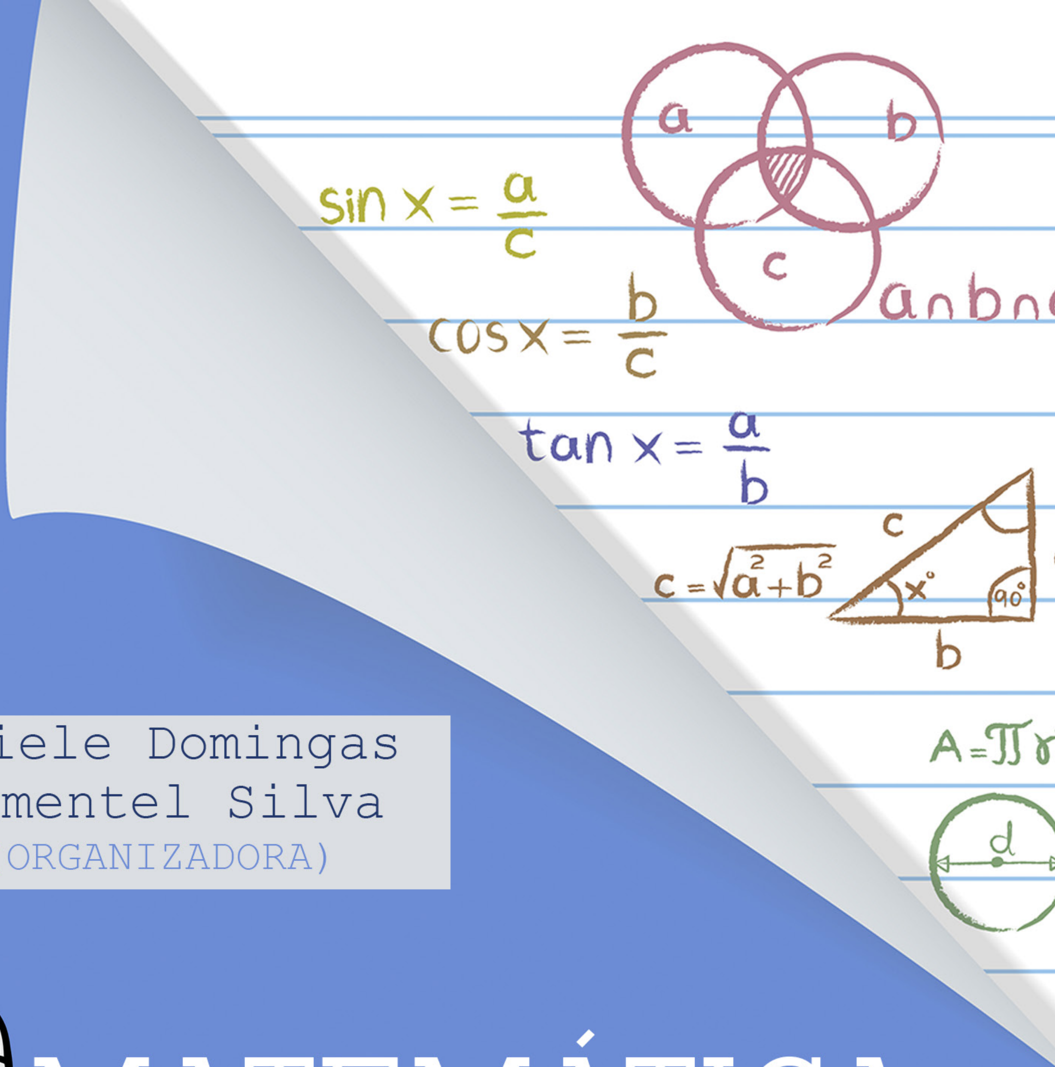
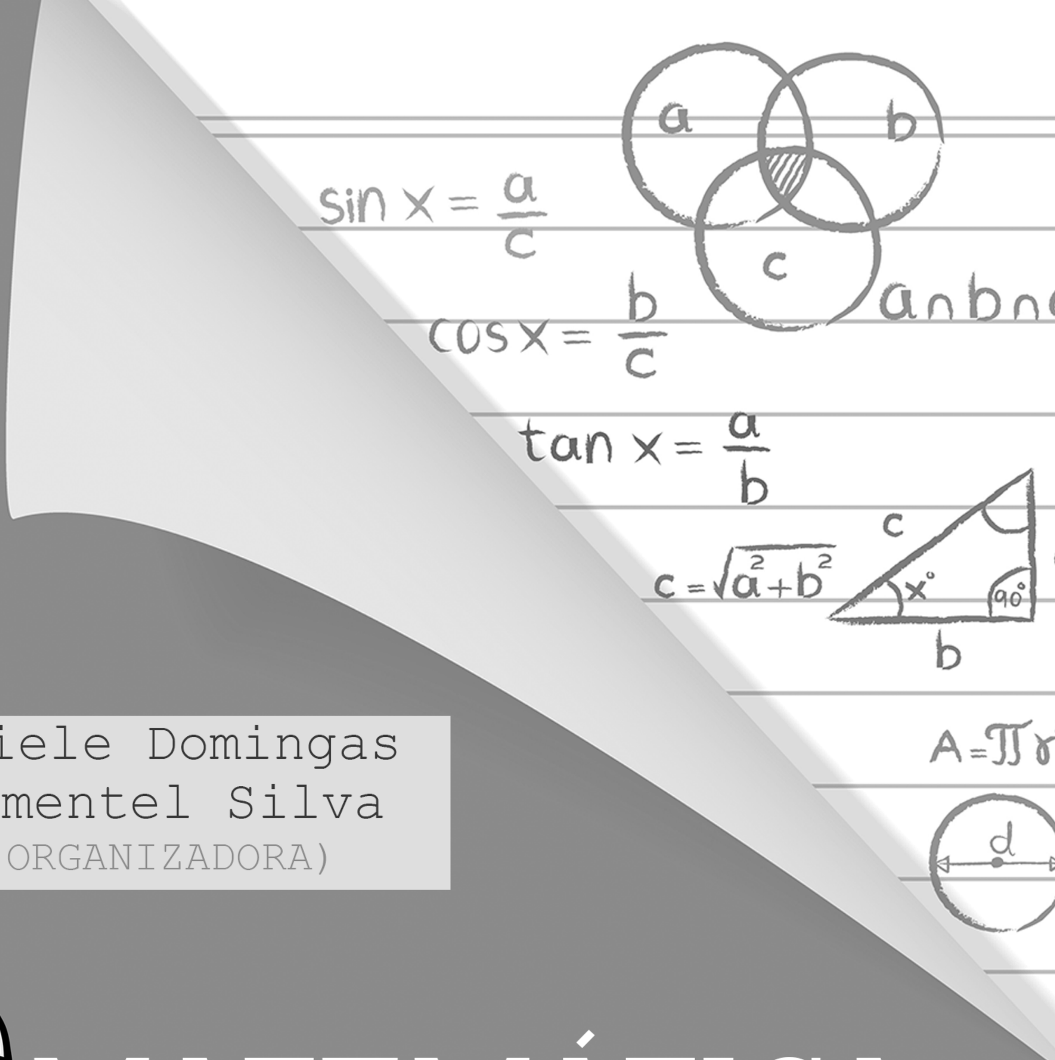


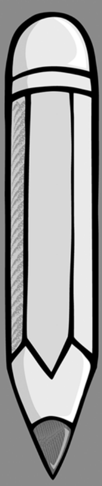
Aniele Domingas Pimentel Silva
(ORGANIZADORA)

MATEMÁTICA:
O sujeito e o conhecimento matemático

Atena Editora
Ano 2023



Aniele Domingas
Pimentel Silva
(ORGANIZADORA)



MATEMÁTICA:
O sujeito e o conhecimento matemático

Atena
Editora
Ano 2023

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Nataly Evilin Gayde
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Matemática: o sujeito e o conhecimento matemático

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizadora: Aniele Domingas Pimentel Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M425 Matemática: o sujeito e o conhecimento matemático / Organizadora Aniele Domingas Pimentel Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2023.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-1148-2
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.482231404

1. Matemática. I. Silva, Aniele Domingas Pimentel (Organizadora). II. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

A coletânea “Matemática: o sujeito e o conhecimento matemático” traz a reunião de seis artigos, com a participação de quatro universidades públicas brasileiras, duas do Peru e uma do Chile.

O objetivo desta publicação é a divulgação das pesquisas que abarcam a matemática sobre vários eixos de discussão, o que contribui para desmistificar a ideia de que ela não se inter-relaciona com as demais disciplinas. Os estudos estão alicerçados nas teorias de aprendizagem e em teorias específicas da matemática e que fazem aplicabilidade nas diversas ciências.

Os temas discutidos nessa coletânea traz a público o que discentes e docentes pesquisam, levando a produção acadêmica para além dos muros das universidades, contribuindo para uma matemática mais significativa e atrativa aos leitores, além de mostrar as várias vertentes de pesquisa dentro de uma mesma área do conhecimento e ainda assim há muito para ser explorado.

Ademais, esta pequena obra “Matemática: o sujeito e o conhecimento matemático” se propõe a apresentar os resultados dessas seis pesquisas e ser um canal de divulgação científica.

Aniele Domingas Pimentel Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: REINVENTANDO AS FORMAS DE ENSINAR E DE APRENDER

Data de aceite: 03/04/2023

Benedita Neire Almeida de Magalhães
Universidade Federal de Mato Grosso

Marta Maria Pontin Darsie
Universidade Federal de Mato Grosso

RESUMO: O presente artigo objetiva analisar a prática pedagógica no que refere á inserção das novas tecnologias, resolução de problemas em relação ao Ensino da Matemática, no momento da pandemia, nas aulas remotas e no retorno às aulas presenciais e impacto na melhoria da aprendizagem dos alunos, em uma turma da 2ª fase do 2º Ciclo, da Escola Estadual Modelo Santo Antônio, em Jaciara, município mato-grossense. Portanto, a utilização da Metodologia Ativa foi de Aprendizagem Baseada em Problemas e Tendência da Educação Matemática Crítica. Para o desenvolvimento de uma atividade dita situação-problema, alinhada à realidade dos alunos, propôs-se um questionário e atividades com resolução problemas matemáticos cujos dados levaram a uma análise qualitativa da percepção dos estudantes, no processo de aprendizagem e, a segunda fase do projeto, foi a aplicação da sequência de atividades pautadas nas questões da atualidade. Os resultados levaram à conclusão de que os métodos ativos, resolução de problemas e Educação Matemática Crítica contribuíram, de modo relevante, para o processo de aprendizagem dos estudantes, logo, contribuindo com a formação de sujeito ativo, participativo e crítico.
PALAVRAS-CHAVE: Prática pedagógica. Educação matemática. Métodos ativos.

ABSTRACT: This article aims to analyze the pedagogical practice on the insertion of new technologies, problem solving in relation to mathematics teaching, at the time of the pandemic, in remote classes and on the return of classroom classes and impact on the improvement of students' learning, in a class of the 2nd phase of the 2nd Cycle, of the State School Modelo Santo Antônio, in Jaciara, mato-grossense municipality. Therefore, the use of the Active Methodology was Problem-Based Learning and Critical Mathematical Education Trend. For the development of a so-called problem-situation activity, aligned with the reality of the students, a questionnaire and activities with mathematical problem solving were proposed, whose data led to a qualitative analysis of the students' perception in the

learning process and, in the second phase of the project, it was applied to the sequence of activities based on current issues. The results led to the conclusion that active methods, problem solving and Critical Mathematics Education contributed, in a relevant way, to the learning process of the students, thus contributing to the formation of active, participatory and critical subjects.
KEYWORDS: Pedagogical practice. Mathematics education. Active methods.

INTRODUÇÃO

O avanço tecnológico e, em particular, o acesso à internet, por meio de um computador ou de um celular conectado, contribuíram amplamente para a mudança da concepção de ensino-aprendizagem na sociedade atual. Nesse contexto de transformações emergenciais na sociedade, um dos assuntos mais tratado é o a Educação. Recentemente, um dos maiores desafios enfrentados pelos educadores foi executar um bom trabalho durante pandemia da Covid-19. Com a doença, foram instituídos decretos que fecharam escolas e impossibilitaram o convívio em sala de aula, sendo este o primeiro ponto de mudança com a educação, pois nunca na história do Brasil, a educação básica teve que ser feita em casa, o chamado "ensino remoto".

