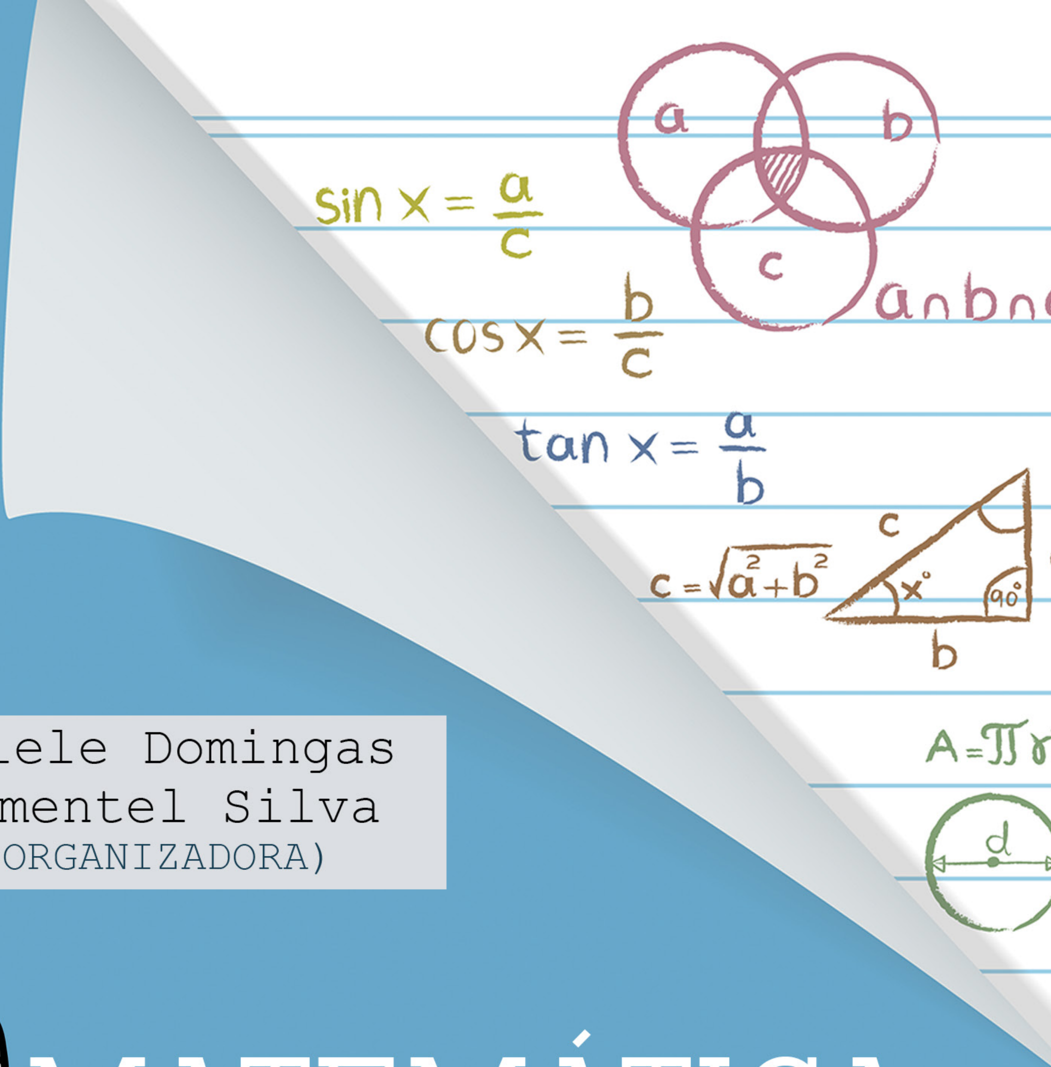
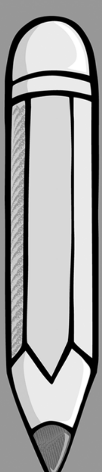


Aniele Domingas Pimentel Silva
(ORGANIZADORA)

MATEMÁTICA:
O sujeito e o conhecimento matemático
2

Atena
Editora
Ano 2023

Aniele Domingas Pimentel Silva
(ORGANIZADORA)



MATEMÁTICA:

O sujeito e o conhecimento matemático

2

Atena Editora
Ano 2023

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Camila Alves de Cremo
Ellen Andressa Kubisty
Luiza Alves Batista
Nataly Evilin Gayde
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Matemática: o sujeito e o conhecimento matemático 2

Diagramação:	Camila Alves de Cremo
Correção:	Maiara Ferreira
Indexação:	Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão:	Os autores
Organizadora:	Aniele Domingas Pimentel Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M425 Matemática: o sujeito e o conhecimento matemático 2 / Organizadora Aniele Domingas Pimentel Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2023.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-1382-0
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.820232606

1. Matemática. I. Silva, Aniele Domingas Pimentel (Organizadora). II. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

APRESENTAÇÃO

A coleção “Matemática: O sujeito e o conhecimento matemático 2” é uma obra que aborda em seus capítulos, a aplicação do conhecimento matemático em várias linhas de estudos e pesquisas, como educação, telecomunicações e matemática pura.

O objetivo central é publicizar estudos desenvolvidos por pesquisadores, cujas investigações vão desde a educação básica até o ensino superior, são temas diversos e interessantes que tem como elo de ligação a matemática.

Deste modo, os trabalhos que compõem a coletânea “Matemática: O sujeito e o conhecimento matemático 2”, reforçam a importância do conhecimento científico e apresentam possibilidades e potencialidades da matemática em vários cenários de investigação.

Desejo uma boa leitura e que ao final você possa ser instigado a fazer novas pesquisas.

Boa leitura!

Aniele Domingas Pimentel Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

CARTEMÁTICA: UMA METODOLOGIA ATIVA PARA UMA APRENDIZAGEM CRIATIVA EM MATEMÁTICA

Data de aceite: 02/06/2023

Cristina Lúcia Dias Vaz
Universidade Federal do Pará-UFPA, Belém-PA
http://lattes.cnpq.br/5829728118120411

Edilson dos Passos Neri Júnior
Universidade Federal do Pará-UFPA, Belém-PA
http://lattes.cnpq.br/5917661277687347

Helena do Socorro Campos da Rocha
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará- IFPA, Belém-PA
http://lattes.cnpq.br/3955516512057842

RESUMO: O texto apresenta a metodologia ativa Cartemática enquanto fomentadora de uma aprendizagem criativa em Matemática. Objetiva ressignificar o conceito de cartografia, para pensar uma proposta metodológica cuja concepção foi inspirada na filosofia deleuziana. As ideias iniciais da Cartemática surgem entrelaçadas ao método de pesquisa chamado *cartografia* com pistas propostas por Passos, Kastrup e Escóssia (2015). Trata-se da aplicação da metodologia em encontros que aconteceram nos territórios da Matemática e Arte onde apresentaremos os mapas de aprendizagem das cartografias realizadas sobre os rumos, os rumores e os tremores provocados pela *Cartemática* nestes territórios. São registros que pretendem materializar o subjetivo e os vestígios dos processos de aprendizagem. Entre as mais variadas ferramentas pedagógicas que podemos criar ou nos apropriar para acompanhar processos destacamos as seguintes: Inventário artístico-pedagógico; Itinerário artístico-pedagógico, Diário de Impressões, Caixa de inspiração, Glossário criativo e Livro-objeto. A metodologia se propõe à realização de dois processos: Cartocurar e Cartofazer. E, após a apresentação das principais ações realizadas em um minicurso com aplicação da metodologia, entendemos que a Cartemática é um dos muitos caminhos, uma trajetória possível, um mapa móvel sempre em construção que oferece uma encantação. Cabe a cada um escolher o seu caminho e deixar-se envolver durante o trajeto.

PALAVRAS-CHAVE: Cartemática; Metodologia ativa; Aprendizagem criativa; Matemática; Cartografia.

CARTHEMATICS: AN ACTIVE METHODOLOGY FOR CREATIVE LEARNING IN MATHEMATICS

ABSTRACT: The text presents the Kartemática active methodology as a promoter of creative learning in Mathematics. It aims to redefine the concept of cartography, in order to think of a methodological proposal whose conception was inspired by Deleuzian philosophy. The initial ideas of Cartemática emerge intertwined with the research method called cartography with clues proposed by Passos, Kastrup and Escóssia (2015). This is the application of the methodology in meetings that took place in the territories of Mathematics and Art where we will present the learning maps of the cartography carried out on the directions, rumors and tremors caused by Cartemática in these territories. They are records that intend to materialize the subjective and the vestiges of the learning processes. Among the most varied pedagogical tools that we can create or appropriate to monitor processes, we highlight the following: Artistic-pedagogical inventory; Artistic-pedagogical itinerary, Impressions Diary, Inspiration box, Creative glossary and Book-object. The methodology proposes the realization of two processes: Cartocurar and Cartofazer. And, after the presentation of the main actions carried out in a mini-course with the application of the methodology, we understand that Cartemática is one of the many paths, a possible trajectory, a mobile map always under construction that offers an enchantment. It is up to each one to choose their path and let themselves be involved along the way.
KEYWORDS: Carthematics; Active methodology; Creative learning; Mathematics; Cartography.

1 I RUMOS, RUMORES E TREMORES

Viajar!
Perder países!
Ser outro constantemente,
Por a alma não ter raízes
De viver de ver somente!
(Fernando Pessoa)[1]

Aqui iniciaremos uma viagem de *perder-se para encontrar-se*. *De ser outro constantemente...*

Uma viagem nos territórios subjetivos do ensino e da aprendizagem. Um percurso para ressignificar saberes, revisar significados, inventar mapas, revisitar lugares, recriar ideias. Atentos aos caminhos, aos detalhes, aos sinais e a tudo que possa nos transformar para traçarmos os mapas dos percursos - mapas de ensino e aprendizagem - que formarão um desenho metodológico, aqui chamado *Cartemática: uma metodologia ativa para uma aprendizagem criativa.*

Para compor a metodologia *Cartemática,* nos apropriaremos do conceito de *cartografia*, proposto pelos filósofos franceses Gilles Deleuze e Félix Guattari na Introdução do livro *Mil Platô* (DELEUZE & GAUTTARI, 1995). Para Deleuze e Guattari a cartografia surge

1 Fernando Pessoa, **Poesias**. Lisboa, Ática, 1942, (15ª ed. 1995), 182.

como um princípio do rizoma, com múltiplas entradas, onde as realidades cartografadas se apresentam como um mapa móvel. Uma cartografia que se apresenta como um método a ser experimentado e assumido como atitude (PASSOS, KASTRUP; ESCÓSSIA, 2015). Aqui pretendemos ressignificar este conceito, para pensar uma proposta metodológica que tem como inspiração na sua concepção a filosofia deleuziana. Filosofia que inspirou e provocou uma série de questionamentos e ações que culminaram na *Cartemática.*

As ideias iniciais da metodologia surgem entrelaçadas ao método de pesquisa chamado *método da cartografia* com pistas propostas por Passos, Kastrup e Escóssia (2015). Este método caracteriza-se por ser um modo de acompanhar processos, de perceber as conexões em redes, de possibilitar o acompanhamento de movimentos e a construção de mapas. Cartografar, portanto, propõe experimentar encontros para fazer falar aquilo que é subjetivo, para acessar a experiência de cada um, para fazer conexões e desenhar mapas, sem previamente sabermos o caminho e onde se chegará. O percurso é construído ao longo do processo.

Pretendemos cartografar em territórios que conectam e relacionam dois ou mais campos específicos do conhecimento. Estrategicamente, a Arte será um destes campos, por que desperta emoções e reflexões e permite aflorar a sensibilidade. Deste modo, a *Cartemática* é uma prática metodológica interdisciplinar que será construída nos atravessamentos que acontecerão no ensino e aprendizagem de uma ou mais disciplinas com a Arte. Visa promover uma educação do olhar através do diálogo entre saberes e das experiências compartilhadas nos encontros ao longo do processo. Olhar que pretende observar, revisitar, refletir, captar sinais e traçar caminhos acerca das conexões que tangem as relações entre saberes. Diálogo que pretende escutar diferentes vozes, perceber as interfaces e as conexões, descobrir as interações e confluências para desenhar mapas e percursos.

Utilizar-se da cartografia como metodologia é apostar na percepção das coisas pela experiência de deixar-se afetar, entendendo *experiência com algo que nos passa, que nos acontece, que nos toca[...] aprendemos para transformar o que somos, para que algo nos aconteça, para que algo se apodere de* nós (LARROSA, 2014). O caminho da aprendizagem, então, é um caminho de tateio e sentidos, de encontros e buscas, de abandonos de bagagens, de descobertas, de experiências que tocam, de sensações que atravessam os sentidos.

Na *Cartemática* busca-se perceber o movimento de aprender, seus processos, seus sinais, suas transformações, seus ressignificados, seus laços de afeto, suas marcas. Busca-se estabelecer conexões entre saberes para o mapeamento de uma aprendizagem que envolve entendermos quem somos, o que pensamos e o modo como nos relacionarmos com o mundo. Busca-se um modo poético de registrar e escrever este movimento. Poética que se traduz na narrativa dos processos, na produção criativa dos conteúdos, nas produções estéticas dos mapas e na autoaprendizagem poética.

> [...] Aprender é uma questão de acreditar-se vivo, ser barro ou cobre nos dedos artesanais dos minutos com toda a dignidade de um pintassilgo que mesmo preso no visgo canta seu código ao mundo desacreditando-se de gaiolas e viveiros [...]

Mapear os territórios de aprendizagem, experimentar práticas artísticas, ressignificar conceitos, interligar saberes são ações que indicam os princípios que balizam a *Cartemática*. Uma metodologia que pretende estimular criatividade e provocar experiências interdisciplinares para promover uma aprendizagem ativa e criativa.

Aqui exploraremos as experiências e os encontros que aconteceram nos territórios da Matemática e Arte e apresentaremos os mapas de aprendizagem das cartografias realizadas sobre os rumos, os rumores e os tremores provocados pela *Cartemática* nestes territórios. São registros que pretendem materializar o subjetivo e os vestígios dos processos de aprendizagem. Registros das coisas lidas, ouvidas, experimentadas, pensadas e sentidas... que pretendem *dar visibilidade ao invisível*.

2 | HORIZONTES, PONTES, VIAJANTES.

Existe sempre uma geografia que corresponde a um temperamento. Resta descobri-la (ONFRAY, 2007). Ao escolhermos a *Cartemática*, acreditamos que existe uma cartografia que corresponde a uma aprendizagem criativa, resta descobri-la, por isto, nesta viagem é recomendável fazer alguns preparativos, algumas escolhas, sonhar alguns caminhos para nutrir o nosso desejo de viajar pelos territórios eleitos. Para isto, vamos refletir sobre o conceito de *aprendizagem criativa* que sempre será o guia da nossa viagem.

Aqui elegemos uma abordagem de criatividade que se nutre dos ensinamentos do psicanalista inglês Donald Winnicott e da sensibilidade da artista Fayga Ostrower. Para Winnicott (2016), a ação criativa depende do desenvolvimento emocional e de relações afetivas com o ambiente, relações que favoreçam uma boa construção do *self,* possibilitando uma liberdade criativa. Nesta perspectiva, o desenvolvimento pessoal e o amadurecimento desempenham um papel importante no processo criativo:

> Seja qual for a definição a que cheguemos, ela deve incluir a ideia que a vida vale a pena (ou não), ser vivida, a ponto de a criatividade ser (ou não) uma parte da experiência de vida de cada um (WINNICOTT, 2016, p. 23).

Portanto, a criatividade para Winnicott se relaciona à capacidade de viver a vida de forma plena e satisfatória e está apoiada numa noção existencial (não existencialista) e para ele, criativo é aquele que desfruta da experiência de estar vivo. Entendida desse modo, a criatividade é um atributo do existente que desfruta da sua própria vida. Assim, Winnicott atribui importância ao conceito de criatividade e à relação deste conceito com o ambiente, com o amadurecimento pessoal e com o brincar: “É no brincar, e somente no brincar, que o indivíduo criança ou adulto, pode ser criativo e utilizar sua personalidade integral; e é somente sendo criativo que o indivíduo descobre o eu (self)” (1971, p. 80 *apud* CICCONE, 2013, p. 4).

Na vida sem criatividade o sentimento de futilidade é expressivo, um viver sem sentido, um viver que não vale à pena. Um viver não criativo corresponde a uma vida sem liberdade, sem a possibilidade de expressar a si mesmo, uma vida em que impera a submissão, uma vida falsa (1971, p. 95 *apud* CICCONE, 2013, p. 112).

Notemos que a perspectiva que Winnicott propõe sobre a criatividade, transfere o foco do processo criativo, talento ou produto artístico, para o viver, ou melhor, para o fundamento da existência e, nesse sentido criatividade é algo que dá colorido à vida, algo que promove um viver próprio e original e permite entendermos que a vida vale a pena ser vivida.

Para Ostrower (2014), a criatividade é um potencial que devemos realizar como pessoa, buscando nos encontros com a vida, nas experiências concretas e nas conquistas da maturidade seus contornos e suas inspirações. É um processo dinâmico que ocorre em múltiplos níveis revelando novas facetas em cada um. Deste modo, criatividade é um potencial inerente ao ser humano e a sua realização uma das suas necessidades e o criar só pode ser visto como um agir integrado do viver humano que se elabora e desenvolve num contexto cultural. Assim, Ostrower enfatiza que a criatividade é algo do ser, um potencial humano que impulsiona um agir integrado com o meio cultural e individual e os processos oriundos deste potencial estão intimamente interligados a nossa sensibilidade. Sensibilidade compreendida como uma abertura constante ao mundo e que nos liga de modo imediato ao que acontece em torno de nós por ser a porta de entrada das nossas sensações (OSTROWER, 2014). Para a artista,

> Mais fundamental e gratificante, sobretudo para o indivíduo que está criando, é o sentimento concomitante de reestruturação, de enriquecimento da própria produtividade, de maior amplitude do ser, que se libera no ato de criar [...] Daí o sentimento do essencial e necessário no criar, o sentimento de um crescimento, interior, em que nos ampliamos em nossa abertura para a vida. (OSTROWER, 2014, p. 28).

Notemos os entrelaçamentos entre as abordagens de Winnicott e Ostrower sobre criatividade, ambas permitem entendermos a criatividade como um modo de viver que cria ou recria o mundo com toque pessoal e original. É um (re)aprender criativo, uma ação de (re)construir a realidade de um modo próprio, original e autêntico. Um conceito que se interliga com o significado de aprendizagem defendido por Paulo Freire (2011). Freire afirma que ninguém ensina nada a ninguém em um movimento de transferência, mas em um processo que oferta condições para uma produção própria, que se origina no aprendiz, na bagagem que este carrega consigo, em seu repertório. Trata-se de um entendimento do processo de aprender como um esforço pessoal (esforço pessoal original) que se torna efetivo (ou significativo) a partir do momento em que o aprendizado se constrói com base na experiência de vida do sujeito, acionando elementos de seu cotidiano e de suas vivências.

Se no contexto da teoria de Winnicott, criatividade significa a capacidade de a tudo olhar com se fosse a primeira vez, no contexto da aprendizagem na concepção pedagógica de Paulo Freire, esse olhar de descoberta também é essencial para despertar o encantamento do aprendiz pelo objeto a conhecer, na duas concepções, os autores evocam uma percepção da realidade de um jeito próprio e original, ou seja, um modo de viver que cria ou recria o mundo com toque pessoal e original, sendo a ação criativa uma ação de (re)cria um mundo que já existe com as marcas pessoais daquele que o reinventou, fruto do seu potencial e da sua sensibilidade, como afirma Ostrower (2014).

Deste modo, nossa criatividade e aprendizagem precisam se interligar aos encontros que desafiam a nossa sensibilidade e a nossa potência, aqui entendida no sentindo de Deleuze como aquilo que realmente podemos fazer e fazemos, para provocar ações de criação originais e autênticas. Percebemos que encontros se nutrem das vivências que integram diferentes saberes e que geram experiências interdisciplinares. Experiência, no sentido que Larrosa coloca como, algo que nos passa, que nos acontece, que nos toca, que nos transforma e interdisciplinaridade como uma postura, uma atitude, um modo de pensar que permite a construção de conhecimento de forma integrada e colaborativa. “A real interdisciplinaridade é antes uma questão de atitude. Supõe uma postura única diante dos fatos a serem analisados, mas não significa que pretenda impor-se, desprezando suas particularidades” (FAZENDA, 2011, p.59 *apud* OLIVEIRA; SANTOS, 2017, p. 76). Neste sentido, busca-se a construção de um diálogo entre saberes, a construção integrada e colaborativa de conhecimento e a possibilidade de uma experiência interdisciplinar, de tal modo que, na descoberta de proximidades e diferenças, intersecções e confluências, algo nos aconteça, nos toque e nos afete e nos transforme.

Criatividade, aprendizagem, experiência, sensibilidade, interdisciplinaridade são os princípios inspiradores da *Cartemática,* uma metodologia ativa elaborada para promover o protagonismo do aprendiz durante o seu processo de aprendizagem, mapeando os percursos através de cartográficas que tornarão visíveis os processos, os insights, as conexões interdisciplinares. É um poderoso instrumento de *criação pedagógica e artística* capaz de promover no aprendiz intensa reflexão intelectual e favorecer a visualização de seus percursos de aprendizagem.

Por buscar mapear percursos de aprendizagem e deixar falar o subjetivo, os procedimentos e estratégias da metodologia *Cartemática* são múltiplas linhas que nos atravessam, que se misturam, que se conectam e nos afetam de forma intensa provocando experiências e (re)criação de conhecimento. No contexto de Deleuze e Guattari, são linhas de segmentaridade maleáveis e linhas de fuga. As linhas de segmentaridade maleáveis são linhas rizomáticas que vão se compondo no percurso de aprendizagem, construído pelo aprendiz. As linhas de fuga são linhas de ruptura que provocam verdadeiros rompimentos e que algumas vezes precisam ser inventadas durante o processo.

Uma Metodologia Ativa

Na Cartemática o aprendiz é o protagonista e autor da sua aprendizagem, é aquele que imprime a sua marca pessoal e seu jeito próprio, sensível e original de (re)criar saberes. É o sujeito da experiência interdisciplinar que busca o diálogo entre saberes num movimento de abertura, se expondo e permitindo que algo lhe aconteça, que algo o afete para se transformar durante o processo. Busca com a cartografia construir conhecimento *com* o outro e não conhecimento a partir do outro. Deste modo, esta é uma linha de fuga da metodologia, pois é uma ruptura do processo tradicional de ensino e aprendizagem.

Acompanhar processos de aprendizagem

A *Cartemática* é um modo de acompanhar processos de aprendizagem ancorados numa prática interdisciplinar que busca mapear como estes processos se manifestam, como surgem, como se espalham em intensidade, como transformam e como compõem novos caminhos. Deste modo, esta também é uma linha de fuga da metodologia, pois rompe com a postura tradicional que, em geral, enfatiza apenas nos resultados.

Entre as mais variadas ferramentas pedagógicas que podemos criar ou nos apropriar para acompanhar processos destacamos as seguintes:

Inventário artístico-pedagógico

Instrumento pedagógico de busca, identificação, registro e apresentação de referências pessoais. Um relicário de si, registro das experiências como forma de recriar saberes os territórios da Matemática e Arte. Inventariar lembranças, experiências, sentimentos e as memórias afetivas oriundas do patrimônio acadêmico, cultural e artístico e seus reflexos sobre cada um, para buscar os vestígios da aprendizagem nos territórios da Matemática e Arte, acionando a história pessoal e as memórias nas diferentes (re)leituras sobre o aprendizado adquirido. Aqui, trata-se de autorrelatos para explorar o repertório pessoal, cultural e acadêmico do aprendiz e seus processos de aprendizagem.

São provocações que impulsionarão os movimentos de cartografara aprendizagem. Propomos a construção de um inventário composto por, no mínimo, 30 perguntas sobre os saberes que serão explorados e investigados. Trata-se da produção de um caderno artesanal ou digital, criativo e artístico, contendo as respostas às perguntas propostas. Espera-se que o inventário seja confeccionado em três momentos distintos chamados de *prelúdio, intermédio e posfácio*:

Prelúdio: fase inicial do processo de autoconhecimento e aprendizagem do aprendiz ao inventariar suas vivências e seus afetos sobre os conteúdos propostos. Constará de até 10 perguntas escolhidas pela mediadora do processo sobre **Quem sou?**

Intermédio: fase intermediária de autoconhecimento e aprendizagem do aprendiz ao inventariar suas vivências e seus afetos durantes os processos e confecção produtos propostos. Constará de até 10 perguntas escolhidas pela mediadora do processo sobre **Como estou?**

Posfácio: fase de reflexão e feedback da aprendizagem vivenciada e experimentada. Constará de até 10 perguntas escolhidas pelo inventariante sobre **Onde cheguei e para onde eu vou?**

Em cada um destes momentos, a mediadora do processo de aprendizagem, com o objetivo de estimular uma escrita criativa, poderá sugerir a narrativa a ser usada pelo inventariante.

Refletir sobre o seu patrimônio cultural e acadêmico e as vivências durante o processo, comunicando-o, estabelecendo memórias e compreensão, é uma forma de ressignificar conceitos e conhecimentos. Inventariar seu próprio patrimônio cultural e acadêmico e as vivências durante o processo é construir um discurso autorreflexivo e sensível, não apenas descritivo, capaz de contribuir para uma aprendizagem ativa, criativa e significativa.

Como proposta de uma aprendizagem criativa, que prima pela vivência da subjetividade e da criação, o formato do inventário, também é um convite ao lúdico. Espera-se que as respostas sejam ilustradas com imagens, poemas, nuvem de palavras, mapas mentais, desenhos, ilustrações, montagens fotográficas ou esculturas em papel, entre tantas outras possibilidades, recheadas de sentidos, afetos, significados, proporcionando experiências e encontros.

Entre os processos que podem ser captados pelo inventário destacamos os seguintes:

- (re)construção de saberes adquiridos em sua formação cultural e acadêmica;
- ressignificação de saberes e afetos para construção novos conhecimentos e também novos afetos;
- rememorar lembranças, pensamentos e impressões acumulados resultantes das experiências individuais e/ou coletivas de sua aprendizagem num campo de saberes interdisciplinares;
- construção de narrativas que possam visibilizar memórias e afetos, ativando um devir no aprendiz, essencial para a sua aprendizagem.

A figura 1 apresenta as capas do inventário, no formato de um caderno digital, do discente Franco Sério da disciplina Matemática e Arte, ministrada por Cristina Vaz no programa de pós-graduação de Criatividade e Inovação em metodologias do ensino superior – PPGCIMES da Universidade Federal do Pará, em 2021. Foi sugerida a narrativa cinematográfica e a criação de um avatar.

Figura 1: Inventário artístico-matemático

Fonte: autor Franco Sério, 2021.

Itinerário artístico-pedagógico

Instrumento pedagógico para traçar os caminhos e territórios que se pretende cartografar, demarcando as possíveis trajetórias interdisciplinares e idealizando mapas de vivências, experiências, aprendizados e afetos. Interessa-nos um itinerário que possibilite imaginar os caminhos e as condições de caminhar para inspirar as cartografias que serão produzidas. Entendemos que o itinerário é dinâmico e será construído ao longo do processo. Os territórios principais que compõem o trajeto do itinerário são: metodológico, conexões interdisciplinares e cartografias temáticas propostas pela mediadora do processo de aprendizagem. O principal processo estimulado pelo itinerário é a construção de uma trilha de aprendizagem e os produtos são mapas artesanais ou digitais.

A figura 2 apresenta o itinerário inicial, no formato de carta, da discente Maria José de Sousa da disciplina Matemática e Arte, ministrada por Cristina Vaz no PPGCIMES em 2021 e a figura 3 apresenta o itinerário de Helena Rocha, no formato de desenho, produzido no minicurso Matemática, Tecnologia e Arte: conexões metodológicas da II Escola de estudos avançados pesquisa em cultura, história e educação matemática em 2020.

PRIMEIRO ITINERÁRIO DE MARIA

INICIEI MINHA VIAGEM NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA E ARTE E JÁ ESTOU ADENTRANDO EM UM UNIVERSO INCRIVELMENTE DIFERENTE. E DESAFIADOR.TEM SIDO MUITO COMPLEXO O EXERCÍCIO DO OLHAR NO SENTIDO DA EDUCAÇÃO DESSA PERCEPÇÃO DO OLHAR ATENTO E INTERDISCIPLINAR PERANTE AS CONEXÕES ENTRE MATEMÁTICA E ARTE.

NESSE SENTIDO QUERO DIVIDIR MEU PRIMEIRO ITINERÁRIO, RELATIVO ÀS ESTRADAS, AOS CAMINHOS QUE IREI TRAÇAR PARA CONSTRUIR PENSAMENTOS E VIVENCIAR NOVAS EXPERIÊNCIAS COM OS DESAFIOS PROPOSTOS NA DISCIPLINA.

PARA CADA VIAGEM QUE FAZEMOS TEMOS QUE NOS PREPARAR E COM ESSA NOVA VIAGEM QUERO FAZER ARRUMAR MINHA BAGAGEM, MEUS MAPAS, SUPRIMENTOS ESSENCIAIS E DIÁRIO PARA DESCREVER MINHAS EXPERIÊNCIAS E DIFICULDADES ENCONTRADAS NESSE CAMINHAR.

NO MEIO DO CAMINHO
CARLOS DRUMMOND DE ANDRADE

NO MEIO DO CAMINHO TINHA UMA PEDRA
TINHA UMA PEDRA NO MEIO DO CAMINHO
TINHA UMA PEDRA
NO MEIO DO CAMINHO TINHA UMA PEDRA
NUNCA ME ESQUECEREI DESSE ACONTECIMENTO
NA VIDA DE MINHAS RETINAS TÃO FATIGADAS
NUNCA ME ESQUECEREI QUE NO MEIO DO CAMINHO
TINHA UMA PEDRA
TINHA UMA PEDRA NO MEIO DO CAMINHO
NO MEIO DO CAMINHO TINHA UMA PEDRA...

A TRILHA JÁ SE APRESENTA DESAFIADORA, NO ENTANTO, QUERO NESTA ENCONTRAR PEDRAS, COLECIONÁ-LAS E TORNÁ-LAS BOAS LEMBRANÇAS DA CONSTRUÇÃO DESSA APRENDIAGEM...

Figura 2: Itinerário

Fonte: autora Maria José Sousa Lima, 2021.

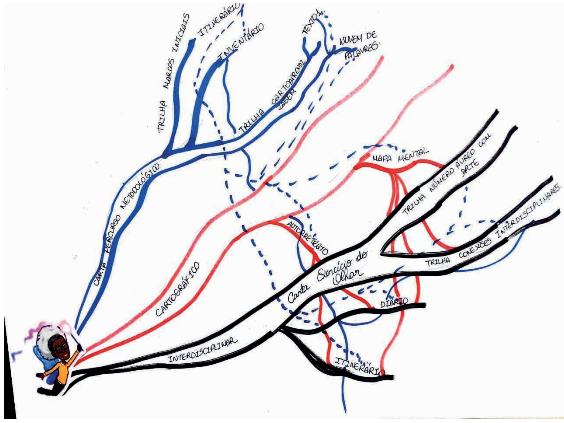


Figura 3: Itinerário

Fonte: autora Helena Rocha, 2020.

Diário de impressões

Instrumento pedagógico de autorregistros das impressões, vivências e aprendizados. Impressão, aqui tomada no sentido que impressionar, aquilo que abala, que marca, que causa um atravessamento nos entrelaçamentos dos saberes. Registro das coisas lidas, ouvidas, experimentadas, pensadas e sentidas. É a matéria-prima das cartografias que serão produzidas e tem por objetivo colaborar com a produção do conhecimento. É uma ferramenta de registro verbal e/ou visual de informações, que desempenha o papel de armazenamento de experiências que poderão ser posteriormente revividas ou ressignificadas.

