

ALEXANDER PINTO PEREIRA

FRAÇÕES CONTÍNUAS



**representação e aproximação
de números reais por
números racionais**

Atena
Editora
Ano 2023

ALEXANDER PINTO PEREIRA

FRAÇÕES CONTÍNUAS



**representação e aproximação
de números reais por
números racionais**

Atena
Editora
Ano 2023

Editora chefe

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

Editora executiva

Natalia Oliveira

Assistente editorial

Flávia Roberta Barão

Bibliotecária

Janaina Ramos

Projeto gráfico

Camila Alves de Cremo

Ellen Andressa Kubisty

Luiza Alves Batista

Nataly Evilin Gayde

Imagens da capa

iStock

Edição de arte

Luiza Alves Batista

2023 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2023 Os autores

Copyright da edição © 2023 Atena

Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo do texto e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva do autor, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos ao autor, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial**Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará

Profª Drª Glécilla Colombelli de Souza Nunes – Universidade Estadual de Maringá

Profª Drª Iara Margolis Ribeiro – Universidade Federal de Pernambuco

Profª Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense

Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande

Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora

Profª Drª Maria José de Holanda Leite – Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Prof. Dr. Milson dos Santos Barbosa – Universidade Tiradentes

Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte

Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba

Prof. Dr. Nilzo Ivo Ladwig – Universidade do Extremo Sul Catarinense

Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas

Profª Dr Ramiro Picoli Nippes – Universidade Estadual de Maringá

Profª Drª Regina Célia da Silva Barros Allil – Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí

Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Frações contínuas: representação e aproximação de números reais por números racionais

Diagramação: Nataly Evilin Gayde
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: O autor
Autor: Alexander Pinto Pereira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)	
P436	<p>Pereira, Alexander Pinto Frações contínuas: representação e aproximação de números reais por números racionais / Alexander Pinto Pereira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2023.</p> <p>Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-65-258-1441-4 DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.414233105</p> <p>1. Frações. I. Pereira, Alexander Pinto. II. Título. CDD 513.26</p>
Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166	

Atena Editora
 Ponta Grossa – Paraná – Brasil
 Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DO AUTOR

O autor desta obra: 1. Atesta não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao conteúdo publicado; 2. Declara que participou ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certifica que o texto publicado está completamente isento de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirma a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhece ter informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autoriza a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

RESUMO	1
CAPÍTULO 1	2
INTRODUÇÃO	
CAPÍTULO 2	4
DEFINIÇÃO E EXEMPLOS	
2.1 Definição.....	4
2.2 Exemplos	5
2.2.1 Alguns números racionais	5
2.2.2 Os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$	7
2.2.3 O número π	10
2.2.4 O número de ouro ϕ	11
2.2.5 O número e	12
CAPÍTULO 3	14
FRAÇÕES CONTÍNUAS E O ALGORITMO DE EUCLIDES	
CAPÍTULO 4	20
CONVERGENTES E A APROXIMAÇÃO DE IRRACIONAIS	
4.1 Definição de convergente.....	20
4.2 Propriedades dos convergentes	22
4.3 Aproximação de números irracionais por números racionais	25
4.4 As melhores aproximações.....	27
CAPÍTULO 5	34
A EQUAÇÃO DE PELL	
5.1 Definição.....	34
5.2 Frações contínuas periódicas.....	34
5.3 Irracionais quadráticos	34
5.4 A fração contínua de \sqrt{d}	38
5.5 Aplicação de convergentes na resolução da equação de Pell	39

5.6 Obtendo outras soluções da equação de Pell	41
CAPÍTULO 6	43
OS ASPECTOS DINÂMICOS DAS FRAÇÕES CONTÍNUAS	
CAPÍTULO 7	47
ATIVIDADES PARA O ENSINO BÁSICO	
7.1 Uma (nova) forma de representar números reais	47
7.2 As frações contínuas e o algoritmo de Euclides para o mdc	50
7.3 A expansão dos números irracionais	53
7.4 Irracionais algébricos x Irracionais transcendententes	59
7.5 A equação de Pell	60
CONCLUSÃO	63
BIBLIOGRAFIA	66
SOBRE O AUTOR	67

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma definição para a expansão em frações contínuas, identificando as características mais simples e buscando através da análise de alguns exemplos, nos familiarizarmos com esta forma de representação numérica. Mostramos a ligação desta expansão e o algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc. Explorando as propriedades dos convergentes, abordamos a aproximação de números irracionais por números racionais, mostrando que as melhores aproximações são obtidas via frações contínuas.

Apresentamos, de forma breve, a denominada equação de Pell e um método para resolver este tipo de equação com esta representação. Abordamos a conexão da expansão em frações contínuas e a transformação de Gauss através do estudo das iterações desta transformação. E no final, trazemos uma série de atividades para alunos do Ensino Médio visando apresentar a expansão em frações contínuas, suas principais propriedades e as conexões que aparecem neste trabalho. Aproveitamos também para fazer uma primeira caracterização dos números irracionais entre algébricos e transcendentos.

PALAVRAS-CHAVE: Frações contínuas - Algoritmo de Euclides - Aproximação de números irracionais - Equação de Pell - Transformação de Gauss

INTRODUÇÃO

É possível caracterizar as melhores aproximações de um dado número real, identificar uma forma de obtê-las e o que esperar da qualidade dessas aproximações comparadas com a complexidade das aproximações racionais?

A representação decimal de um número real tem como um de seus méritos a praticidade para efetuar cálculos porém, sua utilização está relacionada a uma escolha arbitrária de uma base 10 e, ainda pode ocultar outras aproximações racionais muito melhores do que se pode esperar, comparando os tamanhos do denominadores envolvidos em uma representação e na outra.

A representação por frações contínuas possui uma conceituação simples e fornece aproximações racionais muito boas, chegando a causar surpresa, pois consegue alcançar com denominadores relativamente pequenos, uma grande eficiência na aproximação.

Além disso, a teoria básica de frações contínuas se relaciona com outros temas de Aritmética, como o algoritmo de Euclides. Também podemos utilizar frações contínuas para estudar um certo tipo de equação diofantina, denominado equação de Pell.

No Capítulo 2, apresentaremos uma definição para a expansão em frações contínuas, identificando as suas características mais simples e buscando através da análise de alguns exemplos, nos familiarizarmos com esta forma de representação numérica pouco difundida. Aqui já aparecerão classes distintas de números – racionais, irracionais algébricos e irracionais transcendentais –, mas sem que sejam plenamente caracterizados. Nos capítulos posteriores, vamos nos ater à descrição destas caracterizações.

No Capítulo 3, será mostrada, através da divisão euclidiana, a ligação da expansão em frações contínuas de um número racional com o algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum entre dois números. Neste caso, os dois serão os termos da fração irredutível que representa o número racional em questão. Isto também colabora para ratificar a natureza finita da expansão em frações contínuas para essa classe de número.

No Capítulo 4, através da exploração das propriedades dos convergentes da expansão em frações contínuas, abordaremos a aproximação de números irracionais por números racionais, mostrando que as melhores aproximações são obtidas via frações contínuas.

No Capítulo 5, faremos uma breve apresentação da chamada equação de Pell. Mostraremos um método para resolver este tipo de equação com a expansão em frações contínuas. Neste processo, apresentaremos uma breve diferenciação entre números algébricos e números transcendentais.

No Capítulo 6, mostraremos a conexão da expansão em frações contínuas e a transformação de Gauss através do estudo das iterações desta transformação. Este fato nos permitirá analisar a dinâmica da obtenção dos quocientes parciais da expansão.

No Capítulo 7, trazemos uma série de atividades para alunos do Ensino Médio

visando apresentar a expansão em frações contínuas, suas principais propriedades e as conexões que aparecem neste trabalho: com o Algoritmo de Euclides para o mdc, com a equação de Pell e com a transformação de Gauss. Aproveitamos também para fazer uma primeira caracterização dos números irracionais entre algébricos e transcendententes.

E finalmente, no Capítulo 8, apresentamos as conclusões deste trabalho e as possíveis indicações de continuidade.

DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

2.1 DEFINIÇÃO

Uma **fração contínua** é uma expressão da forma

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{a_4 + \dots}}}}$$

onde a_0, a_1, a_2, \dots e b_1, b_2, b_3, \dots podem ser números reais ou complexos, ou funções de variáveis reais ou complexas. O número de termos pode ser finito ou infinito.

Uma forma mais simplificada da expressão acima é a **fração contínua simples** ou **fração contínua regular**

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

onde a_1, a_2, a_3, \dots são números inteiros positivos e a_0 , um inteiro qualquer. Esta expressão pode ser escrita na forma $[a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$, tornando mais fácil a sua apresentação. Os a_i 's são chamados de *quocientes parciais* da fração contínua.

A expressão acima representa uma fração contínua simples infinita, isto é, com sequência infinita de a_i 's.

Uma fração contínua simples finita é uma expressão da forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}},$$

que pode ser denotada por $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$.

Doravante neste trabalho, sem prejuízo da clareza, iremos denominar simplesmente de **frações contínuas**, as frações contínuas simples, pois abordaremos apenas as características e potencialidades deste tipo de representação.

2.2 EXEMPLOS

2.2.1 Alguns números racionais

O nosso objetivo principal é utilizar a representação em frações contínuas com números irracionais, porém vamos obter esta representação (também chamada de expansão) de alguns números racionais, para podermos nos acostumar com essa forma de representar números.

Exemplo 2.1. Obtendo a representação do número $\frac{41}{13}$:

Dividimos 41 por 13 e obtemos

$$41=13\cdot 3+2.$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{41}{13} = \frac{13\cdot 3+2}{13} = 3 + \frac{2}{13}$$

Agora, fazemos 13 dividido por 2 e temos

$$13=2\cdot 6+1.$$

Daí, encontramos

$$\frac{41}{13} = 3 + \frac{2}{13} = 3 + \frac{1}{\frac{13}{2}} = 3 + \frac{1}{\frac{2\cdot 6+1}{2}} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}.$$

Como 2 dividido por 1 dá resto zero, paramos o processo e escrevemos

$$\frac{41}{13} = [3; 6, 2]$$

Exemplo 2.2. Encontrando as representações de outros números racionais:

a) $\frac{11}{7}$

$$\frac{11}{7} = 1 + \frac{4}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{4}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

Assim, $\frac{11}{7} = [1; 1, 1, 3]$.

$$b) -\frac{51}{23}$$

$$\begin{aligned} -\frac{51}{23} &= -\frac{69}{23} + \frac{18}{23} = -3 + \frac{18}{23} = -3 + \frac{1}{\frac{23}{18}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{5}{18}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{18}{5}}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{3}{5}}} \\ &= -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{5}{3}}}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}}} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } -\frac{51}{23} = [3; 1, 3, 1, 1, 2].$$

$$c) \frac{114}{235}$$

$$\begin{aligned} \frac{114}{235} &= \frac{1}{\frac{235}{114}} = \frac{1}{2 + \frac{7}{114}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{114}{7}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{16 + \frac{2}{7}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{16 + \frac{1}{\frac{7}{2}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{16 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \frac{114}{235} = [0; 2, 16, 3, 2].$$

$$d) \frac{31}{12}$$

$$\begin{aligned} \frac{31}{12} &= 2 + \frac{7}{12} = 2 + \frac{1}{\frac{12}{7}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{5}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{5}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{2}}}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} \end{aligned}$$

Assim, $\frac{31}{12} = [2; 1, 1, 2, 2]$.

e) $\frac{12}{31}$

$$\begin{aligned} \frac{12}{31} &= \frac{1}{\frac{31}{12}} = \frac{1}{2 + \frac{7}{12}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{12}{7}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{7}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{5}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{5}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{2}}}}} \\ &= \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} \end{aligned}$$

Assim, $\frac{12}{31} = [0; 2, 1, 1, 2, 2]$.

Com estes primeiros exemplos, já podemos notar que a_0 representa a parte inteira do número que queremos representar com frações contínuas.

2.2.2 Os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$

Agora vamos obter a expansão em frações contínuas dos irracionais $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. Para isso, utilizaremos o procedimento que aparece em (CARNEIRO).

a) $\sqrt{2}$

- Como $1 < \sqrt{2} < 2$ temos $\sqrt{2} = 1 + n$, sendo $0 < n < 1$, e $a_0 = 1$.

- Fazendo $n = \frac{1}{x}$ teremos $x > 1$ e assim,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

- Como $2 < x < 3$ temos $x = 2 + \frac{1}{y}$, sendo $y > 1$, e $a_1 = 2$.

-Assim,

$$x = 2 + \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 = x$$

- Como $2 < y < 3$ temos $y = 2 + \frac{1}{z}$, sendo $z > 1$, e $a_2 = 2$.

-Assim,

$$y = 2 + \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{y-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 = y$$

- Como $2 < z < 3$ temos $z = 2 + \frac{1}{w}$, sendo $w > 1$, e $a_3 = 2$.

-Assim,

$$z = 2 + \frac{1}{w} \Rightarrow w = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 = z \Rightarrow 2 < w < 3 \Rightarrow a_4 = 2$$

Assim, podemos observar que a expansão de $\sqrt{2}$ apresenta um comportamento notável para os quocientes parciais: $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \dots = a_1 = 2$. Por isso, podemos escrever:

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = [1; \bar{2}]$$

b) $\sqrt{3}$

- Como $1 < \sqrt{3} < 2$ temos $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x}$, com $x > 1$, e $a_0 = 1$.

-Assim,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow 1 < x < \frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = 1$$

$$x = 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow 2 < y < 3 \Rightarrow a_2 = 2$$

$$y = 2 + \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{y-2} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = x \Rightarrow a_3 = a_1$$

$$z = 1 + \frac{1}{w} \Rightarrow w = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{x-1} = y \Rightarrow a_4 = a_2$$

No cálculo dos quocientes parciais para a expansão de $\sqrt{3}$, encontramos $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_1$ e $a_4 = a_6 = a_8 = \dots = a_2$. Assim,

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, \dots] = [1; \overline{1, 2}].$$

As expansões em frações contínuas de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ apresentam uma característica infinita e periódica, o que não ocorreu com os exemplos envolvendo números racionais. Estes fatos serão analisados com mais rigor nos capítulos seguintes.

Podemos também com o auxílio de uma calculadora, obter os valores dos quocientes parciais, conforme as tabelas a seguir.