Por conta disso, ao profissional da Educação coube o desafio de encontrar novas metodologias de trabalho que pudessem auxiliar no ensino-aprendizagem dos alunos brasileiros. Esse aceitar foi forçando a entender que precisávamos adentrar e aceitar as diversas inovações nos processos educativos, e quando falamos de inovação, não referimos apenas aos aparatos altamente tecnológicos, ferramentas de ordem técnica, mas também as Metodologias Ativas, isto é, pensar, agir, ensinar e aprender, conectados com a inovação, adaptando-se à nova forma de ensinar e, concomitante, ao aprender.

Por acreditar que é possível apresentar aulas com estratégias que possibilitem aos alunos serem sujeitos de suas próprias aprendizagens e colaborar com seus colegas, é que partimos para a pesquisa com as metodologias ativas. Para Santos (2008) e Gadotti (1992), o processo de ensino e aprendizagem é mais eficaz, quando o educando participa, ele mesmo, da construção do seu conhecimento, sendo os métodos ativos de fundamental importância para o processo educativo, visto que proporciona um ambiente interativo.

Cabe ressaltar que, ao propor as metodologias ativas no ensino fundamental, os estudantes passaram a sentir um pertencimento na cultura digital e criaram expectativas em relação ao processo de aprendizagem no contexto escolar. Assim, demonstra-se a necessidade de formação e orientação pedagógica, para que a prática docente seja significativa, tendo em vista que, ela está sendo avaliada, em relação às competências didáticas.

Mediante ao exposto, este trabalho objetiva apresentar um relato de experiência, por meio dos métodos ativos, resolução de problema e a Educação Matemática Crítica.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesse contexto tecnológico, o espaço escolar passa por redefinição de suas práticas, espaços e tempos. Por isso, faz-se necessário a aproximação em conhecer e colocar em prática os Métodos Ativos que são entendidos como práticas pedagógicas alternativas ao ensino tradicional. Em vez de um ensino baseado na transmissão de informação da instrução bancária, como criticou Paulo Freire (2011), na Metodologia Ativa, o aluno assume uma postura mais participativa, na qual ele resolve problemas e cria oportunidades para a construção do seu conhecimento. Neste sentido, conforme Bacich e Moran (2018), as metodologias ativas são pontos de partida para reflexão, integração cognitiva, generalização e reelaboração de novas práticas. Além de despertar no estudante a sensibilidade, o interesse de conhecer, de forma transversal, os conteúdos com as temáticas da vida.

No entanto, Azevedo (1999) propõe que o ensino a matemática desenvolve a compreensão dos fenômenos que ocorrem no meio em que os alunos estão inseridos, como poluição, desmatamento, limite para o uso dos recursos naturais, desperdício. Nessa perspectiva, a matemática pode colaborar para o desenvolvimento das competências e conhecimentos que aumentam o desempenho das habilidades, diferentes tecnologias e linguagem que a cultura digital exige dos estudantes.

A Base Curricular Comum Nacional (2018) reforça essa concepção, defendida por Moran (2018) quando acontece a superação, a fragmentação do conhecimento e o incentivo a sua aplicação na realidade e valoriza o contexto para dar sentido ao que se aprende e o protagonismo do estudante em sua aprendizagem e na construção de seu projeto de vida. Percebe-se essa articulação na BNCC em relação a valorização que contribui para que o aluno seja o protagonista na construção do saber, assim como a essência das metodologias ativas para o ensino da matemática.

Assim, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) afirmam que o “conhecimento matemático ganha significado, quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução.” (BRASIL, 1998, p. 40). Sendo assim, é pertinente lançar atividades que desafiam os estudantes na busca de novos conhecimentos.

Logo, o professor precisa mudar de “detentor do conhecimento” para mediador. Gaeta e Masetto (2015) o professor precisa assumir o papel de mediador no processo de aprendizagem, com atitudes de parcerias e o trabalho coletivo com os alunos.

O diálogo é importante tanto para Freire (2011) quanto para o Skovsmose (2001), pois para ambos os autores as ideias relativas ao diálogo e à relação estudante-professor são desenvolvidas do ponto de vista geral de que a educação deve fazer parte de um processo de democratização.

Segundo Berbel (2011), as metodologias ativas estão baseadas no formato do desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem. Para tanto, utilizamse experiências reais ou mesmo simulações que se traduzem em maior aprendizado e significado para o estudante.

Na perspectiva de Basto (2016), as Metodologias Ativas têm procedimentos interativos de conhecimento, análise, estudos, pesquisas e decisões individuais ou em equipe, com o objetivo de encontrar soluções para um problema. Nesse sentido, podemos dizer que metodologia é o modo como propomos o desenvolver a sociedade, diante dos dados da prática social, dentro da sua realidade. De acordo com Diesel (2017), as metodologias ativas possibilitam a busca do conhecimento colocando os estudantes como protagonistas do processo de aprendizagem.

Na busca para que o próprio aluno seja protagonista do seu conhecimento e ao mesmo tempo, passe a ser responsável, também, por mediar discussões, atuar para manter grupos de outros alunos focados em um problema e motivá-los a se envolver com as tarefas requeridas no processo de busca de solução, estimular o uso da função de pensar, observar, raciocinar e entender. Conforme Barbosa e Moura (2013) defendem a Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) como o uso contextualizado de uma situação-problema para um aprendizado autodirigido, que norteou a primeira parte deste trabalho, durante o período remoto e presencial.

Outra autora afirma a importância da resolução de problema e reforça que o problema não pode ser tratado de forma isolada, por isso, a "matemática precisa ser ensinada como matemática não como um acessório subordinado a seus campos de aplicação." (ONUCHIC, 1999, p. 205).

Na perspectiva de dialogar com as Metodologias Ativas, Resolução de Problemas e estimular a natureza crítica nos estudantes, a partir da Educação Matemática, recorre-se à Educação Matemática Crítica. Em conformidade com o Skovsmose (2008), a matemática em ação faz parte dos mundos-vida, podendo servir aos desígnios variados com o olhar crítico.

O PERCURSO DO TRABALHO EM SALA DE AULA

Para a realização desta pesquisa qualitativa de pesquisa-ação, o caminho metodológico foi a pesquisa bibliográfica, documental, observação, nas quais, nos princípios metodológicos da pesquisa qualitativa, fundamentada em Bogdan e Biklen (1982), Lakatos e Marconi (1993), Thiollent (2003), e Ludke e André (1986), por considerar que essa é "[...] uma metodologia de investigação que enfatiza adescrição,a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais." (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.11).

O caminhar da pesquisa acontece de forma participativa para o pesquisador que irá atuar no campo de pesquisa, é pertinente ao procedimento da pesquisa qualitativa de pesquisa – ação. A pesquisa-ação é uma pesquisa participante, pois o pesquisador atua no campo de pesquisa. Conforme Thiollente (2003, p.14)

> A pesquisa-ação é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação comuma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo.

No primeiro contato com a turma, o procedimento durante as atividades e o planejamento semanal estavam estruturados da seguinte forma: encaminhamento de atividades do livro didático, elaboração de apostila e mensagens pelos aplicativos *WhatsApp* e o Google *Meet*. Ao perceber certa apatia dos alunos em relação às atividades propostas, buscou-se investir em métodos ativos.

Em uma abordagem do paradigma emergente, que tem um dos pontos relevantes para o processo do conhecimento, a tecnologia é vista como uma ferramenta para aprendizagem colaborativa. Behrens (1999), Boaventura Santos (1999) e Moraes (1997) denominam de paradigma emergente a aliança entre as abordagens construtivista, interacionista, sociocultural.

Barbosa e Moura (2013, p. 58), de modo sucinto e direto, fundamentam a Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) como "o uso contextualizado de uma situação-problema para o aprendizado autodirigido", porque a ABP tem como principal objetivo mesclar a teoria e a prática na educação. A intenção é fazer com que o aprendizado seja mais dinâmico e aconteça de forma conjunta, fazendo com que o aluno aprenda as bases teóricas e que realize a parte prática.

Logo, diferentemente dos métodos convencionais cujo objetivo é a transmissão do conhecimento centrado no professor, na ABP, através da resolução de problema, o aluno é o centro do processo, deixando de ser um receptor passivo da informação para ser um agente ativo do seu próprio aprendizado.

Nessa perspectiva, o aluno, como protagonista do seu conhecimento, levou-nos a optar em trabalhar com a ABP com uma turma da Escola Estadual Modelo Santo Antônio, em Jaciara, município no interior mato-grossense, composta por 28 alunos, que se dividiram em 08 grupos, sendo que o grupo foi formado por dezesseis que têm o acesso ao Aplicativo *Meet* e os demais, participam da atividade colaborativa, através do *WhatsApp*, desenvolvendo-as de forma individual.

A partir desse olhar, foi reelaborado o planejamento com o tema: "A Pandemia e o Número" com o objetivo de trabalhar os conceitos de Matemática e de Ciências, durante o terceiro trimestre do ano de 2021.

No primeiro momento, trabalhamos com a pesquisa relacionada ao tema do planejamento, o qual surtiu um efeito positivo, devido a interação dos alunos, pois, fizeram apontamentos, tiraram fotos dos textos que leram na internet e se preparam para apresentação através do Aplicativo *Meet*.

Os recursos utilizados: perguntas, internet, aplicativo do *Google Meet*, *WhatsApp*, vídeo chamada pelo *WhatsApp*, que permitiram a formação de grupos de discussão por meio de *chats* e o acesso de alunos para a troca de experiências. As atividades foram registradas através do caderno de campo que resultou na sistematização, através do gráfico I, que faz parte do tópico de Resultados.

A segunda fase do projeto aconteceu de forma presencial com a turma, na qual efetivou-se a continuidade da pesquisa via internet, a roda de conversas para o debate do tema e análise de dados coletados por eles, boletim epidemiológico que foi entregue para a turma através do endereço eletrônico de um aluno que passava para os colegas, a qual utilizamos para a sistematização dos problemas e, em seguida, o desenvolvimento das atividades na aula de Matemática. Em outros componentes curriculares, sistematizamos outras atividades que não estaremos apontando neste relato. Para a análise e registros das atividades, utilizamos o caderno de campo da professora e caderno de bordo dos alunos, eles registraram o que aprenderam, em cada encontro de aula de matemática.

Conclui-se que, o trabalho foi finalizado com 20 alunos, devido à transferência, mudanças da família, em busca de sobrevivência. Para a sistematização dos resultados da experiência, analisaremos por amostragem o desenvolvimento de dois alunos da turma que serão identificados por A1 e outro por A2.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Diante de uma situação, dentro do espaço educacional, passaram por momentos turbulentos, no sentido de ter a ousadia em partir para um campo aparentemente distante do nosso dia a dia. Sempre deparamos com as tecnologias ao nosso redor, porém, sem aquela perspectiva de que um dia chegaria em nosso espaço de forma tão abrupta. As resoluções chegando, as orientações de protocolo de segurança e a exigência da reformulação do planejamento, pois as aulas não seriam presencias, e sim, de forma remota, no primeiro momento e, em seguida, a retomada das aulas presenciais.

De acordo, com Parecer do CNE/CP nº 11/2020:

> [...] os maiores desafios são: a grande desigualdade no acesso à internet pelos estudantes; as dificuldades dos professores em desenvolver atividades remotas; as desigualdades no índice socioeconômico das escolas que também se revela na desigualdade da sua infraestrutura. Também fica claro que, em geral, as escolas das redes públicas não fazem o monitoramento do aprendizado das atividades não presenciais. (BRASIL, 2020, p. 6)

Além de todos os desafios tecnológicos, passamos, também, por questões metodológicas, para suprir as necessidades que eles enfrentaram com as atividades remotas, frente às tecnologias digitais. Pensar na elaboração de atividades que atendesse as questões emergências do saber, era necessário, porque as crianças não podiam ficar sem as aulas, e como torná-las criativas, dinâmicas?

Fez-se mais que necessário planejar as atividades apartada do método tradicional de ensino, aqui, requisita-se do professor, coragem e preparo para quem modificar, representa dedicação extra, tanto do professor quanto dos estudantes. Por isso, para Barbosa e Moura (2013), é preciso que os participantes do processo acreditem no potencial pedagógico e deem valor à iniciativa.