Entre os processos que podem ser captados pelo diário destacamos os seguintes:

- produção de narrativas de aprendizagem;
- produção de desenhos, mapas, percursos de aprendizagem;
- ressignificação saberes e afetos para construção novos conhecimentos e também novos afetos;
- construção das conexões interdisciplinares.

A figura 4 apresenta o diário de impressões, no formato de caderno artesanal, da discente Mayara Vieira da disciplina Matemática e Arte, ministrada por Cristina Vaz no PPGCIMES em 2019.

Figura 4: Diário de impressões

Fonte: autora Mayara Vieira, 2019.

Caixa de inspiração

Instrumento pedagógico de curadoria que busca a complementação de saberes interdisciplinares. Trata-se de uma curadoria coletiva de conteúdos capaz de provocar experiências e vivências que possibilitem ampliar o olhar e o repertório cultural dos aprendizes. Trata-se da confecção de uma *Caixa de inspiração* contendo, no mínimo, três atividades inspiradas no inventário artístico-matemático e que tem com objetivo complementar a aprendizagem, o que significa propor atividades sobre conteúdos que não foram tratados, mas que estejam relacionados com os conteúdos investigados. As atividades propostas devem ser das seguintes categorias: visitação, criação e inspiração. Espera-se que cada *Caixa* contenha, no mínimo, uma atividade por categoria. As *Caixas* serão confeccionadas em pares. Uma dupla confeccionará a *Caixa* de outra dupla, sendo que cada caixa conterá, no mínimo, duas atividades individuais e uma coletiva. Espera-se que os participantes de cada dupla exercitem a sensibilidade e a criatividade na escolha das atividades. As atividades têm como objetivo a aplicação dos conceitos e processos propostos. As duplas terão momentos para socializar o processo de criação e confecção da *Caixa*. A dinâmica de socialização será escolhida pelas duplas de participantes. Dentre os mais variados contextos artísticos que possam inspirar a escolha das atividades citamos: fotografia, música, cinema, literatura, poesia, teatro, esculturas, arquitetura.

E por que uma *Caixa*? Talvez porque remeta aos tesouros mais preciosos que são “guardados” em uma caixa. Talvez uma caixa de sonhos, de afetos, de sentimentos, de conhecimentos.... um baú de guardados. Este será um baú diferente, que irá inspirar, ensinar e afetar. A *Caixa* será um encontro, um encontro para se compartilhar sentimentos e conhecimentos. Uma troca de conhecimentos, de olhares, de impressões, de perspectivas e de sugestões para promover a educação do olhar.

> Educar é mostrar a vida a quem ainda não a viu. O educador diz: "Veja!" e, ao falar, aponta. O aluno olha na direção apontada e vê o que nunca viu. Seu mundo se expande. Ele fica mais rico interiormente… E ficando mais rico interiormente ele pode sentir mais alegria – que é a razão pela qual vivemos. (RUBEM ALVES)[2]

A figura 5 apresenta a caixa de inspiração confeccionada pelas duplas de discentes Luciano Begot e Marcélia Assis para a dupla de discentes Mayara Vieira e Helena Rocha da disciplina Matemática e Arte, ministrada por Cristina Vaz no PPGCIMES em 2018.

Figura 5: Caixa de inspiração

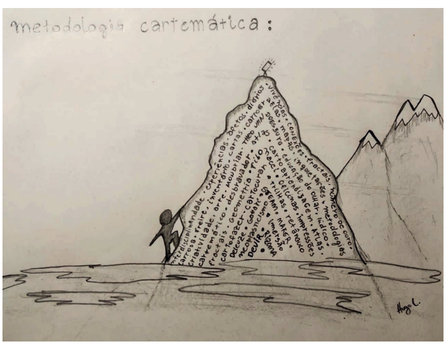
Fonte: autores Luciano Begot e Marcelia Assis, 2018.

Glossário Criativo

Instrumento pedagógico de busca por conexões interdisciplinares. Trata-se da produção de um glossário criativo com palavras que relacionem, interliguem, conectem e integrem os saberes interdisciplinares vivenciados e experimentados durante o processo de aprendizagem. Trata-se da criação de verbetes que explorem a criatividade, a sensibilidade e a interdisciplinaridade dos participantes. Lembrando que *Verbete*[3] é um texto escrito, de

2 https://mscamp.wordpress.com/2010/10/15/educar-rubem-alves/. Acesso 06/4/2023.
3 Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Verbete

caráter informativo, destinado a explicar um conceito ou uma palavra atribuindo-lhe um conjunto de significados e exemplos. O *verbete* é essencialmente destinado a consulta, o que lhe impõe uma construção discursiva sucinta e de acesso imediato, embora isso não implique necessariamente que deve ser curto. Geralmente, os verbetes abordam conceitos bem estabelecidos, com a intenção de apenas informar. Como *Verbete Criativo* entendemos um verbete que privilegia a imaginação, a criatividade e a poética para estimular a educação do olhar. Cada participante selecionará palavras inspirado nas conexões e experiências vivenciadas durante o seu processo de aprendizagem e criará um verbete com cada palavra escolhida, privilegiando a originalidade e a interdisciplinaridade. O resultado final será um glossário criativo produzido por todos os participantes. Na figura 6 temos os verbetes criados por Hugo Lima e Marcélia Assis no minicurso Matemática, Tecnologia e Arte: conexões metodológicas da II Escola de estudos avançados pesquisa em cultura, história e educação matemática em 2020. Note que o verbete de Hugo Lima é verbete visual e textual.



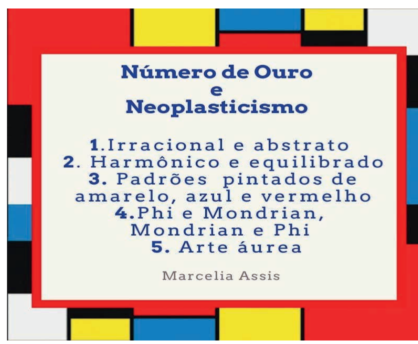


Figura 6: Verbetes criativos

Fonte: autor Hugo Lima, 2020. Fonte: autora Marcelia Assis, 2020.

Livro-objeto

Instrumento pedagógico de criação artística e acadêmica. Trata-se da confecção de um atlas, no formato de um livro-objeto, com as cartografias e os itinerários produzidos pelos participantes durante seus processos de aprendizagem. Aqui nos apropriamos de um objeto artístico que é a produção de um livro, artesanal cuja narrativa estimula a manipulação, a imaginação e a ludicidade, pois dialogam com a escultura de papel, com o desenho, com as colagens, com a fotografia, com o texto escrito, com a poesia concreta, etc. Misturam diferentes narrativas que permitem aos seus autores expressarem, de forma original e única, sua visão de vida e de mundo. Na construção de um livro-objeto vários aspectos do livro podem ser explorados plasticamente como, por exemplo, o prazer intelectual através do texto ou de um poema, mas também o prazer táctil e visual, pois busca manter uma relação de interatividade com o leitor. A grande maioria dos artistas produzem livros-objetos, podem ser os livros do artista, seus cadernos de anotações, de inspirações, de impressões ou obras de arte a serem manipuladas e experimentadas. Para Santaella (2005, p.134),

> além das linguagens crescerem à medida em que um novo veículo ou meio é inventado, as linguagens crescem entre os ‘casamentos dos meios’; isto é, na transversalidade dos meios, nos cruzamentos intersemióticos e/ou interdisciplinares.

Portanto, trata-se da produção de livros-objetos em diferentes formatos que envolvam dos conteúdos abordados. Assim, para a escolha do formato do livro-objeto são realizadas curadorias sobre diferentes formatos de livros-objetos. Além disso, é produzido um desenho pedagógico por livro com o objetivo de descrever seus aspectos pedagógicos. O resultado final será um Atlas composto por todos os livros-objetos produzidos.

A figura 7 apresenta três livros-objeto, nos formatos de cartas, sanfonado e pop-up, produzido pelo discente Renan Vale da disciplina Matemática e Arte, ministrada por Cristina Vaz no PPGCIMES em 2021.

Figura 7: Livros-objeto

Fonte: autor Renan Vale, 2021.

Cartografar conexões interdisciplinares

A *Cartemática* é um modo de cartografar conexões interdisciplinares para promover um diálogo entre saberes. Diálogo que pretende escutar diferentes vozes, perceber as interfaces e as conexões, descobrir as interações e confluências para desenhar mapas e percursos. Diálogo que se traduz em olhares múltiplos que possibilitem leituras diversas e pertinentes que se ampliam e se iluminam num processo contínuo de ressignificação e construção de conhecimento e na tentativa de captar a multiplicidade da existência humana, considerando as necessidades básicas do homem em busca da compreensão de si, do outro e do mundo.

Esta linha apresenta-se como uma linha rizomática por indicar que existem diferentes possibilidades de conexões, interações e intersecções.

Aqui propomos a realização de dois processos: CARTOCURAR e CARTOFAZER. O processo de CARTOCURAR envolve a realização de uma curadoria de conteúdos que pode ser entendida como uma imersão nos territórios da Matemática e Arte aplicando-se o método da *Cartemática* e se materializará na produção de cartografias interdisciplinares.

O processo de *CARTOFAZER* é o momento de interpretar as curadorias realizadas, buscando as conexões interdisciplinares e se materializará nas cartografias e nos produtos criativos. Podem ser *exercícios de criatividade* (colagens, poemas, jogos, atividades lúdicas, entre outros) e/ou *produções autorais* (produções digitais, animações, objetos 3D, Guias, e-books, entre outros).

Narrativa metodológica

A narrativa metodológica se configura como uma ousada aventura de autoria onde professores e alunos produzirão narrativamente os conteúdos que compõem o processo de ensino e aprendizagem. Visa estimular a produção autoral dos conteúdos que serão produzidos durante o processo. É uma subversão ao modo tradicional ensinar e aprender, é um exercício de escrita que ajuda a pensar melhor, refletir com clareza e encantar o leitor.

Adotar uma narrativa é apostar na percepção das coisas pela experiência poética. Poética que se traduz na narrativa criativa do planejamento, da produção escrita, do inventário, do diário, entre outras inúmeras possibilidades, permitindo-se ensinar e aprender com o devaneio e o encantamento, vislumbrando novos caminhos e promovendo a educação do olhar. Deste modo, esta linha apresenta-se como uma linha de fuga metodológica.

Como narrativa, a *Cartemática* e seus pressupostos compõem um mapa imaginário chamado *Cartas de Marear* (VAZ, NERI JUNIOR, ROCHA, 2019). É uma narrativa cartográfica que desenha as *Cartas* da navegação que se deseja realizar. As *Cartas* (compostas por *Trilhas*) orientam as rotas a serem trilhadas, indicando princípios metodológicos, percursos da aprendizagem, estratégias e ferramentas pedagógicas priorizando o diálogo entre saberes, conteúdos e processos que estimularão as vivências, as experiências, e os afetos.

3 I SONHOS, ENCONTROS, MEANDROS

A metodologia *Cartemática* surge em resposta aos anseios, inquietações e provocações oriundas da proposta, em 2017, de uma disciplina intitulada *Matemática e Arte* no projeto pedagógico do curso de mestrado profissional do programa de pós-graduação criatividade e inovação em metodologias do ensino superior-PPGCIMES da Universidade Federal do Pará. Na busca por inovações metodológicas no *locus* de um mestrado em criatividade e inovação, a Professora Cristina Vaz juntamente com seus alunos Helena Rocha e Edilson Neri, hoje seus parceiros nesta viagem, realizaram vários experimentos acadêmicos conceituais, pedagógicos e metodológicos que culminam, em 2019, no nascimento de uma metodologia ativa, por nós chamada de *Cartemática*, que hoje se consolida com o nome *CartoAprendizagem*, rompendo assim as fronteiras da Matemática e se expandindo para novos territórios, entre eles Diversidade e o ensino de Língua espanhola. Até chegarmos aqui, muitos caminhos foram percorridos e muito encontros aconteceram, caminhos e encontros que formam um emaranhado rizomático de afetos, olhares, experiências, desafios, encantamentos, aprendizados, ressignificações e criações que provocaram profundos atravessamentos: houve uma profunda transformação em nós como pessoas e docentes. Neste processo de mudança através do encontro da Matemática e a Arte, cada um de nós trilhou caminhos diferentes e rizomáticos para um dia ser atravessado pela *Cartemática.* Aqui, apresentamos duas cartografias dessa experiência tão transformadora.

3.1 Meus trajetos poéticos por Cristina Vaz

Esta cartografia é parte do texto que publiquei no livro Educação Matemática: formação, prática e inclusão (SILVEIRA, 2021). Gostaria de escrever algo novo sobre estes trajetos, mas eles se entrelaçam de tal modo que fica quase impossível não repetir alguns deles, por esta razão vou mesclar algo existente com algo novo para cartografar os meus percursos e experiências com a *Cartemática.*

Tudo começa com a minha paixão pela Matemática e pela poesia. Sempre foi assim e sempre será. Paixões que ora se separam, ora se entrelaçam para foram o meu mosaico de afetos e encontros. Com a matemática ganho a estrutura, uma poética da razão, uma criatividade especial na resolução de problemas e a descoberta de padrões. Com a poesia exercito a minha imaginação, exploro os meus sonhos e mistérios. Amo e choro com palavras ritmadas, ganho asas, que também tem a sua estrutura, a sua poética e a sua criatividade. Com as duas ouço a minha voz, expresso meus sentimentos e afetos, navego por diversos e fascinantes universos. Com as duas, experimento (no sentido de Larrosa) meus processos de criação. Por algum tempo, uma evitou a outra e ainda hoje uma permite a outra de um modo muito peculiar: quando a matemática fala, a poesia fica quieta e sabe escutar; quando a poesia explode, a matemática se aquieta e sabe esperar. São dois processos poderosos que coexistem e permitem meus devaneios, meus sonhos e as minhas aventuras. Porém, em algum ponto deste trajeto, quando vários abismos me aconteceram e eu precisei das duas, elas se uniram para me resgatar. Foi para superar um luto e enfrentar as minhas dores, que, em 2012, algo me aconteceu. Por algum motivo obscuro e difuso, comecei a misturar a matemática com arte, comecei a poetizar a matemática e matematizar a poesia. Busquei artistas que usavam a matemática como linguagem em suas criações. Naturalmente, o primeiro que encontrei foi o artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher.

Escher é um artista muito conhecido pelas representações de construções impossíveis, preenchimento regular do plano, explorações do infinito e as metamorfoses – padrões geométricos entrecruzados que se transformam gradualmente em formas diferentes. Seus padrões geométricos sempre foram usados para ensinar matemática de forma mais lúdica e divertida. E era este caminho que eu estava tentando trilhar para enfrentar os meus abismos.

Neste processo de mudança, pessoal e profissional, ministrei uma disciplina optativa no curso de Licenciatura em Matemática da UFPA cujo objetivo era “explorar o potencial artístico da matemática”. Não me atrai a ideia de “explorar o que a arte tem de matemática”, mas o caminho reverso “o que a matemática tem de arte”. Quais as intersecções e conexões entre a Matemática e a Arte? Também não me interessava o “processo criativo dos matemáticos ou dos artistas” e sim como todos estes processos poderiam provocar uma aprendizagem mais divertida. A pergunta era: como expressar a beleza de conceitos matemáticos aparentemente sem nenhum apelo artístico? Minha intenção (ainda oculta, até para mim) era misturar Matemática e Arte para possibilitar uma transformação no aprendiz. Segui a minha intuição e fui experimentando nas disciplinas que ministrava no curso de Matemática, especialmente numa disciplina chamada “Laboratório de ensino”. Os resultados experimentais foram muitos e a diversão também. Só para citar alguns: palavras cruzadas, quadrados mágicos (deriva mágicos), quebra-cabeças em cálculo de várias variáveis; confecção de material concreto em fractais; trabalhos de conclusão de curso com produções digitais criativas e lúdicas sobre curvas rolantes, fractais, braquistócrona, etc. Realização de seminários, oficinas, encontros, feiras e exposições sobre Matemática e Arte. Apresentação de trabalhos em congressos, encontros, jornadas, etc. Porém, era tudo muito experimental e divertido, que foi se sistematizando com o passar do tempo.

Destaco que o ponto de inflexão (de virada) deste processo aconteceu 2017 com dois eventos: a Semana Nacional de Ciência e Tecnologia – SNCT e a implementação do mestrado profissional em Criatividade e Inovação em metodologias de ensino superior – PPGCIMES da UFPA. A contribuição da SNCT foi um projeto incentivado e financiado pelo CNPq intitulado “Artemática: explorando o potencial artístico da matemática”. Foi um marco! O nascimento de um grupo de pesquisa chamado *Ciência, Tecnologia e Arte*, o que implicou a criação de uma linha de pesquisa e aprovação de um projeto de pesquisa sobre a temática. Também destaco a produção e divulgação de três livros e dois vídeos sobre a temática (consulte http://editaedi.ufpa.br/index.php/catalogo). A contribuição do PPGCIMES foi a implementação de uma disciplina de pós-graduação chamada Matemática e Arte que impulsionou a criação e aplicação da Cartemática.

Como consequência desta caminhada, destaco: parcerias internacionais e nacionais, orientação de teses de mestrado e trabalhos de iniciação científica, desenvolvimento de aplicativos computacionais, publicação de artigos e livros, realização de encontros, seminários e festivais, apresentação de trabalhos em congressos nacionais e internacionais. Entre todos, guardo com carinho no meu coração a apresentação dos resultados do projeto “Artemática” no I Encontro Luso-brasileiro de territórios artísticos com a Matemática – TEAR em 2017 em Portugal e no Congresso Internacional de Matemática – ICM em 2018 no Rio de Janeiro.

Matemática, Tecnologia e Arte, um caminho inesperado que se construiu nas entrelinhas dos meus versos, que aconteceu quando quis ter esperança. Esperança em mim e no mundo. Quando deixei a minha sensibilidade falar mais alto. Quando percebi que a Matemática pode ser ensinada e aprendida de modo mais lúdico e divertido com sensibilidade poética e criatividade. Quando me permiti aprender Arte, imergir em outro universo, entender outros padrões e romper fronteiras.

Um caminho coletivo e colaborativo, jamais solitário, trilhado com a generosidade dos meus alunos da turma 2018 do curso de Licenciatura em Matemática da UFPA que aceitaram o desafio inovar comigo.

Na pós-graduação do PPGCIMES meus alunos que me comovem com sua dedicação e afeto (as imagens das suas criações abrilhantam este texto). Com Edilson Neri e Helena Rocha, meus parceiros e amigos, que me inspiram e me comovem com seu talento criativo e a inovador, seja acadêmico ou pessoal, com sua amizade sincera e com uma parceria competente e frutífera, venho trilhando um caminho mais longo e duradouro permeado de muita criatividade e descobertas.

Edilson Neri foi o meu primeiro aluno de mestrado no PPGCIMES, foi o desbravador comigo dos territórios da Matemática e Arte e da Cartemática. Já na graduação aceitou o desafio de trabalhar na iniciação científica com os Fractais e no mestrado aceitou um desafio ainda maior de ser um cartemático-cartógrafo e explorar o universo da impressora 3D, do artista Almada Negreiro e da Matemática recreativa para compor atos e lugares de aprendizagem criativa em Matemática (NERI JUNIOR, 2019).

Já Helena Rocha conheci no PPGCIMES, professora e pedagoga com uma carreira consolidada em sua área de atuação, que buscava renovação, transformação e novas e interessantes aventuras acadêmicas. Todos os orixás (ou será que foi um apenas?) se juntaram para realizar um encontro tão inusitado entre uma professora de matemática e uma professora de diversidade etnicorracial. Deste encontro, entre muitas outras coisas maravilhosas, surgiu a *CartoDiversidade*, uma metodologia ativa inspirada na *Cartemática,* que aflorou todo o potencial inovador e criativo desta metodologia e assim a *CartoDiversidade* nasce nos meandros e encantamentos do Afrofuturismo na educação (ROCHA, 2020).

Não existem palavras que possam expressar a minha admiração e gratidão por estes amigos queridos que navegam comigo pelos territórios da aprendizagem criativa e inovadora. Vida longa à nossa parceria!

Além deles, também contei com a generosidade acadêmica e o incentivo do Prof. Iran Mendes que sempre acreditou no meu trabalho. Com a dedicação (minha, dos alunos, dos colaboradores) em longas horas de leituras, discussões, orientações sobre metodologias ativas, criatividade, inovações metodológicas, método da cartografia de Deleuze-Guattari, narrativas poéticas e muitas outras. Com os processos e produtos criativos realizados com meus alunos e colaboradores. Com os afetos, os atravessamentos e as experiências vivenciadas.

Explicar com tudo isso aconteceu, com certeza não sei fazê-lo em sua total plenitude. Foi (e sempre será) um impulso interior único e indescritível que me encanta e me desafia e que se revelou matemático (a matemática que aprendi), poético (os versos que criei) e metodológico (a *Cartemática* que inventei). Talvez seja simplesmente a minha razão de ser!

Leminski novamente revisado

Razão de ser

Gosto de Matemática.
E pronto.
Estudo Matemática porque preciso,
preciso porque me encanto.

Faço cálculos porque amanhece
e as estrelas lá no céu lembram figuras no papel,
quando o desafio me anoitece.

A aranha tece teias.
O peixe beija e morde o que vê.
Eu gosto Matemática apenas
tem que ter por quê?
E a Arte? Tinha que acontecer.

3.2 Formação fora da caixa

Esta cartografia é sobre aplicação da Cartemática no minicurso realizado no III Simpósio de formação de professores de Matemática da região Norte. O minicurso foi realizado em dois dias com duração de três horas diárias e teve como objetivo inspirar professores de matemática na implementação de práticas inovadoras em sala de aula promovendo um diálogo interdisciplinar entre a Matemática e a Arte através do Teorema de Pitágoras nas artes. A proposta foi inspirada metodologia STEAM (*Science, Technology,* *Engineering, Arts and Mathematics*)[4], que é uma tendência mundial de ensino que surge em contraponto às metodologias tradicionais. Para inspirar os participantes, apresentaremos vídeos, indicaremos filmes, livros e sites, e exploraremos projetos inovadores desenvolvidos por professores da escola básica. Também proporemos, exploraremos e disponibilizaremos atividades lúdicas (jogos, colagens, nuvem de palavras, receita criativa, entre outros) inspiradas nas obras de artistas que usam o teorema de Pitágoras em suas composições, entre eles destacamos Mel Bochner e Crockett Johnson.

Apresentaremos a seguir as principais ações realizadas no minicurso com aplicação da metodologia Cartemática.

3.2.1 Professor fora da caixa

Bernardo é quase árvore.
Silêncio dele é tão alto
que os passarinhos ouvem de longe
E vêm pousar em seu ombro.
Seu olho renova as tardes.
Guarda num velho baú
seus instrumentos de trabalho:
1 abridor de amanhecer
1 prego que farfalha
1 encolhedor de rios - e
1 esticador de horizontes
(Bernardo consegue esticar o horizonte usando três
fios de teias de aranha. A coisa fica bem esticada.)
Bernardo desregula a natureza:
Seu olho aumenta o poente.
(Pode um homem enriquecer a natureza com a sua incompletude?)
Manoel de Barros

Imaginemos que Bernardo seja um professor de matemática e *ser quase árvore* permite a Bernardo entender que o silêncio de seus alunos diz muitas coisas, que pode agasalhá-los com paciência e bondade sob seus galhos e sabe que *como passarinhos* virão *pousar em seu ombro*. Bernardo com seu olhar atento e interessado *renova as tardes* e inspira seus alunos. *Guarda num velho baú seus instrumentos de trabalho*: *um abridor de amanhecer* que usa para colorir a imaginação dos alunos com suas aulas cheias de atividades interessantes; *um prego de farfalha* que usa para propor jogos divertidos; *um encolhedor de rios* que usa para mostrar que cálculos podem divertir e *um esticador de horizontes* que ganhou de presente de seus alunos, e guarda com muito carinho, e usa todas as vezes que deseja ter uma nova ideia para suas aulas. *Ele sabe usar o esticador* com muita eficiência. Bernardo *desregulou a natureza* quando decidiu inovar suas aulas e começou a usar obras de arte para ensinar matemática para seus alunos. Com seu olhar interdisciplinar, Bernardo *aumenta o poente* dos seus alunos, com *sua incompletude* e seu

4 Para saber mais sobre o movimento STEAM consulte https://scholarship.claremont.edu/steam/about.html

modo inovador de ensinar enriquece a vida dos seus alunos e sua formação acadêmica.

Percebe-se que Bernardo é um professor diferente, gosta de sonhar, está aberto ao novo, não teme mudanças e está sempre fora de sua zona de conforto. Bernardo é um professor "fora da caixa". Fora da caixa das estruturas rígidas. Fora da caixa de regras impostas. Bernardo gosta de inovar, porém, mais do isto, ele gosta mesmo é de encantar seus alunos com novas ideias, atividades divertidas e brincadeiras, tudo porque ama ensinar e aprender matemática. Bernardo quer ser um encantador de alunos.

Assim como o professor imaginário Bernardo existem muitos professores de matemática que são encantadores de alunos e professores fora da caixa. E o que faz um professor ser assim? A vontade de inovar, a abertura para novas ideias, métodos, técnicas e temas e muita motivação. É preciso apenas querer sê-lo!

Para Nunes *et al*. (2015), a inovação educacional é uma ação pedagógica estruturada relativamente nova, que promove melhorias no processo de ensino-aprendizagem, considerando os diferentes contextos escolares, os interesses e necessidades dos alunos. Além disso, definem alguns critérios para mensurar esta inovação educacional entre eles apontam a interdisciplinaridade.

A fragmentação do conhecimento e a importância do diálogo entre os saberes para melhor compreensão do mundo e do ser humano é uma discussão importante que já acontece há várias décadas, principalmente nas instituições educacionais. Para Fazenda (1994, p.31), o alimento que move um professor interdisciplinar tem um gosto especial entre o conhecer e o pesquisar. Ele alimenta-se do mundo e das ideias através do olhar atento, da investigação curiosa, da leitura, do contato, do diálogo, da abertura, dos sentidos. Com isso, transforma, inspira, dá significado e nutre. Não se adapta, transforma; não se contenta, age; erra e aprende. Seus atributos principais são: envolvimento e compromisso. Neste sentido, ser um professor interdisciplinar é aceitar o desafio de buscar novas paisagens, novas rotas, novos horizontes. Deixar a velha bagagem e aceitar fazer a travessia, como nos ensina o escritor Fernando Teixeira[5]

> Há um tempo em que é preciso abandonar as roupas usadas que já tem a forma do nosso corpo e esquecer os nossos caminhos que nos levam sempre aos mesmos lugares. É o tempo da travessia. E se não ousarmos fazê-la teremos ficado para sempre à margem de nós mesmos.

Neste minicurso, para inspirar os participantes, apresentamos vídeos, indicamos filmes, livros e sites. Também apresentamos projetos inovadores desenvolvidos por professores da escola básica. E, por fim, propomos, exploramos e disponibilizamos algumas atividades lúdicas (jogos, nuvem de palavras, quebra-cabeças, receita criativa, entre outras) inspiradas nas obras de artistas que usaram o Teorema de Pitágoras (e suas variações) como expressão artística em suas composições, entre eles destacamos os artistas Mel Bochner (Bakner) e Crockett Johnson. Para isto, fizemos uma imersão no

5 Fonte: https://www.pensador.com/frase/MjQyMzA/

universo do artista Mel Bochner e da arte conceitual e do artista Crockett Johnson e da Op arte. E uma imersão matemática nos conceitos e propriedades elementares do Teorema de Pitágoras (principalmente a representação visual da prova de Euclides) e algumas de suas variações como a construção geométrica da espiral pitagórica.

3.2.2 Colocando a mão na massa

Como o minicurso foi ministrado na modalidade on-line sem os recursos de um ambiente virtual de aprendizagem – AVA, a aprendizagem criativa dos participantes foi estimulada através de um diálogo instigante e motivador e atividades criativas e lúdicas. Para isto, realizamos as seguintes ações:

1º dia: Após uma breve apresentação dos professores ministrantes, exibiremos o vídeo do matemático Eduardo Sáez, professor na Universidade de La Rioja, na Espanha. Eduardo Sáez é um matemático inspirador que divulga a matemática através de palestras e conferências. Possui um canal no *youtube* chamado *Derivando*, no qual ensina e explica curiosidades sobre o mundo da matemática, com um total de mais de 40 milhões de visualizações e mais de 800.000 inscritos. Neste vídeo, de forma criativa e lúdica, Eduardo explica porque a matemática é eterna. Em seguida, usando recursos de slides e vídeos, realizamos imersões nas propriedades do teorema de Pitágoras, nos universos dos artistas Mel Bochner e Crockett Johnson destacando a interdisciplinaridade em obras que usam o teorema de Pitágoras como temática. Foi solicitado que cada participante anotasse as palavras-chaves durante as apresentações dos professores ministrantes. Foi solicitado que cada participante produzisse de uma nuvem de palavras usando o aplicativo de celular *word cloud*, que foram posteriormente postadas no *WhatsApp* do minicurso ou enviadas por *e-mail.* Além disso, os roteiros de todas as atividades propostas foram disponibilizados aos participantes através de infográficos que foram enviados por *e-mail* após o término de cada etapa.

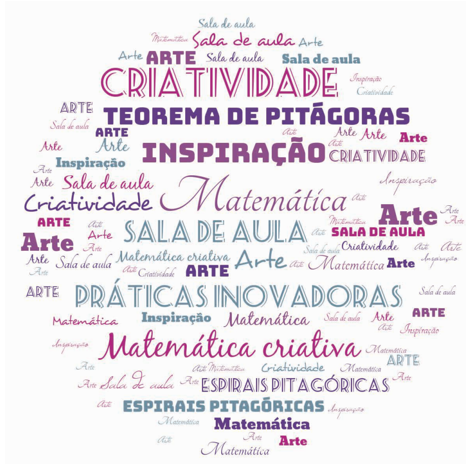


Figura 8: Nuvem de palavras

Fonte: autor participante do minicurso

Foi solicitado que cada participante fizesse a sua *receita criativa* em casa para socializá-la no dia seguinte. Em seguida, os participantes foram desafiados a realizar as seguintes atividades de autoria dos professores-ministrantes:

Atividade 1: Padrão matemático. A atividade é inspirada na obra *Serie Pythagoras* de Mel Bochner. O objetivo da atividade é descobrir e criar padrões matemáticos.

i) Observe, na figura abaixo, a sequência criada pelo artista Mel Bochner na obra *Série Pythagoras.* Descubra o padrão usado pelo artista e proponha a próxima figura da sequência:

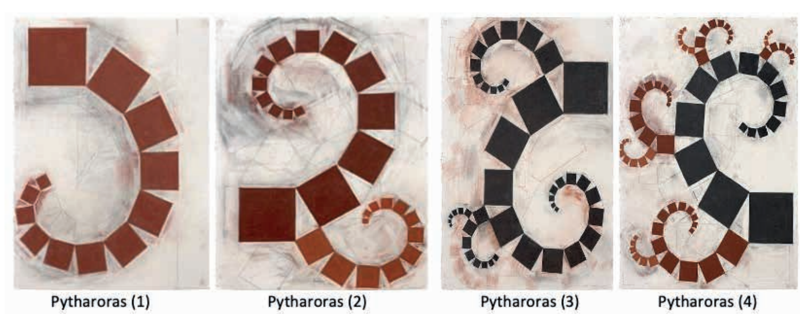


Figura 9: Obras do artista Mel Brochner

Fonte: https://www.wikiart.org/

ii) Inspirados na obra *Pythagoras (2)* de Mel Bochner, crie um padrão e desenhe a usa obra.

Atividade 2: Jogo pitagórico. A atividade é inspirada na temática do minicurso. Trata-se de um jogo on-line de tabuleiro criado no site https://www.flippity.net/. Como é usual neste tipo de jogo, em algumas partes o jogador irá avançar ou recuar. Vence o jogo aquele que primeiro atingir as estrelas.

