A^{\phi-1}w \rangle + \eta\langle f^4, A^{2\phi-2}w \rangle. \end{aligned}$$

Taking imaginary part, we have

$$\begin{aligned} \alpha\lambda\|A^{\frac{\phi-1}{2}}w\|^2 = a^2\beta\lambda\|A^{\frac{\phi}{2}}v\|^2 + \eta^2\lambda\|A^{\frac{3\phi-2}{2}}v\|^2 + \text{Im}\{a^2\beta\langle A^{\frac{2\phi-1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}f^2 \rangle \\ + ia^2\langle \sqrt{|\lambda|}A^{\frac{\phi}{2}}u, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}A^{\frac{\phi}{2}}v \rangle + a^2\langle A^{\frac{2\phi-1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}f^2 \rangle + \eta^2\langle A^{3\phi-\frac{5}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}f^2 \rangle \\ + i\eta\langle \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}\theta, \sqrt{|\lambda|}A^{2\phi-2}w \rangle + \alpha\langle f^3, A^{\phi-1}w \rangle + \eta\langle f^4, A^{2\phi-2}w \rangle\}. \quad (58) \end{aligned}$$

Of (58), as for $0 \leq \phi \leq 1$ we have $\frac{3\phi-2}{2} \leq \frac{2\phi-1}{2} \leq \frac{\phi}{2} \leq \frac{1}{2}$ and $3\phi - \frac{5}{2} \leq \frac{1}{2}$ using continuous embedding and aplying Cauchy-Schwarz and Young inequalities for $\varepsilon > 0$ exists $C\varepsilon > 0$, such that

$$\begin{aligned} |\lambda|\|A^{\frac{\phi-1}{2}}w\|^2 \leq C_\delta\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + |\lambda|\|A^{\frac{\phi}{2}}v\|^2 + |\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2\} \\ + C_\varepsilon|\lambda|\|\theta\|^2 + \varepsilon|\lambda|\|A^{2\phi-2}w\|^2 \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq 1. \end{aligned}$$

Finally, as $2\phi - 2 \leq \frac{\phi-1}{2}$ using continuous embedding and item (i) Lemma 7 and item (i) of Lemma 14, finish proof this item.

Proof (iv): Just observe that for $\frac{1}{2} \leq \varphi$, we have $\frac{1}{2} - \varphi \leq \frac{2\phi-1}{2} \leq \frac{1}{2}$. Then

$$|\langle \lambda \theta, A^{1-\phi}v \rangle| = |\langle A^{\frac{1}{2}}\theta, A^{\frac{1}{2}-\phi}(-iw - if^2) \rangle| \leq |\langle A^{\frac{1}{2}}\theta, A^{\frac{1}{2}-\phi}w \rangle| + |\langle A^{\frac{1}{2}}\theta, A^{\frac{1}{2}-\phi}f^2 \rangle|.$$

Lemma 16 Let $\delta > 0$. There exists $C\delta > 0$ such that the solutions of the system (3)-(5) for $|\lambda| > \delta$, satisfy

$$(i) \quad |\lambda|\|\theta\|^2 \leq C_\delta\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq 1, \quad (59)$$

$$(ii) \quad |\lambda|^2\|\theta\|^2 \leq C_\delta\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq \frac{3}{4}, \quad (60)$$

$$(iii) \quad |\lambda|^2\|A^{\frac{2\phi-3}{2}}\theta\|^2 \leq C_\delta\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq 1. \quad (61)$$

Proof: (i): Performing the duality product between equation (32) and $\lambda \theta$, taking advantage of the self-adjointness of the powers of the operator A , we obtain

$$\begin{aligned} \lambda\|\theta\|^2 &= -i\lambda^2\|A^{-\frac{1}{2}}\theta\|^2 - \eta\langle -iw - if^2, A^{\phi-1}\theta \rangle - \eta\langle \alpha\lambda w, A^{\phi-1}\theta \rangle + \langle f^4, \lambda A^{-1}\theta \rangle \\ &= -i\lambda^2\|A^{-\frac{1}{2}}\theta\|^2 + i\eta\langle w, A^{\phi-1}\theta \rangle + i\eta\langle f^2, A^{\phi-1}\theta \rangle - i\eta a^2\langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\phi-\frac{1}{2}}\theta \rangle \\ &\quad - i\eta a^2\beta\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\phi-\frac{1}{2}}\theta \rangle + i\eta^2\|A^{\frac{2\phi-1}{2}}\theta\|^2 - i\eta\langle w, A^{\phi-1}\theta \rangle + i\eta\alpha\langle f^3, A^{\phi-1}\theta \rangle \\ &\quad + i\eta\langle f^4, A^{\phi-1}v \rangle + i\alpha\eta\langle f^4, A^{\phi-1}w \rangle + i\langle f^4, \theta \rangle - i\|A^{-\frac{1}{2}}f^4\|^2. \quad (62) \end{aligned}$$

Taking the real part of (62) and simplifying, we get

$$\begin{aligned} \lambda \|\theta\|^2 &= \operatorname{Re}\{i\eta\langle f^2, A^{\phi-1}\theta \rangle - i\eta a^2\langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\phi-\frac{1}{2}}\theta \rangle - i\eta a^2\beta\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\phi-\frac{1}{2}}\theta \rangle \\ &\quad + i\eta\alpha\langle f^3, A^{\phi-1}\theta \rangle + i\eta\langle f^4, A^{\phi-1}v \rangle + i\alpha\eta\langle f^4, A^{\phi-1}w \rangle + i\langle f^4, \theta \rangle\}. \end{aligned} \quad (63)$$

As $|\operatorname{Re}\{-i\eta a^2\langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\phi-\frac{1}{2}}\theta \rangle\}| \leq C\{\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \|A^{\phi-\frac{1}{2}}\theta\|^2\}$. And for $|\lambda| > 1$ and $0 \leq \phi \leq 1$ we have, $\phi - 1 \leq 0$ and $\phi - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ applying continuous embedding $D(A^{\tau_2}) \rightarrow D(A^{\tau_1})$, $\tau_2 > \tau_1$, estimative (33) and applying Cauchy-Schwarz, we finish the proof of item (i) of this lemma.

Proof of (ii): Multiplying by λ the equation (63), we have

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 \|\theta\|^2 &= \operatorname{Re}\{i\eta\langle A^{\phi-1}f^2, \lambda\theta \rangle - i\eta a^2\langle \lambda A^{\frac{1}{2}}u, A^{\phi-\frac{1}{2}}\theta \rangle - \eta a^2\beta\langle i\lambda v, A^{\phi}\theta \rangle + i\langle f^4, \lambda\theta \rangle \\ &\quad + i\eta\alpha\langle f^3, \lambda A^{\phi-1}\theta \rangle + i\eta\langle f^4, \lambda A^{\phi-1}v \rangle + i\alpha\eta\langle f^4, \lambda A^{\phi-1}w \rangle\}. \end{aligned} \quad (64)$$

For $\varepsilon > 0$, exists $C\varepsilon > 0$, such that

$$|\operatorname{Re}\{i\eta\langle A^{\phi-1}f^2, \lambda\theta \rangle\}| \leq \varepsilon|\lambda|^2\|\theta\|^2 + C_\varepsilon\|A^{\phi-1}f^2\|^2, \quad (65)$$

$$|\operatorname{Re}\{-i\eta a^2\langle \lambda A^{\frac{1}{2}}u, A^{\phi-\frac{1}{2}}\theta \rangle\}| \leq C_\delta\{|\lambda|^2\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \|A^{\phi-\frac{1}{2}}\theta\|^2\}, \quad (66)$$

on the other hand, from equation (30), we have $i\lambda v = w + f^2$ and using Lemma 15, we have

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}\{-\eta a^2\beta\langle i\lambda v, A^{\phi}\theta \rangle\}| &= \eta a^2\beta|\operatorname{Re}\{A^{\frac{2\phi-1}{2}}w, A^{\frac{1}{2}}\theta\} + \langle A^{\frac{1}{2}}f^2, A^{\phi-\frac{1}{2}}\theta \rangle| \\ &\leq C_\delta\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\}, \end{aligned} \quad (67)$$

besides,

$$|\operatorname{Re}\{i\eta\alpha\langle f^3, \lambda A^{\phi-1}\theta \rangle\}| \leq C_\varepsilon\|f^3\|^2 + \varepsilon|\lambda|^2\|A^{\phi-1}\theta\|^2, \quad (68)$$

using equation (30), we have

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}\{-\eta\langle f^4, A^{\phi-1}i\lambda v \rangle\}| &= |\operatorname{Re}\{-\eta\langle f^4, A^{\phi-1}w + A^{\phi-1}f^2 \rangle\}| \\ &\leq C_\delta\{\|f^4\|\|A^{\phi-1}w\| + \|f^4\|\|A^{\phi-1}f^2\|\} \\ &\leq C_\delta\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \end{aligned} \quad (69)$$

and

$$|\operatorname{Re}\{-\alpha\eta\langle f^4, A^{\phi-1}i\lambda w \rangle\}| \leq C_\varepsilon\|F\|^2 + \varepsilon|\lambda|^2\|A^{\phi-1}w\|^2 \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq 1, \quad (70)$$

or for $0 \leq \phi \leq \frac{3}{4}$ of item (ii) Lemma 15

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}\{-\alpha\eta\langle f^4, A^{\phi-1}i\lambda w \rangle\}| &\leq C_\varepsilon\|F\|_{\mathbb{H}}^2 + \varepsilon\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \\ &\leq C_\delta\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\}. \end{aligned} \quad (71)$$

And besides, for $0 \leq \phi \leq 1$

$$|\operatorname{Re} i\langle f^4, \lambda\theta \rangle| \leq C_\varepsilon\|F\|_{\mathbb{H}}^2 + \varepsilon|\lambda|^2\|\theta\|^2. \quad (72)$$

Therefore, from the estimates (65)–(69) together with the estimates (71) and (72) we conclude the proof of the item (ii) of this lemma.

Proof. (iii): Performing the duality product between equation (32) and $\lambda A^{2\phi-3}\theta$, taking advantage of the self-adjointness of the powers of the operator A and using (30), we obtain

$$i|\lambda|^2 \|A^{\frac{2\phi-3}{2}}\theta\|^2 = -\eta\langle -iw - if^2, A^{3\phi-3}\theta \rangle - \alpha\eta\langle A^{\frac{2\phi-1}{2}}w, \lambda A^{2\phi-\frac{5}{2}}\theta \rangle - \lambda\|A^{\phi-1}\theta\|^2 + \langle f^4, \lambda A^{2\phi-3}\theta \rangle. \quad (73)$$

As for $0 \leq \phi \leq 1$ we have $3\phi - 3 \leq 0 < \frac{1}{2}$, $2\phi - \frac{5}{2} \leq \frac{2\phi-3}{2}$ and $2\phi - 3 \leq \frac{2\phi-3}{2}$, taking imaginary part in (73) and using continuous immersions, for $\varepsilon > 0$ exists $C\varepsilon > 0$ such that

$$|\lambda|^2 \|A^{\frac{2\phi-3}{2}}\theta\|^2 \leq C_\delta\{\|w\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 + \|f^2\|\|\theta\|\} + \varepsilon|\lambda|^2 \|A^{\frac{2\phi-3}{2}}\theta\|^2 + C_\varepsilon\|A^{\frac{2\phi-1}{2}}w\|^2 + C_\varepsilon\|f^4\|^2. \quad (74)$$

Finally using estimative (33) and Lemma 7, we finish the proof of the item (iv) of this Lemma.

Lemma 17 Let $\delta > 0$. There exists $C\delta > 0$ such that the solutions of the system (3)-(5) for $|\lambda| > \delta$, satisfy

$$(i) \quad |\lambda|\|w\|^2 \leq C_\delta\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1, \quad (75)$$

$$(ii) \quad |\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 \leq C_\delta\{|\lambda|\|\theta\|^2 + |\lambda|\|w\|^2 + \|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}}\} + C_\varepsilon|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \varepsilon|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (76)$$

Proof: (i): Multiplying by $\eta A^{\phi-1}w$ equation (31) and by ηw the equation (32) and adding the results, we have

$$i\alpha\lambda\|w\|^2 + a^2\langle Au, i\lambda v - f^2 \rangle + a^2\beta\langle Av, w \rangle - \eta\langle A^\phi\theta, w \rangle + \|w\|^2 + i\eta\langle \lambda\theta, A^{\phi-1}w \rangle + \eta^2\langle A^\phi v, i\lambda A^{\phi-1}v - A^{\phi-1}f^2 \rangle + \alpha\eta^2\|A^{\frac{2\phi-1}{2}}w\|^2 + \eta\langle A^\phi\theta, w \rangle = \alpha\langle f^3, w \rangle + \eta\langle f^4, A^{\phi-1}w \rangle. \quad (77)$$

On the other hand. Carrying out the following duality products: first between equation (32) and $\frac{a^2\beta}{\alpha\eta}A^{\phi-1}u$, taking advantage of the self-adjunction of the powers of operator A , we have

$$a^2\beta\langle w, Av \rangle + i\frac{a^2\beta}{\alpha\eta}\langle \lambda\theta, A^{1-\phi}v \rangle + \frac{a^2\beta}{\alpha}\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \frac{a^2\beta}{\alpha\eta}\langle A\theta, A^{1-\phi}v \rangle = \frac{a^2\beta}{\alpha\eta}\langle f^4, A^{1-\phi}v \rangle \quad (78)$$

$$\frac{a^2\beta}{\alpha\eta}\langle A^{1-\phi}v, A\theta \rangle + i\frac{1}{\eta}\langle \lambda w, A^{1-\phi}\theta \rangle + \frac{a^2}{\alpha\eta}\langle Au, A^{1-\phi}\theta \rangle - \frac{1}{\alpha}\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 + \frac{1}{\alpha\eta}\langle w, A^{1-\phi}\theta \rangle = \frac{1}{\eta}\langle f^3, A^{1-\phi}\theta \rangle \quad (79)$$

$$\frac{a^2}{\alpha\eta}\langle A^{1-\phi}\theta, Au \rangle + i\frac{a^2}{\alpha\eta}\langle \lambda\theta, A^{1-\phi}u \rangle + \frac{a^2}{\alpha}\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u \rangle + a^2\langle i\lambda v - f^2, Au \rangle = \frac{a^2}{\alpha\eta}\langle f^4, A^{1-\phi}u \rangle. \quad (80)$$

Adding the equations (77), (78), (79) and (80), we get

$$\begin{aligned}
i\alpha\lambda\|w\|^2 &= a^2\lambda i\{\langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v\rangle - \langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u\rangle\} + a^2\langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}f^2\rangle - \|w\|^2 \\
&\quad - a^2\beta\{\langle Av, w\rangle + \langle w, Av\rangle\} - i\eta\langle \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}A^{\frac{\phi-1}{2}}\theta, \sqrt{|\lambda|}A^{\frac{\phi-1}{2}}w\rangle \\
&\quad + i\eta^2\lambda\|A^{\frac{2\phi-1}{2}}v\|^2 + \eta^2\langle A^{2\phi-\frac{3}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}f^2\rangle - \alpha\eta^2\|A^{\frac{2\phi-1}{2}}w\|^2 \\
&\quad + \eta\langle f^4, A^{\phi-1}w\rangle - i\frac{a^2\beta}{\alpha\eta}\langle \lambda\theta, A^{1-\phi}v\rangle - \frac{a^2\beta}{\alpha}\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 \\
&\quad + \alpha\langle f^3, w\rangle - \frac{a^2\beta}{\alpha\eta}\{\langle A\theta, A^{1-\phi}v\rangle + \langle A^{1-\phi}v, A\theta\rangle\} + \frac{a^2\beta}{\alpha\eta}\langle f^4, A^{1-\phi}v\rangle \\
&\quad - i\frac{1}{\eta}\langle \lambda w, A^{1-\phi}\theta\rangle - \frac{a^2}{\alpha\eta}\{\langle Au, A^{1-\phi}\theta\rangle + \langle A^{1-\phi}\theta, Au\rangle\} + \frac{1}{\alpha}\|A^{\frac{1}{2}}\theta\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{\alpha\eta}\langle A^{\frac{2\phi-1}{2}}w, A^{\frac{3}{2}-2\phi}\theta\rangle + \frac{1}{\eta}\langle f^3, A^{1-\phi}\theta\rangle - i\frac{a^2}{\alpha\eta}\langle \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}A^{\frac{1}{2}-\phi}\theta, \sqrt{|\lambda|}A^{\frac{1}{2}}u\rangle \\
&\quad - \frac{a^2}{\alpha}\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u\rangle + a^2\langle A^{\frac{1}{2}}f^2, A^{\frac{1}{2}}u\rangle + \frac{a^2}{\alpha\eta}\langle f^4, A^{1-\phi}u\rangle.
\end{aligned} \tag{81}$$

From the identities: $\forall z \in \mathbb{C}$, it is verified $\text{Im}\{z + z\} = 0$ and $\text{Im}\{i(z - z)\} = 0$, taking the imaginary part in (81), we get

$$\begin{aligned}
\alpha\lambda\|w\|^2 &= \text{Im}\{a^2\langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}f^2\rangle - i\eta\langle \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}A^{\frac{\phi-1}{2}}\theta, \sqrt{|\lambda|}A^{\frac{\phi-1}{2}}w\rangle\} + \eta^2\lambda\|A^{\frac{2\phi-1}{2}}v\|^2 \\
&\quad + \text{Im}\{\eta^2\langle A^{2\phi-\frac{3}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}f^2\rangle - i\frac{a^2\beta}{\alpha\eta}\langle \lambda\theta, \lambda A^{1-\phi}v\rangle + \alpha\langle f^3, w\rangle \\
&\quad + \eta\langle f^4, A^{\phi-1}w\rangle + \frac{a^2\beta}{\alpha\eta}\langle f^4, A^{1-\phi}v\rangle - \frac{1}{\alpha}\langle A^{\frac{2\phi-1}{2}}w, A^{\frac{3}{2}-2\phi}\theta\rangle \\
&\quad - i\frac{1}{\eta}\langle \lambda w, A^{1-\phi}\theta\rangle + \frac{1}{\eta}\langle f^3, A^{1-\phi}\theta\rangle - i\frac{a^2}{\alpha\eta}\langle \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}A^{\frac{1}{2}-\phi}\theta, \sqrt{|\lambda|}A^{\frac{1}{2}}u\rangle \\
&\quad - \frac{a^2}{\alpha}\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}u\rangle + a^2\langle A^{\frac{1}{2}}f^2, A^{\frac{1}{2}}u\rangle + \frac{a^2}{\alpha\eta}\langle f^4, A^{1-\phi}u\rangle\}.
\end{aligned} \tag{82}$$

For $\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$, we have $\frac{1}{2} - \phi \leq \frac{2\phi-1}{2}$, from (54) of Lemma 15, we have

$$\left| \text{Im}\left\{ -i\frac{a^2\beta}{\alpha\eta}\langle A^{\frac{1}{2}}\theta, \lambda A^{\frac{1}{2}-\phi}v\rangle \right\} \right| \leq C_\delta\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \tag{83}$$

Besides, using (32) and considering $\frac{1}{2} \leq \phi \leq \frac{3}{4}$, from estimative (52) Lemma 15, estimative (60) Lemma 16 and estimative (49) Lemma 14, we have

$$\begin{aligned}
\left| \text{Im}\left\{ \frac{-i}{\eta}\langle \lambda A^{-\phi}w, A\theta\rangle \right\} \right| &\leq C\{|\langle \lambda A^{-\phi}w, -i\lambda\theta - \eta A^{\phi}v - \alpha\eta A^{\phi}w + f^4\rangle|\} \\
&\leq C\{|\lambda|^2\|A^{-\phi}w\|^2 + |\lambda|^2\|\theta\|^2 + \|w\|^2 + \|f^4\|^2\} \\
&\quad + C_\varepsilon|\lambda|\|v\|^2 + \varepsilon|\lambda|\|w\|^2 \\
&\leq C_\delta\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq \frac{3}{4}, \tag{84}
\end{aligned}$$

on the other hand, using (31), we have

$$\begin{aligned}
\left| \operatorname{Im} \left\{ \frac{-i}{\eta} \langle \lambda A^{-\phi} w, A\theta \rangle \right\} \right| &\leq C | \langle -a^2 Au - a^2 \beta Av + \eta A^\phi \theta - w + \alpha f^3, \lambda A^{-\phi} \theta \rangle | \\
&\leq C | -a^2 \langle \sqrt{|\lambda|} A^{\frac{1}{2}} u, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}} A^{\frac{1}{2}-\phi} \theta \rangle - a^2 \beta \langle \lambda A^{\frac{2\phi-1}{2}} v, A^{\frac{3}{2}-2\phi} \theta \rangle \\
&\quad + \eta \lambda \|\theta\|^2 - \langle \sqrt{|\lambda|} w, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}} A^{-\phi} \theta \rangle + \alpha \langle f^3, \lambda A^{-\phi} \theta \rangle |,
\end{aligned}$$

Considering $\frac{3}{4} \leq \phi \leq 1$, we have $\frac{1}{2} - \phi \leq 0$, $-\phi < 0$, $\frac{3}{2} - 2\phi < \frac{1}{2}$ and $-\phi \leq \phi - \frac{3}{2}$, applying Cauchy-Schwarz and Young inequalities, continuous immersion and estimates (33), (34) of Lemma 7, (50) of Lemma 14, (59) and (61) of Lemma 16, for $\varepsilon > 0$ exists $C\varepsilon > 0$ such that

$$\begin{aligned}
\left| \operatorname{Im} \left\{ \frac{-i}{\eta} \langle \lambda A^{-\phi} w, A\theta \rangle \right\} \right| &\leq C_\delta \{ \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\
&\quad + \varepsilon |\lambda| \|w\|^2 \quad \text{for } \frac{3}{4} \leq \phi \leq 1. \quad (85)
\end{aligned}$$

And, from $\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$, we have $1 - \phi \leq \frac{1}{2}$, then

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\eta} \operatorname{Im} \langle f^3, A^{1-\phi} \theta \rangle \right| &\leq C \{ \|f^3\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} \theta\|^2 \} \\
&\leq C_\delta \{ \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2 \} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (86)
\end{aligned}$$

Applying Cauchy-Schwarz and Young inequalities in (82) and using estimates (84)–(86), for $\varepsilon > 0$ exists $C\varepsilon > 0$, such that

$$\begin{aligned}
|\lambda| \|w\|^2 &\leq C_\delta \{ \|A^{\frac{1}{2}} u\| \|A^{\frac{1}{2}} f^2\| + |\lambda| \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} v\|^2 + \|A^{2\phi-\frac{3}{2}} v\| \|A^{\frac{1}{2}} f^2\| + \|f^4\| \|A^{\phi-1} w\| \\
&\quad + \|f^3\| \|w\| + \|f^4\| \|A^{1-\phi} v\|^2 + \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} w\|^2 + \|A^{\frac{3}{2}-2\phi} \theta\|^2 + |\lambda| \|A^{\frac{1}{2}-\phi} \theta\|^2 \\
&\quad + |\lambda| \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}} f^2\| \|A^{\frac{1}{2}} u\| + \|f^4\| \|A^{1-\phi} u\| \\
&\quad + C_\varepsilon |\lambda| \|A^{\frac{\phi-1}{2}} \theta\|^2 + \varepsilon |\lambda| \{ \|A^{\frac{\phi-1}{2}} w\|^2 + \|w\|^2 \} + C_\delta \{ \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2 \}.
\end{aligned}$$

For $\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$, we have: $2\phi - \frac{2}{3} \leq \frac{1}{2}$, $\frac{\phi}{2} - 1 < \frac{1}{2}$, $\phi - 1 \leq \frac{\phi-1}{2} \leq 0 < \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2} - 2\phi \leq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} - \phi \leq 0$, $1 - \phi \leq \frac{1}{2}$, using continuous immersion, finish proof this item.

Proof. (ii): Performing the duality product between $a^2 \beta Av$ and w using equation (30) and advantage of the self-adjointness of the powers of the operator A , we obtain

$$a^2 \beta \langle Av, w \rangle = a^2 \beta \langle A^{\frac{1}{2}} v, i \lambda A^{\frac{1}{2}} v - A^{\frac{1}{2}} f^2 \rangle = -i a^2 \beta \lambda \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2 - a^2 \beta \langle A^{\frac{1}{2}} v, A^{\frac{1}{2}} f^2 \rangle. \quad (87)$$

On the other hand, multiplying by w equation (31) and by $\eta A^{\phi-1} w$ the equation (32) and adding the results, we have

$$\begin{aligned}
&i \alpha \lambda \|w\|^2 + a^2 \langle Au, i \lambda v - f^2 \rangle + a^2 \beta \langle Av, w \rangle - \eta \langle A^\phi \theta, w \rangle \\
&\quad + \|w\|^2 + i \eta \langle \lambda \theta, A^{\phi-1} w \rangle + \eta^2 \langle A^\phi v, i \lambda A^{\phi-1} v - A^{\phi-1} f^2 \rangle \\
&\quad + \alpha \eta^2 \|A^{\frac{2\phi-1}{2}} w\|^2 + \eta \langle A^\phi \theta, w \rangle = \alpha \langle f^3, w \rangle + \eta \langle f^4, A^{\phi-1} w \rangle. \quad (88)
\end{aligned}$$

Taking imaginary part in (88) and using (87), we have

$$\begin{aligned}
\alpha\lambda\|w\|^2 &= a^2\beta\lambda\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \eta^2\lambda\|A^{\frac{2\phi-1}{2}}v\|^2 + \text{Im}\{a^2\beta\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}f^2\rangle \\
&\quad + ia^2\langle\sqrt{|\lambda|}A^{\frac{1}{2}}u, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}A^{\frac{1}{2}}v\rangle + a^2\langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}f^2\rangle + \eta^2\langle A^{2\phi-\frac{3}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}f^2\rangle \\
&\quad - i\eta\langle\frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}\theta, \sqrt{|\lambda|}A^{\phi-1}w\rangle + \alpha\langle f^3, w\rangle + \eta\langle f^4, A^{\phi-1}w\rangle\}. \quad (89)
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
a^2\beta\lambda\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \eta^2\lambda\|A^{\frac{2\phi-1}{2}}v\|^2 &= \alpha\lambda\|w\|^2 - \text{Im}\{a^2\beta\langle A^{\frac{1}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}f^2\rangle \\
&\quad + ia^2\langle\sqrt{|\lambda|}A^{\frac{1}{2}}u, \frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}A^{\frac{1}{2}}v\rangle + a^2\langle A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}f^2\rangle + \eta^2\langle A^{2\phi-\frac{3}{2}}v, A^{\frac{1}{2}}f^2\rangle \\
&\quad - i\eta\langle\frac{\lambda}{\sqrt{|\lambda|}}\theta, \sqrt{|\lambda|}A^{\phi-1}w\rangle + \alpha\langle f^3, w\rangle + \eta\langle f^4, A^{\phi-1}w\rangle\}. \quad (90)
\end{aligned}$$

Therefore, of (90), as for $\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$ we have $\frac{2\phi-1}{2} \leq \frac{1}{2}$, $2\phi - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2}$, $\phi - 1 \leq 0$ and $\phi - 1 < \frac{\phi-1}{2}$, applying continuous immersion, Cauchy-Schwarz and Young inequalities, for $\varepsilon > 0$ exists $C\varepsilon > 0$, finish proof this item.

Theorem 18 The semigroup $S(t) = e^{tB}$ is analytic for $\phi = 1$.

Proof: From Lemma(12), (47) is verified. Therefore, it remains to prove (48), for that it is enough to show that, let $\delta > 0$. There exists a constant $C\delta > 0$ such that the solutions of the system (3)-(5) for $|\lambda| > \delta$, satisfy the inequality

$$|\lambda| \frac{\|U\|_{\mathbb{H}}}{\|F\|_{\mathbb{H}}} \leq C_{\delta} \iff |\lambda| \|U\|_{\mathbb{H}}^2 \leq C_{\delta} \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} < \infty. \quad (91)$$

Finally, considering $\phi = 1$ and using item (i) the Lemmas 7, 14 and 16, Lemma 17 and item (iii) estimative (75) of Lemma 17, finish the proof of this theorem.

4.2 Gevrey Class

Before exposing our results, it is useful to recall the next definition and result presented in [15] (adapted from [27], Theorem 4, p. 153)).

Definition 19 Let $t_0 \geq 0$ be a real number. A strongly continuous semigroup $S(t)$, defined on a Banach space H , is of Gevrey class $s > 1$ for $t > t_0$, if $S(t)$ is infinitely differentiable for $t > t_0$, and for every compact set $K \subset (t_0, \infty)$ and each $\mu > 0$, there exists a constant $C = C(\mu, K) > 0$ such that

$$\|S^{(n)}(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C\mu^n(n!)^s, \text{ for all } t \in K, n = 0, 1, 2, \dots \quad (92)$$

Theorem 20 ([27]) Let $S(t)$ be a strongly continuous and bounded semigroup on a Hilbert space H . Suppose that the infinitesimal generator B of the semigroup $S(t)$ satisfies the following estimate, for some $0 < \Psi < 1$:

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \sup |\lambda|^{\Psi} \|(\lambda I - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty. \quad (93)$$

Then $S(t)$ is of Gevrey class s for $t > 0$, for every $s > \frac{1}{\psi}$.