$\sqrt{2} = 1,41421356237309\dots$		$a_0 = 1$
$n_0 = 0,41421356237309\dots$	$\frac{1}{n_0} = 2,41421356237309\dots$	$a_1 = 2$
$n_1 = 0,41421356237309\dots$	$\frac{1}{n_1} = 2,41421356237309\dots$	$a_2 = 2$
$n_2 = 0,41421356237309\dots$	$\frac{1}{n_2} = 2,41421356237309\dots$	$a_3 = 2$
...
$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}$		
$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = [1; \overline{2}]$		

Tabela 2.1: Cálculo dos quocientes parciais da expansão de $\sqrt{2}$

$\sqrt{3} = 1,73205080756887\dots$		$a_0 = 1$
$n_0 = 0,73205080756887\dots$	$\frac{1}{n_0} = 1,36602540378443\dots$	$a_1 = 1$
$n_1 = 0,36602540378443\dots$	$\frac{1}{n_1} = 2,73205080756887\dots$	$a_2 = 2$
$n_2 = 0,73205080756887\dots$	$\frac{1}{n_2} = 1,36602540378443\dots$	$a_3 = 1$
$n_3 = 0,36602540378443\dots$	$\frac{1}{n_3} = 2,73205080756887\dots$	$a_4 = 2$
...
$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}}}$		
$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots] = [1; \overline{1, 2}]$		

Tabela 2.2: Cálculo dos quocientes parciais da expansão de $\sqrt{3}$

Os valores que aparecem nas tabelas foram obtidas utilizando o aplicativo TechCalc versão 3.5.6 para o sistema operacional Android.

2.2.3 O número π

O número $\pi = 3,14159265358979\dots$ é um dos irracionais mais conhecidos da Matemática. Para obtermos a sua representação em frações contínuas, vamos repetir o processo de construção das tabelas dos números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

$\pi = 3,14159265358979\dots$		$a_0 = 3$
$n_0 = 0,14159265358979\dots$	$\frac{1}{n_0} = 7,06251330593105\dots$	$a_1 = 7$
$n_1 = 0,06251330593105\dots$	$\frac{1}{n_1} = 15,99659440668267\dots$	$a_2 = 15$
$n_2 = 0,99659440668267\dots$	$\frac{1}{n_2} = 1,00341723101643\dots$	$a_3 = 1$

$n_3 = 0,00341723101643\dots$	$\frac{1}{n_3} = 292,63459075196853\dots$	$a_4 = 292$
$n_4 = 0,63459075196853\dots$	$\frac{1}{n_4} = 1,57581874128789\dots$	$a_5 = 1$
$n_5 = 0,57581874128789\dots$	$\frac{1}{n_5} = 1,73665761167023\dots$	$a_6 = 1$
...
$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}}}}}$		
$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, \dots]$		

Tabela 2.3: Cálculo dos quocientes parciais da expansão de π

Na Tabela 2.3, os valores dos quocientes parciais não apresentam o mesmo comportamento periódico observado nos casos de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. Este fato, sugere que entre os números irracionais a expansão em frações contínuas apresenta características diferentes dependendo do número que está sendo expandido.

2.2.4 O número de ouro ϕ

O número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803398874989\dots$, conhecido como número de ouro, possui uma representação em fração contínua bastante curiosa. Vejamos na Tabela 2.4.

$\phi = 1,61803398874989\dots$		$a_0 = 1$
$n_0 = 0,61803398874989\dots$	$\frac{1}{n_0} = 1,61803398874989\dots$	$a_1 = 1$
$n_1 = 0,61803398874989\dots$	$\frac{1}{n_1} = 1,61803398874989\dots$	$a_2 = 1$
$n_2 = 0,61803398874989\dots$	$\frac{1}{n_2} = 1,61803398874989\dots$	$a_3 = 1$

...
$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}$		
$\phi = [1; 1, 1, 1, \dots] = [\bar{1}]$		

Tabela 2.4: Cálculo dos quocientes parciais da expansão de ϕ

2.2.5 O número e

O número $e = 2,71828182845904\dots$, que é a base do sistema dos logaritmos neperianos, também apresenta uma expansão em frações contínuas com quocientes parciais com um comportamento bem peculiar.

$e = 2,71828182845904\dots$		$a_0 = 2$
$n_0 = 0,71828182845904\dots$	$\frac{1}{n_0} = 1,39221119117733\dots$	$a_1 = 1$
$n_1 = 0,39221119117733\dots$	$\frac{1}{n_1} = 2,54964677830384\dots$	$a_2 = 2$
$n_2 = 0,54964677830384\dots$	$\frac{1}{n_2} = 1,8193502435980\dots$	$a_3 = 1$
$n_3 = 0,8193502435980\dots$	$\frac{1}{n_3} = 1,22047928564542\dots$	$a_4 = 1$
$n_4 = 0,22047928564542\dots$	$\frac{1}{n_4} = 4,53557347608704\dots$	$a_5 = 4$
$n_5 = 0,53557347608704\dots$	$\frac{1}{n_5} = 1,86715743898691\dots$	$a_6 = 1$
$n_6 = 0,86715743898691\dots$	$\frac{1}{n_6} = 1,15319312853763\dots$	$a_7 = 1$
$n_7 = 0,15319312853763\dots$	$\frac{1}{n_7} = 6,52770793015254\dots$	$a_8 = 6$
...

$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\ddots}}}}}}}}}}$
$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots]$

Tabela 2.5: Cálculo dos quocientes parciais da expansão de e

Neste primeiro contato com as frações contínuas tivemos a oportunidade de verificar algumas propriedades, que serão demonstradas em capítulos posteriores:

- números racionais apresentam expansão finita;
- alguns números irracionais apresentam expansão periódica, enquanto outros não. Porém, quando o número é irracional, a representação em frações contínuas é infinita.

FRAÇÕES CONTÍNUAS E O ALGORITMO DE EUCLIDES

Em vista das expansões em frações contínuas de alguns números racionais obtidas no capítulo anterior,

$$\frac{41}{13} = [3; 6, 2],$$

$$\frac{11}{7} = [1; 1, 1, 3],$$

$$-\frac{51}{23} = [3; 1, 3, 1, 1, 2],$$

$$\frac{114}{235} = [0; 2, 16, 3, 2],$$

$$\frac{31}{12} = [2; 1, 1, 2, 2],$$

$$\frac{12}{31} = [0; 2, 1, 1, 2, 2],$$

nos parecem naturais as seguintes questões:

- Um número racional quando representado por uma fração contínua apresenta sempre uma expansão finita?
- Se temos uma fração contínua finita podemos afirmar ser esta a representação de um número racional?

Para responder a estas duas perguntas apresentaremos uma proposição, que será demonstrada com os argumentos da divisão euclidiana e que tem no algoritmo de Euclides para o obter o máximo divisor comum (daqui em diante, apenas mdc) um grande auxílio.

Antes, porém, de enunciar o resultado central deste capítulo, vamos relembrar a divisão euclidiana, que pode ser proposta assim:

Proposição 3.1 (Divisão euclidiana). *Dados dois inteiros p e q , com $q \neq 0$, existem um único par de inteiros a e r tais que*

$$p = aq + r \text{ com } 0 \leq r < |q|,$$

onde a é chamado de quociente e r , de resto.

Demonstração. Tomando $q > 0$ (para $q < 0$ o processo é análogo), existe a que satisfaz a:

$$aq \leq p < (a+1)q.$$

Deste modo, temos $p - aq \geq 0$ e $p - aq < aq + q < q$. Portanto, ao definir $r = p - aq$, garantimos a existência de r e de a . O fato de serem únicos pode ser comprovado, se supormos que existam outros números a_1 e r_1 tais que $p = a_1q + r_1$ com $0 \leq r_1 < q$.

Se isso for verdadeiro, temos

$$p = aq + r = a_1q + r_1$$

Decorre daí que

$$(aq+r) - (a_1q+r_1) = 0 \Rightarrow q(a-a_1) = r_1 - r \Rightarrow q | (r_1 - r)$$

Porém, como $r < q$ e $r_1 < q$, temos $r_1 - r < q$ e, portanto, devemos ter $r_1 - r = 0$, isto é, $r_1 = r$. Assim, $a_1q = aq \Rightarrow a_1 = a$, já que $q \neq 0$.

Por isso, quando fizemos a primeira divisão no Exemplo 1 do capítulo anterior, encontramos 3 e 2 tais que $41 = 3 \cdot 13 + 2$, que são únicos para a divisão euclidiana. Da mesma forma, 6 e 1 na segunda divisão e, 2 e 0 na terceira.

O Algoritmo de Euclides (que aparece no sétimo livro dos Elementos) é usado para obter o mdc de dois números inteiros. Se considerarmos p e q como estes inteiros, o algoritmo pode ser descrito pelas equações

$$\begin{aligned} p &= a_0q + r_0, & 0 < r_0 < q, \\ q &= a_1r_0 + r_1, & 0 < r_1 < r_0, \\ r_0 &= a_2r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\ &\dots \\ r_{n-3} &= a_{n-1}r_{n-2} + r_{n-1}, & 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\ r_{n-2} &= a_n r_{n-1}, & 0 = r_n, \end{aligned}$$

e afirma que r_{n-1} é o mdc de p e q .

Para mostrar que este último resto não nulo realmente é o mdc de p e q , precisamos verificar se ele satisfaz às duas condições a seguir:

- (a) o mdc divide ambos os inteiros p e q ;
- (b) qualquer divisor comum de p e de q divide o mdc.

Além disso, precisamos observar que dados r , s e t inteiros tais que $r = s + t$, então qualquer inteiro k que divide r e s deve dividir t . Se k divide r então $r = km_1$ onde m_1 é um inteiro. Se k divide s então $s = km_2$ onde m_2 é um inteiro. Visto que $r - s = t$, temos

$$r - s = km_1 - km_2 = k(m_1 - m_2) = t,$$

de modo que k divide t . Também, se qualquer k divide s e t então k divide r . Agora vamos analisar a situação de r_{n-1} . A equação

$$r_{n-2} = a_n r_{n-1},$$

mostra que r_{n-1} divide r_{n-2} . A equação imediatamente acima, ou seja,

$$r_{n-3} = a_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1},$$

mostra que r_{n-1} divide r_{n-3} , já que ele divide r_{n-2} e r_{n-1} . Do mesmo modo, da equação

$$r_{n-4} = a_{n-2} r_{n-3} + r_{n-2},$$

vemos que r_{n-1} divide r_{n-4} , visto que ele divide r_{n-2} e r_{n-3} . Assim, trabalhando de equação em equação, descobrimos que r_{n-1} divide r_2 e r_3 e assim, divide também r_1 . Dividindo r_2 e r_1 , ele divide r_0 ; dividindo r_0 e r_1 , ele divide q ; e finalmente, dividindo q e r_0 , r_1 divide p . Por isso, a condição (a) é satisfeita, pois r_1 divide p e q .

Em seguida, mostramos que se um número c é divisor comum de p e q então c divide r_0 , por causa da primeira equação. Se c divide q e r_0 então c divide r_1 na segunda equação. Se c divide r_1 e r_0 então, na terceira equação, c divide r_2 . E assim, até alcançar a penúltima equação onde se c divide r_{n-3} e r_{n-2} então c divide r_{n-1} . Desta forma, provamos que r_{n-1} é o mdc de p e q .

O algoritmo ainda pode ter suas equações sintetizadas da forma:

	a_0	a_1	a_2	a_3		a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
p	q	r_0	r_1	r_2	\dots	r_{n-3}	r_{n-2}	r_{n-1}
r_0	r_1	r_2	r_3			r_{n-1}	0	

Posto isso, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 3.2. *Toda fração contínua finita representa um número racional. Reciprocamente, todo número racional é representado por uma fração contínua finita.*

Demonstração. A primeira parte segue naturalmente da possibilidade de reversão do processo de expansão. A recíproca pode ser demonstrada considerando um número racional tal que

$$x = \frac{p}{q}, \quad q > 0.$$

Tomando a primeira equação do algoritmo de Euclides, e dividindo os termos por q , temos

$$x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}, \quad 0 \leq r_0 < q.$$

Se $r_0 = 0$ então $x = [a_0]$. Caso contrário, podemos escrever

$$\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}, \quad 0 \leq r_1 < r_0.$$

que é a segunda equação do algoritmo de Euclides com os termos divididos por r_0 .

Se $r_1 = 0$ então

$$x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1].$$

Caso contrário, escrevemos

$$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Imediatamente, percebemos que escrevendo as equações do algoritmo de Euclides, na forma

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_0}{q}, \quad 0 < r_0 < q,$$

$$\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}, \quad 0 < r_1 < r_0,$$

$$\frac{r_0}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 < r_2 < r_1,$$

...

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, \quad 0 < r_{n-1} < r_{n-2},$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_n, \quad 0 = r_n,$$

podemos utilizar o algoritmo de Euclides para obter também a representação em fração contínua de qualquer número racional e que a quantidade de a_i 's é finita pois o processo possui no máximo r_0 etapas. Assim, a nossa proposição fica demonstrada.

Além disso, a sintetização do processo facilita ainda mais a obtenção da expansão

em fração contínua.

Por exemplo, no caso do número $\frac{125}{37}$, temos no processo utilizado no início do capítulo 2,

$$\begin{aligned} \frac{125}{37} &= 3 + \frac{14}{37} = 3 + \frac{1}{\frac{37}{14}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{9}{14}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{14}{9}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{9}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{5}}}} \\ &= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{5}}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{4}}}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}} = [3; 2, 1, 1, 1, 4] \end{aligned}$$

e agora podemos fazer,

	3	2	1	1	1	4
125	37	14	9	5	4	1
14	9	5	4	1	0	

que também nos dá, através da primeira linha, $\frac{125}{37} = [3; 2, 1, 1, 1, 4]$.

Considerando que o último termo a_n pode ser substituído por $a_n - 1 + \frac{1}{1}$, notamos que um número racional x que é representado por $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ também pode ser representado por $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$. Isto faz com que $\frac{125}{37}$ possa ter $[3; 2, 1, 1, 1, 3, 1]$, que corresponde a

$$3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}}}}}$$

também como representação.