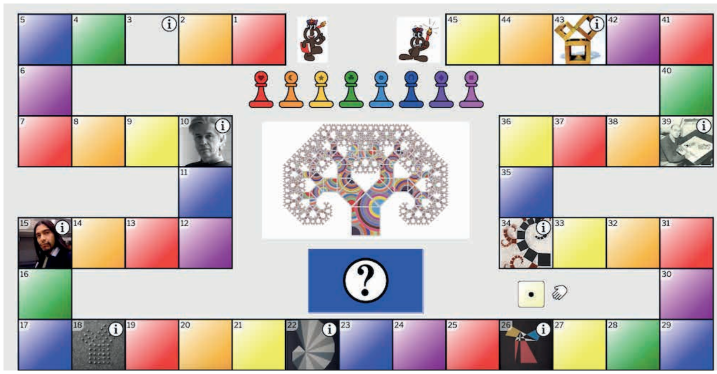


Figura 10: Jogo pitagórico

Fonte: autores

No final de cada etapa, os participantes eram estimulados e escrever no chat do minicurso dúvidas, comentários, sugestões, pensamentos, etc. Os participantes foram convidados a postarem, no grupo de *WhatsApp* do minicurso, uma imagem artística-matemática que represente o que cada um sentem pela Matemática.

2º dia: Iniciamos com o vídeo produzido pela discente Marcélia Assis relatando a sua experiência em Matemática e Arte (disponível em https://www.youtube.com/watch?v=UWE_YkF7dj8) através dos encontros, atravessamentos e vivências com o artista Antônio Peticov. Em seguida, fizemos uma breve exploração sobre sites com informações inspiradoras (textos, entrevistas, palestras, etc.) sobre matemática na educação, como por exemplo o site PORVIR. Depois, indicamos livros interessantes sobre a temática e como podem contribuir para uma formação mais inovadora, entre eles Vaz (2017) e Vaz e Rocha (2018). Em seguida, apresentaremos dois eventos inovadores envolvendo a temática: Festival de Matemática e Arte da UFPA e Feira *Maker* na UFPA. Também fizemos uma breve apresentação dos projetos selecionados pelo Desafio de Aprendizagem Criativa Brasil 2020. Em seguida, os participantes foram desafiados a realizar a seguinte atividade de autoria dos professores-ministrantes:

Atividade: Quebra-cabeça artístico-matemático. A inspiração da atividade é a obra *Proof of the Pythagorean Theorem (Euclid),* do artista Crockett Johson (Figura 11). O objetivo da atividade é integrar a arte e a matemática de forma lúdica na confecção de um quebra-cabeça (Figura 12) para o ensino e aprendizagem das etapas visuais da demonstração do teorema de Pitágoras com obra do artista. Os professores-ministrantes apresentaram o quebra-cabeça na forma de animação e disponibilizaram o roteiro da atividade.

Figura 11: *Proof of the Pythagorean Theorem (Euclid)*

Fonte: https://www.wikiart.org/

Figura 12: Quebra-cabeça artístico-matemático

Fontes: autores

Depois, respondemos as perguntas feitas pelo chat, os participantes socializaram as receitas criativas e as nuvens de palavras e o minicurso foi finalizado com o *feedback* dos participantes.

4 I CONFLUÊNCIAS, INCIDÊNCIAS, REMINISCÊNCIAS

O mapa
Há tanta esquina esquisita,
Tanta nuança de paredes,
Há tanta moça bonita
Nas ruas que não andei
(E há uma rua encantada
Que nem em sonhos sonhei…)
Mário Quintana

Há tantos caminhos novos, tanta nuança pelos trajetos. Há tantas coisas bonitas nos encontros que não ousei e há uma porta encantada que ainda não atravessei. Tudo converge para um viver criativo como nos ensina Winnicott, Valeu a pena? Sim valeu, e muito e continua valendo... *Algo nos tocou, algo nos transformou* nos encontros, atravessamentos e vivências com a *Cartemática* e assim podemos ser os protagonistas da nossa aprendizagem (re)criando saberes interdisciplinares inspirados por Freire, Larrosa e Fazenda. Mas aprendemos que só a metodologia não basta, o processo é mais amplo e mais profundo (e por isso mais encantador) e é preciso estar sempre aberto para o novo, para o diferente, para o outro. É preciso encantar-se e encantar alguém. É preciso sonhar e espalhar o sonho pelos cantos do mundo. É preciso ser e viver criativamente. A *Cartemática* é um dos muitos caminhos, uma trajetória possível, um mapa móvel sempre em construção que oferece uma encantação. Cabe a cada um escolher o seu caminho e deixar-se envolver durante o trajeto. Convidamos você a realizar a sua aventura criativa por mares nunca antes navegados e pelos universos fascinantes de uma aprendizagem ativa e criativa. Confluência de saberes que libertam, incidência de criatividade que transforma e reminiscências de afetos para toda a vida

REFERÊNCIAS

CICCONE, Soraia Dias. **Criatividade na obra de Winnicott**. Tese de Mestrado. Campinas, 2013.

DELEUZE, Gilles; GUATTARI, Félix. **Mil Platôs**: Capitalismo e esquizofrenia. Editora. 34, Vol 1. Rio de Janeiro, 1995.

FREIRE, Paulo. **Educação e mudança**. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

LARROSA, Jorge. **Tremores.** Editora Autêntica, 2014.

NERI JUNIOR, Edilson. **Atos e lugares de aprendizagem criativa em Matemática.** Tese de mestrado. PPGCIMES, UFPA, 2019.

NUNES, C. S., NAKAYAMA, M., Silveira, R. A., STEFANI, C. & CALEGARI, D. **Critérios e indicadores de inovação na educação**. In: Teixeira, C. St.; Ehlers, A. C.; Souza, M. V. Educação fora da caixa: Tendência para a educação no século XXI. Florianópolis: Bookess.

OLIVEIRA, Elisandra; SANTOS, Franklin. Pressupostos e definições em Interdisciplinaridade: diálogo com alguns autores. **Revista Interdisciplinaridade**, São Paulo, no. 11, pp.01-151, out. 2017. Disponível em https://revistas.pucsp.br/index.php/interdisciplinaridade/article/view/34709. Acesso em 06/05/2023.

ONFRAY, Michel. **Teoria da viagem**: poética da geografia. L&PM. Porto Alegre, 2007.

OSTROWER, Fayga. **Criatividade e processos de criação**. Editora Vozes. Rio de Janeiro. 2014.

PASSOS, Eduardo; KASTRUP, Virgínia; ESCÓSSIA, Liliana da. **Pista do método da cartografia:** pesquisa-intervenção e produção de subjetividade. Editora Sulina, Porto Alegre, 2015.

ROCHA, Helena do S. C. da. **Afrofuturismo na Educação:** criatividade e inovação para discutir a diversidade etnicorracial. Tese de mestrado, PPGCIMES, UFPA, 2020.

SANTAELLA, Lúcia. **Por que as comunicações e as artes estão convergindo?** São Paulo: Paulus, 2005.

SILVEIRA, Rosiane. **Educação matemática**: formação, práticas e inclusão. Disponível em https://editora.realconhecer.com.br/2021/10/educacao-matematica-formacao-praticas-e.html?m=1 Acesso 7/05/2023.

VAZ, Cristina L. D.; ROCHA, Helena do S. C. da (orgs), **Matemática e Arte em trilhas, olhares e diálogos**. Editora EditAedi, 2018.

VAZ, Cristina L. D.; NERI JUNIOR, Edilson dos P.; ROCHA, Helena do S. C. da. **Cartas de marear:** percursos para uma aprendizagem criativa em Matemática e Arte. Editora EditAedi, Belém-PA, 2019. Disponível em http://editaedi.ufpa.br/index.php/catalogo. Acesso em 06/05/2023.

WINNICOTT, Donald. **Tudo começa em casa.** Textos de Psicologia. Editora WMF Martins Fontes. São Paulo, 2016.

MATEMÁTICA FUNDAMENTAL: DIFICULDADES NO APRENDIZADO DAS QUATRO OPERAÇÕES COM NÚMERO NATURAL DOS ALUNOS DO 6º ANO NA ESCOLA ESTADUAL PADRE LUÍS RUAS

Data de aceite: 02/06/2023

Joselia Maria Pereira dos Santos
Mestra em Ciências da Educação pela Universidade Del Sol.
Docente na Secretaria de Educação e Desporto do Estado do Amazonas (SEDUC).
Manaus – Amazonas.
http://lattes.cnpq.br/9221300935703569

Ketna Suelem Monteiro
Mestra em Ciências da Educação pela Universidade Del Sol.
Docente na Secretaria de Educação e Desporto do Estado do Amazonas (SEDUC).
Manaus – Amazonas.
http://lattes.cnpq.br/7534465150391636

RESUMO: A presente pesquisa aborda sobre as dificuldades no aprendizado das quatro operações matemáticas dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual Padre Luís Ruas da Cidade de Manaus – Amazonas – Brasil. O objetivo geral foi compreender os fatores que dificultam o aprendizado dos alunos do sexto ano da Escola Estadual Padre Luís Ruas. Propôs identificar a situação de aprendizagem que os alunos chegam no Ensino Fundamental II em relação ao conhecimento das operações básicas de matemática, bem como entender os fatores externos ao processo de ensino-aprendizagem que corroboram para o baixo rendimento dos alunos nos conteúdos de matemática e avaliar se a aplicação de jogos nas atividades educativas pode melhorar o aprendizado das operações básicas de matemática. A perspectiva da investigação realizada foi de natureza mista (qualitativa e quantitativa) através da aplicação de teste diagnóstico, jogo e formulários aos alunos, bem como na realização de entrevistas com aplicação de formulário aos responsáveis pelos alunos e professor. Os resultados da pesquisa demonstraram que apesar de não serem os únicos, os fatores emocionais são os que mais influenciam nas dificuldades de aprendizagem, além de provavelmente o método de ensino do professor. A utilização do jogo demonstrou ser uma importante e eficaz prática pedagógica para ensinar as quatro operações da matemática de forma a despertar o interesse e a motivação dos alunos, além de possibilitar uma melhor aprendizagem.

PALAVRAS-CHAVE: Dificuldades de aprendizado. Ensino da Matemática. Quatro operações. Jogos.

FUNDAMENTAL MATHEMATICS: DIFFICULTIES IN LEARNING THE FOUR OPERATIONS WITH NATURAL NUMBER OF 6TH GRADE STUDENTS AT PADRE LUÍS RUAS STATE SCHOOL

ABSTRACT: The present research deals with the difficulties in learning the four mathematical operations of the students of the 6th year of Elementary School of the State School Padre Luís Ruas of the City of Manaus - Amazonas - Brazil. The general objective was to understand the factors that hinder the learning of sixth year students at the Padre Luís Ruas State School. It proposed to identify the learning situation that students reach in Elementary School II in relation to the knowledge of basic mathematics operations, as well as to understand the factors external to the teaching-learning process that corroborate the low performance of students in mathematics contents and to evaluate whether the application of games in educational activities can improve the learning of basic mathematical operations. The perspective of the investigation carried out was of a mixed nature (qualitative and quantitative) through the application of a diagnostic test, game and forms to the students, as well as the performance of interviews with the application of a form to those responsible for the students and the teacher. The research results showed that, despite not being the only ones, emotional factors are the ones that most influence learning difficulties, in addition to probably the teacher's teaching method. The use of the game proved to be an important and effective pedagogical practice to teach the four mathematical operations in order to arouse the students' interest and motivation, in addition to enabling better learning.
KEYWORDS: Learning difficulties. Mathematics Teaching. Four operations. Games.

1 I INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência exata de muita tradição, a qual se expressa através de símbolos. No contexto educacional brasileiro integra o ensino fundamental como disciplina curricular obrigatória.

O nível de dificuldade dos alunos da educação básica na matemática varia bastante, desde o aspecto interpretativo da questão solicitada, até nos aspectos lógicos e operacionais, porém a dificuldade mais comum está na área das operações básicas que envolvem os números naturais.

A inquietação que motivou a realização da pesquisa surgiu a partir de diversos fatores relacionados ao processo de ensino-aprendizagem e da atuação do professor frente às turmas das séries finais do Ensino Fundamental, especificamente o 6º ano da Escola Estadual Padre Luís Ruas. Observou-se que os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem das quatro operações de matemática, tais como entender todas as etapas ocorridas durante o processo de resoluções.

Este estudo teve como objetivo geral compreender os fatores que dificultam o aprendizado dos alunos do sexto ano da Escola Estadual Padre Luís Ruas nas quatro operações de matemática.

Para alcançar os resultados esperados, a pesquisa teve como objetivos específicos, a identificação da situação de aprendizagem que os alunos chegam ao Ensino Fundamental II, bem como também se propôs a entender os fatores externos ao processo de ensino aprendizagem que corroboram para o baixo rendimento dos alunos nos conteúdos de matemática, e buscou avaliar se a aplicação de jogos nas atividades educativas pode oferecer melhorias ao aproveitamento escolar na disciplina investigada.

Desta forma, fez uso das pesquisas bibliográfica, documental e de campo com a coleta de dados qualitativos e quantitativos através de entrevistas com aplicação de formulários com os responsáveis dos alunos do 6º ano da Escola Estadual Padre Luís Ruas do turno matutino, além de aplicação de teste diagnóstico e jogo com o conteúdo das quatro operações básicas para os alunos participantes e aplicação de formulário a um professor.

2 I O ENSINO DA MATEMÁTICA NA CONTEMPORANEIDADE

A Matemática é uma das disciplinas que apresentam índices de maior reprovação e menor rendimento dos alunos, isto ocorre em grande parte devido ao sistema de ensino tradicional que se baseia na memorização, repetição, mecanização e aplicação de regras e técnicas que são esquecidas rapidamente.

No processo ensino-aprendizagem alunos e professores deparam-se com várias dificuldades. O aluno muitas vezes não consegue entender os conteúdos matemáticos que lhe são ensinados na escola, o que acaba muitas vezes desencadeando a sua reprovação na disciplina ou até mesmo a aprovação, porém mesmo assim apresenta dificuldades em relacionar e aplicar tais conhecimentos na vida cotidiana, contribuindo muitas vezes para o sentimento de aversão à matemática. Já o professor sente-se muitas vezes fracassado pelos resultados e desempenhos não satisfatórios dos alunos. Segundo D'Ambrósio (1989, p. 15):

> Sabe-se que a típica aula de matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro grau ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. Essa prática revela a concepção de que é possível aprender matemática através de um processo de transmissão de conhecimento. Mais ainda, de que a resolução de problemas reduz-se a procedimentos determinados pelo professor.

Tal modelo de ensino é considerado como ultrapassado e desvinculado das situações do dia a dia. Sabe-se que a Matemática predomina sobre outras disciplinas e áreas de conhecimento devido ao seu caráter útil na solução de problemas científicos, tecnológicos e cotidianos, além de auxiliar no desenvolvimento cognitivo dos indivíduos e da importância no âmbito profissional, ou seja, no mercado de trabalho.

Esse modelo de ensino não possibilita uma aprendizagem significativa, pois não contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, não permite que tire suas próprias conclusões, que solucione um problema apresentado e perceber e relacionar tal conteúdo ao seu cotidiano. Na resolução dos problemas matemáticos em sala de aula, muitos alunos não conseguem identificar qual a operação a ser utilizada, como também entender o contexto, visualizá-lo e aplica-lo no dia a dia. De acordo com D' Ambrósio (1989, p.15):

> O aluno, acreditando e supervalorizando o poder da matemática formal perde qualquer autoconfiança em sua intuição matemática, perdendo, dia a dia, seu "bom-senso" matemático. Além de acreditarem que a solução de um problema encontrada matematicamente não estará, necessariamente, relacionada com a solução do mesmo problema numa situação real. É bastante comum o aluno desistir de solucionar um problema matemático, afirmando não ter aprendido como resolver aquele tipo de questão ainda, quando ela não consegue reconhecer qual o algoritmo ou processo de solução apropriado para aquele problema. Falta aos alunos uma flexibilidade de solução e a coragem de tentar soluções alternativas, diferentes das propostas pelos professores.

Neste sentido torna-se necessária que a dinâmica das aulas não siga o modelo de ensino tradicional que comentamos anteriormente, o professor apresenta-se então como um dos protagonistas desse processo de mudança no ensino da matemática. Para que ocorra uma mudança e abandono do ensino tradicional da Matemática no ambiente escolar, torna-se necessário a utilização de novas abordagens no processo de ensino-aprendizagem.

3 I O USO DE JOGOS NO AMBIENTE ESCOLAR

Sabe-se que os jogos ainda na atualidade são vistos como meros instrumentos de entretenimento. Porém, muitos estudos e pesquisas demonstraram e continuam demonstrando resultados satisfatórios acerca da importância e eficácia da utilização dos jogos como recurso didático no processo de aprendizagem.

A ação de brincar não apresenta apenas um caráter de divertimento/lazer, também contribui para o desenvolvimento da criança, tendo um papel fundamental. Segundo Macedo (2005), o ato de brincar possui seriedade, pois exige atenção e concentração, envolve vários aspectos que se inter-relacionam e implica um foco para motivar a brincadeira. Desse modo,

> O jogar é um dos sucedâneos mais importantes do brincar. O jogar é o brincar em um contexto de regras e com um objetivo predefinido. O brincar é um jogar com ideias, sentimentos, pessoas, situações e objetos em que as regulações e os objetivos não estão necessariamente predeterminados. No jogo, ganha-se ou perde-se. Nas brincadeiras, diverte-se, passa-se um tempo, faz-se de conta. [...] O jogo é uma brincadeira que evoluiu. A brincadeira é o que será do jogo, é sua antecipação, é sua condição primordial (MACEDO, 2005. p. 14).

Os jogos possibilitam que as aulas de matemática se tornem mais dinâmicas e lúdicas, além de contribuir para o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas, análise, reflexão, criticidade, raciocínio lógico e participação dos alunos, permitindo o protagonismo destes nesse processo e a percepção de que são seres atuantes que podem contribuir para a transformação da realidade.

Para Codinhoto (2017, p. 59),

> A matemática tem sido vista, muitas vezes de forma rápida, como uma disciplina de difícil aproximação para o aluno. Em especial, quando tratamos da educação básica, um meio que pode colaborar na desmontagem dessa visão distorcida sobre a matemática é aplicação de jogos como atividades de ensino. O caráter lúdico dessas atividades, além de remover o aspecto desagradável dos exercícios matemáticos, desenvolve nos educandos habilidades de cooperação, prazer pela descoberta e a autonomia na construção do conhecimento.

Os jogos dão mais sentido às tarefas, conteúdos e atividades, aprende-se com mais prazer, promove reflexão sobre as estratégias e ações utilizadas, o aluno é o protagonista e ao professor cabe o papel de mediador, observando e orientando, tirando dúvidas e questionando as ações do aluno no desenvolvimento da atividade. O jogo possibilita que o aluno construa novas descobertas e conhecimentos, o desenvolvimento de habilidades, capacidades e de sua personalidade, enriquecendo o seu repertório.

4 I FATORES QUE INFLUENCIAM NA APRENDIZAGEM

As dificuldades de aprendizagem da Matemática podem sofrer influência dos fatores cognitivos, socioeconômicos, emocionais, das abordagens metodológicas do professor entre outros. Segundo Bessa (2007, p. 4), as dificuldades podem estar relacionadas:

> Ao professor (metodologias e práticas pedagógicas), ao aluno (desinteresse pela disciplina), à escola (por não apresentar projetos que estimulem o aprendizado do aluno ou porque as condições físicas são insuficientes) ou à família (por não dar suporte e/ou não ter condições de ajudar o aluno).

Neste estudo focaremos nos fatores cognitivos, socioeconômicos, metodológicos e emocionais.

- **Fatores Cognitivos**

Os fatores cognitivos referem-se ao processo de aquisição de conhecimento que envolve aspectos tais como a linguagem, o pensamento, a memória, o raciocínio, dentre outros. As dificuldades no processo de aprendizagem podem ter relação com fatores cognitivos, como por exemplo, transtornos de aprendizagem - Transtorno do Déficit de Atenção com ou sem Hiperatividade (TDA/TDAH), dislexia, discalculia dentre outros.

- **Fatores Socioeconômicos**

Vivemos em uma sociedade em que impera o modo de produção capitalista, um sistema desigual que gera mazelas sociais. Dentre essas mazelas está situada a pobreza.

Essa e outras mazelas constituem os fatores socioeconômicos que interferem no processo de aprendizagem dos alunos.

A pobreza na maioria das vezes é relacionada com a fome e a miséria. No entanto não pode ser considerada como mera insuficiência de renda, pois é um fenômeno multidimensional e complexo. De acordo com Silva (2013, p. 36):

> Além do problema de deficiência de renda, ao conceito de pobreza agregam-se problemas de saúde, educação, moradia, desemprego e grande dificuldade de fazer valer direitos no meio profissional e extraprofissional.

Pode-se considerar então que pobreza x aprendizagem são fatores que estão interligados. Nas classes subalternas a baixa renda familiar pode acarretar uma alimentação inadequada ou até mesmo a ausência de alimentação, bem como uma moradia com estrutura precária para descanso e estudo.

- **Fatores metodológicos**

O professor tem papel fundamental no processo de aprendizagem dos alunos, sendo o responsável por transmitir os conteúdos e incentivar seus alunos no estudo da Matemática. As metodologias e recursos utilizados pelo professor também influenciam na aprendizagem dos alunos, exigindo estratégias que auxiliem na motivação dos alunos tornando mais prático o caminho da aprendizagem da matemática.

- **Fatores emocionais**

O medo/aversão da Matemática é conceituado por Papert (1988) como Matofobia. Pode ser um dos fatores que estão relacionados com as dificuldades de aprendizagem da disciplina. Para muitos alunos, a matemática apresenta-se como a grande vilã, a disciplina mais temida dentre todas. Tal situação pode se manifestar inicialmente no contexto familiar e comunitário do aluno, onde amigos e familiares podem expressar sentimentos de medo e aversão a Matemática, transferindo tais sentimentos para o aluno que os intensifica na vida escolar. Segundo Papert (1988, p. 21):

> A *Matofobia*, endêmica à cultura contemporânea, impede muitas pessoas de aprenderem qualquer coisa que reconheçam como *Matemática*, embora elas não tenham dificuldade com o conhecimento matemático quando não o percebem como tal.

Tal medo/aversão da Matemática pode acompanhar a criança ou adolescente em outras fases de sua vida. Não é difícil encontrar adultos, idososque permanecem com aversão a Matemática, evitando qualquer contato possível com esse componente curricular.

5 I PERCURSOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste estudo optou-se por uma investigação mista (qualitativa e quantitativa). O levantamento dos dados foi realizado por meio das pesquisas documental, bibliográfica e de campo.

A pesquisa de campo do tipo exploratório foi realizada na Escola Estadual Padre Luís Ruas, localizada na Rua Bom Jesus, S/N - Zumbi dos Palmares, Manaus-Amazonas-Brasil com a aplicação do teste diagnóstico para os alunos, bem como na residência dos alunos participantes da pesquisa com entrevistas realizadas com os responsáveis e a aplicação do jogo e do teste diagnóstico com os alunos, além da aplicação de formulário a um professor de matemática da escola.

Quanto ao público alvo desta pesquisa, temos a população do 6ºano com 86 alunos distribuídos em 3 turmas pelo horário matutino. A amostra desta pesquisa foi composta por 10% desta população especifica, a qual corresponde aproximadamente a 8 alunos que estavam matriculados e cursando o 6º ano do turno matutino

6 I RESULTADOS DA PESQUISA

6.1 Teste diagnóstico

A aplicação do primeiro teste diagnóstico aos alunos, constituído de 17 operações, sendo 5 de adição, 5 de subtração, 4 de multiplicação e 3 de divisão, aconteceu no dia 25 de novembro de 2020 na Escola Estadual Padre Luís Ruas, respeitando todos os protocolos sanitários exigidos devido a pandemia de covid-19.

A aplicação do segundo teste diagnóstico foi na residência dos alunos seguindo todos os protocolos sanitários exigidos devido a pandemia de covid-19. A seguir estão dispostos na tabela a quantidade de acertos das questões das quatro operações.

Quantidade de alunos	Quantidade de acertos
06	05 de adição
01	03 de adição
01	01 de adição
06	05 de subtração
01	03 de subtração
01	01 de subtração
01	03 de multiplicação
03	02 de multiplicação
01	01 de multiplicação
03	0 de multiplicação
03	01 de divisão
05	0 de divisão

Tabela 01 – Resultados do Teste diagnóstico

FONTE: SANTOS. Josélia Maria Pereira dos (2020).

O nervosismo na realização dos testes foi um fator bastante presente nos alunos participantes da pesquisa. Emoções como medo, timidez e nervosismo se manifestam na maioria das crianças, sendo mais intensas em algumas delas. Tirar uma nota baixa para o aluno significa fracassar, o mesmo tem medo da reação dos pais que em alguns casos castigam os filhos quando não apresentam um bom desempenho escolar.

6.2 Formulários destinados aos alunos

Das 12 perguntas que constituem o formulário, destacamos 3 que serão expostas a seguir.

Sobre aprender as quatro operações, a maioria (50%) dos alunos (as) consideram as quatro operações matemáticas difíceis. Tal visão pode ser atribuída pela dificuldade em entender o conteúdo, ou falta de interesse e motivação em estudar mais a tabuada e sobre as quatro operações, ou métodos de ensino defasados e desinteressantes. Vale destacar que 12,5% respondeu não gostar de matemática e também 12,5% respondeu não conseguir entender, tais respostas também podem estar relacionadas com os fatores mencionados.

Em relação a operação com mais dificuldade para resolver, a maioria (37,5%) dos alunos apresentam dificuldade na operação de divisão, seguida da opção todas (25%) e da multiplicação (25%).

A grande maioria dos alunos enfrentam dificuldades para contextualizar e interpretar a matemática e os enunciados dos problemas, o que aliado à falta de entendimento e compreensão da tabuada, refletem-se em dificuldades para efetuar as operações de multiplicação e divisão.

Acerca da contribuição dos jogos lúdicos para a aprendizagem, no caso desse estudo o jogo intitulado "ASMD – Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão", 50% dos alunos responderam que os jogos ajudaram e facilitaram na realização das atividades sobre as quatro operações matemáticas e os outros 50% responderam que os jogos ajudaram e que ficou mais divertido. Sabe-se que estudar e aprender a tabuada exige de certa forma uma ação mecânica e consequentemente desgastante.

À medida que as dificuldades na aprendizagem da tabuada e das quatro operações matemáticas se apresentam, exige-se a intervenção pedagógica do professor em buscar novas estratégias de ensino para minimizar tais dificuldades. É neste momento que a utilização do jogo se torna um recurso pedagógico atrativo e desafiador para os alunos e possibilitador de um processo de ensino-aprendizagem mais efetivo e eficaz. Conforme Starepravo (2009, p. 19):

> Os jogos exercem um papel importante na construção de conceitos matemáticos por se constituírem em desafios aos alunos. Por colocar as crianças constantemente diante de situações-problema, os jogos favorecem as (re)elaborações pessoais a partir de seus conhecimentos prévios. Na

> solução dos problemas apresentados pelos jogos, os alunos levantam hipóteses, testam sua validade, modificam seus esquemas de conhecimento e avançam cognitivamente.

Aprender de forma lúdica estimula o aluno a prestar mais atenção à realidade e as situações que vivencia em seu cotidiano, permite perceber que o aprendizado pode ser prazeroso, instigante e desafiador, além de estimular seu interesse, imaginação, curiosidade, concentração, memorização, aprender a trabalhar em equipe e ter responsabilidade entre outras habilidades essenciais para seu processo de formação.

Acerca do que sentem quando estudam as quatro operações, 25% dos alunos afirmaram que mudam de humor rapidamente, 25% ficam muito agitados, 25% são muito tímidos e calados, 12,5% sentem uma tristeza profunda e 12,5% consideram que não tem problema emocional.

Os dados obtidos nesta pesquisa demonstram que as dificuldades de aprendizagem da tabuada e das quatro operações apresentadas pelos alunos participantes da pesquisa estão relacionadas aos fatores emocionais. As emoções exercem influência em todos os aspectos da vida, não é diferente na aprendizagem. Para aprender algo, é necessário que corpo e mente estejam em harmonia para que todas as capacidades e habilidades sejam exercitadas.

6.3 Aplicação do jogo "ASMD – Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão"

O jogo "ASMD- Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão" tem como objetivo estimular que o aluno seja capaz de identificar e diferenciar as quatro operações matemáticas através dos sinais e resolvê-las por meio do cálculo mental. Foi confeccionado pela própria pesquisadora. O resultado final ficou da seguinte maneira conforme a Figura 01 abaixo:

Figura 01 – Tabuleiro do jogo **"ASMD"**

FONTE: SANTOS. Joselia Maria Pereira dos (2020)

Através das observações realizadas durante a aplicação do jogo, pôde-se notar que todos os alunos demonstraram entusiasmo com o jogo, apesar de alguns não conseguirem um bom desempenho comparados aos outros. Todos confidenciaram também que gostaram mais de fazer o jogo do que responder o teste diagnóstico, que ficou mais fácil e divertido estudar matemática.

O jogo também despertou nos alunos a necessidade de se dedicarem mais ao estudo da tabuada e das quatro operações, servindo como um mecanismo de interesse e motivação. Desta forma,

> [...] a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem (BORIN apud STAREPRAVO, 2009, p. 11).

O jogo matemático tem a finalidade de oportunizar uma aprendizagem significativa, propondo desafios aos alunos e respeitando os princípios da matemática. O ensino da matemática necessita de estratégias que tornem seus conteúdos mais significativos, que relacionem a teoria com a prática e possibilitem sua identificação nas situações cotidianas vivenciadas pelos sujeitos. Assim, os jogos apresentam-se como importantes e eficazes instrumentos do processo de ensino-aprendizagem da matemática.

6.4 Entrevistas com aplicação de formulários aos responsáveis

Das 12 perguntas que constituem o formulário destinado aos responsáveis pelos alunos participantes da pesquisa, destacamos 2 para expor nessa síntese do estudo.

Sobre as dificuldades para realizar as tarefas escolares, grande parte (75%) dos responsáveis atribuíram a "falta de interesse" o motivo pelas dificuldades dos alunos em realizar as tarefas escolares, seguindo de "estar ocupado com outra atividade" (12,5%) e de "precisar ajudar no trabalho da família" (12,5%).

O desinteresse é considerado na maioria das situações de dificuldades de aprendizagem, o fator principal para a ocorrência de tal situação. De fato, em alguns casos é nítido o sentimento de desinteresse dos alunos por qualquer atividade escolar, que frequentam as aulas porque são obrigados pelos pais, mas não participam das atividades desenvolvidas em sala de aula.

A falta de interesse do aluno pode ter sua origem em diversas causas, tais como: relação entre professor e aluno; metodologias dos professores; reprovação, problemas familiares; não gostar da disciplina entre outras.

Em relação a existência de algum problema emocional no aluno que dificulte os estudos, 50% dos responsáveis afirmaram que seus filhos não apresentam problema emocional, 25% que o filho é muito agitado e outros 25% que o filho (a) é muito tímido, calado.

6.5 Formulário destinado ao professor

Foi selecionado um professor de matemática para a aplicação de um formulário composto por 10 perguntas abertas e fechadas, porém neste artigo destacaremos as mais importantes. Para proteger a identidade do professor, iremos nos referir a ele como "Professor X".

Questionado sobre *"Em ordem crescente, das quatro operações qual o (a) aluno (a) tem mais dificuldade para fazer?"* o "Professor X" apontou que as maiores dificuldades estão relacionadas a operação de divisão. Tal resposta vai de encontro aos dados obtidos através dos resultados das aplicações dos testes diagnóstico, jogo "ASMD" e formulários destinados aos alunos.

Em relação a pergunta *"O professor acha que os jogos lúdicos ajudam na realização das atividades das quatro operações?"* o "Professor X" afirmou que sim e ficou mais divertido para todos. Tal afirmação está em consonância com as respostas dos alunos participantes da pesquisa que expressaram nos formulários destinados a eles.