Sendo assim, é preciso que o aluno se torne sujeito no ensino e aprendizagem; fez-se necessário elaborar e aprimorar a metodologia, por isso recorremos aos métodos ativos, resolução de problema e o foco na Educação Matemática Crítica. Requereu-se tanto do professor, um maior tempo e esforço para pesquisa e planejamento das atividades, a fim de que elas fossem realmente interessantes, funcionando como ponto de partida para construção do conhecimento e possibilitando aos estudantes, uma participação ativa, nessa construção,

Diante disso, acreditamos no potencial dos alunos e nas metodologias ativas com a Aprendizagem, Baseada em Problemas e assim, alcançamos os nossos resultados, mesmo com extensos desafios, tanto por parte dos alunos quanto pela como da professora. Veremos no gráfico a seguir:

Atividade I – Pesquisa - Conteúdos de Matemática, relacionados à pandemia.

Gráfico I – Resultado da pesquisa - Conteúdos de Matemática relacionados à pandemia

Fonte: arquivo das autoras /2021.

Nessa primeira experiência, observamos que entre os 28 alunos, apenas quatro deixaram de efetuar as atividades. Estes alunos residem na zona rural e suas atividades são enviadas, com um pouco de atraso, pois dependem do sinal da internet rural.

Assim, a pesquisa foi de nível satisfatório porque seis alunos conseguiram encontrar conceitos de adição; sete reconheceram gráfico de barras; seis, gráficos de linha; seis encontraram conceitos de porcentagem e quatro não responderam, por motivo de acesso à internet na zona rural.

Os alunos apresentaram os dados da pesquisa aos colegas, por meio do Aplicativo *Meet* e, os que participaram apenas pelo *WhatsApp*, enviaram as fotos.

Por fim, nessa atividade I, o protagonismo dos alunos, no processo da pesquisa, foi nítido e proporcionou-lhes uma visão mais crítica. Outro ponto relevante, foi a percepção da importância da Matemática, para compreender, analisar e enfrentar desafios. Observa-se a fala de um aluno “- Professora, foi muito bom fazer parte dessa pesquisa em grupo, pelo *Meet*, bis!”. Percebe-se, na fala do aluno, que as experiências de aprendizagem vivenciadas foram boas. Conforme afirma Barbosa e Moura (2013) o conhecimento obtido pelos meios digitais tem um valor imensurável, em seu processo formativo.

No processo de ensino e aprendizagem da Matemática, numa perspectiva em que o aluno seja participante, a partir da resolução de problemas além da resolução, fizemos um diálogo com a tendência da Educação Matemática Critica, na busca de ofertar estratégias em sala de aula, que promove um ambiente que favoreça a construção da criticidade e que venha possibilitar uma aprendizagem mais ampla, superando modelos de ensino que valorizam simplesmente as regras e os procedimentos. Para Onuchic (1999), faz-se necessário que o aluno seja considerado como ativo, durante o processo formativo, e possibilite um bom planejamento, elaborado pelo professor. Diante disso, percebe-se que a resolução de problemas matemáticos vai além da Matemática por Matemática, eles dão respostas críticas em relação à interpretação, tanto do anunciado como no resultado.

Portanto, percebemos a importância da aplicabilidade da Matemática no cotidiano da sociedade e o despertar dos alunos, na análise crítica dos dados, diante de um problema. Observa-se nas atividades a seguir, a resolução dos problemas pelos alunos e a sua opinião diante dos acontecimentos.

Atividades 02 - Resolução de Problemas Matemáticos

Antes de aplicar as atividades, fizemos a roda de conversa para análise do texto informativo, tanto em sua estrutura e organização, como no objetivo do informativo, diante da pandemia da Covid-19. Percebe-se nas falas dos alunos: segundo a A1 “é importante a gente entender os números que vem nos textos”. O A2 reforça a fala da A2 “eu não sabia entender por que dois números estavam ali. Achei que eram só números, na aula de Matemática”.

A partir das falas dos alunos, verificamos qual a importância de os alunos pesquisarem, coletarem os dados e sistematizarem, mas o que foi relevante dentro dessas perspectivas em fazer o aluno sujeito do processo, foi a convicção de que estiveram envolvidos em perceber e analisar o porquê daqueles dados estatísticos, a partir do Boletim Informativo – juntos compreenderam a causa e os efeitos positivos e negativos, diante de uma problemática. No caso, a pandemia, a causa, principalmente do alto índice de morte, principalmente a negação da ciência. Por isso, a abordagem crítica faz-se necessária, na aprendizagem matemática que são trabalhadas nas escolas e nos anos iniciais, numa concepção da Matemática pura. Conforme o estudioso da Matemática, Skovsmose (2013): o conhecimento reflexivo pode dar uma dimensão crítica à Matemática.

Para a sistematização dos resultados da experiência, analisaremos, por amostragem, o desenvolvimento de dois alunos da turma, que serão identificados por A1 e outro, por A2:

Atividades 2.1- Resolução de Problemas Matemáticos.

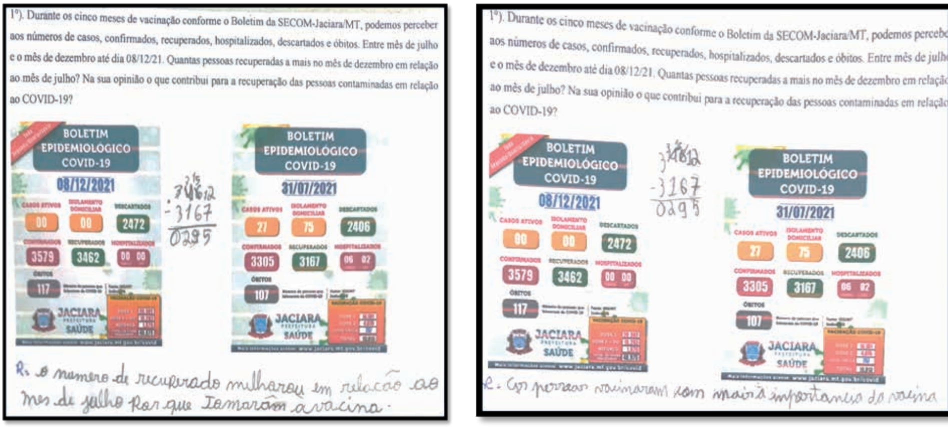


Figura 2 – Resultados da solução de problemas Matemáticos

Fonte: Arquivo das autoras/21.

Para Zuffy e Onuchic (2007), o objetivo do problema é provocar a curiosidade do aluno ao desafiá-lo e fazer com que ele desenvolva seu próprio conhecimento.

Na atividade da A1, percebe-se que a aluna compreendeu o anunciado e analisou a solução do problema posicionando-se de forma crítica, questionadora tanto na escrita como de forma oral durante a explanação para a turma. Em relação à diferença, o resultado está correspondido e aplicou-se o conhecimento matemático básico para o nível da turma, em relação à análise crítica. Para explicar o número de diferença entre os dois meses, a aluna relata que o número de recuperados entre o mês de julho e dezembro, aconteceu porque "o número de recuperados melhorou, em relação ao mês de julho, porque tomaram a vacina".

Na visão da aluna A1, as pessoas que tomaram a vacina contribuíram para que o maior número de pessoas se recuperasse. O aluno A2 aplicou, com facilidade, a operação, sem nenhuma intervenção da professora, assim como a A1. Então, o A2, ao enfatizar sua resposta em relação ao que contribuiu para o maior número de recuperados, afirma: "as pessoas vacinaram, com mais importância da vacina". Compreende-se que a A2 entendeu que a comunidade deu maior valor à vacina, apesar de uma parcela não acreditar nela.

Atividades 2.2 - Resolução de Problemas Matemáticos.

Os problemas foram também elaborados a partir do Boletim Epidemiológico do município, que os alunos encontraram nas pesquisas via internet, em suas respectivas casas e, posteriormente, trazendo para a sala de aula. Assim, utilizamos as informações, na atividade 1 e agora, na atividade 2.

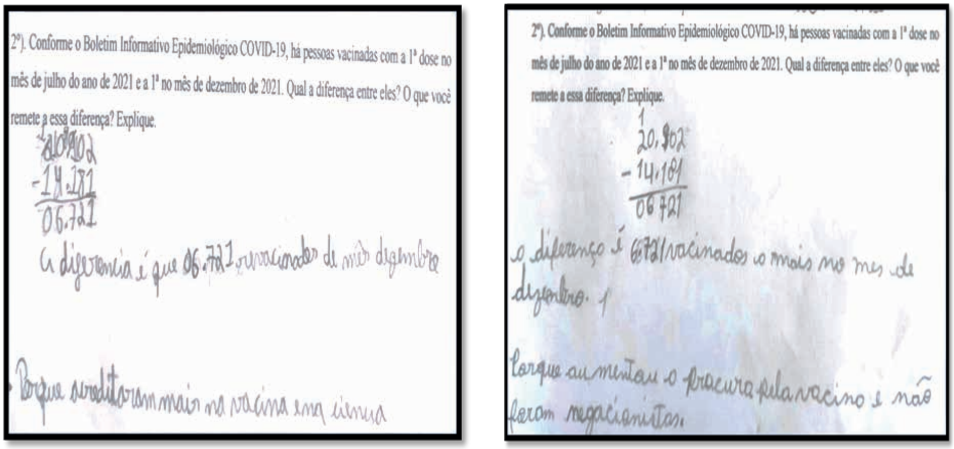


Figura 2 – Resultados da Resolução de problemas Matemáticos a partir do Boletim Informativo.

Fonte: Arquivo das autoras/ 2021.

Na proposta acima, elaboramos o enunciado do problema, explorando os dados informados. Após a leitura e análise dos anunciados os alunos passaram a aplicar os conhecimentos matemáticos, assim como outros alunos da turma, porém, esses dois alunos que se colocaram como voluntários a entregar as atividades resolvidas para a analisem do referido trabalho, conforme estão sendo apresentadas nas escritas deste trabalho Em relação ao cálculo, ambos os alunos demostraram habilidades em relação aos números e operações e compreenderam o termo “a mais”, por isso não aplicaram a operação de adição, como em sua maioria, os alunos acabaram fazendo a adição e não aplicaram a subtração, como os alunos acima fizeram.

Em relação à resposta crítica e compreensiva do porquê da diferença entre os dois meses, no que se refere à quantidade de vacinas na primeira dose, entre os dois meses, foram a seguinte: o A 1 respondeu “porquê acreditaram na vacina e na ciência”; conforme a resposta do A1, percebe-se que compreendeu a pergunta e sabe utilizar o teor das pesquisas feitas por eles, até chegar na sistematização dos problemas, em sala de aula. É pertinente defender a relação fundamental dos métodos ativos, resolução de problemas matemáticos numa concepção crítica, durante o ensino da Matemática, e fazer com que a aula passe a ser dinâmica e tenha ação do sujeito aluno. Segundo Moran (2018), as metodologias ativas enfatizam o papel do aluno, ao seu desenvolvimento direto, participativo e reflexivo, em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor.

O aluno A2, em relação ao processo da aplicabilidade dos conhecimentos matemático, demonstrou suas habilidades e compreensão enunciado. O que chamou a nossa atenção foi a sua resposta para explicar o motivo da diferença no resultado. Ele enfoca com segurança: “porque aumentou a procura da vacina e não foram negacionistas”.

Percebe-se a importância de trazer a Matemática para dialogar com as questões sociais, em sala de aula.

Vivemos em momentos de constantes mudanças. Sendo assim, durante todo o processo formativo com essa turma, percebemos quanto a forma do fazer pedagógico, e repensar ensinar a Matemática foi apreciada e encontrou espaço entre os alunos. O aluno consegue perceber e diferenciar as pessoas que defendem a vacina, a ciência e outro grupo que não procuram a vacina porque negam a utilidade dela. Isso nos permitiu realizar discussões, fazer inferências e tomar decisões sobre a solução do problema, bem como, proporcionar a comunidade de aprendizes, a reflexão acerca do problema em debate, desafiando as várias soluções para o problema no qual todos acabaram de refletir (VAN DE WALLE, 2009).