Assim, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 3.3. *Todo número racional é representado por uma fração contínua finita de apenas duas formas; uma com um número par de termos, e a outra, com um número ímpar. Uma com último termo igual a 1, e a outra, com esse termo maior do que 1.*

Lembramos que este tipo de fenômeno também ocorre na representação decimal, como por exemplo, no caso do número 5 que pode ser escrito como 5,0000... ou 4,9999... .

Terminamos este capítulo, generalizando o resultado ocorrido com $\frac{31}{12}$ e $\frac{12}{31}$, onde

se $p > q$ e

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

então

$$\frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Por simples observação, temos

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{\frac{p}{q}}$$

Assim, se $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ então

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}} = [0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n].$$

CONVERGENTES E A APROXIMAÇÃO DE IRRACIONAIS

4.1 DEFINIÇÃO DE CONVERGENTE

Nos capítulos anteriores vimos que todo número racional $\frac{p}{q}$ pode ser expandido em uma fração contínua finita

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n],$$

onde a_0 é um inteiro qualquer e a_1, a_2, \dots, a_n , são inteiros positivos. Esses números, no Capítulo 2, foram chamados de quocientes parciais. Com eles podemos formar as seguintes frações:

$$c_0 = \frac{a_0}{1};$$

$$c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1};$$

$$c_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}};$$

e assim sucessivamente, interrompendo a sequência de a_i 's.

Estas frações são chamadas, respectivamente, de primeiro, segundo, terceiro, ... convergentes da fração contínua que representa $\frac{p}{q}$.

O convergente de ordem $n + 1$,

$$c_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

é igual à própria fração contínua.

Retomando a expansão em fração contínua de $\frac{31}{12}$, temos

$$\frac{31}{12} = [2; 1, 1, 2, 2],$$

isto é, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ e $a_4 = 2$. Então, os convergentes de $\frac{31}{12}$ são:

$$c_0 = \frac{2}{1} = 2$$

$$c_1 = 2 + \frac{1}{1} = 3$$

$$c_2 = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{5}{2}$$

$$c_3 = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{13}{5}$$

$$c_4 = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{31}{12}$$

Como a expansão de um número racional é finita, o último convergente é o próprio número. No caso de um número irracional, não obtemos o número propriamente dito, mas valores cada vez mais próximos dele, a medida que tomamos convergentes de ordens superiores.

Vamos agora observar, por exemplo, o comportamento dos 5 primeiros convergentes oriundos da representação de $\sqrt{2}$. No Capítulo 2, vimos que $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$. Portanto,

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$c_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$c_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1,4166667$$

$$c_4 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{41}{29} = 1,4137931$$

Se compararmos estes valores com a aproximação decimal de $\sqrt{2} \cong 1,4142136$, podemos notar que:

- conforme a ordem do convergente aumenta, o seu valor se torna mais próximo do valor do número que foi expandido na fração contínua.
- para estes 5 convergentes temos

$$c_0 < c_2 < c_4 < \sqrt{2} < c_3 < c_1$$

Em seções posteriores deste capítulo veremos estes dois fatos serem consolidados. Em primeiro lugar, analisando as propriedades dos convergentes, e depois, constatando que estes fornecem as melhores aproximações racionais para os números irracionais.

4.2 PROPRIEDADES DOS CONVERGENTES

Sendo $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ temos,

Proposição 4.1. *Dada uma sequência (finita ou infinita) $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{R}$ tal que $a_k > 0$, para todo $k \geq 1$, temos as sequências (p_n) e (q_n) definidas por $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$, $p_{m+2} = a_{m+2} p_{m+1} + p_m$ e $q_{m+2} = a_{m+2} q_{m+1} + q_m$, para todo $m \geq 0$. Temos então*

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} = \frac{p_n}{q_n}, \quad \forall n \geq 0.$$

Além disso, $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$, para todo $n \geq 0$.

Demonstração. A demonstração será por indução em n .

- Para $n = 0$, temos

$$[a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$$

- Para $n = 1$, temos

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

- Para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} [a_0; a_1, a_2] &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \\ &= \frac{a_2 (a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2} \end{aligned}$$

Suponha que a afirmação seja válida para n . Para $n + 1$ em lugar de n temos

$$\begin{aligned} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}] &= \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right] = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right) q_{n-1} + q_{n-2}} = \\ &= \frac{a_{n+1} (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar, por indução, a segunda afirmação. Temos, para $n = 0$,

$$p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) - a_0 a_1 = 1 = (-1)^0$$

e, se $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$ para algum valor de n , então

$$\begin{aligned} p_{n+2} q_{n+1} - p_{n+1} q_{n+2} &= (a_{n+2} p_{n+1} + p_n) q_{n+1} - (a_{n+2} q_{n+1} + q_n) p_{n+1} = \\ &= -(p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1}) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Com a segunda parte da proposição anterior, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 4.2. Os termos p_i e q_i do convergente $c_i = \frac{p_i}{q_i}$, $i \geq 0$ de uma fração contínua simples são primos entre si.

Demonstração. Uma vez que temos $p_{i+1} q_i - p_i q_{i+1} = (-1)^i$, segue que todo número que divide p_i e q_i também é um divisor de $(-1)^i$. Porém, $(-1)^i$ é divisível apenas por 1 e

-1. Desta forma, o maior divisor comum de p_i e q_i é 1.

Na seção anterior, ao analisar alguns convergentes de $\sqrt{2}$, verificamos que quando aumentamos a ordem do convergente, nos aproximamos do valor do número irracional em questão e, que os valores dos convergentes se alternam entre maiores e menores do que o número dado.

Assim, vamos considerar o seguinte resultado:

Proposição 4.3. *Os convergentes de uma fração contínua formam uma sequência c_0, c_1, c_2, \dots que satisfaz as seguintes propriedades:*

$$(i) \ c_0 < c_2 < c_4 < c_6 < \dots < c_{2n}$$

$$(ii) \ c_1 > c_3 > c_5 > c_7 > \dots > c_{2n+1}$$

$$(iii) \ c_{2n} < c_{2n+2} < c_{2n+1}$$

Demonstração. Tomando a segunda parte da Proposição 4.1 temos

$$p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} = (-1)^i$$

Dividindo os dois lados desta igualdade por $q_{i+1}q_i$, teremos:

$$\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{(-1)^i}{q_{i+1}q_i}$$

Assim, temos

$$c_{i+1} - c_i = \frac{(-1)^i}{q_{i+1}q_i} \quad (4.1)$$

Sendo

$$c_{i+2} - c_i = \frac{p_{i+2}}{q_{i+2}} - \frac{p_i}{q_i} = \frac{p_{i+2}q_i - p_iq_{i+2}}{q_{i+2}q_i}$$

e, considerando que $p_{i+2} = a_{i+2}p_{i+1} + p_i$ e $q_{i+2} = a_{i+2}q_{i+1} + q_i$, obtemos

$$c_{i+2} - c_i = \frac{(a_{i+2}p_{i+1} + p_i)q_i - p_i(a_{i+2}q_{i+1} + q_i)}{q_{i+2}q_i} = \frac{a_{i+2}p_{i+1}q_i + p_iq_i - a_{i+2}p_iq_{i+1} - p_iq_i}{q_{i+2}q_i}$$

$$c_{i+2} - c_i = \frac{a_{i+2}(p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1})}{q_{i+2}q_i} = \frac{a_{i+2}(-1)^i}{q_{i+2}q_i} \quad (4.2)$$

Fazendo $i = 0$ e $i = 1$ nas igualdades (4.1) e (4.2), temos

$$c_1 - c_0 = \frac{1}{q_1 q_0} > 0 \quad c_2 - c_1 = \frac{-1}{q_2 q_1} < 0 \quad c_2 - c_0 = \frac{a_2}{q_2 q_0} > 0 \quad (4.3)$$

uma vez que a_2 , q_0 , q_1 e q_2 são todos positivos.

Assim, com (4.3), obtemos

$$c_1 > c_0, c_2 < c_1, c_2 > c_0.$$

E, daí, $c_0 < c_2 < c_1$.

Considerando, $i = 2$, $i = 3$ e $i = 4$ em (4.1) e (4.2), teremos:

$$c_2 < c_3 < c_1$$

$$c_2 < c_4 < c_3$$

$$c_4 < c_5 < c_3$$

Combinando estas desigualdades temos

$$c_0 < c_2 < c_4 < \dots < c_{2n} < \dots < c_{2n+1} < \dots < c_5 < c_3 < c_1$$

o que conclui a demonstração.

O que acabamos de mostrar é que a sequência dos convergentes de índice par forma uma sequência crescente que é limitada superiormente e que a sequência dos convergentes de índice ímpar forma uma sequência decrescente e limitada inferiormente.

Há um resultado fundamental em Análise que diz que toda sequência crescente e limitada superiormente converge e que toda sequência decrescente e limitada inferiormente também converge.

Sejam, pois, L_l o limite da sequência $c_1, c_3, c_5, \dots, c_{2i+1}, \dots$ e L_p o limite da sequência $c_0, c_2, c_4, \dots, c_{2i}, \dots$

Como os números q_i 's são calculados através da relação $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$ e os números $a_i (i \geq 2)$ e $q_i (i \geq 1)$ são todos positivos concluímos que a sequência dos q_i 's cresce indefinidamente. Isto implica que se tomarmos $i = 2j$ em (4.1), teremos

$$c_{2j} - c_{2j-1} = \frac{1}{q_{2j} q_{2j-1}}$$

o que nos permite concluir que $\lim_{j \rightarrow \infty} (c_{2j} - c_{2j-1}) = 0$.

Sendo $\lim_{j \rightarrow \infty} c_{2j-1} = L_l$ e $\lim_{j \rightarrow \infty} c_{2j} = L_p$ concluímos que $L_l = L_p$.

4.3 APROXIMAÇÃO DE NÚMEROS IRRACIONAIS POR NÚMEROS RACIONAIS

Provamos, a seguir, que o limite L para o qual a sequência dos convergentes

converge é, na realidade, o número irracional que deu origem à fração contínua. Embora este fato pareça óbvio ele precisa ser provado. Para isto necessitamos do seguinte resultado.

Proposição 4.4. Para qualquer número real α temos:

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \alpha] = \frac{\alpha p_{i-1} + p_{i-2}}{\alpha q_{i-1} + q_{i-2}}$$

onde a_0, a_1, a_2, \dots é uma seqüência infinita de inteiros positivos com a possível exceção de a_0 e as seqüências dos p_i 's e q_i 's são dadas por

$$p_{-1} = 1, \quad p_{-2} = 0, \quad q_{-1} = 0, \quad q_{-2} = 1, \quad p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}, \quad q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}, \quad i \geq 1.$$

Demonstração. Para $i = 0$ o resultado deve ser visto como

$$\alpha = \frac{\alpha p_{-1} + p_{-2}}{\alpha q_{-1} + q_{-2}}$$

o qual é verdadeiro pelas condições iniciais.

Para $i = 1$ temos

$$[a_0; \alpha] = \frac{\alpha p_0 + p_{-1}}{\alpha q_0 + q_{-1}} = \frac{\alpha a_0 + 1}{\alpha} = a_0 + \frac{1}{\alpha}.$$

Estabelecemos, agora, o resultado por indução. Considerando verdadeiro o resultado para $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_i, \alpha]$ temos

$$\begin{aligned} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_i, \alpha] &= \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + \frac{1}{\alpha} \right] = \frac{\left(a_i + \frac{1}{\alpha} \right) p_{i-1} + p_{i-2}}{\left(a_i + \frac{1}{\alpha} \right) q_{i-1} + q_{i-2}} = \\ &= \frac{\alpha (a_i p_{i-1} + p_{i-2}) + p_{i-1}}{\alpha (a_i q_{i-1} + q_{i-2}) + q_{i-1}} = \frac{\alpha p_i + p_{i-1}}{\alpha q_i + q_{i-1}} \end{aligned}$$

o que completa a prova.

Proposição 4.5. Toda fração contínua infinita $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ representa um irracional.

Demonstração. Denotando $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ por α nós observamos, pela Proposição 4.3, que α está entre c_i e c_{i+1} e, portanto, $0 < |\alpha - c_i| < |c_{i+1} - c_i|$.

Multiplicando por q_i esta desigualdade temos

$$0 < |\alpha q_i - p_i| < |c_{i+1} q_i - c_i q_i| < \frac{1}{q_{i+1}}.$$

Supondo α racional, isto é, $\alpha = \frac{a}{b}$, a e b inteiros com $b > 0$, a desigualdade acima, após a multiplicação por b nos fornece

$$|aq_i - bp_i| < \frac{b}{q_{i+1}}.$$

Como a sequência dos q_i é crescente podemos escolher i suficientemente grande de forma que $b < q_{i+1}$.

Desta forma o inteiro $aq_i - bp_i$ estaria entre 0 e 1, o que é impossível.

4.4 AS MELHORES APROXIMAÇÕES

Vejamos agora o comportamento do erro relativo de uma aproximação com convergentes da expansão em frações contínuas de um número real.

Proposição 4.6. *Temos, para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Além disso

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{ou} \quad \left| \alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Demonstração. O número α sempre pertence ao segmento de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ cujo comprimento é

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \Rightarrow \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

Além disso, se

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{ou} \quad \left| \alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

então

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| + \left| \alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} \Rightarrow q_{n+1} = q_n,$$

absurdo.

O resultado devido a Hurwitz e Markov a seguir, também aborda o comportamento do erro relativo, e conseqüentemente da aproximação.

Proposição 4.7 (Hurwitz, Markov). Para todo α irracional e todo inteiro $n \leq 1$, temos

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

para todo menos um racional

$$\frac{p}{q} \in \left\{ \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right\}.$$

Em particular, a desigualdade acima tem infinitas soluções racionais $\frac{p}{q}$.

Demonstração. Suponha que o teorema seja falso. Então, existe α irracional, $n \leq 1$, com $\alpha_n + \beta_n \leq \sqrt{5}$, $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1} \leq \sqrt{5}$ e $\alpha_{n+2} + \beta_{n+2} \leq \sqrt{5}$. Devemos, portanto ter $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = 1$ já que claramente $a_k \leq 2$ para $k = n, n+1, n+2$ e se algum $a_k = 2$ com $k = n+1, n+2$, teríamos $\alpha_k + \beta_k \leq 2 + \frac{1}{3} > \sqrt{5}$, absurdo.