Para a pergunta *"Em sua opinião, quais são os fatores que dificultam o aprendizado dos alunos do sexto ano da Escola Estadual Padre Luís Ruas nas quatro operações de matemática?"* o "Professor X" afirmou ser a falta de interesse o fator que mais dificulta o aprendizado dos alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Como já visto anteriormente, os responsáveis pelos alunos também apontaram o mesmo fator. "É significativo apontar que tanto os professores como os pais e os alunos consideram que a causa mais importante do fracasso escolar dos alunos é a falta de interesse" (MARCHESI e PÉREZ, 2004, p. 28-29).

7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através das observações feitas durante a aplicação dos testes diagnósticos foi possível constatar que todos os alunos participantes da pesquisa apresentaram dificuldades na resolução das operações, principalmente nas de multiplicação e divisão. A falta de conhecimento e/ou pouco domínio da tabuada foi o que mais dificultou a resolução das operações, o que foi confirmado pelos próprios alunos que reconheceram que precisavam estudar mais a tabuada e até mesmo decorá-la. Os alunos demonstram-se bastante nervosos, agitados, tímidos e com medo com a aplicação dos testes.

Na aplicação do jogo os alunos demonstraram um grande entusiasmo em sua realização, mesmo alguns não conseguindo resolver algumas das operações. Confessaram que gostaram mais do jogo do quê do teste diagnóstico e que se em todas as aulas tivesse o jogo, seria mais fácil e divertido aprender matemática, principalmente as quatro operações e a tabuada. Pode-se considerar que o jogo despertou sentimentos de desafio, entusiasmo, motivação e interesse nos alunos.

No que se refere a perspectiva dos responsáveis, a maioria afirmou que os filhos não possuem problema emocional, diferente do que os alunos responderam acerca de como se sentem quando estudam as quatro operações. Isto pode ser explicado pela falta de conhecimento dos pais do que se considera um problema emocional, por não perceberem tais sentimentos nos filhos ou por não considerarem tais sentimentos como um problema.

Sobre a utilização do jogo como estratégia de ensino das quatro operações, para o professor o método contribuiu para a realização das atividades das quatro operações e ficou mais divertido para todos os alunos. É possível considerar que o ensino lúdico proporcionado pelo jogo criou um ambiente divertido e agradável para os alunos, despertando seu interesse, entusiasmo, motivação, imaginação, criatividade ao mesmo tempo possibilitando o seu desenvolvimento integral.

Como recurso didático, o jogo oportunizou a união entre teoria e prática, permitindo o aluno a perceber e compreender essa relação. Consideramos que as dificuldades de aprendizagem da matemática podem ser minimizadas ou solucionadas com o uso dos jogos e aliada a outras estratégias de enfrentamento que forem exigidas.

REFERÊNCIAS

BESSA, Karina Petri. **Dificuldades de aprendizagem em matemática na percepção de professores e alunos do ensino fundamental**. Universidade Católica de Brasília, 2007. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/KarinaPetriBessa.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2020.

CODINHOTO, Lafayette Cesar. **Os jogos como instrumento na metodologia de ensino de matemática na Educação Básica**. In: CASTEJON, Marângela; ROSA, Rosemar (Orgs). Olhares sobre o ensino da matemática: Educação Básica. Uberaba – MG: IFTM, 2017.

D'AMBROSIO, Beatriz Silva. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM. Ano II. N2. Brasilia. 1989. P. 15-19.

MACEDO, Lino. **Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar.** Porto Alegre: Artmed, 2005.

MARCHESI, Álvaro; PÉREZ, Eva Maria. **A Compreensão do Fracasso Escolar**. *In*: MARCHESI, Álvaro; GIL, Carlos Hernández (Org.). Fracasso escolar: uma perspectiva multicultural. Porto Alegre: Artmed, 2004. p. 17 - 33.

PAPERT, Seymour. **Logo**: Computadores e Educação. Trad. José Armando Valente e Colab. São Paulo: Brasiliense S.A, 1988.

SILVA, Maria Ozanira da Silva e. **Pobreza e suas diferentes expressões**. In: SILVA, Maria Ozanira e (Org). Pobreza e políticas públicas de enfrentamento à pobreza. São Luís: EDUFMA, 2013.

STAREPRAVO, Ana R. **Jogando com a matemática**: números e operações. Curitiba, PR: Aymará, 2009.

CAPÍTULO 3

RELATO DE EXPERIÊNCIA: O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA

Data de submissão: 14/04/2023 *Data de aceite: 02/06/2023*

Ticiana de Sousa Lima
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão
Barra do Corda - Maranhão
http://lattes.cnpq.br/3823250343048021

Maria Juliana Góes Coelho da Cruz
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão
Barra do Corda - Maranhão
http://lattes.cnpq.br/4340346570856481

Milton Soares da Silva Junior
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão
Barra do Corda - Maranhão
http://lattes.cnpq.br/7053088270916161

Eluardo Saulo Ferreira Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão
Barra do Corda – Maranhão
http://lattes.cnpq.br/9274682321192617

RESUMO: Com o crescente uso de tecnologias da informação e comunicação no contexto educacional, a matemática ainda é uma disciplina desafiadora para muitos alunos, seja por sua abstração ou pela falta de metodologias que envolvam contextos matemáticos do cotidiano dos estudantes. Diante dessa problemática, este estudo propôs o uso do software GeoGebra como ferramenta para auxiliar o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas. A pesquisa foi conduzida com a turma do primeiro ano do curso Técnico em Edificações do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão - Campus Barra do Corda, no segundo semestre de 2022. Esse estudo foi dividido em cinco momentos: três momentos teórico na sala de aula e dois momentos práticos no laboratório de informática. Foram aplicadas atividades de construção, análise e compreensão do comportamento dessas funções com o uso software GeoGebra. Concluiu-se que as possibilidades oferecidas pelo GeoGebra podem trazer contribuições significativas para o ensino desses conteúdos, proporcionando um estudo contextualizado e reflexivo, além de ser um recurso didático que pode atender às necessidades individuais de cada estudante, contribuindo para uma formação mais completa e atualizada.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Funções, GeoGebra, Ensino de Matemática.

EXPERIENCE REPORT: THE USE OF GEOGEBRA SOFTWARE AS A DIDACTIC RESOURCE FOR TEACHING EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTION

ABSTRACT: With the increasing use of information and communication technologies in the educational context, mathematics is still a challenging discipline for many students, either because of its abstraction or because of the lack of methodologies that involve mathematical contexts of students daily lives. Given this problem, this study proposed the use of GeoGebra software as a tool to assist the development of the teaching-learning process of exponential and logarithmic functions. The research was conducted with the class of the first year of the Technical Course in Buildings of the Federal Institute of Education, Science and Technology of Maranhão-Campus Barra do Corda, in the second semester of 2022. This study was divided into five moments: three theoretical moments in the classroom and two practical moments in the computer lab. Construction activities, analysis and understanding of the behavior of these functions were applied with the use of GeoGebra software. It was concluded that the possibilities offered by GeoGebra can bring significant contributions to the teaching of these contents, providing a contextualized and reflective study, in addition to being a didactic resource that can meet the individual needs of each student, contributing to a more complete and updated formation.

KEYWORDS: Teaching of Functions, GeoGebra, Teaching of Mathematics.

1 I INTRODUÇÃO

A função exponencial e logarítmica é uma das mais importantes funções matemáticas presentes em diversos campos do conhecimento, desde a física até a biologia. O conhecimento dessas funções é essencial para a compreensão de fenômenos naturais e tecnológicos, bem como para o desenvolvimento de tecnologias que transformam a sociedade.

No campo da física, a função exponencial e logarítmica é utilizada para demonstrar a degradação de materiais radioativos, o crescimento animal e vegetal, bem como para analisar processos termodinâmicos complexos. Já na biologia é usada para descrever o crescimento de bactérias, células e tecidos, bem como para analisar processos metabólicos e fisiológicos (PRADO, 2023). Ademais, a função exponencial e logarítmica é frequentemente usada nas áreas de finanças, marketing e outras campos de negócios. Na economia, a função é utilizada para modelar o crescimento da população e a taxa de juros.

Em vista disso, é importante que os alunos tenham uma compreensão sólida das funções exponenciais e logarítmicas. Aprender essas funções ajuda os alunos a entender melhor o mundo ao seu redor e prepará-los para carreiras em áreas como ciências, tecnologia, engenharia e matemática (GOMES, 2016). E aplicar o conhecimento de diversas formas, desde a introdução dos conceitos básicos até a resolução de problemas complexos.

O uso de tecnologias educacionais como o GeoGebra pode auxiliar no processo de ensino de funções exponenciais e logarítmicas, tornando-os mais visual e interativo, permitindo que os alunos experimentem e explorem as funções em um ambiente de aprendizagem seguro e dinâmico (PEREIRA e MOREIRA NETO, 2023).

Portando, essa proposta vem apresentar um relato de experiência do uso do software GeoGebra como recurso didático-pedagógico no ensino da função exponencial e logarítmica com os alunos do 1° ano do ensino médio técnico.

2 I PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

As atividades descritas neste trabalho foram realizadas com os alunos do 1º ano do curso Técnico em Edificações do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão (IFMA), Campus Barra do Corda, durante o segundo semestre de 2022. Foram projetadas e aplicadas atividades teóricas e práticas sobre o estudo de funções exponenciais e logarítmicas, incluindo suas representações gráficas com o uso do software GeoGebra, na sala de aula e no laboratório de informática. O projeto de ensino teve como objetivo articular os conhecimentos adquiridos durante as aulas teóricas com a prática, garantindo uma aprendizagem significativa dos alunos.

As atividades ocorreram no período de setembro a dezembro de 2022 e foram divididas didaticamente em cinco momentos: três momentos de aulas teóricas na sala de aula e dois momentos com aulas práticas no laboratório de informática. Os três momentos de aulas teóricas foram divididos em: planejamento, apresentação e discussão dos conceitos de funções exponenciais e logarítmicas; aulas teóricas, cada uma de duas horas/aula, na sala de aula onde foram discutidos os aspectos teóricos sobre o estudo dos gráficos das funções exponenciais e logarítmicas. As aulas teóricas foram intercaladas com as aulas práticas.

Os dois momentos com aulas práticas, cada um de cinco horas/aula, foram realizados com o uso do software GeoGebra, sendo um sobre função exponencial e outro sobre função logarítmica. Durante esses momentos, os alunos trabalharam com o conteúdo para melhorar seu conceito algébrico e a visualização cerebral de funções exponenciais e logarítmicas.

A sequência didática utilizada iniciou-se com a introdução do conteúdo, seguida da construção e análise do comportamento gráfico das funções exponenciais e logarítmica durante as aulas teóricas. Após a aula teórica sobre função exponencial, foi realizado o primeiro momento de aula prática no laboratório de informática, no qual os alunos foram levados a realizar atividade direcionada utilizando o GeoGebra. Juntamente com os alunos, foram construídas funções exponenciais com diferentes valores numéricos para o expoente e para base das funções exponencial do tipo $f(x) = a^x$, onde $a \in R$, $a > 0$ e a 1, e, em seguida, foi analisado o comportamento gráfico quanto aos aspectos de tipos e características dos gráficos construídos, como mostra a figura 1.

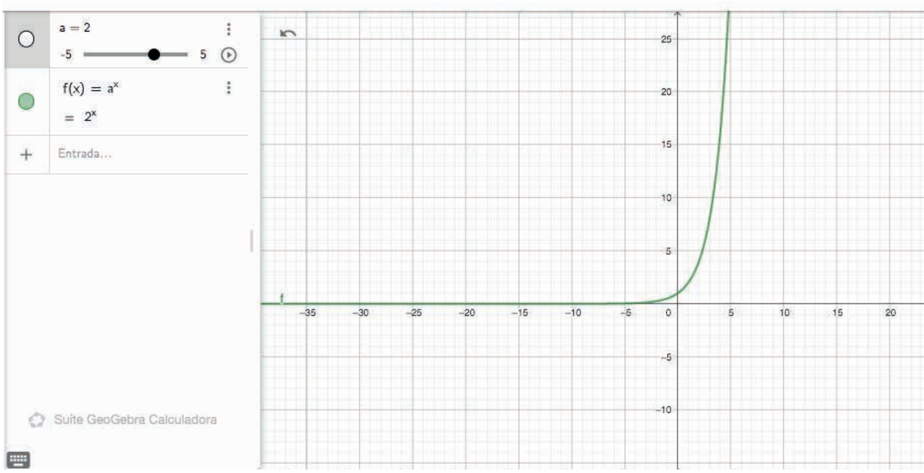


Figura 1: Tela do GeoGebra apresentando o controle deslizante para função exponencial.

Fonte: autor (2023)

No segundo momento de aula prática com o uso do GeoGebra, após uma aula teórica sobre o estudo da função logarítmica, os alunos foram ao laboratório de informática para realização atividades direcionadas. Juntamente com os estudantes, foram construídas funções logarítmicas do tipo f(x) = , sendo a > 0 e a . Em seguida, foi analisado o comportamento do gráfico após a variação dos valores de a e x, como mostra a figura 2.

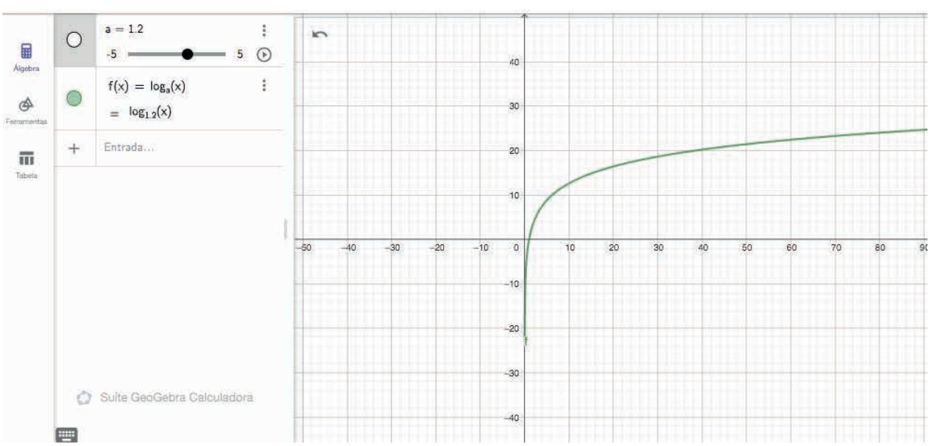


Figura 2: Tela do GeoGebra apresentando o controle deslizante para função logaritmíca.

Fonte: autor (2023)

O comportamento do gráfico foi analisado, utilizamos a ferramenta controle deslizante do software GeoGebra, com o intuito de criar uma função genérica que permita aos alunos analisar o que ocorre com o gráfico ao alterar cada variável. Ao final das análises, os alunos responderam a uma atividade avaliativa e enviaram-na por e-mail ao docente.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (2017), momentos como estes tiveram o objetivo de aprimorar nos alunos o conceito algébrico e a visualização geométrica das funções, com o uso do software GeoGebra, tornando a aprendizagem mais significativa.

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Através das experimentações visuais dos alunos sobre o comportamento do gráfico de funções exponenciais e logarítmicas, utilizando o software GeoGebra, foi possível elucidar a importância gráfica de cada coeficiente e fazer comparações com outras funções. Dessa forma, o uso do recurso possibilitou sanar dúvidas de forma dinâmica com a participação da grande maioria dos alunos, proporcionando uma aprendizagem significativa de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Segundo o fundamento da Teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, é necessário que o docente investigue os conhecimentos prévios dos alunos para que ao apresentar um novo conhecimento o estudante consiga articulá-lo tornando a aprendizagem mais significativa. Assim, as atividades com o software GeoGebra permitiram que os alunos experimentassem o conhecimento adquirido, tornando-o significativo.

Nesse contexto, a experimentação pelo GeoGebra pode fornecer muito mais do que apenas atividades, pois a utilização deste recurso pode contribuir para a compreensão do conhecimento, aproximá-lo da realidade cotidiana através da experimentação. Isso leva à conclusão de que os facilitadores do conhecimento aprendem mais conhecimento e os alunos com mais experiência entendem melhor os aprendizados quando o conhecimento desta realidade vem do conhecimento dos esforços científicos e as exigências abordadas de diferentes ângulos.

O relato buscou mostrar algumas destas experiências vivenciadas em sala de aula e no laboratório de informática com alunos do 1° ano do ensino médio técnico, ressaltando a semelhança do uso de software na educação para fortalecer o conhecimento matemático dos alunos. Em meio a todas as mudanças decorrentes da tecnologia, cabe ao professor fazer o intermédio entre os recursos tecnológicos oferecidos pelos avanços e pelos estudantes. Considere-se que as atividades realizadas foram bem-sucedidas devido à participação dos alunos, aos questionamentos feitos por eles e que foram esclarecidos ao longo das atividades, o que proporcionou o acompanhamento de todos os alunos.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

As funções exponencial e logarítmica são ferramentas fundamentais para a compreensão de diversos fenômenos em diversas áreas do conhecimento. Este projeto de ensino teve como objetivo fornecer aos alunos do 1° ano do curso Técnico em Edificações do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, Campus Barra do Corda, uma compreensão aprofundada das funções e de seu uso prático em diferentes contextos.

Para alcançar esse objetivo, utilizou-se o software GeoGebra como ferramenta de ensino interativo, que permitiu aos alunos experimentar e explorar as funções de forma prática e intuitiva. As atividades propostas foram divertidas e envolveram desde a introdução dos conceitos básicos até a resolução de problemas mais complexos, proporcionando aos alunos uma visão ampla e completa do comportamento das funções.

Os resultados alcançados durante o projeto foram satisfatórios, uma vez que os alunos despertaram o interesse nas aulas sobre função exponencial e logarítmica. Além disso, a utilização do software GeoGebra tornou as aulas mais dinâmicas e interativas, o que contribuiu para despertar a curiosidade e o interesse dos alunos em relação ao tema.

A partir desse projeto, fica evidente que o uso de ferramentas tecnológicas como o GeoGebra pode trazer contribuições para o ensino de conteúdos complexos, como as funções exponenciais e logarítmicas. Ao possibilitar um estudo contextualizado e reflexivo, esse recurso didático pode atender às necessidades individuais de cada estudante, confiante para uma formação mais completa e atualizada.

AGRADECIMENTO

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, Campus Barra do Corda, pelo apoio financeiro para bolsa de estudo e custeio do projeto de ensino.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação**. Parâmetros curriculares nacionais: matemática /Secretaria de Educação Fundamental.** MEC/SEF, Brasília, 1997.

GOMES, C. M. **Modelagem Matemática com o GeoGebra: possibilidades e limitações para o estudo de função afim no Ensino Médio**. Orientadora: Cibelle de Fátima Castro de Assis. 2016. 72 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2016.

PEREIRA, G. S.; MOREIRA NETO, S.I. **O uso do GeoGebra como auxílio para o ensino das funções logarítmicas**. Revista Multidebates, v. 7, n. 1, Palmas -TO, 2023.

PRADO, E. **Funções exponencial**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/whxhnjqb. Acesso em: 04 abr. 2023.

CAPÍTULO 4

TECFORMAÇÃO: PENSAMENTO GEOMÉTRICO NO GEOGEBRA CLASSROOM

Data de aceite: 02/06/2023

Mateus Souza de Oliveira
http://lattes.cnpq.br/7952323742399403

Maria Deusa Ferreira da Silva
http://lattes.cnpq.br/3035450120770104

RESUMO: Este trabalho foi realizado como parte de uma pesquisa conduzida em uma Universidade Estadual localizada no interior do Estado da Bahia, no âmbito de uma disciplina do curso de Licenciatura em Matemática. O objetivo geral da pesquisa foi investigar o pensamento geométrico dos futuros professores de matemática em relação aos conhecimentos primitivos da geometria plana utilizando a plataforma do GeoGebra. A fundamentação teórica utilizada foi baseada na Teoria da Atividade, com ênfase nas atividades de ensino orientadas. O estudo adotou uma abordagem qualitativa, seguindo o formato de estudo de caso. A análise de dados concentrou-se nas construções e respostas dos participantes em uma atividade de ensino disponibilizada em uma turma criada no GeoGebra Classroom. As ações realizadas pelos participantes revelaram o desenvolvimento de habilidades tecnológicas que contribuíram para a exposição do pensamento geométrico. Além disso, os resultados do estudo identificaram equívocos cometidos nas construções geométricas, levando a respostas incorretas, evidenciando a necessidade de mediação. Dessa forma, o estudo evidencia a importância de investigar o pensamento geométrico dos futuros professores de matemática e destaca a relevância de intervenções pedagógicas para apoiar a construção correta do conhecimento geométrico.

PALAVRAS-CHAVE: Futuros Professores de Matemática; Plataforma do GeoGebra; Construções Geométricas.

ABSTRACT: This work was carried out as part of a research conducted at a State University located in the interior of the State of Bahia, within the scope of a discipline of the Mathematics Degree course. The general objective of the research was to investigate the geometric thinking of future mathematics teachers in relation to primitive knowledge of plane geometry using the GeoGebra platform. The theoretical foundation used was based on the Activity Theory, with emphasis on oriented teaching activities. The study adopted a qualitative approach, following the case study format.

Data analysis focused on the participants' constructions and responses in a teaching activity made available in a class created in GeoGebra Classroom. The actions taken by the participants revealed the development of technological skills that contributed to the exposure of geometric thinking. In addition, the results of the study identified mistakes made in geometric constructions, leading to incorrect answers, highlighting the need for mediation. Thus, the study highlights the importance of investigating the geometric thinking of future mathematics teachers and highlights the relevance of pedagogical interventions to support the correct construction of geometric knowledge.
KEYWORDS: Future Mathematics Teachers; GeoGebra Platform; Geometric Constructions.

INTRODUÇÃO

A sociedade contemporânea é frequentemente descrita como uma sociedade digital (CASTELLS, 1999), na qual estão ocorrendo profundas mudanças sociais e comportamentais. Nesse contexto, as tecnologias digitais da informação e comunicação (TDIC) têm um papel significativo ao alterar a maneira como as pessoas se relacionam e interagem. Essas transformações, aceleradas pelo avanço tecnológico e pelas repercussões da pandemia da COVID-19, têm levado à necessidade de adotar recursos tecnológicos digitais no campo da educação, visando aprimorar o processo de ensino e aprendizagem.

A relação entre os seres humanos e a tecnologia é caracterizada por um diálogo constante, no qual ocorre uma influência mútua. Esse processo dinâmico afeta tanto as interações sociais como desperta nas pessoas a necessidade de utilizar recursos tecnológicos. Essa interação bidirecional molda as relações entre os seres humanos, a tecnologia digital e a própria humanidade. Nesse contexto, diversas áreas do conhecimento têm utilizado diferentes recursos tecnológicos digitais para impulsionar seu desenvolvimento. Portanto, os ambientes educacionais devem se adaptar ao perfil das gerações digitais, a fim de promover novas configurações que favoreçam o processo de ensino e aprendizagem.

No âmbito geral, a educação precisa estar ciente e compreender a Tecformação, um conceito que está sendo estudado em nossa tese de doutorado em andamento. Esse conceito refere-se a uma formação que ocorre por meio de tecnologias digitais em ambientes híbridos. Acredita-se que o uso de ferramentas tecnológicas com recursos digitais conectados à internet proporciona novas perspectivas formativas. Com o objetivo de comprovar essa ideia, foi implementada uma abordagem metodológica diferente das práticas tradicionais predominantes nas salas de aula do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Estadual no interior da Bahia.

O objetivo geral deste trabalho é investigar o pensamento geométrico dos futuros professores de matemática em relação aos conhecimentos primitivos da geometria plana utilizando a plataforma do GeoGebra. Para isso, foi planejada uma Atividade Orientada de Ensino (AOE) dentro de um grupo no GeoGebra Classroom. Os discentes foram convidados a participar utilizando um código único gerado automaticamente nesse ambiente.

A relevância dessa pesquisa para o cenário educacional reside na investigação do pensamento geométrico dos futuros professores de matemática e sua relação com os conhecimentos primitivos da geometria plana, utilizando o GeoGebra como plataforma de estudo. Compreender como esses futuros educadores desenvolvem suas habilidades e competências nesse campo específico é de suma importância para o aprimoramento do ensino da matemática e da geometria. Os resultados obtidos podem contribuir para a elaboração de práticas pedagógicas mais eficazes, que utilizem recursos tecnológicos de forma integrada ao processo de ensino e aprendizagem.

REFERENCIAL TEÓRICO

A importância do processo de mediação na educação, fundamentado na teoria vigotskiana, reside na compreensão do ser humano como um ser social que se desenvolve por meio das interações com outros indivíduos e com o mundo ao seu redor. É por meio desse processo sócio-histórico que o indivíduo se torna tanto um produtor quanto um produto do ambiente em que está inserido.

Nesse contexto, é crucial ressaltar a relevância do planejamento, do controle da produção, da organização e do uso de diferentes recursos para uma mediação pedagógica eficaz, que promova a aprendizagem dos discentes. Ao planejar cuidadosamente as atividades de ensino, considerando as necessidades e características dos indivíduos envolvidos, o professor formador desempenha um papel fundamental na condução do processo educacional.

Além disso, o uso adequado de recursos e ferramentas pedagógicas diversificadas enriquece o ambiente de aprendizagem, proporcionando experiências mais significativas e estimulantes para os discentes. A mediação pedagógica eficaz, baseada na teoria vigotskiana, permite a construção conjunta do conhecimento, incentivando a participação ativa dos discentes e favorecendo o desenvolvimento de habilidades cognitivas, sociais e emocionais. Assim, a compreensão e aplicação dos princípios da mediação pedagógica, embasada na teoria vigotskiana, são fundamentais para promover um aprendizado transformador, capaz de preparar os indivíduos envolvidos para os desafios e demandas do mundo contemporâneo.

Para compreendermos o termo "atividade" neste contexto, adotaremos as concepções de Leontiev (2001) e Moura (2000), pois suas obras fornecem princípios complementares para a sua conceituação. Dessa forma, entendemos a atividade como uma situação em que são estabelecidos objetivos por meio de estratégias que visam alcançar determinadas finalidades. Para Leontiev (2001, p. 68) define esse conceito como "[...] os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo".

Além disso, é importante destacar que toda ação humana é mediada e envolve uma articulação entre os agentes envolvidos e os recursos de mediação disponíveis. Ao realizar uma atividade, a pessoa desperta o desejo de agir, criando as circunstâncias necessárias para sua concretização. Nesse processo, a satisfação das necessidades planejadas ocorre por meio do uso adequado dos recursos disponíveis. Vale ressaltar que a

> [...] atividade é regida por uma necessidade que permite o estabelecimento de metas bem definidas. O estabelecimento de objetivos por sua vez permitirá a criação de estratégias para se chegar a cumprir as metas. É aí que aparece o conjunto de ações necessárias para levar a bom termo os objetivos a serem alcançados. Estas ações devem fazer parte de um plano no qual se inclui o uso de instrumentos, sejam eles simbólicos ou não, que servirão como auxiliares para a execução das ações. (MOURA, 2000, p. 24)

De acordo com essa abordagem de Moura (2000), uma atividade é impulsionada por uma necessidade específica que estabelece metas claras a serem alcançadas. Essas metas, por sua vez, fornecem a base para a criação de estratégias que direcionam as ações necessárias para alcançar tais objetivos. É nesse contexto que surgem as ações que compõem um plano, no qual estão incluídos o uso de instrumentos, sejam eles simbólicos ou não, que desempenham um papel de suporte para a execução das ações necessárias. Em suma, essa perspectiva destaca a relação entre a necessidade, o estabelecimento de metas, a definição de estratégias e a utilização de instrumentos como elementos essenciais no processo de realização de uma atividade.

De acordo com Moura (2000), a atividade de ensino está diretamente relacionada ao objetivo do professor formador de fazer com que o indivíduo participante aprenda um determinado conteúdo escolar. Essa perspectiva destaca a importância da interação entre a equipe docente e o grupo discente na mediação dos conteúdos curriculares, permitindo diferentes formas de desenvolvimento do pensamento. Nesse sentido, o método de ensino é entendido como uma atividade que envolve a ação do sujeito por meio do conteúdo. No entanto, o autor também ressalta que, mesmo quando são definidos os elementos fundamentais para uma ação educativa e respeitada a dinâmica das interações, nem sempre se alcançam os resultados esperados. Nesse contexto, essa atividade é denominada de atividade orientadora.

As atividades orientadas de ensino desempenham um papel crucial como elementos de mediação, permitindo a modificação da ação mediada por meio da introdução de diferentes formas de intermediação. Esse processo visa reconstruir o objeto da atividade humana na atividade de ensino, recuperando assim a atividade produtiva do conhecimento (MOURA; ARAUJO; SERRÃO, 2019, p. 422). Em outras palavras, as atividades orientadas de ensino representam uma forma organizada de ensino, em que o conhecimento teórico é o principal conteúdo e seu objetivo é a formação do pensamento teórico do indivíduo por meio da apropriação do conhecimento (MOURA et al., 2010, p. 221).

Essa abordagem pedagógica enfatiza a importância de uma prática educativa direcionada, na qual a mediação se torna um instrumento essencial para promover a construção do conhecimento. Por meio das atividades orientadas de ensino, busca-se não apenas transmitir informações, mas também promover a reflexão, a interação e a participação ativa dos discentes no processo de aprendizagem. Ao proporcionar um ambiente estruturado e intencional, as atividades orientadas de ensino facilitam a aquisição do conhecimento teórico, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento crítico e para a formação de indivíduos capazes de utilizar o conhecimento de forma significativa em diferentes contextos.

Vale realçar que o pensamento geométrico desempenha um papel fundamental na compreensão dos conceitos da geometria, combinando entidades mentais que possuem aspectos conceituais e figurativos. É por meio do desenvolvimento desse pensamento que uma figura geométrica pode ser reconhecida como uma imagem visual, através da sua representação mental, que é construída a partir das propriedades conceituais e figurativas.

Ainda, é relevante ressaltar que a aprendizagem dos conceitos geométricos ocorre de forma gradual, por meio de diferentes níveis de compreensão. Os discentes atribuem significado a um conceito básico ao observarem regularidades e produzirem generalizações ao longo do processo de aprendizagem (NASSER; TINOCO, 2004). Esse desenvolvimento progressivo do pensamento geométrico permite uma compreensão mais aprofundada dos conceitos, facilitando a aplicação e a resolução de problemas geométricos de forma mais efetiva.

METODOLOGIA DE PESQUISA

A presente pesquisa, para este trabalho apresenta um pequeno recorte das práticas dos participantes no uso de tecnologias digitais em atividades investigativas voltadas para o ensino de geometria, com foco no desenvolvimento do pensamento geométrico. Nesse sentido, foram elaboradas e aplicadas atividades orientadas de ensino (AOE) para explorar a construção do conhecimento pelos sujeitos envolvidos.

Ao examinar essas mudanças nas ações dos participantes, buscamos compreender de que forma o uso das tecnologias digitais impacta o processo de aprendizagem e a produção de conhecimento na área da geometria. Por meio das atividades orientadas de ensino, que visamos proporcionar aos sujeitos oportunidades de explorar conceitos geométricos de maneira ativa e reflexiva, estimulando o pensamento crítico e a resolução de problemas.

Esta pesquisa adota uma abordagem qualitativa, visando interpretar as ações dos participantes envolvidos na investigação. De acordo com Minayo (2008), os instrumentos utilizados no trabalho de campo de abordagem qualitativa permitem estabelecer uma mediação entre o referencial teórico-metodológico e a realidade empírica, o que reflete a inserção desses recursos na coleta de dados. Além disso, o estudo aproxima-se de um estudo de caso.

Essa abordagem investigativa permitiu a análise das transformações nas práticas dos participantes, evidenciando os potenciais e os desafios do uso das tecnologias digitais no ensino de geometria. Ao promover a interação entre os sujeitos e as ferramentas tecnológicas, as atividades orientadas de ensino proporcionaram um ambiente propício para a construção compartilhada do conhecimento geométrico e para a ampliação das habilidades e competências dos participantes nesse campo específico.