Our main result in this subsection is as follows:

Theorem 21 Let $S(t) = e^{tB}$ strongly continuous semigroups of contractions on the Hilbert space H , the semigroups $S(t)$ is of Gevrey class s_i $i = 1, 2$, for every $s_1 > \frac{1}{\psi_1(\emptyset)} = \frac{1}{2}$ for $\phi \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ and $s_2 > \frac{1}{\psi_2(\emptyset)} = \frac{\phi}{2\phi-1}$ for $\phi \in (\frac{2}{3}, 1)$, such that we have the resolvent estimative:

$$(i) \quad \limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} |\lambda|^{\frac{1}{2}} \|(i\lambda I - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty, \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} < \phi \leq \frac{2}{3}, \quad (94)$$

$$(ii) \quad \limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} |\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}} \|(i\lambda I - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty, \quad \text{for} \quad \frac{2}{3} \leq \phi < 1. \quad (95)$$

Proof: (i): Note that the estimate

$$|\lambda|^{\frac{1}{2}} \|(i\lambda I - B)^{-1}F\|_H = |\lambda|^{\frac{1}{2}} \|U\|_H \leq C_\delta \|F\|_H \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1 \quad (96)$$

implies the inequality (94). Therefore from now on we will show (96), for this purpose let us estimate the term $|\lambda| \|U\|_H^2$: Using estimative (75) Lemma 15 and (59) of Lemma 16 in (76), we have

$$|\lambda| \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 \leq C_\delta \{\|F\|_H \|U\|_H + \|F\|_H^2\} \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (97)$$

Using estimates (34), (75), (59) and (97), for $\varepsilon > 0$ exists $C_\varepsilon > 0$, such that

$$|\lambda| \|U\|_H^2 \leq C_\varepsilon \|F\|_H^2 + \varepsilon \|U\|^2 \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1.$$

Hence, in particular for $\phi \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, we arrive at

$$|\lambda|^{\frac{1}{2}} \|U\|_H \leq C_\varepsilon \|F\|_H \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} < \phi \leq \frac{2}{3}. \quad (98)$$

Proof: (ii): We assume $\lambda \in \mathbb{R}$ with $|\lambda| \geq 1$, we shall borrow some ideas from [21]. Let us decompose w as $w = w_1 + w_2$, such that

$$i\alpha\lambda w_1 + Aw_1 = \alpha f^3 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}(A^0)$$

and

$$i\alpha\lambda w_2 = -a^2 Au - a^2 \beta Av + \eta A^\phi \theta - w + Aw_1 \quad \text{in} \quad \mathcal{D}(A^0). \quad (99)$$

Firstly, applying the product duality the first equation in (99) by w_1 , then by Aw_1 , we have

$$|\lambda| \|w_1\| + |\lambda|^{\frac{1}{2}} \|A^{\frac{1}{2}}w_1\| + \|Aw_1\| \leq C \|F\|_H. \quad (100)$$

As for $\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$ we have: $0 \leq \frac{2\phi-1}{2} \leq \frac{1}{2}$ and from $A^{\frac{2\phi-1}{2}}w_2 = A^{\frac{2\phi-1}{2}}w - A^{\frac{2\phi-1}{2}}w_1$, using estimative (100) and estimative (51) Lemma 15, we have

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{2\phi-1}{2}}w_2\|^2 &\leq C_\delta\{\|A^{\frac{2\phi-1}{2}}w\|^2 + \|A^{\frac{2\phi-1}{2}}w_1\|^2\} \\ &\leq C_\delta\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + |\lambda|^{-1}\|F\|_{\mathbb{H}}^2\},\end{aligned}$$

as for $\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$, we have $-1 \leq \frac{2\phi-1}{2}$, then

$$\begin{aligned}\|A^{\frac{2\phi-1}{2}}w_2\|^2 &\leq C_\delta\{\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + |\lambda|^{\frac{1-2\phi}{\phi}}\|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \\ &\leq C_\delta|\lambda|^{\frac{1-2\phi}{\phi}}\{|\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}}\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (101)\end{aligned}$$

Now applying the operator $A^{-\frac{1}{2}}$ in the second equation of (99) and using Lemmas (7) and (15), estimates (33) and (100) and as $-1 \leq \frac{2\phi-1}{2}$, we have

$$\begin{aligned}|\lambda|^2\|A^{-\frac{1}{2}}w_2\|^2 &\leq C\{\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 + \|A^{\phi-\frac{1}{2}}\theta\|^2 + \|A^{-\frac{1}{2}}w\|^2\} + \|A^{\frac{1}{2}}w_1\|^2 \\ &\leq C_\delta|\lambda|^{\frac{1-2\phi}{\phi}}\{|\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}}\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1.\end{aligned}$$

Therefore

$$\|A^{-\frac{1}{2}}w_2\|^2 \leq C_\delta|\lambda|^{-[\frac{4\phi-1}{\phi}]}\{|\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}}\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (102)$$

By interpolations inequality Theorem 4, since $-\frac{1}{2} < 0 \leq \frac{2\phi-1}{2}$, using estimates (101) and (102), we derive

$$\begin{aligned}\|w_2\|^2 &\leq C(\|A^{-\frac{1}{2}}w_2\|^2)^{\frac{2\phi-1}{2\phi}}(\|A^{\frac{2\phi-1}{2}}w_2\|^2)^{\frac{1}{2\phi}} \\ &\leq C_\delta|\lambda|^{-[\frac{4\phi-1}{\phi}]\frac{2\phi-1}{2\phi} + [\frac{2\phi-1}{2\phi}]\frac{1}{2\phi}}[|\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}}\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2] \\ &\leq C_\delta|\lambda|^{\frac{2-4\phi}{\phi}}[|\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}}\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2] \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (103)\end{aligned}$$

On the other hand, as $\|w\|^2 \leq C\{\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2\}$ and as for $\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$ we have $-2 \leq \frac{2\phi-1}{2}$, using estimates (100) and (103), we get

$$\|w\|^2 \leq C_\delta|\lambda|^{\frac{2-4\phi}{\phi}}[|\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}}\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2] \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1,$$

equivalently

$$|\lambda|\|w\|^2 \leq C_\delta|\lambda|^{\frac{2-3\phi}{\phi}}[|\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}}\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2] \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (104)$$

Now applying the estimate (104) in estimative (76) of Lemma 17 for $\frac{1}{2} \leq \phi \leq 1$, we get

$$\begin{aligned}|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 &\leq C_\delta\{|\lambda|\|\theta\|^2 + |\lambda|^{\frac{2-3\phi}{\phi}}\{|\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}}\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} + \|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}}\} \\ &\quad + C_\varepsilon|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \varepsilon|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (105)\end{aligned}$$

for other hand, using (34) and (59), Lemmas 7, 16 respectively, we get

$$|\lambda|\|A^{\frac{1}{2}}v\|^2 \leq |\lambda|^{\frac{2-3\phi}{\phi}}\{|\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}}\|F\|_{\mathbb{H}}\|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2\} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (106)$$

On the other hand, from estimative (35) of Lemma 7 and

$$\begin{aligned} a^2 |\lambda|^{\frac{4\phi-2}{\phi}} \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 &\leq a^2 |\lambda|^2 \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 \leq C_\delta \{ \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2 \} \\ &\leq C_\delta \{ |\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}} \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2 \} \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq 1, \end{aligned}$$

it is equivalent to

$$|\lambda| \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 \leq |\lambda|^{\frac{2-3\phi}{\phi}} \{ |\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}} \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2 \} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1, \quad (107)$$

then from (106), (107) and

$$a^2 |\lambda| \|A^{\frac{1}{2}} u + \alpha A^{\frac{1}{2}} v\|^2 \leq a^2 |\lambda| \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 + a^2 \alpha |\lambda| \|A^{\frac{1}{2}} v\|^2,$$

we get

$$a^2 |\lambda| \|A^{\frac{1}{2}} u + \alpha A^{\frac{1}{2}} v\|^2 \leq |\lambda|^{\frac{2-3\phi}{\phi}} \{ |\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}} \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2 \} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (108)$$

Besides, from (59) of Lemma 16

$$\begin{aligned} |\lambda|^{\frac{4\phi-2}{\phi}} \|\theta\|^2 &\leq |\lambda|^{\frac{3\phi-1}{\phi}} \|\theta\|^2 \leq C_\delta |\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}} \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} \\ &\leq C_\delta \{ |\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}} \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2 \} \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq 1. \end{aligned}$$

Equivalent to

$$|\lambda| \|\theta\|^2 \leq |\lambda|^{\frac{2-3\phi}{\phi}} \{ |\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}} \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2 \} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (109)$$

From

$$|\lambda| \|v + \alpha w\|^2 \leq |\lambda| \|v\|^2 + \alpha |\lambda| \|w\|^2,$$

Finally, adding the estimates (106), (107), (108) and considering estimative (104), we get

$$|\lambda|^{\frac{4\phi-2}{\phi}} \|U\|_{\mathbb{H}}^2 \leq C_\delta \{ |\lambda|^{\frac{2\phi-1}{\phi}} \|F\|_{\mathbb{H}} \|U\|_{\mathbb{H}} + \|F\|_{\mathbb{H}}^2 \} \quad \text{for } \frac{1}{2} \leq \phi \leq 1. \quad (110)$$

Therefore, finish the proof of inequality (96).

We finish the proof of this theorem.

4.3 Lack Gevrey Class and Analiticity

Theorem 22 The semigroup $S(t) = e^{tA}$ does not support Gevrey classes and is not analytic when $\phi \in [0, \frac{1}{2}]$

Proof: Since the operator A is strictly positive, selfadjoint and it has compact resolvent, its spectrum is constituted by positive eigenvalues (σ_n) such that $\sigma_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. For $n \in \mathbb{N}$ we denote with e_n an unitary $D(A^\phi)$ -norm eigenvector associated to the eigenvalue σ_n , that is,

$$Ae_n = \sigma_n e_n, \quad \|e_n\|_{\mathfrak{D}(A^0)} = \|e_n\| = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (111)$$

Considering the eigenvalues and eigenvectors of the operator A as in (111). Let $F_n = (0, 0, \frac{e_n}{a}, 0) \in H$. The solution $U_n = (u_n, u_n, w_n, \theta_n)$ of the system $(i\lambda_n I - B)U_n = F_n$ satisfies $v_n = i\lambda_n u_n$, $w_n = -\lambda_n^2 u_n$, $A^\psi e_n = \sigma_n^\psi e_n$ for $\psi \in \mathbb{R}$ and the following equations

$$\begin{aligned} -i\alpha\lambda_n^3 u_n + a^2 A u_n + i a^2 \beta \lambda_n A u_n - \lambda_n^2 u_n - \eta A^\phi \theta_n &= -e_n, \\ i\eta \lambda_n A^\phi u_n - \alpha \eta \lambda_n^2 A^\phi u_n + i\lambda_n \theta_n + A \theta_n &= 0. \end{aligned}$$

Equivalently,

$$\begin{aligned} \{i[\alpha\lambda_n^3 I - a^2 \beta \lambda_n A] + \lambda_n^2 I - a^2 A\} u_n + \eta A^\phi \theta_n &= e_n, \\ \{i\eta \lambda_n A^\phi - \alpha \eta \lambda_n^2 A^\phi\} u_n + \{i\lambda_n I + A\} \theta_n &= 0. \end{aligned}$$

Let us see whether this system admits solutions of the form

$$u_n = \mu_n e_n, \quad \theta_n = \nu_n e_n,$$

for some complex numbers μ_n and ν_n . Then, the numbers μ_n, ν_n should satisfy the algebraic system

$$\{i[\alpha\lambda_n^3 - a^2 \beta \lambda_n \sigma_n] + \lambda_n^2 - a^2 \sigma_n\} \mu_n + \eta \sigma_n^\phi \nu_n = 1, \quad (112)$$

$$\{i\eta \lambda_n \sigma_n^\phi - \alpha \eta \lambda_n^2 \sigma_n^\phi\} \mu_n + \{i\lambda_n + \sigma_n\} \nu_n = 0. \quad (113)$$

At this point, we introduce the numbers

$$\sigma_n := \left[\frac{\alpha}{a^2 \beta} \right] \lambda_n^2. \quad (114)$$

Then

$$\begin{aligned} |\sigma_n| &\approx |\lambda_n|^2, \quad \lambda_n^2 - a^2 \sigma_n = \left[\frac{\beta - \alpha}{\beta} \right] \lambda_n^2, \quad \eta \sigma_n^\phi = \left[\frac{\eta \alpha^\phi}{a^{2\phi} \beta^\phi} \right] \lambda_n^{2\phi} \\ i\eta \lambda_n \sigma_n^\phi - \alpha \eta \lambda_n^2 \sigma_n^\phi &= i \left[\frac{\eta \alpha^\phi}{a^{2\phi} \beta^\phi} \right] \lambda_n^{1+2\phi} - \left[\frac{\alpha^{1+\phi} \eta}{a^{2\phi} \beta^\phi} \right] \lambda_n^{2+2\phi} \\ \text{and } i\lambda_n + \sigma_n &= i\lambda_n + \left[\frac{\alpha}{a^2 \beta} \right] \lambda_n^2. \end{aligned} \quad (115)$$

Using identities of (114) and (115) in system (112)-(113), we obtain

$$\left\{ \frac{\beta - \alpha}{\beta} \lambda_n^2 \right\} \mu_n + \left\{ \frac{\eta \alpha^\phi}{a^{2\phi} \beta^\phi} \lambda_n^{2\phi} \right\} \nu_n = 1, \quad (116)$$

$$\left\{ i \frac{\eta \alpha^\phi}{a^{2\phi} \beta^\phi} \lambda_n^{1+2\phi} - \frac{\alpha^{1+\phi} \eta}{a^{2\phi} \beta^\phi} \lambda_n^{2+2\phi} \right\} \mu_n + \left\{ i\lambda_n + \frac{\alpha}{a^2 \beta} \lambda_n^2 \right\} \nu_n = 0. \quad (117)$$

Then

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\beta - \alpha}{\beta} \lambda_n^2 & \frac{\eta \alpha^\phi}{a^{2\phi} \beta^\phi} \lambda_n^{2\phi} \\ i \frac{\eta \alpha^\phi}{a^{2\phi} \beta^\phi} \lambda_n^{1+2\phi} - \frac{\alpha^{1+\phi} \eta}{a^{2\phi} \beta^\phi} \lambda_n^{2+2\phi} & i \lambda_n + \frac{\alpha}{a^2 \beta} \lambda_n^2 \end{vmatrix} \\ = \left[\frac{\alpha(\beta - \alpha)}{a^2 \beta^2} \right] \lambda_n^4 + \left[\frac{\alpha^{2\phi+1} \eta^2}{a^{4\phi} \beta^{2\phi}} \right] \lambda_n^{2+4\phi} + i \left[\frac{\beta - \alpha}{\beta} \lambda_n^3 - \frac{\eta^2 \alpha^{2\phi}}{a^{4\phi} \beta^{2\phi}} \lambda_n^{4\phi+1} \right] \quad (118)$$

Therefore:

For $\phi \in [0, \frac{1}{2}]$ and $\beta - \alpha > 0$, we have

$$|\Delta| \approx |\lambda_n|^{\max\{4,3\}} = |\lambda_n|^4 \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq \frac{1}{2}. \quad (119)$$

Besides:

$$|\Delta_{\mu_n}| = \left| \begin{vmatrix} 1 & \frac{\eta \alpha^\phi}{a^{2\phi} \beta^\phi} \lambda_n^{2\phi} \\ 0 & i \lambda_n + \frac{\alpha}{a^2 \beta} \lambda_n^2 \end{vmatrix} \right| = \left| i \lambda_n + \frac{\alpha}{a^2 \beta} \lambda_n^2 \right| \approx |\lambda_n|^2 \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq \frac{1}{2}. \quad (120)$$

Then

$$|\mu_n| = \left| \frac{\Delta_{\mu_n}}{\Delta} \right| \approx |\lambda_n|^{-2} \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq \frac{1}{2}. \quad (121)$$

From the definition of $\|U_n\|_{\mathbb{H}}$ and estimative (121), for $K > 0$ we have

$$\|U_n\|_{\mathbb{H}} \geq K \|A^{\frac{1}{2}} v_n\| = |\sigma_n|^{\frac{1}{2}} |i \lambda_n| |\mu_n| \approx K |\lambda_n|^0 \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq \frac{1}{2} \quad (122)$$

and

$$|\lambda_n| \|U_n\|_{\mathbb{H}} \geq K |\lambda_n|^1 \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq \frac{1}{2}. \quad (123)$$

Remark 23 I) If there is a Gevrey class for $S(t)$ when $\phi \in [0, \frac{1}{2}]$, there must exist a $\Psi \in (0, 1)$ such that the identity

$$\lim_{|\lambda_n| \rightarrow \infty} \sup |\lambda_n|^\Psi \|(i\lambda I - \mathbb{B})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H})} < \infty. \quad (124)$$

is verified. But, multiplying both sides of the inequality (122) by $|\lambda_n|^\Psi$ for $0 < \Psi < 1$, we have

$$|\lambda_n|^\Psi \|U_n\|_{\mathbb{H}} \geq K |\lambda_n|^\Psi \quad \text{for } 0 \leq \phi \leq \frac{1}{2}, \quad (125)$$

then, $|\lambda_n|^\Psi \|U_n\|_{\mathbb{H}} \rightarrow \infty$ approaches infinity as $|\lambda_n| \rightarrow \infty$. Therefore for ϕ in $[0, \frac{1}{2}]$ the (124) condition fails. Consequently the semigroup $S(t)$ does not admit a Gevrey class for $\phi \in [0, \frac{1}{2}]$.

II) From inequality (123), $\|Un\|_H \rightarrow \infty$ approaches infinity as $\|n\| \rightarrow \infty$. Therefore for ϕ in $[0, \frac{1}{2}]$, $S(t)$ does not satisfy the condition (48) of Theorem 13, so $S(t)$ is not analytic when $\phi \in [0, \frac{1}{2}]$.

REFERENCES

- [1] M. S. Alves, C. Buriol, M. V. Ferreira, J. E. M. Rivera, M. Sepúlveda and O. Vera, Asymptotic behavior for the Vibrations modeled by the standard linear solid model with a thermal effect, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 399 (2013), 472-479.
- [2] K. Ammari, F. Shel and L. Tebou, Regularity of the semigroups associated with some damped coupled elastic systems II: A nondegenerate fractional damping case, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, (2022).
- [3] M. Conti, V. Pata, M. Pellicer and R. Quintanilla, On the analyticity of the MGT-viscoelastic plate with heat conduction, *Journal Differ Equ* 269 (2020), 7862-7880.
- [4] M. Conti, L. Liverani and V. Pata, The MGT-Fourier model in the supercritical case, *Journal Differ Equ* 301 (2021), 543-567.
- [5] M. Conti, F. Dell'Oro, L. Liverani and V. Pata, Spectral Analysis and Stability of the Moore-Gilson-Thompson-Fourier Model, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, (2022).
- [6] M. Conti, L. Liverani, and V. Pata, Thermoelasticity with Antidissipation, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, - Series S*, 15-8 (2022) 2173-2188.
- [7] F. Dell'Oro, J. E. M. Rivera and V. Pata, Stability properties of an abstract system with applications to linear thermoelastic plates, *Journal of Evolution Equations*, Vol 13 N 4 (2013), 777-794.
- [8] F. Dell'Oro and V. Pata, On the Moore-Thompson Equation and Its relation to Linear Viscoelasticity, *Appl. Math. Optim.* 76 (2017), 641-655.
- [9] F. Dell'Oro and V. Pata, On the analyticity of the abstract MGT-Fourier system, *Meccanica* (2022).
- [10] K. J. Engel & R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer (2000).
- [11] P. Gamboa, H. H. Nguyen, O. Vera, and V. Poblete, Vibrations Modeled by the standard linear model of viscoelasticity with boundary dissipation, *Electronic Journal of Differential Equations* Vol. 2017-163 (2017), 1-10.
- [12] Gearhart. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 236 (1978), 385-394.
- [13] H.P. Oquendo and F.M.S. Suárez, Exact decay rates for coupled plates with partial fractional damping. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik-ZAMP(online)*V1, (2019), 70–88.
- [14] B. Kaltenbacher, I. Lasiecka and R. Marchand, Wellposedness and exponential decay rates for the Moore-Gibson-Thompson equation arising in high-intensity ultrasound, 40, No 4 (2011), 971-988.

- [15] V. Keyantuo, L. Tebou and M. Warma, A Gevrey Class Semigroup for a Thermoelastic Plate Model with a Fractional Laplacian: Between the Euler-Bernoulli and Kirchhoff Models. *Discrete and Continuous Dynamical System*, Vol 40. Number 5, May (2020), 2875-2889.
- [16] Z. Kuang, Z. Liu, and H. D. F. Sare, Regularity analysis for an abstract thermoelastic system with inertial term, *ESAIM: Control, Optimisation, and Calculus of Variations*, S24, 27 (2021).
- [17] Z. Kuang, Z. Liu, and L. Tebou, Optimal semigroup regularity for velocity coupled elastic systems: A degenerate fractional damping case, *ESAIM: Control, Optimisation, and Calculus of Variations* 28, 46 (2022).
- [18] I. Lasiecka and R. Triggiani, Analyticity of thermo-elastic semigroups with free boundary conditions. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 27 (1998), 457-482.
- [19] I. Lasiecka and X. Wang, Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part II: General decay of energy, *Journal Differential Equations*, 259 (2015) 7610-7635.
- [20] I. Lasiecka and X. Wang, Moore-Gibson-Thompson equation with memory, part I: Exponential decay of energy, *ZAMP* 67, 17 (2016) 1-23.
- [21] Z. Liu and M. Renardy, A note on the equations of thermoelastic plate, *Appl. Math. Lett.*, 8, (1995), 1-6.
- [22] Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems*, Chapman & Hall CRC Research Notes in Mathematics, Boca Raton, FL, 398 (1999).
- [23] R. Quintanilla, Moore-Gibson-Thompson thermoelasticity, *Math. Mech. Solids* 24 (2019), 4020-4031.
- [24] R. Quintanilla, Moore-Gibson-Thompson thermoelasticity with two temperatures, *Applications in Engineering Science* 1 (2020).
- [25] H. D. F. Sare, Z. Liu, and R. Racke, Stability of abstract thermoelastic systems with inertial terms, *Journal of Differential Equations*, Volume 267, Issue 12, 5 December (2019), 7085–7134.
- [26] B.T.S. Sozzo, J. E. M. Rivera, The Gevrey class of the Euler-Bernoulli beam model, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 505 (2022).
- [27] S. W. Taylor, *Gevrey Regularity of Solutions of Evolution Equations and Boundary Controllability*, Thesis (Ph.D.) The University of Minnesota, (1989), 182 pp.
- [28] L. Tebou, Uniform analyticity and exponential decay of the semigroup associated with a thermoelastic plate equation with perturbed boundary conditions, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 351 (2013), 539-544.
- [29] L. Tebou, Regularity, and Stability for a plate model involving fractional rotational forces and damping, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 72:158 (2021).

ANÁLISE ESTATÍSTICA DO COMPORTAMENTO DA RADIAÇÃO DE ONDA CURTA PARA A CIDADE DE NATAL, RN

Data de submissão: 12/05/2023

Data de aceite: 03/07/2023

Thiago Gonçalves da Silva

Universidade Federal do Rio Grande
do Norte, Departamento de Ciências
Atmosféricas e Climáticas, Programa de
Pós Graduação em Ciências Climáticas.
Natal - Rio Grande do Norte
<http://lattes.cnpq.br/9247213148151165>

José Augusto Ferreira Neto

Universidade Federal do Rio Grande
do Norte, Departamento de Ciências
Atmosféricas e Climáticas, Programa de
Pós Graduação em Ciências Climáticas.
Natal - Rio Grande do Norte
<http://lattes.cnpq.br/0401494432064481>

Paula Andressa Alves de Araújo

Universidade Federal do Rio Grande
do Norte, Departamento de Ciências
Atmosféricas e Climáticas, Programa de
Pós Graduação em Ciências Climáticas.
Natal - Rio Grande do Norte
<http://lattes.cnpq.br/4857107569349842>

Everton Felipe de Souza Pinheiro

Universidade Federal do Rio Grande
do Norte, Departamento de Ciências
Atmosféricas e Climáticas, Programa de
Pós Graduação em Ciências Climáticas.
Natal - Rio Grande do Norte
<http://lattes.cnpq.br/3226955524305254>

Eduardo Almeida da Silva

Universidade Federal do Rio Grande
do Norte, Departamento de Ciências
Atmosféricas e Climáticas, Programa de
Pós Graduação em Ciências Climáticas.
Natal - Rio Grande do Norte
<http://lattes.cnpq.br/1268120810491801>

Matheus Henrique Bezerra de Melo

Universidade Federal de Campina
Grande, Departamento de Ciências
Atmosféricas, Programa de Pós
Graduação em Meteorologia
Campina Grande - Paraíba
<http://lattes.cnpq.br/2538146023601236>

Albert Smith Feitosa Suassuna Martins

Universidade Federal do Rio Grande
do Norte, Departamento de Ciências
Atmosféricas e Climáticas, Programa de
Pós Graduação em Ciências Climáticas.
Natal - Rio Grande do Norte
<http://lattes.cnpq.br/1571415337290282>

Israel Walter Hilário da Silva

Universidade Federal do Rio Grande
do Norte, Departamento de Ciências
Atmosféricas e Climáticas, Programa de
Pós Graduação em Ciências Climáticas.
Natal - Rio Grande do Norte
<http://lattes.cnpq.br/5659345555242426>

Lorena Santos da Silva

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Ciências Atmosféricas e Climáticas.

Natal - Rio Grande do Norte

<http://lattes.cnpq.br/9513978742484452>

Glenda Yasmin Pereira de Carvalho

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Ciências Atmosféricas e Climáticas.

Natal - Rio Grande do Norte

<http://lattes.cnpq.br/0201207894585805>

Raphaelly de Miranda Pereira

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Ciências Atmosféricas e Climáticas.

Natal - Rio Grande do Norte

<http://lattes.cnpq.br/9486864895797129>

Daniel Felipe da Silva

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Ciências Atmosféricas e Climáticas, Programa de Pós Graduação em Ciências Climáticas.

Natal - Rio Grande do Norte

<http://lattes.cnpq.br/9510085354088329>

RESUMO: O conhecimento dos níveis de irradiância solar que atingem a superfície terrestre é um pré-requisito para várias aplicações. Uma das características da radiação solar é o alto grau de variabilidade temporal, que está relacionado aos padrões climáticos que atuam em cada local. Sendo assim, o presente trabalho propôs realizar um estudo de caso para a cidade de Natal (5,83°S; 32,20°W) sobre o comportamento da radiação de onda curta, utilizando a Irradiância Global Horizontal (GHI) e a Irradiância Difusa Horizontal (DHI), por meio de avaliações estatísticas para dados mensais de satélite disponibilizados pelo site SoDa no período de 2015 a 2020. Os resultados obtidos através dos parâmetros utilizados foram as componentes do boxplot, ou seja, máximos, mínimos, médias e medianas. Também foi empregada uma regressão linear, a fim de identificar tendências positivas ou negativas. Os valores obtidos tanto para o GHI quanto para o DHI mostraram que ambas as séries estudadas apresentaram uma sazonalidade bem definida. O GHI apresentou pouca dispersão de dados com seu valor máximo em torno de 220560 Wh/m² e seu mínimo em 135481 Wh/m². Quando comparados os valores de verão e inverno notou-se que há uma diferença de até 21,7% nos valores mínimos. Já para DHI os dados apresentaram maior dispersão, principalmente entre os meses de janeiro e março, o valor máximo ficou em 13918 e o mínimo em 46944 Wh/m². Quando comparadas as duas estações, verificou-se que a maior diferença fica nos valores médios com 19,1%. No que diz respeito à regressão linear, verifica-se a presença de uma tendência negativa para o GHI e a completa ausência de tendência no que se refere ao DHI.

PALAVRAS-CHAVE: GHI, DHI, parâmetros.

STATISTICAL ANALYSIS OF THE BEHAVIOR OF SHORT WAVE RADIATION FOR THE CITY OF NATAL, RN

ABSTRACT: Knowledge of the levels of solar irradiance that reach the earth's surface is a prerequisite for various applications. One of the characteristics of solar radiation is the high degree of temporal variability, which is related to the climatic patterns that act in each location. Thus, the present study proposed to conduct a case study for the city of Natal (5.83°S; 32.20°W) on the behavior of short wave radiation, using Horizontal Global Irradiance (GHI) and Horizontal Diffuse Irradiance (DHI), through statistical evaluations for monthly satellite data made available by the SoDa website in the period 2015 to 2020. The results obtained through the parameters used were the components of the boxplot, i.e., maximums, minimums, averages and medians. A linear regression was also used in order to identify trends. The values obtained for both GHI and DHI showed that both series studied presented a well-defined seasonality. The GHI showed little data dispersion with its maximum value around 220560 Wh/m² and its minimum in 135481 Wh/m². When the summer and winter values were compared, it was observed that there is a difference of up to 21.7% in the minimum values. For DHI, the data showed greater dispersion, mainly between January and March, the maximum value was 13918 and the minimum at 46944 Wh/m². When comparing the two seasons, it was found that the largest difference is in the mean values with 19.1%. With regard to linear regression, there is the presence of a negative trend for GHI and the complete absence of trend with regard to DHI.

KEYWORDS: GHI, DHI, parameters.

1 | INTRODUÇÃO

Um dos desafios da sociedade contemporânea, segundo Holf (2011), é suprir as demandas de água e energia, decorrentes de diversos fatores, entre eles está o desenvolvimento econômico, o crescimento da população, processos de degradação ambiental e as mudanças climáticas em curso. De acordo com o demonstrado por Chen e Chen (2016), observa-se que as regiões urbanas utilizam 70% da energia global e necessitam de uma grande quantidade de água para o consumo humano e geração de energia. Segundo De Oliveira e Trindade (2018), nos moldes atuais, a crescente demanda e a exploração intensa de combustíveis fósseis tornam a produção de energia insustentável.

Diante desse cenário, no qual há uma grande demanda energética somada à insustentabilidade da produção de energias não renováveis, a utilização de fontes renováveis, tais como eólica, fotovoltaica e termelétrica, tem sido cada vez mais recorrente. Sendo assim, em consequência a esse fato, estudos que visam identificar e apresentar locais com grandes potenciais na geração desses tipos de energia, têm tornado-se cada vez mais comuns, de modo que a quantidade tem crescido de forma excepcional. Dessa forma, entender o comportamento das variáveis que influenciam e geram essas fontes energéticas é de suma importância. Como exemplo a isso, os estudos sobre os índices de

irradiância solar são importantes na geração de energia solar fotovoltaica, a qual é gerada em condições de altos níveis dessa variável.

Assim, o conhecimento sobre os níveis de irradiância solar que atingem a superfície terrestre é um pré-requisito para várias aplicações da energia solar na indústria, na agricultura e em outras atividades relevantes sob o ponto de vista socioeconômico. Para se ter esse conhecimento é necessário mapear o comportamento dos dados disponíveis na superfície terrestre. Varela (2007) discorre que esse procedimento de análise em todo o território nacional é inviável, pois exige incentivos tecnológicos que nem sempre são atendidos, além da mão de obra especializada para instalação e manutenção dos instrumentos de medição de irradiância solar. Segundo Pereira (2006), o Brasil, por situar-se na região tropical próximo à linha do Equador, recebe grande incidência de radiação solar durante todo o ano ao longo de seu território, além de uma menor variabilidade interanual.

Uma das características da radiação solar é um alto grau de variabilidade temporal, que está relacionada aos padrões climáticos que atuam em cada local. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é avaliar o comportamento da radiação de onda curta (ROC), especificamente a Irradiação Global Horizontal (GHI) e a Irradiação Difusa Horizontal (DHI), as quais chegam à superfície da cidade de Natal entre janeiro de 2015 e dezembro de 2020, fazendo uma comparação dos resultados obtidos para o inverno e verão.

2 | MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Área de Estudo

A área de estudo refere-se à capital do Rio Grande do Norte, Natal-RN (5,83°S, 32,20° W)(Fig. 1). Pertence à mesorregião do Leste Potiguar (IBGE, 2020), possuindo uma área territorial de 167,401 km² com uma altitude média de 46 m em relação ao nível médio do mar. Além de uma costa litorânea, a cidade possui pontos de vegetação de Mata Atlântica. Recentemente, Alvares (2014) elaborou, utilizando os critérios de Köppen, a classificação climática do Brasil, de modo que Natal é dito como um local com o clima do tipo As: tropical, com o verão seco. Segundo o INMET, 2021 apresentou as médias de precipitação anual e de temperatura compensada iguais a 1721,4 mm e 26,4 °C, respectivamente.

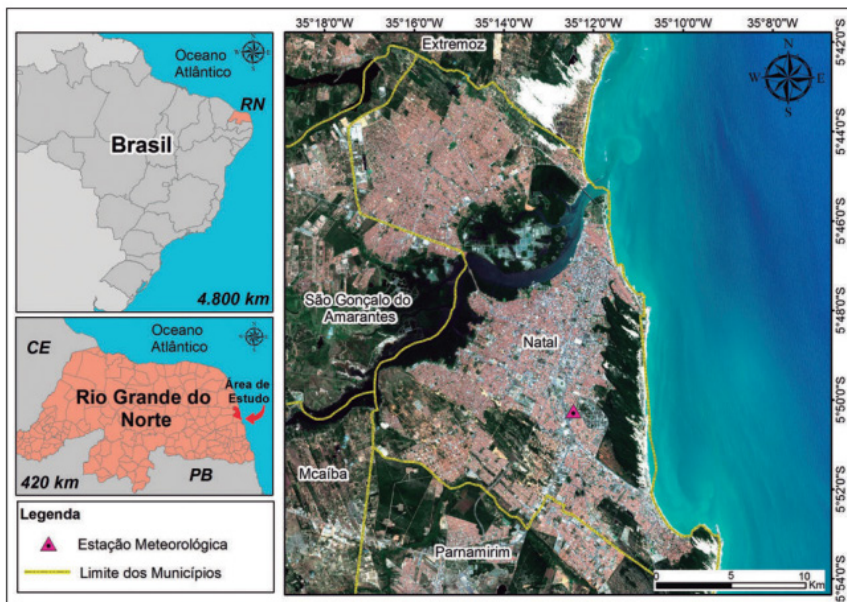


Figura 1: Mapa referente ao município de Natal, RN. Fonte: AMORIM, 2020.

2.2 Dados Utilizados

Foram coletados dados das variáveis Irradiância Global Horizontal (GHI, *Global Horizontal Irradiance*) e Irradiância Difusa Horizontal (DHI, *Diffuse Horizontal Irradiance*), propondo uma análise para o intervalo entre 2015 e 2020, seguindo o calendário juliano. As coordenadas de latitude e longitude citadas no tópico anterior serviram como ponto de coleta inserido no sistema *on-line* do *Solar Energy Services for Professionals*, o qual é um serviço disponibilizado pelo site Solar Radiation Data (SoDa). Foram coletadas as variáveis na unidade Wh/m². O SoDa fornece séries temporais de irradiações globais, diretas e difusas na superfície horizontal e irradiação direta no plano normal, para as condições climáticas reais, bem como para condições de céu claro. A plataforma disponibiliza como cobertura geográfica a Europa, África, Oceano Atlântico e Oriente Médio.

2.3 Análises Estatísticas

Na análise do banco de dados da pesquisa foram utilizados métodos estatísticos destinados a avaliar o grau de variação dos dados próximos à média. Contudo, utilizam-se medidas de dispersão, tais como: desvio médio, variância e desvio padrão. Além disso, os conjuntos de dados de média e mediana também são incluídos para representar o valor central do conjunto de dados total.

2.3.1 Média

A média é dada pela soma de todos os elementos que estão sendo considerados, dividido pelo número de elementos (n). É dada pela Eq. (1):

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{Eq. 1}$$

2.3.2 Variância e Desvio Padrão

Variância e desvio padrão são medidas de dispersão de uma amostra, e segundo Gurgel (1958), servem para dar uma ideia o quão distante a amostra está da média. O desvio padrão amostral é dado pela Eq.(2) e a variância amostral é o resultado obtido pelo desvio padrão ao quadrado.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (X - \bar{X})^2} \quad \text{Eq. 2}$$

2.3.3 Mediana

A mediana é uma medida de posição que separa o conjunto de dados ordenados exatamente na metade, deixando 50% dos valores abaixo e 50% acima.