Sejam $x = \frac{1}{\alpha_{n+2}}$ e $y = \beta_{n+1}$. As desigualdades acima se traduzem em

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \leq \sqrt{5}, \quad 1+x+y \leq \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} \leq \sqrt{5}.$$

Temos

$$1+x+y \leq \sqrt{5} \Rightarrow 1+x \leq \sqrt{5}-y \Rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{\sqrt{5}-y} + \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{5}}{y(\sqrt{5}-y)}$$

e portanto

$$y(\sqrt{5}-y) \geq 1 \Rightarrow y \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Por outro lado temos

$$x \leq \sqrt{5} - 1 - y \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{1+y} \leq \frac{1}{\sqrt{5}-1-y} + \frac{1}{1+y} = \frac{\sqrt{5}}{(1+y)(\sqrt{5}-1-y)}$$

e portanto $(1+y)(\sqrt{5}-1-y) \leq 1 \Rightarrow y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, e portanto devemos ter $y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

o que é absurdo pois $y = \beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} \in \mathbb{Q}$.

Em particular provamos que $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ tem infinitas soluções $\frac{p}{q}$, para todo α irracional. O número $\sqrt{5}$ é o maior com essa propriedade. De fato se $\varepsilon > 0$, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$, temos

$$\left| q \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - p \right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q} \Rightarrow \left| q \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - p \right| \left| q \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) - p \right| < \frac{\left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right|}{\sqrt{5}+\varepsilon},$$

ou seja, $\left| p^2 - pq - q^2 \right| < \frac{\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} - \sqrt{5} \right|}{\sqrt{5}+\varepsilon}$. Se q é grande, $\frac{1}{q^2}$ é pequeno, e $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q}$ é

muito próximo de 0. donde o lado direito da desigualdade é muito próximo de $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\varepsilon} < 1$, absurdo, pois $\left| p^2 - pq - q^2 \right| \geq 1$, de fato se $p^2 - pq - q^2 = 0$ teríamos

$$\left(\frac{p}{q} \right)^2 - \left(\frac{p}{q} \right) - 1 = 0 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\},$$

o que é absurdo, pois $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Outra maneira de ver que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$$

tem apenas um número finito de soluções $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é observar que as melhores aproximações racionais de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ são os convergentes $\frac{p_n}{q_n}$ de sua fração contínua $[1;1,1,1,\dots]$, para as quais temos $\left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}$, com $\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}$ se aproximando cada vez mais de $[1;1,1,1,\dots] + [0;1,1,1,\dots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}$.

Em consequência das proposições anteriores, segue o resultado abaixo.

Proposição 4.8. Para todo $p, q \in \mathbb{Z}$, com $0 < q < q_{n+1}$ temos $|q_n \alpha - p_n| \leq |q \alpha - p|$. Além disso, se $0 < q < q_n$ a desigualdade acima é estrita.

Demonstração. Como $\text{mdc}(p_n, q_n) = 1$, temos que se $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ então $p = kp_n$ e $q = kq_n$ para algum inteiro $k \neq 0$ e neste caso o resultado é claro. Assim, podemos supor que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ de modo que $\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ já que $q < q_{n+1}$. Assim, $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ e portanto

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \min \left\{ \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right|, \left| \frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| \right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$$

o que implica $|qx - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|$. Além disso, a igualdade só pode ocorrer se $x = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, donde $a_{n+1} \geq 2$, e $q_{n+1} \geq 2q_n$, pois numa fração contínua finita, como no algoritmo de Euclides, o último coeficiente a_n é sempre maior do que 1. Nesse caso, se $q < q_n$ teremos

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| - \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{1}{qq_{n+1}}$$

o que implica $|qx - p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n x - p_n|$.

E então seguem os próximos resultados.

Proposição 4.9. Para todo $q < q_n$, $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$.

Proposição 4.10. Se $|q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|$, para todo p' e $q' \geq q$ tais que $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, então $\frac{p}{q}$ é um convergente da fração contínua de α .

Demonstração. Tome n tal que $q_n \geq q < q_{n+1}$. Pela proposição, $|q_n \alpha - p_n| \geq |q \alpha - p|$, e portanto $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$.

Proposição 4.11. Se $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$ então $\frac{p}{q}$ é um convergente da fração contínua de α .

Demonstração. Seja n tal que $q_n \geq q < q_{n+1}$. Suponha que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$. Como na demonstração da proposição anterior, $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$ e assim $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Temos duas possibilidades:

(a) Se $q \geq \frac{q_{n+1}}{2}$ então $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}$, absurdo.

(b) Se $q < \frac{q_{n+1}}{2}$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{1}{2qq_n} \geq \frac{1}{2q^2}$$

o que também é um absurdo.

Retomando os cinco convergentes de $\sqrt{2}$ e sua aproximação decimal 1,4142136, podemos analisar o erro relativo, comparando com aproximações decimais. Observe a tabela abaixo:

i	c_i	$ \sqrt{2} - c_i $
0	1	0,4142136
1	$1,5 = \frac{3}{2}$	0,1142136
2	$1,4 = \frac{7}{5}$	0,0142136
3	$1,4166667 = \frac{17}{12}$	0,0024531
4	$1,4137931 = \frac{41}{29}$	0,0004205

Tabela 4.1: Análise do erro relativo dos convergentes da expansão de $\sqrt{2}$

Observando o quinto convergente da expansão de $\sqrt{2}$ podemos verificar que

$$\left| \sqrt{2} - \frac{41}{29} \right| < \frac{1}{2000} < \left| \sqrt{2} - \frac{141}{100} \right|$$

e isto nos diz que $\frac{41}{29}$ é uma aproximação para $\sqrt{2}$ melhor do que $\frac{141}{100}$, considerando o tamanho do denominador envolvido.

Se tomarmos o próximo convergente (o sexto), conseguiremos uma aproximação melhor ainda:

$$\left| \sqrt{2} - \frac{99}{70} \right| < \frac{1}{13850} < \left| \sqrt{2} - \frac{1414}{1000} \right|,$$

e isso, sem considerar um denominador muito maior do que o anterior (entre os convergentes).

Vejamos agora o comportamento dos convergentes do número π . Na tabela a seguir, vamos fazer como no caso do $\sqrt{2}$.

Para efeito de comparação, consideraremos a aproximação $\pi \cong 3,14159265$.

i	c_i	$ \pi - c_i $
0	3	0,14159265
1	$\frac{22}{7} = 3,14285714$	0,00126449
2	$\frac{333}{106} = 3,14150943$	0,00008322
3	$\frac{355}{113} = 3,14159292$	0,00000027
4	$\frac{103993}{33102} = 3,14159265$	$3,01119026 \times 10^{-9}$

Tabela 4.2: Análise do erro relativo dos convergentes da expansão de π

O quinto convergente, por ter um denominador consideravelmente grande, pode relativizar a propriedade das frações contínuas de apresentar boas aproximações, mas considerando os três convergentes anteriores a ele temos:

$$\left| \pi - \frac{22}{7} \right| < \frac{1}{500} < \left| \pi - \frac{314}{100} \right|$$

$$\left| \pi - \frac{333}{106} \right| < \frac{1}{10000} < \left| \pi - \frac{3141}{1000} \right|$$

$$\left| \pi - \frac{355}{113} \right| < \frac{1}{1000000} < \left| \pi - \frac{314159}{100000} \right|$$

o que mostra que conseguimos, através as frações contínuas, aproximações de π mais eficientes e com denominadores relativamente pequenos.

A EQUAÇÃO DE PELL

5.1 DEFINIÇÃO

A equação $x^2 - dy^2 = 1$, onde d é um número inteiro positivo, é geralmente conhecida como **equação de Pell**.

Se d é um quadrado perfeito, teríamos algum k inteiro tal que $d = k^2$ e assim,

$$x^2 - dy^2 = x^2 - k^2y^2 = (x + ky)(x - ky) = 1$$

Isto implica em $x + ky = x - ky = \pm 1$.

Assim, por simples inspeção, as únicas soluções desta equação acabam sendo $x = \pm 1$ e $y = 0$.

Desejamos analisar as soluções da equação de Pell quando d não é quadrado perfeito, e portanto \sqrt{d} é um número irracional.

Mas antes, vamos observar a expansão em frações contínuas periódicas, e com qual tipo de número irracional ela se relaciona. Esse fato nos dará uma ferramenta para encontrar as soluções de $x^2 - dy^2 = 1$, quando d não é um quadrado perfeito.

5.2 FRAÇÕES CONTÍNUAS PERIÓDICAS

Uma fração contínua infinita $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ é dita periódica se existe um inteiro n tal que $a_r = a_{n+r}$ para todos os inteiros r suficientemente grandes. Assim uma fração contínua periódica pode ser escrita na forma

$$[b_0; b_1, b_2, \dots, b_j, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \dots] = [b_0; b_1, b_2, \dots, b_j, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$$

onde a barra sobre a_0, a_1, \dots, a_{n-1} indica que este bloco de inteiros é repetido indefinidamente.

5.3 IRRACIONAIS QUADRÁTICOS

Suponha que

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

é um polinômio de grau n com **coeficientes inteiros** a_0, a_1, \dots, a_n . Então, uma raiz α deste polinômio é dita ser algébrica. Uma vez que todo número racional $\alpha = \frac{a}{b}$ pode ser definido como a raiz de uma equação do primeiro grau $bx - a = 0$, o conceito de número algébrico é claramente uma generalização do conceito de número racional. Se um dado número algébrico satisfaz uma equação $f(x) = 0$ de grau n e não satisfaz nenhuma equação de menor grau (com coeficientes inteiros), ele é chamado de número algébrico de grau n .

Em particular, os números racionais podem ser definidos como números algébricos de primeiro grau. O número $\sqrt{2}$, sendo uma raiz do polinômio $x^2 - 2$, é um número algébrico do 2º grau ou, como dizemos, um irracional quadrático. Irracionais cúbicos, do 4º grau ou de graus superiores são definidos de forma análoga. Todo número não-algébrico é dito **transcendente**. Exemplos de números transcendentess são e e π .

Proposição 5.1. *Toda fração contínua periódica representa um número irracional quadrático e todo número irracional quadrático é representado por uma fração contínua periódica.*

Demonstração. Seja $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k_0-1}, \overline{a_{k_0}, a_{k_0+1}, \dots, a_{k_0+h-1}}]$.

A primeira afirmação pode ser provada em poucas palavras. Obviamente, os restos da fração contínua periódica satisfazem a relação $r_{k+h} = r_k$, ($k \geq k_0$).

Portanto, temos, para $k \geq k_0$,

$$\alpha = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_{k+h} + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_{k+h} + q_{k+h-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}},$$

de modo que

$$\frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}}.$$

Assim, o número r_k satisfaz uma equação quadrática com coeficientes inteiros e, conseqüentemente, é um número irracional quadrático. Mas neste caso, a primeira igualdade mostra que α também é um número irracional.

O inverso é um pouco mais complicado. Suponha que o número α satisfaça a equação quadrática $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ com coeficientes inteiros. Se escrevemos α em termos de seus restos de ordem n

$$\alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}},$$

vemos que r_n satisfaz a equação

$$A_n r_n^2 + B_n r_n + C_n = 0,$$

onde A_n , B_n e C_n são inteiros definidos por

$$\begin{aligned} A_n &= ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2, \\ B_n &= 2ap_{n-1}p_{n-2} + b(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2cq_{n-1}q_{n-2}, \\ C_n &= ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2, \end{aligned}$$

para os quais, em particular, segue que $C_n = A_{n-1}$.

Com estas fórmulas, é fácil verificar diretamente que

$$B_n^2 - 4A_nC_n = (b^2 - 4ac)(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1})^2 = (b^2 - 4ac)(1)^2 = b^2 - 4ac,$$

isto é, que o discriminante da equação de r_n é o mesmo para todo n e é igual ao discriminante da equação de α . Além disso, uma vez que

$$\left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{1}{q_{n-1}^2},$$

segue que

$$p_{n-1} = \alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}} \quad (|\delta_{n-1}| < 1).$$

Portanto, a fórmula de A_n nos dá

$$\begin{aligned} A_n &= a \left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}} \right)^2 + b \left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}} \right) q_{n-1} + c q_{n-1}^2 = \\ &= (a\alpha^2 + b\alpha + c) q_{n-1}^2 + 2a\alpha\delta_{n-1} + a \frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1}, \end{aligned}$$

para o qual, com base na equação de α , temos

$$|A_n| = \left| 2a\alpha\delta_{n-1} + a \frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + b\delta_{n-1} \right| < 2|a\alpha| + |a| + |b|,$$

e, com base em $C_n = A_{n-1}$,

$$|C_n| = |A_{n-1}| < 2|a\alpha| + |a| + |b|.$$

Assim, os coeficientes A_n e C_n na equação de r_n são limitados em módulo e, portanto, podem assumir apenas um número finito de valores distintos quando n varia. Então, segue que B_n deve tomar apenas um número finito de valores distintos. Assim, quando n aumenta de 1 a ∞ , encontraremos somente um número finito de equações quadráticas distintas para r_n . Mas, em qualquer caso, r_n pode tomar apenas um número finito de valores distintos, e portanto, para k e h devidamente escolhidos, $r_k = r_{k+h}$.

Isto mostra que a representação em fração contínua de α é periódica e, assim, prova a segunda afirmação da proposição.

As expansões em frações contínuas cujas expressões têm a forma $\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}$ são denominadas **puramente periódicas**. Elas estão associadas a um tipo especial de irracionais quadráticos.

O irracional quadrático α dado por $A + B\sqrt{d}$, A e B racionais, é dito **reduzido** se α é maior do que 1 e se seu conjugado α' , dado por $A - B\sqrt{d}$, está entre -1 e 0.