Os sujeitos principais dessa pesquisa foram 29 licenciandos da disciplina Fundamentos da Matemática Elementar III do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Estadual localizada no interior da Bahia. Suas produções digitais nas primeiras atividades disponibilizadas na turma do GeoGebra Classroom foram utilizadas como fontes de dados. Por razões éticas, as interações dos participantes neste trabalho são identificadas como E01 até E29.

As aulas foram realizadas em dois laboratórios de informática, com cada laboratório contendo apenas 20 computadores, dos quais apenas 14 estavam em boas condições de uso em um laboratório e 15 em outro. Assim, na sala 01, a aula foi ministrada de forma presencial, enquanto na sala 02, ocorreu de forma online, com a apresentação projetada por meio do Google Meet. No entanto, nesse momento, os participantes foram orientados por um monitor. É importante ressaltar que após a apresentação, houve movimentação entre o monitor e o professor formador entre as salas para que a equipe docente pudesse responder possíveis dúvidas da turma.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Nessa análise de dados, refletimos sobre a eficiência das ações realizadas e examinar se elas alcançaram os resultados esperados, conforme defendido por Moura et al. (2010). Dessa forma, iremos apresentar os resultados obtidos e analisar de forma crítica as produções dos sujeitos envolvidos. Essa análise nos permitiu identificar tanto os aspectos positivos, evidenciando as estratégias bem-sucedidas, quanto eventuais equívocos nas respostas e construções dos participantes.

Escolhemos a atividade 01 da primeira unidade da disciplina como objeto de estudo deste trabalho. Essa produção foi composta por dez questões com alternativas abertas e fechadas e com a inclusão da interface do GeoGebra para exposição do pensamento geométrico de cada sujeito. Além disso, essas AOE ficaram disponíveis para que os participantes, caso quisesse, poderiam terminar as questões em um momento extraclasse. Entretanto, devido ao curto espaço de escrita, serão citadas nesta análise apenas as três primeiras questões da atividade supracitada.

Durante a análise da primeira questão, foi constatado que todos os participantes responderam corretamente à alternativa que afirmava que “por um ponto passam infinitas retas". Entretanto, um erro foi identificado na alternativa que afirmava que "por três pontos passa uma só reta". Os participantes que acertaram a questão justificaram suas respostas traçando retas que formavam um triângulo entre os pontos, o que demonstrou um pensamento geométrico coerente. É relevante destacar que a afirmação não fornecia informações sobre a posição dos pontos no plano, o que permitiu que os participantes representassem as retas que passam pelos pontos distintos e não colineares, demonstrando coerência em suas construções geométricas.

Além disso, todos os participantes responderam corretamente à afirmação que afirmava que "três pontos distintos são colineares" como sendo falsa. Suas respostas foram justificadas com base no pensamento geométrico de que, quando três pontos distintos são dados, passam mais de uma reta por eles. Além disso, eles acertaram a afirmação que dizia que "duas retas coplanares e distintas são concorrentes ou paralelas". No entanto, dois participantes cometeram um erro na afirmação que afirmava que "se dois segmentos são consecutivos, então eles são colineares". Aqueles que acertaram essa afirmação esboçaram dois segmentos com um ponto em comum, mas de forma não colinear.

Diante do exposto, constatou-se que os pensamentos geométricos apresentados nas justificativas dos itens incorretos da primeira questão foram consistentes com as abordagens ensinadas nas aulas. É relevante ressaltar que, antes da aplicação das Atividades Orientadas de Ensino (AOE), os conceitos primitivos da geometria plana foram explorados, o que pode ter contribuído para a coerência dos participantes em suas respostas.

Na segunda questão, que questionava quantas semirretas existem em uma reta com origem nos pontos A, B, C e D, todos os participantes responderam corretamente, traçando uma reta que passava por esses pontos. Eles também representaram as semirretas usando dois pontos, AB, mas não puderam colocar corretamente a seta em uma única direção acima das letras devido a uma limitação técnica do sistema de construção do LaTeX no GeoGebra *Classroom*. Nesse momento, foi observado um erro técnico da plataforma que impossibilitou a configuração adequada da simbologia geométrica.

Já a terceira questão gerou mais divergências nas respostas dos participantes. Nela, perguntava-se quantas retas poderiam ser construídas a partir de seis pontos, sendo três deles colineares. Dos 29 participantes, dois responderam que eram apenas quatro retas, quatro responderam que eram 12 retas e 18 descreveram que eram 13 retas. Além disso, houve respostas pontuando oito, nove, dez, onze e dezenove, cada uma mencionada apenas uma vez.

Os participantes desta pesquisa demonstraram um desenvolvimento de habilidades tecnológicas que facilitaram a expressão do pensamento geométrico. No entanto, os resultados revelaram equívocos nas construções geométricas que resultaram em respostas incorretas, destacando a importância da mediação. Foi necessário realizar uma mediação com os participantes que cometeram erros, o que foi viabilizado pelo ambiente virtual utilizado, o Classroom, que permite o fornecimento de feedback em tempo real.

A análise dessas questões à luz das ideias de Moura sobre as Atividades Orientadas de Ensino (AOE) ressalta a importância da mediação da equipe docente para orientar os discentes na construção do conhecimento. Nesse contexto, a plataforma digital utilizada na pesquisa proporcionou uma mediação tecnológica, permitindo aos participantes expor seu pensamento geométrico e receber feedback imediato. No entanto, alguns erros técnicos da plataforma, como a limitação na configuração da simbologia geométrica, demonstraram a necessidade de aprimoramentos tecnológicos para melhorar a interação e a representação correta das ideias geométricas.

Além disso, a divergência nas respostas da terceira questão destaca a importância de se trabalhar o pensamento geométrico de forma mais aprofundada, enfatizando a compreensão dos conceitos e propriedades envolvidos. Isso evidencia a necessidade de uma mediação efetiva por parte da equipe docente, tanto no ambiente presencial quanto no virtual, para auxiliar os discentes a desenvolver um pensamento geométrico mais consistente e coerente.

No GeoGebra *Classroom*, os participantes foram desafiados a utilizar os recursos digitais, do *software* GeoGebra, para expressar e representar visualmente suas construções geométricas. Através dessa interação com a ferramenta, eles puderam explorar conceitos geométricos, experimentar diferentes possibilidades e validar suas ideias. Essa ação do sujeito, mediada pela tecnologia, proporciona uma experiência de aprendizado mais engajadora.

A Tecformação proporcionada nessa formação inicial de professores criou um ambiente enriquecedor, no qual a ação do sujeito foi mediada pelas tecnologias digitais e orientada pelas AOE, estimulando o desenvolvimento do pensamento geométrico e das habilidades tecnológicas dos participantes. Essa abordagem promoveu uma aprendizagem mais ativa e interativa, incentivando a exploração, experimentação e reflexão dos conceitos geométricos. Ao mesmo tempo, possibilitou uma mediação pedagógica efetiva e um constante aprimoramento das construções geométricas para assegurar uma experiência de aprendizagem de qualidade.

CONCLUSÃO

Após analisar as respostas dos participantes em relação às questões propostas neste estudo, podemos identificar aspectos positivos e negativos. No aspecto positivo, observamos que os educandos demonstraram habilidades tecnológicas que facilitaram a exposição do pensamento geométrico por meio da plataforma utilizada. Além disso, a mediação tecnológica permitiu um feedback imediato aos participantes, contribuindo para o aprimoramento de suas construções geométricas.

Por outro lado, também encontramos limitações e dificuldades técnicas na plataforma utilizada, como a impossibilidade de configurar corretamente a simbologia geométrica. Essas limitações podem ter afetado a representação precisa das ideias geométricas dos participantes e exigem melhorias tecnológicas para proporcionar uma experiência mais eficiente.

No contexto dos benefícios para os participantes, este estudo possibilitou o desenvolvimento de habilidades tecnológicas e aprofundou o pensamento geométrico dos educandos. A exposição do pensamento geométrico por meio das atividades investigativas contribuiu para a compreensão dos conceitos e propriedades geométricas, bem como para o exercício do raciocínio lógico e da capacidade de justificar suas respostas.

No entanto, há uma expectativa de que futuros estudos possam abordar as limitações técnicas encontradas, aprimorando a plataforma utilizada ou explorando outras ferramentas digitais que ofereçam recursos mais adequados para a representação da simbologia geométrica. Além disso, é necessário enfatizar a importância da mediação docente para auxiliar os discentes no desenvolvimento de um pensamento geométrico mais consistente, fornecendo feedbacks adequados e orientações claras.

Em suma, esta pesquisa evidencia a relevância das Atividades Orientadas de Ensino (AOE) como estratégia de ensino e aprendizagem no contexto da geometria. A utilização de recursos tecnológicos possibilitou a exposição do pensamento geométrico dos participantes, promovendo a construção do conhecimento de forma interativa. Apesar das limitações técnicas encontradas, os benefícios observados indicam que as AOE podem ser uma abordagem eficaz para o ensino da geometria, desde que acompanhadas de uma mediação docente adequada. Com o contínuo avanço da tecnologia e aprimoramento das ferramentas digitais, espera-se que essas limitações sejam superadas e que futuros estudos possam explorar ainda mais o potencial das AOE, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento geométrico e aprimoramento da aprendizagem dos discentes.

Com base no exposto, é importante ressaltar que esta pesquisa, a qual foi apresentada alguns dados no decorrer do trabalho em questão ainda estão em andamento. Assim, ao término desta investigação há expectativa de contribuição para a formação dos futuros professores de matemática por intervenção de uma Tecformação que busca colaborar para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

REFERÊNCIAS

CASTELLS, M. **A sociedade em rede.** São Paulo, Paz e Terra, 1999.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LEONTIEV, A. N. “Os princípios psicológicos da brincadeira pré-escolar”. In: Vygotsky, L. S. *et al.* **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** Tradução Maria da Penha Villa Lobos. São Paulo: Ícone, 2001.

MINAYO, M.C.S. **O desafio do conhecimento**. 11 ed. São Paulo: Hucitec, 2008.

MOURA, M. O. et al. Atividade Orientadora de Ensino: Unidade entre ensino e aprendizagem. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 10, n. 29, p. 205-229, jan./abr. 2010.

MOURA, M. O. **O educador matemático na coletividade de formação**: uma experiência com a escola pública. 2000. 131f. Tese (Livre Docência) — Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

MOURA, M. O.; ARAUJO, E. S.; SERRÃO, M. I. B. Atividade Orientadora de Ensino: Fundamentos. **Linhas Críticas**, v. 24, 13 fev. 2019.

NASSER, L.; TINOCO, L. **Curso básico de geometria:** enfoque didático. Módulo I. Rio de Janeiro: Projeto Fundão IM/UFRJ, 2004.

CAPÍTULO 5

CODIFICAÇÃO DE ÍNDICE A PARTIR DE CÓDIGOS REED-SOLOMON

Data de aceite: 02/06/2023

Valéria G. P. Alencar
FEEC/UNICAMP, Campinas, SP

Max H. M. Costa
FEEC/UNICAMP, Campinas, SP

RESUMO. O problema de codificação de índice sujeito a erros de transmissão foi inicialmente considerado por Dau *et al.* [5]. Neste trabalho estabelecemos uma conexão entre codificação de índice e códigos corretores de erros, por meio da construção de árvore para códigos cíclicos aninhados proposta em [3]. Implementamos algoritmos para a construção de árvore na linguagem Matlab, que ajudam a solucionar alguns problemas de implementação encontrados em [3]. Verificamos que para códigos cíclicos nem sempre haverá aumento na capacidade de correção de erros entre os níveis da árvore, motivo pelo qual restringimos este estudo, inicialmente, aos códigos Reed-Solomon, por se tratarem de códigos MDS, o que garante um aumento da distância de Hamming a cada nível. Isso significa que, sob certas condições, o conhecimento de informação lateral será interpretado como um aumento na capacidade de correção de erro pelo decodificador.

PALAVRAS-CHAVE. Codificação de Índice, Informação Lateral, Códigos Corretores de Erros, Corpos Finitos.

1 I INTRODUÇÃO

O problema clássico de codificação de índice livre de ruído, consiste de um remetente com *k* mensagens independentes $w_1,...,w_k$ e um canal de broadcast com múltiplos receptores, onde cada receptor demanda um subconjunto de mensagens, enquanto conhece os valores de um subconjunto diferente de mensagens como informação lateral. Sejam $R_1,...,R_n$ os n receptores e suponha que S_i representa a informação lateral e D_i a demanda do receptor R_i, onde $S_i,D_i \subset \{1,...,k\}$. O objetivo é encontrar um esquema de codificação, chamado codificação de índice, que satisfaça a demanda de todos os receptores e use um número mínimo de transmissões.

Consideramos o caso específico de codificação de índice para canais de broadcast discretos com ruído, em que todos os receptores demandam todas as mensagens da fonte, ou seja, $S_i,D_i \subset \{1,...,k\}$. Diante disso, surge a possibilidade de se projetar códigos corretores de erros cujo mapeamento das mensagens em palavras códigos é tal que o decodificador pode aumentar a distância de Hamming em um receptor que tem conhecimento prévio dos valores de algum subconjunto das mensagens como informações laterais.

Estamos supondo que o transmissor desconhece o subconjunto de mensagens já conhecido no receptor e executa uma codificação de modo que qualquer informação lateral possível possa ser usada de forma eficiente no decodificador. A noção de múltipla interpretação foi introduzida em [9], mostrando que quanto maior a quantidade de informação lateral disponível no receptor, maior será a capacidade de correção de erro na decodificação. Os códigos construídos também devem ser códigos de correção de erros para codificação de índice quando o receptor não possui informações laterais, ou seja, quando $D_i = \emptyset$.

A codificação de índice aqui apresentada é dada pela construção de árvore para códigos cíclicos aninhados proposta em [3]. Nos restringimos aos códigos Reed-Solomon por se tratarem de códigos MDS (máxima distância de separação), o que garante um aumento da distância de Hamming a cada nível da árvore. Isto significa que, sob certas condições, o conhecimento de informação lateral será interpretado como um aumento na capacidade de correção de erro pelo decodificador.

2 | CONCEITOS PRELIMINARES

2.1 Codificação de Índice

O objetivo da codificação de índice é realizar uma codificação conjunta de mensagens, visando atender simultaneamente a demanda de todos os receptores, enquanto transmite a mensagem resultante na taxa mais alta possível. Favor consultar [2] para uma abordagem aprofundada sobre codificação de índice.

A seguir apresentamos o modelo através de um exemplo. Considere o sistema de comunicação sem fio, mostrado na Figura 1. O receptor R_i está interessado na mensagem w_i, $i \in \{1,2,3,\}$, e possui algumas das outras mensagens como informações laterais. Em particular, o receptor 1 tem a mensagem w_3 como informação lateral, o receptor 2 tem w_1 e w_3 e o receptor 3 tem w_1 e w_2. O servidor deseja enviar as mensagens aos receptores usando o menor número possível de transmissões.

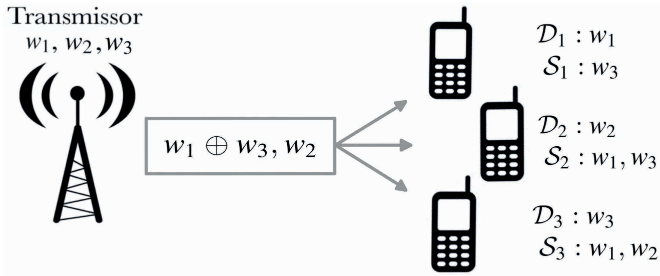


Figura 1: Codificação de índice com três receptores.

Considerando um canal livre de ruídos, o servidor poderia comunicar todas as mensagens enviando uma por vez, fazendo três transmissões. Alternativamente, se o servidor transmitir duas mensagens codificadas $w_1 \oplus w_3$ e w_2, cada receptor pode recuperar sua mensagem desejada usando as mensagens codificadas recebidas e as informações laterais disponíveis, como vemos abaixo:

$$\begin{array}{ll} \text{Receptor 1:} & (w1 \oplus w3) \oplus w3 = w1 \\ \text{Receptor 2:} & (w1 \oplus w3) \oplus w2 \oplus (w1 \oplus w3) = w2 \\ \text{Receptor 3:} & (w1 \oplus w3) \oplus w2 \oplus (w1 \oplus w2) = w3 \end{array}$$

2.2 Construção de árvore de códigos cíclicos aninhados

A construção de árvore de códigos cíclicos aninhados se propõe a:

i) Codificar de maneira independente diferentes pacotes de dados, fornecendo proteção contra erros do canal;

ii) Adicionar os pacotes codificados através de operações polinomiais e enviar o pacote resultante C_0;

iii) Corrigir os erros sobre C_0 e, por fim, recuperar os dados no receptor através de operações polinomiais.

2.2.1 Códigos cíclicos aninhados

Um código aninhado pode ser caracterizado por um código global onde cada elemento é dado por uma soma de palavras-código, cada uma pertencendo a um subcódigo diferente. Isso é,

$$c = i_1 G_1 \oplus i_2 G_2 \oplus \cdots \oplus i_N G_N$$

onde $\oplus$ representa a soma módulo 2, a palavra código $i_\ell G_\ell$ pertence a um subcódigo C_ℓ de C e $c \in C$.

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2 + \cdots + \mathcal{C}_N$$

Consideramos uma classe mais restrita dos códigos aninhados, a classe dos códigos cíclicos aninhados, na qual os subcódigos são gerados por polinômios. Podemos então definir os códigos cíclicos aninhados, de maneira mais formal, como se segue:

Seja $\mathcal{C} = \{C(x) \in F_q[x]; g(x)|C(x)\}$ um *t*-código (um código capaz de corrigir *t* erros) corretor de erro cíclico, onde *g*(*x*) é o polinômio gerador.

$\mathcal{C} = \langle g(x) \rangle$ é um ideal de R_n, mas também é um subespaço vetorial, e desse modo, podemos escrever:

$$C(x) = p_1(x)g_1(x) + p_2(x)g_2(x) + \cdots + p_N(x)g_N(x)$$

onde $C_\ell(x) = p_\ell(x)g_\ell(x), 1 \leq \ell \leq N$, é um pacote codificado pertencente ao t_ℓ-subcódigo corretor de erro

$$\mathcal{C}_\ell = \{C_\ell(x) \in F_q[x]; g_\ell(x)|C_\ell(x)\}$$

gerado por gℓ(x) e satisfazendo as condições:

1) $g_\ell(x)|g_{\ell+1}(x)$;

2) $deg[C_\ell(x)] < deg[g_{\ell+1}(x)]$.

2.2.2 O método de construção de árvore

Considere uma árvore na qual o nó raiz está associado ao subespaço vetorial de um código corretor de erro abrangente.

Defina o nó raiz da árvore como sendo o código C tal que:

$$\mathcal{C}_{i0} = \langle g_{i0}(x) \rangle = \{C_{i0}(x) \in F_q[x]; g_{i0}(x)|C_{i0}(x)\}.$$

Este subespaço corresponde a um t_0-código corretor de erro cíclico, dado por $C_{i0}(n,k_{i0})$gerado pelo polinômio $g_{i0}(X)$.

Uma árvore de códigos cíclicos aninhados é uma árvore finita que satisfaz as condições:

1) Cada nó interno pode ser subdividido em outro nó interno e um terminal;

2) O *j*-ésimo nó interno está associado com um subespaço linear $C_{ij} \subset F_q^n$ de dimensão k_{ij} e pode ser subdividido da forma:

$$\mathcal{C}_{ij} = \mathcal{C}_{i(j+1)} + \mathcal{C}_{t(j+1)}, com \ \mathcal{C}_{i(j+1)} \cap \mathcal{C}_{t(j+1)} = \{0\}$$

Se $k_{i(j+1)} = dim\mathcal{C}_{i(j+1)}$ e $k_{t(j+1)} = dim\mathcal{C}_{t(j+1)}$, então $k_{ij} = k_{i(j+1)} + k_{t(j+1)}$.

3) Todos os subespaços associados com os nós internos devem ser códigos de blocos lineares cíclicos definidos por um polinômio gerador;

4) Se $\mathcal{C}_{ij} = \langle g_{ij}(x) \rangle$e $\mathcal{C}_{i(j+1)} = \langle g_{i(j+1)}(x) \rangle$. Então $g_{ij}(x)|g_{i(j+1)}(x)$. Além disso, $g_{ij}(x)|x^n - 1$ para qualquer $g_{ij}(x)$;

5) Para encerrar, o último nó interno não terá ramificações.

Seja *pj*(*x*) o pacote de dados associado ao *j*-ésimo nó terminal, para $1 \leq j \leq T$. A codificação é dada por:

$$C_j(x) = p_j(x)g_{i(j-1)}(x)$$

Os pacotes codificados são somados e a palavra código resultante é enviada.

$$C_0(x) = C_1(x) + C_2(x) + \cdots + C_T(x)$$

Favor consultar [3] para maiores detalhes sobre o processo de codificação utilizando a construção de árvore.

3 I CONSTRUÇÃO ÁRVORE: ALGORITMO E CONSIDERAÇÕES

Os programas (m- files) em *MatLab®* para a construção de árvore, que podem ser encontrados em [1], permitem efetuar os cálculos em corpos finitos fazendo as devidas transformações da representação inteira para potências de α, baseadas na Tabela 1.

Exemplo 1. *Para T=3 seja $C_{i0}(7,5)$ um código de Reed-Solomon em GF(8) e $k_{t1}=k_{t2}=2$ as dimensões dos subespaços C_{t1}, C_{t2}, respectivamente. O último nó associado a C_{i2} de dimensão $k_{i2}=1$. Os pacotes $p_1(x)=x+\alpha^2$, $p_2(x)=\alpha^3x+\alpha$ estão associados aos nósterminais e ambos tem comprimento 2, o pacote $p_3(x)=\alpha^5$ está associado ao último nó e tem comprimento 1.*

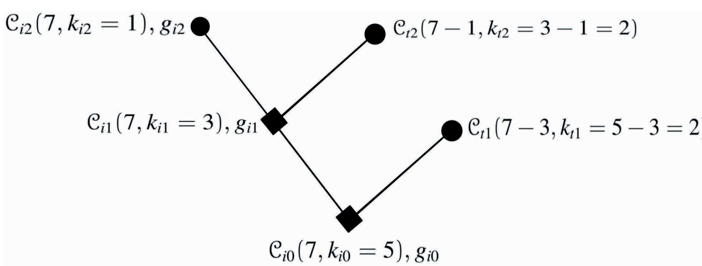


Figura 2: Construção de Árvore.

Seja α o elemento primitivo de GF(8), então os polinômios geradores são:

1) $deg(g_{i0}(x)) = n - k_{i0} = 2 \Rightarrow g_{i0}(x) = \prod_{j=1}^{2}(x-\alpha^j) = x^2 + \alpha^4x + \alpha^3.$

2) $deg(g_{i1}(x)) = n - k_{i1} = 4 \Rightarrow g_{i1}(x) = \prod_{j=1}^{4}(x-\alpha^j) = x^4 + \alpha^3x^3 + x^2 + \alpha x + \alpha^3.$

3) $deg(g_{i2}(x)) = n - k_{i2} = 6 \Rightarrow g_{i2}(x) = \prod_{j=1}^{6}(x-\alpha^j) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$

Considere os pacotes $p_1(x) = x + \alpha^2$, $p_2(x) = \alpha^3x + \alpha$, $p_3(x) = \alpha^5$, ou seja, $p_1 = [1, 4]$, $p_2 = [3, 2]$ e $p_3 = [7]$, de acordo com a Tabela 1. Codificando os pacotes, temos:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= p_1(x)g_{i0}(x) \\ &= x^3 + \alpha x^2 + \alpha^4 x + \alpha^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= p_2(x)g_{i1}(x) \\ &= \alpha^3x^5 + \alpha^5x^4 + \alpha^6x^3 + \alpha^2x^2 + x + \alpha^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3(x) &= p_3(x)g_{i2}(x) \\ &= \alpha^5x^6 + \alpha^5x^5 + \alpha^5x^4 + \alpha^5x^3 + \alpha^5x^2 + \alpha^5x + \alpha^5 \end{aligned}$$

Então, a palavra código a ser transmitida é dada por:

$$\begin{aligned} C_0(x) &= C_1(x) + C_2(x) + C_3(x) \\ &= \alpha^5x^6 + \alpha^2x^5 + 0x^4 + \alpha^3x^3 + 1x^2 + 0x + \alpha^4 \end{aligned}$$

Potência de α	Elemento de GF(8)	Binária	Inteira
0	0	000	0
1	1	001	1
α	x	010	2
α^2	x^2	100	4
α^3	x+1	011	3
α^4	x^2+x	110	6
α^5	x^2+x+1	111	7
α^6	x^2+1	101	5

Tabela 1: Construção do Corpo GF(8).

Considerando a construção de árvore baseada em códigos Reed-Solomon e supondo que o receptor tenha informa¸c˜ao lateral disponível, quando haverá ganho na capacidade de correção?

Proposição 1. *Devido `a estrutura de aninhamento, a característica de capacidade de correção de erro variável só pode ser observada se houver uma remoção sequencial dos pacotes associados aos nós, da raiz para o topo da árvore.*

Demonstração. Supondo que $C_\ell(x), 1 \leq \ell \leq T$, é o primeiro pacote codificado conhecido no receptor, então

$$\begin{aligned} C_0(x) &= p_1(x)g_{i0}(x) + \cdots + p_{(\ell-1)}(x)g_{i(\ell-2)}(x) + p_{(\ell+1)}(x)g_{i\ell}(x) + \cdots + p_T(x)g_{i(T-1)}(x) \\ &= [p_1(x) + \cdots + p_{(\ell-1)}(x)q_{(\ell-1)}(x) + p_{(\ell+1)}(x)q_{(\ell+1)}(x) + \cdots + p_T(x)q_T(x)]g_{i0}(x) \end{aligned}$$

portanto, $C_0(x) \in C_{i0}(n,k_{i0})$, cuja capacidade de correção de erro é t_0. Note que mesmo o receptor conhecendo outros pacotes $C_j(x), \ell<j\leq T$, o resultado não se altera. Por outro lado, se todos os pacotes $C_j(x), 1\leq j<\ell$, são conhecidos pelo receptor, podemos escrever

$$\begin{aligned} C_0(x) &= p_{(\ell+1)}(x)g_{i\ell}(x) + \cdots + p_T(x)g_{i(T-1)}(x) \\ &= [p_{(\ell+1)}(x)\overline{q}_{(\ell+1)}(x) + \cdots + p_T(x)\overline{q}_T(x)]g_{i\ell}(x) \end{aligned}$$

assim, $C_0(x) \in \mathcal{C}_{i\ell}(n, k_{i\ell})$, cuja capacidade de correção de erro é $t_\ell \geq t_0$, ocorrendo a igualdade somente quando $d_{min}(C_\ell) - d_{min}(C_0) < 2$.

Analisamos dois casos de construção de árvore de códigos cíclicos, com os mesmos parâmetros a cada nível. Em um deles não se observa aumento na capacidade de correção de erro do penúltimo nó interno para o último nó da árvore. Isso se dá pela variedade de possibilidades de polinômios geradores para um código cíclico de parâmetros (n, k). Em seguida, mostramos que para códigos de Reed-Solomon essa característica de aumento da capacidade será garantida desde que

$$k_{ij} - k_{i(j+1)} \geq 2, \forall j = 0, \dots, T-1.$$

Exemplo 2. *Seja $C_{i0}(15,10)$ um código cíclico em GF(2) e $k_{t1}=4$, $k_{t2}=2$ as dimensões dos subespaços C_{t1}, C_{t2}, respectivamente. O último nó está associado com C_{i2} de dimensão $k_{i2}=4$.*

Considere a fatoração: $x^{15}-1=(1+x)(1+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2)(1+x+x^4)$

Caso 1. Considere os polinômios geradores:

- $g_{i0}(x) = (1+x)(1+x^3+x^4)$. Então, $d_{min}(C_{i0}) = 4$ e $t_0 = 1$;
- $g_{i1}(x) = g_{i0}(x)(1+x+x^2+x^3+x^4), d_{min}(C_{i1}) = 6 e t_1 = 2$;
- $g_{i2}(x) = g_{i1}(x)(1+x+x^2)$, $d_{min}(C_{i2}) = 8$ e $t_2 = 3$

Note que houve aumento da capacidade de correção de erro a cada nível da árvore, o que não ocorre no caso seguinte.

Caso 2. Considere agora os seguintes polinômios geradores:

- $g_{i0}(x) = (1+x)(1+x+x^4)$. Logo, $d_{min}(C_{i0}) = 4$ e $t_0 = 1$.
- $g_{i1}(x) = g_{i0}(x)(1+x^3+x^4)$, $d_{min}(C_{i1}) = 6$ e $t_1 = 2$.
- $g_{i2}(x) = g_{i1}(x)(1+x+x^2)$, $d_{min}(C_{i2}) = 6$ e $t_2 = 2$.

Proposição 2. *Dado um código de Reed-Solomon de parâmetros (n,k), o qual tem distância mínima d=n-k+1 é possível garantir um aumento da capacidade de* correção *de erro a cada nível da árvore desde que* $k_{ij} - k_{i(j+1)} \geq 2, \forall j = 0, \dots, T-1.$

Demonstração: Devemos provar que $t_{i(j+1)} \geq t_{ij} + 1, \forall j = 0, \dots, T-1.$ Sem perda de generalidade, fixe *j*=0. Se $k_{i0} - k_{i1} \geq 2,$ então podemos escrever:

$$(-d_{i0} + n + 1) + d_{i1} - n - 1 \geq 2$$

$$d_{i1} - 1 \geq d_{i0} - 1 + 2$$

$$[\frac{d_{i1}-1}{2}] \geq [\frac{d_{i0}-1}{2}] + 1$$

$$t_{i1} \geq t_{i0} + 1$$

4 I CONCLUSÕES

Este trabalho considera a codificação de índice a partir da construção de códigos cíclicos aninhados. Após a etapa de correção de erros no decodificador, ocorre a etapa de recuperação de dados, que foi descrita em [3] da seguinte forma:

O *j*–´ésimo pacote $p_j(x)$, para $j < T$, é decodificado pela operação:

$$p_j(x) = \frac{[C_0(x) mod\, g_{ij}(x)]}{g_{i(j-1)}} eparaj = T, p_T(x) = \frac{C_0(x)}{g_{i(T-1)}}$$

Note que a operação de módulo elimina a influência de todas as mensagens relacionadas a polinômios de grau igual ou superior ao grau de *gij*, portanto, a informação desejada estará contida no resto de uma operação de divisão, que é o efeito da operação de módulo. O quociente da última operação de divisão fornecerá a informação desejada, pois todas as outras mensagens tem grau inferior ao grau do polinômio divisor.

A constatação de que para códigos cíclicos nem sempre haverá aumento na capacidade de correção de erro entre os níveis da árvore, como considerado em [3], nos leva a buscar respostas sobre como escolher adequadamente os polinômios geradores para um código de parâmetros (*n, k*) e seus subcódigos, de modo a garantir subcódigos com maior distância de Hamming, ao ponto de se observar aumento da capacidade de correção de erro entre os níveis da árvore. Um método para construir cadeias de alguns códigos de bloco lineares, mantendo as distâncias mínimas (dos subcódigos gerados) a maior possível é apresentado em [8] e pode ser a resposta para essa busca.

REFERÊNCIAS

1. Alencar, V. G. P, Construcão-de-Arvore em MatLab no GitHub (2021). https://github.com/valeriaurca/Construção-de-Arvore.git.

2. Arbabjolfaei, F. and Kim, Y. H. (2018), Fundamentals of Index Coding, *Foundations and Trends@ in Communications and Information Theory*, 14:163–346, 2018. DOI: 10.1561/0100000094.

3. Barbosa, F. C. and Costa, M. H. M. A tree construction method of nested cyclic codes, *IEEE Information Theory Workshop*, 302-305, 2011. DOI: 10.1109/ITW.2011.6089441.