2.3.4 Quartis

Em um trabalho recente, Morettin (2017) propôs que os quartis são medidas de posição que separam o conjunto de dados ordenados em 4 partes iguais. O primeiro quartil (Q1) indica o ponto de separação onde 25% da amostra está abaixo desse valor. O segundo quartil (Q2) é a mediana, com 50% acima e abaixo. Já o terceiro quartil (Q3), é o ponto onde 75% da amostra está abaixo de seu valor.

2.3.5 Boxplot

De acordo com Morettin (2017), o gráfico Boxplot ajuda a visualizar como se portam os dados em relação à simetria e dispersão. Na sua construção é considerado o eixo vertical (y, ordenadas) do gráfico o valor dos dados. Primeiro, é traçado um retângulo onde a parte superior é o Q3 e a inferior o Q1. Um traço indica a mediana (Q2). Em seguida, é criado uma linha do Q3 até o limite superior (valor máximo amostrado) e do Q1 até o limite inferior (valor mínimo). Os pontos discrepantes, chamados outliers, são valores que ficam abaixo do valor $Q1 - 1.5 \cdot (Q3 - Q1)$ ou acima de $Q3 + 1.5 \cdot (Q3 - Q1)$.

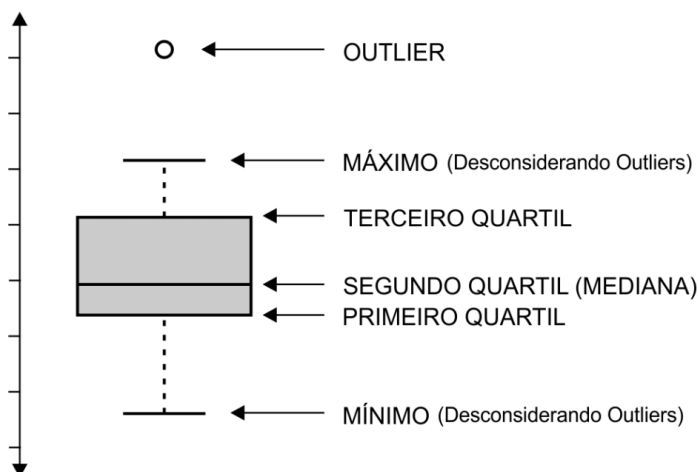


Figura 2 - Informações contidas no Boxplot. Fonte: Oper¹, 2021.

2.3.6 Regressão linear simples

A análise de regressão é considerada simples quando envolve duas variáveis: a variável dependente/resposta e a variável independente/explicativa. Para sua aplicação é necessário que os dados sejam oriundos de uma amostra aleatória. Como parte de avaliação da técnica se utiliza o gráfico de dispersão, o qual é utilizado para mostrar a relação entre as duas variáveis, podendo ela ser linear ou não (DRAPER, SMITH, 1998; KUTNER et al., 2004). Segundo Azevedo (2012), quando se tem apenas uma variável independente, o modelo de regressão linear é da forma:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i \quad \text{Eq. 3}$$

Sendo:

Y_i - variável resposta (dependente);

α - constante que representa a interceptação da reta com o eixo vertical;

X_i - variável independente;

β - parâmetro

3 | RESULTADOS

Nesta seção serão apresentados os resultados referentes às análises das séries de Irradiância Global Horizontal e Irradiância Difusa Horizontal (Wh/m²) para a cidade de Natal. Com auxílio da Fig. 3, são apresentadas as características do GHI para o município de Natal. Dessa forma, foi possível identificar a existência de uma tendência linear para a série, aplicando uma suavização de sua variabilidade, que ilustra o comportamento médio ao longo do tempo.

Através de uma análise visual da Fig. 3a observa-se a existência de uma sazonalidade muito bem marcada, ou seja, os dados mostram que há períodos com maiores incidências e outros com menores. Durante a observação notou-se que no mês de outubro foram registradas as maiores incidências, enquanto que no mês de junho as menores, sendo correspondentes a 220560 e 135481 Wh/m², respectivamente. Para melhor entender o comportamento do GHI, foi gerada uma linha azul (Fig. 3a, Atlas) para acompanhar a transição entre os meses. Quando a análise é voltada para o período chuvoso que ocorre entre os meses de março e maio, nota-se um período de transição dos maiores para os menores valores. Entretanto, para a transição inversa, ou seja, dos mínimos para os máximos, ocorre uma mudança abrupta no período seco, o qual decorre entre os meses de setembro e novembro.

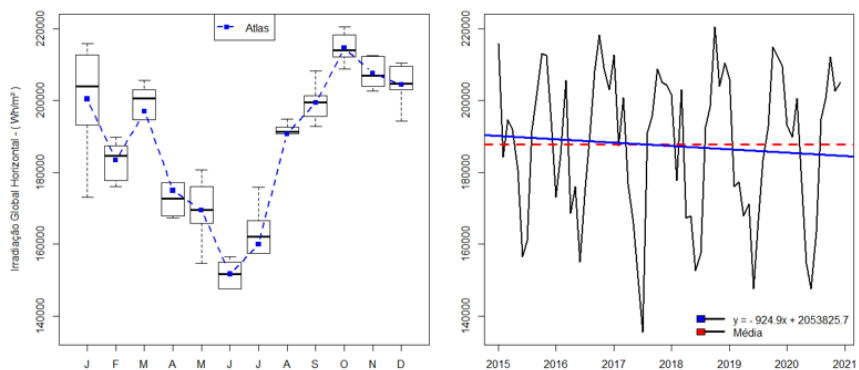


Figura 3 - Comportamento da Irradiação Global Horizontal (GHI): a) Gráfico com destaque ao boxplot referente ao comportamento do GHI dos 12 meses para um período de 5 anos. b) Gráfico referente com a série de 5 anos com destaque a regressão linear.

ESTATÍSTICAS	RESULTADOS (Wh/m2)
Mínimo	135481
1° Quartil	172611
Mediana	192207
Média	187785
3° Quartil	204513
Máximo	220560

Tabela 1 - Resultados do boxplot referente ao GHI.

GHI	DIFERENÇA (%)
Mínima	21,7
Média	15,8
Máxima	9,8

Tabela 2 - Valores das diferenças entre o período do verão e inverno para o GHI

Na Fig. 3b foi aplicado um cálculo de regressão linear simples, a fim de verificar se os dados apresentavam algum tipo de tendência. Dessa forma, foi possível identificar a ocorrência de uma mudança mínima negativa em relação aos valores, e o ponto de alteração na tendência foi identificado no mês de julho no ano de 2017. Quando realizada a comparação entre o inverno e o verão austral, compreendidos entre os meses de junho e agosto e entre dezembro e fevereiro, respectivamente, é observado uma diferença com uma taxa de até 21,7% entre eles, como é possível observar para os mínimos valores (Linha 1, Tab. 2). A média para a análise do período completo ficou em torno de 187785 Wh/m2 (Tab. 1).

Os dados de Irradiação Difusa Horizontal (Fig. 4a) apresentaram o seguinte comportamento, a sazonalidade assim como o da Fig. 3 manteve um comportamento bem definido em relação ao seu vale (menor valor da série) que ocorreu no mês de junho com o valor de 46494 Wh/m2, mas quando observamos o pico (maior valor da série), observou-se a ocorrência em maio com 73421 Wh/m2, mas com um adendo, os maiores valores foram observados no mês de janeiro. Quanto ao box plot é possível observar que eles apresentam uma maior dispersão de valores, principalmente entre janeiro e março. No período seco e chuvoso, onde acontecem as transições de máxima para mínima e de mínima para máxima nas observações, os boxplots apresentam as mínimas dispersões da série.

Sobre os valores encontrados nos métodos estatísticos, verificamos que a média ficou em torno de 59000 Wh/m2 e que quando foi aplicado à análise de regressão linear não foi possível identificar nenhuma mudança na sua tendência seja ela positiva ou negativa (Fig. 4b), apesar de não apresentar tendência, a série mostra valores de diferença acima dos 14% e com o seu máximo chegando a 17,4% no valores mínimos quando comparamos os resultados apresentados entre o inverno e verão.

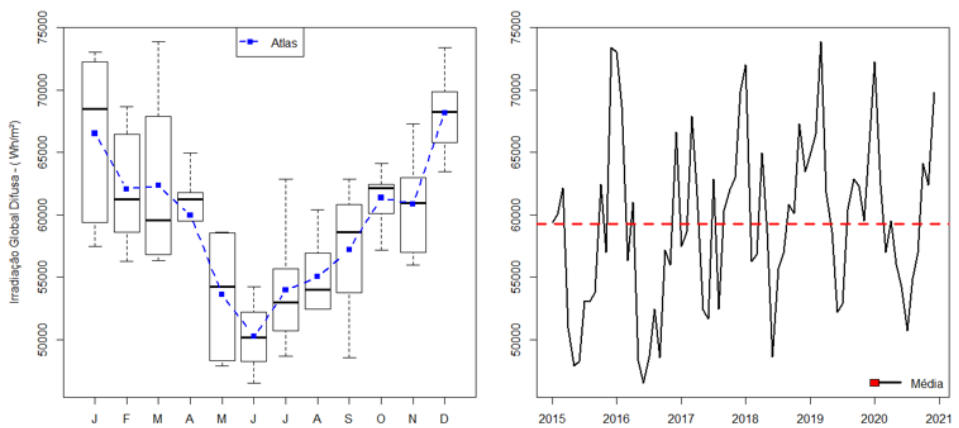


Figura 4 - Comportamento da Irradiação Difusa Horizontal (DHI): a) Gráfico com destaque ao boxplot referente ao comportamento do DHI dos 12 meses para um período de 5 anos. b) Gráfico referente com a série de 5 anos com destaque a regressão linear.

ESTATÍSTICAS	RESULTADOS (Wh/m2)
Mínimo	46944
1° Quartil	54113
Mediana	59449
Média	59284
3° Quartil	62921
Máximo	73918

Tabela 3 - Resultados do boxplot referente ao DHI

GHI	DIFERENÇA (%)
Mínima	17,4
Média	19,1
Máxima	14,4

Tabela 4 - Valores das diferenças entre o período do verão e inverno para o DHI

4 | CONCLUSÃO

Neste trabalho foi apresentada a caracterização e o comportamento para os dados de Irradiância Global Horizontal e Irradiância Difusa Horizontal para a cidade de Natal. Os resultados apresentados demonstram valores significativos quanto à comparação do período do inverno e verão, com diferenças de até 21,7 % para o GHI e 19,1% para o DHI. Outro ponto destacável é a presença de uma tendência negativa para o GHI e a completa ausência de tendência no que se refere ao DHI. Porém, para determinar o que ocasionou isso, é necessário pesquisas adicionais para determinar a causa desses comportamentos. Esses estudos são complexos devido ao grande número de combinações de fatores envolvidos. Propõe-se que, em trabalhos futuros, sejam aplicados métodos mais robustos para testes de tendências, além de pesquisas de cunho meteorológico para complementar os resultados que venham ser obtidos.

REFERÊNCIAS

ALVARES, Clayton Alcarde et al. Köppen's climate classification map for Brazil. Meteorologische Zeitschrift, v. 22, n. 6, p. 711-728, 2013.

AMORIM, Ana Cleide Bezerra, et al. Variabilidade dos extremos de precipitação diária na cidade de Natal, Estado do Rio Grande do Norte, Nordeste do Brasil. 2019.

AZEVEDO, P,R,M, Modelos De Regressão Linear, 3ª EDIÇÃO, NATAL: DUFRN, 2012, 13:6P.

Chen, S., & Chen, B. (2016). Urban energy–water nexus: a network perspective. Applied Energy, 184, 905-914.

De Oliveira, J. F. G., & Trindade, T. C. G. (2018). Sustainability performance evaluation of renewable energy sources: The case of Brazil. Springer International Publishing.

DRAPER, N. R., SMITH, H. Applied Regression Analysis. 3ª edição. Wiley Series in Probability and Statistics, 1998.

Gurgel, J. T. A., Frederico Pimentel Gomes, and A. P. Trivelin. "Determinação da epen aritmética e desvio padrão de quocientes de epend ependents s e ependents."

Anais da Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz 14(1958): 31-42.

Hoff, H. (2011). Understanding the nexus: Background paper for the Bonn2011 Conference.

IBGE - INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Portal cidades: Mapa do estado do Rio Grande do Norte com destaque para o município de Natal. Rio de Janeiro: IBGE, 2021. Disponível em: <<https://cidades.ibge.gov.br/brasil/rn/natal/panorama>> Acesso em: 12 Dez 2021.

INSTITUTO NACIONAL DE METEOROLOGIA (INMET). Banco de dados meteorológicos para ensino e pesquisa. 2021.

KUTNER, M. H.; NACHTSHEIM, C. J.; NETER, J.; LI, W. Applied Linear Statistical Models. 5 ed. McGraw-Hill Irwin. 2004.

Morettin, P. A., BUSSAB, W. O, 2017. Estatística básica. Editora Saraiva.

OPER. Como interpretar um boxplot. Disponível em: <<https://operdata.com.br/blog/como-interpretar-um-boxplot/>>. Acesso em: 12 de nov. de 2021.

Pereira, Enio Bueno, et al., 2006. Atlas brasileiro de energia solar. Vol. 1. São José dos Campos: Inpe, 2006.

R Development Core Team (2009). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <<http://www.R-project.org>>.

SODA - Solar Radiation Data. Disponível em: <<http://www.soda-pro.com/home>> Acesso em: 10 Dez 2021.

Varela, Gustavo Hellstrom, 2007. "Medição e Avaliação dos dados Solarimétricos." Seminário Estudantil de Produção Acadêmica 10.1 (2007).

Wonnacott, T. H. and Wonnacott, R. J. (1990). Introductory statistics, 5th edn, Wiley New York.

MITIGAÇÃO E ADAPTAÇÃO: DUAS ESTRATÉGIAS PARA COMBATE À MUDANÇA CLIMÁTICA

Data de submissão: 15/06/2023

Data de aceite: 03/07/2023

Hantz Emmanuel Louidor

Universidade de Estado de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Regional e Meio Ambiente. Campus Unidade Passos
Cidade passos/MG, Brasil

João Paulo Leandro de Oliveira

Orientador Universidade de Estado de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Regional e Meio Ambiente. Campus Unidade Passos
Cidade passos/MG, Brasil
<https://orcid.org/0000-0003-3450-4568>

RESUMO: Seguindo o Acordo de Paris na COP21, 197 países têm como objetivo reduzir significativamente as emissões de gases de efeito estufa em todo o mundo. Como as cidades são grandes emissoras de gases de efeito estufa, 25 cidades americanas estão lançando o *American Cities Climate Challenge*. O objetivo é reduzir as emissões de gases de efeito estufa em 32% até 2025. A luta contra a mudança climática é conduzida em várias frentes, tanto para mitigar os efeitos do aquecimento global quanto para adaptar nossas comunidades a um estilo de vida

em mudança. As medidas escolhidas dependem, naturalmente, dos problemas específicos das diferentes regiões do mundo e o impacto previsto certamente levará ao desenvolvimento sustentável. São medidas estratégicas para aumentar a resiliência e a inteligência das cidades, ou seja, monitorar e controlar em tempo real a infra-estrutura e os serviços gerados pelas cidades, levando a uma redução no consumo de energia e na poluição. A instalação de uma extensa rede de sensores e dispositivos para monitorar a qualidade do ar. Estabelecimento de ciclovias para incentivar o uso da bicicleta. Dar prioridade aos veículos elétricos sobre os veículos a gasolina. Tornar o transporte público acessível enquanto reduz as viagens de pessoas. Este artigo é parte de um paradigma construtivo de adaptação e mitigação da mudança climática, com o objetivo de apresentar estratégias para combater a mudança climática no âmbito do curso Inovação e Novas Dinâmicas Sociais e Econômicas nas Cidades: Cidades Inteligentes e Cenários de Inovação Urbana, do Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Regional e Meio Ambiente, no âmbito do programa bolsas Brasil – PAEC – OEA – GCUB, da Universidade do Estado de Minas Gerais.

PALAVRAS-CHAVE: Mudança climática; Mitigação; Adaptação; Cidades inteligentes; Desenvolvimento sustentável.

MITIGATION AND ADAPTATION: TWO STRATEGIES TO COMBAT CLIMATE CHANGE

ABSTRACT: Following the Paris Agreement at COP21, 197 countries are aiming to significantly reduce greenhouse gas emissions worldwide. Because cities are large emitters of greenhouse gases, 25 American cities are launching the *American Cities Climate Challenge*. The goal is to reduce greenhouse gas emissions by 32% by 2025. The fight against climate change is conducted on several fronts, both to mitigate the effects of global warming and to adapt our communities to a changing lifestyle. The measures chosen depend, of course, on the specific problems in different regions of the world and the expected impact will certainly lead to sustainable development. These are strategic measures to increase the resilience and intelligence of cities, i.e. to monitor and control in real time the infrastructure and services generated by cities, leading to a reduction in energy consumption and pollution. The installation of an extensive network of sensors and devices to monitor air quality. Establishing bicycle lanes to encourage bicycle use. Giving priority to electric vehicles over gasoline-powered vehicles. Making public transportation affordable while reducing human travel. This article is part of a constructive paradigm of climate change adaptation and mitigation, with the objective of presenting strategies to combat climate change in the course Innovation and New Social and Economic Dynamics in Cities: Smart Cities and Urban Innovation Scenarios, of the Postgraduate Program in Regional Development and Environment, under the Brazil - PAEC - OAS - GCUB grant program, of the Minas Gerais State University.

KEYWORDS: Climate change; Mitigation; Adaptation; Smart cities; Sustainable development.

1 | INTRODUÇÃO

Durante milhares de anos, o clima da Terra tem variado com o tempo e o lugar. As mudanças observadas são geralmente espalhadas por longos períodos de tempo, o que torna difícil para os seres humanos percebê-las em um determinado momento. Nas últimas décadas, no entanto, a mudança climática parece ter se acelerado. De fato, a mudança climática é uma realidade inegável. Devemos agir urgentemente para evitar uma acumulação irreversível de gases de efeito estufa (GEE) na atmosfera e o aquecimento global que poderia ter consequências colossais para a economia e a sociedade mundial. Para este fim, 197 países assinaram e adotaram o Acordo Paris no final da *Conference Of the Parties 21* (COP 21) em Paris. O acordo visa a reduzir significativamente as emissões globais de gases de efeito estufa e limitar o aumento da temperatura global a 2 °C neste século, enquanto busca formas de reduzir este aumento para 1,5 °C (Nações Unidas, 2015). O acordo estabelece compromissos para que todos os países reduzam suas emissões e cooperem para se adaptar aos efeitos da mudança climática, ao mesmo tempo em que apela para que fortaleçam seus compromissos ao longo do tempo. Ela proporciona uma

oportunidade para os países desenvolvidos ajudarem os países em desenvolvimento em seus esforços de mitigação e adaptação climática, ao mesmo tempo em que estabelece uma estrutura para o monitoramento transparente e a elaboração de relatórios sobre as metas climáticas que foram estabelecidas. Já 25 cidades americanas estão no caminho certo para reduzir coletivamente suas emissões de gases de efeito estufa em 32% até 2025, superando as metas dos acordos internacionais através do programa *American Cities Climate Challenge*.

É neste contexto que o desenvolvimento das atividades humanas modernas, incluindo transporte, indústria, desmatamento e agricultura, é responsável pela emissão massiva de três principais gases de efeito estufa (GEE), dióxido de carbono (CO_2), metano (CH_4) e óxido nitroso (N_2O). O objetivo geral deste artigo é apresentar estratégias para combater a mudança climática e as condições para implementar essas estratégias para reduzir as emissões de gases de efeito estufa. Por este fato, resume o trabalho recente sobre os vínculos entre clima e clima. Primeiro, analisa os desafios da mudança climática e nos concentra nos mecanismos implementados pelas 25 cidades americanas que estão no caminho certo para superar as metas climáticas de Paris até 2025, de acordo com *Udasin (2021)*. Finalmente, mostra como a adaptação e a mitigação efetiva são duas estratégias similares que podem combater a mudança climática.

2 | REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Gases de Efeito Estufa (GEE)

Desde que nós humanos aparecemos no planeta pela primeira vez, temos mudado nosso meio ambiente e explorado os recursos naturais à nossa disposição para melhorar nossas condições de vida. Atualmente, muitas atividades humanas, destinadas principalmente a garantir um padrão de vida confortável, estão emitindo muitos gases de efeito estufa (GEE) na atmosfera. Estes gases de efeito estufa estão naturalmente presentes na atmosfera. Eles formam uma camada ao redor da Terra, permitindo-lhe reter seu calor: este é o efeito estufa. O sol aquece a Terra, que então irradia parte de seu calor de volta para o espaço. Os GEE na atmosfera retêm parte desse calor, impedindo que ele escape de volta para o espaço. Isto mantém a temperatura média em nosso planeta em 15 °C. Sem ela, a temperatura seria de cerca de -18°C, o que não suportaria a vida como a conhecemos (Chapron e al., 2010). Desde o início da revolução industrial, por volta de 1750, o efeito estufa foi amplificado pela liberação de grandes quantidades de GEE na atmosfera. O uso massivo de combustíveis fósseis como petróleo, carvão e gás natural, o desmatamento, certos processos industriais, a deposição de resíduos em aterros, o uso de CFC em sistemas de ar condicionado, a agricultura intensiva, os resíduos animais, a inundação de vales, os incêndios florestais, etc., desempenharam um

papel importante no aumento das emissões de gases de efeito estufa desde o início da era industrial. Como consequência do aquecimento global, a temperatura na superfície do globo está aumentando muito rapidamente, o que pode levar a mudanças climáticas significativas com repercussões sobre os seres humanos e seu meio ambiente. A fim de combater o fenômeno global da mudança climática, todos os níveis de governo precisam ser mobilizados para reduzir e mitigar ao máximo as emissões de GEE e proteger nosso planeta tanto quanto possível.

2.2 Mitigação e adaptação

Como as mudanças climáticas e sua atribuição sobre as atividades humanas são consideradas uma realidade por quase todos os cientistas que estudaram estas questões, a mobilização internacional sobre este assunto se acelerou. Mitigação e adaptação são duas estratégias para lidar com a mudança climática. A mitigação propõe ações para engajar os emissores de GEE no interesse coletivo do mundo, reduzindo qualquer risco de mudança climática. O conceito de adaptação é definido pelo Terceiro Relatório de Avaliação do GIEC como o ajuste em sistemas naturais ou humanos em resposta a estímulos climáticos atuais ou futuros ou seus efeitos, a fim de mitigar efeitos adversos ou explorar oportunidades benéficas. A adaptação à mudança climática é uma abordagem proativa para reduzir a vulnerabilidade aos impactos diretos e indiretos da mudança climática (Glossário GIEC): uma ampla gama de medidas de adaptação pode ser implementada para lidar com as consequências da mudança climática. Entretanto, para ser eficaz, a adaptação deve ser feita simultaneamente em vários níveis. É fundamentalmente local, pois os impactos diretos da mudança climática são e serão sentidos localmente. De acordo com uma fórmula comum, a mitigação visa evitar o incontável e a adaptação para administrar o inevitável. Como Holdren (2010), ex-presidente da Associação Americana para o Progresso da Ciência, graficamente coloca, temos três opções: mitigar, adaptar ou sofrer. Faremos um pouco de todos os três. A questão é qual combinação escolheremos: quanto mais mitigarmos, menos teremos que investir na adaptação, e menos sofrimento haverá (Holdren, 2010).

Na implementação de políticas de combate à mudança climática, é necessária uma certa vigilância, pois a mitigação e a adaptação podem, em alguns casos, revelar-se contraditórias. Um exemplo frequentemente citado de uma medida de adaptação que contradiz os objetivos de mitigação é o uso de ar condicionado durante o tempo quente, com suas emissões de GEE associadas. Da mesma forma, uma política de densificação urbana para reduzir as emissões relacionadas ao transporte que não leva em conta o risco de aumentar o efeito ilha de calor urbana é um exemplo de conflito entre adaptação e mitigação. É por isso que é essencial implementar as duas estratégias de forma integrada, a fim de limitar os conflitos e buscar sinergias. Existem muitas dessas sinergias: por exemplo, a ecologização urbana limita o efeito ilha de calor urbana, melhora a drenagem urbana e

promove a biodiversidade (adaptação), ao mesmo tempo em que reduz a necessidade de resfriamento e armazenamento de carbono (mitigação).

2.3 Entendendo a adaptação e mitigação como uma estratégia de gerenciamento de risco climático

Basicamente, os dois principais cursos de ação, mitigação e adaptação, são estratégias para gerenciar os riscos associados à mudança climática. Ambos visam a reduzir os gases de efeito estufa, ou seja, a probabilidade de impactos adversos induzidos pelo clima nas sociedades humanas e nos ecossistemas. Para reduzir os riscos climáticos, as políticas de mitigação tentam limitar os distúrbios humanos ao sistema climático (por exemplo, reduzindo as emissões de GEE), ou mesmo alterar deliberadamente o sistema climático para contrariar a mudança climática antropogênica ou compensar alguns de seus efeitos (por exemplo, através da possível implementação de técnicas de geo-engenharia emergentes e altamente controversas). As estratégias de adaptação, por outro lado, visam a agir sobre os sistemas humanos, em particular, tentando reduzir sua exposição e vulnerabilidade. Alguns autores preferem falar sobre o aumento da resiliência, ou seja, a capacidade de um sistema de absorver distúrbios enquanto mantém sua estrutura básica e seus modos de operação (Van Gameren; Weikmans; Zaccai, 2014).

No entanto, outras soluções podem se tornar necessárias quando as mudanças climáticas se tornarem significativas ou quando uma consideração de longo prazo se tornar necessária. Neste caso, a revisão das vulnerabilidades existentes torna-se insuficiente para construir uma estratégia de adaptação ou mitigação e medidas específicas devem ser postas em prática para lidar com novos impactos potenciais. Este é o caso, por exemplo, de projetos de desenvolvimento em larga escala que criam irreversibilidade a longo prazo. A curto prazo, é útil considerar primeiro a origem e a evolução da vulnerabilidade. O aumento do risco que estamos observando atualmente e que explica o aumento das perdas ligadas aos desastres naturais tem causas específicas, ligadas aos atuais desenvolvimentos socioeconômicos e demográficos (migração para áreas de risco, escassez de terra, custo econômico e político de medidas de redução de risco, consumo excessivo de água, etc.). Ao invés de simplesmente procurar reduzir os riscos, é necessário considerar os fatores que explicam o aumento dos riscos e atacar suas causas originais.

2.4 Planos estratégicos de adaptação e mitigação da mudança climática

Uma das formas pelas quais as autoridades públicas podem *integrar a mudança climática* é desenvolvendo estratégias e/ou planos de adaptação destinados a reduzir a vulnerabilidade (de um país, região ou cidade) à mudança climática, inclusive à variabilidade climática e aos extremos. Com o apoio de diferentes medidas e políticas, estes instrumentos de coordenação podem construir uma visão global para todo o território e os setores envolvidos ou focar em certas vulnerabilidades mais específicas. Este é um

momento crucial para planejar e tornar as cidades mais inteligentes com o objetivo de utilizar e inserir novas tecnologias de informação e comunicação nos diferentes setores, a fim de otimizar o uso das infra-estruturas existentes para enfrentar o novo desafio global. Seja no transporte, construção civil, governança ou meio ambiente e energia, as novas tecnologias podem ajudar a enfrentar os atuais desafios urbanos que estão aumentando os gases de efeito estufa. Com base nas estratégias de 25 cidades americanas que deverão reduzir 74 milhões de toneladas métricas de emissões de carbono até 2030, enquanto cumprem ou excedem as metas estabelecidas no Acordo de Paris de 2015 em meados da década 2010 a 2020, de acordo com o relatório publicado pela Bloomberg Philantropies. As 25 cidades aprovaram um total de 54 grandes políticas verdes que podem reduzir nossa pegada de carbono coletiva: Construção Civil, Transporte e Energia (Udasain, 2021). Outras ações podem ser acrescentadas, como o desenvolvimento do teletrabalho e a implementação de cidades esponjosas.

Assim, segundo Egli, Hasler & Probst (2016), as abordagens e estratégias para responder às mudanças climáticas e para iniciar e implementar medidas podem ser agrupadas em três grandes categorias.

1. A estratégia de eficiência, freqüentemente chamada de estratégia de eco-eficiência, visa uma maior produtividade dos recursos, ou seja, o uso de um mínimo de recursos por unidade de produção. Ela também procura minimizar as emissões de gases de efeito estufa, em particular de CO₂. Esta abordagem é favorecida no mundo econômico, pois visa e permite a introdução de novos produtos e processos. Um exemplo clássico desta estratégia é o desenvolvimento da mobilidade inteligente (carros elétricos, bicicletas elétricas, etc.). Em uma abordagem eco-eficiente, o uso de energia renovável e de matérias-primas produzidas de forma sustentável é garantido. As inovações que limitam as emissões de CO₂ e controlam a qualidade do ar são encorajadas, tanto na produção de um bem como em sua utilização.

2. A estratégia de suficiência se baseia na suposição de que é possível limitar o consumo de recursos e a degradação ambiental sem reduzir a qualidade de vida. A qualidade de vida poderia até mesmo ser melhorada consumindo menos. O slogan “qualidade de vida em vez de crescimento econômico” poderia resumir a visão dos defensores desta abordagem.

3. A estratégia de coerência visa limitar o uso dos recursos ao que a natureza pode renovar. O conceito de reciclagem está relacionado a esta estratégia, e os biocombustíveis são outro exemplo. A idéia é que no final de um processo praticamente só há matéria-prima para novos produtos, e nenhum desperdício. Esta abordagem implica o envolvimento de produtores e consumidores na busca de soluções relevantes.

3 | MÉTODO DE PESQUISA

Este artigo faz parte de um paradigma construtivo de adaptação e mitigação da mudança climática. É o resultado de uma pesquisa bibliográfica dentro da disciplina de Inovação e Nova Dinâmica Social e Econômica em Cidades: Cidades Inteligentes e Cenários de Inovação Urbana do programa de pós-graduação em Desenvolvimento Regional e Meio Ambiente da Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG). As informações que formam a base deste trabalho provêm dos mais recentes artigos científicos, teses e relatórios sobre o cenário climático, a fim de produzir um documento técnico-sintético que atenda às normas da comissão científica.

4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Tecnologias e práticas de mitigação na construção civil

É bem conhecido que os combustíveis fósseis consumidos pelo setor de construção (para a operação de edifícios e a construção de novos) é a principal fonte de emissões de GEE. O Quarto Relatório de Avaliação Intergovernamental do IPCC identifica as principais fontes de emissões de GEE associadas aos edifícios da seguinte forma: aquecimento de salas, refrigeração de salas, aquecimento de água, iluminação artificial e uso de aparelhos (Levine et al., 2007). O relatório também identifica três categorias de medidas para reduzir as emissões de GEE dos edifícios:

1. Reduzir o consumo de energia dos edifícios e sua energia incorporada
2. Usar mais energia com baixo teor de carbono e promover uma maior participação de energia renovável
3. Controle de emissões de GEE não CO₂ (Levine et al., 2007)

Neste contexto, os enfoques de mitigação no setor da construção civil são sobre a implantação e concepção de estratégias, tecnologias e práticas que Reduzir a demanda e o consumo de energia associados aos edifícios - desde o projeto, construção, descarte, até a renovação e o fim de vida útil. Avançar em direção a uma energia de baixo carbono. Maximizar as oportunidades de seqüestro de carbono nos edifícios. Promover mudanças comportamentais para alcançar um estilo de vida sustentável. Tudo isso resume que os edifícios precisam ser mais inteligentes, utilizando tecnologias de ponta.

4.2 Mitigação na mobilidade inteligente

A contribuição do setor de transportes para as emissões de gases de efeito estufa tem sido amplamente demonstrada, e o importante papel que ele pode desempenhar em uma estratégia eficaz e eficiente para reduzir as emissões globais de GEE é cada vez mais compreendido. Como resultado, o transporte é um ativo chave na transição energética e

ambiental, com mais de 53% do consumo global de petróleo atendendo a 94% da demanda energética do setor em 2010. O setor de transportes é uma área chave para questões de segurança energética e uma importante fonte de poluentes atmosféricos, tais como ozônio, óxido de nitrogênio e material particulado, bem como (Universidade de Cambridge, 2015) dióxido de carbono. A luta contra a mudança climática requer uma ação urgente e sustentável. Neste contexto, a mobilidade é um setor prioritário na redução dos gases de efeito estufa (GEE). Esta é uma das principais razões que o mundo tem para mudar de veículos a gasolina para veículos elétricos. Teremos inevitavelmente uma mobilidade mais limpa e ambientalmente mais amigável. Além disso, as 25 cidades americanas que estão implantando mais de 11.000 veículos elétricos no “*American Cities Climate Challenge*” estão demonstrando a eficácia dos veículos elétricos na luta contra a mudança climática porque, ao seguirem esta rota, ultrapassarão de longe os objetivos estabelecidos pelo Acordo de Paris até 2025 (Udasain, 2021).