Precisamos rever as tendências de Ensino da Matemática e articular com os Métodos Ativos. Outrossim, formas de fazer pedagógico deve-se ir além dos conhecimentos padrões, em sua maioria, impostos através dos programas de políticas públicas que acabam engessando o currículo nas escolas públicas brasileiras. Logo, mercantilizam a educação, com uma proposta pedagógica com “ensino apostilado” ou “sistemas de ensino estruturado”. Portanto, sempre encontraremos uma lacuna para colocar em prática as atitudes que acreditamos, em tornar o aluno participativo, crítico e ativo diante da sua realidade.

Percebe-se, nesse contexto que a Matemática passa a ter um caráter prazeroso, em relação ao aprender a aprender. Os alunos passam a ser protagonistas do processo de aprendizagem. Isso nos remete a compreender a importância de a aprendizagem ter o viés que a resolução de problemas nos fornece subsídios para a prática pedagógica. Allevato (2014) propõe as práticas reflexivas, que compele o trabalho em equipe e implementa a construção e desenvolvimento do ensino a partir de projetos e resolução de problemas.

Dialogando com a visão freiriana, durante o desenvolvimento desse trabalho, podemos perceber e defender que a educação transformadora se contrapõe tanto à pedagogia tradicional quanto à pedagogia bancária, nas quais os sujeitos só recebem, só ouvem, sem ter o direito de se pronunciar. Na perspectiva da educação transformadora, os alunos são os principais interessados, já que tudo se desenvolve em função deles: seus conhecimentos, suas culturas, seus anseios, suas dúvidas, suas curiosidades, suas histórias de vida, suas comunidades são o ponto de partida para a execução dessa prática pedagógica.

Para Freire (1991), não devemos chamar o povo para a escola para passar as instruções, como se a educação tivesse receitas prontas, mas sim para participar coletivamente da construção de um saber que vai além da pura experiência feita, que leve em considerações as suas necessidades e o torne instrumento de luta, possibilitando-lhe se transformar em sujeito de sua própria história.

Considerando todos os teóricos para a fundamentação teórica deste trabalho e a relevância da utilização da pesquisa, por parte dos alunos, utilizando a tecnologia digital antes de qualquer aula no Ensino Fundamental, pode ser um importante instrumento para professores e alunos, no processo de ensino e aprendizagem, como destaca Freire (2008, p. 26) em sua obra *Pedagogia da Autonomia:* “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades ao aluno, para sua própria construção”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar dos desafios frente à nova forma que a educação vem trilhando, em virtude da pandemia, fez-se necessário repensar a prática pedagógica com postura capaz de enfrentar escolhas complexas e criar e aplicar ações em cenários de rápida transformação. Sendo assim, a educação precisa ter um ponto de partida, por isso, acreditamos que o ensino aprendizagem se faz, a partir de uma concepção problematizadora, na qual o conhecimento resultante é crítico e reflexivo.

Diante dos resultados analisados, constata-se que a utilização dos métodos ativos, focados na aprendizagem e baseado em problemas e associados a uma situação contextualizada, de acordo com o campo de interesse dos estudantes e dando-lhes a liberdade para aprenderem, desperta o interesse dos estudantes, de forma autônoma, criativa, crítica e colaborativa.

Nesta perspectiva dos Métodos Ativos, Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) voltados para o Ensino da Matemática Crítica, foi possível alcançar um bom desempenho com os alunos. Podemos perceber habilidades como: leitura de textos científicos, trabalho em equipe, desenvolvimento de pesquisa, desenvolvimento de soluções trabalhadas a todo o momento e turma em constante interação nos grupos. Proporcionou elementos para avaliação da turma, de forma dinâmica, sem trazer nenhum transtorno e juízo de valores em outras práticas e tendência da Matemática.

De modo geral, os alunos falaram da importância da proposta para o aprendizado, pois aumentou a participação nas aulas de forma significativa e a apropriação de ferramentas que podem facilitar e ampliar outras maneiras de alunos se conectarem com o saber. Além disso, promovem maior reflexão sobre os conhecimentos, as questões sociais a partir dos dados coletados, numa prática dinâmica, capaz de envolver os alunos ainda mais, nas aulas.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Marcos**. Jogando e construindo matemática.** São Paulo: Vap, 1999.

BACICH, Lilian; MORAN, José (org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora:** uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

BARBOSA, Eduardo Fernandes; MOURA, Dácio Guimarães de. Metodologias ativas de aprendizagem na educação profissional e tecnológica. **Boletim Técnico do Senac**, v. 39, n. 2, p. 48-67, 2013. Porto Alegre: Penso, 2018.

BEHRENS Marilda Aparecida. **Formação continuada e a prática pedagógica**. Curitiba: Champagnat, 1996.

BERBEL, Neusi Aparecida Navas. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. **Semina: Ciências Sociais e Humanas**, Londrina, v. 32, n. 1, p. 25-40, jan. /jun. 2011.

BRASIL, Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasília: MEC, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC,2018 Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/06/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>.

DIESEL, A. BALDEZ, A. L.S. MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de Ensino: uma abordagem teórica. Pub. **Revista THEMA**. Disponível em http://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema. Acesso em: 25 fev. 2022.

FREIRE, Paulo **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. 33. ed. São Paulo: Paz e terra, 1997.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra, 2008.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2011.

GAETA, Cecília; MASETTO, Marcos Tarciso. **O professor iniciante no ensino superior: aprender, atuar, inovar**. São Paulo: SENAC São Paulo, 2013.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. G. Resolução de Problemas: Teoria e Prática. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner; JUSTULIN, Andresa Maria. (org.). **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

SANTOS, Boaventura. **O paradigma emergente e a prática pedagógica**. Curitiba: Cham-pagnat, 1999.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica**. 1. ed. Campina: Papirus, 2008.

SKOVSMOSE, O**. Educação Matemática Crítica: a questão da democracia**. 3. ed. Campinas: Papirus, 2001.

THIOLLENT M**. Metodologia da pesquisa-ação**.São Paulo: Cortez; 2003.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução Paulo Henrique Colonese. – 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZUFFY, E. M.; ONUCHIC, L. R. O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os Processos Cognitivos Superiores. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n.11, p.79-97, 2007.

CAPÍTULO 2

MATEMÁTICA E ARTE: UMA COMBINAÇÃO PERFEITA

Data de aceite: 03/04/2023

Isaías Pessoa da Silva
Universidade Estadual da Paraíba – UEPB
http://lattes.cnpq.br/5255794473950988

Cláudia Costa dos Santos
Universidade Federal da Paraíba – UFPB
http://lattes.cnpq.br/6365915484395992

RESUMO: A integração dos componentes curriculares de Arte e Matemática é um tema que merece destaque nas discussões entre aqueles que buscam novas abordagens no processo de ensino e aprendizagem, pois temos novo perfil de alunos, diferente de algumas décadas passadas. Esses novos sujeitos são mais interessados pelo novo, o dinâmico, deixando as abordagens tradicionais de ensino em segundo plano. Diante dessa problemática**,** buscamos discutir nesse artigo a importância da integração entre esses componentes curriculares com projetos interdisciplinares e diversificados. Portanto, o principal objetivo desse artigo é relatar uma experiência bem sucedida na integração do ensino de Matemática e Arte, oportunizando aos alunos uma visão mais ampla dos dois componentes curriculares em situações simultâneas de aprendizagem. Para tanto, nos apoiamos nas ideias de Van de Walle (2009), Barbosa (2012), Ferraz; Fusari (2009), Freire (1998), dentre outros. Tivemos como sujeitos 21 alunos de uma turma de 7º Ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal de Ensino Fundamental João Nepomuceno de Oliveira, localizada no município de Serra da Raiz/PB, que desenvolveram atividades propostas numa sequência didática que teve um total de 8 horas/aulas com exploração de conteúdos de Matemática e de Arte, utilizando o Triângulo de Sierpinski e Tangram como suporte para as atividades. Ao término das atividades, concluímos que o envolvimento da Arte com a Matemática, além de agregar muito conhecimento acadêmico/científico, é uma combinação harmoniosa, delicada, encantadora e apaixonante, que deve ser mais explorada nos ambientes de aprendizagens.
PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Arte, Ensino de Matemática, interdisciplinaridade.

ABSTRACT: The integration of the curricular components of Art and Mathematics is a theme that deserves to be highlighted in the discussions between those who seek new approaches in the teaching and learning process, as we have a new profile

of students, different from a few decades ago. These new subjects are more interested in the new, the dynamic, leaving traditional teaching approaches in the background. Faced with this problem, we seek to discuss in this article the importance of integrating these curricular components with interdisciplinary and diversified projects. Therefore, the main objective of this article is to report a successful experience in the integration of Mathematics and Art teaching, providing students with a broader view of the two curricular components in simultaneous learning situations. For that, we rely on the ideas of Van de Walle (2009), Barbosa (2012), Ferraz; Fusari (2009), Freire (1998), among others. We had as subjects 21 students from a 7th grade class of Elementary School at Escola Municipal de Ensino Fundamental João Nepomuceno de Oliveira, located in the municipality of Serra da Raiz/PB, who developed proposed activities in a didactic sequence that had a total of 8 hours/ classes exploring Mathematics and Art**,** subjects using the Sierpinski Triangle and Tangram as a support for the activities. At the end of the activities**,** we concluded that the involvement of Art with Mathematics, in addition to adding much academic/scientific knowledge, is a harmonious, delicate, charming and passionate combination, which should be further explored in learning environments.
KEYWORDS: Teaching of Art, Teaching of Mathematics, interdisciplinarity.

1 | INTRODUÇÃO

Sem dúvidas a Matemática é uma das Ciências mais belas que conhecemos. A beleza representada nos padrões exuberantes mostrados pelas formas presentes na natureza e também às produzidas pela mão humana. Desde as formais mais delicadas até os padrões mais complexos existes.

Nos dias atuais, os padrões descobertos pelos pesquisadores contribuíram para desenvolvimento de outras ciências além da Matemática. Por exemplo, na medicina houve um importante avanço, no desenvolvimento de medicamento, entendimentos de comportamentos de certos vírus, reprodução, desenvolvimento de vacinas, etc.

Nas Artes, por exemplo, a Matemática apresenta um papel de destaque. Desde a antiguidade se buscava um padrão matemático nas obras de artes. O número de ouro, por exemplo, foi sinal de beleza e harmonia por muito tempo, assim como a simetria nas figuras desenhadas. Esses exemplos nos confirmam a presença da Matemática nas Artes e também o contrário, a forte presença das Artes na Matemática.

Diante dessa constatação, da necessidade da interdisciplinaridade e da inovação nas metodologias de ensino, os autores desse artigo decidiram elaboraram uma sequência didática envolvendo esses dois componentes curriculares: Matemática e Arte. Tal sequência foi planejada para um total de 8 aulas em conjunto, procurando trabalhar alguns conceitos em geometria utilizando simetria de figuras, exploração da visão artística-cultural dos alunos, entre outros aspectos.

Neste sentido, o principal objetivo desse artigo é relatar uma experiência bem sucedida na integração do ensino de Matemática e Arte, oportunizando aos alunos uma visão mais ampla desses dois componentes curriculares em situações simultâneas de aprendizagem.

1.1 Os desafios do ensino de Matemática

O componente curricular de Matemática sempre apresentou uma roupagem histórica de desamor por partes dos alunos. Poucos declaram amor a essa ciência, ao ponto que muitas pessoas, até mesmo adultos, orgulhem-se de expressar o seu dissabor em relação a ela. Esse é um problema que afeta a maioria dos alunos em todos os níveis de ensino e um fator determinante até mesmo no momento em que se vai escolher qual curso superior ou profissão irá seguir.

Portanto, o desafio para os professores é conseguir despertar nos estudantes o gosto pela Matemática, devido ao fato de uma parte dessas pessoas já terem uma ideia formada sobre o que é Matemática, rotulando-a como um campo de estudo difícil e que não é possível dominar esse conhecimento. Por isso torna-se cada vez mais necessário dar uma nova "cara" à Matemática, com uma abordagem mais moderna, utilizando-se materiais concretos, jogos educativos, *softwares*, e por meio da arte. Essa seria uma Matemática mais parecida com a juventude moderna, mas sem perder toda a essência do conhecimento matemático.

A Matemática teve uma função decisiva e determinante na construção do desenvolvimento humano, que surgiu para resolver problemas cotidianos da humanidade. É uma ciência construída pelo homem, que tem como uma de suas funções fazer entender procedimentos naturais e "traduzi-los" para símbolos, números e operações abstratas que permitam entendê-las e, a partir daí, resolvemos problemas que afligem a humanidade (VAN DE WALLE, 2009).