4. Blahut, R.E. *Algebraic Codes for Data Transmission* . Cambridge University Press, New York, 2003.

5. Dau, S. H., Skachek, V. and Chee, Y. M. Error Correction for Index Coding with Side Information, *IEEE Transactions on Information Theory* , 59:1517–1531, 2013. DOI: 10.1109/TIT.2012.2227674.

6. Heegard, C. Partitioned linear block codes for computer memory with “stuck-at” defects, *IEEE Transactions on Information Theory* , 29:831–842, 1983. DOI:10.1109/TIT.1983.1056763.

7. Hefez, A., Villela, M. L. T. *Códigos Corretores de Erros, 2a. edição* . IMPA, Rio de Janeiro, 2017.

8. Vinck, A. J. H. , Luo, Y. Optimum distance profiles of linear block codes, *IEEE International Symposium on Information Theory*, 1958–1962, 2008. DOI: 10.1109/ISIT.2008.4595331.

9. Xiao, L., T. Fuja, J. Kliewer and D. J. Jr. Costello. Nested codes with multiple interpretations, *2006 40th Annual Conference on Information Sciences and Systems*, 851-856, 2006. DOI: 10.1109/CISS.2006.286586.

INMERSIONES Y PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS DE SOBOLEV PERIÓDICO

Data de aceite: 02/06/2023

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

RESUMEN: En este trabajo estudiamos los espacios de Sobolev modelados en L^2 caso periódico. Probamos importantes resultados de este espacio, su conexión con los $l^2(Z)$-con peso, mediante la transformada de Fourier generalizada; tratamos sus inmersiones densas e inmersiones de Sobolev cuando $s>\frac{1}{2}$ y se evidencia una operación producto que lo hace un álgebra de Banach. Finalmente, damos algunos comentarios y aplicaciones a ecuaciones de evolución.

PALABRAS CLAVE: Espacios de Sobolev periódico, inmersiones de Sobolev, álgebra de Banach, transformada de Fourier, Distribuciones peródicas.

IMMERSIONS AND PROPERTIES OF THE PERIODIC SOBOLEV SPACES

ABSTRACT: In this work we study the Sobolev spaces modeled in L^2 periodic case. We prove important results of this space, its connection with the $l^2(Z)$-with weight, through the generalized Fourier transform; we treat its dense immersions and Sobolev immersions when $s>\frac{1}{2}$ and a product operation is evidenced, which makes it a Banach algebra. Finally, we give some comments and applications to equations of evolution.

KEYWORDS: Periodic Sobolev spaces, Sobolev immersions, Banach algebra, Fourier transform, periodic distributions.

1 I INTRODUCCIÓN

En este artítulo estudiaremos los espacios de Sobolev modelados en L^2 caso periódico. Para obtener información general de espacios de Sobolev modelados en L^p, podemos citar Adams [1]. Estos espacios son sumamente útiles en el análisis de las ecuaciones diferenciales parciales. Para visualizar su riqueza en el análisis de algunas ecuaciones de evolución, citamos [2], [3], [5], [6], [7], [8]-[13].

Es importante enfatizar que estos espacios permiten hacer una clasificación de las distribuciones periódicas, en función de sus regularidades. Como referencia para este artículo, citamos a Iorio [3].

Queremos resaltar que Iorio [3] es fuente teórica, de ideas y problemas propuestos. No podemos dejar de mencionar la riqueza de información de Terence [15] y Kato [4]. Y para el caso periódico también es importante mencionar a Linares and Ponce [5].

Nuestro trabajo está organizado como sigue. En la sección 2, damos los resultados preliminares necesarios para la comprensión de este artículo. Así, tratamos intuitivamente la convergencia en *IR* de la función Zeta de Riemann, estudiamos los espacios l^p con peso: l_s^p, introducimos la desigualdad de Young para la convolución de sucesiones numéricas, estudiamos desigualdades tipo potencias en *IR*, damos la definición de Álgebra de Banach y finalmente presentamos un diagrama que resume las inclusiones continuas e inmersiones densas en las distribuciones periódicas. En la sección 3, intoducimos los espacios de Sobolev periódico: H^s_{per} y sus propiedades. En la sección 4, estudiamos las inclusiones densas de H^s_{per}. En la sección 5, caracterizamos los espacios H^s_{per} cuando s es un número natural. En la sección 6, estudiamos los espacios H^s_{per} cuando $s>\frac{1}{2}$, probando el importante Lema de

Inmersión de Sobolev. En la sección 7, obtenemos una operación producto en H^s_{per} cuando $s>\frac{1}{2}$, que lo hace a H^s_{per} un Álgebra de Banach.

En la sección 8 presentamos un diagrama que resume las inclusiones continuas e inmersiones densas en H^s_{per}. Y comentamos de su aplicación en las ecuaciones de evolución.

Finalmente, en la sección 9, damos las conclusiones de nuestro estudio.

2 | PRELIMINARES

2.1 La función Zeta de Riemann: Convergencia

Introducimos la función Zeta de Riemann $\zeta(r)$, que está definida por la serie de Dirichlet

$$\zeta(r) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^r}$$

y que probaremos su convergencia cuando $r > 1$.

También, introducimos las siguientes proposiciones:

Proposición 2.1 *Se verifca la igualdad*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^r} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx \, ,$$

desde que la función f, $f(x) := \frac{1}{x^r}$ *es decreciente, continua y positiva en* $[1,+\infty)$.

Luego, de la igualdad previa se obtiene:

Proposición 2.2 *La serie* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^r}$ *converge si y solo si la intengral* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx$ *existe.*

Finalmente, todo se reduce a querer saber ¿para que valores *r* la integral existe? La respuesta es la siguiente:

Proposición 2.3 *La integral* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx$ *existe si y solamente si r* > 1.

Prueba.- Esto se deduce rápidamente de los siguientes casos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx = \frac{1}{r-1} \lim_{M \to +\infty} \{1 - M^{-r+1}\} = \begin{cases} \frac{1}{r-1}\,, & \text{si} \quad r > 1 \\ +\infty\,, & \text{si} \quad r < 1 \end{cases}$$

y

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \to +\infty} \{Ln(M) - Ln(1)\} = +\infty\,, \quad \text{si} \quad r = 1\,.$$

Finalmente, de estas proposiciones podemos concluir con la prueba del siguiente importante resultado.

Proposición 2.4 *La función Zeta de Riemann está bien definida. i.e. La serie*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^r}$$

es convergente si r > 1.

Proposición 2.5 *si* s>$\frac{1}{2}$ *entonces*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+k^2)^s} < \infty\,.$$

Prueba.- De la Proposición previa haciendo 2*s* = *r* > 1, se tiene la convergencia de ζ(2*s*).

2.2 Los espacios *l^p_s(Z)*

Definición 2.1 *Sea s ∈ IR y 1 ≤ p < ∞, definimos el conjunto:*

$$l^p_s(Z) := \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}, x_n \in \mathbb{C}\,;\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n^2)^s |x_n|^p < \infty \right\}$$

con dos operaciones:

$$\begin{aligned} (x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n)\,, \quad (x_n), (y_n) \in l^p_s(Z) \\ \lambda(x_n) &= (\lambda x_n)\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}\,, \quad (x_n) \in l^p_s(Z)\,. \end{aligned}$$

Así, $l_s^p(Z)$ con esas operaciones es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial. Introducimos la aplicación

$$\|(x_n)\|_{s,p} := \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n^2)^s |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

que hace de $l_s^p(Z)$ un espacio normado y completo, esto es $(l_s^p(Z), \|\cdot\|_{s,p})$ es un espacio de Banach.

Vemos que si $s = 0$ entonces $l_0^p(Z) = l^p(Z)$.

A continuación se obtienen los siguientes resultados, cuya prueba puede ser encontrada en [14].

Proposición 2.6 *La norma $\|\cdot\|_{s,p}$ viene de un producto interno siy solamente si $p = 2$. Esto es, si $p \neq 2$, la norma $\|\cdot\|_{s,p}$ no viene de un producto interno. El caso $p = 2$, $\|\cdot\|_{s,2}$ es la norma inducida del producto interno $<\cdot,\cdot>_s$ definido en $l_s^2(Z)$ por*

$$< x, y >_s := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k}$$

para $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ en $l_s^2(Z)$. Esto es,

$$\|x\|_{s,2} = \|x\|_{<\cdot,\cdot>_s} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposición 2.7 *$l_s^2(Z)$ es un espacio de Hilbert, Reflexivo con $(l_s^2(Z))' = l_s^2(Z)$ y Separable.*

2.3 Convolución de sucesiones numéricas. La desigualdad de Young y generalización

Definición 2.2 (Convolución de sucesiones numéricas) *Sean α y β sucesiones, la convolución de α y β es la sucesión $\alpha * \beta$* definida por

$$(\alpha * \beta)_k = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \alpha_j \beta_{k-j} \quad \textit{siempre que tenga sentido.}$$

Se satisface la siguiente importante desigualdad, que será usado en la demostración de que H^s_{per} es un álgebra de Banach si $s>\frac{1}{2}$.

Proposición 2.8 (Desigualdad de Young) *Sean $\alpha \in l^1$ y $\beta \in l^2$ entonces la convolución de α y β satisface: $\alpha * \beta \in l^2$ y*

$$\|\alpha * \beta\|_{l^2} \leq \|\alpha\|_{l^1} \|\beta\|_{l^2}.$$

En particular, para todo $\alpha \in l^1$ fijado, la aplicación L definida por

$$\begin{aligned} L : l^2 &\longrightarrow l^2 \\ \beta &\longmapsto \alpha * \beta \end{aligned}$$

es un operador lineal acotado de l^2 con cota: $\|L\| \leq \|\alpha\|_{l^1}$.

Prueba.- Tomando módulo a $(\alpha*\beta)_k$ y considerando $|\alpha_j| = |\alpha_j|^{\frac{1}{2}}|\alpha_j|^{\frac{1}{2}}$ e inmediatamente aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se consigue para todo $k \in Z$:

$$
\begin{aligned}
|(\alpha * \beta)_k| &\leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j \beta_{k-j}| \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j|^{\frac{1}{2}} (|\alpha_j|^{\frac{1}{2}} |\beta_{k-j}|) \\
&\leq \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j|\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j||\beta_{k-j}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\alpha\|_{l^1}^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j||\beta_{k-j}|^2\right]^{\frac{1}{2}} . \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

Elevando al cuadrado la desigualdada (2.1), sumando sobre k e intercambiando el orden de la suma obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|\alpha * \beta\|_{l^2}^2 &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |(\alpha * \beta)_k|^2 \\
&\leq \|\alpha\|_{l^1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j||\beta_{k-j}|^2 \\
&= \|\alpha\|_{l^1} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\beta_{k-j}|^2 \\
&= \|\alpha\|_{l^1} \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\alpha_j|\right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\beta_m|^2 \\
&= \|\alpha\|_{l^1}^2 \|\beta\|_{l^2}^2 .
\end{aligned}
$$

A seguir introducimos una generalización de la Desigualdad de Young.

Proposición 2.9 *Sean* $\alpha \in l^p$ *y* $\beta \in l^q$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ *con* $1 \leq p,q,r \leq \infty$ *entonces la convolución de* α *y* β *satisface:* $\alpha * \beta \in l^r$ *y*

$$\|\alpha * \beta\|_r \leq \|\alpha\|_p \|\beta\|_q$$

2.4 Importantes Acotaciones

A continuación, tenemos un importante resultado, útil en la prueba de que H^s_{per} es álgebra de Banach si $s > \frac{1}{2}$.

Lema 2.1 *Sean* a *y* $b \in [0,\infty)$ *y* $s \geq 0$. *Entonces existen constantes positivas* m_s *y* M_s *dependiendo unicamente de s, tal que*

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a+b)^s \leq M_s(a^s + b^s). \qquad (2.2)$$

Prueba.- Si $a = 0$, no hay nada que probar. Así, consideramos $a > 0$. Ahora, podemos observar que (2.2) es equivalente a

$$m_s \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^s\right) \leq \left(1 + \frac{b}{a}\right)^s \leq M_s \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^s\right). \qquad (2.3)$$

Así, es suficiente probar que existen m_s y M_s tal que

$$m_s(1 + r^s) \leq (1 + r)^s \leq M_s(1 + r^s) \text{ , } \forall r \in [0,\infty). \tag{2.4}$$

Observamos que para todo r, $s \geq 0$, tenemos

$$1 \leq (1 + r)^s \text{ y } r^s \leq (1 + r)^s \text{ ,}$$

y sumando ambas desigualdades se consigue:

$$1 < 1 + r^s \leq 2(1 + r)^s \text{ ,}$$

i.e.

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{m_s :=} \leq \frac{(1+r)^s}{1+r^s} \text{ , } \forall r, s \geq 0 \tag{2.5}$$

Ahora, para $r > 1$, tenemos

$$(1 + r)^s \leq (r + r)^s = (2r)^s = 2^s r^s \leq 2^s(1 + r^s),$$

i.e.

$$\frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq 2^s \text{ , } \forall r > 1 \tag{2.6}$$

Observamos que la función $F(r) := \frac{(1+r)^s}{1+r^s} > 0$ es continua en el compacto [0,1], luego ella alcanza máximo y mínimo en ese intervalo, i.e. $\exists r_i \in [0,1]$ tal que

$$\begin{aligned} 0 < F(r_1) &= \min_{r\in[0,1]} F(r) \text{ y} \\ 0 < F(r_2) &= \max_{r\in[0,1]} F(r) \text{ .} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Observamos que F nunca se anula en [0,1], entonces $F(r_i) > 0$. Ahora, de (2.6) y (2.7), basta tomar el máximo entre 2^s y $F(r_2)$, es decir

$$F(r) = \frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq M_s := \max\{2^s, F(r_2)\} \text{ , } \forall r \geq 0. \tag{2.8}$$

De (2.5) y (2.8) se concluye.

2.5 Álgebra de Banach

Definición 2.3 *Un* **Álgebra de Banach** *es un espacio de Banach X, con un produto* $(x,y) \in X \times X \to xy \in X$ *tal que,* $\forall x,y,z \in X$ *y* $\forall r \in \mathbb{C}$ *se satisfacen*

a) $(xy)z = x(yz)$,

b) $r(xy) = (rx)y = x(ry)$,

c) $(x + y)z = xz + yz$,

d) $\|xy\|X \leq \|x\|X\|y\|X$.

2.6 Diagrama resumen de Distribuciones Periódicas

Definición 2.4 *Sea*

$$P : = C^{\infty}_{per}([-\pi, \pi]),$$

el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *infinitamente diferenciable y periódica con* *periodo* 2π.

Este espacio es un espacio métrico completo.

También,

$$\begin{aligned} P' \; &:= \; \{T : P \longrightarrow \mathbb{C} \text{ lineal tal que } \exists \psi_n \in P \text{ y} \\ & \qquad < T, \varphi >= \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\varphi(x)\, dx \,,\; \forall \varphi \in P \; \Big\} \\ &= \; (P)' \,. \end{aligned}$$

Esto es, *P'* es el dual topológico de *P*. Así, *P'* es llamado el espacio de las Distribuciones Periódicas.

Ahora, queremos resumir mediante com diagrama las importantes ropriedades de las distribuciones periódicas *P'*.

Esto es, las siguientes inclusiones son continuas com imagen densa

$$\begin{array}{ccccc} P & \hookrightarrow & L^2([-\pi,\pi]) & \hookrightarrow & P' \\ \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee \\ S(Z) & \hookrightarrow & l^2(Z) & \hookrightarrow & S'(Z) \end{array}$$

donde *S*(*Z*) es el espacio de las sucesiones Rápidamente Decrecientes (R.D.), definido por

$$S(Z) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\in Z} \,,\; \alpha_k \in \mathbb{C} \;/\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k| < \infty \text{ y } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\alpha_k||k|^n < \infty \;,\; \forall n \geq 1 \right\}$$

y *S'*(*Z*) es el espacio de las sucesiones de Crecimiento Lento (C.L.), definido por

$$S'(Z) := \left\{ \alpha = (\alpha_k)_{k\in Z} \,,\; \alpha_k \in \mathbb{C} \;/\; \exists\, C > 0 \,, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ con } |\alpha_k| \leq C|k|^N \,,\; \forall k \neq 0 \right\} .$$

3 | LOS ESPACIOS H^s_{per} Y PROPIEDADES

Empezamos esta sección introduciendo la siguiente definición.

Definición 3.1 *Sea s ∈ IR, definimos*

$$H^s_{per}([-\pi,\pi]) := \left\{ f \in P' \;\; tal\ que \;\; \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 < \infty \right\} \subset P' .$$

Observación 3.1 *Sea s ∈ IR, se verifica que* $H^s_{per} := H^s_{per}([\pi,\pi])$ *es un espacio vectorial.* **Definición 3.2** *Sea s ∈ IR, definimos en* H^s_{per} *la aplicación* $\|\cdot\|_s$

$$\|f\|_s := \left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \;,\; f \in H^s_{per}.$$

Observación 3.2 *La aplicación* $\|\cdot\|_s$ *es una norma en* H^s_{per}. *Así,* $(H^s_{per}\|\cdot\|_s)$ *es un espacio normado.*

Observación 3.3 *Para* $s \in IR$*, se verifican las siguientes equivalencias:*

$$f \in H^s_{per} \Leftrightarrow \left((1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2(Z) \Leftrightarrow (\widehat{f}(k))_{k=-\infty}^{+\infty} = \widehat{f} \in l^2_s(Z)$$

donde $l^2_s(Z) = \left\{\alpha = (\alpha_k)_{k\in Z} \ tal\ que \ \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\alpha_k|^2 < \infty\right\}$ $y\ (l^2_s(Z), \|\cdot\|_{l^2_s})$ *es un espacio normado, con la norma*

$$\|\alpha\|_{l^2_s} = \left(2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Así, $\|f\|_s = \|\widehat{f}\|_{l^2_s}$.

Observe que $\|\cdot\|_{l^2_s} = \sqrt{2\pi}\|\cdot\|_{s,2}$.

Definición 3.3 *Para* $s \in IR$*, definimos en* H^s_{per} *la aplicación* $<\cdot,\cdot>_s$

$$< f, g >_s := 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

Observación 3.4 *Para* $s \in IR$*, se verifica que* $(H^s_{per}, <\cdot,\cdot>_s)$ *es un espacio de Hilbert, i.e. el espacio* H^s_{per} *es completo.*

Observación 3.5 *Para* $s = 0$*, tenemos*

$$f \in H^0_{per} \Leftrightarrow \widehat{f} \in l^2(Z) \Leftrightarrow f \in L^2_{per}([-\pi,\pi]),$$

i.e.

$$\|f\|_{H^0_{per}} = \sqrt{2\pi}\|\widehat{f}\|_{l^2} = \|f\|_{L^2([-\pi,\pi])}.$$

4 I INCLUSIONES DENSAS

Proposición 4.1 *Se satisface la siguiente inclusión*

$$P \subset H^s_{per}, \ \forall s \in IR$$

y además dicha inclusión es densa, i.e. $\overline{P}^{\|\cdot\|_{H^s_{per}}} = H^s_{per}, \ \forall s \in IR.$

Prueba.- En efecto, primero probaremos que $P \subset H^s_{per}$, pues esto implica $\overline{P}^{\|\cdot\|_{H^s_{per}}} \subset H^s_{per}$.

Recordemos que $P \subset P'$, vía $T_u \equiv u$, donde $< Tu, \phi > = \int_{-\pi}^{\pi}\phi(x)u(x)dx, \forall\phi \in P$. También en P vale:

$$u = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{u}(k)e^{ikx}.$$

Así, para $u \in P$ valen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
u' &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u'}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik\widehat{u}(k)e^{ikx} \\
u'' &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u''}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-k^2)\widehat{u}(k)e^{ikx}
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente, se cumple para todas las derivadas de *u*, i.e.

$$u^{(j)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{u^j}(k)e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (ik)^j)\widehat{u}(k)e^{ikx} .$$

Si $u \in P$ entonces vale la identidad de Parseval, y como las u^j también estan en P para $j = 1,2,...$, también vale la identidad de Parseval para estas funciones. Aplicamos esto a u y u' respectivamente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{u}(k)|^2 < \infty , \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u'(x)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{u'}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2|\widehat{u}(k)|^2 < \infty . \tag{4.2}$$

Sumando (4.1) y (4.2) obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{|u(x)|^2 + |u'(x)|^2\}\, dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)|\widehat{u}(k)|^2 < \infty$$

i.e.$u \in H^1_{per}$ y $u \in H^1([-\pi,\pi])$.

Obviamente de (4.1) tenemos que $u \in H^0_{per}$.

Así, por la Identidad de Parseval aplicado a u^j, para $j = 1,2,...$, tenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u^j(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{u^j}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^{2j}|\widehat{u}(k)|^2 < \infty. \tag{4.3}$$

Usando la Fórmula del binomio de Newton, para $s \in Z^+$ obtenemos $(1 + |k|^2)^s = \sum_{j=0}^{s} C_j|k|^{2j}$, donde

$$C_j = \begin{pmatrix} s \\ j \end{pmatrix} = \frac{1}{j!}\sum_{t=0}^{j-1}(s-t) = \frac{s!}{j!(s-j)!}$$

y de la afirmación (4.3) obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s|\widehat{u}(k)|^2 < \infty,$$

i.e. $u \in H^s_{per}$ para $s \in Z^+$.

Para el caso $s \in IR^+$, sabemos que existe $m \in Z^+$ tal que $s \leq m$ y vale la desigualdad

$$(1 + |k|^2)^s \leq (1 + |k|^2)^m ,$$

luego

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\widehat{u}(k)|^2 \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^m|\widehat{u}(k)|^2 < \infty\,,$$

i.e. $u \in H^s_{per}$ para $s \in IR^+$.

Para $s \in IR^-$ tenemos $s = -r$, con $r \in IR^+$ y vale $1 \le (1 + |k|^2)$, de donde se obtiene $1 \le (1 + |k|^2)^r$, esto es

$$(1+|k|^2)^s = \frac{1}{(1+|k|^2)^r} \le 1$$

y usando (4.1) obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\widehat{u}(k)|^2 \le \sum_{k=\infty}^{+\infty}|\widehat{u}(k)|^2 < \infty,$$

i.e. $u \in H^s_{per}$ para $s \in IR^-$. Así, hemos probado que $P \subset H^s_{per},\ \forall s \in I\!R$.

Observe que también se puede usar la versión generalizada del binomio de Newton.

Ahora probaremos que $H^s_{per} \subseteq \overline{P}^{\|\cdot\|_{H^s_{per}}}$. Para esto, sea $g \in H^s_{per}$, definimos α_n tal que

$$\alpha_n(k) = \begin{cases} \widehat{g}(k) & \text{si } |k| \le n \\ 0 & \text{si } |k| > n\,. \end{cases}$$

Afirmamos que $\alpha_n \in S(Z)$. En efecto, para n fijo tenemos que

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k|^j|\alpha_n(k)| = \sum_{k=-n}^{n}|k|^j|\widehat{g}(k)| \ < \ \infty\,,\ \forall j\,.$$

Luego, $g_n := \alpha_n^{\vee} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\alpha_n(k)e^{ikx}$ con $g_n \in P$ y $\widehat{g_n} = \alpha_n$.

Además, se verifica

$$\begin{aligned}\|g_n - g\|_s^2 &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^s|\widehat{g_n}(k) - \widehat{g}(k)|^2 \\ &= 2\pi\sum_{|k|>n}(1+|k|^2)^s|\widehat{g}(k)|^2 \longrightarrow 0\end{aligned}$$

cuando $n \to +\infty$, pues $g \in H^s_{per}$. Esto es, $\exists g_n \in P$ tal que $\|g_n - g\|_s \to 0$ cuando $n \to +\infty$, i.e. $g \in \overline{P}^{\|\cdot\|_s}$.

Proposición 4.2 *Sea $s,r \in IR$ tal que $s \ge r$ entonces $H^s_{per} \subset H^s_{per}$. i.e. H^s_{per} está inmerso continuamente y densamente en H^s_{per} y vale*

$$\|f\|_r \le \|f\|_s\,,\ \forall f \in H^s_{per}.$$

En particular, tenemos que si $s \ge 0$, entonces

$$H^s_{per} \subset L^2([-\pi,\pi]).$$

Además , vale la identificación "isométricamente isomorfo"

$$(H^s_{per})' \equiv H^{-s}_{per}\,,\ \forall s \in I\!R\,,$$

donde la dualidad es implementada por el par

$$< f, g >_* = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)\,, \quad \forall f \in H^{-s}_{per}\,,\ g \in H^s_{per}. \tag{4.4}$$

Prueba.- Como $1 \leq (1 + |k|^2)$ entonces $(1 + |k|^2)^r \leq (1 + |k|^2)^s$ si $r \leq s$. Así, se satisface

$$0 \leq \frac{(1+|k|^2)^r}{(1+|k|^2)^s} \leq 1 \ \text{ si } \ r \leq s\,. \tag{4.5}$$

Usando (4.5) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^r |\widehat{f}(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{(1+|k|^2)^r}{(1+|k|^2)^s}}_{\leq 1} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \ < \ \infty \end{aligned} \tag{4.6}$$

siempre que $f \in H^s_{per}$. Multiplicando por 2π a ambos lados de la desigualdad (4.6) obtenemos que $f \in H^r_{per}$ si $f \in H^s_{per}$ (i.e. $H^s_{per} \subset H^r_{per}$) y además

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s\,.$$

Con esto se ha probado la inclusión continua.

A seguir probaremos que la inclusión es densa, i.e. $\overline{H^s_{per}}^{\|\cdot\|_r} = H^r_{per}$. En efecto, basta mostrar $H^r_{per} \subset \overline{H^s_{per}}^{\|\cdot\|_r}$.

Sea $g \in H^r_{per}$ entonces usando la densidad de P en H^r_{per} tenemos que existe $g_n \in P$ tal que $g_n \to g$ en H^r_{per}. Como también $P \subset H^s_{per}$, entonces $g_n \in H^s_{per}$ y $g_n \to g$ en la norma $\|\cdot\|_r$ entonces $g \in \overline{H^s_{per}}^{\|\cdot\|_r}$.

Si $f \in H_{per}^{-s}$, la igualdad (4.4) nos permite definir L_f como:

$$L_f(g) = < f, g >_*\,,\ \forall g \in H^s_{per}.$$

Esta L_f es un funcional lineal continuo en H^s_{per}. Esto es, L_f es lineal con $\|L_f\| \leq \|f\|_{-s}$, i.e. $L_f \in (H^s_{per})'$.

Sea $\psi \in (H^s_{per})'$, utilizando el Teorema de Representación de Riesz tenemos que $\exists! \phi \in H^s_{per}$ tal que

$$\|\phi\|_s = \|\psi\|, \tag{4.7}$$

y

$$< \psi, g > \ = \ < g, \phi >_s\,,\ \forall g \in H^s_{per}. \tag{4.8}$$

Así, de (4.8) tenemos

$$\begin{aligned} < \psi, g > &= < g, \phi >_s \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \widehat{g}(k) \overline{\widehat{\phi}(k)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k) (1+|k|^2)^s \overline{\widehat{\phi}(k)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k) \overline{(1+|k|^2)^s \widehat{\phi}(k)} \;. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Sabemos que $\phi \in H^s_{per}$ entonces

$$\left((1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{\phi}(k)\right)_{k \in Z} \in l^2 \;. \tag{4.10}$$

Si definimos

$$\widehat{f}(k) := \overline{(1+|k|^2)^s \widehat{\phi}(k)}\,, \;\; \forall k \in Z\,, \tag{4.11}$$

tenemos que $f \in H_{per}^{-s}$. En efecto, de la definición (4.11) de $\hat{f}(k)$ y (4.10) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s} |\widehat{f}(k)|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s} |\overline{(1+|k|^2)^s \widehat{\phi}(k)}|^2 \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 \;<\; \infty\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

De (4.9) tenemos que existe $f \in H^{-s}_{per}$ tal que

$$\begin{aligned} < \psi, g > &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(k) \widehat{f}(k) \\ &= < f, g >_* \\ &= L_f(g)\,, \;\; \forall g \in H^s_{per}\,, \end{aligned} \tag{4.13}$$

i.e. para $\psi \in (H^s_{per})'$ existe $f \in H^{-s}_{per}$ tal que $\psi = L_f$

De (4.12) y (4.7) tenemos que

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{-s} &= \|\phi\|^2_s \\ &= \|\psi\|^2\,, \end{aligned}$$

de donde concluimos que $\|f\|_{-s} = \|\psi\|$. Esto es $(H^s_{per})'$ es isométricamente isomorfo a H^s_{per}.

5 I CARACTERIZACIÓN DE $H^m_{per}, m \in IN$

Proposición 5.1 (Caracterización de H^m_{per}, con $m \in IN$) *Sea $m \in IN$ entonces*

$$f \in H^m_{per} \text{ sii } \partial^j f = f^j \in L^2_{per}\,, \quad \forall j \in \{0,1,\ldots,m\},$$

donde la derivada es tomada en el sentido de P' y $f^0 = f$.

Además, las normas $\|\cdot\|_m$ y $|||\cdot|||_m$ son equivalentes, i.e. existen constantes positivas A_m y B_m tal que $A_m\|f\|_m \leq |||f|||_m \leq B_m\|f\|_m\ ,\ \forall f \in H^m_{per}$, donde

$$|||f|||_m := \left[\sum_{j=0}^{m} \|\partial^j f\|^2_{L^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Prueba.- Sea $f \in H^m_{per}$, entonces

$$\left((1+|k|^2)^{\frac{m}{2}}\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2. \tag{5.14}$$

Por otro lado, observamos que

$$|(ik)^j\widehat{f}(k)| = |ik|^j|\widehat{f}(k)| \leq (1+|k|^2)^{\frac{m}{2}}|\widehat{f}(k)|, \text{ para } j = 0,1,...,m. \tag{5.15}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 1 &\leq (1+|k|^2)^{\frac{m}{2}} \\ |k| &\leq (1+|k|^2)^{\frac{1}{2}} \leq [(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}]^m \\ |k|^j &\leq [(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}]^j \leq [(1+|k|^2)^{\frac{1}{2}}]^m, \end{aligned}$$

para $j = 0,1,...,m$.

Luego, de (5.14) y (5.15) tenemos que $\left((ik)^j\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2$ para j= 0,1, . . . , m. Como $|\widehat{f^j}(k)| = |(ik)^j\widehat{f}(k)|$ para j= 0,1, . . . , m, entonces $\left(\widehat{f^j}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2 \text{ para } j =$0,1. . . , m y por lo tanto $f^j \in L^2([-\pi,\pi])$ para j= 0,1, . . . , m y así la Identidad de Parseval y (5.15) nos permite realizar la siguiente estimativa

$$\begin{aligned} |||f|||^2_m &:= \sum_{j=0}^{m}\|f^j\|^2_{L^2} \\ &= 2\pi\sum_{j=0}^{m}\|\widehat{f^j}\|^2_{l^2} \\ &= 2\pi\sum_{j=0}^{m}\|(ik)^j\widehat{f}\|^2_{l^2} \\ &= 2\pi\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|(ik)^j\widehat{f}(k)|^2 \\ &\leq 2\pi\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+|k|^2)^m|\widehat{f}(k)|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{m}\|f\|^2_m \\ &= (m+1)\|f\|^2_m \end{aligned} \tag{5.16}$$

i.e.k $|||f|||_m \leq \sqrt{m+1}\|f\|_m$.