Outro aspecto chave da estratégia de combate à mudança climática é o ciclismo, que é uma das maiores esperanças da humanidade. As 25 cidades americanas desenvolveram mais de 510 milhas de ciclovias, e cada viagem adicional feita por bicicleta reduz as emissões de CO₂ em 14%. Substituir o carro por um passeio a pé ou de bicicleta, mesmo apenas um dia por semana, pode reduzir nossa pegada de carbono em até meia tonelada de CO₂ ao longo de um ano. Ao fazer isso nas cidades, podemos reduzir significativamente nossa pegada de carbono coletivamente.

4.3 Desenvolvimento do teletrabalho

Já vimos anteriormente que o setor de transporte é o principal emissor de gases de efeito estufa, grande parte dos quais se deve a viagens entre a casa e o trabalho. O desenvolvimento do teletrabalho é outra arma fundamental na luta contra a mudança climática. Este pressuposto de um impacto ambiental positivo do teletrabalho é parte de uma crença mais geral na capacidade da tecnologia através de Wi-Fi ubíquo e dispositivos móveis como smartphones, computadores ou tablets para resolver problemas ambientais por si só (Trambley e al., 2007).

4.4 Ambiente inteligente

A gestão da água, do lixo e da energia estão no centro das preocupações ambientais de uma cidade. Em uma cidade inteligente, várias ferramentas tecnológicas permitem a proteção e preservação de nossos recursos naturais e ambientes naturais, tais como sensores para medir os níveis de poluição do ar. Estas são novas tecnologias que fornecem uma gama de informações em tempo real. Em energia, as *Smarts Grids*, uma tecnologia informática para redes inteligentes de distribuição de eletricidade, podem otimizar a produção e distribuição de eletricidade enquanto se ajustam à demanda. Economizar energia através de novas tecnologias também é um ambiente inteligente. Equipar a infra-

estrutura da cidade e implementar novas tecnologias de informação e comunicação no campo do meio ambiente visa a proteger o meio ambiente, garantir o uso sustentável dos recursos e melhorar o meio ambiente natural (Simard, 2015).

4.5 Desenvolvimento e implementação de cidades esponjosas

Inevitavelmente, da forma como o planeta Terra está aquecendo, algumas regiões têm que desenvolver estratégias eficazes para se adaptarem à nova mudança agora. Por exemplo, conforme a temperatura aumenta com o aquecimento global, mais e mais umidade evapora para a atmosfera, resultando em chuvas mais pesadas e violentas em todo o mundo. A implementação de mecanismos de mitigação não poderá impedir o mundo de enfrentar esses momentos de chuvas fortes. Mas diante desta situação, estratégias de adaptação podem ser desenvolvidas, tais como o estabelecimento de cidades esponjosas. Este conceito foi concebido pelo eminente professor Yu Kongjian (Tessa, 2021), um dos principais planejadores urbanos da China, com o objetivo de gerenciar as inundações nas cidades chinesas. O professor propõe não construir nas áreas baixas e deixar esta parte como uma espécie de reservatório com lagos naturais. Assim, a partir daí, em vez de canalizar a água rapidamente em linhas retas, haverá rios sinuosos com vegetação ou planícies de inundação que retardarão a água. Outra vantagem da cidade esponjosa é a criação de espaços verdes, parques e habitats animais, enquanto purifica a água superficial com plantas que removem toxinas e nutrientes poluentes.

No final, adaptação e mitigação são duas estratégias que andam de mãos dadas. A mitigação reduz a gama de riscos futuros. A adaptação nos permite lidar com mudanças reais, é óbvio que algumas mudanças ainda ocorrerão, portanto teremos que estar mais preparados para aproveitá-las ao máximo. Especialistas dizem que as medidas de adaptação e mitigação são apoiadas por fatores de capacitação: instituições e governança eficazes, inovação e investimento em tecnologias e infra-estrutura verdes, meios de vida sustentáveis, estilos de vida e comportamento. Em resumo, quando agimos para reduzir os GEE, também nos capacitamos para sermos mais eficazes na adaptação. Para que a adaptação e mitigação sejam eficazes, precisamos de padrões de planejamento de uso do solo (construção e aumento das ciclovias, instalação de sensores para monitorar a qualidade do ar, etc.) e padrões de construção inteligentes, ou seja, com tecnologia podemos otimizar os edifícios para reduzir nossa pegada de carbono e, finalmente, a transição para energia sustentável.

4.6 Limitações e perspectivas das políticas nacionais e subnacionais de adaptação e mitigação

As perspectivas de ação pública sobre adaptação e/ou mitigação da mudança climática dizem respeito a diferentes instrumentos políticos através da intervenção do Estado. Mas os resultados das práticas atuais são muito limitados quando comparados aos impactos projetados. De acordo com Biesbroeck et al. (2011), existem sete (7) categorias

de barreiras. Primeiro, escalas temporais de conflito entre os impactos de longo prazo da mudança climática e a visão de curto prazo da política e dos processos de tomada de decisão. Segundo, as incertezas das complexidades nas decisões políticas (incertezas subjetivas, estratégicas e institucionais). Uma terceira categoria de barreiras é a falta ou, pelo menos, o excesso de instituições. Quarto, a fragmentação ou falta de coordenação entre políticas e instituições em diferentes níveis de governança é problemática, especialmente em um campo tão multissetorial quanto a adaptação. Um baixo nível de consciência e comunicação sobre o tema da adaptação e/ou mitigação é outro obstáculo ao desenvolvimento de políticas, assim como a falta de motivação e vontade de agir, ligada, entre outras coisas, aos determinantes psicológicos e cognitivos. Finalmente, a falta de recursos humanos, financeiros e tecnológicos é obviamente uma grande limitação operacional.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo do clima usando conjuntos de modelos climáticos é um método semelhante ao usado pelo GIEC na preparação de seus relatórios de avaliação sobre a mudança climática. Assim, a parametrização do modelo para estudar o impacto da mudança climática se revela uma verdade absoluta sobre este fenômeno climático e já está causando mudanças desproporcionais no clima. Já estamos vendo os efeitos, com eventos ocorrendo em uma velocidade e magnitude maiores do que o esperado. A mudança climática está afetando o meio ambiente, o planeta Terra e os seres humanos que o habitam de muitas maneiras. O mais preocupante é que cada grau de aumento na temperatura aumenta o risco de eventos climáticos mais destrutivos, causando danos significativos e possivelmente irreversíveis em todo o mundo. É necessária uma ação urgente para mitigar o aumento dos gases de efeito estufa e para se adaptar às mudanças que ainda terão que ocorrer. Há um consenso internacional de que a ação sobre a mudança climática requer uma abordagem dupla com o objetivo de reduzir as emissões de gases de efeito estufa (mitigação) e reduzir a vulnerabilidade dos sistemas naturais e humanos aos impactos da mudança climática (antecipação e adaptação). Adaptação e mitigação são duas (2) estratégias para lidar com o aquecimento global e como as cidades são fontes de emissão de gases de efeito estufa, elas estão na linha de frente para agir usando ferramentas tecnológicas para otimizar os edifícios tornando-os mais inteligentes, para assumir o controle da qualidade do ar com a instalação de sensores, Incentivar o ciclismo, aumentando o número de ciclovias, favorecendo os carros elétricos em vez dos carros a gasolina e limitando as viagens das pessoas ao trabalho através do desenvolvimento do teletrabalho. Na verdade, quanto mais inteligente for uma cidade, melhor ela é capaz de lidar com o aquecimento global. Como a mudança climática é um fenômeno global, as ações de adaptação e mitigação devem ocorrer em todo o mundo. Portanto, será necessário aumentar a resiliência e a inteligência de todas as cidades do mundo.

REFERÊNCIAS

Abrahamson V., Wolf J., Lorenzoni I. **Perceptions of heatwave risks in London and Norwich, UK**, Journal of Public Health, vol. 31, p. 119-126, 2009.

Adger W. N., Arnell N., Tompkins E. L. **Successful adaptation to climate change across scale**, Journal Global Environmental Change, vol. 15, p. 77-86, 2005.

Biesbroeck, G. R.; Klostermannj; Termeerc. Barriers to climate change adaptation in the Netherlands. **Climate Law**, v. 2, p. 181-199, 2011.

Chapron J-V., Puget J-L., Blanchet R., Salençon J., Carpentier A. **Le changement climatique**. Institut de france, Academie des sciences, paris, p.24, 2010.

Godard O. **Dossier adaptation aux changements climatiques**, Edição Natures Sciences Societé, Paris, p.11, 2010

Holdren, J. P. Remarks by the honorable John P. Holdren, assistant to the President for science and technology and director, office of Science and Technology policy, executive office of the President, to the National climate adaptation summit conference, 2010.

Levine M., Urge-Vorsatz D., Blok K., Geng L., Harvcey D., Lang S., Levermore G., Mongameli Mehlwana A., Mirasgedis S., Novikova A., Rillig J. & Yoshino H. **Mitigation. Contribution of Working Group III to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change**. United Kingdom & United States: Cambridge University Press. p. 15-16, 2007.

Nations Unies. **Conference des nations unies sur le climat**, Relatorio de Paris, p.28, 2015.

Simard J. **La ville intelligente comme vecteur pour le développement durable, Cas de ville Montréal**. Mestrado em meio ambiente Universidade De Sherbrooke, p.72, 2015.

Tessa W. **Mudança climática: urbanista cria “cidades-esponja” para combater enchentes**, BBC NEWS, BRASIL, 2021.

Trambley D-G., Chevrier C., Loreto M., Bell C. **Le télétravail comme nouvelle forme d'organisation du travail**. Québec, Université Du Québec à Montréal, Edição tele-universidade, p.77, 2007.

Universidade de Cambridge. **Changement climatique: Répercussion sur les transports**. Principais conclusões do Quinto Relatório de Avaliação (AR5) do Painel Intergovernamental sobre Painel Intergovernamental sobre, 2015. Disponível em: <https://www.cisl.cam.ac.uk/system/files/documents/transport-briefing-print-fr.pdf>

Van Gameren V., Weikmans R., Zaccai E. **L'adaptation au changement climatique**. Edição La decouverte, Paris, p.128, 2014.

Egli, H-R., Hasler, M. & Probst, M. (2016). **Geografie wissen und verstehen**. Berne: hep-Verlag.

ESTUDOS RECENTES DA BIOTRANSFORMAÇÃO DA PROGESTERONA POR MICRORGANISMOS

Data de aceite: 03/07/2023

Lígia Breda e Vasconcelos

Graduanda em Bacharelado em Química -
Ênfase em Ambiental, Instituto de Química
de São Carlos, Universidade de São
Paulo, São Carlos, São Paulo.
<https://lattes.cnpq.br/2432728004645186>.

Samuel Filipe Cardoso de Paula

Doutorando e Mestre em Química
Orgânica e Biológica, Instituto de Química
de São Carlos, Universidade de São
Paulo, São Carlos, São Paulo.
<http://lattes.cnpq.br/0236400279872187>.

André Luiz Meleiro Porto

Laboratório de Química Orgânica e
Biocatálise, Instituto de Química de São
Carlos, Universidade de São Paulo, São
Carlos, São Paulo.
<http://lattes.cnpq.br/2689760395534218>.

Nota dos Autores: Este Capítulo foi originado com base nos trabalhos de Iniciação Científica "Estudos de biotransformação de esteroides pelo fungo *Penicillium oxalicum* CBMAI 1996 visando compreender possíveis impactos ambientais", da estudante Lígia B. e Vasconcelos (bolsista FAPESP, Proc. NO. 2021/13179-5); e de outros estudos envolvendo a biotransformação da progesterona, realizados pelo Grupo de Pesquisa do Laboratório de Química Orgânica

e Biocatálise, como da dissertação "Estudo da ocorrência de reações de bio-oxidação dos esteroides progesterona e 17 α -etinilestradiol por fungos de ambiente marinho" de Samuel F. C. de Paula.

RESUMO: Esteroides são compostos orgânicos classificados como hormônios e são produzidos pelas diversas espécies do reino animal, vegetal e fungi protista. São moléculas formadas por cadeias carbônicas tetracíclicas, lipossolúveis, estáveis e apresentam diferentes tipos de grupos funcionais (álcoois, ésteres, cetonas, aldeídos, ácidos carboxílicos, núcleo benzenoide) os quais são responsáveis pelas suas diferentes funções e propriedades físicas e químicas. Dentre os esteroides, a progesterona é um hormônio sexual produzido pelos ovários e é fundamental para a regulação do ciclo menstrual e para a manutenção da gravidez. Com os estudos e o desenvolvimento dos contraceptivos, observou-se que pequenas variações, nas estruturas e nas funções orgânicas dessas moléculas, podem levar a grandes alterações da biodisponibilidade e de suas atividades biológicas. O consumo de contraceptivos, remete posteriormente

na liberação dessas moléculas em corpos hídricos, através do descarte ou da eliminação natural humana. Por serem moléculas lipofílicas e recalcitrantes, essas tendem a se acumular nos tecidos de animais aquáticos (exs. peixes, anfíbios, etc.) causando danos em seus sistemas reprodutivos, o que às classificam como poluentes disruptores endócrinos. Uma das maneiras de se promover alterações nessas moléculas no meio ambiente se dá através de reações naturais, catalisadas pelos sistemas enzimáticos de fungos e bactérias. Assim, este Capítulo apresenta os estudos de biotransformação da progesterona com o fungo de ambiente marinho *Penicillium oxalicum* CBMAI 1996. Este fungo promoveu a hidroxilação da progesterona, formando os derivados 15 β -hidroxiprogesterona e a 7 β ,15 β -dihidroxiprogesterona, o quais foram isolados, identificados e caracterizados por CG-EM, RMN e por difração de Raios-X. Comumente, enzimas do complexo do citocromo P-450, produzidas pelo fungo *P. oxalicum* CBMAI 1996, foram as que promoveram as reações de hidroxilação da progesterona. Além disso, há uma hipótese que tais moléculas esteroidais, presentes no meio ambiente terrestre e marinho, estão sujeitas às diversas biotransformações microbianas. Assim, podem ocorrer alterações na lipofilicidade, e conseqüentemente, de bioacumulação podendo levar alterações metabólicas em organismos vivos alvos que passam a ter contato com esses compostos xenobióticos e seus derivados. Desta forma, este trabalho apresenta alguns dos estudos recentes de biotransformação da progesterona com o fungo. *P. oxalicum* CBMAI 1996.

PALAVRAS-CHAVE: Biotransformação, Esteroides, Fungo Marinho, *Penicillium oxalicum*.

RECENT STUDIES OF THE BIOTRANSFORMATION OF PROGESTERONE BY MICROORGANISMS

ABSTRACT: Steroids are organic compounds classified as hormones and are produced by different species of the animal, vegetable and protist fungi kingdoms. They are molecules formed by tetracyclic carbon chains, liposoluble, stable and have different types of functional groups (alcohols, esters, ketones, aldehydes, carboxylic acids, benzene ring) which are responsible for their different functions and physical and chemical properties. Among steroids, progesterone is a sex hormone produced by the ovaries and is essential for regulating the menstrual cycle and maintaining of the pregnancy. With the studies and development of contraceptives, it was observed that small variations in the structures and organic functions of these molecules can lead to major changes in bioavailability and their biological activities. The consumption of contraceptives subsequently refers to the release of these molecules into water bodies, through disposal or natural human elimination. Because they are lipophilic and recalcitrant molecules, they tend to accumulate in the tissues of aquatic animals (e.g. fish, amphibians, etc.) causing damage to their reproductive systems, which classify them as endocrine-disrupting pollutants. One of the ways to promote changes in these molecules in the environment is through natural reactions, catalyzed by the enzymatic systems of fungi and bacteria. Thus, this Chapter presents the studies of progesterone biotransformation with the marine fungus *Penicillium oxalicum* CBMAI 1996. This fungus promoted the hydroxylation of progesterone, forming the derivatives 15 β -hydroxyprogesterone and 7 β ,15 β -dihydroxyprogesterone, which were isolated, identified and characterized by GC-MS, NMR and X-ray diffraction. Commonly, enzymes of the cytochrome P-450 complex, produced by the fungus *P. oxalicum* CBMAI 1996, were the ones that promoted progesterone hydroxylation

reactions. In addition, there is a hypothesis that such steroidal molecules, present in the terrestrial and marine environment, are subject to various microbial biotransformation. Thus, changes in lipophilicity and, consequently, bioaccumulation may occur, which may lead to metabolic changes in target living organisms that come into contact with these xenobiotic compounds and their derivatives. Thus, this work presents some of the recent studies of progesterone biotransformation by the fungus *P. oxalicum* CBMAI 1996.

KEYWORDS: Biotransformation, Steroids, Marine Fungi, *Penicillium oxalicum*.

1 | INTRODUÇÃO

1.1 Progesterona

A progesterona é um hormônio esteroidal, lipofílico, derivado do colesterol, caracteriza-se por ser o único progestágeno natural, ou seja, é sintetizada pelo corpo humano, especialmente nos ovários, na placenta e nas glândulas suprarrenais^[1]. Sua estrutura química é formada a partir de um núcleo base composto por 17 átomos de carbono, que compõe um sistema de anéis tetracíclicos (A, B, C e D), denominado de gonano, típico dos esteroides (Figura 1)^[2].

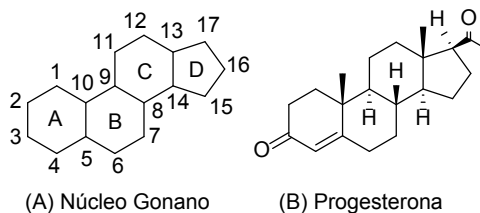


Figura 1. (A) Representação do esqueleto gonano dos esteroides. (B) Representação da estrutura química da progesterona.

A biossíntese da progesterona envolve o citocromo P-450, nas células do ovário, sob a influência dos hormônios hipotalâmico-hipofisários, com a conversão do colesterol à pregnenolona. Esta por sua vez, deve sair da mitocôndria para sofrer a ação das enzimas 3 β HSD ou 17 α -hidroxipregnenolona e 17 α -hidroxilase, presentes no retículo endoplasmático, convertendo-se finalmente à progesterona. A maior parte da progesterona formada é secretada para o sangue, porém uma outra parte é oxidada no carbono C17, tornando-se um substrato de partida (17 α -hidroxiprogesterona) para a formação de outros hormônios esteroidais (Figura 2)^[3].

A progesterona é um dos hormônios mais importantes da gestação e comunicação materno-fetal, estimulando a secreção uterina de nutrientes que influenciam diretamente no início do desenvolvimento embrionário^[4]. Ainda, a progesterona está relacionada ao processo de ovulação, e com isso, diversos progestágenos vem sendo (bio)sintetizados e comercializados, em combinação com outros hormônios como o estradiol, na forma de contraceptivos^[3].

Durante todo o período menstrual, a expressão dos receptores endometriais para estrogênicos e progesterona varia, o que resulta na ciclicidade e formação das condições para a concepção. A progesterona exerce um papel importante na transição da fase proliferativa, ao final da menstruação, quando o endométrio está descamado, com sua menor espessura, para a fase secretora, período fértil, quando o endométrio apresenta sua maior espessura, rico em nutrientes favorecendo a fixação e o sustento do embrião^[3].

A produção de progesterona nos ovários é induzida por hormônios produzidos no hipotálamo e pela glândula hipófise, na segunda metade do ciclo menstrual, antes da ovulação. O hormônio é capaz de ligar-se aos receptores de estrogênio, presentes nas células epiteliais do estroma e miométrio, de maneira supressora. Desta forma, na fase ovulatória, quando se observa uma alta liberação de estrogênio, tem-se de forma simultânea um aumento exponencial da concentração de receptores da progesterona, localizados nas células epiteliais do endométrio. Isso faz com que a progesterona esteja menos biodisponível e não realize sua função supressora. Durante a fase lútea o nível de progesterona no sangue encontra-se em torno de 20 a 30 mg/dia, enquanto fora desta fase fica próximo a 1 mg/dia^[5].

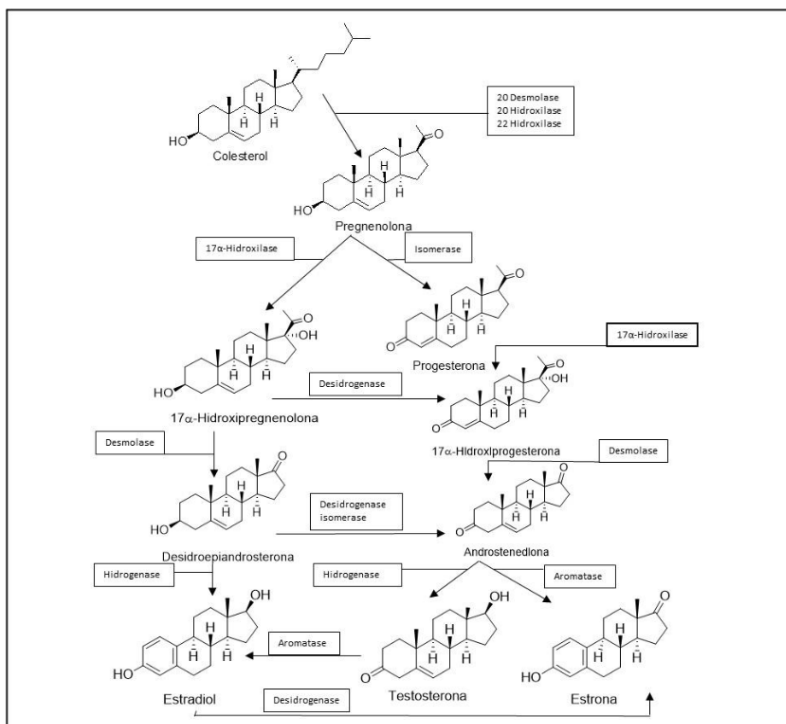


Figura 2. Biossíntese de hormônios esteroidais a partir das células do ovário.

Fonte: Adaptado da ref. ORIZABA-CHÁVEZ, B; *et. al.* Farmacocinética de la progesterona. Revista Hospital Juarez México, México, vol. 60, 1, 59-66, 2013.

A progesterona é metabolizada de forma rápida, em sua primeira passagem pelo fígado. O principal metabólito da progesterona é o pregnanediol (Figura 3), que em sequência se conjuga com o ácido glicurônico, formando o pregnanediol glicuronídeo. Esse metabólito é então eliminado pela urina. Como esse processo ocorre na primeira passagem hepática, a progesterona possui um curto tempo de meia-vida de eliminação de apenas 5 minutos. Seus derivados, em sua maioria, possuem um tempo de meia vida de eliminação muito maior, como o acetato de medroxiprogesterona (Figura 4) que chega a 24 horas, e por isso são mais utilizados na composição dos contraceptivos^[5].

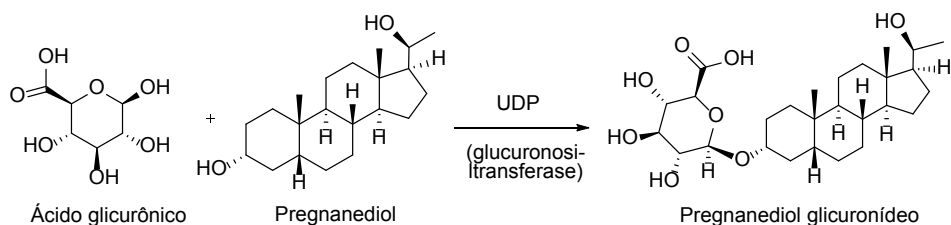


Figura 3. Reação de conjugação do pregnanediol glicuronídeo nas células hepáticas^[6].

Além do baixo tempo de meia vida de eliminação da progesterona, outros fatores levaram ao desenvolvimento de derivados esteroidais para aplicação em métodos contraceptivos. As progestinas são moléculas sintetizadas a partir da progesterona, sendo estas derivadas da 17 α -hidroxiprogesterona e norprogesterona. Estas possuem atividades semelhantes à progesterona e podem ser administradas de forma terapêutica por via oral^[3]. Estão dispostas na Tabela 1 as estruturas de algumas progestinas utilizadas em tratamentos contraceptivos e seu ano de introdução do mercado^[7].

As progestinas também estão sendo empregadas em terapias hormonais para mulheres que sofrem com os efeitos da menopausa. Estudos localizaram receptores de progesterona em osteoblastos (células onde se formam os ossos). A partir de testes *in vitro* verificou-se o efeito benéfico promovido pelas terapias com progestágenos, que aumentaram a proliferação de osteoblastos, levando a uma diminuição da perda óssea (consequência da menopausa)^[8].

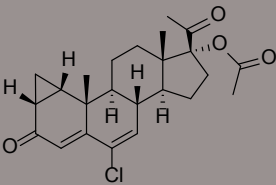
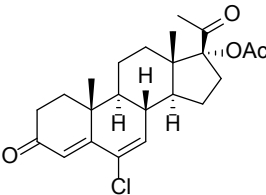
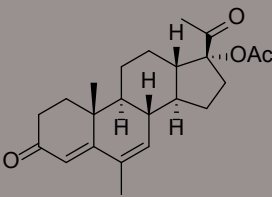
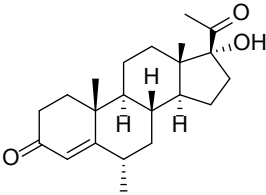
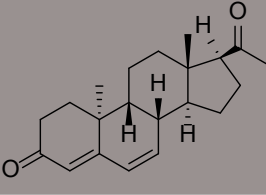
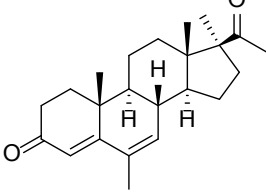
Nome	Estrutura	Ano de introdução no mercado
Acetato de ciproterona		1961
Clormadinona		1959
Acetato de Megestrol		1959
Medroxiprogesterona		1957
di-Hidrogesterona		1959
Medrogestona		1964

Tabela 1. Classificação dos compostos derivados da progesterona utilizados nos tratamentos contraceptivos e seu ano de introdução no mercado.

Fonte: REGIDOR, P. A. The clinical relevance of progestogens in hormonal contraception: Present status and future developments. **Oncotarget**, Ismaning, Germany, vol. 9, 77, 34628-34638, 2018.

1.2 Contaminação ambiental por compostos esteroidais

O consumo dos contraceptivos hormonais cresce progressivamente desde a década de 1960. Segundo a declaração da posição das terapias hormonais de 2022, da Sociedade Norte Americana da Menopausa (*The North American Society of Menopause*), além do uso para prevenção da concepção, os hormônios apresentam resultados altamente eficazes para o tratamento de sintomas vasomotores, da síndrome geniturinária e da perda óssea, sintomas da menopausa^[9].

Dados da literatura tem mostrado, assim como a maioria dos fármacos, que apenas uma pequena parte do princípio ativo dos anticoncepcionais e reguladores hormonais é absorvida pelo organismo, enquanto uma outra parcela é metabolizada ou eliminada diretamente na urina. Estudos apontaram a presença em águas subterrâneas de até 66 ng L⁻¹ de 17β-estradiol e até 50 μg L⁻¹ de 17α-etinilestradiol (ambos esteroides presentes em contraceptivos) ^[10].

As águas residuais domésticas e industriais passaram a apresentar concentrações consideráveis de compostos hormonais e seus derivados de metabolização. Tal situação torna-se crítica e preocupante em função do forte potencial disruptivo endócrino desses esteroides, e da ausência de tecnologias eficientes para a remoção e a identificação de moléculas orgânicas em baixas concentrações nas estações de tratamento de águas residuais^[11].

Devido a incipiência dos métodos de tratamentos de água e esgoto frente a tais substâncias, essas acabam influenciando o comportamento dos organismos vivos em vários aspectos. Estudos mostraram que peixes fêmeas, na presença de determinados compostos esteroidais, passaram a apresentar aspectos andrógenos, ou seja, desenvolvimento induzido de órgãos reprodutivos masculinos, mesmo quando presentes em concentrações mínimas (valores inferiores a ng/L)^[12].

Foram realizados testes com peixes alevinos da espécie *Oreochromis niloticus* (tilápia do Nilo), os quais foram expostos por um período de 1 a 4 semanas aos hormônios esteroidais 17β-estradiol e 17α-etinilestradiol. As concentrações de esteroides avaliadas variavam de 250 ng L⁻¹ a 1 mg L⁻¹. Concluiu-se que as concentrações hormonais do meio influenciaram diretamente no peso, comprimento e na sobrevivência dos indivíduos. Observou-se o desenvolvimento de indivíduos intersexos e com malformações, principalmente na região da cabeça ou encefálica^[13].

O Fator de Bioconcentração - FBC (*Bioconcentration Factor*) trata-se de um número que remete a afinidade que um determinado composto apresenta em se bioacumular em tecidos animais ou vegetais^[14]. Mediu-se o FBC de progestágenos (grupo de hormônios sexuais que atuam nos receptores da progesterona) em indivíduos da espécie *Danio rerio* (peixes-zebra) que possuíam de 9 a 12 meses de vida. Os testes foram realizados com um período de exposição aos esteroides de 28 dias. Os resultados apresentaram

um intervalo de FBC = 7, relativo ao hormônio contraceptivo Dienogeste, até FBC = 128, relativo ao hormônio Acetato de Medroxiprogesterona. Avaliou-se, que a exposição aos hormônios levou alterações bioquímicas, gerando respostas não lineares dos biomarcadores analisados. Além disso observou-se uma intensa alteração na produção de proteínas do grupo das vitelogeninas, sugerindo um risco para o processo reprodutivo destes indivíduos ^[15].

Os esteroides liberados no meio ambiente tendem a comportar-se de acordo com suas propriedades físico-químicas as quais são hidrofóbicos, apresentam baixa volatilidade e são bastante estáveis e recalcitrantes ^[16]. Por consequência, causam acumulação em sedimentos ambientais, bem como em tecidos adiposos de animais e outros organismos presentes na biota local os quais têm contato com essas substâncias.

Com o decorrer do tempo pode-se observar um processo de bioacumulação, em que essas substâncias esteroidais se concentram progressivamente nos tecidos dos organismos a eles expostos. Simultaneamente a esse processo, desenrolam-se os ciclos naturais predatórios das cadeias alimentares, nos quais surgem as tendências dos acúmulos dos contaminantes nos tecidos dos organismos consumidores do topo da cadeia alimentar via processo de biomagnificação^[17].

Em contrapartida, os microrganismos presentes nos ambientes de disseminação de tais substâncias interagem com estes compostos podendo biotransformá-los em novas moléculas, comumente mais hidrofílicas. O etinil estradiol, por exemplo, é parcialmente metabolizado no corpo humano gerando derivados conjugados, os quais são regenerados por bactérias *E. coli* retornando a sua estrutura original^[18].

A contaminação ambiental por esteroides é emergente, sendo relevantes os estudos da ocorrência e a concentração de tais compostos e de seus derivados de biotransformação (mesmo que em escalas de ng L⁻¹) ^[19]. Além disso, deve-se buscar compreender como a biota local interage com os esteroides, para se avaliar as possíveis formas de biodegradação ou a obtenção de novos derivados e as suas possíveis consequências. Contudo, é um trabalho complexo, de difícil interpretação e de conclusão das hipóteses, devido às inúmeras variáveis que envolvem todo o processo de biotransformação dos esteroides no meio ambiente.

Ressalta-se que os produtos de biotransformação dos esteroides, que estão sendo obtidos no meio ambiente, podem ser classificados como mais ou menos tóxicos, ou ainda, como novos compostos com potencial atividade para uso em humanos. Diversas moléculas comerciais foram obtidas a partir do metabolismo natural de plantas, animais e fungos, ou por processos de biotransformação^[20]. Destaca-se, com isso, a importância e a relevância dos estudos de biotransformação de esteroides.

1.3 Biotransformação de esteroides

Durante o desenvolvimento e o crescimento de microrganismos (fungos, bactérias, algas) no meio ambiente ou em condições de laboratórios são biossintetizadas uma diversidade de enzimas, as quais podem ser excretadas, isoladas, imobilizadas e utilizadas para promover a biotransformação e a biodegradação de compostos xenobióticos. Em estudos laboratoriais, para promover a biotransformação de compostos esteroideais, conhecer os metabólitos produzidos e as enzimas envolvidas, podem ser utilizados os sistemas biológicos constituídos de células totais ou o caldo enzimático obtido dos meios de cultura em que foram cultivados e crescidos os microrganismos^[21].

Os microrganismos empregados nas biotransformações encontram-se distribuídos no meio ambiente em todos os tipos de biomas. Consequentemente, as condições empregadas nos meios reacionais para a biotransformação de xenobióticos são brandas e próximas das CNTP, além do meio líquido de cultivo laboratorial utilizar a água e sais minerais. Com isso, estudos nessa área convergem com os princípios da Química Verde, uma vez que levam ao desenvolvimento de técnicas e metodologias que exigem um baixo consumo de energia e reduzem o uso de substâncias nocivas à saúde humana e ao meio ambiente e que sejam de fontes renováveis^[22].

A biotransformação remete a qualquer mudança promovida em moléculas na presença de um agente biológico vivo, a qual leva às alterações nas propriedades físicas e químicas do material de partida, cujo produto(s) pode(m) ser extraído(s) após o processo. A biodegradação, em contrapartida, remete às transformações que causam a fragmentação total dos compostos (comumente de interesse os compostos xenobióticos tóxicos) em estruturas químicas mais simples como gás carbônico, água e outras moléculas voláteis^[23].