Dessa maneira entendemos a Matemática como uma ciência necessária para o desenvolvimento da humanidade e que sem ela a solução de muitos problemas seria bem mais complicada e que não teríamos conseguido jamais compreender os padrões de beleza que temos, tanto os que foram produzidos pelo homem, quanto os que a natureza se encarregou de caprichar.

1.2 O despertar para a Arte

Arte é estimular o fazer artístico, trabalhando a releitura, não como cópia, mas, como interpretação, transformação e criação. Segundo Barbosa (2005, p. 144) "O importante é que o professor não exija representação fiel, pois a obra observada é suporte interpretativo e não modelo para os alunos copiarem".

De acordo com Barbosa (2012), as principais mudanças no Ensino da Arte foram: Necessidade de ampliar os modos de ler Arte, pois não se trata mais de perguntar o que o artista quis dizer com sua produção, mas o que essa produção nos diz; Compromisso com a diversidade cultural e com mais atenção à diversidade de códigos em função de raças, etnias, gêneros, classe social e outras. Outro aspecto que não deve ser esquecido é a formação estética e artística das crianças (e, também, a nossa), com um enfoque crítico, problematizador, reflexivo e plural, que estimule o conhecimento local, sem perder de vista seu potencial de universalidade. A convivência com os objetos, artefatos e meios artísticos ajuda a criança e o jovem a aprenderem a apreciar a arte produzida pelos artistas de seu e de outros países, enquanto continuam a se expressar pessoalmente em atividades artísticas. Apreciação é sempre um ato criativo e imaginativo e não, como ainda muitos pensam uma manifestação de passividade (FERRAZ; FUSARI, 2009, p. 176).

Arte é uma descoberta da capacidade crítica dos alunos, tornando assim um componente curricular importantíssima na escola, pois exercita o ser crítico do aluno, função de fundamental importância no mundo educacional, como também trabalha a desenvoltura, a timidez, a oralidade, entre outros, diante de todas essas habilidades favorecida pelo ensino da arte, destaca-se o valor da interdisciplinaridade no ensino aprendizagem. A interdisciplinaridade, apontada nos anos 1990 para o Ensino da Arte, não se confunde com a polivalência da Educação Artística dos anos 1970, enquanto caminho metodológico, a polivalência não vem se coadunando com a perspectiva contemporânea do aprender e ensinar Arte em função da superficialidade do conhecimento das linguagens artísticas. Portanto, a interdisciplinaridade é um processo que demanda tempo, estudo conjunto, discussão, análise e síntese.

Para que possamos integrar as áreas de conhecimentos com as linguagens artísticas na formação de crianças, a presença do Ensino da Arte na escola é necessária e a pesquisa é primordial para um ensino consistente. É necessário que o professor exercite o seu processo criador. Para isso, é oportuno considerar que “não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino”, conforme observa Freire (1998, p. 32).

1.3 Matemática e Arte: uma relação harmônica

O envolvimento dessas duas ciências (Matemática e Arte), se destaca desde os povos antigos. A busca por símbolos harmônicos e elegantes para representar elementos matemáticos sempre foi destaque em escritas antigas e a maioria deles permanecem até os dias atuais. As figuras geométricas, quase que em sua totalidade, são figuras belas e elegantes. Observando a Geometria dos Fractais, nos deparamos com uma beleza particular do Triângulo de Sierpinski. Esse triângulo leva o nome do seu descobridor, o matemático polonês Waclav Sierpinsk (1882 – 1969), como nos mostra a figura a seguir.

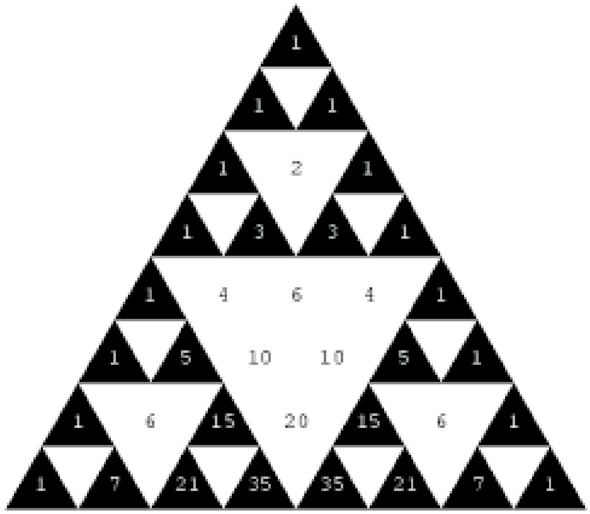


Figura 1: Construção do triângulo de Sierpinski partindo do Triangulo de Pascal.

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm48/images/s1img676.gif. Acesso em 26/07/2016.

Analisando mais detalhadamente esse triângulo, percebemos o quanto ele é harmonioso tornando o estudo dos Fractais fascinante aos olhos dos alunos. O triângulo da Figura 1 foi construído a partir do triângulo de Pascal, o que torna sua construção ainda mais interessante.

Uma outra combinação de conteúdos que torna o ensino de Matemática e Arte agradável e harmônico entre si é o uso do jogo chinês de origem milenar muito conhecido, denominado Tangram. O jogo é composto por 7 peças (figuras geométricas), sendo 2 triângulos grandes, 2 triângulos pequenos, 1 triângulo médio, 1 quadrado e 1 paralelogramos, como podemos conferir na Figura 2 a seguir. Esse jogo tem a capacidade de encantar a maioria dos alunos devido a suas possibilidades de construção de figuras geométricas, artísticas, de animais e figuras diversas, tornando tanto o ensino de Arte quanto o de Matemática mais prazeroso.

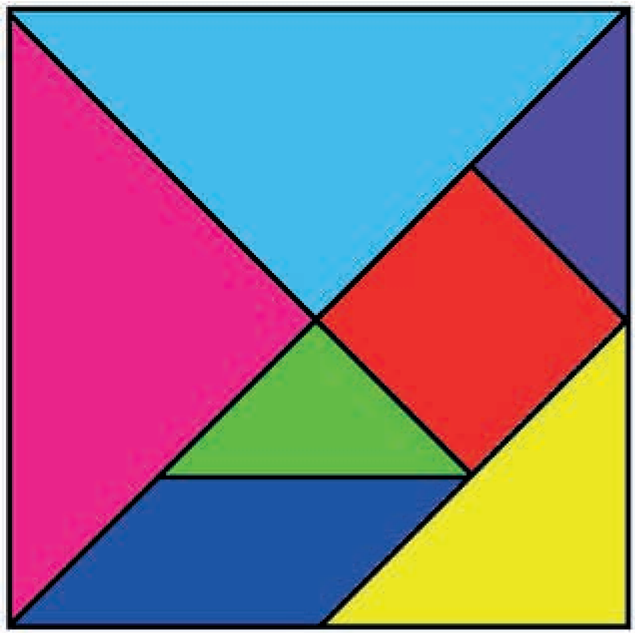


Figura 2: Estrutura do Tangram

Fonte: http://www.espacoeducar.net/2011/07/modelos-e-moldes-de-tangram-para.html

A integração Arte e Matemática é um assunto que merece destaque nas discussões entre aqueles que buscam novas metodologias de ensino e aprendizagem, visto o novo perfil de alunos que temos na sociedade contemporânea que buscam cada vez mais ludicidade e dinamismo.

2 I METODOLOGIA

Neste momento vamos descrever a metodologia utilizada pelos autores para desenvolver a sequência didática e atingirem os objetivos estabelecidos.

A sequência didática teve um total de 8 horas/aulas e foi desenvolvida com 21 alunos de uma turma de 7º Ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal de Ensino Fundamental João Nepomuceno de Oliveira, localizada no município de Serra da Raiz/PB, local onde os autores ministram aulas.

O primeiro momento da atividade se deu com o planejamento da sequência didática, o estabelecimento dos objetivos, a proposição das atividades, a duração, assim como a avaliação do envolvimento e aquisição de conhecimento dos alunos durante as atividades.

O segundo momento ocorreu com uma exposição do tema aos alunos, a apresentação da Geometria Fractal com o auxílio de vídeos, e o envolvimento dos dois componentes curriculares: Matemática e Arte.

No terceiro momento, após o contato com os Fractais e conhecerem o Triângulo de Sierpinsk eles colocaram “a mão na massa” e reproduziram, em equipes, o triângulo como veremos na seção de “Resultados e Discussão”.

O quarto momento buscou explorar os conceitos da geometria plana utilizando como suporte o jogo chinês Tangram. Os alunos tiveram a oportunidade de explorar o jogo em equipes proporcionando uma saudável discussão sobre algumas propriedades do jogo assim como a exploração de conteúdos matemáticos. Neste momento os alunos tiveram a oportunidade de explorar a visão artística construindo novas figuras utilizando as peças do Tangram.

Por fim foi montado um painel na sala de aula com os trabalhos organizados pelos alunos gerando um momento agradável de observação, discussão, diálogo e avaliação.

Na parte final do nosso artigo faremos uma breve análise das atividades desenvolvidas, as contribuições trazidas ao ensino por essa integração de componentes curriculares, bem como as considerações dos autores sobre a sequência didática.

3 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Apresentaremos nesta seção os resultados das atividades desenvolvidas pelos alunos como também o envolvimento dos mesmos no trabalho em equipe.

É fato que não tivemos tempo hábil para analisar em detalhes o impacto que a sequência didática tenha trazido para cada um no sentido de aquisição de novos conhecimentos e/ou reforço aos conhecimentos já adquiridos anteriormente. No entanto esse curto período de tempo foi suficiente para percebermos a importância de momentos como esses para tentar fugir do tradicionalismo nas salas de aulas.

Durante as aulas percebemos o envolvimento dos alunos na construção do triângulo de Sierpinsk com algumas “pitadas” artísticas pessoais, como mostradas nas figuras a seguir.

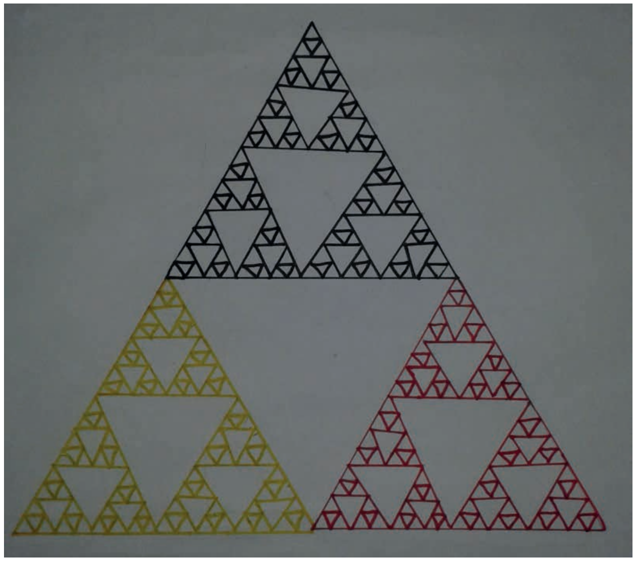


Figura 3: Construção do Triângulo de Sierpinsk.

Fonte: imagem capturada pelos autores

Assim como na atividade com triângulos a exploração da Geometria e da Arte por meio do Tangram teve excelentes resultados no envolvimento dos alunos, como visto nas imagens a seguir.

Figura 4: Atividades em equipes com o Tangram

Fonte: imagem capturada pelos autores

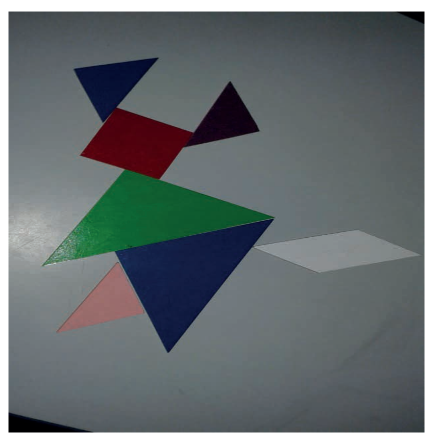


Figura 5: Atividades com o Tangram

Fonte: imagem capturada pelos autores

Finalizamos as atividades com a montagem de um painel com os trabalhos construídos pelos alunos dentro da própria sala de aula, ficando em exposição para os demais alunos e professores da escola.