Recíprocamente, si $f^j \in L^2([-\pi,\pi])\ \forall j = 0,1,\ldots m,$ entonces $\widehat{f^j} \in l^2$, i.e.

$$\left((ik)^j \widehat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2 .$$

Ahora, recordemos que $|i^j| = 1$ y que $(1+|ik|^2)^m = \sum_{j=0}^{m} c_j |ik|^{2j}$ con $c_j = \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}$. Así, usando esto y la Identidad de Parseval obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_m^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^m |\widehat{f}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} c_j |ik|^{2j}\right) |\widehat{f}(k)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{j=0}^{m} c_j \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |(ik)^j \widehat{f}(k)|^2\right) \\
&= 2\pi \sum_{j=0}^{m} c_j \|\widehat{f^j}\|_{l^2}^2 \\
&= \sum_{j=0}^{m} c_j \|f^j\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left(\max_{j\in\{0,\ldots,m\}} c_j\right) |||f|||_m^2 < \infty .
\end{aligned}$$

Es decir, $\|f\|_m \leq \sqrt{\max_{j\in\{0,\ldots,m\}} c_j}\ |||f|||_m$ o mejor aún

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\max_{j\in\{0,\ldots,m\}} c_j}}\right) \|f\|_m \leq |||f|||_m .$$

6 | LEMA DE INMERSIÓN DE SOBOLEV

El siguiente lema es usado fundamentalmente en el estudio de ecuaciones de evolución no lineal.

Teorema 6.1 *Si* $s>\frac{1}{2}$ *entonces se verifican*

1. La serie de Fourier de $f \in H^s_{per}$ *converge absoluta y uniformemente en* $[-\pi,\pi]$, *i.e. la serie de Fourier de f*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

converge absoluta y uniformemente en $[-\pi,\pi]$.

2. Lema de Inmersión de Sobolev: $H^s_{per} \subset C_{per}$ *con inclusión continua, i.e. a* $f \in$

H^s_{per} le hace corresponder la función g ∈ Cper, donde $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$ *y satisface* $\widehat{f} \in l^1(Z)$ *y*

$$\|g\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{l^1} \leq C_s\|f\|_s \,, \; \forall f \in H^s_{per}, \tag{6.17}$$

donde

$$C_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Prueba.- Recordemos previamente que si s>$\frac{1}{2}$ entonces

$$\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}} < \infty . \tag{6.18}$$

Desde que s>$\frac{1}{2}$ usamos (6.18) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz para conseguir

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}|\widehat{f}(k)|}{(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}} \\ &\leq \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s|\widehat{f}(k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_s \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}} < \infty . \end{aligned} \tag{6.19}$$

Así, $\left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^1$ y además debido al M-test de Wierstrass tenemos que la serie de Fourier de f

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

converge absolutamente y uniformemente en [−π, π]. Así, si definimos

$$g(x) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx} ,$$

tenemos que $g \in C_{per}([-\pi,\pi])$.

Afirmamos que *f* = *g* en *P'*. En efecto,

$$\begin{aligned} < g, \phi > &= \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\phi(x)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}\phi(x)dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\phi(x)dx \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\phi}(-k) \\
&= \,< f, \phi > , \forall \phi \in P \,,
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la Generalización de la Identidad de Parseval. En conclusión, $f = g$ en P'.

De (6.19) conseguimos

$$
|g(x)| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_s \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}} \,, \ \forall x \in [-\pi, \pi] \,.
$$

Tomando supremo obtenemos $\widehat{f} \in l^1(Z)$ y

$$
\|g\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{l^1} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^{-s} \right]^{\frac{1}{2}}}_{C_s :=} \|f\|_s \,. \qquad (6.20)
$$

La continuidad de la aplicación : $f \in H^s_{per} \mapsto g \in C_{per}$, es consecuencia de (6.20).

7 I H^s_{per} ES UN ALGEBRA DE BANACH PARÁ $s>\frac{1}{2}$

Introduciremos la siguiente operación en H^s_{per} cuando $s \in (\frac{1}{2}, \infty)$.

Definición 7.1 *Sea* $f, g \in H^s_{per}$ *con* $s>\frac{1}{2}$*, debido al Lema de inmersión de Sobolev podemos definir* **el producto de** *f* **con** *g por*

$$
< f.g, \phi >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\phi(x)\,dx \,, \quad \forall \phi \in P \,.
$$

Vemos que $f.g \in C_{per} \subset P'$ y probaremos que con este producto H^s_{per} es un Álgebra de Banach siempre que $s>\frac{1}{2}$.

Teorema 7.1 *Si* $s>\frac{1}{2}$ *entonces* H^s_{per} *es un Álgebra de Banach. En particular, existe uma constante positiva* K_s *dependiendo unicamente de s tal que*

$$
\|fg\|_s \leq K_s \|f\|_s \|g\|_s \,, \quad \forall f, g \in H^s_{per}.
$$

Prueba.- Como $s>\frac{1}{2}$, usando el Lema de Inmersión de Sobolev, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\widehat{(fg)}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(j)e^{ijx}\right)g(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(j)\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-i(k-j)x}dx \\
&= \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j) \\
&= (\widehat{f}*\widehat{g})(k)\,. \qquad (7.21)
\end{aligned}
$$

Usando el Lema 2.1 con $a = 1,\, b = |k|^2$ y $\frac{s}{2}$, tenemos que

$$
(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}} \le M_s(1+|k|^s) \le M_s(1+|k-j|^s+|j|^s)\,,\ \forall k,j\in Z\,, \qquad (7.22)
$$

donde M_s es una constante positiva. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\left|(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\sum_{j=-n}^{n}\widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j)\right| \\
&\le (1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\sum_{j=-n}^{n}|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)| \\
&\le M_s\sum_{j=-n}^{n}\left[1+|k-j|^s+|j|^s\right]|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)| \\
&= M_s\sum_{j=-n}^{n}\left\{|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)|+|\widehat{f}(j)||k-j|^s|\widehat{g}(k-j)|+|j|^s|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)|\right\} \\
&= M_s\left\{\sum_{j=-n}^{n}|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)|+\sum_{j=-n}^{n}|\widehat{f}(j)||k-j|^s|\widehat{g}(k-j)|\right. \\
&\qquad\left.+\sum_{j=-n}^{n}|j|^s|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)|\right\} \qquad (7.23)
\end{aligned}
$$

Como l · l es continua, tomando límite a (7.23) cuando $n \to +\infty$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\left|(1+|k|^2)^{\frac{s}{2}}\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j)\right| \\
&\le M_s\left\{\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)|+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(j)||k-j|^s|\widehat{g}(k-j)|\right. \\
&\qquad\left.+\sum_{j=-\infty}^{+\infty}|j|^s|\widehat{f}(j)||\widehat{g}(k-j)|\right\} \\
&= M_s\left\{(F*G)(k)+(F*R)(k)+(S*G)(k)\right\}\,, \qquad (7.24)
\end{aligned}
$$

donde

$$\begin{aligned} G(k) &= |\widehat{g}(k)|\,, \forall k \in Z\,, \\ F(k) &= |\widehat{f}(k)|\,, \forall k \in Z\,, \\ R(k) &= |k|^s|\widehat{g}(k)|\,, \forall k \in Z\,, \\ S(k) &= |k|^s|\widehat{f}(k)|\,, \forall k \in Z\,. \end{aligned}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |R_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ||k|^s|\widehat{g}(k)||^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{2s}|\widehat{g}(k)|^2 \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s|\widehat{g}(k)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\|g\|_s^2 < \infty, \end{aligned}$$

pues$g \in H^s_{per}$. Así,

$$R = (R_k)_{k\in Z} \in l^2(Z) \text{ y } \|R\|_{l^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|g\|_s. \tag{7.25}$$

Análogamente, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |S_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ||k|^s|\widehat{f}(k)||^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{2s}|\widehat{f}(k)|^2 \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s|\widehat{f}(k)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\|f\|_s^2 < \infty, \end{aligned}$$

pues$f \in H^s_{per}$. Así,

$$S = (S_k)_{k\in Z} \in l^2(Z) \text{ y } \|S\|_{l^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f\|_s\,. \tag{7.26}$$

Para $f, g \in H^s_{per}$, $s > \frac{1}{2}$, usando el Lema de inmersión de Sobolev, obtenemos:

$$F,\, \widehat{f} \in l^1(Z) \quad \text{y} \quad \|\widehat{f}\|_{l^1} \leq C_s\|f\|_s\,, \tag{7.27}$$

$$G,\, \widehat{g} \in l^1(Z) \quad \text{y} \quad \|\widehat{g}\|_{l^1} \leq C_s\|g\|_s\,. \tag{7.28}$$

Por otro lado, como $s > \frac{1}{2} >$0 entonces $H^s_{per} \subset L^2([-\pi,\pi])$. Así, si $f \in H^s_{per}$ entonces $f \in L^2([-\pi,\pi])$. Luego,$\widehat{f} \in l^2(Z)$ y

$$\underbrace{|\widehat{f}|}_{=F} \in l^2(Z)\,. \tag{7.29}$$

Análogamente, para $g \in H^s_{per}$ se obtiene $g \in L^2([-\pi,\pi])$. Luego, $\hat{g} \in l^2(Z)$ y

$$\underbrace{|\widehat{g}|}_{=G} \in l^2(Z)\,. \tag{7.30}$$

Como $F \in l^1(Z)$ y $G \in l^2(Z)$, usando la desigualdad de Young obtenemos

$$F * G \in l^2(Z) \quad \text{y} \quad \|F * G\|_{l^2} \leq \|F\|_{l^1}\|G\|_{l^2}\,. \tag{7.31}$$

Tambien, como $F \in l^1(Z)$ y $R \in l^2(Z)$, usando la desigualdad de Young obtenemos

$$F * R \in l^2(Z) \quad \text{y} \quad \|F * R\|_{l^2} \leq \|F\|_{l^1}\|R\|_{l^2}\,. \tag{7.32}$$

Como $S \in l^2(Z)$ y $G \in l^1(Z)$, usando la desigualdad de Young obtenemos

$$S * G \in l^2(Z) \quad \text{y} \quad \|F * G\|_{l^2} \leq \|S\|_{l^2}\|G\|_{l^1}\,. \tag{7.33}$$

De (7.31), (7.32) y (7.33) obtenemos

$$w := F * G + F * R + S * G \in l^2(Z)\,. \tag{7.34}$$

Definiendo

$$u_k := (1+k^2)^{\frac{s}{2}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j)\,,\ \forall k \in Z\,.$$

De (7.24) tenemos

$$|u_k| \leq M_s\, w(k)\,,\ \ w(k) \geq 0\,,\ \forall k \in Z\,,$$

entonces

$$|u_k|^2 \leq M_s^2\, |w(k)|^2\,,\ \forall k \in Z\,.$$

Sumando, obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k|^2 \leq M_s^2 \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |w(k)|^2}_{=\|w\|_{l^2}^2} < \infty\,,$$

pues $w \in l^2(Z)$.

Por lo tanto,

$$u = (u_k)_{k\in Z} \in l^2(Z) \quad \text{y} \quad \|u\|_{l^2} \leq M_s\|w\|_{l^2}\,. \tag{7.35}$$

Usando (7.21) y (7.35) conseguimos

$$\begin{aligned}
\|fg\|_s^2 &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \left|\widehat{fg}(k)\right|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s \left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(j)\widehat{g}(k-j)\right|^2 \\
&= 2\pi\|u\|_{l^2}^2
\end{aligned}$$

$$= \quad 2\pi M_s^2 \|w\|_{l^2}^2 .$$

i.e.

$$\|fg\|_s \leq \sqrt{2\pi} M_s \|w\|_{l^2} . \tag{7.36}$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned} \|w\|_{l^2} &= \|F * G + F * R + S * G\|_{l^2} \\ &\leq \|F * G\|_{l^2} + \|F * R\|_{l^2} + \|S * G\|_{l^2} . \end{aligned} \tag{7.37}$$

Observamos que $1 \leq (1+k^2)^s$ implica $|\hat{g}(k)|^2 \leq (1+k^2)^s |\hat{g}(k)|^2$, y que sumando obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{g}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{g}(k)|^2 \; < \; \infty ,$$

desde que $g \in H^s_{per}$. Luego

$$\|\widehat{g}\|_{l^2} \leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_s , \tag{7.38}$$

De (7.31), (7.27), (7.30) y (7.38) obtenemos:

$$\begin{aligned} \|F * G\|_{l^2} &\leq \|F\|_{l^1} \|G\|_{l^2} \\ &= \|\widehat{f}\|_{l^1} \|\widehat{g}\|_{l^2} \\ &\leq C_s \|f\|_s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_s \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C_s \|f\|_s \|g\|_s . \end{aligned} \tag{7.39}$$

De (7.32), (7.25) y (7.27) tenemos

$$\begin{aligned} \|F * R\|_{l^2} &\leq \|F\|_{l^1} \|R\|_{l^2} \\ &= \|\widehat{f}\|_{l^1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_s \\ &\leq C_s \|f\|_s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|g\|_s \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C_s \|f\|_s \|g\|_s . \end{aligned} \tag{7.40}$$

De (7.33), (7.26) y (7.28) obtenemos

$$\begin{aligned} \|S * G\|_{l^2} &\leq \|S\|_{l^2} \|G\|_{l^1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_s \|\widehat{g}\|_{l^1} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_s C_s \|g\|_s \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} C_s \|f\|_s \|g\|_s . \end{aligned} \tag{7.41}$$

Usando (7.39), (7.40) y (7.41) en (7.37) tenemos

$$\|w\|_{l^2} \leq \frac{3C_s}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_s \|g\|_s \,. \tag{7.42}$$

Usando (7.42) en (7.36) conseguimos

$$\|fg\|_s \leq \underbrace{3M_s C_s}_{K_s :=} \|f\|_s \|g\|_s \,.$$

Corolario 7.1 *Si* $s > \frac{1}{2}$ *entonces* $\widehat{fg} \in l^2(Z), \; \forall f, \, g \in H^s_{per}$.

8 I DIAGRAMA RESUMEN DE LOS ESPACIOS H^s_{per}

Finalmente, queremos resumir mediante un diagrama, las importantes propiedades de los espacios de Sobolev H^s_{per}.

Esto es, cuando *s* > 0, las siguientes inclusiones son continuas con imagen densa

$$\begin{array}{ccccc} H^s_{per} & \hookrightarrow & H^0_{per} = L^2([-\pi,\pi]) & \hookrightarrow & H^{-s}_{per} \\ \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee \\ l^2_s(Z) & \hookrightarrow & l^2(Z) & \hookrightarrow & l^2_{-s} \end{array}$$

Todo lo estudiado, lo usamos en el análisis de existencia y dependencia continua de la solución de una ecuación de evolución, realizando en el proceso una serie de cálculos y aproximaciones.

Podemos citar algunos artículos que usan los resultados obtenidos para estudiar la existencia de solución de la ecuación del calor, onda, Schr¨odinger, entre otras ecuaciones de evolución; así, por ejemplo: [2], [3], [5], [6], [7], [8]-[13] y [15].

9 I CONCLUSIONES

En nuestro estudio de los espacios de Sobolev modelados en L^2 caso periódico, hemos realizado lo siguiente:

1. Probamos importantes resultados de este espacio distribucional infinito dimensional, resaltando su conexión con los $l^2(Z)$ con peso, mediante la transformada de Fourier generalizada.

2. Probamos que las inmersiones son densas y la inmersion de Sobolev cuando $s > \frac{1}{2}$.

3. Evidenciamos una operación producto en H^s_{per} que lo hace un álgebra de Banach cuando $s > \frac{1}{2}$.

4. Finalmente, la riqueza de las propiedades de H^s_{per} permite aplicar a ecuaciones de evolución, en el estudio de existencia de solución, con la libertad de poder usar en otras aplicaciones.

REFERENCIAS

[1] Adams, R.A. Sobolev Spaces. Academic Press, New York; 1975.

[2] Candia Estrada, V. and Santiago Ayala, Y. Existence of the solution of a Schr¨odinger type homogeneous model in Periodic Sobolev spaces. Selecciones Matemáticas. 2022; 9(02): 357-369.

[3] Iorio, R. and Iorio, V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University; 2002.

[4] Kato, T. On the Cauchy problem for the (generalized) KdV equations. *Studies in Applied Mathematics. Advances in Mathematics Supplementary Studies, 8*; 1983; 93-128.

[5] Linares, F. and Ponce, G. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Springer Verlag, New York; 2015.

[6] Milla García, L. and Santiago Ayala, Y. Buen planteamiento global de un modelo no lineal tipo Burgers. Pesquimat. 2022; 25(02): 1-15.

[7] Papuico Bernardo, V. and Santiago Ayala, Y. Existencia y dependencia continua de solución de la ecuación de Boussinesq de onda en espacios de Sobolev periódico. Selecciones Matemáticas. 2020; 7(01): 74-96.

[8] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02):207-230.

[9] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2019; 06(01): 49-65.

[10] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existence and continuous dependence of the solution of non homogeneous wave equation in periodic Sobolev spaces. Selecciones Matemáticas. 2020; 7(01): 52-73.

[11] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existencia y Regularidad de Solución de la Ecuación de Schr¨odinger No Homogénea en Espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(01):37-51.

[12] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existence and continuous dependence of the local solution of non-homogeneous KdV-K-S equation in periodic Sobolev spaces. Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications. 2021; 64(1): 1-19.

[13] Santiago Ayala, Y. Existence and continuous dependence of the local solution of non-homogeneous third order equation and generalizations. Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence. 2022; 10(5): 43-56.

[14] Santiago Ayala, Y. $l^2(Z)$ spaces with weight: properties and its conection with the Sobolev spaces. To appear. 2023.

[15] Terence, T. *Nonlinear dispersive equations: Local and Global analysis*. Regional conference series in mathematics, No. 106. American Mathematical Society; 2006.

CAPÍTULO 7

LOS ESPACIOS $l^2(Z)$ CON PESO: PROPIEDADES Y SU CONEXIÓN CON LOS ESPACIOS DE SOBOLEV

Data de aceite: 02/06/2023

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Fac. de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

RESUMEN: En este artículo, estudiamos una generalización del espacio $l^2(Z)$. Aquí, se introduce un peso, que lo hace un espacio infinito dimensional de Hilbert y se evidencia un conjunto ortonormal que lo hace Separable. Damos pruebas a estas, inspiradas por el caso particular $l^2(Z)$. Finalmente, damos su conexión con los espacios de Sobolev y aplicaciones.

PALABRAS CLAVE: Espacio de Hilbert, espacio separable, base ortonormal, el Teorema de Fréchet-Jordan-Von Neumann, espacios de Sobolev.

$l^2(Z)$ SPACES WITH WEIGHT: PROPERTIES AND ITS CONECTION WITH THE SOBOLEV SPACES

ABSTRACT: In this article we study a generalization of the $l^2(Z)$ space. Here, a weight is introduced, which makes it an infinite dimensional Hilbert space and an orthonormal set is evidenced, which makes it Separable. We give proofs to these, inspired by the particular case $l^2(Z)$. Finally, we give its conection with the Sobolev spaces and applications.

KEYWORDS: Hilbert space, separable space, orthonormal basis, the Frechet-JordanVon Neumann Theorem, Sobolev spaces.

1 I INTRODUCCIÓN

En este artículo estudiaremos los espacios $l^2(Z)$ con peso $w(k) = \left(1+k^2\right)^{\frac{s}{2}}$ que denotaremos por $l_s^2(Z)$ para $s \in IR$.

Estas sucesiones fueron introducidas en Iorio [1], lo que permitió identificarlo con los espacios de Sobolev periódico: H^s_{per}, vía la transformada de Fourier.

Primero, estudiaremos el espacio $l^2(Z)$ y sus propiedades. Luego, inspirados en la prueba de estos, demostraremos las propiedades de $l_s^2(Z)$, que sería su generalización.

En consecuencia, observamos también que si $s = 0$ entonces $l_0^2(Z) = l^2(Z)$ y todos los resultados obtenidos son válidos para $l^2(Z)$.

Elaboramos tablas y diagramas que resumen las propiedades de estos espacios. Finalmente, damos su conexión con los espacios de Sobolev periódico, aplicaciones y generalizaciones.

Nuestro trabajo está organizado como sigue. En la sección 2, damos los resultados preliminares para el desarrollo del trabajo. En la sección 3, iniciamos introduciendo los espacios $l^p(Z)$. En la subsección 3.1, estudiamos al espacio $l^2(Z)$ probando sus principales propiedades. En la subsección 3.2, damos una tabla resumen de las propiedades de $l^2(Z)$. En la sección 4, iniciamos introduciendo los espacios $l^p(Z)$ con peso $w(k) = (1+k^2)^{\frac{s}{p}}$ que denotaremos por $l_s^p(Z)$. En la subsección 4.1, estudiamos los espacios $l_s^2(Z)$ probando sus principales propiedades. En la subsección 4.2 y 4.3, respectivamente, damos tablas resumen de las propiedades de $l_s^2(Z)$ y base ortonormal de los espacios de Hilbert estudiados. En la subsección 4.4, damos algunas aplicaciones.

Finalmente, en la sección 5, damos las conclusiones de nuestro estudio.

2 | PRELIMINARES

Usaremos los siguientes Teoremas:

Teorema 2.1 *[Fréchet-Jordan-Von Neumann] Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio normado. Son equivalentes_los_siguientes_enunciados:*

1. La norma $\|\cdot\|$ *satisface la Ley del Paralelogramo, i.e.* $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2= 2\{\|x\|^2+\|y\|^2\}$, $\forall x, y \in E$.

2. La norma $\|\cdot\|$ *"viene de un producto interno", i.e. existe un producto interno* $<\cdot,\cdot>$ *tal que* $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{<\cdot,\cdot>}$, *donde* $\|y\|_{\cdot,\cdot} = <y,y>^{\frac{1}{2}}$, $\forall y \in E$.

Definición 2.1 *Un espacio métrico M es separable si posee un subconjunto enumerable y denso.*

Teorema 2.2 *Sea* $H \neq \{0\}$, *H un espacio de Hilbert. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. H es separable.

2. H posee una base ortonormal enumerable.

Teorema 2.3 *Sea H un espacio de Hilbert, A un conjunto de indices y* $B := \{u_\alpha, \alpha \in A\}$ *un conjunto ortonormal. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

1. B es base ortonormal.

2. El conjunto L(B) de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de B, es denso en H, i.e. $\overline{L(B)} = H$.

La prueba de estos resultados pueden ser vistas en [2] y [3].

3 | LOS ESPACIOS $L^p(Z)$

Definición 3.1 *Sea* $1 \leq p < \infty$, *definimos el conjunto:*

$$l^p(Z) := \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}, x_n \in \mathbb{C}\, ; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

con dos operaciones:

$$\begin{aligned} (x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n), \quad (x_n), (y_n) \in l^p(Z) && (3.1) \\ \lambda(x_n) &= (\lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (x_n) \in l^p(Z), && (3.2) \end{aligned}$$

que hace que $l^p(Z)$ sea un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Introduciendo la aplicación

$$\|(x_n)\|_p := \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

tenemos que $l^p(Z)$ es un $\mathbb{C}$ - espacio normado y completo, esto es ($l^p(Z)$,$\| \cdot \|_p$) es un espacio de Banach.

Observación 3.1 *$l^p(Z) \neq \{0\}$ desde que existe* $e_i := (\dots, 0, \overbrace{1}^{i-ésimo}, 0 \dots) \in l^p(Z)$, *para $i \in Z$, $\forall p \in [1,\infty)$.*

Además,$\|e_i\|_p = 1, \forall i \in Z$.

Definición 3.2 *Sea el conjunto*

$$l^\infty(Z) := \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}, x_n \in \mathbb{C}; \sup_{n \in Z} |x_n| < \infty \right\}$$

que con las operaciones (3.1) y (3.2) definidas arriba es un $\mathbb{C}$ - espacio vectorial.

Introduciendo la aplicación

$$\|(x_n)\|_\infty := \sup_{n \in Z} |x_n|$$

tenemos que $l^\infty(Z)$ es un $\mathbb{C}$ - espacio normado y completo, esto es, el par ($l^\infty(Z)$,$\|\cdot\|_\infty$) es un espacio de Banach.

Observación 3.2 *$l^\infty(Z) \neq \{0\}$ desde que existe $e_i \in l^\infty(Z)$, para $i \in Z$. Además, $\|e_i\|_\infty = 1$, $\forall i \in Z$.*

3.1 El espacio $l^2(Z)$

Proposición 3.1 *La norma $\| \cdot \|_p$ viene de un producto interno si y solamente si $p = 2$. Esto es,*

1. Si $p \neq 2$, la norma $\| \cdot \|_p$ no viene de un producto interno.

2. En el caso $p = 2$, $\| \cdot \|_2$ es la norma inducida del producto interno $< \cdot, \cdot >$ definido en $l^2(Z)$ por

$$< x, y > := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \overline{y_k}$$

para $x = (x_k)_{k \in Z}$, $y = (y_k)_{k \in Z}$ en $l^2(Z)$. Esto es,

$$\|x\|_2 = \|x\|_{<\cdot,\cdot>} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prueba.- 2) La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:

A).- Sean $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ en $l^2(Z)$. Para $l \in IN$, usando la desigualdad triangular de la $p = 2$-norma en $\mathbb{C}^{2l+1}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=-l}^{l} |x_k + y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{k=-l}^{l} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=-l}^{l} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\|_{l^2} + \|y\|_{l^2},
\end{aligned}$$

y como la sucesión es creciente y acotada superiormente, entonces existe el límite y satisface

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k + y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_{l^2} + \|y\|_{l^2}$$

i.e. $x + y \in l^2(Z)$ y $\|x + y\|_{l^2} \leq \|x\|_{l^2} + \|y\|_{l^2}$.

Para $l \in IN$, tenemos

$$\sum_{k=-l}^{l} |\lambda x_k|^2 = \sum_{k=-l}^{l} |\lambda|^2 |x_k|^2 = |\lambda|^2 \underbrace{\sum_{k=-l}^{l} |x_k|^2}_{Suc.\,convergente}.$$

Tomando límite cuando $l \to +\infty$, obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\lambda x_k|^2 = |\lambda|^2 \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2\right).$$

Luego, $\lambda x \in l^2(Z)$ y $\|\lambda x\|_{l^2} = |\lambda|\|x\|_{l^2}$.

Así, las dos operaciones: + y $\cdot$, suma y producto por un escalar, respectivamente, están bien definidas en $l^2(Z)$. Se prueba fácilmente que $(l^2(Z),+,\cdot)$ es un $\mathbb{C}$- espacio vectorial.

B).- Ahora, queremos probar que la aplicación $< \cdot,\cdot >$ está bien definida. Esto es, probaremos que la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \overline{y_k}$$

es convergente siempre que $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ pertenezcan a $l^2(Z)$. En efecto, sean $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ en $l^2(Z)$. Para $l < m$ tenemos

$$\sum_{k=-m}^{m} x_k\overline{y_k} - \sum_{k=-l}^{l} x_k\overline{y_k} = \sum_{l<|k|\leq m} x_k\overline{y_k} \quad . \tag{3.3}$$

Tomando módulo a la identidad (3.3) y usando la desigualdad de H¨older en $\mathbb{C}^{2(m-l)}$ obtenemos

$$\left|\sum_{k=-m}^{m} x_k\overline{y_k} - \sum_{k=-l}^{l} x_k\overline{y_k}\right| = \left|\sum_{l<|k|\leq m} x_k\overline{y_k}\right|$$

$$\leq \left(\sum_{l<|k|\leq m} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l<|k|\leq m} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \quad ,$$

cuando $m,l \rightarrow +\infty$. Esto es, la sucesión $\left(\sum_{k=-l}^{l} x_k\overline{y_k}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$. Luego, como $\mathbb{C}$ es completo, existe el límite de la sucesión, i.e. la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k\overline{y_k}$ es convergente.

C).- Desde que $\sum_{k=-l}^{l} |x_k|^2 \geq 0, \forall l \geq 0$ con $x = (x_k) \in l^2(Z)$, tomando límite tenemos

$$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2}_{=<x,x>} \geq 0$$

D).- Si $x = (x_k) \in l^2(Z)$ y $< x,x >= 0$ tenemos

$$0 =< x, x >= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 \geq |x_j|^2 \,, \; \forall j \in Z \,.$$

Entonces $|x_j| = 0$, i.e. $x_j = 0$, $\forall j \in Z$; esto es $x = 0$.

E).- Si $(x_j) = x = 0$, i.e. $x_j = 0$, $\forall j \in Z$. Luego, $< x,x >= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\underbrace{x_j}_{=0}|^2 = 0.$

F).- Rápidamente se comprueba que:

$$\begin{aligned} < \alpha x + y, z > &= \alpha < x, z > + < y, z > , \; \forall x, y, z \in l^2(Z) \,, \; \forall \alpha \in \mathbb{C} \,. \\ < x, u + \beta v > &= < x, u > + \overline{\beta} < x, v > , \; \forall x, u, v \in l^2(Z) \,, \; \forall \beta \in \mathbb{C} \,. \end{aligned}$$

De B), C), D), E) y F) hemos probado que $< \cdot,\cdot >$ es un producto interno en $l^2(Z)$.

1).- Ahora, probaremos que si $p \in [1,2) \cup (2,\infty]$ (i.e. $p \neq 2$) entonces la norma $\|\cdot\|_p$ no viene de un producto interno. En efecto, basta tomar $x = (x_k)_{k\in Z}$ tal que $x_1 = 1$ con $x_k = 0$, $\forall k \in Z - \{1\}$ e $y = (y_k)_{k\in Z}$ tal que $y_2 = 1$ con $y_k = 0$, $\forall k \in Z - \{2\}$. Entonces: $\|x\|_p = 1$, $\|y\|_p = 1$ para $p \in [1,\infty]$, de ahí $\|x\pm y\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$ para $p \in [1,\infty)$ y $\|x\pm y\|_\infty = 1$.

Luego, para $p \in [1,2) \cup (2,\infty)$ tenemos

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2\cdot 2^{\frac{2}{p}} \overbrace{\neq}^{*} 2\cdot 2 = 2\{\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2\}.$$

Luego, la igualdad no se cumple si $2 \neq p$. Esto es, si $p \in [1,2)\cup(2,\infty)$ entonces no se satisface la Ley del Paralelogramo. Usando el Teorema 2.1 de Fréchet-Jordan-Von Neumann concluimos que la norma $\|\cdot\|_p$ no viene de un producto interno.

Por otro lado, para $p = \infty$ vemos que:

$$\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 = 2 \overbrace{\neq}^{*} 4 = 2\cdot 2 = 2\{\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2\}.$$

Luego, la norma $\|\cdot\|_\infty$ no satisface la Ley del Paralelogramo y usando el Teorema 2.1, concluimos que la norma $\|\cdot\|_\infty$ no viene de un producto interno.

Proposición 3.2 *$l^2(Z)$ es un espacio de Hilbert, Reflexivo con $(l^2(Z))^* \equiv l^2(Z)$ y Separable.*

Prueba.- Primero probaremos que $l^2(Z)$ es completo. En efecto, sea x_n una sucesión de Cauchy en $l^2(Z)$, que denotamos por $x_n = (x_{n,k})_{k\in Z}$. Entonces $\|x_n - x_m\|_2 \to 0$ cuando $n,m \to +\infty$. Esto es, existe $N_o > 0$ tal que

$$\epsilon > \|x_n - x_m\|_2 = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq |x_{n,j} - x_{m,j}| \tag{3.4}$$

para todo $n,m > N_o$ y $\forall j \in Z$.

Para cada j fijado, usando (3.4) tenemos que $(x_{n,j})_{n\in N}$ es de Cauchy en C. Así, como C es completo entonces existe $x_j \in C$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n,j} = x_j$.

Definimos

$$x := (x_j)_{j\in Z}\,.$$

Probaremos que $x \in l^2(Z)$ y que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$, cuando $n \to +\infty$.

De (3.4) y como $\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum\limits_{k=-l}^{l} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ tenemos

$$\epsilon > \left(\sum_{k=-l}^{l} |x_{n,k} - x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \;,\; \forall m,n > N_o \,,\, \forall l > 0 \tag{3.5}$$

Tomando límite a (3.5) cuando $m \to +\infty$, obtenemos

$$\epsilon \geq \left(\sum_{k=-l}^{l} |x_{n,k} - x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \;,\; \forall n > N_o \,,\, \forall l > 0 \tag{3.6}$$

Tomando límite a (3.6) cuando $l \to +\infty$, obtenemos

$$\epsilon \geq \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_{n,k} - x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=\|x_n - x\|_2} \;,\; \forall n > N_o \tag{3.7}$$

esto es $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$, cuando $n \to +\infty$

La desigualdad (3.7) nos dice que $x_n - x \in l^2(Z)$, para $n > N_o$. Usando esto, con $n^* > N_o$ tenemos

$$x = \underbrace{x_{n^*}}_{\in l^2(Z)} - \underbrace{(x_{n^*} - x)}_{\in l^2(Z)}$$

entonces $x \in l^2(Z)$, con esto queda probado que $l^2(Z)$ es completo.