Estudos na literatura, por exemplo, mostraram que o fungo *Aspergillus niger* N402 promoveu a obtenção de uma mistura de produtos via reações de hidroxilação da progesterona, produzindo a 11 α -hidroxiprogesterona, a 6 β ,11 α -di-hidroxiprogesterona e a 21-hidroxiprogesterona (desoxicorticosterona). A adição de íons metálicos (Cu²⁺, Cd²⁺ e Co²⁺) aos meios reacionais levou a inibição das enzimas que promoveram a hidroxilação, o que remete na possibilidade de se controlar a biotransformação^[24].

A biotransformação da progesterona pelo fungo *Aspergillus brasiliensis* por 7 dias levou a obtenção da 11 α -hidroxiprogesterona, da 14 α -hidroxiprogesterona e da 21-hidroxiprogesterona. Ressalta-se que a 21-hidroxiprogesterona é utilizada como fármaco, na forma do seu derivado acetato, para o tratamento de doenças de Addison, Miastenia Gravis, dentre outras^[25].

As monoxigenases promovem reações de oxidação (ex. hidroxilação) dos esteroides, gerando uma vasta gama de produtos, sendo estes muitas vezes regioisômeros. A consequência disso, é que muitas vezes, dificulta a purificação do(s) produto(s) alvo(s). Nestes casos, pode-se utilizar microrganismos como plataformas para a expressão

heteróloga das enzimas. Por exemplo, empregar células microbianas hospedeiras, como de bactérias (*Escherichia coli*) e de leveduras (*Saccharomyces cerevisiae*, *Pichia pastoris*). Assim, obtêm-se as enzimas fúngicas de interesse com um alto nível de expressão e com melhor rendimento de biotransformação frente ao(s) produto(s) desejado(s)^[26].

A origem dos microrganismos que podem ser utilizados nas reações de biotransformação é altamente diversa, já que estes ocupam todos os ambientes, independente das condições de temperatura, pressão e composição nutricional. Fungos endofíticos, por exemplo, vivem dentro dos tecidos vegetais, sem causar danos à planta hospedeira. O fungo endofítico *Talaromyces* sp., isolado das folhas de *Handroanthus impetiginosus* (Ipê-roxo) reduziu a ligação dupla sp^2 dos carbonos C-4 e C-5 (Anel A), além de promover oxidação no carbono C-17 com hibridação sp^3 (Anel C) da progesterona produzindo derivados diferentes^[27].

Na literatura foi avaliado o potencial de biotransformação da progesterona com microrganismos presentes no lodo ativado de tratamento de efluentes. Observou-se várias reações (metilação, hidrogenação, hidroxilação, etc.), com uma amostra microbiológica do efluente. Neste estudo, realizou-se o teste do efluente resultante após a biotransformação da progesterona com peixes-zebra. Embora não tenha se observado a morte de indivíduos, verificou-se interferências na atividade de transcrição gênica evidenciando que os resíduos da biotransformação continuaram possuindo atividade endócrina e biológica, possivelmente devido à presença dos esteroides biotransformados pela microbiota^[28].

O potencial de biotransformação da progesterona por 12 linhagens de fungos isolados de ambiente marinho foram investigados entre 3 a 7 dias. Os melhores resultados foram obtidos após 7 dias, cuja conversão da progesterona foi superior a 99%, em diferentes produtos de biotransformação. Tais resultados foram promovidos pelas linhagens de *Aspergillus sydowii* CBMAI 935, que produziu a testosterona, o *Penicillium oxalicum* CBMAI 1185, que produziu a testololactona e o *Cladosporium* sp. CBMAI 1237, que produziu a 11-hidroxiprogesterona^[29].

2 | BIOTRANSFORMAÇÃO DA PROGESTERONA PELO FUNGO *PENICILLIUM OXALICUM* CBMAI 1996

Em nossos estudos foi avaliado o fungo o *Penicillium oxalicum* CBMAI 1996, frente às reações de biotransformação da progesterona. Esse fungo foi isolado de uma esponja (*Chelonaplysilla erecta*) coleta do litoral norte do estado de São Paulo^[30]. O objetivo de estudar os fungos de ambiente marinho em biotransformações, pois o mar é um dos destinos finais dos esteroides e muitas outras moléculas.

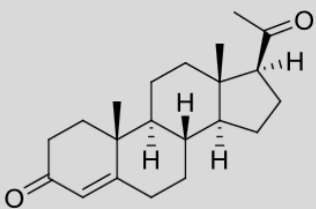
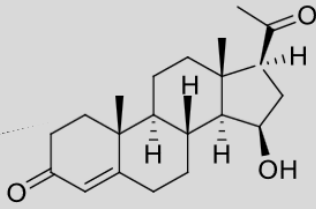
Para realização da reação, primeiramente cultivou-se o fungo *P. oxalicum* CBMAI 1996 em placas de Petri contendo o meio de cultura sólido de extrato de malte esterilizado, por 7 dias à temperatura de 32°C. O meio de cultura foi preparado a partir de uma solução

de água do mar sintética composta de sais [$\text{CaCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ (1,36 g/L), $\text{MgCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ (9,68 g/L) NaCl (30g/L), NaH_2PO_4 ($1,4 \times 10^{-4}$ g/L), Na_2SO_4 (3,47 g/L), NaHCO_3 (0,17 g/L), KBr (0,10 g/L), $\text{SrCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ (0,04g/L) e do ácido H_3BO_4 (0,03 g/L)]. Além destes componentes, foi adicionado o extrato de malte (20 g/L), agar (20 g/L) e o pH do meio foi ajustado (pH = 7).

Após o crescimento do *P. oxalicum* CBMAI 1996 em meio de cultura sólido, foram inoculados os esporos/micélios transferindo-se 7 discos em meio de cultura líquido esterilizado e o pH foi ajustado para 7,4. Os frascos Erlenmeyer foram tampados com estofos de algodão/gaze e mantidos para o crescimento celular em agitador orbital (7 dias, 130 rpm, 32°C).

Após os 7 dias de crescimento do *P. oxalicum* CBMAI 1996 separou-se, através de uma filtração em funil de Buchner, a massa micelial fúngica do caldo enzimático (produzido durante seu período de crescimento). Para as reações de biotransformação da progesterona adicionou-se 100 mL do caldo fúngico cultivado (filtrado) em um frasco Erlenmeyer de 250 mL e adicionou-se 1 mL de solução de progesterona dissolvida em dimetilsufóxido (50 mg/mL). Enquanto que para as reações com a massa micelial fúngica umidecida adicionou-se 3 g (micélios/esporos) em 100 mL de meio de cultura líquido de extrato de malte recém preparado e e adicionou-se 1 mL de solução de progesterona dissolvida em dimetilsufóxido (50 mg/mL).

Realizou-se o acompanhamento das reações a cada 24 h, coletou-se alíquotas de 2 mL dos meios, adicionou-se 2 mL de acetato de etila em tubos Falcon e agitou-se por 2 minutos em Vórtex. Os tubos Falcon foram levados para centrifuga (6000 rpm, 6 minutos). Coletou-se a fase orgânica, a qual foi filtrada em presença de sulfato de sódio anidro (Na_2SO_4). Transferiu-se 2 mL desta solução para frascos de 2 mL os quais foram injetados e analisados por Cromatografia a Gás acoplada a Espectrometria de Massas (CG-EM). Através da integração dos picos obtidos nos cromatogramas, pode-se observar a evolução da reação tanto no caldo enzimático (14 dias) quanto com os micélios/esporos (21 dias). Os dados estão apresentados nas Tabelas 2 e 3 e nas Figuras 4 e 5.

	caldo enzimático <i>P. oxalicum</i> CBMAI 1996 pH 7,4, 32°C, 130 rpm, 14 dias	
Progesterona		15β-Hidroxiprogesterona
Tempo de reação (dias)	Progesterona (%)	15-Hidroxiprogesterona (%)
2	93	7
3	87	13

4	86	14
5	83	17
6	81	19
7	75	25
8	64	36
9	64	36
10	68	32
11	65	35
12	77	23
13	56	44
14	56	44

Tabela 2. Monitoramento da reação de biotransformação da progesterona pelo caldo enzimático produzido pelo fungo *Penicillium oxalicum* CBMAI 1996 por 14 dias.

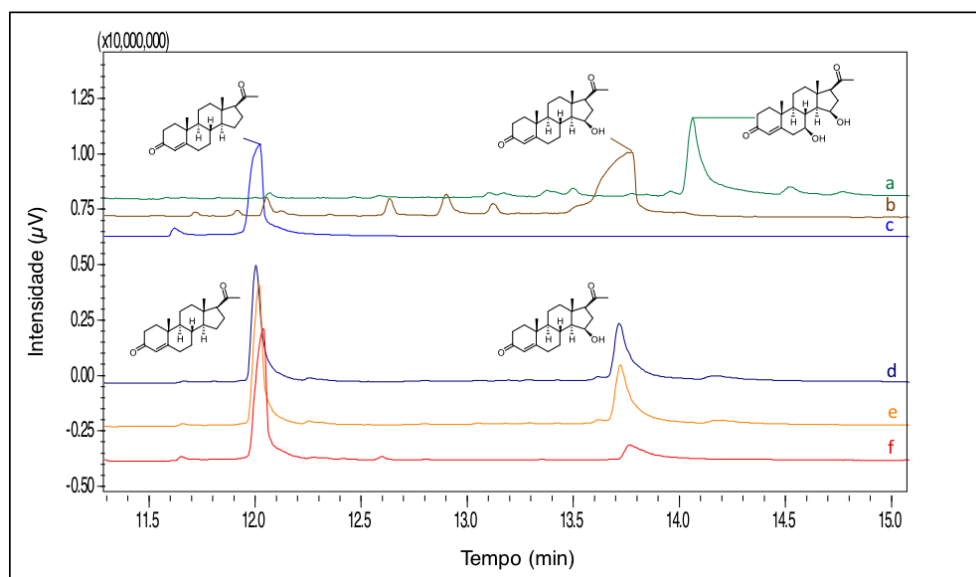


Figura 4. Cromatogramas obtidos a partir das análises por CG-EM (IE, 70 eV) da reação de biotransformação da progesterona pelo caldo enzimático do fungo *P. oxalicum* CBMAI 1996 por 14 dias. (a) Padrão da 7β,15β-di-hidroxiprogesterona. (b) Padrão da 15-hidroxiprogesterona. (c) Padrão da progesterona. (d) Reação em 14 dias. (e) Reação em 8 dias. (f) Reação em 4 dias.

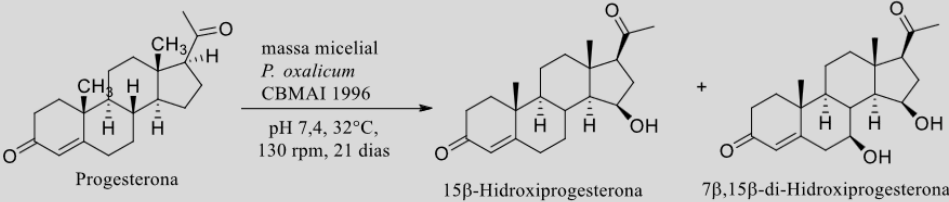
<div>  <p> Progesterona 15β-Hidroxiprogesterona 7β,15β-di-Hidroxiprogesterona </p> </div>			
Tempo de reação (dias)	Progesterona (%)	15-Hidroxiprogesterona (%)	7,15-di-Hidroxiprogesterona (%)
2	93	7	0
3	60	38	2
4	16	58	26
5	7	35	58
6	1	23	76
7	1	19	81
8	0	19	81
9	0	12	88
10	0	9	91
11	0	9	91
12	0	9	91
13	0	8	92
14	0	6	94
15	0	6	94
16	0	6	94
17	0	6	94
18	0	6	94
19	0	6	94
20	0	6	94
21	0	7	93

Tabela 3. Monitoramento da reação de biotransformação da progesterona em meio reacional com massa a micelial/espores do fungo *Penicillium oxalicum* CBMAI 1996 por 21 dias.

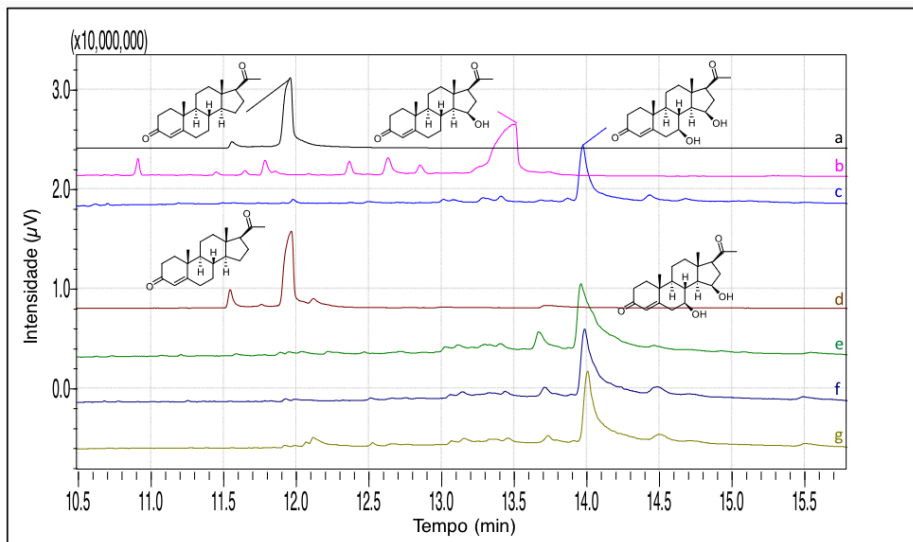


Figura 5. Cromatogramas obtidos a partir das análises por CG-EM (IE, 70 eV) da reação de biotransformação da progesterona em meio reacional com massa micelial do fungo *P. oxalicum* CBMAI 1996 por 21 dias. (a) Padrão da progesterona. (b) Padrão da 15 β -hidroxipregesterona. (c) Padrão da 7 β ,15 β -di-hidroxipregesterona. (d) Reação em 1 dia. (e) Reação em 7 dias. (f) Reação em 14 dias. (g) Extrato final/total da reação (21 dias).

A partir dos dados obtidos das reações de biotransformação da progesterona com o *P. oxalicum* CBMAI 1996, observou-se que com caldo enzimático obteve-se majoritariamente o produto mono-hidroxilado (15-hidroxipregesterona) com conversão de 44% no 13º dia (Tabela 2, Figura 4). Ao avaliar os dados da reação em meio aos micélios/ esporos, observou-se a formação do composto 15-hidroxipregesterona no primeiro dia de reação (24 h), com concomitante decaimento do pico (13,7 min) referente a progesterona. O surgimento do pico (14,0 min) referente à formação do composto di-hidroxilado (7,15-di-hidroxipregesterona) ocorreu no 3º dia e evoluiu de forma crescente até o 14º dia de reação, a partir do qual se manteve estável até se completar os 21 dias (Tabela 3, Figura 5).

Na reação com os micélios/esporos a concentração relativa do produto mono-hidroxilado atingiu um valor de 58%, a partir do 4º dia. Porém, após este período passou a decair, constatando que este composto poderia ser um intermediário da reação na formação produto di-hidroxilado. Observou-se ainda que no 8º dia de reação todo o substrato (progesterona) foi biotransformado pelo *P. oxalicum* CBMAI 1996 (Tabela 3, Figura 5).

Concluiu-se que através deste conjunto de reações que o aumento do tempo de reação em meio micelial/esporos de 14 dias para 21 dias não promoveu uma melhoria no rendimento do produto di-hidroxilado. Constatou-se também que em 4 dias de reação, com o uso da massa micelial fúngica, obteve-se um rendimento relativo de 58% para o composto mono-hidroxilado, ou seja, 15% mais eficiente do que a reação com caldo enzimático, que levou 14 dias para obter uma conversão de 44% (Tabelas 3 e 4, Figuras 4 e 5).

Ao final das reações de biotransformação da progesterona (caldo enzimático e micélios/espores) com o fungo *P. oxalicum* CBMAI 1996 realizaram-se as extrações com acetato de etila (Figura 6). Os extratos finais obtidos foram purificados por cromatografia em coluna cromatográfica, cuja fase estacionária foi composta de sílica gel de porosidade de 230-400 mesh. A fase móvel se iniciou com uma mistura de hexano e acetato de etila (7:1), que com o decorrer da eluição dos compostos foi sendo enriquecida na composição de acetato de etila até ser composta de 100%.

O processo de purificação por cromatografia em coluna foi monitorado por cromatografia em camada delgada (CCD), utilizando cromatofolhas em alumínio (TLC Sílica Gel 60 F₂₅₄ Merck) a fim de se verificar os possíveis grupos de frações semelhantes que continham os compostos de biotransformação para serem reunidos. Uma vez determinados estes grupos de frações por CCD, foram analisadas por CG-EM e as frações obtidas com os produtos 7 β ,15 β -di-hidroxiprogesterona e 15 β -hidroxiprogesterona foram pesadas e os rendimentos foram determinados. As amostras foram dissolvidas em clorofórmio deuterado (CDCl₃) e analisadas por RMN de ¹H (400 MHz) e RMN de ¹³C (100 MHz) (Tabelas 4 e 5, Figuras 7 e 8).

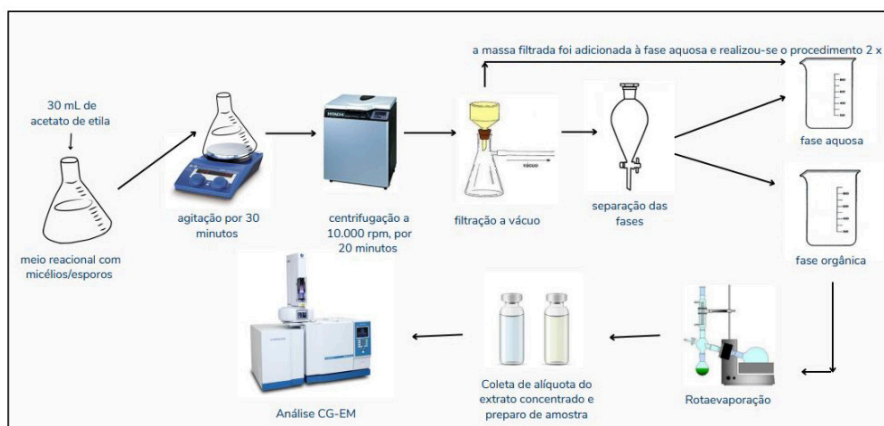


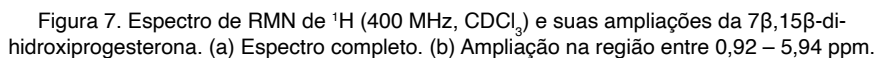
Figura 6. Etapas do processo de extração dos compostos hidroxilados nas reações de biotransformação da progesterona com o fungo *Penicillium oxalicum* CBMAI 1996.

Fonte: Lígia Breda e Vasconcelos.

2.1 Caracterização dos produtos de biotransformação da progesterona

Os espectros de RMN de ¹H e de ¹³C dos produtos isolados foram interpretados e comparados com os espectros da progesterona. Observou-se, a presença coincidente de todos os picos característicos dos carbonos da progesterona, exceto àqueles referentes aos carbonos onde ocorreu(ram) a(s) hidroxilação (ões), que apresentaram valores com deslocamentos químicos específicos devidos às inserções dos grupos hidroxilas (Figuras 7 e 8).

A caracterização espectral completa dos compostos mono-hidroxilado e di-hidroxilado por Ressonância Magnética Nuclear, Infravermelho e Espectrometria de Massas encontram-se na literatura^{[21],[23],[29]}.



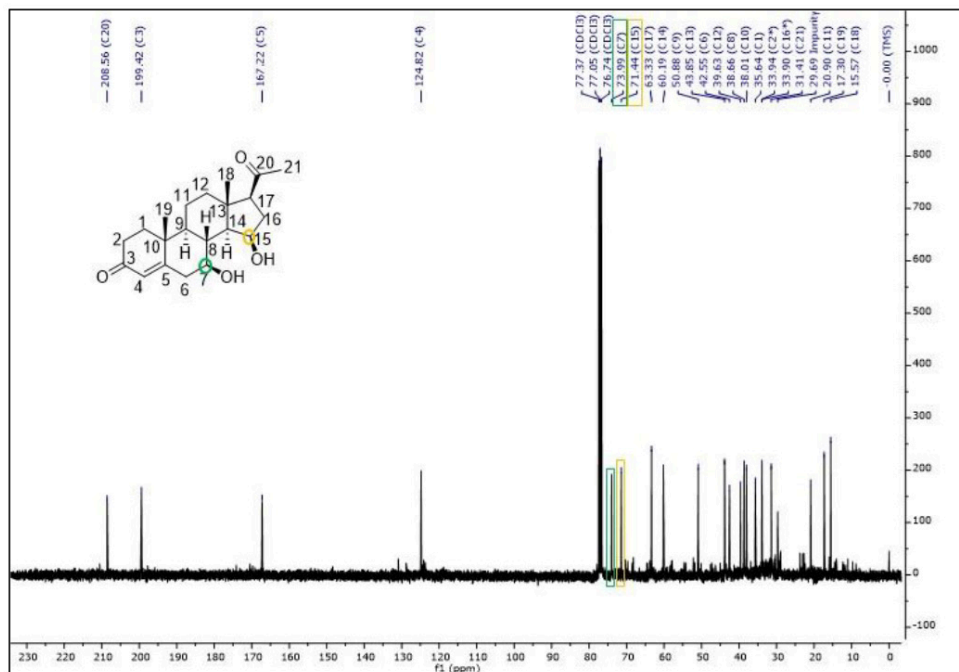


Figura 8. Espectro de RMN de ^{13}C (100 MHz, CDCl_3) da 7 β ,15 β -di-hidroxiprogesterona.

Numeração do carbono segundo IUPAC/IUBMB	δ_{H} da Progesterona (ppm)	δ_{H} 15 β -Hidroxiprogesterona (ppm)	δ_{H} 7 β ,15 β -di-Hidroxiprogesterona (ppm)
1 α	1,71 (m)	1,74 (dd; 4,8, 13,2)	1,68 (d; 4,1)
1 β	2,03 (dd; 3,3, 5,1)	2,05 (m)	2,04 (m)
2 α	2,33 (m)	2,33 (m)	2,41 (m)
2 β	2,45 (m)	2,41 (dd; 4,9)	2,44 (m)
4	5,76 (s)	5,75 (s)	5,77 (m)
6 α	2,32 (ddd; 4,1, 5,5, 14,7)	2,38 (m)	2,55 (m)
6 β	2,40 (m)	2,49 (m)	2,55 (m)
7 α	1,08 (ddd; 1,2, 4,4, 12,7)	1,14 (dd; 4,0, 13,5)	3,63 (ddd; 6,6, 9,7 9,7)
7 β	1,85 (m)	2,15 (m)	-
8 β	1,55 (ddd; 3,8, 8,3 10,8)	2,05 (m)	2,02 (m)
9 α	0,99 (m)	1,05 (m)	1,06 (m)
11 α	11,63 (m)	1,64 (m)	1,70 (m)
11 β	11,44 (m)	1,52 (m)	1,59 (m)
12 α	1,48 (m)	1,47 (m)	1,40 (m)
12 β	2,07 (m)	2,05 (m)	2,04 (m)
14 α	1,14 (m)	1,05 (m)	1,14 (dd; 5,6, 10,8)
15 α	1,71 (m)	4,32 (ddd; 3,1, 6,0, 6,1)	4,47 (m)

15 β	1,28 (m)	-	-
16 α	1,68 (m)	2,26 (m)	2,34 (m)
16 β	2,18 (m)	2,26 (m)	2,27 (m)
17 α	2,54 (t; 8,6)	2,49 (m)	2,44 (m)
18	0,67 (s)	0,94 (s)	0,97 (m)
19	1,19 (s)	1,22 (m)	1,25 (m)
21	2,13 (s)	2,15 (m)	2,14 (s)

* As multiplicidades dos sinais foram descritas como: “s” para singlete; “t” para tripleto; “dd” para duplo-dublete; “ddd” para duplo-duplo-dublete; “m” para multiplete. Os valores dispostos após a indicação da multiplicidade referem-se às constantes de acoplamento em Hz.

Tabela 4. Dados de RMN de ^1H (400 MHz, CDCl_3) da progesterona, da 15 β -hidroxiprogesterona e da 7 β ,15 β -di-hidroxiprogesterona.

Numeração do carbono segundo IUPAC/IUBMB	δ_c da Progesterona (ppm)	δ_c 15 β -Hidroxiprogesterona (ppm)	δ_c 7 β ,15 β -di-Hidroxiprogesterona (ppm)
1	35,6	35,7	35,7
2	34,0	33,9	33,9
3	199,4	199,4	199,1
4	123,9	123,9	125,0
5	170,9	170,9	166,5
6	32,8	32,7	42,6
7	32,0	31,1	74,3
8	35,6	31,7	38,6
9	53,7	54,0	50,9
10	38,7	38,7	38,0
11	21,0	20,9	20,8
12	28,6	40,12	39,6
13	43,9	43,6	43,9
14	56,0	60,3	60,1
15	24,4	70,2	71,6
16	22,9	36,2	34,2
17	63,5	63,7	63,3
18	13,3	15,9	15,6
19	17,4	17,3	17,3
20	209,3	208,1	208,3
21	31,5	31,3	31,4

Tabela 5. Dados de RMN de ^{13}C (100 MHz, CDCl_3) da progesterona, da 15 β -hidroxiprogesterona e da 7 β ,15 β -di-hidroxiprogesterona.

Ao final desse processo, obteve-se cristais dos produtos isolados das respectivas frações, os quais foram submetidos para as análises de Raios-X em colaboração com o Prof. Dr. Javier Alcides Ellena (IFSC-USP), coordenador do Laboratório Multiusuário de Cristalografia Estrutural (LaMuCrEs) que integra o Grupo de Cristalografia do Instituto de Física de São Carlos (IFSC). Os dados inéditos de cristalografia de Raios-X para os compostos 15 β -hidroxiprogesterona e 7 β ,15 β -di-hidroxiprogesterona serão publicados em um periódico específico.

As enzimas envolvidas nas reações de hidroxilação da progesterona nos carbonos C-7 e C-15, não são totalmente elucidadas na literatura. Em geral, trata-se de hidroxilação enzimática de carbonos não ativados eletronicamente nos esteroides. As enzimas envolvidas são monoxigenases do citocromo P-450, como a esteroide 15 β -monoxigenase EC 1.14.15.8, que produz a 15 β -hidroxiprogesterona^[21].

2.2 Avaliação da lipofilicidade e ecotoxicidade da 15 β -hidroxiprogesterona e da 7 β ,15 β -di-hidroxiprogesterona

O efeito de um composto químico sobre um determinado organismo pode ser agudo, quando sua dose letal é liberada em um único evento e rapidamente absorvida, ou crônico, quando o composto é liberado em eventos periodicamente sucessivos, em doses subletais, durante um determinado período de tempo^[31].

A toxicidade de compostos é avaliada a partir das taxas de mortalidade, de imobilização ou de inibição de crescimento, dos indivíduos a eles expostos^[32]. Enquanto a ecotoxicidade avalia os efeitos que os compostos químicos apresentam sobre um ecossistema, considerando suas interações entre os indivíduos, as comunidades e as populações, inclusive ao homem. Compreende-se, dessa forma, como a molécula estudada (matéria e energia) interage com toda a cadeia trófica que coexiste no ambiente em que se encontra.

A partir das ferramentas computacionais do *site* “Chemicalize”^[33], estimou-se o logaritmo do coeficiente de partição octanol/água ($\log K_{ow}$) da progesterona e dos produtos de biotransformação obtidos nesse estudo (15 β -hidroxiprogesterona e 7 β ,15 β -di-hidroxiprogesterona). Esse coeficiente refere-se à razão entre a afinidade que um composto apresenta entre um meio orgânico e o meio aquoso. Quanto maior este valor, maior é a afinidade de uma molécula pelo octanol (composto apolar) e, conseqüentemente, mais lipofílica e bioacumulativa é o composto. Pela análise dos dados obtidos, pode-se concluir que a biotransformação promoveu uma diminuição da lipofilicidade. Os produtos mono-hidroxilado e di-hidroxilado foram aproximadamente 20 e 420 vezes menos lipofílicos, respectivamente, do que a progesterona (Tabela 6).

Composto	log K_{ow}
Progesterona	4,15
15 β -Hidroxiprogesterona	2,84
7 β ,15 β -Hidroxiprogesterona	1,53

Tabela 6. Dados de log de K_{ow} da progesterona e de seus produtos de biotransformação com o fungo *Penicillium oxalicum* CBMAI 1996^[32].

Chemaxon. Chemicalize. “Disponível em: <https://chemicalize.com/app/calculation>”. “Acesso em: 07/06/2023.”

Com o auxílio do Programa ECOSAR 2.0 (*Ecological Structure Activity Relationships*) da EPA (*United States - Environmental Protection Agency*; Em português -Agência de Proteção Ambiental dos Estados Unidos), foram realizadas simulações da ecotoxicidade dos compostos mono-hidroxilado e di-hidroxilado (Figura 9)^[34]. O programa gera dados baseando-se no efeito causado em uma cadeia trófica, a partir de algas verdes (produtores) dafnídeos (espécie de crustáceos pequenos, consumidores primários) peixes (consumidores secundários).

Primeiramente, obtiveram-se os valores dos efeitos agudos: EC_{50} (em $mg\ L^{-1}$), a concentração do composto capaz de gerar efeitos tóxicos a 50% dos indivíduos testados (algas verdes) e LC_{50} (em $mg\ L^{-1}$), a concentração letal para 50% dos indivíduos testados (dafnídeos e peixes). Em seguida, obtiveram-se os ChV, ou seja, as concentrações dos compostos capazes de causar efeitos crônicos estatisticamente significativos^[35].

Pôde-se inferir com a simulação, que a biotransformação da progesterona promoveu uma diminuição do seu efeito ecotóxico (Figura 9). A 15 β -hidroxiprogesterona e a 7 β ,15 β -hidroxiprogesterona foram, aproximadamente, 10 e 100 vezes menos ecotóxicos (ecotoxicidade aguda), respectivamente, do que a progesterona. Em relação à ecotoxicidade crônica, observou-se, aproximadamente, o mesmo cenário. Como esperado, as concentrações estimadas que causam efeitos crônicos foram bem menores do que as necessárias para causar os efeitos agudos.

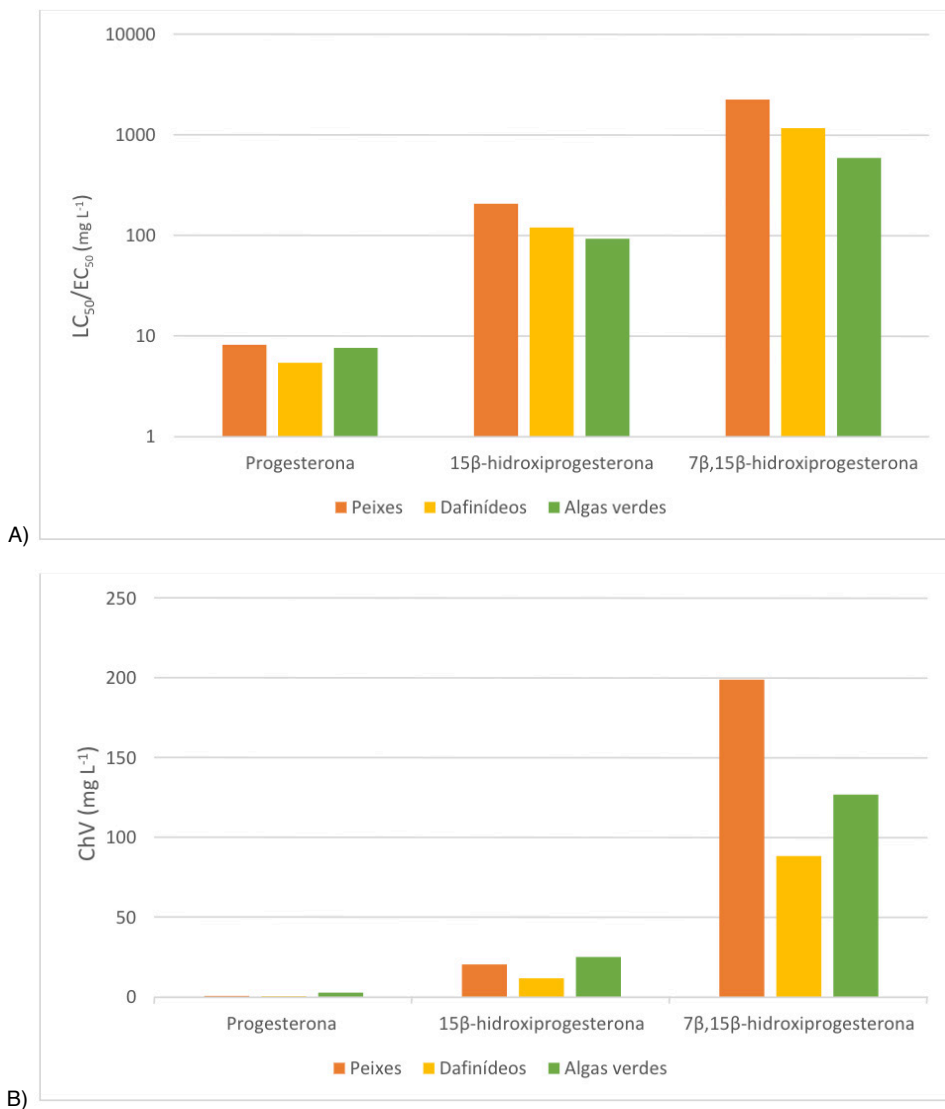


Figura 9. Simulação de ecotoxicidade da progesterona e seus produtos de biotransformação pelo programa ECOSAR 2.0. (A) Ecotoxicidade aguda. (B) Ecotoxicidade crônica.