Figura 6: Painel com os trabalhos dos alunos

Fonte: imagem capturada pelos autores

4 | CONCLUSÕES

Os momentos de aprendizagem devem ser valorizados e promovidos com responsabilidade, planejamento, organização, compromisso e partilha. A interação entre os diferentes ramos da Ciência se faz necessário para suprir as necessidades educacionais atuais e promover de maneira rica e proveitosa esses momentos de aprendizagem.

No decorrer do desenvolvimento das atividades da sequência didática ficou evidente para os autores a necessidade de momentos como esses para o melhor envolvimento dos alunos e dos dois componentes curriculares, construindo assim um currículo mais sólido agregando mais significados aos conteúdos estudados.

Sabemos que nem sempre é possível trabalhar de maneira interdisciplinar ou que não seja fácil planejar atividades como essas, no entanto asseguramos que vale muito a pena inovar as práticas pedagógicas, de maneira a proporcionar uma metodologia diferenciada para os discentes, dessa forma, tornar o estudo mais prazeroso e se apoiar cada vez mais no trabalho em equipe, pois ambos são grandes aliados para fortalecer o processo de ensino e aprendizagem.

Os artefatos tecnológicos que temos hoje a disposição de todos, sobretudo da juventude, acabam por desviar a atenção dos alunos das explicações expostas pelos professores, causando desconforto geral. Aulas diversificadas e a utilização do cotidiano do educando são necessárias para tentar resgatar a atenção desses alunos, fazendo com que eles trabalhem mais e explorem o “aprender fazendo” na própria sala de aula.

O envolvimento da Arte com a Matemática, além de agregar muito conhecimento acadêmico/científico, é uma combinação harmoniosa, delicada, encantadora e apaixonante, podendo ser observada tanto nas construções humanas quanto nas belas formas encontradas na natureza seguindo padrões espetaculares.

REFERÊNCIAS

BARBOSA Bastos, Ana Amália. ***Releitura, citação, apropriação ou o quê?*** Capítulo 5 – Arte/ Educação Contemporânea; Ana Mae Barbosa. Cortez- SP, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática: primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental**. Brasília. (2001).

BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa.** ***A arte no ciclo de alfabetização.*** Caderno 06. Brasília: MEC, SEB, 2015.

SALLUM, Élvia Mureb. **Fractais no ensino médio.** Revista do Professor de Matemática. Nº 57, 2ºquadrimestre de 2005.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e Aplicação em Sala de Aula**. 6ª edição. Tradução de Paulo Henrique Colonese. Editora Artmed, 2009.

CAPÍTULO 3

TÓPICOS DE ÁLGEBRA LINEAR E O TEOREMA DE CONVERGÊNCIA DA REDE NEURAL PERCEPTRON

Data de aceite: 03/04/2023

David Hapner Barzotto
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Simone Aparecida Miloca
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Agradecemos a Fundação Araucaria pela bolsa no projeto PIBIC.

RESUMO: A Álgebra Linear tem uma aplicabilidade em um vasto campo das ciências puras e aplicadas, como matemática, física, computação e as engenharias. Este trabalho tem o intuito de mostrar resultados algébricos utilizados na demonstração do teorema de convergência da primeira grande Rede Neural Artificial (RNA), o Perceptron. Mostraremos que o Perceptron sempre irá encontrar um hiperplano separador para a classificação binária de dados.
PALAVRAS-CHAVE: Álgebra Linear; Perceptron; Redes Neurais Artificiais (RNAs).

1 I INTRODUÇÃO

As Redes Neurais Artificiais (RNAs) fazem parte do campo de estudo da Inteligência Artificial (IA), porém, também estão presentes em outras áreas do conhecimento tais como computação evolucionária, metaheurística e machine learning, sendo capazes de resolver os mais diversos problemas, como classificação, regressão e clusterização. Possuem inspiração nas Redes Neurais Biológicas (RNBs) e seus principais filamentos, como o dendrito, o corpo celular e o axônio. A Figura 1 exemplifica um modelo biológico e um artificial com neurônios e conexões direcionadas entre eles. Devido esta motivação biológica, os elementos de processamento de uma rede neural são denominados neurônios ou nós, sendo uma unidade de processamento de informações fundamentais para o funcionamento da rede. A partir disso, pode-se definir três conceitos básicos que caracterizam uma rede neural artificial:

- Um padrão da rede chamado

de pesos sinápticos, também conhecidos por conexões sinápticas que, unidos com uma operação binária, combinam os dados de entrada pertencentes a um vetor **x** com um vetor dos pesos sinápticos **w** montando um hiperplano separador das classes dos dados na forma de $\mathbf{w}^T \mathbf{x} = 0$;

- Uma regra de agregação de dados que correlaciona as entradas dadas aos neurônios, ponderados com suas respectivas conexões sinápticas;
- Uma função chamada de ativação com o intuito de modelar o cálculo dos dados podendo gerar funções não lineares ou condicionar a saída do neurônio em um intervalo determinado.

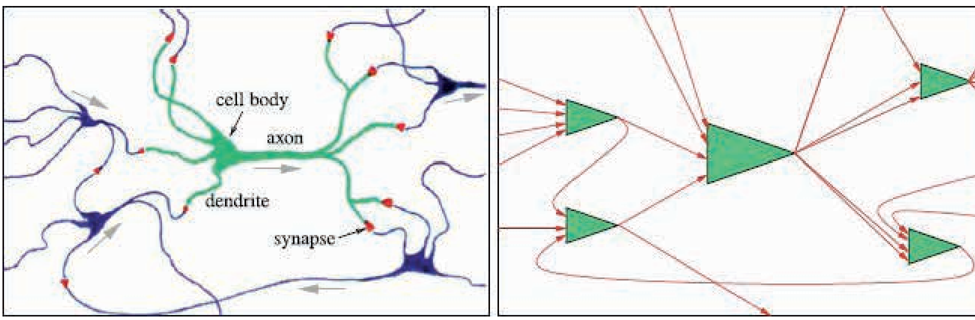


Figura 1: Modelo biológico e modelo artificial de uma rede neural.

Fonte: Extraído de Ertel (2017).

A Figura 2 exemplifica o modelo de um neurônio. Tem-se X_1, X_2, ..., X_m sinais de en- trada conectados ao neurônio k que são multiplicados pelos pesos sinápticos, W_{k1}, W_{k2}, ..., W_{km}, incluindo uma variável polarização (bias) b_k que é adicionada ao somatório da função de ativação φ, com o intuito de aumentar o grau de liberdade desta função e, consequentemente, a capacidade de aproximação da rede.

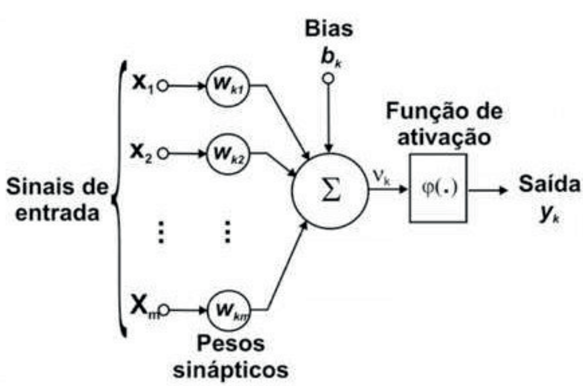


Figura 2: Modelo de um Neurônio Artificial.

Fonte: Extraído de Haykin (2001).

Matematicamente, um neurônio k é escrito como

$$y_k = \varphi\left(\sum_{j=1}^{m} W_{kj}\, X_j + b_k\right)$$

onde, $\varphi(.)$ é a função de ativação e y_k são os sinais de saída do neurônio.

Segundo Haykin (2001), o Perceptron é a rede neural mais simples. Foi construído com o foco de solucionar classificações binárias e é uma rede considerada linear, de uma camada apenas, ou seja, supondo que se tenha um conjunto de entradas e se conheça suas respectivas saídas, o Perceptron deve aprender os padrões e classificar corretamente novas entradas. Este trabalho tem por objetivo apresentar o teorema de convergência do Perceptron com a adaptação baseada em Haykin (2001), escrevendo sobre os principais conceitos de Álgebra Linear necessários para a prova do teorema.

2 I TÓPICOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Esta seção tem por objetivo escrever conceitos e resultados de Álgebra Linear utilizados na parte que envolve o Teorema de Convergência do Perceptron.

O texto que segue refere-se a espaços vetoriais reais. Temos interesse particular no espaço vetorial euclidiano, que é um espaço vetorial real, de dimensão finita, em que está definido um produto interno. As principais referências foram Poole (2003) e Steinbruch e Winterle (1995).

2.1 Dependência Linear em Espaços Vetoriais

Definição 1. Sejam $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ um conjunto de vetores de um espaço vetorial V e os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$, temos que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n$$

é dito uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$.

Exemplo 1. Sejam $\mathbf{v}_1 = (1, 5)$ e $\mathbf{v}_2 = (4, -1)$. Então $\mathbf{v} = (14, 7)$ é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ pois $\mathbf{v} = (14, 7) = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = 2(1, 5) + 3(4, -1)$.

A definição a seguir apresenta o conceito de dependência e independência linear entre vetores.

Definição 2. Seja V um espaço vetorial e $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$. S é dito linearmente dependente (LD) se existirem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, com pelo menos um $\alpha_i \neq 0$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

S é dito linearmente independente (LI) se não for linearmente dependente.

2.2 Produto Interno e Norma

Definição 3. Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno é uma função

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(u, v) \to \langle u, v\rangle$$

que satisfaz as propriedades, para todos u, v, w em V e $\alpha \in \mathbb{R}$

i) $\langle u, u\rangle \geq 0$, e $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

ii) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle$

iii) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

iv) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

O Exemplo 2 é um produto interno, também chamado de produto escalar usual de vetores em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2. Sejam $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *e* $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Tem-se

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = \mathbf{u}\mathbf{v}^T.$$

Em um espaço vetorial V com produto interno, podemos definir norma de um vetor $v \in V$ que provém deste produto interno como

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}. \tag{1}$$

Exemplo 3. Em $\mathbb{R}^2$, seja $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$. A norma é dada por,

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Assim, temos que dado um vetor $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$, a norma euclidiana é definida por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}.$$

2.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Teorema 4. *Seja V um espaço vetorial com produto interno, então:*

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||\ ||v||,\ \forall u, v \in V.$$

Prova. Os vetores u e v serão LD ou LI. Faremos a prova considerando cada uma destas situações. Caso 1. Sejam u e v linearmente dependentes, logo temos $\alpha \in$ R tal que $u = \alpha v$. Então,

$$|\langle u,v\rangle| = |\langle \alpha v, v\rangle| = |\alpha|\langle v,v\rangle = |\alpha|\left(\sqrt{\langle v,v\rangle}\right)^2 = |\alpha|\sqrt{\langle v,v\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle}$$

usando a propriedade (ii) descrita na Definição 3 e a igualdade (1), temos,

$$|\alpha|\sqrt{\langle v,v\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle v,v\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{\langle \alpha v,\alpha v\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} = ||u||\;||v||.$$

Segue que vale a igualdade,

$$|\ \langle u,v\rangle\ | = ||u||\;||v||.$$

Caso 2. Sejam u e v linearmente independentes, logo, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ em que $u+\alpha v \neq 0$, então $\langle u + \alpha v, u + \alpha v\rangle > 0$, com isso,

$$\langle u + av, u + av\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,av\rangle + \langle au,v\rangle + \langle av,av\rangle > 0.$$

Pela Definição 3 teremos

$$\langle u,u\rangle + a\langle u,v\rangle + a\langle u,v\rangle + a^2\langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle + 2a\langle u,v\rangle + a^2\langle v,v\rangle > 0.$$

A inequação de grau 2 está em função de α e não apresenta raızes reais, apenas complexas, o seu discriminante Δ deve ser menor que 0, ou seja,

$$\Delta < 0 \Rightarrow (2\langle u,v\rangle)^2 - 4(\langle u,u\rangle)(\langle v,v\rangle) < 0 \Rightarrow 4\langle u,v\rangle^2 < 4(\langle u,u\rangle)(\langle v,v\rangle) \Rightarrow \langle u,v\rangle^2 < \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle$$

podemos extrair a raiz quadrada da inequação,

$$\sqrt{(\langle u,v\rangle^2)} < \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} \Rightarrow \langle u,v\rangle < \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle}.$$

Por (1) temos,

$$|\ \langle u,v\rangle\ | < ||u||\;||v||.$$

Pelo Caso 1 e Caso 2 temos a validade da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\ \langle u,v\rangle\ | \leq ||u||\;||v||.$$

2.4 Hiperplanos

Definição 5. Um hiperplano H do $\mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$H = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b\ ;\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

As Figuras 3 e 4 exemplificam hiperplanos em $\mathbb{R}^2$ (retas).