Proposição 5.2. *A expansão em fração contínua do irracional quadrático α é puramente periódica se, e somente se, α é um irracional quadrático reduzido.*

Demonstração. Primeiro, assumimos que $\alpha > 1$ e $-1 < \alpha' < 0$. Escrevemos α_0 para α e sendo $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$, tomamos os conjugados para obter

$$\frac{1}{\alpha'_{i+1}} = \alpha'_i - a_i.$$

Agora $a_i \geq 1$ para todo i , mesmo para $i = 0$, uma vez que $\alpha_0 > 1$. Por isso, se $\alpha'_0 < 0$ então

$$\frac{1}{\alpha'_{i+1}} < -1,$$

e temos $-1 < \alpha'_{i+1} < 0$. Uma vez que $-1 < \alpha'_0 < 0$ vemos, por indução matemática, que $-1 < \alpha'_i < 0$ é válido para todo $i \geq 0$. Então, uma vez que

$$\alpha'_i = \frac{1}{\alpha'_{i+1}} + a_i,$$

temos

$$0 < -\frac{1}{\alpha'_{i+1}} - a_i < 1, \quad a_i = \left\lfloor -\frac{1}{\alpha'_{i+1}} \right\rfloor.$$

Agora α é um irracional quadrático, então existem inteiros j e k , com $0 < j < k$, tais que $\alpha_j = \alpha_k$. Então, temos $\alpha'_j = \alpha'_k$ e

$$a_{j-1} = \left\lfloor -\frac{1}{\alpha'_j} \right\rfloor = \left\lfloor -\frac{1}{\alpha'_k} \right\rfloor = a_{k-1}$$

$$\alpha_{j-1} = a_{j-1} + \frac{1}{\alpha_j} = a_{k-1} + \frac{1}{\alpha_k} = \alpha_{k-1}.$$

Assim, $\alpha_j = \alpha_k$ implica em $\alpha_{j-1} = \alpha_{k-1}$. Uma iteração j -vezes desta implicação nos dá $\alpha_0 = \alpha_{k-j}$, e temos $\alpha = \alpha_0 = \overline{[a_0, a_1, \dots, a_{k-j-1}]}$.

Para provar a recíproca, vamos assumir que α é puramente periódica, quer dizer $\alpha = \overline{[a_0, a_1, \dots, a_{k-j-1}]}$, onde $a_0, a_1, \dots, a_{k-j-1}$ são inteiros positivos. Então $\alpha > a_0 \geq 1$. Também, temos

$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \alpha] = \frac{\alpha h_{n-1} + h_{n-2}}{\alpha k_{n-1} + k_{n-2}},$$

Assim, α satisfaz a equação

$$f(x) = x^2 k_{n-1} + x(k_{n-2} - h_{n-1}) - h_{n-2} = 0.$$

Esta equação quadrática tem duas raízes, α e seu conjugado α' . Uma vez que $\alpha > 1$, precisamos apenas provar que $f(x)$ tem uma raiz entre -1 e 0 , a fim de estabelecer que $-1 < \alpha' < 0$. Devemos fazer isto mostrando que $f(-1)$ e $f(0)$ têm sinais opostos. Primeiro, observamos que $f(0) = -h_{n-2} < 0$, uma vez que $a_i > 0$ para $i \geq 0$. A seguir, vemos que para $n \geq 1$

$$f(-1) = k_{n-1} - k_{n-2} + h_{n-1} - h_{n-2} = (k_{n-2} + h_{n-2})(a_{n-1} - 1) + k_{n-3} + h_{n-3} \geq k_{n-3} + h_{n-3} > 0.$$

Isto completa a prova.

5.4 A FRAÇÃO CONTÍNUA DE \sqrt{d}

Se $d > 0$ é um inteiro que não é quadrado perfeito, a fração contínua para \sqrt{d} tem uma forma interessante. Primeiro note que \sqrt{d} é maior do que 1 , e portanto, seu conjugado não pode estar entre -1 e 0 , por isso \sqrt{d} não é reduzido, e sua expressão

$$\sqrt{d} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \dots}}}$$

não pode ser puramente periódica. Por outro lado, uma vez que α_0 é o maior inteiro menor do que \sqrt{d} , o número $\sqrt{d} + a_0$ maior do que 1 , e seu conjugado $-\sqrt{d} + a_0$, está entre -1 e 0 , de modo que $\sqrt{d} + a_0$ é reduzido. Adicionando α_0 a ambos os lados da igualdade acima, temos

$$\sqrt{d} + a_0 = 2a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}},$$

e uma vez que esta expansão é puramente periódica, ela deve ter a forma

$$\alpha = \sqrt{d} + a_0 = 2a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{2a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots}}}}}$$

Consequentemente, a expansão para \sqrt{d} é

$$\sqrt{d} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{2a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots}}}}} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 2a_0}].$$

onde o período começa depois do primeiro termo e termina com o termo $2a_0$. Aqui n denota o comprimento do menor período na expansão de \sqrt{d} .

5.5 APLICAÇÃO DE CONVERGENTES NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE PELL

A expansão em frações contínuas para \sqrt{d} fornece todas as ferramentas que precisamos para resolver a equação de Pell $x^2 - dy^2 = 1$. Sabemos que

$$\sqrt{d} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{2a_0 + a_1 + \dots}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \alpha_n}},$$

onde

$$\alpha_n = 2a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots} = \sqrt{d} + a_0,$$

De novo, usamos o fato de que

$$\sqrt{d} = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

onde p_{n-1} , p_{n-2} , q_{n-1} e q_{n-2} são calculados dos dois convergentes $c_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ e $c_{n-2} = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ que vêm imediatamente antes do termo $2a_0$ no desenvolvimento acima.

Substituindo α_n , produzimos

$$\sqrt{d} = \frac{(\sqrt{d} + a_0)p_{n-1} + p_{n-2}}{(\sqrt{d} + a_0)q_{n-1} + q_{n-2}};$$

então, multiplicando ambos os lados pelo denominador, temos

$$\sqrt{d}(\sqrt{d} + a_0)q_{n-1} + q_{n-2}\sqrt{d} = (\sqrt{d} + a_0)p_{n-1} + p_{n-2}$$

que é equivalente a

$$dq_{n-1} + (a_0q_{n-1} + q_{n-2})\sqrt{d} = (a_0p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}\sqrt{d}.$$

Agora, isto é uma equação da forma $a + b\sqrt{d} = c + d\sqrt{d}$, onde a , b , c e d são inteiros e \sqrt{d} é irracional, e isto implica que $a = c$ e $b = d$. Portanto, a última equação exige que $dq_{n-1} = a_0p_{n-1} + p_{n-2}$ e $a_0q_{n-1} + q_{n-2} = p_{n-1}$.

Resolvendo estas equações para p_{n-2} e q_{n-2} em termos de p_{n-1} e q_{n-1} , encontramos que

$$p_{n-2} = dq_{n-1} - a_0p_{n-1} \text{ e } q_{n-2} = p_{n-1} - a_0q_{n-1}.$$

Mas, sabemos que $p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2} = (-1)^{n-1}$, e com os valores de p_{n-2} e q_{n-2} ,

esta equação tem a forma

$$p_{n-1}(p_{n-1} - a_0 q_{n-1}) - q_{n-1}(dq_{n-1} - a_0 p_{n-1}) = (-1)^{n-1}$$

isto é,

$$p_{n-1}^2 - dq_{n-1}^2 = (-1)^{n-1}.$$

Se n é ímpar, a equação anterior torna-se $p_{n-1}^2 - dq_{n-1}^2 = (-1)^{n-1} = 1$, e portanto, uma solução particular da equação de Pell $x^2 - dy^2 = 1$ é $x_1 = p_{n-1}$ e $y_1 = q_{n-1}$.

Se n é par, então $p_{n-1}^2 - dq_{n-1}^2 = (-1)^{n-1} = -1$, e $x_1 = p_{n-1}$ e $y_1 = q_{n-1}$ dá uma solução particular da equação $x^2 - dy^2 = -1$.

Se n é par e ainda desejarmos uma solução da equação $x^2 - dy^2 = 1$, avançamos para o **segundo período** na expansão de \sqrt{d} , isto é, além do termo a_{n-1} onde ele ocorre pela segunda vez.

Exemplo 5.1. Encontre uma solução particular da equação $x^2 - 11y^2 = -1$.

Solução: Aqui $d = 11$, e a expansão em fração contínua de $\sqrt{11}$ é dada por

$$\sqrt{11} - 3 = \frac{(\sqrt{11} - 3)(\sqrt{11} + 3)}{\sqrt{11} + 3} = \frac{2}{\sqrt{11} + 3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{11} + 3}{2}}$$

$$\sqrt{11} - 3 = \frac{1}{\frac{6 + \sqrt{11} - 3}{2}} = \frac{1}{3 + \frac{\sqrt{11} - 3}{2}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{\sqrt{11} + 3}}$$

$$\sqrt{11} - 3 = \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \sqrt{11} - 3}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \sqrt{11} - 3}}}}$$

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \sqrt{11} - 3}}}}$$

isto é, $\sqrt{11} = [3; 3, 6, 3, 6, \dots] = [3; \overline{3, 6}] = [a_0; \overline{a_1, 2a_0}]$.

Isto mostra que $a_{n-1} = a_1$, de modo que $n = 1$, número ímpar. O cálculo dos convergentes mostra que $c_1 = \frac{10}{3}$, de modo que $x_1 = p_1 = 10$ e $y_1 = q_1 = 3$, e

$$x_1^2 - 11y_1^2 = 10^2 - 11 \cdot 3^2 = 100 - 99 = 1;$$

portanto, $x_1 = 10$ e $y_1 = 3$ é solução particular da equação dada.

5.6 OBTENDO OUTRAS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE PELL

Vimos na seção anterior que a equação de Pell $x^2 - dy^2 = 1$, sendo d um inteiro positivo que não é quadrado perfeito, sempre pode ser resolvida. Porém, o método apresentado sempre produzirá a **menor solução positiva (mínima)**; isto é, sempre produzirá os dois menores inteiros $x_1 > 0$ e $y_1 > 0$ tais que $x_1^2 - dy_1^2 = 1$.

Uma vez que a menor solução positiva tenha sido obtida, podemos gerar sistematicamente todas as outras soluções positivas.

Proposição 5.3. *Se (x_1, y_1) é a menor solução positiva de $x^2 - dy^2 = 1$, então todas as outras soluções positivas (x_n, y_n) podem ser obtidas da equação*

$$x_n + y_n \sqrt{d} = (x_1 + y_1 \sqrt{d})^n \quad (5.1)$$

definindo, por sua vez, $n = 1, 2, 3, \dots$

Os valores de x_n e y_n são obtidas expandindo o termo $(x_1 + y_1 \sqrt{d})^n$ pelo teorema binomial e igualando as partes racionais e as partes puramente irracionais da equação resultante. Por exemplo, se (x_1, y_1) é a menor solução positiva de $x^2 - dy^2 = 1$, então a solução (x_2, y_2) pode ser encontrada tomando $n = 2$ na igualdade acima. Isto dá

$$x_2 + y_2 \sqrt{d} = (x_1 + y_1 \sqrt{d})^2 = x_1^2 + 2x_1 y_1 \sqrt{d} + dy_1^2 = (x_1^2 + dy_1^2) + (2x_1 y_1) \sqrt{d},$$

de modo que $x_2 = x_1^2 + dy_1^2$ e $y_2 = 2x_1 y_1$.

Usando estes valores, um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned} x_2^2 - dy_2^2 &= (x_1^2 + dy_1^2)^2 - d(2x_1 y_1)^2 = x_1^4 + 2dx_1^2 y_1^2 + d^2 y_1^4 - 4dx_1^2 y_1^2 = \\ &= x_1^4 - 2dx_1^2 y_1^2 + d^2 y_1^4 = (x_1^2 - dy_1^2)^2 = 1^2 = 1, \end{aligned}$$

Isto implica que (x_2, y_2) também é uma solução de $x^2 - dy^2 = 1$, já que por suposição (x_1, y_1) é uma solução de $x^2 - dy^2 = 1$.

É fácil mostrar que se x_n e y_n são calculados pela equação (5.1), então $x_n^2 - dy_n^2 = 1$.

Temos,

$$x_n + y_n \sqrt{d} = (x_1 + y_1 \sqrt{d})(x_1 + y_1 \sqrt{d}) \cdots (x_1 + y_1 \sqrt{d}),$$

onde existem n fatores no lado direito da expressão. Uma vez que o conjugado de

um produto é o produto dos conjugados, isto dá

$$x_n - y_n \sqrt{d} = (x_1 - y_1 \sqrt{d})(x_1 - y_1 \sqrt{d}) \cdots (x_1 - y_1 \sqrt{d}),$$

ou

$$x_n - y_n \sqrt{d} = (x_1 - y_1 \sqrt{d})^n. \quad (5.2)$$

Agora fatoramos $x_n^2 - dy_n^2$ e usamos as duas igualdades (5.1) e (5.2):

$$x_n^2 - dy_n^2 = (x_n + y_n \sqrt{d})(x_n - y_n \sqrt{d}) = (x_1 + y_1 \sqrt{d})^n (x_1 - y_1 \sqrt{d})^n = (x_1^2 - dy_1^2)^n = 1.$$

Assim, x_n e y_n são soluções da equação $x^2 - dy^2 = 1$.

Exemplo 5.2. No Exemplo 5.1, encontramos que $x_1 = 10$ e $y_1 = 3$ é uma solução (mínima) da equação $x^2 - 11y^2 = 1$. A segunda solução (x_2, y_2) pode ser obtida definindo $n = 2$ na equação (5.1); isto dá

$$x_2 + y_2 \sqrt{11} = (10 + 3\sqrt{11})^2 = 100 + 60\sqrt{11} + 99 = 199 + 60\sqrt{11},$$

que implica que $x_2 = 199$ e $y_2 = 60$. Estes valores satisfazem a equação $x^2 - 11y^2 = 1$, uma vez que

$$199^2 - 11 \cdot 60^2 = 39601 - 39600 = 1.$$

A terceira solução (x_3, y_3) é dada pela equação

$$x_2 + y_2 \sqrt{11} = (10 + 3\sqrt{11})^3 = 1000 + 900\sqrt{11} + 2970 + 297\sqrt{11} = 3970 + 1197\sqrt{11},$$

de modo que $x_3 = 3970$ e $y_3 = 1197$. Isto é verdade, pois

$$3970^2 - 11 \cdot 1197^2 = 15760900 - 15760899 = 1.$$

OS ASPECTOS DINÂMICOS DAS FRAÇÕES CONTÍNUAS

A representação decimal de números reais está intimamente ligada à função $f : [0,1) \Rightarrow [0,1)$ dada por $f(x) = \{10x\} = 10x - \lfloor 10x \rfloor$, mais precisamente, à dinâmica da função f . Aqui, a notação $\{x\}$ representa a parte fracionária de x .