Por otro lado, sabemos que todo espacio de Hilbert es Reflexivo, por lo tanto $l^2(Z)$ es Reflexivo.

A su vez, debido al Teorema de Representación de Riesz para funcionales, el dual de um espacio de Hilbert es el mismo, así $(l^2(Z))^* \equiv l^2(Z)$.

Finalmente, probaremos que $l^2(Z)$ es Separable. Para esto, introducimos el siguiente conjunto

$$B := \{e_i = (\ldots, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{i-ésima entrada}}, 0, \ldots, 0 \ldots), \quad i \in Z\} \subset l^2(Z).$$

Y podemos denotar $e_i = (e_{ik})$ donde $e_{ik} = \delta_{ik}$: vale 1 cuando $i = k$ y 0 cuando $i \neq k$. Rápidamente se observa que B es enumerable. Además, B es un conjunto ortogonal en $l^2(Z)$. Esto es,

$$< e_i, e_j >= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_{ik}\overline{e_{jk}} = 0 \text{ si } i \neq j\,.$$

Mejor aún, se observa que

$$< e_i, e_j >= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_{ik}\overline{e_{jk}} = \delta_{ij}$$

y $\|e_j\| = 1$, $\forall j \in Z$. Luego, B es un conjunto ortonormal en $l^2(Z)$.

Afirmamos que $\overline{L(B)} = l^2(Z)$, donde $L(B)$ es el conjunto cuyos elementos son combinaciones lineales finitas de elementos de B. Así,

$$L(B) = \{x = (x_k)_{k\in Z} \text{ tal que } \exists l,m \in Z,\ l < m,\ x_k = 0, \forall k \geq m, k \leq l\} \subset l^\infty(Z).$$

Obviamente $L(B) \subset l^2(Z)$ y la cerradura de $L(B)$ satisface $\overline{L(B)} \subset l^2(Z)$.

Sea $x = (x_i)_{i\in Z} \in l^2(Z)$, probaremos que $x \in \overline{L(B)}$. Así, definimos

$$y_i = (\ldots, 0, x_{-i} \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots x_i, 0 \ldots) \in L(B).$$

Como $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 < \infty$ entonces dado $\epsilon > 0$ existe $m^* \in IN$ tal que

$$\sum_{|k|>m^*} |x_k|^2 < \epsilon\,. \tag{3.8}$$

De (3.8) tenemos que $\exists m^* \in IN$ tal que

$$\epsilon > \|y_{m^*} - x\|_{l^2}^2 = \sum_{|k|>m^*} |x_k|^2 > \sum_{|k|>n} |x_k|^2 = \|y_n - x\|_{l^2}^2 , \ \ \forall n > m^* ,$$

i.e. x ∈ $\overline{L(B)}$. Esto es, $\overline{L(B)} \subset l^2(Z)$ y com esto queda probando $\overline{L(B)} = l^2(Z)$.

Usando el Teorema 2.3, tenemos que *B* es base ortonormal enumerable. Así, siendo $l^2(Z)$ un espacio de Hilbert com $l^2(Z) \neq \{0\}$ usando el Teorema 2.2 concluimos que $l^2(Z)$ es separable.

3.2 Tabla resumen de $l^2(Z)$

En resumen, obtenemos:

PROPIEDADES DEL ESPACIO $l^2(Z)$

	REFLEXIVO	SEPARABLE	ESPACIO DUAL
$l^2(Z)$	SI	SI	$l^2(Z)$

4 | LOS ESPACIOS $L_s^p(Z)$

Definición 4.1 *Sea s ∈ IR y 1 ≤ p < ∞, definimos el conjunto:*

$$l_s^p(Z) := \left\{ (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}, x_n \in \mathbb{C} \, ; \, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n^2)^s |x_n|^p < \infty \right\}$$

con dos operaciones:

$$\begin{aligned} (x_n) + (y_n) &= (x_n + y_n) , \quad (x_n), (y_n) \in l_s^p(Z) \\ \lambda(x_n) &= (\lambda x_n) , \quad \lambda \in \mathbb{C} , \quad (x_n) \in l_s^p(Z) , \end{aligned}$$

que hace que $l_s^p(Z)$ sea un $\mathbb{C}$ *-espacio vectorial.*

Introduciendo la aplicación

$$\|(x_n)\|_{s,p} := \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n^2)^s |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

tenemos que $l_s^p(Z)$ es un $\mathbb{C}$ *-espacio normado y completo, esto es $(l_s^p(Z), \| \cdot \|_{s,p})$ es un espacio de Banach.*

Observación 4.1 *Si s = 0 entonces* $l_0^p(Z) = l^p(Z)$

Observación 4.2 $l_s^p(Z) \neq \{0\}$, *desde que existe* $e_i := (\ldots, 0, \overbrace{1}^{i-ésimo}, 0 \ldots) \in l_s^p(Z)$, *para* $i \in Z, \ \forall p \in [1, \infty)$.

Además, $\|e_i\|_{s,p} = (1+i^2)^{\frac{s}{p}}, \ \forall i \in Z$.

Observación 4.3 *Si s = 0 entonces* $l_s^p(Z) \subset l^p(Z), \ \forall p \in [1, \infty)$.

Observación 4.4 *Si 1 ≤ p < q < ∞ entonces $l_s^p(Z) \subset l_s^q(Z)$ y la inclusion es estricta.*

4.1 Los espacios $l_s^2(Z)$

Proposición 4.1 *La norma* $\|\cdot\|_{s,p}$ *viene de un producto interno si y solamente si* $p = 2$. *Esto es,*

1. Si $p \neq 2$, *la norma* $\|\cdot\|_{s,p}$ *no viene de un producto interno.*

2. En el caso $p = 2$, $\|\cdot\|_{s,2}$ *es la norma inducida del producto interno* $<\cdot,\cdot>_s$ *definido en* $l_s^2(Z)$ *por*

$$< x, y >_s := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k}$$

para $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ *en* $l_s^2(Z)$. *Esto es,*

$$\|x\|_{s,2} = \|x\|_{<\cdot,\cdot>_s} = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prueba.- 2).- La prueba lo hemos organizado de la siguiente forma:

A).- Sean $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ en $l_s^2(Z)$. Para $l \in IN$, usando la desigualdad triangular de la $p = 2$-norma em $\mathbb{C}^{2l+1}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |x_k + y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|x\|_{s,2} + \|y\|_{s,2}\,,
\end{aligned}$$

y como la sucesión es creciente y acotada superiormente, entonces existe el límite y satisface

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k + y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_{s,2} + \|y\|_{s,2}$$

i.e. $x + y \in l_s^2(Z)$ y $\|x + y\|_{s,2} \leq \|x\|_{s,2} + \|y\|_{s,2}$.

Para $l \in IN$, tenemos

$$\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |\lambda x_k|^2 = \sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |\lambda|^2 |x_k|^2 = |\lambda|^2 \underbrace{\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |x_k|^2}_{Suc.\ convergente}.$$

Tomando límite cuando $l \to +\infty$, obtenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\lambda x_k|^2 = |\lambda|^2 \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k|^2\right).$$

Luego,$\lambda x \in l_s^2(Z)$ y $\|\lambda x\|_{s,2} = |\lambda| \|x\|_{s,2}$.

Así, las dos operaciones: + y ·, suma y producto por un escalar, respectivamente, están bien definidas en $l_s^2(Z)$. Se prueba fácilmente que $(l_s^2(Z),+,\cdot)$ es un $\mathbb{C}$ espacio vectorial.

B).- Ahora, queremos probar que la aplicación $<\cdot,\cdot>_s$ está bien definida. Esto es, probaremos que la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s x_k \overline{y}_k$$

es convergente siempre que $x = (x_k)_{k\in Z}$ e $y = (y_k)_{k\in Z}$ estén en $l_s^2(Z)$.

En efecto, sean $x = (x_k)_{k\in Z}$, $y = (y_k)_{k\in Z}$ en $l_s^2(Z)$. Para $l < m$ tenemos

$$\sum_{k=-m}^{m} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} - \sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} = \sum_{l<|k|\le m} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} \quad . \tag{4.1}$$

Tomando módulo a la identidad (4.1) y usando la desigualdad de Hölder en $\mathbb{C}^{2(m-l)}$ obtenemos

$$\left| \sum_{k=-m}^{m} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} - \sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} \right|$$
$$= \left| \sum_{l<|k|\le m} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} \right|$$
$$\le \left(\sum_{l<|k|\le m} (1+k^2)^s |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l<|k|\le m} (1+k^2)^s |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0$$

cuando $m,l \rightarrow +\infty$. Esto es, la sucesión $\left(\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k} \right)_{l\in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$.

Luego, como $\mathbb{C}$ es completo, existe el límite de la sucesión, i.e. la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s x_k \overline{y_k}$ es convergente.

C).- Desde que $\sum_{k=-l}^{l} (1+k^2)^s |x_k|^2 \ge 0, \ \forall l \ \ge 0$ con $x = (x_k) \in l_s^2(Z)$, tomando límite tenemos

$$\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k|^2}_{=<x,x>_s} \ge 0 \quad .$$

D).- Si $x = (x_k) \in l_s^2(Z)$ y $<x,x>_s = 0$ tenemos

$$0 = < x, x >_s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_k|^2 \geq \underbrace{(1+j^2)^s}_{\neq 0} |x_j|^2 \,, \ \forall j \in Z\,.$$

Entonces $|x_j| = 0$, i.e. $x_j = 0$, $\forall j \in Z$; esto es $x = 0$.

E).-Si $(x_j) = x = 0$, i.e. $x_j = 0$, $\forall j \in Z$.Luego $< x, x >_s = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s | \underbrace{x_j}_{=0} |^2 = 0.$

F).- Rápidamente se comprueba que:

$$\begin{aligned} < \alpha x + y, z >_s &= \alpha < x, z >_s + < y, z >_s \,, \ \forall x, y, z \in l_s^2(Z)\,, \ \forall \alpha \in \mathbb{C}\,, \\ < x, u + \beta v >_s &= < x, u >_s + \overline{\beta} < x, v >_s \,, \ \forall x, u, v \in l_s^2(Z)\,, \ \forall \beta \in \mathbb{C}\,. \end{aligned}$$

De B), C), D), E) y F) hemos probado que $< \cdot, \cdot >_s$ es un producto interno en $l_s^2(Z)$.

1).- Ahora, probaremos que si $p \in [1,2) \cup (2,\infty)$ (i.e. $p \neq 2$) entonces la norma $\| \cdot \|_{s,p}$ no viene de un producto interno. En efecto, basta tomar $x = (x_k)_{k\in Z}$ tal que $x_1 = 1$ con $x_k = 0$, $\forall k \in Z - \{1\}$ e $y = (y_k)_{k\in Z}$ tal que $y_{-1} = 1$ con $y_k = 0$, $\forall k \in Z - \{-1\}$. Entonces: $\|x\|_{s,p} = 2^{\frac{s}{p}}$, $\|y\|_{s,p} = 2^{\frac{s}{p}}$ para $p \in [1,\infty)$, de ahí $\|x \pm y\|_{s,p} = 2^{\frac{s+1}{p}}$ para $p \in [1,\infty)$.

Luego, para $p \in [1,2) \cup (2,\infty)$ tenemos

$$\|x+y\|_{s,p}^2 + \|x-y\|_{s,p}^2 = 2 \cdot 2^{\frac{2(s+1)}{p}} \overbrace{\neq}^{*} 2^2 \cdot 2^{\frac{2s}{p}} = 2\{\|x\|_{s,p}^2 + \|y\|_{s,p}^2\}.$$

Luego, la igualdad no se cumple si $2 \neq p$. Esto es, si $p \in [1,2) \cup (2,\infty)$ entonces no se satisface la Ley del Paralelogramo. Usando el Teorema 2.1 de Fréchet-Jordan-Von Neumann concluimos que la norma $\| \cdot \|_{s,p}$ no viene de un producto interno.

Observación 4.5 *Si $s = 0$ en la Proposición 4.1 entonces se obtiene la Proposición 3.1.*

Proposición 4.2 *$l_s^2(Z)$ es un espacio de Hilbert, Reflexivo con $l_s^2(Z))^* = l_s^2(Z)$ y Separable.*

Prueba.- Primero probaremos que $l_s^2(Z)$ es completo. En efecto, sea x_n una sucesión de Cauchy en $l_s^2(Z)$, que denotamos por $x_n = (x_{n,k})_{k\in Z}$. Entonces $\|x_n - x_m\|_{s,2} \to 0$ cuando $n,m \to +\infty$. Esto es, existe $N_o > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \epsilon > \|x_n - x_m\|_{s,2} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |x_{n,k} - x_{m,k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq (1+j^2)^{\frac{s}{2}} |x_{n,j} - x_{m,j}| \end{aligned} \tag{4.2}$$

para todo $n,m > N_o$ y $\forall j \in Z$.

Para cada j fijado, usando (4.2) tenemos que $((1+j^2)^{\frac{s}{2}} x_{n,j})_{n\in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$. Así, como $\mathbb{C}$ es completo entonces existe $y_j \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} (1+j^2)^{\frac{s}{2}} x_{n,j} = y_j$.

Luego, $\lim_{n\to+\infty} x_{n,j} = \underbrace{(1+j^2)^{\frac{-s}{2}} y_j}_{x_j :=}$.

Definimos

$$x := (x_j)_{j\in Z}\,.$$

Probaremos que $x \in l_s^2(Z)$ y que $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{s,2}} x$, cuando $n \to +\infty$.

De (4.2) y como $\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|x_{n,k}-x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\sum_{k=-l}^{l}(1+k^2)^s|x_{n,k}-x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ tenemos

$$\epsilon > \left(\sum_{k=-l}^{l}(1+k^2)^s|x_{n,k}-x_{m,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ ,\ \forall m,n > N_o\,,\ \forall l > 0\,. \qquad (4.3)$$

Tomando límite a (4.3) cuando $m \to +\infty$, obtenemos

$$\epsilon \geq \left(\sum_{k=-l}^{l}(1+k^2)^s|x_{n,k}-x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ ,\ \forall n > N_o\,,\ \forall l > 0 \qquad (4.4)$$

Tomando límite a (4.4) cuando $l \to +\infty$, obtenemos

$$\epsilon \geq \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|x_{n,k}-x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{=\|x_n-x\|_{s,2}}\ ,\ \forall n > N_o \qquad (4.5)$$

esto_es, $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{s,2}} x$, cuando $n \to +\infty$.

La desigualdad (4.5) nos dice que $x_n - x \in l_s^2(Z)$, para $n > N_o$. Usando esto, con $n^* > N_o$ tenemos

$$x = \underbrace{x_{n^*}}_{\in\, l_s^2(Z)} - \underbrace{(x_{n^*} - x)}_{\in\, l_s^2(Z)}$$

entonces $x \in l_s^2(Z)$; con esto queda demostrado que $l_s^2(Z)$ es completo.

Por otro lado, sabemos que todo espacio de Hilbert es Reflexivo, por lo tanto $l_s^2(Z)$ es Reflexivo.

A su vez, debido al Teorema de Representación de Riesz para funcionales, el dual de un espacio de Hilbert es el mismo. Así, $(l_s^2(Z))^* \equiv l_s^2(Z)$.

Finalmente, probaremos que $l_s^2(Z)$ es Separable. Para esto, introducimos el siguiente conjunto

$$B := \{e_i = (\ldots,0,\ldots,0,\underbrace{1}_{\text{i-ésima entrada}},0,\ldots,0\ldots),\quad i \in Z\} \subset l_s^2(Z)\,.$$

Y podemos denotar $e_i = (e_{ik})_{k=-\infty}^{+\infty}$ donde $e_{ik} = \delta_{ik}$: vale 1 cuando $i = k$ y 0 cuando $i \neq k$.

Rápidamente, se observa que B es numerable. Además, B es un conjunto ortogonal en $l_s^2(Z)$. Esto es,

$$< e_i, e_j >_s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \underbrace{e_{ik}\overline{e_{jk}}}_{=0} = 0 \text{ si } i \neq j \,.$$

Mejor aún, se observa que

$$< e_i, e_j >_s = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s e_{ik}\overline{e_{jk}} = (1+j^2)^s \delta_{ij} \,,$$

y $\|e_j\|_{s,2} = (1+j^2)^{\frac{s}{2}}, \forall j \in Z.$

A partir de e_j, normalizando podemos obtener un conjunto ortonormal enumerable:

$$\widetilde{B} \;:=\; \left\{ v_j = \frac{e_j}{\|e_j\|_{s,2}} \right\}_{j \in Z}$$

$$= \quad \{ v_j = (\ldots, 0, \ldots, 0, \quad \underbrace{\frac{1}{(1+j^2)^{\frac{s}{2}}}} \quad , 0, \ldots, 0 \ldots), \quad j \in Z \} \subset l_s^2(Z)$$

j-ésima entrada

Y evidentemente satisface: $L(B) = L(\tilde{B})$ donde $L(B)$ es el conjunto cuyos elementos son combinaciones lineales finitas de elementos de B.

Afirmamos que $\overline{L(B)} = l_s^2(Z)$. En efecto, previamente observamos

$$L(B) = \{x = (x_k)_{k \in Z} \text{ tal que } \exists l, m \in Z,\ l < m,\ x_k = 0, \forall k \geq m, k \leq l\} \subset l^\infty(Z).$$

Obviamente $L(B) \subset l_s^2(Z)$ y la cerradura de $L(B)$ satisface $\overline{L(B)} \subset l_s^2(Z)$.

Sea $x = (x_i)_{i \in Z} \in l_s^2(Z)$, probaremos que $x \in \overline{L(B)}$. Así, definimos

$$y_i = (\ldots, 0, x_{-i} \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots x_i, 0 \ldots) \in L(B).$$

Como $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+|k|^2)^s |x_k|^2 < \infty$ entonces dado $\in>0$ existe $m^* \in IN$ tal que

$$\sum_{|k|>m^*} (1+|k|^2)^s |x_k|^2 < \epsilon \,. \tag{4.6}$$

De (4.6) tenemos que $\exists$ $m^* \in IN$ tal que

$$\epsilon > \|y_{m^*} - x\|_{l_s^2}^2 = \sum_{|k|>m^*} (1+|k|^2)^s |x_k|^2 > \sum_{|k|>n} (1+|k|^2)^s |x_k|^2 = \|y_n - x\|_{l_s^2}^2 \,,$$

$\forall n>m^*$, i.e. $x \in \overline{L(B)}$. Esto es, $l_s^2(Z) \subset \overline{L(B)}$ y con esto queda probado $\overline{L(B)} = l_s^2(Z)$. Ahora, como $L(\tilde{B}) = L(B)$, entonces $\overline{L(\tilde{B})} = \overline{L(B)} = l_s^2(Z)$.

Usando el teorema 2.3, tenemos que $\tilde{B}$ es base ortonormal enumerable. Así,siendo $l_s^2(Z)$ un espacio de Hilbert con $l_s^2(Z) \neq \{0\}$, usando el Teorema 2.2 concluimos que $l_s^2(Z)$ es separable.

Observación 4.6 *Si* $s = 0$ *en la Proposición 4.2 entonces se obtiene la Proposición 3.2.*

4.2 Tabla resumen de $l_s^2(Z)$

En resumen, obtenemos:

PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS $l_s^2(Z)$, $s \in IR$

	REFLEXIVO	SEPARABLE	ESPACIO DUAL
$l_s^2(Z)$	SI	SI	$l_s^2(Z)$

4.3 Tabla resumen de Base Ortonormal

En resumen, obtenemos

BASE ORTONORMAL EN ESPACIOS DE HILBERT

	$l^2(Z)$	$l_s^2(Z)$
Conjunto Ortogonal	$e_j := (\ldots, 0, \underbrace{1}_{j\uparrow}, 0, \ldots)$	$e_j := (\ldots, 0, \underbrace{1}_{j\uparrow}, 0, \ldots)$
Base Ortonornal	$\{e_j\}_{j\in Z}$	$\left\{\frac{e_j}{\|e_j\|_{s,2}}\right\}_{j\in Z}$, $\|e_j\|_{s,2} = (1+j^2)^{\frac{s}{2}}$
Separables	SI	SI

4.4 Aplicaciones

Los espacios $l_s^2(Z)$ son de mucha utilidad en el estudio de los espacios de Sobolev periódico H^s_{per} para $s \in IR$, principalmente en la construcción e identificación con estos espacios mediante la transformada de Fourier.

En resumen, sea $s > 0$ entonces las siguientes inclusiones son continuas con imagen densa

$$
\begin{array}{ccccc}
H^s_{per} & \hookrightarrow & H^0_{per} = L^2([-\pi,\pi]) & \hookrightarrow & H^{-s}_{per} \\
\wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee & & \wedge \downarrow\uparrow \vee \\
l^2_s(Z) & \hookrightarrow & l^2(Z) & \hookrightarrow & l^2_{-s}
\end{array}
$$

Para esto, citamos Iorio [1].

Por consiguiente, se aplica en el análisis de la existencia de solución de ecuaciones de evolución. Así, podemos citar [1], [4], [5], [6], [7] y [8].

Finalmente, las ideas expuestas en la subsección 4.1 nos permite generalizar resultados para los $l_s^p(Z)$ vía $l^p(Z)$.

5 I CONCLUSIONES

En nuestro estudio de los espacios $l_s^2(Z)$ hemos obtenido importantes resultados, entre los cuales destacamos:

1. Probamos de modo intuitivo y en detalle las Proposiciones 3.1 y 3.2.

2. Motivados por las ideas consideradas en las pruebas de las Proposiciones 3.1 y 3.2, en ese sentido demostramos las Proposiciones 4.1 y 4.2 relativas a las propiedades de $l_s^2(Z)$.

3. De nuestro estudio elaboramos Tablas que resumen las propiedades fundamentales de los espacios tratados.

4. Damos algunas aplicaciones que justamente nos motivaron a realizar este artículo.

5. Finalmente, generalizando podemos estudiar a los espacios $l^p_s(Z)$ basándonos en los espacios $l^p(Z)$.

REFERENCIAS

[1] Iorio, R. and Iorio, V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University; 2001.

[2] Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations. Springer; 2011.

[3] Santiago Ayala, Y. Tópicos de Análisis Funcional. Fundamentos y Aplicaciones. Alemania. Editorial Académica Espan˜ola; 2014.

[4] Santiago Ayala, Y. and Rojas S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 2017; 32(02):207-230.

[5] Santiago Ayala, Y. and Rojas S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2019; 06(01): 49-65.

[6] Santiago Ayala, Y and Rojas S. Existencia y Regularidad de Solución de la Ecuación de Schr¨odinger No Homogénea en Espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 2021; 08(01):37-51.

[7] Candia Estrada, V. and Santiago Ayala, Y. Existence of the solution of a Schr¨odinger type homogeneous model in Periodic Sobolev Spaces. Selecciones Matemáticas. 2022; 09(02):357-369.

[8] Santiago Ayala, Y. Existence and continuous dependence of the local solution of non homogeneous third order equation and generalizations. Transactions on Machine Learning and Artificial Intelligence. 2022; 10(05): 43-56.

SOBRE A ORGANIZADORA

ANIELE DOMINGAS PIMENTEL SILVA - Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática e especialização em Educação Matemática pela Universidade Federal do Pará - UFPA. Mestre em Educação pela Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA, na linha de pesquisa “Práticas Educativas, Linguagens e Tecnologias”, com ênfase em Modelagem Matemática e Tecnologias, atualmente é doutoranda pelo Programa de Pós-Graduação em Educação na Amazônia PGEDA/EDUCANORTE no polo da Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, atuando na linha de pesquisa “Educação na Amazônia: formação do educador, práxis pedagógica e currículo”. Integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Interdisciplinaridade na Amazônia - GEPEIMAZ. Tem experiência como professora de matemática na educação básica na rede municipal de ensino, como professora colaboradora na UFOPA no programa PARFOR nos cursos de Licenciatura integrada em Matemática e Física e como professora substituta no Instituto Federal do Amapá – IFAP em turmas do ensino médio integrado e ensino superior.

ÍNDICE REMISSIVO

SÍMBOLOS

A

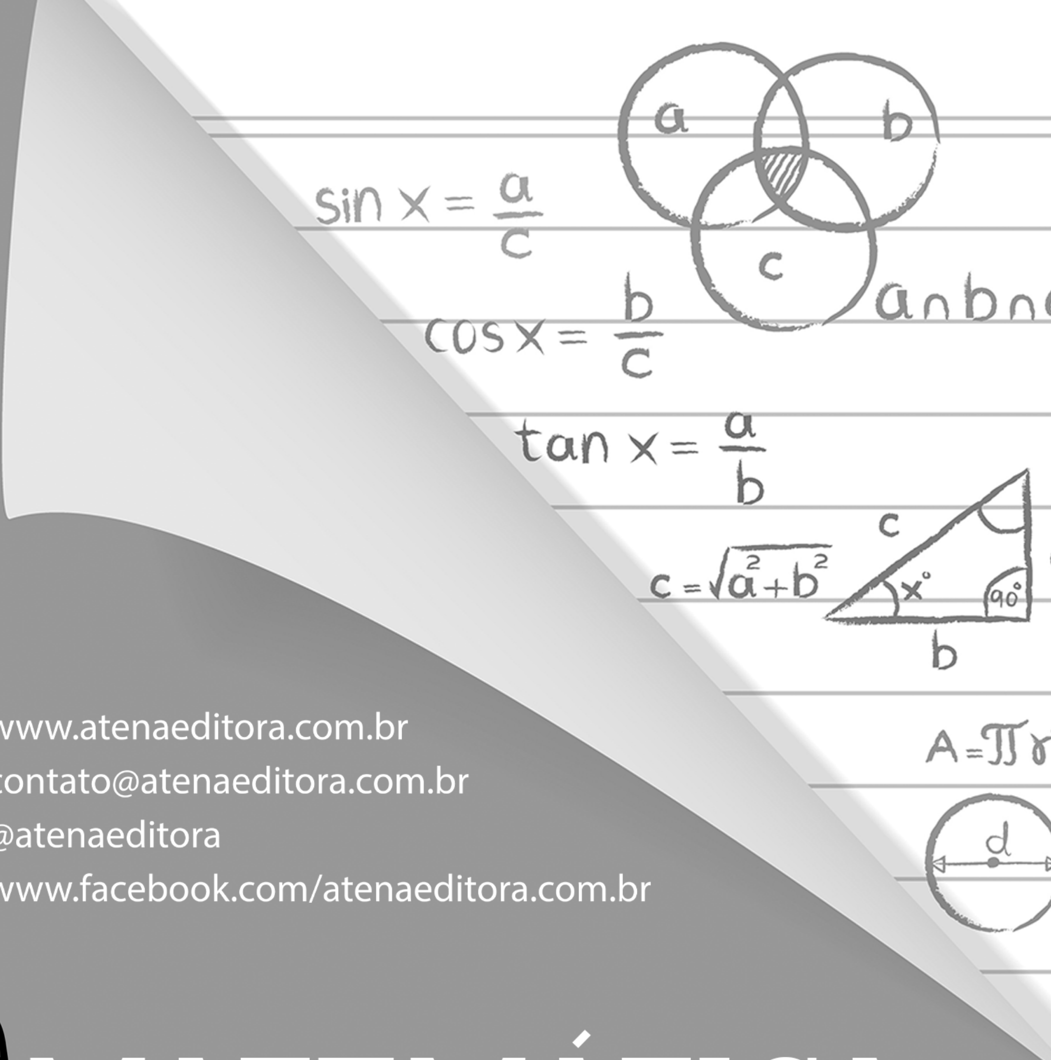
B

C

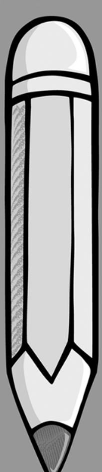
D

E

F



www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

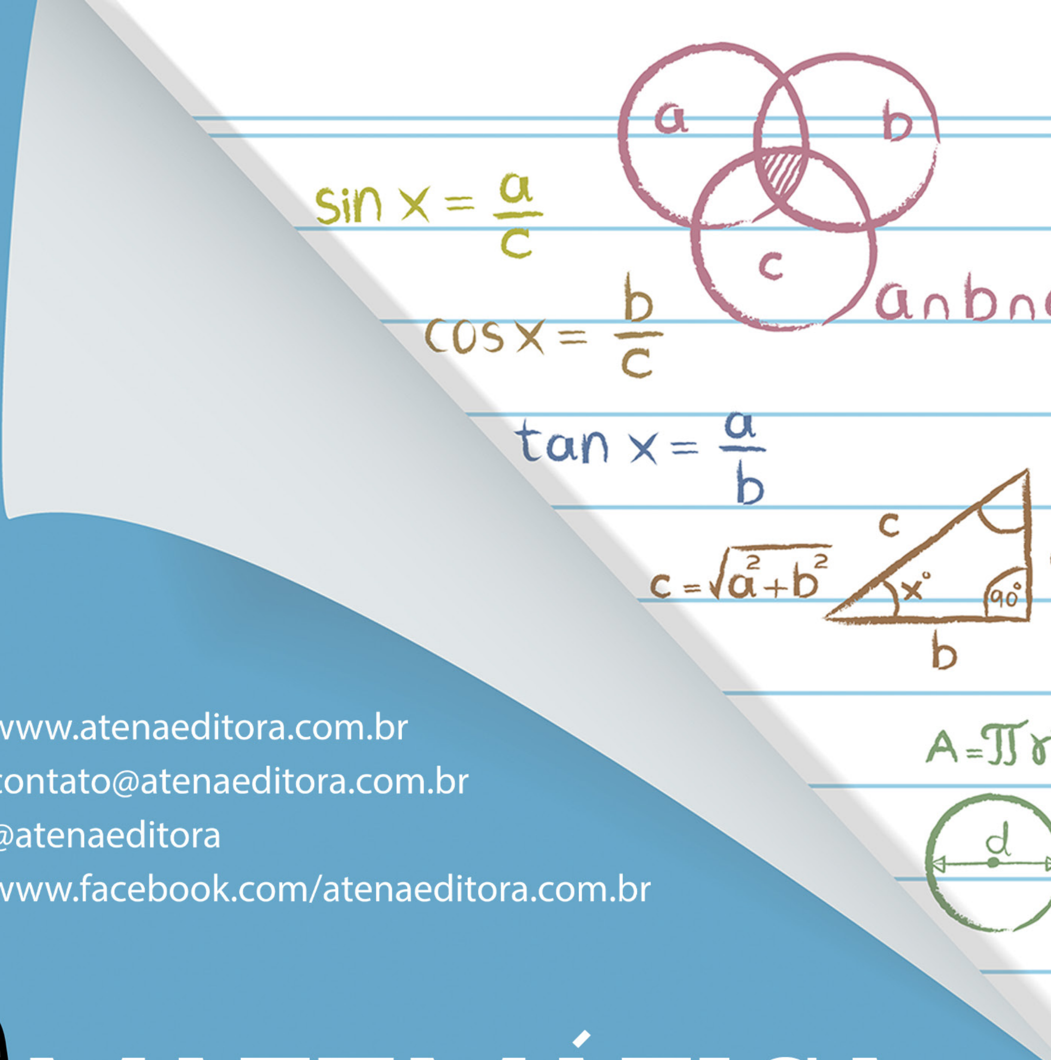


MATEMÁTICA:

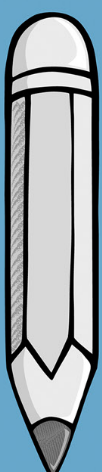
O sujeito e o conhecimento matemático

2

Atena Editora
Ano 2023



www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br



MATEMÁTICA:

O sujeito e o conhecimento matemático

2

Atena Editora
Ano 2023