3 | CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

Pequenas mudanças em moléculas com uma atividade biológica intensa, como os esteroides, podem promover diversos resultados. As progestinas, derivadas da progesterona, são muito mais utilizadas em fármacos que a própria progesterona, devido ao aumento de sua biodisponibilidade e a forma como interagem com os receptores nos organismos. Dessa forma, os estudos de biotransformação podem levar a obtenção de moléculas com novas propriedades biológicas.

O emprego de fungos em reações de biotransformação, como o *P. oxalicum* CBMAI 1996 foi promissor em nossos estudos frente ao esteroide progesterona. Tratam-se de reações altamente específicas e seletivas, pois são catalisadas por enzimas e que apresentam um amplo potencial biotecnológico, uma vez que funcionalizaram carbonos não reativos eletronicamente (hidridação sp^3).

Vale ressaltar que as reações de biotransformação, na maioria das vezes, ocorrem à temperatura ambiente e em meio aquoso. Com isso o estudo da reação de biotransformação se mostra como potencial para a Química Verde e para a obtenção de novos compostos de difícil obtenção por vias químicas sintéticas.

A partir destes estudos sugere-se que a progesterona pode continuar sendo biotransformada no meio ambiente, formando derivados hidroxilados. Assim, o fungo *P. oxalicum* CBMAI 1996 está sendo capaz de metabolizar a progesterona em derivados com menor potencial de bioacumulação e com menores efeitos tóxicos ao ecossistema.

A atividade biológica dos derivados de biotransformação obtidos neste estudo será avaliada em trabalhos futuros. E, as análises de raios-X, dos produtos de biotransformação foram obtidos, confirmando inequivocamente suas estruturas, bem como a estereoquímica absoluta dos centros estereogênicos formados, cujos dados serão publicados na literatura científica.

AGRADECIMENTOS

LBV agradece à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP, Proc. N0. 2021/13179-5) pela bolsa de Iniciação Científica, período de 01/01/2022 a 30/06/2023.

SFP agradece à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES, Finance Code 001, Proc.133633/2014-4).

ALMP agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq/Proc. 301987/2013-0) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP/Proc. 2016/20155-7) pelo financiamento da pesquisa e bolsa de estudos.

Os autores agradecem ao Professor Eduardo A. Bessa (IQSC) pelos cálculos dos estudos de ecotoxicidade e ao Professor Roberto G. S. Berlink pela doação da linhagem fúngica de *P. oxalicum* CBMAI 1996.

REFERÊNCIAS

[1] ARAUJO, A. B. R, *et. al.* ANTICONCEPCIONAIS HORMONAIS CONTENDO APENAS PROGESTÁGENOS E SEUS PRINCIPAIS EFEITOS. **Brazilian Journal of Surgery and Clinical Research**, Belo Horizonte – Minas Gerais, Brasil, vol. 15, No. 1, 75-81, Agosto de 2016.

- [2] GARCÍA, J. L., *et.al.* Biotransformación de esteroides con diferentes microorganismos. **Revista Mexicana de Ciências Farmacêuticas**. Delegación Iztapalapa, México, vol. 46, 1, 17-32, abril de 2015.
- [3] ORIZABA-CHÁVEZ, B; *et. al.* Farmacocinética de la progesterona. **Revista Hospital Juarez México**, México, vol. 60, No. 1, 59-66, 2013.
- [4] CAVICHIOLO, C; *et. al.* EFEITOS DA SUPLEMENTAÇÃO DE PROGESTERONA PÓS INSEMINAÇÃO ARTIFICIAL EM TEMPO FIXO NA TAXA DE GESTAÇÃO EM VACAS DA RAÇA NELORE. **VIII Mostra Interna de Trabalhos de Iniciação Científica**, Maringá, Paraná, Brazil, 2016.
- [5] BATISTA, C. S. Progesterona e progestágenos: síntese, classificação e uso. **Feminina**, vol. 32, No. 8, 639-644, setembro de 2004.
- [6] WATKINS, J. B., KLAASSEN, C. D. Induction of UDP-glucuronosyltransferase activities in guinea, heterozygous, and wistar rat livers by pregnenolone-6 α -carbonitrile. **Drug Metabolism and Disposition**, The American Society for Pharmacology and Experimental Therapeutics, United States, vol. 10, No. 6, 590-595, 1982.
- [7] REGIDOR, P. A. The clinical relevance of progestogens in hormonal contraception: present status and future developments. **Oncotarget**, Ismaning, Germany, vol. 9, No. 77, 34628-34638, 2018.
- [8] LIU, J. H. What providers need to know about progestogens in hormone therapy. **The Journal of The North American Menopause Society**, Cleveland, Estados Unidos, vol. 28, No. 3, 325-326, 2020.
- [9] **The 2022 hormone therapy position statement of The North American Menopause Society.** The Journal of The North American Menopause Society, United States, vol. 29, No. 7, 767-794, 2022.
- [10] HERMANN, A.; *et. al.* Efeito na saúde humana causados pela exposição a 17 β -estradiol e 17 α -etinilestradiol. Em: ARMAS, R. D. e SAFI, D. C. **Atuação do Biomédico e Nutricionista na Atenção Integral à Saúde**. Epitaya E-Books, cap.11, vol. 1, No. 27, 150-162, 2023.
- [11] TARABORRELL, S. Physiology, production and action of progesterone. **ACTA Obstetricia et Gynecologica**, Bologna, Itália, vol. 94, 8-16, 2015.
- [12] BRANDT, G. P.; DE OLIVEIRA, A. P. R.; BURCI, L. M. Anticoncepcionais hormonais na atualidade: um novo paradigma para o planejamento familiar. **Revista Gestão & Saúde**, Rio Grande do Sul, vol. 18, No. 1, p. 54-62, 2018.
- [13] NETO, O. P. P. **Avaliação do efeito dos desreguladores endócrinos 17 β estradiol e 17 α -etinilestradiol no desenvolvimento da tilápia do Nilo (*Piscis*)**. Tese para obtenção do título de doutor em Engenharia Civil, área de saneamento ambiental. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brasil, 2020.
- [14] NAZ, R. *et. al.* Assessment of phytoremediation potential of native plant species naturally growing in a heavy metal-polluted industrial soils. **Brazilian Journal of Biology**. Pasqu Coast, vol. 84, 2022.
- [15] ACS, A.; *et. al.* Chronic effects of carbamazepine, progesterone and their mixtures at environmentally relevant concentrations on biochemical markers of zebrafish (*Danio rerio*). **Antioxidants**, Péter Károly, Hungria, vol. 11, No. 1776, 2022.

- [16] YING, G.; KOOKANA, R. S.; RU, Y. Occurrence and fate of hormone steroids in the environment. **Environment International**, vol. 28, p. 545-551, 2002.
- [17] BAIRD, C.; CANN, M. Pesticides. In: **Environmental Chemistry**. New York - USA, W. H. Freeman and Company, v. 1, cap. 10, p. 415-468, ed.4, 2000.
- [18] DA CÂMARA, A. G. **Avaliação da degradação de princípio ativo de anticoncepcional feminino via persulfato de sódio ativado por UV**. 2016. Trabalho de conclusão de curso para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Química (Bacharelado em Engenharia Química) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Engenharia Química, Rio Grande do Sul, 2016.
- [19] SEBEN, D. Avaliação de variáveis de qualidade de água e contaminantes ambientais emergentes em águas de consumo humano no Rio Grande do Sul. Dissertação para obtenção do título de Mestre na área de ciência e tecnologia ambiental. Universidade Federal de Santa Maria, Frederico Westpha, Rio Grande do Sul, Brasil, 2020.
- [20] PARSHIKOV, I. A.; *et. al.* Biotransformation of steroids and flavonoids by cultures of *Aspergillus niger*. **Biochemistry and Biotechnology**, Nova York, United States, vol. 176, 903-923, 2015.
- [21] DE PAULA, S. F. C. **Estudo da ocorrência de reações de bio-oxidação dos esteroides progesterona e 17(alfa)-etinil estradiol por fungos de ambiente marinho**. Dissertação para obtenção de título de Mestre em Ciências (Mestre em Química) - Instituto de Química da São Carlos - USP, São Carlos, 2016.
- [22] LENARDÃO, E. J. *et al.* "Green Chemistry" – Os 12 princípios da química verde e sua inserção nas atividades de ensino e pesquisa. **Química Nova**, vol. 26, p. 123-129, 2003.
- [23] DE PAULA, S. F. C.; PORTO, A. L. M. Cascade reactions of progesterone by mycelia and culture broth from marine - derived fungus *Aspergillus sydowii* CBMAI 935. **Biocatalysis and Agricultural Biotechnology**, São Carlos – SP, vol. 25, 2020.
- [24] SAVINOVA, O. S.; *et. al.* Biotransformation of progesterone by the *Ascomycete Aspergillus niger* N402. **Biochemistry**, Moscow, vol. 83, No. 1, 26-31, 2018.
- [25] HOSSEINABADI, T.; *et. al.* Biotransformation of progesterone by whole cells of filamentous fungi *Aspergillus brasiliensis*. **Iranian Journal of Pharmaceutical Research**, Iran, vol. 14, No. 3, 919-924, 2015.
- [26] SUI, L.; *et. al.* Functional reconstitution of a steroidal hydroxylase from the fungus *Thanatephorus cucumeris* in *Mycolicibacterium neoaurum* for 15 α -hydroxylation of progesterone. **Biochemical Engineering Journal**, China, vol. 193, 2023.
- [27] DOS SANTOS, H. P.; *et. al.* Oxidative potential of two Brazilian endophytic fungi from *Handroanthus impetiginosus* towards progesterone. **Steroids**, Salvador, Brasil, vol. 187, 2022.
- [28] HU, X.; *et. al.* Fate of progesterone and norgestrel in anaerobic/anoxic/oxic (A/A/O) process: Insights from biotransformation and mass flow. **Science of the Total Environment**, Jiangsu, China, vol. 856, 2022.

- [29] QUEIROZ, T. M. **Biotransformação de esteroides por fungos de ambiente marinho e semi-síntese da 'beta'-ceto-1,2,3-triazóis derivados de etinilestradiol**. Tese (Doutorado em Química Orgânica e Biológica) – Instituto de Química de São Carlos/Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2022.
- [30] DE PAULA, S. F. C.; ROSSET, I. G.; PORTO, A. L. M. Hydroxylated steroids in C-7 and C-15 positions from progesterone bio-oxidation by the marine-derived fungus *Penicillium oxalicum* CBMAI 1996. **Biocatalysis and Agricultural Biotechnology**, São Carlos – SP, Brasil, vol. 37, 2021.
- [31] SCHVARTSMAN, S. Intoxicações agudas. No. 4, 355p. São Paulo: Sarvier, 1991.
- [32] DOS SANTOS, P. R. **Aplicação de processos oxidativos e eletroquímicos avançados e avaliação de uma planta efotoeletroquímica solar no tratamento de água cinza**. Tese para obtenção do título de Doutor em Química, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, Brasil, 2023.
- [33] Chemaxon. Chemicalize. “Disponível em: <https://chemicalize.com/app/calculation>”. “Acesso em: 07/06/2023.”
- [34] LABRIOLA, V, F. *et. al.* Nutrifurantoin removal by the photo-Fenton process: Degradation, mineralization, and biological inactivation. **Environmental Technology**, São Carlos – SP, Brasil, 2023.
- [35] WRIGHT, R. T. *et. al.* **Operation manual... for the Ecological Structure-Activity Relationship Model (ECOSAR) Class Program**. MS-Windows Version 2.2. Washington, United States, 2022.

INTRODUÇÃO ÀS ÁGUAS SUBTERRÂNEAS: CONCEITOS E OCORRÊNCIAS NO BRASIL

Data de aceite: 03/07/2023

Thyago Anthony Soares Lima

Universidade Estadual de Feira de
Santana (UEFS)
<http://lattes.cnpq.br/1714186197608991>
<https://orcid.org/0000-0002-4607-2953>

Paulo de Tarso Amorim Castro

Universidade Federal de Ouro Preto
(UFOP)
<http://lattes.cnpq.br/7247198559551536>
<https://orcid.org/0000-0002-7667-0161>

RESUMO: Apresenta-se aqui uma introdução aos conceitos básicos das águas subterrâneas, descrevendo a ocorrência, o volume e a qualidade dessas águas, bem como o uso e a exploração das mesmas. São abordados os diferentes tipos de aquíferos e suas funções, além de se discutir as áreas de reabastecimento e descarga dos aquíferos. Apresenta-se ainda uma visão geral das principais ocorrências de aquíferos no Brasil. São apresentados conceitos teóricos fundamentais, como a definição de aquífero, recarga e descarga, bem como o papel da litologia na formação dos aquíferos. Este conteúdo é fundamental para o entendimento das águas subterrâneas como recurso hídrico,

fornecendo informações importantes para gestores públicos e privados, bem como para a população em geral, na busca por uma gestão adequada e sustentável dos recursos hídricos subterrâneos.

PALAVRAS-CHAVE: Águas Subterrâneas, Aquíferos, Hidrogeologia, Brasil

INTRODUCTION TO GROUNDWATER: CONCEPTS AND OCCURRENCES IN BRAZIL

ABSTRACT: Here is an introduction to the basic concepts of groundwater, describing the occurrence, volume, and quality of these waters, as well as their use and exploitation. The different types of aquifers and their functions are addressed, as well as the recharge and discharge areas of the aquifers. An overview of the main occurrences of aquifers in Brazil is also presented. Fundamental theoretical concepts are presented, such as the definition of aquifer, recharge and discharge, as well as the role of lithology in aquifer formation. This content is essential for understanding groundwater as a water resource, providing important information for public and private managers, as well as the general population, in the search for

adequate and sustainable management of groundwater resources.

KEYWORDS: Groundwater, Aquifers, Hydrology, Brazil

1 | ÁGUAS SUBTERRÂNEAS

A água subterrânea é toda a água que ocorre abaixo da superfície da Terra, preenchendo os poros ou vazios intergranulares das rochas sedimentares, ou as fraturas, falhas e fissuras das rochas compactas, e desempenha um papel essencial na manutenção da umidade do solo e do fluxo dos rios, lagos e brejos, estando envolvida em uma fase do ciclo hidrológico ao constituir uma parcela da água precipitada (Borghetti et al., 2004).

Após a precipitação, parte das águas que atinge o solo infiltra-se e percola no interior do subsolo, em períodos de tempo extremamente variáveis, que dependem de muitos fatores, tais como:

- **Porosidade do subsolo:** a presença de argila no solo diminui sua permeabilidade, não permitindo uma grande infiltração;
- **Cobertura vegetal:** um solo coberto por vegetação é mais permeável do que um solo desmatado;
- **Inclinação do terreno:** em declividades acentuadas a água corre mais rapidamente, diminuindo a possibilidade de infiltração;
- **Tipo de chuva:** chuvas intensas saturam rapidamente o solo, ao passo que chuvas finas e demoradas têm mais tempo para se infiltrarem.

Durante a infiltração, uma parcela da água fica retida nas regiões mais próximas da superfície do solo, constituindo a zona não saturada, enquanto outra parcela atinge as zonas mais profundas do subsolo, constituindo a zona saturada, sob a ação da força de adesão ou de capilaridade e da gravidade, respectivamente (Tundisi, 2005). Como é possível observar no modelo conceitual da Figura 1.

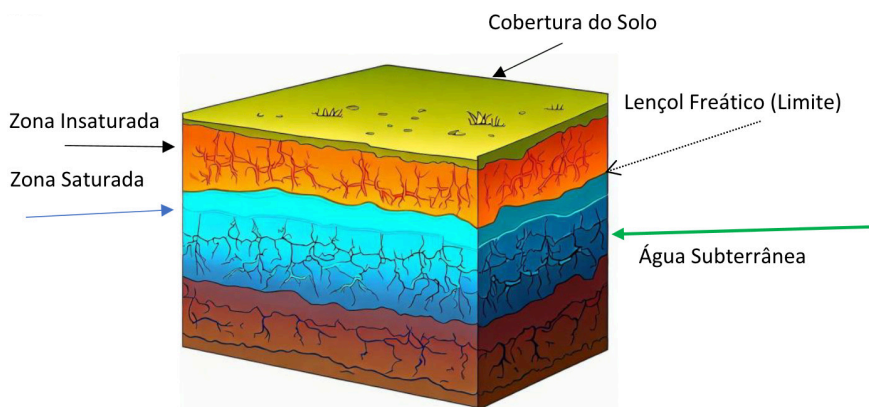


Figura 1- Modelo conceitual das zonas não saturada e saturada no subsolo.

Fonte: O autor.

Durante esse processo a água é mantida perto das partículas superficiais da rocha, pela atração molecular, sejam estas rochas sedimentares ou não. (Figura 2). O divisor limite do nível da linha de água, passa a ser chamado de lençol freático, e todas as aberturas abaixo deste limite estarão teoricamente cheias de águas subterrâneas.

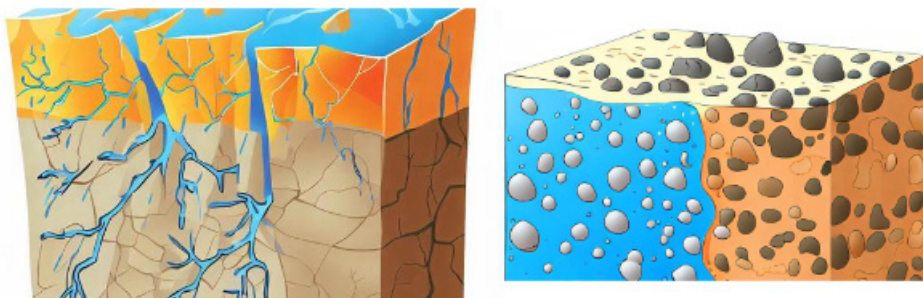


Figura 2 - Caracterização Esquemática do comportamento da Água em Zonas Saturadas.

Fonte: O Autor.

Zona Insaturada: Também chamada de zona não saturada, zona de aeração ou vadosa, é a parte do solo que está parcialmente preenchida por água. Nesta zona, pequenas quantidades de água distribuem-se uniformemente, sendo que suas moléculas aderem às superfícies dos grãos do solo. Nesta zona ocorrem os fenômenos de transpiração pelas raízes das plantas, filtração e autodepuração da água (Freeze et al., 1979). Dentro desta zona encontram-se:

- *Zona de umidade do solo:* é a parte mais superficial, onde a perda de água de adesão para a atmosfera é intensa. Em alguns casos, é muito grande a quantidade de sais que se precipitam na superfície do solo após a evaporação dessa água, dando origem a solos salinizados ou a crostas ferruginosas (lateríticas). Esta zona serve de suporte fundamental da biomassa vegetal natural ou cultivada da Terra e da interface atmosfera/litosfera (Freeze et al., 1979).
- *Zona intermediária:* região compreendida entre a zona de umidade do solo e a franja capilar, com umidade menor do que nesta última e maior do que a da zona superficial do solo. Em áreas onde o nível freático está próximo da superfície, a zona intermediária pode não existir, pois a franja capilar atinge a superfície do solo. São brejos e alagadiços, onde há uma intensa evaporação da água subterrânea (Freeze et al., 1979).
- *Franja de capilaridade:* é a região mais próxima ao nível d'água do lençol freático, onde a umidade é maior devido à presença da zona saturada logo abaixo (Freeze et al., 1979).

Zona saturada: é a região abaixo da zona não saturada onde os poros ou fraturas da rocha estão totalmente preenchidos por água. As águas atingem essa zona por

gravidade, através dos poros ou fraturas, até alcançar uma profundidade limite, onde as rochas estão tão saturadas que a água não pode penetrar mais. Para que haja infiltração até a zona saturada, é necessário primeiro satisfazer as necessidades da força de adesão na zona não saturada. Nessa zona, a água corresponde ao excedente de água da zona não saturada que se move em velocidades muito lentas (cm/dia), formando o manancial subterrâneo propriamente dito. Uma parcela dessa água irá desaguar na superfície dos terrenos, formando as fontes e os olhos d'água. A outra parcela desse fluxo subterrâneo forma o caudal basal que deságua nos rios, perenizando-os durante os períodos de estiagem, com uma contribuição multianual média da ordem de $13.000 \text{ km}^3/\text{ano}$ (Peixoto e Oort, 1990), ou deságua diretamente nos lagos e oceanos. A superfície que separa a zona saturada da zona de aeração é chamada de nível freático, ou seja, esse nível corresponde ao topo da zona saturada (IGM, 2001).

Dependendo das características climatológicas da região ou do volume de precipitação e escoamento da água, esse nível pode permanecer permanentemente a grandes profundidades ou se aproximar da superfície horizontal do terreno, originando as zonas encharcadas ou pantanosas, ou convertendo-se em mananciais (nascentes) quando se aproxima da superfície através de um corte no terreno (Rebouças, 1996).

2 | OCORRÊNCIA E VOLUME DAS ÁGUAS SUBTERRÂNEAS

Assim como a distribuição das águas superficiais é muito variável, a das águas subterrâneas também o é, uma vez que elas se inter-relacionam no ciclo hidrológico e dependem das condições climatológicas. Entretanto, as águas subterrâneas ($10.360.230 \text{ km}^3$) são aproximadamente 100 vezes mais abundantes do que as águas superficiais dos rios e lagos (92.168 km^3). (WSS 2019).

Embora estejam armazenadas nos poros e fissuras milimétricas das rochas, as águas subterrâneas ocorrem em grandes extensões, gerando volumes significativos de água subterrânea da ordem de aproximadamente $23.400.000 \text{ km}^3$, distribuídos em uma área aproximada de 134,8 milhões de km^2 (Shiklomanov, 1998; Hanasaki et al., 2020), constituindo-se em importantes reservas de água doce.

Alguns especialistas indicam que a quantidade de água subterrânea pode chegar a até 60 milhões de km^3 , mas sua ocorrência em grandes profundidades pode impossibilitar seu uso. Por essa razão, a quantidade passível de ser captada estaria a menos de 4.000 metros de profundidade, compreendendo cerca de 8 e 10 milhões de km^3 (CEPIS, 2000), que, segundo Rebouças et al. (2002), estaria assim distribuída: 65.000 km^3 constituindo a umidade do solo; 4,2 milhões de km^3 desde a zona não-saturada até 750 m de profundidade e 5,3 milhões de km^3 de 750 m até 4.000 m de profundidade, constituindo o manancial subterrâneo.

Além disso, a quantidade de água capaz de ser armazenada pelas rochas e pelos materiais não consolidados em geral depende da porosidade dessas rochas, que pode chegar a até 45% (IGM, 2001), da comunicação desses poros entre si ou da quantidade e tamanho das aberturas de fraturas existentes.

No Brasil, de acordo com o Ministério do Meio Ambiente (2021), as reservas de água subterrânea são estimadas em 110.000 km³ (110 trilhões de m³) e a contribuição multianual média à descarga dos rios é da ordem de 2.850 km³/ano. Nem todas as formações geológicas possuem características hidrodinâmicas que possibilitem a extração econômica de água subterrânea para atendimento de médias e grandes vazões pontuais. As vazões já obtidas por poços variam, no Brasil, desde menos de 1 m³/h até mais de 2.000 m³/h (ANA, 2021).

3 | QUALIDADE DAS ÁGUAS SUBTERRÂNEAS

Durante o percurso em que a água percola entre os poros do subsolo e das rochas, ocorre a depuração da mesma por meio de uma série de processos físico-químicos (troca iônica, decaimento radioativo, remoção de sólidos em suspensão, neutralização de pH em meio poroso, entre outros) e bacteriológicos (eliminação de micro-organismos devido à ausência de nutrientes e oxigênio que os viabilizem), que atuam sobre a água, modificando as suas características adquiridas anteriormente e tornando-a particularmente mais adequada para o consumo humano (Silva, 2003; Albuquerque et al., 2020).

Sendo assim, a composição química da água subterrânea é o resultado combinado da composição da água que entra no solo e da evolução química influenciada diretamente pelas litologias atravessadas. O teor de substâncias dissolvidas nas águas subterrâneas aumenta à medida que elas se movem (SMA, 2003; Sousa et al., 2018).

As águas subterrâneas apresentam algumas propriedades que tornam o seu uso mais vantajoso em relação ao das águas dos rios: são filtradas e purificadas naturalmente por meio da percolação, o que determina excelente qualidade e dispensa tratamentos prévios; não ocupam espaço em superfície; sofrem menor influência das variações climáticas; são passíveis de extração perto do local de uso; possuem temperatura constante; têm maior quantidade de reservas; necessitam de custos menores como fonte de água; suas reservas e captações não ocupam área superficial; apresentam grande proteção contra agentes poluidores; o uso do recurso aumenta a reserva e melhora a qualidade; possibilitam a implantação de projetos de abastecimento à medida da necessidade (Werege, 1997; ABAS, 2016).

4 | USO E EXPLORAÇÃO DAS ÁGUAS SUBTERRÂNEAS

A busca por água subterrânea continua sendo uma prática importante na atualidade, devido à crescente demanda de água e à necessidade de garantir a segurança hídrica.

Os habitantes continuam buscando fontes alternativas, como poços e furos profundos (Trimmer, 2000; Foster et al., 2018). A exploração de água subterrânea é condicionada a fatores quantitativos, qualitativos e econômicos (Howard, 2017; Leal, 1999), como:

- **Quantidade:** influenciada pela taxa de recarga dos aquíferos e pelas características hidráulicas dos terrenos;
- **Qualidade:** influenciada pela composição das rochas, pela presença de contaminantes e pelas condições climáticas e de renovação das águas;
- **Econômico:** depende do custo da perfuração de poços, da profundidade do aquífero, da qualidade da água e das condições de bombeamento.

O uso de águas subterrâneas é uma prática antiga e sua evolução tem acompanhado a própria evolução da humanidade. As técnicas de construção de poços e métodos de bombeamento têm sido aprimoradas ao longo do tempo, possibilitando a extração de água em volumes e profundidades cada vez maiores, atendendo às demandas de cidades, indústrias, projetos de irrigação, entre outros (Foster et al., 2018).

A relação entre a demanda e o uso varia entre os países e, dentro deles, de região para região. No entanto, em geral, o abastecimento público continua sendo a maior demanda individual por água subterrânea (PROASNE, 2003; Barlow et al., 2019).

Praticamente todos os países do mundo, desenvolvidos ou não, utilizam água subterrânea para suprir suas necessidades. Países como Alemanha, Áustria, Bélgica, Dinamarca, França, Holanda, Hungria, Itália, Marrocos, Rússia e Suíça atendem de 70% a 90% da demanda para o abastecimento público (Margat e Van der Gun, 2013). Outros países utilizam a água subterrânea para atender a todas as suas necessidades (como Dinamarca, Arábia Saudita e Malta) ou apenas como suplemento para o abastecimento público e atividades como irrigação, produção de energia, turismo e indústria. Na Austrália, 60% do país depende totalmente do manancial subterrâneo e em mais de 20% o seu uso é predominante. Na região metropolitana da Cidade do México, cerca de 80% da demanda dos quase 20 milhões de habitantes é atendida (Margat e Van der Gun, 2013).

De acordo com a UNESCO (2021), cerca de 2 bilhões de pessoas dependem da água subterrânea para sobreviver em todo o mundo. Regiões áridas e semiáridas, bem como algumas ilhas, têm a água subterrânea como sua única fonte hídrica disponível para uso humano. Mesmo regiões desérticas, como a Líbia, atendem à demanda de água em cidades e na irrigação por meio de poços tubulares perfurados no Saara (UNESCO, 2021).

De acordo com a FAO (2021), estima-se que foram perfurados mais de 500 milhões de poços no mundo, a maioria dos quais nos países em desenvolvimento, para fins de irrigação e abastecimento doméstico. Nos Estados Unidos, por exemplo, são perfurados cerca de 150 mil poços por ano, com uma extração de cerca de 100 bilhões de m³/ano, atendendo a mais de 40% do abastecimento público e das indústrias (USGS, 2021). Em todo o mundo, cerca de 340 bilhões de toneladas de água são retiradas anualmente na

África do Norte, China, Índia, Estados Unidos e Arábia Saudita, e não se renovam. Essa água poderia produzir comida suficiente para alimentar mais de 1 bilhão de pessoas por ano (Shah, 2016).

A busca intensa por água, sobretudo potencializada pela expansão das áreas agrícolas tem provocado o uso intenso das águas subterrâneas, além das fontes superficiais. Existem diversos exemplos no mundo de esgotamento de aquíferos por sobreexploração para uso em irrigação (Gleick, 2020). Estima-se que existam no mundo 350 milhões de hectares irrigados com água subterrânea, sendo 21 milhões desses nos Estados Unidos e 70 milhões na Índia (FAO, 2021).

No que se refere ao Brasil, vários núcleos urbanos dependem da água subterrânea como recurso principal ou complementar, incluindo indústrias, propriedades rurais, escolas, hospitais e outros estabelecimentos que utilizam água de poços profundos com frequência. O abastecimento público também é bastante dependente dessa fonte de água, e importantes cidades brasileiras, como Ribeirão Preto (SP), Mossoró e Natal (RN), Maceió (AL), Região Metropolitana de Recife (PE) e Barreiras (BA), dependem integral ou parcialmente da água subterrânea para seu abastecimento (ANA, 2022).

Portanto, a gestão sustentável dos recursos hídricos subterrâneos é essencial para garantir a segurança hídrica no país. As águas subterrâneas desempenham um papel fundamental no abastecimento de muitas cidades brasileiras, sendo que em alguns estados, como o Maranhão, São Paulo e Piauí, a dependência dessas águas chega a atingir percentuais superiores a 70% e 80%. Além de fornecer água potável, as águas subterrâneas também apresentam outras características únicas, como a presença de águas termais, que estimulam o turismo em cidades como Caldas Novas em Goiás, Araxá e Poços de Caldas em Minas Gerais. Outro uso importante das águas subterrâneas é a utilização da água mineral pelas populações dos centros urbanos devido à sua alta qualidade (ANA, 2022).

Mesmo em áreas com elevado teor salino, como nas regiões de ocorrência dos sistemas aquíferos fissurados do semiárido nordestino, as águas subterrâneas muitas vezes são a única fonte de suprimento permanente, apesar dos desafios associados ao seu uso (Oliveira et al., 2019).

Segundo o Censo do IBGE de 2010, aproximadamente 53% da população brasileira é abastecida, para fins domésticos, com água subterrânea, sendo que 5% se auto-abastece das águas de poços rasos, 10% de nascentes ou fontes e 38% de poços profundos. Portanto, o número de poços tubulares em operação no Brasil está estimado em cerca de 450.000, com um número anual de perfurações de aproximadamente 15.000, o que pode ser considerado insuficiente diante das necessidades de água potável das populações e se comparado com outros países (ANA, 2022). Os estados com maior número de poços perfurados são São Paulo (60.000), Bahia, Rio Grande do Sul, Ceará e Piauí (Oliveira et al., 2019).

A exploração de água subterrânea é realizada de várias maneiras, variando de métodos tradicionais a modernos. Tais métodos estão se desenvolvendo todos os dias através de novos meios e dispositivos. A utilização de tecnologias como a geofísica, que emprega técnicas como eletrorresistividade, sísmica de reflexão, sísmica de refração, entre outras, tem ganhado cada vez mais espaço na exploração de água subterrânea (ANA, 2022).

A exploração de água subterrânea é realizada de várias maneiras, variando de métodos tradicionais a modernos. Tais métodos estão em constante desenvolvimento através de novos meios e dispositivos. A utilização de tecnologias como a geofísica, que emprega técnicas como eletrorresistividade, sísmica de reflexão, sísmica de refração, entre outras, tem ganhado cada vez mais espaço na exploração de água subterrânea (ANA, 2022; Meijirik, 2007)

Várias técnicas podem ser utilizadas para explorar os recursos hídricos subterrâneos. A perfuração de teste e a análise estratigráfica são os métodos mais confiáveis e padrão para determinar a localização de um poço e a espessura da unidade aquífera (Sophocleous, 2018; Madan et al., 2010). No entanto, esses métodos de investigação da água subterrânea não são eficazes em termos de tempo e custo, e muitas vezes exigem habilidades específicas (Sophocleous, 2018; Roscoe, 1990; Fetter, 1994).