Por dinâmica da função f queremos dizer o estudo de suas composições sucessivas: para cada ponto $x \in [0,1)$, estamos interessados na sequência $x, f(x), f(f(x)), \dots \in [0,1)$, cujos termos são os chamados **iterados** sucessivos da f .

De fato, se $x \in [0,1)$ tem representação decimal $0, a_1 a_2 a_3 \dots$, então $a_1 = \lfloor 10x \rfloor$ e $f(x) = 0, a_2 a_3 a_4 \dots$. Assim, definindo $f^1 = f$ e $f^{n+1} = f(f^n(x))$, temos $f^n(x) = 0, a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots$ para todo $n \geq 1$.

Assim, por exemplo, se $x = \frac{1}{9} = 0,111\dots$, temos $f(x) = 0,111\dots = x$ (nesse caso, temos em $x = \frac{1}{9}$ um **ponto fixo** de f); se $x = \frac{5}{33} = 0,151515\dots$, temos $f(x) = 0,515151\dots$ e $f(f(x)) = 0,151515\dots = x$ (nesse caso temos em $x = \frac{5}{33}$ um **ponto periódico** de período 2 de f) e, se $x \in [0,1)$ é irracional, os seus iterados por f serão todos distintos, pois sua representação decimal não será periódica a partir de nenhum dígito.

Já a representação em frações contínuas está intimamente ligada à dinâmica de uma função, também conhecida como **transformação de Gauss**.

A transformação de Gauss g é definida por

$$g : (0,1) \Rightarrow [0,1), \text{ dada por } g(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

onde se $x = [0; a_1, a_2, a_3, \dots] \in (0,1)$, então $a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ e $g(x) = [0; a_2, a_3, a_4, \dots]$. Assim, definindo, como antes $g^1 = g$ e $g^{n+1} = g(g^n)$ para todo $n \geq 1$, temos, para todo $n \geq 1$.

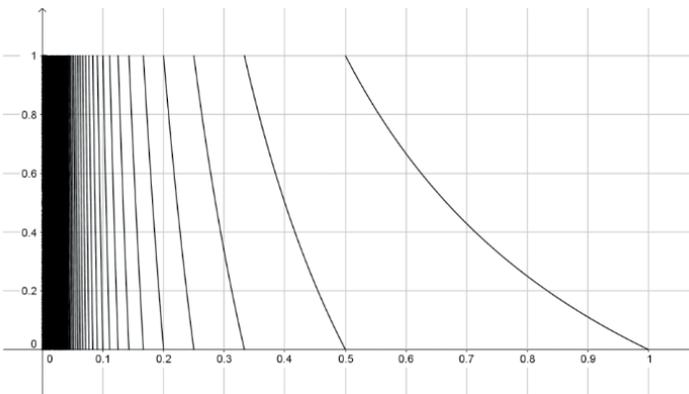


Figura 6.1: Gráfico da transformação de Gauss

Relacionaremos agora a transformação de Gauss e a expansão em frações contínuas de um número racional. Considere $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ e lembre que a construção no capítulo 3 implica que se um número racional x verifica $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ então $r_{k+1} = 0$ e r_0, r_1, \dots, r_k são diferentes de zero. Escrevemos

$$x = g_0 = \frac{r_1}{r_0}, \quad g_1 = \frac{r_2}{r_1}, \quad \dots, \quad g_{k-1} = \frac{r_k}{r_{k-1}}, \quad g_k = \frac{r_{k+1}}{r_k} = 0.$$

Lembrando a definição dos a_n e dos r_n obtemos,

$$r_0 = a_1 r_1 + r_2, \quad \frac{r_0}{r_1} = \frac{1}{x} = a_1 + g_1 = \left[\frac{1}{x} \right] = g(x).$$

Além disso,

$$a_1 = \left[\frac{r_0}{r_1} \right] = \left[\frac{1}{x} \right] = \left[\frac{1}{g^0(x)} \right].$$

Suponha agora indutivamente que $g^j(x) = g_j$, que a_j e r_j estão definidos e que $a_j = \left[\frac{1}{g^{j-1}(x)} \right]$, para todo $1 \leq j \leq n < k$.

Escrevemos (usando a divisão euclidiana) $r_n = a_{n+1} r_{n+1} + r_{n+2}$ e observamos que

$$a_{n+1} = \left[\frac{r_n}{r_{n+1}} \right] = \left[\frac{1}{g_n} \right] = \left[\frac{1}{g^n(x)} \right].$$

Logo,

$$g_{n+1} = \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}} = \frac{r_n}{r_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{r_n}{r_{n+1}} - \left[\frac{r_n}{r_{n+1}} \right].$$

Por outro lado, pela hipótese de indução e das expressões acima,

$$g^{n+1}(x) = g(g^n(x)) = g(g_n) = g\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right) = \frac{r_n}{r_{n+1}} - \left[\frac{r_n}{r_{n+1}} \right] = g_{n+1}.$$

Assim, obtemos das expressões acima que $g^n(x) = g_n$ e que $a_n = \left[\frac{1}{g^{n-1}(x)} \right]$ para todo n .

Estas expressões relacionam (no caso racional, até o momento) os quocientes a_i de um número racional x e os seus iterados pela transformação de Gauss:

$$x = [a_0; a_1, \dots, a_k], \quad a_n = \left[\frac{1}{g^{n-1}(x)} \right], \quad n = 1, \dots, k.$$

No caso em que x é racional as seqüências dos quocientes e dos convergentes são

finitas, e finaliza na etapa n -ésima quando $x = [0; a_1, \dots, a_n]$. Também observamos que no caso racional os quocientes a'_i s obtidos são os mesmos que os dados pelo Algoritmo da Divisão.

Finalmente, quando escrevemos $\frac{p_n}{q_n}$ expressamos duas coisas, um número racional e uma representação dele onde p_n e q_n são relativamente primos (sem divisor comum diferente de um).

Um número $x \in (0,1)$ é irracional se, e somente se, $g(x)$ é irracional. Portanto, um número x é irracional se, e somente se, $g^n(x)$ é irracional (logo não nulo) para todo $n \geq 1$.

O ponto chave é que os quocientes a_n da expansão em frações contínuas de um número $x \in [0,1)$ estão determinados pela sua órbita positiva $(g^i(x))_{i \geq 0}$ pela transformação de Gauss segundo a seguinte fórmula

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{g^n(x)} \right\rfloor, \quad n \geq 0,$$

onde definimos indutivamente $g^{i+1}(x) = g(g^i(x))$. Esta relação permite fazer a ponte entre as expansões em frações contínuas e a dinâmica (estudo das iterações da transformação de Gauss).

A construção anterior sugere a seguinte notação, dado $x \in [0,1)$ escrevemos

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad a_2 = \left\lfloor \frac{1}{g(x)} \right\rfloor$$

e definimos de forma indutiva, para $n \geq 1$,

$$a_n = a_1(g^{n-1}(x)) = \left\lfloor \frac{1}{g^{n-1}(x)} \right\rfloor.$$

Pelas definições de $g(x)$ e a_1 temos

$$x = \frac{1}{a_1 + g(x)}.$$

Repetindo o processo,

$$g(x) = \frac{1}{a_1(g(x)) + g(g(x))} = \frac{1}{a_2 + g^2(x)}.$$

Portanto, indutivamente obtemos

$$x = \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + g^n(x)}}},$$

isto é,

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n + g^n(x)].$$

Quando x é um número real qualquer, escolhemos $a_0 = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$. Portanto, $x - a_0 \in [0, 1)$. Aplicando o processo anterior a $x - a_0$ temos que

$$x = \lfloor x \rfloor + [a_1(x - \lfloor x \rfloor), \dots, a_n(x - \lfloor x \rfloor) + g^n(x - \lfloor x \rfloor)].$$

Escrevemos $a_0 = \lfloor x \rfloor$, $a_i = a_i(x - \lfloor x \rfloor)$, $i \geq 1$, e obtemos

$$x = a_0(x) + [a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x) + g^n(x - \lfloor x \rfloor)].$$

Assim, dado um número x irracional temos uma sequência $(a_k)_{k \geq 0}$ infinita de números racionais $([a_0; a_1, \dots, a_k])_{k \geq 0}$.

Finalizamos este capítulo, lembrando alguns números cuja expansão em frações contínuas foi abordada neste trabalho, e observamos que segundo a transformação de Gauss:

- Os números $\sqrt{2} - 1 = [0; 2, 2, 2, \dots]$ e $\phi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = [0; 1, 1, 1, \dots]$ são pontos fixos.
- O número $\sqrt{3} - 1 = [0; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$ é um ponto periódica de período 2. Podemos também dizer que $\sqrt{3} - 1$ tem uma órbita de ciclo 2 formada por ele mesmo e o número $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.
- Os números π e e possuem órbitas sem ciclo ou que “passeiam” pelo intervalo $(0, 1)$.
- Os números racionais possuem órbitas que vão morrer no zero.

ATIVIDADES PARA O ENSINO BÁSICO

Neste capítulo, apresentaremos algumas atividades a serem aplicadas com alunos de Ensino Médio, com o objetivo de apresentar a expansão em frações contínuas e suas principais características.

7.1 UMA (NOVA) FORMA DE REPRESENTAR NÚMEROS REAIS

Veremos nas próximas páginas uma forma de representar números reais que é pouco conhecida, mas que possui características muito interessantes.

Começamos, tomando um número racional: $\frac{65}{12}$. Vamos representá-lo de uma forma diferente.

- Primeiro dividimos 65 por 12, e obtemos $65 = 12 \cdot 5 + 5$. Assim, podemos escrever

$$\frac{65}{12} = \frac{12 \cdot 5 + 5}{12} = 5 + \frac{5}{12}$$

- Da mesma forma, como $12 = 5 \cdot 2 + 2$, temos

$$\frac{65}{12} = 5 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{2}{5}}$$

- Também, como $5 = 2 \cdot 2 + 1$, temos

$$\frac{65}{12} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

- Como 2 dividido por 1 dá resto 0, paramos o processo.

Esta forma de representar o número $\frac{65}{12}$ é denominada **representação ou expansão em frações contínuas**.

Para facilitar a apresentação podemos escrever para a expansão de $\frac{65}{12}$:

$$\frac{65}{12} = 5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

ou

$$\frac{65}{12} = [5; 2, 2, 2].$$

A primeira forma alternativa já reduz a escrita, mas daremos preferência para a segunda forma.

Vejamos como é a expansão em frações contínuas do número $\frac{114}{235}$:

$$\frac{114}{235} = \frac{1}{\frac{235}{114}} = \frac{1}{2 + \frac{7}{114}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{114}{7}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{16 + \frac{2}{7}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{16 + \frac{1}{\frac{7}{2}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{16 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}$$

Assim, $\frac{114}{235} = [0; 2, 16, 3, 2]$.

Atividade 1: Expresse os seguintes racionais sob a forma de fração contínua:

a) $\frac{11}{7}$ b) $\frac{34}{21}$ c) $\frac{21}{34}$

É claro que podemos ter a expansão em frações contínuas para números racionais negativos, por exemplo, $-\frac{51}{23}$. Mas para isso, precisamos “arrumar” o número dado:

$$-\frac{51}{23} = \frac{-69 + 18}{23} = -3 + \frac{18}{23}$$

Agora, podemos seguir na expansão de $\frac{18}{23}$:

$$\begin{aligned} -\frac{51}{23} &= -3 + \frac{1}{\frac{23}{18}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{5}{18}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{18}{5}}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{3}{5}}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{5}{3}}}} \\ &= -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}}} = -3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} \end{aligned}$$

Assim, $-\frac{51}{23} = [-3; 1, 3, 1, 1, 2]$.

Aqui cabe uma observação importante: para “arrumar” o número racional negativo dado, tomamos o menor múltiplo do denominador que seja maior do que o numerador. Com isso, o primeiro termo da expansão em frações contínuas pode ser qualquer número inteiro.

Atividade 2: Expresse os seguintes racionais sob a forma de fração contínua:

a) $-\frac{31}{12}$

b) $-\frac{12}{31}$

c) $-\frac{7}{40}$

Agora, vamos inverter o processo: dada uma expansão em frações contínuas descobrir qual número racional está relacionado a ela.

Tomamos então para isso, a expansão $[2;1,4]$.

Sabemos, pelo que foi definido anteriormente, que se um número x é tal que $x = [2;1,4]$ então temos

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$$

assim, aplicando as operações pertinentes, obtemos

$$x = 2 + \frac{1}{\frac{5}{4}} = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$$

Logo, o número racional que possui a expansão $[2;1,4]$ é o $\frac{14}{5}$.

Atividade 3: Encontre o número racional representado sob a forma de fração contínua em cada item abaixo:

a) $[1;2,3,4]$

b) $[0;6,5]$

c) $[-3;6,1,7]$

Agora, podemos escrever que uma fração contínua simples finita é uma expressão da forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots \frac{1}{a_n}}}}$$

Que pode ser denotada por $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$, onde a_1, a_2, a_3, \dots são números inteiros positivos e a_0 , um inteiro qualquer. Os a_i 's são chamados de *quocientes parciais* da fração contínua.

7.2 AS FRAÇÕES CONTÍNUAS E O ALGORITMO DE EUCLIDES PARA O MDC

Em vista das expansões em frações contínuas de alguns números racionais obtidas na seção anterior, nos parecem naturais as seguintes questões:

- Um número racional quando representado por uma fração contínua apresenta sempre uma expansão finita?
- Se temos uma fração contínua finita podemos afirmar ser esta a representação de um número racional?

Para responder a estas duas perguntas apresentaremos um teorema, que pode ser demonstrado com os argumentos da divisão euclidiana e que tem no algoritmo de Euclides para obter o máximo divisor comum (daqui em diante, apenas mdc) um grande auxílio.

Antes, porém, vamos relembrar a divisão euclidiana, que pode ser proposta assim:

Teorema. Dados dois inteiros p e q , com $q \neq 0$, existem um único par de inteiros a e r tais que

$$p = aq + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < |q|,$$

onde a é chamado de quociente e r , de resto.

Por isso, quando fizemos a primeira divisão na seção anterior, encontramos 5 e 5 tais que $65 = 12 \cdot 5 + 5$, que são únicos para a divisão euclidiana. Da mesma forma, 2 e 2 na segunda divisão, 2 e 1 na terceira e, 2 e 0 na quarta.