Um hiperplano divide $\mathbb{R}^n$ em dois semiespaços H_1 e H_2.

$$H_1 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b\ ;\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

$$H_2 = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b\ ;\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Um hiperplano pode ser escrito na notação de produto escalar, como

$$\mathbf{a}^T\mathbf{x} = 0$$

onde $\mathbf{a} = (b, a_1, ..., a_m)^T$ e $\mathbf{x} = (1, x_1, ..., x_m)^T$.

A próxima definição traz o conceito de conjuntos linearmente separáveis.

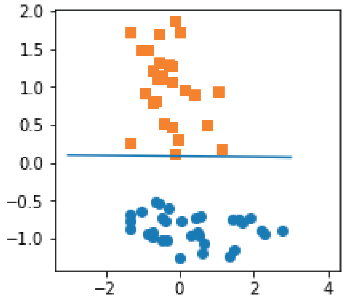


Figura 3: Exemplo de Hiperplano.

Fonte: Produzido pelo autor.

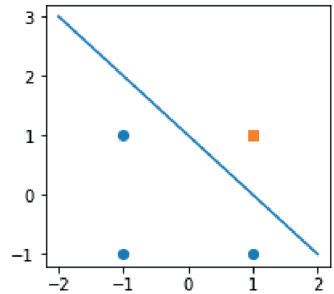


Figura 4: Hiperplano para a função AND booleana.

Fonte: Produzido pelo autor.

Definição 6. Dois conjuntos $C_1 \subset \mathbb{R}^{m+1}$ e $C_2 \subset \mathbb{R}^{m+1}$ são linearmente separáveis se existir $\mathbf{a} = (b, a_1, ..., a_m)^T$, onde $b, a_1, ..., a_m$ são números reais, tais que

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} = [1, x_1, ..., x_m]^T \in C_1$$

e

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq 0, \forall \mathbf{x} = [1, x_1, ..., x_m]^T \in C_2$$

em que b é o coeficiente linear do hiperplano, que tem o nome de bias quando se trata de hiperplanos de RNAs.

3 | REDE NEURAL PERCEPTRON

Formalmente descrito por Fausett (1994), Haykin (2001) e Kovács (2006), o Perceptron, criado e idealizado por Frank Rosenblatt, segue os parâmetros da álgebra booleana, ou seja, AND e OR, logo um senso binário {0,+1} ou bipolar {-1,+1}. No caso do Perceptron, seu algoritmo iterativo de ajuste de pesos é calculado como mostra o Algoritmo 1. A ideia principal do Perceptron é classificar duas classes linearmente separáveis, C_1 e C_2. Consequentemente, tal classificação só é possível pois a rede gera um hiperplano separador em m-dimensões descrito como $\sum_{i=1}^{m} wi(n)xi(n) + b(n) = 0$ ou na forma de produto interno $\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) = 0$, em que n é o número de iterações feitas. O funcionamento se dá pela seguinte forma:

[1] Caso o *n*-ésimo termo de **x** seja classificado corretamente na *n*-ésima iteração, então o vetor **w** não é corrigido.

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n), \text{ se } \mathbf{w}^T \mathbf{x} > 0. \text{ Logo } \mathbf{x}(n) \in C_1 \quad (2)$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n), \text{ se } \mathbf{w}^T \mathbf{x} \leq 0. \text{ Logo } \mathbf{x}(n) \in C_2. \quad (3)$$

[2] Se o passo 1 for falso, faz-se as seguintes atualizações.

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \eta(n)\mathbf{x}(n), \text{ se } \mathbf{w}^T\mathbf{x} > 0. \text{ Logo } \mathbf{x}(n) \square C_2 \tag{4}$$

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \eta(n)\mathbf{x}(n), \text{ se } \mathbf{w}^T\mathbf{x} \leq 0. \text{ Logo } \mathbf{x}(n) \square C_1 \tag{5}$$

onde η é um parâmetro denominado taxa de aprendizado e geralmente é um valor entre zero e um.

Entrada: Inicializar o vetor de pesos **w** e o bias *b*;

Inicie a taxa de aprendizado η ($0 < \eta \leq 1$);

while *Critério de Parada não satisfeito* **do**

for *Para cada par de dados de treinamento* (x_i, d_i) **do**

Execute ;

$$y = b + \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$$

if $y = d$ **then**

ocorre [**1**] ;

$w_i(novo) = w_i(atual)$;

$b(novo) = b(atual)$;

else

ocorre [**2**] ;

Atualizar os pesos e a tendência;

$w_i(novo) = w_i(atual) + \eta x_i$; $b(novo) = b(atual) + \eta$;

end end

Teste a condição de parada.

end

Algoritmo 1: Algoritmo *Perceptron*

3.1 Exemplo de Funcionamento do Perceptron

Exemplo 4. Utilize a rede neural Perceptron para classificar a função lógica "AND", cujas entradas e saídas são mostradas na Tabela 1. Considere a taxa de aprendizado η como sendo fixo e igual a 1, o valor de entrada para o bias também 1, com peso $b(n) = 0$.

	Entrada			Saída
	$x_1(n)$		$x_2(n)$	d_i
E1	0		0	0
E2	0		1	0
E3	1		0	0
E4	1		1	1

Tabela 1: Tabela para a função AND

Fonte: Produzido pelo autor.

Primeira Iteração

1. Primeiro padrão E1 é apresentado à rede.

$$y(1) = b + \sum_{i=1}^{2} w_i\,(1)x_i(1) = 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0, \text{ assim, } d(1) = y(1) = 0.$$

Como $d(1) = y(1)$, os pesos não se atualizam, logo,

$$w_1(2) = w_1(1) = 0,\ w_2(2) = w_2(1) = 0,\ b(2) = b(1) = 0.$$

2. Segundo padrão E2 é apresentado à rede.

$$y(2) = b(2) + \sum_{i=1}^{2} w_i\,(2)x_i(2) = 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 = 0. \text{ Assim, } d(2) = y(2) = 0$$

Como $d(2) = y(2)$, os pesos não se atualizam, assim,

$$w_1(3) = w_1(2) = 0,\ w_2(3) = w_2(2) = 0,\ b(3) = b(2) = 0.$$

3. Terceiro padrão E3 é apresentado à rede.

$$y(3) = b(3) + \sum_{i=1}^{2} w_i\,(3)x_i(3) = 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0, \text{ assim, } d(3) = y(3) = 0.$$

Como $d(3) = y(3)$, os pesos não se atualizam, logo,

$$w_1(4) = w_1(3) = 0,\ w_2(4) = w_2(3) = 0,\ b(4) = b(3) = 0..$$

4. Quarto padrão E4 é apresentado à rede.

$$y(4) = b(4) + \sum_{i=1}^{2} w_i\,(4)x_i(4) = 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0, \text{ logo, } d(4) \neq y(4).$$

Como $d(4) \neq y(4)$, os pesos são atualizados, logo temos,

$$w_1(5) = w_1(4) + \eta(4)x_1(4) = 0 + 1 \times 1 = 1$$

$$w_2(5) = w_2(4) + \eta(4)x_2(4) = 0 + 1 \times 1 = 1$$

$$b(5) = b(4) + \eta(4) \times 1 = 0 + 1 \times 1 = 1.$$

A Figura 5 mostra os resultados da primeira iteração. Após 10 épocas (iterações) tem-se o hiperplano separador que é mostrado na Figura 6, cuja equação final fica $2x_1+x_2-2=0$.

$d(n)$	$x_1(n)$	$x_2(n)$	$w_1(n)$	$w_2(n)$	$bias$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0
-	-	-	1	1	1

Figura 5: 1ª Iteração do Perceptron.

Fonte: Produzido pelo autor.

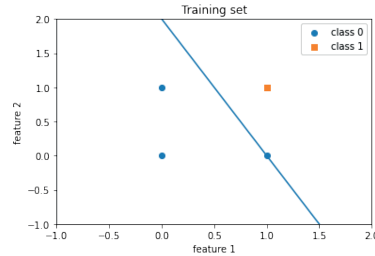


Figura 6: Hiperplano Perceptron - função AND.

Fonte: Produzido pelo autor.

4 I TEOREMA DE CONVERGÊNCIA DO PERCEPTRON

Teorema 7. *Sejam* **x** *um vetor de entrada,* **w** *o vetor peso, 1 o valor de entrada para o bias e n o passo por iteração. Tome as classes C_1 e C_2 linearmente separáveis por um hiperplano* $\mathbf{w}^T\mathbf{x} = 0$*. Então o algoritmo Perceptron converge para um n_{max} de iterações para qualquer inicialização do vetor de pesos* **w***, sem qualquer critério de parada preestabelecido, com isso gerando um hiperplano separador através de um n_{max}:*

$$n_{max} = \frac{\beta \|\mathbf{w}_0\|^2}{\alpha^2}.$$

Nossa notação considera

$\mathbf{x}(n) = [1, x_1(n), x_2(n), x_3(n), ..., x_m(n)]^T$ e $\mathbf{w}(n) = [b(n), w_1(n), w_2(n), w_3(n), ..., w_m(n)]^T$

onde n é a n-ésima iteração e a saída da combinação linear é dada por

$$y(n) = \sum_{i=0}^{m} w_i(n)\, x_i(n) = \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n).$$

Definimos $w_0(n) = b(n)$. Para n fixo, $\mathbf{w}^T\mathbf{x} = 0$ descreve um hiperplano separador de duas classes C_1 e C_2. Como os dados de entrada das duas classes C_1 e C_2 são linearmente separáveis, então existe um subconjunto de vetores de treinamento $\mathbf{x}_1(n) = X_1 \in C_1$ e outro subconjunto $\mathbf{x}_2(n) = X_2 \in C_2$ sendo $X_1 \; U \; X_2 = X$, o conjunto X de treinamento completo. Dados tais vetores de entrada, os pesos serão ajustados de modo que as classes sejam linearmente separáveis,

$$\mathbf{w}^T\mathbf{x} > 0, \forall x \in C_1 \qquad e \qquad \mathbf{w}^T\mathbf{x} \leq 0, \forall x \in C_2.$$

Prova. Seja $\eta(n) = \eta > 0$, em que η é uma constante independente do número de iterações. Tomemos $\eta = 1$, para termos a regra de adaptação com incremento fixo para o Perceptron. Considere a condição inicial $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$ e suponha que $\mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n) < 0$ e $\mathbf{x}(n) \in X_1$. Ou seja, considere por hipótese que o Perceptron classifica incorretamente os vetores de entrada **x**. Como a parte 1 do algoritmo de aprendizado é falsa, vamos para a segunda parte do Algoritmo de aprendizado, que é a a atualização dos pesos,

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \mathbf{x}(n),\ \forall \mathbf{x}(n) \in C_1. \tag{6}$$

Dado a condição de inicio $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(1) &= \mathbf{w}(0) = \mathbf{0} \\
\mathbf{w}(2) &= \mathbf{w}(1) + \mathbf{x}(1) \\
\mathbf{w}(3) &= \mathbf{w}(2) + \mathbf{x}(2) = \mathbf{w}(1) + \mathbf{x}(1) + \mathbf{x}(2) = \mathbf{0} + \mathbf{x}(1) + \mathbf{x}(2)
\end{aligned}$$

assim, iterativamente temos,

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{x}(1) + \mathbf{x}(2) + \mathbf{x}(3) + \cdots + \mathbf{x}(n) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}(i). \tag{7}$$

Como assumimos que C_1 e C_2 são linearmente separáveis, então existe uma solução $\mathbf{w}_0$ de $\mathbf{w}^T\mathbf{x} > 0$ para $\mathbf{x}(n) \in X_1$. Assim, podemos definir um número positivo α, tal que

$$a = \min_{\mathbf{x}(n) \in X_1} \mathbf{w}_0^T \mathbf{x}(n). \tag{8}$$

Multiplicando ambos os lados da equação 7 por $\mathbf{w}_0^T$, temos,

$$\mathbf{w}_0^T \mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}_0^T \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}(i) \tag{9}$$

Pela equação 8 e a equação 9, tem-se a desigualdade

$$\mathbf{w}_0^T \mathbf{w}(n+1) \geq na. \tag{10}$$

Agora, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 4), para os vetores $\mathbf{w}_0$ e $\mathbf{w}(n+1)$, teremos a desigualdade,

$$||\mathbf{w}_0||\ ||\mathbf{w}(n+1)|| \ \geq\ \mathbf{w}_0^T \mathbf{w}(n+1)$$

e elevando ao quadrado ambos os lados, encontramos,

$$||\mathbf{w}_0||^2\ ||\mathbf{w}(n+1)||^2 \ \geq\ [\mathbf{w}_0^T \mathbf{w}(n+1)]^2 \tag{11}$$

Como vale a desigualdade 10, notando que ambos os membros são não negativos, teremos,

$$||\mathbf{w}_0||^2\ ||\mathbf{w}(n+1)||^2 \ \geq\ [\mathbf{w}_0^T \mathbf{w}(n+1)]^2 \geq n^2\alpha^2.$$

Assim encontramos

$$||\mathbf{w}_0||^2\ ||\mathbf{w}(n+1)||^2 \ \geq n^2\alpha^2.$$

$$||\mathbf{w}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})||^2 \ \geq\ \frac{n^2\alpha^2}{||\mathbf{w}_0||^2} \tag{12}$$

A inequação 12 nos diz que toda parte acima da curva da função quadrática é uma possível solução mínima, como exemplifica a parte (**a**) da Figura 7.