As técnicas de prospecção geofísica também têm sido utilizadas por vários pesquisadores para explorar os recursos hídricos subterrâneos em diferentes tipos de terreno geológico (Singh et al., 2017; Zhao et al., 2021; Ako et al., 1989; Amadi et al., 1990; Olorunfemi et al., 1995; Olayinka et al., 2001 e Adiat et al., 2009). No entanto, devido à falta de precisão de uma análise no local, os resultados e interpretações de levantamentos geofísicos sempre requerem validação com dados de furos (Ghazanfari et al., 2018; Adiat, 2009).

O uso de técnicas modernas como Sensoriamento Remoto e Sistema de Informação Geográfica tem fornecido meios mais eficazes, rápidos e econômicos para avaliar e gerenciar os recursos hídricos subterrâneos (Sophocleous, 2018; Singh et al., 2021; Zhao et al., 2021; Jha et al., 2007; Meijerink, 2007). Essas técnicas permitem a identificação de áreas promissoras para exploração de água subterrânea, com base na avaliação de parâmetros hidrológicos, geológicos e topográficos relevantes para a sua disponibilidade. Estudos têm sido realizados para investigar a aplicação dessas técnicas em diferentes regiões e condições geológicas (Ghazanfari et al., 2018; Jha et al., 2019).

5 | AQUÍFEROS

Um aquífero é uma formação geológica do subsolo, constituída por rochas permeáveis que armazenam água em seus poros ou fraturas. Outro conceito se refere ao aquífero como sendo somente o material geológico capaz de servir como depositório e

transmissor da água armazenada. A água subterrânea é armazenada em espaços abertos e fraturas dentro de formações geológicas abaixo da superfície da terra, conhecidos como aquíferos (Lehr et al., 2005).

Um aquífero é um leito saturado ou formação que não só armazena água, mas a produz em quantidade suficiente para ser importante como fonte de abastecimento. Assim, uma litologia só será considerada um aquífero se, além de ter seus poros saturados de água, permitir a fácil transmissão da água armazenada.

A principal propriedade de um aquífero é a sua capacidade de liberar a água retida em seus poros e sua capacidade de transmitir o fluxo facilmente (Lehr et al., 2005). Essas propriedades essencialmente dependem da composição do aquífero e incluem a porosidade, rendimento, condutividade hidráulica, permeabilidade e coeficiente de armazenamento.

Um aquífero pode ter extensão de poucos quilômetros quadrados a milhares de quilômetros quadrados, ou pode, também, apresentar espessuras de poucos metros a centenas de metros (Rebouças et al., 2002). Etimologicamente, aquífero significa: aqui = água; fero = transfere; ou do grego, suporte de água (Heinen et al., 2003).

Os aquíferos podem ser formados por rochas consolidadas ou não consolidadas (Lehr et al., 2005). As rochas consolidadas são compostas de materiais como arenito, tufo, calcário e granito, já as rochas inconsolidadas são compostas por sedimentos não compactados, como areia, argila, cascalho e outras partículas que se acumulam ao longo do tempo e formam camadas sedimentares.

Os aquíferos mais importantes do mundo, seja por extensão ou pela transnacionalidade, são: o Guaraní – Argentina, Brasil, Paraguai, Uruguai (1,2 milhões de km²); o Arenito Núbia - Líbia, Egito, Chade, Sudão (2,5 milhões de km²); o Sistema Aquífero Guaraní - Argentina, Brasil, Paraguai, Uruguai (1,2 milhões de km²); o Digitalwaterway Vechte – Alemanha, Holanda (7,5 mil km²); o Slovak Karst-Aggtelek - República Eslovaca e Hungria; o Praded – República Checa e Polônia (3,3 mil km²) (UNESCO, 2021); a Grande Bacia Artesiana (1,7 milhões km²) e a Bacia Murray (375 mil km²), ambos na Austrália. Em um levantamento mais recente, a UNESCO identificou mais de 200 aquíferos transfronteiriços em todo o mundo, incluindo mais de 100 na Europa (UNESCO, 2021).

6 | TIPOS DE AQUÍFEROS

A litologia do aquífero, ou seja, a sua constituição geológica (porosidade/permeabilidade intergranular ou de fissuras), é que irá determinar a velocidade da água em seu meio, a qualidade da água e a sua capacidade como reservatório. A litologia é resultado da sua origem geológica, que pode ser fluvial, lacustre, eólica, glacial e aluvial (rochas sedimentares), vulcânica (rochas fraturadas) e metamórfica (rochas calcárias), determinando assim os diferentes tipos de aquíferos. Quanto à porosidade, existem três tipos de aquíferos, os fissurais, porosos e cársticos. (Sophocleous, 2018; Fetter, 2001;

Freeze e Cherry, 1979; Todd e Mays, 2005; Domenico e Schwartz, 1997; Bear e Cheng, 2010). (Figura 3)

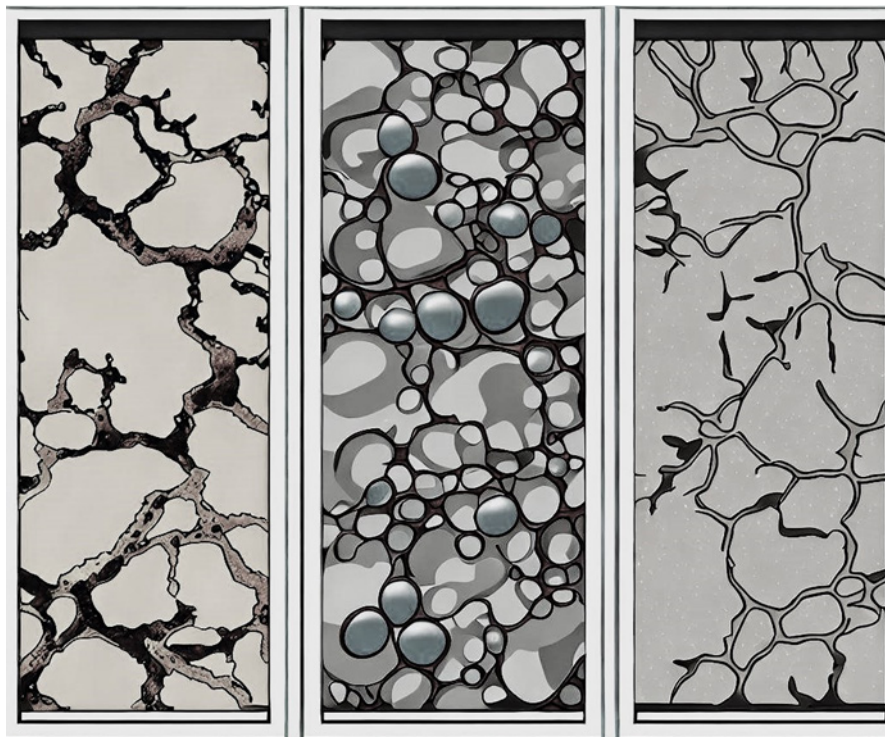


Figura 3- Tipos de Aquíferos quanto à porosidade.

Fonte: O Autor.

- **Aquífero poroso ou sedimentar** – é aquele formado por rochas sedimentares consolidadas, sedimentos inconsolidados ou solos arenosos, onde a circulação da água se dá nos poros formados entre os grãos de areia, silte e argila de granulação variada. Constituem os mais importantes aquíferos, pelo grande volume de água que armazenam e por sua ocorrência em grandes áreas. Esses aquíferos ocorrem nas bacias sedimentares e em todas as várzeas onde se acumularam sedimentos arenosos. Uma particularidade desse tipo de aquífero é sua porosidade quase sempre homogeneamente distribuída, permitindo que a água flua em qualquer direção, em função somente dos diferenciais de pressão hidrostática ali existentes. Essa propriedade é conhecida como isotropia. (Fetter, 2001; Freeze e Cherry, 1979; Todd e Mays, 2005; Domenico e Schwartz, 1997; Bear e Cheng, 2010)
- **Aquífero fraturado ou fissural** – é formado por rochas ígneas, metamórficas ou cristalinas, duras e maciças, onde a circulação da água se dá nas fraturas, fendas e falhas abertas devido ao movimento tectônico. Ex.: basalto, granitos, gabros, filões de quartzo, etc. (SMA, 2003). A capacidade dessas rochas de

acumularem água está relacionada à quantidade de fraturas, suas aberturas e intercomunicação, permitindo a infiltração e fluxo da água. Poços perfurados nessas rochas fornecem poucos metros cúbicos de água por hora, sendo que a possibilidade de se ter um poço produtivo dependerá somente de interceptar fraturas capazes de conduzir a água. Nesses aquíferos, a água só pode fluir onde houver fraturas, que, quase sempre, tendem a ter orientações preferenciais. São ditos, portanto, aquíferos anisotrópicos. Um caso particular de aquífero fraturado é representado pelos derrames de rochas vulcânicas basálticas das grandes bacias sedimentares brasileiras. (Melo et. al. 2017; Frost e Zaghloul 2013)

- **Aquífero cárstico (Karst)** – é formado em rochas calcárias ou carbonáticas, onde a circulação da água se dá nas fraturas e outras discontinuidades (diaclases) que resultaram da dissolução do carbonato pela água. Essas aberturas podem atingir grandes dimensões, criando verdadeiros rios subterrâneos. São aquíferos heterogêneos, descontínuos, com águas duras e com fluxo em canais. As rochas são os calcários, dolomitos e mármore. (Doerfliger et. al. 2007, Ford e Williams 2007)

Os aquíferos também podem ser classificados quanto à superfície superior, segundo a pressão da água (Figura 4), podendo ser classificado em aquífero livre, confinado e semiconfinados.

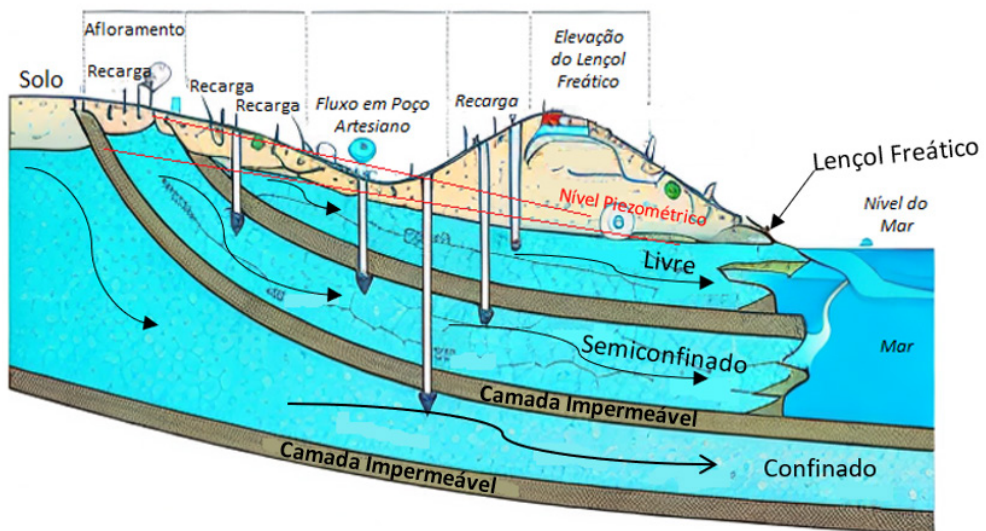


Figura 4- Tipos de Aquífero quanto a pressão.

Fonte: O autor.

- **Aquífero livre:** constituído por uma formação geológica permeável e superficial, totalmente exposta em toda a sua extensão e limitada na base por uma camada impermeável. A superfície superior da zona saturada está em equilíbrio com a pressão atmosférica e a recarga ocorre diretamente pela chuva. Em um poço de aquífero livre, o nível da água varia de acordo com a quantidade de chuva e é conhecido como nível freático. É o aquífero mais comum e explorado, mas também é vulnerável à contaminação. (Amaral, 2012; Makridakis e Dianat, 2020)
- **Aquífero confinado:** constituído por uma formação geológica permeável, confinado entre duas camadas impermeáveis ou semipermeáveis. A pressão da água no topo da zona saturada é maior do que a pressão atmosférica, fazendo com que a água suba no poço acima do nível do aquífero. A recarga indireta ocorre preferencialmente nos locais onde a formação aflora à superfície. Em um poço de aquífero confinado, a água sobe acima do teto do aquífero devido à pressão exercida pelas camadas confinantes sobrejacentes. A altura que a água sobe é conhecida como nível potenciométrico, e o poço é artesianos. (Makridakis e Dianat, 2020; Fetter, 2001)
- **Aquífero semi-confinado:** limitado na base, no topo ou em ambos, por camadas cuja permeabilidade é menor do que a do aquífero em si. O fluxo preferencial da água se dá ao longo da camada do aquífero. A recarga pode ocorrer de forma secundária através das camadas semi-confinantes, desde que haja uma diferença de pressão hidrostática entre a camada do aquífero e as camadas subjacentes ou sobrejacentes. Em certas circunstâncias, um aquífero livre pode ser abastecido por água oriunda de camadas semi-confinadas subjacentes, ou vice-versa. Zonas de fraturas ou falhas geológicas podem constituir pontos de fuga ou recarga da água da camada confinada. (Makridakis e Dianat, 2020; Fetter, 2001)

7 | ÁREAS DE REABASTECIMENTO E DESCARGA DOS AQUÍFEROS

Um aquífero apresenta uma reserva permanente de água e uma reserva ativa ou reguladora que são continuamente abastecidas através da infiltração da chuva e de outras fontes subterrâneas. As reservas reguladoras ou ativas correspondem ao escoamento de base dos rios.

A área por onde ocorre o abastecimento do aquífero é chamada zona de recarga, que pode ser direta ou indireta. O escoamento de parte da água do aquífero ocorre na zona de descarga (ANA, 2001).

- **Zona de recarga direta:** é aquela onde as águas das chuvas infiltram-se diretamente no aquífero, através de suas áreas de afloramento e fissuras de rochas sobrejacentes. Sendo assim, a recarga sempre é direta nos aquíferos livres, ocorrendo em toda a superfície acima do lençol freático. Nos aquíferos confinados, o reabastecimento ocorre preferencialmente nos locais onde a

formação portadora de água aflora à superfície (Dill et. al., 2012; Braga et. al. 2011).

- **Zona de recarga indireta:** são aquelas onde o reabastecimento do aquífero se dá a partir da drenagem (filtração vertical) superficial das águas e do fluxo subterrâneo indireto, ao longo do pacote confinante sobrejacente, nas áreas onde a carga potenciométrica favorece os fluxos descendentes (Dill et. al., 2012; Braga et. al. 2011).
- **Zona de descarga:** é aquela por onde as águas emergem do sistema, alimentando rios e jorrando com pressão por furos (Dill et. al., 2012; Braga et. al. 2011).

As maiores taxas de recarga ocorrem em regiões planas, bem arborizadas, e nos aquíferos livres. Em regiões de relevo acidentado, sem cobertura vegetal, sujeitas a práticas de uso e ocupação que favorecem as enxurradas, a recarga ocorre mais lentamente e de maneira limitada (Rebouças et al., 2002).

Sob condições naturais, apenas uma parcela dessas reservas reguladoras é passível de exploração, constituindo o potencial ou reserva explorável. Em geral, esta parcela é calculada entre 25% e 50% das reservas reguladoras (ANA, 2001). Esse volume de exploração pode aumentar em função das condições de ocorrência e recarga, bem como dos meios técnicos e financeiros disponíveis, considerando que a soma das extrações com as descargas naturais do aquífero para rios e oceano não pode ser superior à recarga natural do aquífero.

8 | FUNÇÕES DOS AQUÍFEROS

Além de suprir água suficiente para manter os cursos de água superficiais estáveis (função de produção), os aquíferos também ajudam a evitar seu transbordamento, absorvendo o excesso de água da chuva intensa (função de regularização). Na Ásia tropical, onde a estação quente pode durar até 9 meses e as chuvas de monção podem ser bastante intensas, esse duplo serviço hidrológico é crucial (SAMPAT, 2001). Segundo o mesmo autor, os aquíferos também proporcionam uma forma de armazenar água doce sem muita perda pela evaporação - outro serviço particularmente valioso em regiões quentes, propensas à seca, onde essas perdas podem ser extremamente altas.

Na África, por exemplo, em média, um terço da água extraída de reservatórios todo ano é perdido pela evaporação. Os pântanos, habitats importantes para aves, peixes e outras formas de vida silvestre, nutrem-se normalmente de água subterrânea, onde o lençol freático aflora à superfície em ritmo constante. Onde há muita exaustão de água subterrânea, o resultado é frequentemente leitos secos de rios e pântanos ressecados. (Lovell, 2017; Said e Thompson, 2011)

Portanto, os aquíferos podem cumprir as seguintes funções (Rebouças et al., 2002):

- **Função de produção:** corresponde à sua função mais tradicional de produção de água para o consumo humano, industrial ou irrigação.
- **Função de estocagem e regularização:** utilização do aquífero para estocar excedentes de água que ocorrem durante as enchentes dos rios, correspondentes à capacidade máxima das estações de tratamento durante os períodos de demanda baixa, ou referentes ao reuso de efluentes domésticos e/ou industriais.
- **Função de filtro:** corresponde à utilização da capacidade filtrante e de depuração bio-geoquímica do maciço natural permeável. Para isso, são implantados poços a distâncias adequadas de rios perenes, lagoas, lagos ou reservatórios, para extrair água naturalmente clarificada e purificada, reduzindo substancialmente os custos dos processos convencionais de tratamento.
- **Função ambiental:** consiste em sua capacidade de manter a qualidade da água subterrânea, protegendo-a de contaminação e poluição. Além disso, os aquíferos desempenham um papel importante no equilíbrio do ecossistema local, fornecendo água para pântanos, riachos e rios, que por sua vez sustentam a biodiversidade de animais e plantas.
- **Função transporte:** o aquífero é utilizado como um sistema de transporte de água entre zonas de recarga artificial ou natural e áreas de extração excessiva.
- **Função estratégica:** a água contida em um aquífero foi acumulada durante muitos anos ou até séculos e é uma reserva estratégica para épocas de pouca ou nenhuma chuva.

9 | OCORRÊNCIAS DE AQUÍFEROS NO BRASIL

A combinação das estruturas geológicas com os fatores geomorfológicos e climáticos do Brasil resultou na configuração de 10 províncias hidrogeológicas (Figura 5), que são regiões com sistemas aquíferos com condições semelhantes de armazenamento, circulação e qualidade da água (MMA, 2003). Essas províncias podem ser divididas em subprovíncias.

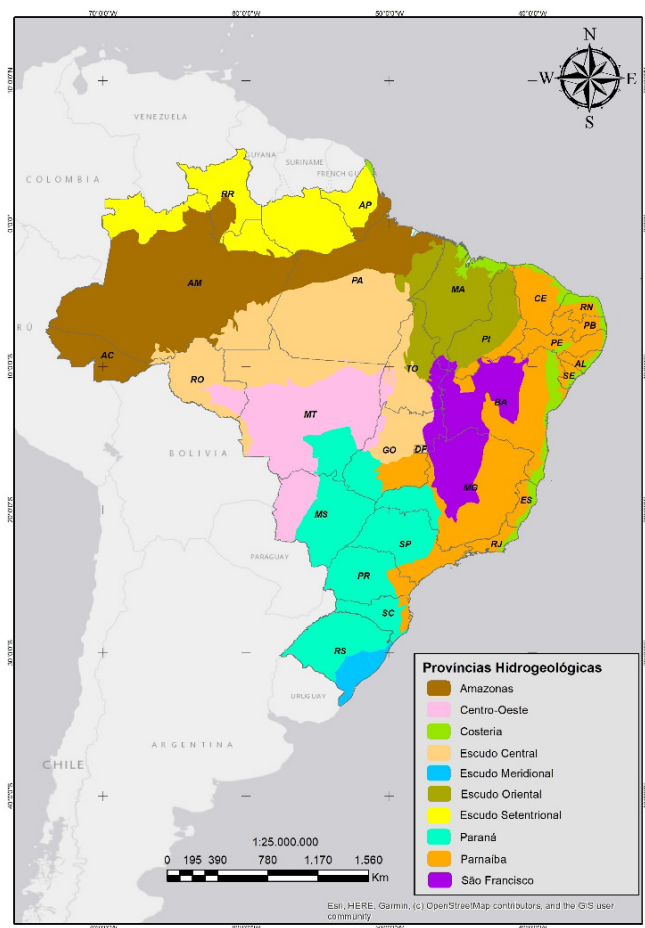


Figura 5 - Províncias Hidrogeológicas.

Fonte: Adaptado de Pessoa et. al 1980.

Conforme Feitosa et al., 2008, uma Província Hidrogeológica é uma região com características gerais semelhantes em relação às principais ocorrências de águas subterrâneas. Segundo Feitosa et al. (2008), os fatores fundamentais para definir uma Província Hidrogeológica são os aspectos geológicos (litologia, estrutura e tectônica) e fisiográficos (clima, morfologia, hidrografia, solos e vegetação). É importante ressaltar, no entanto, que uma Província Hidrogeológica pode ser modificada ou subdividida ao longo do tempo.

Sendo assim, as águas subterrâneas no Brasil ocupam diferentes tipos de reservatórios, desde as zonas fraturadas do embasamento cristalino (escudo) até os depósitos sedimentares cenozoicos (bacias sedimentares), sendo classificadas em três sistemas aquíferos: porosos, fissurados e cársticos, conforme a Tabela 1 (Leal, 1999).

Províncias Hidrogeológicas	Domínios Aquíferos	Sistema Aquífero Principal	Área (Km²)	Volume de Água (Km³)	Total (%)
Escudo Oriental	Substratos Aflorantes	Zonas Fraturadas	600000	80	0,07
Escudos Setentrional, Central e Meridional	Substratos Aflorantes	Manto Rochas Fraturadas e/ou Alteradas	4000000	10000	8,90
Amazonas	Bacia Sedimentar Amazonas	Arenitos Barreiras e Alter do Chão	1300000	32500	28,94
Parnaíba	Bacia Sedimentar Maranhão	Arenitos Itapecuru, Cordas Grajaú, Motuca, Poti-Piauí, Cabeças, Serra Grande	700000	17500	15,58
Parnaíba	Bacia Sedimentar São Luis-Barrerinhas	Arenitos São Luis e Itapecuru	50000	250	0,22
Costeira	Bacia Sedimentar Potiguar Recife	Arenitos Barreiras, Açú- Beberibe, Calcário Jandaia	2300	260	0,20
Costeira	Bacia Sedimentar Sergipe -Alagoas	Arenitos Barreiras e Marituba	10000	100	0,9
Costeira	Bacia Sedimentar Jatobá, Tucano-Recôncavo	Arenitos Marizal, Tacaratú, São Sebastião	5600	840	0,75
Paraná	Bacia Sedimentar Paraná	Arenitos Baurú-Caiuá, Furnas/ Aquidauana, Guarani, Rio Branco, Bassaltos Serra Geral	100000	50400	44,88
	Depósitos Diversos	Aluviões e Dunas	77300	411	0,37

Tabela 1- Províncias Hidrogeológicas e Sistemas Aquíferos (MMA 2023).

Os escudos são compostos por rochas magmáticas e metamórficas e representam os primeiros núcleos de rochas emergidas que surgiram durante a formação inicial da crosta terrestre. Por outro lado, as bacias sedimentares são depressões que, ao longo do tempo, foram preenchidas por detritos ou sedimentos provenientes de áreas próximas ou distantes, geralmente dispostas de forma horizontal (Coelho, 1996).

As Províncias são classificados em domínios hidrogeológicos, os quais são definidos como “representativos de um conjunto de unidades geológicas com similaridades hidrogeológicas, baseando-se principalmente nas características litológicas das rochas”

(Feitosa et al., 2008). Esse conceito foi desenvolvido durante a elaboração do Mapa de Domínios Hidrogeológicos da Bahia, que ainda não foi publicado (Bomfim, 2010).

O Mapa de Domínios/Subdomínios Hidrogeológicos do Brasil (Figura 6), elaborado pela CPRM (Bomfim e Jesus, 2007), utilizando o Sistema de Informações Geográficas (SIG), de acordo com a definição mencionada anteriormente, estabelece sete domínios hidrogeológicos:

- **Formações Cenozoicas:** aquífero poroso;
- **Bacias Sedimentares:** aquífero poroso;
- **Poroso/Fissural:** aquífero misto;
- **Metassedimentos/Metavulcânicas:** aquífero fissural;
- **Vulcânicas:** aquífero fissural;
- **Cristalino:** aquífero fissural;
- **Carbonatos/Metacarbonatos:** aquífero fissural.

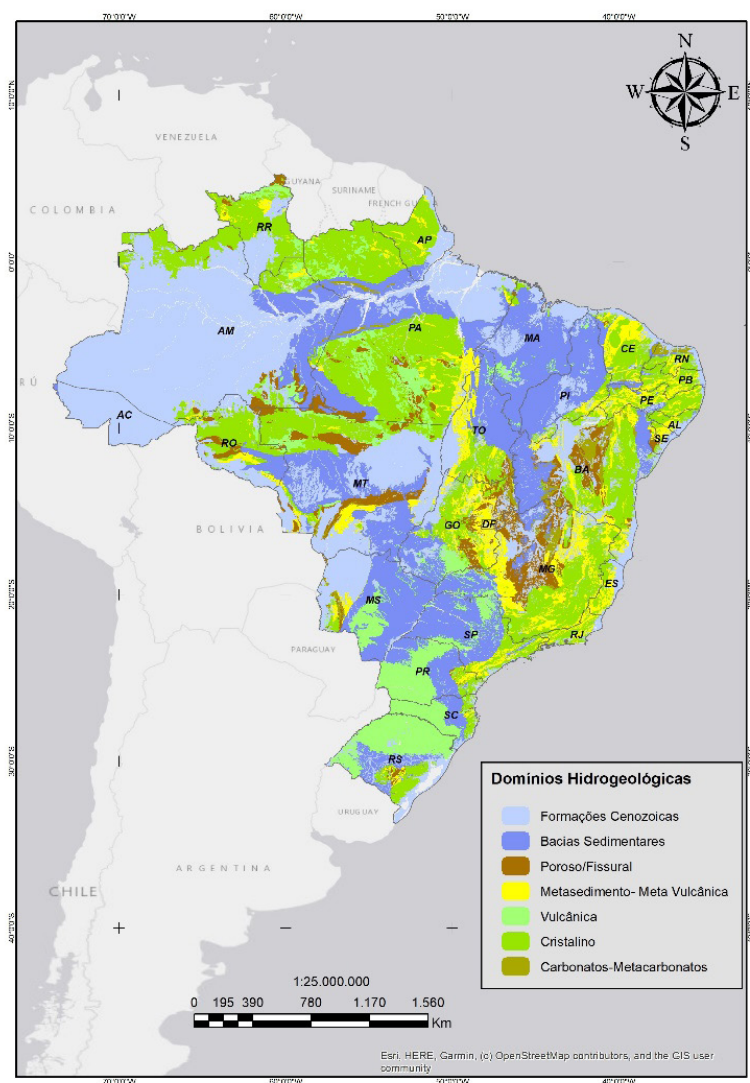


Figura 6- Domínios Hidrogeológicos.

Fonte : Adaptado Bonfin e Jesus 2007.

Os domínios hidrogeológicos no Brasil abrangem uma ampla variedade de sistemas hidrogeológicos, cada um com suas características distintas. Esses sistemas podem ser classificados com base em suas propriedades hidráulicas, geológicas e geográficas, sendo essencial compreender sua natureza para uma gestão adequada dos recursos hídricos subterrâneos.

Um dos sistemas hidrogeológicos dominantes no país são os aquíferos porosos, formados por rochas sedimentares que ocupam cerca de 42% da área total (3,6 milhões de

Km²). Esses aquíferos estão distribuídos em cinco províncias hidrogeológicas: Amazonas, Paraná, Parnaíba-Maranhão, Centro-Oeste e Costeira. Sua estrutura geológica, com camadas permeáveis e impermeáveis alternadas, confere-lhes condições de artesianismo. Destacam-se as Bacias do Paraná, Amazonas, Parnaíba e a Subprovíncia Potiguar-Recife, devido à sua extensão e potencialidade. (ABAS, 2003)

Outro sistema hidrogeológico presente no país é o dos aquíferos fissurados ou fraturados, que abrangem cerca de 53,8% do território nacional. Esses aquíferos estão nas Províncias Hidrogeológicas dos Escudos Setentrional, Central, Oriental e Meridional. As duas primeiras províncias, com rochas fraturadas do embasamento, possuem boas possibilidades hídricas devido aos altos índices pluviométricos. A Província Oriental está dividida em duas subprovíncias: Nordeste e Sudeste. Já a Província Meridional, localizada em Santa Catarina e no Rio Grande do Sul, apresenta substrato alterado. Os rios perenes e os aquíferos dessa região são recarregados pelos altos índices pluviométricos locais. (MMA, 2003).

As duas primeiras províncias com rochas fraturadas do embasamento apresentam razoáveis possibilidades hídricas, devido aos altos índices pluviométricos da área. A Província Oriental está dividida em duas subprovíncias (Nordeste e Sudeste).

A Província Meridional, em Santa Catarina e no Rio Grande do Sul é de substrato alterado. Os altos índices pluviométricos da região asseguram a perenização dos rios e contribuem para a recarga dos aquíferos, cujas reservas são, em parte, restituídas à rede hidrográfica (MMA, 2003).

Esse sistema apresenta reservas de águas subterrâneas da ordem de 10.080 km³ (Teixeira et. al. 2020; Bittencourt e Savio, 2020; Leal, 1999). As águas são de boa qualidade química, podendo ocorrer localmente teores de ferro acima do permitido. No domínio do embasamento cristalino subaflorante, como na Província Hidrogeológica Escudo Oriental do Nordeste onde está localizada a região semiárida – há pequena disponibilidade hídrica, devido à formação de rochas cristalinas (Lima e Conicelli, 2020). É frequente observar teor elevado de sais nas águas dessa região, o que restringe ou impossibilita seu uso (MMA, 2003). Nesse domínio subaflorante é que nascem os rios temporários.

Além disso, temos os sistemas hidrogeológicos cársticos, compostos pelo sistema cárstico-fissural da Província Hidrogeológica do São Francisco e pela Formação Jandaíra. Inclui-se também os domínios do calcário do Grupo Bambuí com mais de 350.000 km², distribuído nos Estados da Bahia, Goiás e Minas Gerais, e a Formação Caatinga. As profundidades de desenvolvimento cárstico variam, com média em torno de 150 metros. O Grupo Bambuí apresenta vazões superiores a 200 metros cúbicos por hora, enquanto a Formação Jandaíra possui vazões mais baixas, geralmente inferiores a 3,5 m³/h. Outros aquíferos cársticos relevantes são o Pirabas, com profundidade média de 220 metros e vazão de 135 m³/h, e a Formação Capiru do Grupo Açungui, com vazão média de 180 m³/h e profundidade média de 60 m. (Carmo e Costa, 2021; Lisboa e Simões, 2021; MMA, 2003).

A classificação e compreensão desses sistemas hidrogeológicos são fundamentais para uma gestão eficiente e sustentável dos recursos hídricos subterrâneos.

Os sistemas aquíferos brasileiros abrigam reservatórios significativos de água (Figura 7), que alimentam uma das redes de rios perenes mais extensas do mundo, com exceção dos rios temporários que se originam nas regiões semiáridas do Nordeste, onde afloram as rochas do embasamento geológico (Rebouças et al., 2002). Além disso, esses sistemas desempenham um papel socioeconômico importante devido ao seu potencial hídrico (MMA, 2003).