O *Algoritmo de Euclides* (que aparece no sétimo livro dos *Elementos*) é usado para obter o mdc de dois números inteiros. Se considerarmos p e q como estes inteiros, o algoritmo pode ser descrito pelas equações

$$\begin{aligned} p &= a_0 q + r_0, & 0 < r_0 < q, \\ q &= a_1 r_0 + r_1, & 0 < r_1 < r_0, \\ r_0 &= a_2 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\ &\dots \\ r_{n-3} &= a_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}, & 0 < r_{n-1} < r_{n-2}, \\ r_{n-2} &= a_n r_{n-1}, & 0 = r_n, \end{aligned}$$

e afirma que r_{n-1} é o mdc de p e q .

Para mostrar que este último resto não nulo realmente é o mdc de p e q , precisamos verificar se ele satisfaz às duas condições a seguir:

(a) o mdc divide ambos os inteiros p e q ;

(b) qualquer divisor comum de p e de q divide o mdc.

Além disso, precisamos observar que dados r, s e t inteiros tais que $r = s + t$, então qualquer inteiro k que divide r e s deve dividir t . Se k divide r então $r = km_1$ onde m_1 é um inteiro. Se k divide s então $s = km_2$ onde m_2 é um inteiro. Visto que $r - s = t$, temos

$$r - s = km_1 - km_2 = k(m_1 - m_2) = t,$$

de modo que k divide t . Também, se qualquer k divide s e t então k divide r .

Agora vamos analisar a situação de r_{n-1} . A equação

$$r_{n-2} = a_n r_{n-1},$$

mostra que r_{n-1} divide r_{n-2} . A equação imediatamente acima, ou seja,

$$r_{n-3} = a_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1},$$

mostra que r_{n-1} divide r_{n-3} , já que ele divide r_{n-2} e r_{n-1} . Do mesmo modo, da equação

$$r_{n-4} = a_{n-2} r_{n-3} + r_{n-2},$$

vemos que r_{n-1} divide r_{n-4} , visto que ele divide r_{n-2} e r_{n-3} . Assim, trabalhando de equação em equação, descobrimos que r_{n-1} divide r_2 e r_3 e assim, divide também r_1 .

Dividindo r_2 e r_1 , ele divide r_0 ; dividindo r_0 e r_1 , ele divide q ; e finalmente, dividindo q e r_0 , r_1 divide p . Por isso, a condição (a) é satisfeita, pois r_1 divide p e q .

Em seguida, mostramos que se um número c é divisor comum de p e q então c divide r_0 , por causa da primeira equação. Se c divide q e r_0 então c divide r_1 na segunda equação. Se c divide r_1 e r_0 então, na terceira equação, c divide r_2 . E assim, até alcançar a penúltima equação onde se c divide r_{n-3} e r_{n-2} então c divide r_{n-1} . Desta forma, provamos que r_{n-1} é o mdc de p e q .

O algoritmo ainda pode ter sua equações sintetizadas da forma:

	a_0	a_1	a_2	a_3		a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
p	q	r_0	r_1	r_2	\dots	r_{n-3}	r_{n-2}	r_{n-1}
r_0	r_1	r_2	r_3			r_{n-1}	0	

onde a primeira linha fornece os quocientes parciais da expansão em frações contínuas do número racional representado por $\frac{p}{q}$.

Posto isso, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema. *Toda fração contínua finita representa um número racional. Reciprocamente, todo número racional é representado por uma fração contínua finita.*

Além disso, a sintetização do processo facilita ainda mais a obtenção da expansão em fração contínua.

Por exemplo, no caso do número $\frac{125}{37}$, temos no processo utilizado no início do seção 7.1,

$$\begin{aligned} \frac{125}{37} &= 3 + \frac{14}{37} = 3 + \frac{1}{\frac{37}{14}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{9}{14}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{14}{9}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{9}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{9}{5}}}} \\ &= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{5}}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}} = [3; 2, 1, 1, 1, 4] \end{aligned}$$

e agora podemos fazer,

	3	2	1	1	1	4
125	37	14	9	5	4	1
14	9	5	4	1	0	

que também nos dá, através da primeira linha, $\frac{125}{37} = [3; 2, 1, 1, 1, 4]$.

Considerando que o último termo a_n pode ser substituído por $a_n - 1 + \frac{1}{1}$, notamos que um número racional x que é representado por $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ também pode ser representado por $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$. Isto faz com que $\frac{125}{37}$ possa ter $[3; 2, 1, 1, 1, 3, 1]$, que corresponde ^a

$$3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}}}}}$$

também como representação.

Assim, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema. *Todo número racional é representado por uma fração contínua finita (simples) de apenas duas formas; uma com um número par de termos, e a outra, com um*

número ímpar. Uma com último termo igual a 1, e a outra, com esse termo maior do que 1.

Lembramos que este tipo de fenômeno também ocorre na representação decimal, como por exemplo, no caso do número 5 que pode ser escrito como 5,0000... ou 4,9999...

Atividade 4: Determine a expansão em frações contínuas dos seguintes números racionais:

a) $\frac{51}{22}$

b) $\frac{67}{29}$

c) $\frac{35}{97}$

Atividade 5: Expresse os números racionais a seguir sob a forma de frações contínuas, com auxílio do algoritmo de Euclides:

a) [2;1,4]

b) [3;2,12]

c) [1;15,7,3]

7.3 A EXPANSÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

E como seria a expansão em frações contínuas dos números irracionais? De certo que não é finita, pois não podemos representar um número irracional como um número racional. Apenas podemos utilizar um racional para dar um valor aproximado de um irracional dado.

Por isso, vamos utilizar uma forma um pouco diferente de obter os quocientes parciais da expansão em frações contínuas dos irracionais $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

a) $\sqrt{2}$

- Como $1 < \sqrt{2} < 2$ temos $\sqrt{2} = 1 + n$, sendo $0 < n < 1$, e $a_0 = 1$.

- Fazendo $n = \frac{1}{x}$ teremos $x > 1$ e assim,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

- Como $2 < x < 3$ temos $x = 2 + \frac{1}{y}$, sendo $y > 1$, e $a_1 = 2$.

-Assim,

$$x = 2 + \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = x \Rightarrow 2 < y < 3 \Rightarrow a_2 = 2 = a_1$$

É fácil observar que a expansão de $\sqrt{2}$ apresenta um comportamento notável para os quocientes parciais: $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \dots = a_1 = 2$. Por isso, podemos escrever:

$$\sqrt{2} = [1; \overline{2, 2, 2, \dots}] = [1; \overline{2}]$$

onde a barra vertical sobre o 2 indica repetição da mesma forma como na representação decimal das dízimas periódicas.

b) $\sqrt{3}$

- Como $1 < \sqrt{3} < 2$ temos $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x}$, sendo $x > 1$, e $a_0 = 1$.

-Assim,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \Rightarrow 1 < x < \frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = 1$$

$$x = 1 + \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x - 1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow 2 < y < 3 \Rightarrow a_2 = 2$$

$$y = 2 + \frac{1}{z} \Rightarrow z = \frac{1}{y - 2} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = x \Rightarrow a_3 = a_1$$

$$z = 1 + \frac{1}{w} \Rightarrow w = \frac{1}{z - 1} = \frac{1}{x - 1} = y \Rightarrow a_4 = a_2$$

No cálculo dos quocientes parciais para a expansão de $\sqrt{3}$, encontramos $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_1$ e $a_4 = a_6 = a_8 = \dots = a_2$. Assim,

$$\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2, 1, 2, \dots}] = [1; \overline{1, 2}]$$

As expansões em frações contínuas de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ apresentam uma característica infinita e periódica, o que não ocorreu com os exemplos envolvendo números racionais.

Atividade 6: Expresse os números irracionais a seguir sob a forma de frações contínuas:

a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{7}$

c) $\sqrt{8}$

d) $\sqrt{10}$

Atividade 7: Determine a expansão em frações contínuas dos seguintes números irracionais:

a) $\sqrt{2} - 1$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $2\sqrt{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Podemos também com o auxílio de uma calculadora, obter os valores dos quocientes parciais. Para isso, vamos retomar o processo de expansão de $\sqrt{2}$:

- Em primeiro lugar, definimos a parte inteira de $\sqrt{2}$, que é igual a 1 (para facilitar, vamos utilizar a notação $[x]$ para representar a parte inteira de x). Com isso, $a_0 = [\sqrt{2}] = 1$.
- Depois, chamamos de n a parte fracionária de $\sqrt{2}$ que corresponde a $\sqrt{2} - [\sqrt{2}]$. Este valor teve seu inverso calculado e denominado de x . E aí, $a_1 = [x] = 2$.
- Depois, com o inverso de $[x] - x$ sendo chamado de y , temos $a_2 = [y] = 2$.

E como surge daí o comportamento periódico da expansão de $\sqrt{2}$, escrevemos $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$.

Então, com o auxílio de uma calculadora:

Atividade 8: Expresse os números irracionais a seguir sob a forma de frações contínuas:

- a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{6}$ c) $\sqrt{12}$ d) $\sqrt{17}$

Atividade 9: Determine a expansão em frações contínuas dos seguintes números irracionais:

- a) π b) e (base dos logaritmos neperianos) c) ϕ (número de ouro) d) $\log 2$

Não podemos representar (por definição) um número irracional com um racional, mas podemos dar aproximações racionais tão boas quanto desejarmos. Vamos comparar aproximações decimais com as aproximações obtidas via expansão em frações contínuas. Porém, antes vamos definir convergentes.

Na seção 7.1, vimos que todo número racional $\frac{p}{q}$ pode ser expandido em uma fração contínua finita

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n],$$

onde a_0 é um inteiro qualquer e a_1, a_2, \dots, a_n são inteiros positivos. Esses números, na seção 7.1, foram chamados de quocientes parciais. Com eles podemos formar as seguintes frações:

$$c_0 = \frac{a_0}{1};$$

$$c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1};$$

$$c_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}};$$

...

e assim sucessivamente, interrompendo a sequência de a_i 's .

Estas frações são chamadas, respectivamente, de primeiro, segundo, terceiro,... convergentes da fração contínua que representa $\frac{p}{q}$.

O convergente de ordem $n + 1$,

$$c_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_n}}}$$

é igual à própria fração contínua.

Por exemplo, para expansão em fração contínua de $\frac{31}{12}$, temos

$$\frac{31}{12} = [2; 1, 1, 2, 2],$$

isto é, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ e $a_4 = 2$. Então, os convergentes de $\frac{31}{12}$ são:

$$c_0 = \frac{2}{1} = 2$$

$$c_1 = 2 + \frac{1}{1} = 3$$

$$c_2 = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{5}{2}$$

$$c_3 = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{13}{5}$$

$$c_4 = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{31}{12}$$

Como a expansão de um número racional é finita, o último convergente é o próprio número. No caso de um número irracional, não obtemos o número propriamente dito, mas valores cada vez mais próximos dele, a medida que tomamos convergentes de ordens superiores.

Vamos agora observar, por exemplo, o comportamento dos 5 primeiros convergentes oriundos da representação de $\sqrt{2}$. No início desta seção, vimos que $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$.

Portanto,

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$c_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$c_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1,4166667$$

$$c_4 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{41}{29} = 1,4137931$$

Se compararmos estes valores com a aproximação decimal de $\sqrt{2} \cong 1,4142136$, podemos notar que:

- conforme a ordem do convergente aumenta, o seu valor se torna mais próximo do valor do número que foi expandido na fração contínua.
- para estes 5 convergentes temos

$$c_0 < c_2 < c_4 < \sqrt{2} < c_3 < c_1$$

Atividade 10: Calcule os cinco primeiros convergentes de:

- a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) π d) e

Retomando os cinco convergentes de $\sqrt{2}$, podemos analisar o erro relativo, comparando com aproximações decimais. Observe a tabela abaixo:

i	c_i	$ \sqrt{2} - c_i $
0	1	0,4142136
1	$1,5 = \frac{3}{2}$	0,1142136
2	$1,4 = \frac{7}{5}$	0,0142136
3	$1,4166667 = \frac{17}{12}$	0,0024531
4	$1,4137931 = \frac{41}{29}$	0,0004205

Observando o quinto convergente da expansão de $\sqrt{2}$ podemos verificar que

$$\left| \sqrt{2} - \frac{41}{29} \right| < \frac{1}{2000} < \left| \sqrt{2} - \frac{141}{100} \right|$$

e isto nos diz que $\frac{41}{29}$ é uma aproximação para $\sqrt{2}$ melhor do que $\frac{141}{100}$, considerando o tamanho do denominador envolvido.

Se tomarmos o próximo convergente (o sexto), conseguiremos uma aproximação melhor ainda:

$$\left| \sqrt{2} - \frac{99}{70} \right| < \frac{1}{13850} < \left| \sqrt{2} - \frac{1414}{1000} \right|,$$

e isso, sem considerar um denominador muito maior do que o anterior (entre os convergentes).

Este fato expõe uma característica poderosa da expansão em frações contínuas: o de fornecer as melhores aproximações racionais (com seus convergentes) para um número irracional dado.

Atividade 11: Para cada um dos números irracionais abaixo, determine o convergente de menor ordem, para que o erro relativo seja menor do que $\frac{1}{1000}$.

- a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{10}$ c) ϕ d) $\log 3$

Atividade 12: Repita a atividade anterior para que o erro relativo seja menor do que $\frac{1}{50000}$.

- a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{10}$ c) ϕ d) $\log 3$

7.4 IRRACIONAIS ALGÉBRICOS X IRRACIONAIS TRANSCENDENTES

No final da seção anterior trabalhamos com números irracionais que apresentaram expansões em frações contínuas com comportamento diferente. Por um lado, alguns irracionais cuja expansão é periódica; por outro, expansão infinita não periódica. Os primeiros são denominados **algébricos**, enquanto os outros são chamados de **transcendentes**. Mas o que vem a ser um número irracional algébrico? Vejamos.

Suponha que

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

é um polinômio de grau n com **coeficientes inteiros** a_0, a_1, \dots, a_n . Então, uma raiz α deste polinômio é dita ser algébrica. Uma vez que todo número racional $\alpha = \frac{a}{b}$ pode ser definido como a raiz de uma equação do primeiro grau $bx - a = 0$, o conceito de número algébrico é claramente uma generalização do conceito de número racional. Se um dado número algébrico satisfaz uma equação $f(x) = 0$ de grau n e não satisfaz nenhuma equação de menor grau (com coeficientes inteiros), ele é chamado de número algébrico de grau n . Em particular, os números racionais podem ser definidos como números algébricos de primeiro grau. O número $\sqrt{2}$, sendo uma raiz do polinômio $x^2 - 2$, é um número algébrico do 2º grau ou, como dizemos, um **irracional quadrático**. Irracionais cúbicos, do 4º grau ou de graus superiores são definidos de forma análoga. Todo número não-algébrico é dito **transcendente**. Exemplos de números transcendentess são e e π .

Com isso, podemos recompor um número irracional quadrático dada a sua expansão em frações contínuas. Por exemplo, vamos considerar o número x cuja expansão é $[4; 1, 8]$.

Pelo que já foi dito antes:

$$x = 4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \dots}}}}$$

Mas, se tomarmos o número $x + 4$, temos:

$$x + 4 = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8 + \dots}}}}$$

E assim, podemos reescrever esta igualdade:

$$x + 4 = 8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x + 4}}$$

Arrumando esta equação encontramos cuja raiz positiva é $\sqrt{24}$.

Portanto, $\sqrt{24} = [4; \overline{1, 8}]$.

Atividade 13: Encontre o número irracional que tem expansão em frações contínuas:

a) $[2; 1]$

b) $[8; 1, 16]$

c) $[9; 9, 18]$

d) $[1; 3, 1, 2]$

7.5 A EQUAÇÃO DE PELL

A equação $x^2 - dy^2 = 1$, onde d é um número inteiro positivo, é geralmente conhecida como **equação de Pell**.

Se d é um quadrado perfeito, teríamos algum k inteiro tal que $d = k^2$ e assim,

$$x^2 - dy^2 = x^2 - k^2y^2 = (x + ky)(x - ky) = 1$$

Isto implica em $x + ky = x - ky = \pm 1$.

Assim, por simples inspeção, as únicas soluções desta equação acabam sendo $x = \pm 1$ e $y = 0$.

Desejamos analisar as soluções da equação de Pell quando d não é quadrado perfeito, e, portanto \sqrt{d} é um número irracional. A expansão em frações contínuas para \sqrt{d} fornece todas as ferramentas que precisamos para resolver a equação de Pell $x^2 - dy^2 = 1$.

Vamos encontrar uma solução particular da equação $x^2 - 11y^2 = -1$.

Aqui $d = 11$, e a expansão em fração contínua de $\sqrt{11}$ é dada por

$$\sqrt{11}-3 = \frac{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}{\sqrt{11}+3} = \frac{2}{\sqrt{11}+3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{11}+3}{2}}$$

$$\sqrt{11}-3 = \frac{1}{\frac{6+\sqrt{11}-3}{2}} = \frac{1}{3+\frac{\sqrt{11}-3}{2}} = \frac{1}{3+\frac{1}{\sqrt{11}+3}}$$

$$\sqrt{11}-3 = \frac{1}{3+\frac{1}{6+\sqrt{11}-3}} = \frac{1}{3+\frac{1}{6+\frac{1}{3+\frac{1}{\sqrt{11}+3}}}}$$

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \sqrt{11} - 3}}}}$$

isto é, $\sqrt{11} = [3; 3, 6, 3, 6, \dots] = [3; \overline{3, 6}] = [a_0; \overline{a_1, 2a_0}]$.

Isto mostra que $a_{n-1} = a_1$, de modo que $n = 1$, número ímpar. O cálculo mostra que $c_1 = \frac{10}{3}$, de modo que $x_1 = p_1 = 10$ e $y_1 = q_1 = 3$, e

$$x_1^2 - 11y_1^2 = 10^2 - 11 \cdot 3^2 = 100 - 99 = 1;$$

portanto, $x_1 = 10$ e $y_1 = 3$ é solução particular da equação dada.

Esta também é a menor solução positiva. Para obter a próxima precisamos observar que a expansão de $\sqrt{11}$ tem período com dois termos. Por isso, a solução desejada está relacionada com o convergente c_3 . Vamos verificar esta afirmação.

$$c_3 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{19}{3}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{3}{19}} = 3 + \frac{1}{\frac{60}{19}} = 3 + \frac{19}{60} = \frac{199}{60}$$

de modo que $x_2 = 199$ e $y_2 = 60$, e

$$x_2^2 - 11y_2^2 = 199^2 - 11 \cdot 60^2 = 39601 - 39600 = 1$$

Note que foi necessário “pular” dois convergentes, pois

$$c_2 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6}} = 3 + \frac{1}{\frac{19}{6}} = 3 + \frac{6}{19} = \frac{63}{19}$$

e $63^2 - 11 \cdot 19^2 = 3969 - 3971 = -2$.

Atividade 14: Encontre a menor solução positiva de:

a) $x^2 - 2y^2 = 1$ b) $x^2 - 5y^2 = 1$ c) $x^2 - 18y^2 = 1$ d) $x^2 - 29y^2 = 1$

Atividade 15: Encontre as três menores soluções positivas de $x^2 - 10y^2 = 1$.

CONCLUSÃO

Quando do primeiro contato com a representação em frações contínuas, a utilização de números racionais torna o processo mais amigável, mesmo quando este se estende por algumas etapas, pois os termos utilizados tendem a diminuir de valor. Porém, é preciso tornar clara a forma como são obtidos os quocientes parciais, para que a migração para os números irracionais seja mais suave. No caso destes últimos, é bastante ilustrativo o uso de exemplos de tipos distintos, principalmente quando surgem expansões periódicas e expansões não periódicas.

Os primeiros exemplos de expansão para números racionais trazem à tona a primeira característica importante das frações contínuas: “Toda fração contínua finita representa um número racional, e reciprocamente, todo número racional é representado por uma fração contínua finita”.

A íntima ligação existente entre a expansão em frações contínuas com duas ideias básicas da Aritmética, a divisão euclidiana e o algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum de dois números, torna a demonstração desse fato bem natural, visto que a primeira (divisão euclidiana) faz com que a segunda (algoritmo de Euclides) seja limitada em suas etapas.

A utilização do algoritmo ainda traz uma simplificação no processo de obtenção dos quocientes parciais. Foi visto ainda, que é possível ter duas formas de representar números racionais, assim como acontece na representação decimal.

Através dos quocientes parciais da expansão em frações contínuas formamos os chamados convergentes. Para um número racional, eles não trazem nenhum resultado importante, apenas realçam o fato de que o último convergente é o próprio número racional. Por outro lado, para um número irracional, os convergentes (com a sua característica de convergência e sucessão) trazem aproximações surpreendentemente boas, a medida que avançamos nas ordens superiores deles.

A segunda característica marcante da expansão em frações contínuas, “toda fração contínua infinita representa um número irracional”, também é comprovada com o auxílio dos convergentes.

E o resultado mais importante para a aproximação de números irracionais através de números racionais, é que os convergentes da expansão em frações contínuas fornecem erros relativos (isto é, boas aproximações) utilizando denominadores relativamente pequenos se comparados com equivalentes provenientes de aproximações decimais. Isto foi verificado para os números $\sqrt{2}$ e π , mas facilmente observado em outros casos.

Ainda encontramos uma outra utilidade para a expansão em frações contínuas de números irracionais: a obtenção das soluções de um tipo de equação, denominada equação de Pell.

Antes, porém, foi possível através da análise da expansão caracterizar irracionais

algébricos e irracionais transcendentais, pois “toda fração contínua periódica representa um número irracional quadrático (algébrico de grau 2)”.

Para obter sucesso no processo de encontrar soluções para a equação de Pell fizemos uso de um irracional quadrático do tipo reduzido, cuja expansão em frações contínuas apresenta um comportamento puramente periódico, associado ao coeficiente da equação. A menor solução positiva é obtida através dos convergentes da expansão. As outras soluções podem ser obtidas fazendo composições com a primeira solução.

O processo para se obter cada um dos quocientes parciais na representação em frações contínuas que consiste em tomar a parte inteira do número e , invertendo a parte fracionária, e novamente tomar a parte inteira e assim sucessivamente, revela a forte ligação que essa forma de representação tem com a transformação de Gauss, em particular para números entre 0 e 1.

A sequência de quocientes parciais forma um conjunto (órbita) que também gera uma distinção as classes de números tal como o aspecto da sua expansão: os racionais apresentam órbita que acaba em zero; os irracionais quadráticos possuem uma órbita com ciclo bem definido e os irracionais algébricos de grau superior a 2 e os irracionais transcendentais tem órbita que “percorre” o intervalo $(0,1)$, sem contudo estabelecer um ciclo.

No final do nosso texto, propomos uma série de atividades a serem realizadas com alunos que já estejam no Ensino Médio. Acreditamos que pela maior bagagem desses alunos, em particular com uma boa noção de operações com radicais e equações do segundo grau, o trabalho será mais proveitoso.

Neste roteiro, iniciamos com a expansão de números racionais de forma bem rudimentar para que a representação acontecesse de maneira bem amigável. Números racionais negativos também foram contemplados nesta introdução, bem como a possibilidade de reversão do processo. Esta última etapa, também já era preparatória para a utilização das frações contínuas com os números irracionais.

Na seção seguinte, mostramos a ligação da expansão com o algoritmo de Euclides para o cálculo do mdc; e o quanto este garante a finitude da representação de números racionais e simplifica o seu processo.

Ao passar para as atividades com números irracionais, visamos mostrar que a expansão destes é infinita, periódica ou não. Neste ponto, incentivamos os alunos a utilizarem uma calculadora científica (simples) para obterem os quocientes parciais. Note que o uso da calculadora deve acontecer depois que o aluno já tiver percebido quais são informações desejadas e quais as operações envolvidas.

A análise do erro cometido na aproximação de irracionais por racionais, também é alvo de atividades na terceira parte do roteiro. A comparação com as aproximações decimais (de uso mais comum) realça a característica de apresentar aproximações melhores que a expansão em frações contínuas possui.

Fizemos uma breve introdução na diferenciação entre números algébricos e números transcendentos. Este conteúdo é praticamente inacessível aos alunos do Ensino Médio, mas que pode encontrar nas frações contínuas um bom suporte.

Terminamos, aproveitando uma característica da expansão de irracionais quadráticos: a infinitude aliada à periodicidade. Essa característica serve como ferramenta para apresentar soluções para a equação de Pell.

Acreditamos que com essas atividades, um aluno comum do Ensino Médio conseguirá conhecer a representação em frações contínuas em seus aspectos básicos e suas principais potencialidades.

A utilização de frações contínuas na representação de números reais amplia as possibilidades de conceituação destes números, com uma melhor distinção entre racionais e irracionais, proporciona uma configuração mais exata de suas operações, faz ligação com tópicos importantes da Aritmética, traz para ganhos consideráveis para a aproximação de irracionais com racionais e ainda pode ser utilizada na resolução de equações não triviais.

BIBLIOGRAFIA

ANDRADE, Eliana X. L.; BRACCIALI, Cleonice F. **Frações Contínuas: Propriedades e Aplicações.** Notas em Matemática Aplicada. v. 20. São Carlos: SBMAC, 2012. 118 p.

CARNEIRO, José Paulo Q. **Um Processo Finito para Raiz Quadrada.** Revista do Professor de Matemática. número 34.

DÍAZ, Lorenzo J.; JORGE, Danielle de Resende. **Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas.** 26º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M. **An Introduction to the Theory of Numbers.** 4 ed. Londres: Oxford University, 1975. 421 p.

KHINCHIN, A. Ya. **Continued Fractions.** Nova Iorque: Dover, 1997. 106 p.

MARQUES, Diego; **Teoria dos Números Transcendentes.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MARTINEZ, Fábio Brochero; MOREIRA, Carlos Gustavo; SALDANHA, Nicolau; TENGAN, Eduardo. **Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro.** 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A. **Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas.** 1º Colóquio da Região Sudeste. São João del-Rei, 2011.

MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A. **Propriedades estatísticas de frações contínuas e aproximações diofantinas: o teorema de Khintchine.** Revista Matemática Universitária número 29, pp. 125-137. Rio de Janeiro, 1998.

NIVEN, Ivan; ZUCKERMAN, Herbert S.; MONTGOMERY, Hugh L. **An Introduction to the Theory of Numbers.** 5 ed. Nova Iorque: Wiley, 1991.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números Irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais.** Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. 235 p. São Paulo, 2012.

POMMER, Wagner Marcelo. **O uso das Frações Contínuas como tema articulador no Ensino Médio.** Revista Eletrônica de Matemática. número 3. 2013.

OLDS, Carl Douglas. **Continued Fractions.** New Mathematical Library número 9. Nova Iorque: Random, 1963. 162 p.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à teoria dos números.** 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

TAVARES, Cláudia S.; CARVALHO, Sônia P. de; KAMPHORST, Sylvie O. **Caos na base 2.** Oficina na 1ª Bial da Sociedade Brasileira de Matemática. Belo Horizonte, 2002.

ALEXANDER PINTO PEREIRA - É carioca, casado e pai de um menino. Leciona Matemática há quase 28 anos. Começou a dar aulas de Matemática enquanto cursava Engenharia Eletrônica. Em pouco tempo, trocou o curso universitário para a Licenciatura, que concluiu no Centro Universitário Moacyr Sreder Bastos. Se apaixonou pela “Ciência dos números”, em particular pelo ramo Teoria dos Números. Em 2016, concluiu este trabalho como requisito para a obtenção do título de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada sob a orientação do Prof. Dr. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira. Trabalha há 14 anos no Colégio Pedro II, tendo passado também pelas redes municipal, estadual e particular do Rio de Janeiro.

FRAÇÕES CONTÍNUAS

**representação e aproximação
de números reais por
números racionais**



 www.atenaeditora.com.br

 contato@atenaeditora.com.br

 [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)

 www.facebook.com/atenaeditora.com.br


Ano 2023

FRAÇÕES CONTÍNUAS

**representação e aproximação
de números reais por
números racionais**



-  www.atenaeditora.com.br
-  contato@atenaeditora.com.br
-  [@atenaeditora](https://www.instagram.com/atenaeditora)
-  www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena
Editora
Ano 2023