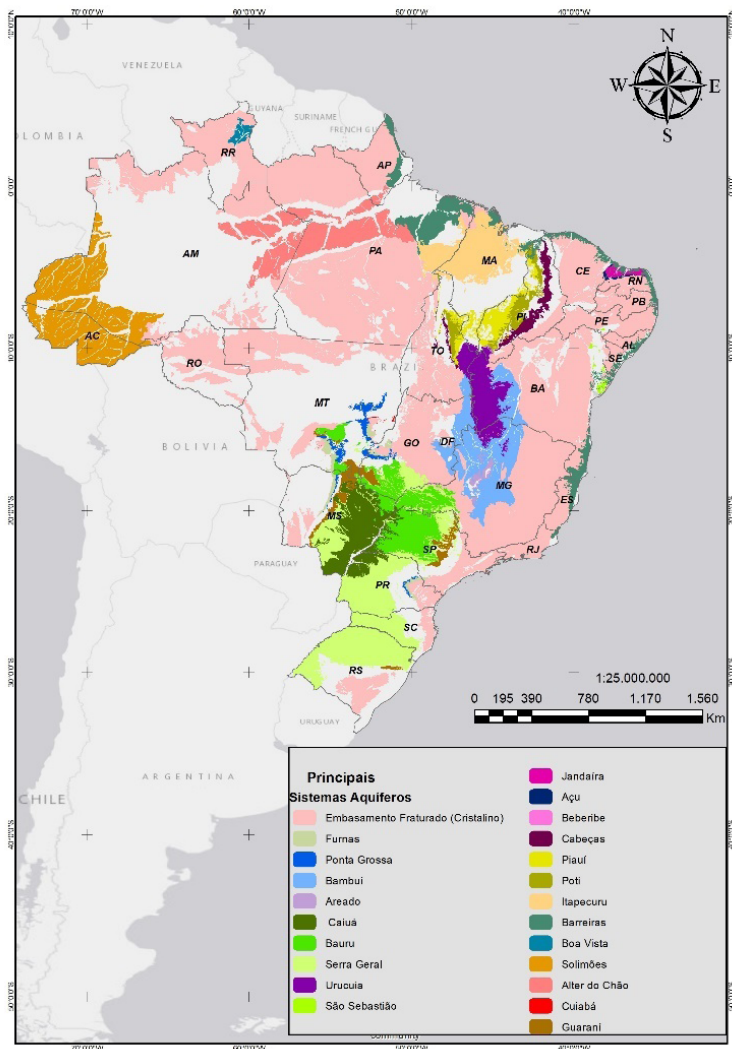


Figura 7- Principais Sistemas Aquíferos do Brasil.

Fonte: Adaptado MMA.

Os sistemas aquíferos no Brasil são abundantes e desempenham um papel crucial no abastecimento de água e no equilíbrio hidrológico do país. A seguir, apresento os principais aquíferos por regiões:

Região Norte: Aquífero Alter do Chão: Localizado na Bacia Amazônica, abrange uma área de aproximadamente 437.000 km² com uma vazão aproximada de 86 mil km³, possuindo grande importância na região, fornecendo água para diversos rios perenes. (Sousa et al. 2020)

Região Nordeste: O aquífero Urucuia Estende-se pelos estados de Piauí, Ceará, Bahia e Minas Gerais, sendo um dos principais aquíferos da região Nordeste. Possui grande potencial hídrico, contribuindo para o abastecimento de água de várias cidades. Com extensão de aproximadamente 142 mil km², e vazão de 420 m³/s. (Gonçalves et. al 2016)

O aquífero Jandaíra, localizado no Rio Grande do Norte e em parte da Paraíba e do Ceará, é um importante aquífero cárstico-fissural, responsável pelo abastecimento de água de diversas comunidades da região. Ocorre numa superfície total de 17.756 km²; esta área de ocorrência inclui as zonas recobertas pela Formação Barreiras, aluviões e dunas, que totalizam cerca de 5.980 km². Estudos regionais indicam que a espessura da Formação Jandaíra pode chegar a 600 m na porção mais profunda da Bacia Potiguar, embora as espessuras mais importantes, do ponto de vista hidrogeológico, tenham sido registradas entre 50 e 150 m com vazões variando entre 10 a 50 m³ h⁻¹ conforme Vasconcelos et.al 2010.

Região Centro-Oeste: O aquífero Guarani, considerado um dos maiores sistemas aquíferos do mundo, estende-se por partes dos estados do Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, Goiás e São Paulo, além de abranger áreas do Paraguai, Argentina e Uruguai. É uma fonte estratégica de água doce, utilizada para abastecimento público, agricultura e indústria. A maior parte (70 por cento ou 840 000 km²) da área ocupada pelo aquífero — cerca de 1 200 000 km² — está no subsolo do centro-sudoeste do Brasil. O restante se distribui entre o nordeste da Argentina (255 000 km²), noroeste do Uruguai (58 500 km²) e sudeste do Paraguai (58 500 km²), nas bacias do rio Paraná e do Chaco-Paraná. A vazão é muito variável. Por exemplo: é de mais de 200 000 litros por hora na região do Alto Rio Uruguai, no Rio Grande do Sul, mas possui raros poços acima de 5 000 litros por hora na região das Missões, no mesmo estado. Em outros estados, já foram registradas vazões da ordem de 800 000 litros por hora. (Borges et. al 2013; Borges et. al. 2020)

Região Sudeste: O Aquífero Bauru, localizado principalmente no estado de São Paulo, abrange uma área significativa no Centro-Oeste. É uma importante reserva de água subterrânea utilizada para múltiplos fins, como abastecimento urbano e irrigação. Ocupa uma área de com área total de 370.000 km², as camadas de sedimentação intermediária e de topo mostram vazão variável entre 3,0 e 20 m³/h, enquanto porções mais restritas na base do pacote sedimentar exibem vazões entre 20 e 50 m³/h. De modo geral, a média da vazão de produção dos poços é de 8 m³ /h (DAEE, 2005; Birsá et. al. 2019).

O aquífero Tubarão: Situado no estado de São Paulo, é um aquífero sedimentar que desempenha um papel fundamental no abastecimento de água para a região. Seus poços normalmente apresentam baixa produtividade, com fluxos inferiores a 2,8 litros/segundo. Contudo, em alguns pontos é possível atingir vazões de até 11 litros/segundo, com uma área de 20.000 Km² (CETESB,2010; Silva et. al. 2020).

Região Sul: O aquífero Serra Geral, estende-se pelos estados de São Paulo, Paraná e Santa Catarina. É um importante aquífero fissural que fornece água para várias cidades e atividades agrícolas na região. Os basaltos fissurados afloram numa extensão de cerca de 20.000 km², localizado em camadas inferiores aos sedimentos do Grupo Bauru. Sua espessura varia desde poucos metros, aumentando para Oeste, até 1.000 metros. Assim sendo, suas características hidrodinâmicas ficam melhor demonstradas pelos valores de vazão específica que variam entre 0,08 e 50 m³/h/m., com valor médio de 1,0 m³ /h/m (Fernandes et al. 2006, Gonçalves et. al. 2020).

Os sistemas aquíferos no Brasil desempenham um papel fundamental na disponibilidade de água doce e no funcionamento dos rios perenes em diversas regiões do país. Eles abrigam reservatórios significativos de água e contribuem para o desenvolvimento socioeconômico, fornecendo recursos hídricos para atividades agrícolas, industriais e domésticas. Além disso, a compreensão dos diferentes sistemas aquíferos e suas características, como extensão, vazão e potencialidade, é essencial para o manejo sustentável dos recursos hídricos subterrâneos. A preservação e conservação desses sistemas são de suma importância para garantir a disponibilidade de água de qualidade no presente e para as gerações futuras.

10 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao considerarmos todas as informações discutidas sobre águas subterrâneas, podemos concluir que elas desempenham um papel crucial no abastecimento de água doce, tanto para as necessidades humanas quanto para a manutenção dos ecossistemas. A ocorrência e o volume das águas subterrâneas são influenciados por fatores geológicos, climáticos e hidrológicos, e seu uso sustentável requer uma compreensão detalhada de suas características e comportamento.

A exploração de águas subterrâneas é uma prática comum em muitas regiões, proporcionando uma fonte confiável de água para consumo humano, agricultura e indústria. No entanto, é essencial que essa exploração seja feita de forma responsável, considerando a recarga natural dos aquíferos e evitando o esgotamento excessivo dos recursos hídricos.

A qualidade das águas subterrâneas é de extrema importância, pois elas podem ser vulneráveis à contaminação por atividades humanas e processos naturais. Portanto, é fundamental adotar medidas de proteção e monitoramento para preservar a qualidade desses recursos vitais.

Existem diferentes tipos de aquíferos no Brasil, como aquíferos porosos, fissurados e cársticos, cada um com suas características hidrodinâmicas específicas. Além disso, é essencial destacar as áreas de reabastecimento e descarga dos aquíferos, que influenciam o fluxo e a disponibilidade das águas subterrâneas.

Os aquíferos desempenham funções essenciais na regulação do ciclo hidrológico, armazenando e liberando água conforme necessário. Eles contribuem para a manutenção dos rios perenes, atuam como reservatórios estratégicos e têm um papel fundamental na sustentabilidade hídrica.

No Brasil, há ocorrências significativas de aquíferos, como o Aquífero Guarani, o Aquífero Alter do Chão, o Aquífero Urucuaia, entre outros. Esses aquíferos fornecem água para múltiplos usos, contribuindo para o desenvolvimento socioeconômico das regiões onde estão localizados.

Em suma, a compreensão dos aspectos relacionados às águas subterrâneas, incluindo sua ocorrência, volume, exploração, qualidade, tipos de aquíferos, áreas de reabastecimento e descarga, funções e ocorrências no Brasil, é fundamental para uma gestão adequada e sustentável desses recursos preciosos, garantindo seu uso consciente e a preservação desses importantes ecossistemas.

REFERÊNCIAS

ABAS- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ÁGUAS SUBTERRÂNEAS. **Conheça as bacias e províncias hidrogeológicas do Brasil**. 2003.

ABAS - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ÁGUAS SUBTERRÂNEAS. **Estatuto Social**. Brasília: ABAS, 2016.

ADIAT, K. A. N.; OLAYANJU, G. M.; OMOSUYI, G. O.; AKO, B. D. **Electromagnetic profiling and electrical resistivity soundings in groundwater investigation of a typical Basement Complex-a case study of Oda Town Southwestern Nigeria**. Ozean Journal of Applied Sciences, v. 2, n. 4, p. 333-359, 2009.

AKO, B. D.; OLORUNFEMI, M. O. **Geoelectric survey for groundwater in the Newer Basalts of Vom, Plateau State**. Journal of Mining and Geology, v. 25, p. 247-250, 1989.

ALBUQUERQUE, A. M. et al. **Avaliação da qualidade microbiológica de águas subterrâneas em áreas urbanas**. Engenharia Sanitária e Ambiental, v. 25, n. 4, p. 801-812, 2020.

AMADI, U. M. P., NURUDEEN, S. I. **Electromagnetic survey and the search for groundwater in the crystalline basement complex of Nigeria**. Journal of Mining Geology, 26(1), 45-53, 1990.

AMARAL, L. S. **Aquíferos Livres**. In: ROCHA, M. A.; AMARAL, L. S.; SANTOS, R. A. Águas Subterrâneas: Conceitos e Aplicações. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2012. p. 85-96.

ANA- AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS. **Atlas Brasil - Abastecimento Urbano de Água**. Brasília, 2021.

ANA - AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS. **Conjuntura dos Recursos Hídricos no Brasil 2021**. Brasília: ANA, 2022.

ANA - Agência Nacional de Águas. **Mapa Esquemático do Sistema Aquífero Guarani**. Elaborado pela CAS/SRH/MMA (Coordenação de Águas Subterrâneas/Secretaria de Recursos Hídricos/ Ministério de Meio Ambiente) (UNPP - Unidade Nacional de Preparação do Projeto/Brasil). Escala 1:13.600.000. Brasília: Agência Nacional de Águas, 2001.

BARLOW, P. M.; MAHY, M. T.; NIELSEN, D. M. **Groundwater in a Global Context**. In: ROBERTS, J. A.; MAHY, M. T. (Ed.). *Water and Society: An Introduction to the Social and Cultural Functions of Water*. London: Routledge, 2019.

BEAR, J.; CHENG, A. H.-D. **Modelagem de Fluxo e Transporte em Meios Porosos**. São Paulo: Edgard Blücher, 2010.

BIRSA, A. C., MARQUES, E. A., SOUSA, W. A., STEVAUX, J. C. **Hidrogeologia do Sistema Aquífero Bauru no Estado do Mato Grosso do Sul**. *Revista Brasileira de Geociências*, 49(2), 181-195, 2019.

BITTENCOURT, M. A. L., SÁVIO, M. F. **Hidrogeologia no Brasil: atualidades e perspectivas**. *Revista Brasileira de Geociências*, 50(3), e2019082; 2020.

BOMFIM L.F.C. **Mapa de Domínios/Subdomínios Hidrogeológicos do Brasil em Ambiente SIG: Concepção e Metodologia**. In: XVI Congresso Brasileiro de Águas Subterrâneas e XVII Encontro Nacional de Perfuradores de Poços. São Luís, MA, Associação Brasileira de Águas Subterrâneas. Anais... p. 1-18, 2010.

BOMFIM L.F.C., JESUS J.D.A. (coords.). 2007. **Mapa de Domínios/Subdomínios Hidrogeológicos do Brasil, escala 1:2.500.000 (SIG)**. Brasília, DF, CPRM – Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais.

BORGES, M. C., ASSIS, J. C. C., MENDONÇA, R. R. **Aquífero Guarani: Características Hidrogeológicas e Importância Estratégica**. *Geociências*, 32(1), 73-86, 2013.

BORGES, R. B., BARRETO, C. F., LIMA, A. M. P., ROISENBERG, A. **Water Management in the Guarani Aquifer System: Challenges and Perspectives for Integrated Governance**. *Water*, 12(5), 1347.2020.

BORGHETTI, N. R. B.; BORGHETTI, J. R.; ROSA FILHO, E. F. **Aquífero Guarani: a verdadeira integração dos países do MERCOSUL**. Curitiba: Imprensa Oficial, 2004.

BRAGA, B.; TOLEDO, M. C.; BRAGA, F. B. S. **Águas Subterrâneas: Recursos, Avaliação, Proteção e Planejamento**. 3. ed. Porto Alegre: ABRH, 2011.

CARMO, F. F., SILVA, M. R., & COSTA, A. S. **Hidrogeologia cárstica e vulnerabilidade dos aquíferos na região do Vale do Jequitinhonha, Minas Gerais, Brasil**. *Revista Brasileira de Geociências*, 51(1), e2020060. 2021.

CEPIS (Centro Pan-Americano de Engenharia Sanitária e Ciências do Ambiente). **Capítulo I: a água para o século XXI no mundo e em nossa região, 2000**. Disponível em: <http://www.cepis.org.pe/eswww/dias/diainter/anos/2000/diapor.pdf>. Acesso em: 21 Fev. 2022.

COELHO, M. A. **Geografia do Brasil**. São Paulo: Moderna, 400 p. 1996.

DAEE. DEPARTAMENTO DE ÁGUAS E ENERGIA ELÉTRICA. **Síntese dos Planos de Bacia - Plano Estadual de Recursos Hídricos, 2004-2007**. São Paulo: DAEE/Consórcio JMR-ENGEORPS (Relatório nº 1/2005). **2005**.

DILL, D. M.; FETTER, C. W. **Processos e Fenômenos Hidrogeológicos**. In: ROCHA, M. A.; AMARAL, L. S.; SANTOS, R. A. *Águas Subterrâneas: Conceitos e Aplicações*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, **2012**. p. 29-58.

DOERFLIGER, N.; HÖTZL, H. **Karst Aquifers - Characterization and Engineering**. Berlin: Springer-Verlag, **2007**.

DOMENICO, P. A.; SCHWARTZ, F. W. **Physical and Chemical Hydrogeology**. New York: John Wiley & Sons, **1997**.

FAO (Food and Agriculture Organization). **AQUASTAT - Sistema de Informação sobre Agricultura e Água, 2021**. Disponível em : <http://www.fao.org/aquastat/en/>. Acessado em 15 de janeiro de 2023.

Feitosa F.A.C., Filho J.M., Feitosa E.C., Demetrio J.G.A. (coords.). **Hidrogeologia: Conceitos e Aplicações**. 3ª ed. revisada e ampliada. Rio de Janeiro, CPRM: LABHID. 812p.**2008**.

FETTER, C. W. **Applied Hydrogeology**. 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, **2001**.

FETTER, C.W. **Applied Hydrogeology**, 4th ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 543–591. **1994**.

FERNANDES, A.C., PADILHA, A.L., BROSSARD, R.A., GARCIA, M.G.M.**Hidrogeologia regional do Aquífero Serra Geral no Estado de Santa Catarina**. Revista Brasileira de Geociências, 36(3), 414-426, **2006**.

FORD, D. C.; WILLIAMS, P. **Karst Hydrogeology and Geomorphology**. Chichester: John Wiley & Sons, **2007**.

FOSTER, S.; LOPEZ-GUNDA, J.; MACDONALD, A.; BOSCH, J. **The Importance of Groundwater in Integrated Water Resources Management**. UNESCO, **2018**.

FREEZE, R.A., CHERRY, J.A. **Groundwater**. Englewood Cliffs, NJ, Printice-Hall Inc., 604p.**1979**

FROST, E.; ZAGHLOUL, M. **Fractured Rock Hydrogeology**. CRC Press, **2013**.

GHAZANFARI, A., POURGHASEMI, H. R., MOHAMMADY, M., PRADHAN, B. **A comparative assessment of GIS-based random forest, bagging, boosting, classification and regression tree (CART), and maximum likelihood algorithms for groundwater potential mapping**. Environmental Earth Sciences, **2018**, 77(4), 142.

GLEICK, P. H. **Water, food, and population**. Environment: Science and Policy for Sustainable Development, v. 62, n. 4, p. 2-14, **2020**.

GONÇALVES R.D., ENGELBRECHT B.Z., CHANG H.K, **Análise hidrológica de séries históricas da bacia do Rio Grande (BA): contribuição do Sistema Aquífero Urucuaia** in *Águas Subterrâneas* 30(2):190-208; **2016**.

GONÇALVES, L. R. B., VIEIRA, L. C., DA SILVA, A. R. **Hidrogeologia do Sistema Aquífero Serra Geral no município de Ponta Grossa-PR**. Revista de Geociências do Nordeste, 1(1), 19-28, 2020.

HANASAKI, N., KANAMORI, Y., YAMANAKA, Y., MAEDA, S., TOKUMITSU, R., TAKATA, Y., KUWANO-YOSHIDA, A., SATO, T., KUMAGAI, T., KIGUCHI, M., TAKAHASHI, K. **A spatially explicit representation of groundwater dynamics: model development and application over global grids**. Hydrology and Earth System Sciences, v. 24, n. 8, p. 4093-4110, 2020.

HEINEN, C.; BRINCKMANN, W. E.; BRINCKMANN, C.A. **Aquífero Guarani**. Santa Cruz do Sul: Núcleo de Pesquisa e Extensão em Gerenciamento de Recursos Hídricos da Universidade de Santa Cruz do Sul – UNISC, Boletim Informativo, v. 4, n. 2, fev. 2003.

HOWARD, K. W. F. **Groundwater in the Environment: An Introduction**. 3rd ed. Chichester: Wiley-Blackwell, 2017.

IGM (Instituto Geológico e Mineiro). **Água subterrânea: conhecer para preservar o futuro**. Portugal: Instituto Geológico e Mineiro, 2001.

JHA, M.K.; CHOWDHURY, A.; CHOWDARY, V.M.; PEIFFER, S. **Groundwater management and development by integrated remote sensing and geographic information systems: prospects and constraints**. Water Resour. Manag., v.21, n.2, p.427–467, 2007.

LEAL, A. S. **As águas subterrâneas no Brasil: ocorrências, disponibilidades e usos**. In: FREITAS, Marcos Aurélio Vasconcelos de (Org.). O Estado das Águas no Brasil. Brasília: Agência Nacional de Energia Elétrica; Superintendência de Estudos e Informações Hidrológicas; Ministério do Meio Ambiente; Secretaria de Recursos Hídricos; Ministério de Minas e Energia, 1999. p. 334.

LEHR, J. H.; KEELEY, J. W.; LEHR, K. K.; KINGERY, T. B. **Water Encyclopedia**. New York: Wiley, 2005.

LIMA, E. C., SANTOS, J. A., CONICELLI, B. **Caracterização hidrogeológica e avaliação da vulnerabilidade do aquífero cristalino na área de influência do AHE Sinop (MT)**. Revista Brasileira de Geociências, 50(3),2020.

LISBOA, F. L.,SIMÕES, J. C. **Caracterização hidrogeológica de uma área cárstica no noroeste do Estado da Bahia, Brasil**. Revista Brasileira de Geociências, 51(1), 2021.

LOVELL, H. **Global Environmental Issues**. 2nd ed. New York: Routledge, 2017.

MADAN, K. J.; CHOWDARY, V. M.; CHOWDHURY, A. **Groundwater assessment in Salboni Block, West Bengal (India) using remote sensing, geographical information system and multi-criteria decision analysis techniques**. Hydrogeology Journal, v. 18, n. 7, p. 1713-1728, 2010.

MAKRIDAKIS, S.; DIANAT, S. **Groundwater Resources Evaluation: Present and Future Uses and Environmental Concerns**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2020.

MARGAT, J.; VAN DE GUN, J. **Groundwater around the world**. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2013.

MEIJERINK, A. M. J. **Remote sensing applications to groundwater IHP-VI**, Series on Groundwater No. 16, UNESCO, Paris, 2007.

MELO, D. D. et al. **Aquíferos Fraturados no Brasil**. In: XXII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos, 2017, Florianópolis. Anais do XXII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos. Florianópolis: ABRH, 2017. p. 1-8.

MMA- MINISTÉRIO DO MEIO AMBIENTE. **Águas Subterrâneas no Brasil**. Brasília, 2021.

MMA- Ministério do Meio Ambiente (MMA). **Plano Nacional de Recursos Hídricos: documento base de referência: minuta: revisão**. Brasília, DF: Secretaria Nacional de Recursos Hídricos; 2003.

OLAYINKA, A. I.; OLAYIWOLA, M. A. **Integrated use of geoelectrical imaging and hydrochemical methods in delineating limits of polluted surface and groundwater at a landfill site in Ibadan area, southwestern Nigeria**. Journal of Mining and Geology, v. 37, n. 1, p. 53-68, 2001.

OLIVEIRA, R. A. S.; SILVA, J. P. M.; SANTOS, M. S. **Desafios e Importância das Águas Subterrâneas em Regiões de Teor Salino Elevado: O Caso dos Sistemas Aquíferos Fissurados no Semiárido Nordestino**. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ÁGUAS SUBTERRÂNEAS, 18., 2019, Salvador. Anais... Salvador: Associação Brasileira de Águas Subterrâneas, 2019.

OLORUNFEMI, M. O.; DAN-HASSAN, M. A.; OJO, J. S. **On the scope and limitations of the electromagnetic methods in groundwater prospecting in a Precambrian basement terrain a Nigerian case study**. Journal of African Earth Sciences, v. 20, n. 2, p. 151-160, 1995.

PEIXOTO, J. P. OORT, A. H. **Lê cycle de l'eau et le. La Recherche. Spécial: L'eau**, v.21, p. 570-79, 1990.

PROASNE. PROGRAMA DE APOIO AO SANEAMENTO BÁSICO NO NORDESTE. Ministério de Minas e Energia. CPRM - Serviço Geológico do Brasil. Diretoria de Hidrologia e Gestão Territorial. **A água subterrânea no mundo**, 2003.

REBOUÇAS, A. C. **Águas subterrâneas nas grandes metrópoles: água subterrânea no novo modelo do saneamento básico**, 1996.

REBOUÇAS, A. C.; BRAGA, B.; TUNDISI, J. G. **Águas doces no Brasil: capital ecológico, uso e conservação**. 2. ed. rev. e ampl. São Paulo: Escrituras, 2002. 702 p.

ROSCOE, M. C. **Handbook of Ground Water Development**. Wiley, New York, 1990. p. 34-51.

SAID, A. M.; THOMPSON, P. J. **Evaporation in the Tropics. Part II: Field Observations of Evaporation from a Wetland in Northern Australia**. Journal of Hydrology, v. 253, n. 1-4, p. 99-119, 2001.

SAMPAT, Payal. **Expondo a poluição freática**. In: WORLDWATCH INSTITUTE. Estado do Mundo: 2001. Relatório Anual do WWI-Worldwatch Institute/UMA-Universidade Livre da Mata Atlântica, 2001.

SHAH, T. **Taming the Anarchy: Groundwater Governance in South Asia**. New Delhi, Índia: Routledge, 2016.

SHIKLOMANOV, I.A. **World Water Resources: A New appraisal and assesment for the 21° Century**. Paris, UNESCO, 76p., 1998.

SILVA, A.L.M.S. **Águas subterrâneas: critérios em seu uso**. Fórum Internacional das Águas, 2003.

SILVA, J. M., SANTOS, A. B., OLIVEIRA, R. F. **Caracterização hidrogeológica do aquífero Tubarão no estado de São Paulo**. Revista Brasileira de Geociências, 52(3), 300-315, 2020.

SINGH, A. K., SINGHAL, D. C., GUPTA, R. P. **Application of geophysical methods for groundwater investigations in hard rock areas: a case study from Maheshpur, Sahibganj district, Jharkhand, India**. Environmental Earth Sciences, 2017, 76(3), 127.

SMA- Secretaria de Estado do Meio Ambiente do Estado de São Paulo. **Projeto GEF: Gerenciamento Integrado e Sustentável do Aquífero Guarani, 2000**.

SOPHOCLEOUS, M. **Groundwater resources assessment and management**. CRC Press. 2018.

SOUSA, R. T. et al. **Qualidade química das águas subterrâneas em áreas rurais do município de Altamira, Pará**. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, v. 22, n. 2, p. 137-143, 2018.

SOUZA, M. F., SANTOS, R. L., SOUZA, C. C., BEZERRA, M. T. **Caracterização hidrogeológica do Aquífero Alter do Chão no Estado do Pará, Amazônia Oriental, Brasil**. Revista Brasileira de Geociências, 50(3), 2020.

TEIXEIRA, W., WATANABE, M., AUN, N. **Caracterização hidrogeológica do Aquífero Barreiras no Estado da Bahia, Brasil**. Águas Subterrâneas, 2020, 34(1), 27-38.

TODD, D. K.; MAYS, L. W. **Groundwater Hydrology**. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 2005

TRIMMER, W.L. **Measuring well water level**, Extension Service: Oregon State University Sea Grant Extension Ec 136. 2000.

TUNDISI, J. G. **Água no século XXI: enfrentando a escassez**. 2 ed. São Carlos: RiMA, 2005.

UNESCO- United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. **Groundwater – A Hidden Resource, 2021**. Disponível em: <https://en.unesco.org/themes/water-security/>; Acessado 15 de janeiro de 2023.

USGS- United States Geological Survey. **Groundwater Use in the United States, 2021**. Disponível em https://www.usgs.gov/special-topic/water-science-school/science/groundwater-use-united-states?qt-science_center_objects=0#qt-science_center_objects; Acessado em 17 de janeiro de 2023.

VASCONCELOS, S. M. S.; TEIXEIRA, Z. A.; ALVEZ NETO, J. **Caracterização do Aquífero Jandaíra, porção situada no estado do Ceará, Brasil**. Revista de Geologia, Fortaleza, n.23, v.1, 2010.

Wrege, M. **Termos hidrogeológicos básicos**. Caderno Técnico ABAS, São Paulo,. Associação Brasileira de Águas Subterrâneas. 32p, n.4 ago. 1997

WSS – **Water Science School 2019** in <https://www.usgs.gov/special-topics/water-science-school>. Acessado em 15 de Março de 2022

Zhao, Y., Zhang, F., Liu, J., Chen, F. **Application of geophysical prospecting methods in deep groundwater exploration in Liaoning, China**. Environmental Earth Sciences, 202180(4), 152.

CLEISEANO EMANUEL DA SILVA PANIAGUA - Técnico em Química pelo Colégio Profissional de Uberlândia (2008), Bacharel em Química pela Universidade Federal de Uberlândia (2010), Licenciado em Química (2011) e Bacharel em Química Industrial (2023) pela Universidade de Uberaba, em Ciências Biológicas (2021) e em Física (2022) pela Faculdade Única. Especialista em Metodologia do Ensino de Química e em Ensino Superior pela Faculdade JK Serrana em Brasília (2012), especialista em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal do Triângulo Mineiro (2021), especialista em Ciências Naturais e Mercado de Trabalho (2022) pela Universidade Federal do Piauí (UFPI). Mestre em Química pela Universidade Federal de Uberlândia (2015), com ênfase no desenvolvimento de um bioadsorvente para remoção de íons As(V), Sb(III) e Se(IV) em diferentes matrizes aquáticas. Doutorado em Química pela Universidade Federal de Uberlândia (2018), com ênfase em Processos Oxidativos Avançados [fotocatálise heterogênea (TiO_2 /UV-A e TiO_2 /Solar, H_2O_2 /UV-C) para remoção de contaminantes de preocupação emergente (CPE) em diferentes matrizes aquáticas. Realizou o primeiro estágio de Pós-Doutoral (de maio de 2020 a abril de 2022) e cursa o segundo estágio (2022-atual) na Universidade Federal de Uberlândia com ênfase na aplicação de novos agentes oxidantes utilizando radiação solar para remoção de CPE em efluentes de uma estação de tratamento de esgoto. Atualmente é químico e responsável técnico pelos laboratórios da Unicesumar/Polo Patrocínio e atua nas seguintes linhas de pesquisa: (i) Desenvolvimento de novas metodologias para tratamento e recuperação de resíduos químicos gerados em laboratórios de instituições de ensino e pesquisa; (ii) estudos de acompanhamento do CPE; (iii) Desenvolvimento de novas tecnologias avançadas para remoção de CPE em diferentes matrizes aquáticas; (iv) Aplicação de processos oxidativos avançados (H_2O_2 /UV C, TiO_2 /UV-A e foto-Fenton e outros) para remoção de CPE em efluentes de estação de tratamento de efluentes para reuso; (v) Estudo e desenvolvimento de novos bioadsorventes para remediação ambiental de CPE em diferentes matrizes aquáticas; (vi) Educação Ambiental e; (vii) alfabetização científica e processos de alfabetização na área de Ciências Naturais, especialmente biologia e química.

A

Águas Residuais 83

Águas Subterrâneas 83, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 116, 120, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129

Águas Superficiais 105

Analyticity 1, 3, 5, 8, 16, 18, 19, 25, 27, 28, 30, 32, 33, 40, 53, 54

Anticoncepcionais 83, 98, 99

Aquecimento Global 66, 67, 69, 74, 75

Asymptotic Behavior 3, 4, 5, 6, 27, 29, 30, 32, 37, 53

B

Bioacumulação 78, 84, 98

Bioconcentração 83

Biodegradação 84, 85

Biomagnificação 84

Biossíntese 79, 80

Biotransformação 77, 78, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 95, 96, 97, 98, 101

Boxplot 56, 57, 60, 61, 62, 63, 64, 65

C

Cárstico 112, 120, 122

Ciclo Hidrológico 103, 105, 124

Cidade Esponjosa 74

Cidade Inteligente 73

Cobertura Vegetal 103, 114

Combustíveis Fósseis 57, 68, 72

Conference of the Parties 21 (COP 21) 67

D

Degradação Ambiental 57, 71

Disruptores Endócrinos 78

E

Eco-eficiência 71

Ecossistema 95, 98, 115

Ecotoxicidade 95, 96, 97, 98

Energia Renovável 71, 72
 Energia Sustentável 74
 Estações de Tratamento de Águas 83

F

Fármacos 83, 97
Fractional Damping 1, 2, 5, 28, 53, 54
 Franja de Capilaridade 104
 Fungos 77, 78, 84, 85, 86, 98, 100, 101

G

Gases de Efeito Estufa (GEE) 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75
Gevrey Class 1, 3, 5, 8, 9, 12, 19, 22, 28, 29, 30, 32, 47, 48, 50, 52, 54
 Gonano 79

H

Hormônios 77, 79, 80, 83, 84

I

Inclinação do Terreno 103
 Infiltração 103, 105, 112, 113
 Irradiância Difusa Horizontal (DHI) 56, 57, 58, 59, 61, 63, 64
 Irradiância Global Horizontal (GHI) 56, 57, 58, 59, 61, 62, 64
 Irradiância Solar 56, 58

L

Lipofilicidade 78, 95

M

MGT-Fourier System 30
 Microrganismos 77, 84, 85, 86, 99
 Mitigação 66, 67, 68, 69, 70, 72, 74, 75
 Mudança Climática 66, 67, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76

P

Pegada de Carbono 71, 73, 74
Penicillium oxalicum 77, 78, 79, 86, 88, 89, 91, 96, 101
 Potencial Hídrico 121, 122
 Pregnanediol Glicuronídeo 81

Progestágeno 79

Progesterona 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100

Província Hidrogeológica 116, 120

R

Recursos Hídricos 102, 108, 109, 119, 121, 123, 125, 126, 127, 128

Recursos Naturais 68, 73

Regularity 1, 3, 5, 9, 19, 28, 29, 30, 32, 33, 40, 53, 54

Rochas Sedimentares 103, 104, 110, 111, 119

S

Segurança Hídrica 106, 108

Semigroup Theory 1, 30, 32, 33

Sensoriamento Remoto 109

Sistema de Informação Geográfica 109

Sistemas Aquíferos 108, 115, 116, 121, 122, 123, 128

Stability 3, 5, 28, 29, 30, 31, 33, 37, 53, 54

Subaflorante 120

Subsolo 103, 106, 109, 122

X

Xenobióticos 78, 85

Ciências exatas e da terra:

teorias e princípios

2

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 

Ciências exatas e da terra:

teorias e princípios

2

www.atenaeditora.com.br 

contato@atenaeditora.com.br 

[@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora) 

www.facebook.com/atenaeditora.com.br 