Por outro lado, a partir da equação 6 temos que,

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mathbf{x}(k), \text{ para } k = 1, ..., n, \mathbf{x}(k) \in X_1. \quad (13)$$

Calculando a norma euclidiana temos

$$||\mathbf{w}(k+1)|| = ||\mathbf{w}(k) + \mathbf{x}(k)||. \quad (14)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação 14 temos que,

$$||\mathbf{w}(k+1)||^2 = ||\mathbf{w}(k) + \mathbf{x}(k)||^2 = ||\mathbf{w}(k)||^2 + 2\mathbf{w}^{\boldsymbol{T}}(k)\mathbf{x}(k) + ||\mathbf{x}(k)||^2.$$

Da suposição que o Perceptron classifica erroneamente o vetor de entrada $\mathbf{x}(k) \in X_1$, temos $\mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k) < 0$, logo, o fator $2\mathbf{w}^T(k)\mathbf{x}(k)$ é negativo, assim obtemos,

$$||\mathbf{w}(k+1)||^2 \leq ||\mathbf{w}(k)||^2 + ||\mathbf{x}(k)||^2, k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

ou de forma equivalente,

$$||\mathbf{w}(k+1)||^2 - ||\mathbf{w}(k)||^2 \leq ||\mathbf{x}(k)||^2, k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Como k é definido a partir de n e da hipótese $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$, temos que existe $\beta > 0$ tal que

$$\|\mathbf{w}(n+1)\|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{x}(k)\|^2 \leq n\beta$$

logo,

$$\|\mathbf{w}(n+1)\|^2 \leq n\beta. \quad (15)$$

A equação 15 nos mostra que a solução da curva linear é delimitada pela parte inferior da função, como é possível ver na parte (**b**) da Figura 7. Assim, define-se que β é um valor positivo dado pela equação 16

$$\beta = \max_{\mathbf{x}(k) \in X_1} ||\mathbf{x}(k)||^2. \quad (16)$$

Contudo, a inequação 15 é contrária a 12 para valores suficientemente grandes de n, como exemplifica a Figura 7. A inequação 15 diz que os pesos tendem a crescer infinitamente, o que de fato é impossível. A partir disso, inferimos que n não pode ser maior que um número máximo. Assim, ambas as inequações são satisfeitas com o sinal de igualdade, como ilustrado na parte (**c**) da Figura 7, em que o eixo das ordenadas é definido por $||\mathbf{w}(n)||^2$ e o eixo das abscissas é definido pelo número de iterações n da rede. Portanto,

$$\frac{n_{max}^2 \alpha^2}{\|\mathbf{w}_0\|^2} = n_{max}\beta \Leftrightarrow n_{max} = \frac{\beta\|\mathbf{w}_0\|^2}{\alpha^2}. \quad (17)$$

A prova foi feita para para $\eta(n) = 1$ pois facilita os cálculos, já que seu valor não é importante desde que seja positivo, e, caso $\eta \neq 1$, apenas escala os vetores padrões sem afetar seu hiperplano separador. Existindo um vetor solução $\mathbf{w}_0$, a atualização dos pesos deve chegar a um valor máximo de iterações n_{max} para gerar um hiperplano para as classes C_1 e C_2. Provamos para $\eta = 1$. Como a inequação 12 cresce quadraticamente em função de n e a inequação 15 cresce linearmente em função de n, sempre existirá um n para qualquer α ou β pertencente aos reais, em que a sua intersecção satisfaça o critério de parada.

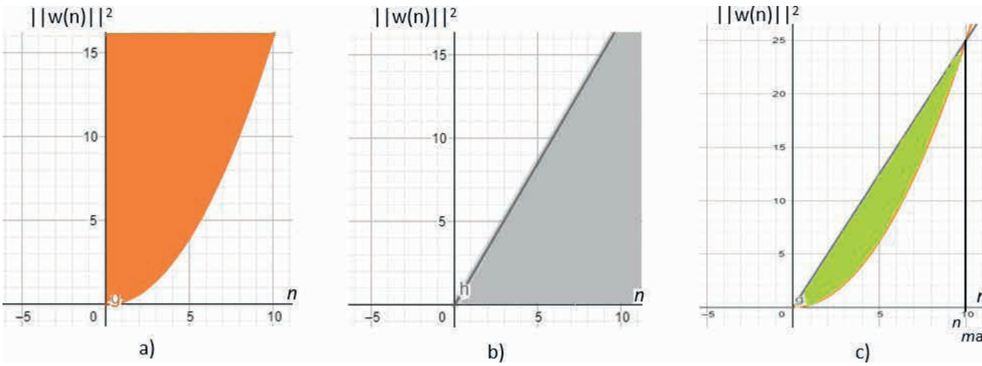


Figura 7: **a** solução da inequação 12; **b** solução da inequação 15; **c** solução da equação 17.

Fonte: Produzido pelo autor.

5 | CONCLUSÃO

Neste trabalho mostramos o teorema de convergência para o Perceptron. Percebemos a utilização de tópicos estudados na Álgebra Linear como a desigualdade de Cauchy-Schwarz, que ao ser definida e usada na prova, limita o número de iterações a um valor mínimo α e a norma euclidiana que limita a um valor máximo β.

REFERÊNCIAS

ERTEL, Wolfgang. **Introduction to Artificial Intelligence**. 2. ed. Londres: Springer, 2017. 356 p.

FAUSETT, Laurene. **Fundamentals of Neural Networks**: architectures, algorithms and applications. Nova Iorque: Prentice-Hall, 1994. 461 p.

HAYKIN, Simon. **Redes Neurais**: princípios e prática. 2. ed. São Paulo: Bookman, 2001. 900 p.

KOVACS, Zsolt L.. **Redes Neurais Artificiais**: fundamentos e aplicações. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006. 171 p.

POOLE, David. **Álgebra Linear**. São Paulo: Cengage Ctp, 2003. 718 p.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. São Paulo: Pearson Universi- dades, 1995. 600 p.

DECONSTRUCCIÓN PARCIAL DE LA ARITMÉTICA MAPUCHE: UN APORTE A LA EPISTEMOLOGÍA MAPUCHE

Data de submissão: 08/02/2023 *Data de aceite: 03/04/2023*

Sonia Salas-Salinas
Universidad de Las Américas
Universidad Católica de Temuco
https://orcid.org/0000-0001-6888-7638

Este artículo es un trabajo ampliado de la presentación realizada en las XXII Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Universidad Alberto Hurtado. Santiago de Chile, 29 y 30 de noviembre de 2018, pp. 603-608.

RESUMEN: En este artículo presentamos algunos resultados de nuestra investigación educativa socio-historica documental que nos permitió describir un conocimiento matemático vivo en la cultura mapuche, presente en las prácticas discursivas y operativas cotidianas y reconocido por la institucionalidad al incorporar este conocimiento en los recursos curriculares del Sector de aprendizaje Lengua Indígena Mapuzugun. Los análisis epistémicos realizados nos ha permitido describir el sistema de numeración oral mapuche desde un enfoque sociocultural, en el caso de la aritmética y su estructura aditiva; los significados de los objetos matemáticos involucrados y emergentes en las prácticas matemáticas discursivas y operaticas en el seno de la cultura mapuche y escolar; los posibles conflictos semióticos que enfrentan los estudiantes en las escuelas situadas en contexto indígena. Este trabajo de deconstrucción del conocimiento mtemáticos indígena es un aporte a la epistemología matemática mapuche, al conocimiento común de los profesores de matemáticas de las escuelas situadas en contexto mapuche, al currículo de matemática y la educación intercultural bilingüe en Chile, en tanto se evidencian las potencialidades del conocimientos matemático mapuche posibles de articular con la matemática escolar en los primeros niveles de la educación obligatoria, desde un pluralismo epistemológico.

PALABRAS CLAVE: Aritmética mapuche, prácticas discursivas, análisis epistémico, pluralidad de significados.

PARTIAL DECONSTRUCTION OF MAPUCHE ARITHMETIC: A CONTRIBUTION TO MAPUCHE EPISTEMOLOGY

ABSTRACT: In this article we present some results of our documentary socio-historical educational research that allowed

us to describe a mathematical knowledge that is alive in the Mapuche culture, present in daily discursive and operational practices and recognized by the institutional framework by incorporating this knowledge into the curricular resources of the Sector. Learning Mapuzugun Indigenous Language. The epistemic analyzes carried out have allowed us to describe the Mapuche oral numeral system from a sociocultural approach, in the case of arithmetic and its additive structure; the meanings of the mathematical objects involved and emerging in the discursive and operational mathematical practices within the Mapuche and school culture; the possible semiotic conflicts faced by students in schools located in an indigenous context. This work of deconstruction of indigenous mathematical knowledge is a contribution to Mapuche mathematical epistemology, to the common knowledge of mathematics teachers from schools located in a Mapuche context, to the mathematics curriculum and intercultural bilingual education in Chile, as the potentialities of Mapuche mathematical knowledge possible to articulate with school mathematics in the first levels of compulsory education, from an epistemological pluralism.
KEYWORDS: Mapuche arithmetic, discursive practices, epistemic analysis, plurality of meanings.

1 I INTRODUCCIÓN

Como bien lo plantea la investigación internacional, los sistemas de numeración ha sido uno de los temas que hasta hoy constituye un problema en el ámbito de la enseñanza de la matemática (Godino et al., 2009). En los primeros niveles de la educación primaria, el aprendizaje del sistema de numeración decimal posicional asociado al lenguaje simbólico matemático, es un desafío, pues ahí radica la formación de un pensamiento lógico que permeará toda la educación de las y los estudiantes. Por ello, estos autores plantean un tema interesante cuando preguntan ¿Alguien sabe lo qué es el número?, entregándonos a la vez una serie argumentos que nos hacen reflexionar sobre lo que ellos llaman 'significados informales en términos de prácticas matemáticas informales'. Estemos o no de acuerdo con esta denominación 'informal', hay en estos planteamientos una necesidad implícita de considerar el conocimiento matemático que existe fuera del espacio escolar (Retamal et al., 2020), como un conocimiento previo, cuando nos planetan:

> "(…) las prácticas informales no tienen una existencia meramente "histórica". Coexisten en el tiempo con la formalización científica en las prácticas usuales de las escuelas y determinan el progreso de los significados personales. No son un "mal menor", sino hitos necesarios en el desarrollo cognitivo de los niños y consustanciales a los procesos de transposición didáctica" (Godino et al., 2009, p.44).

Los aportes de los enfoques de investigación socioculturales, han proporcionado evidencia de la existencia de la antropología cultural matemática (Vithal y Skovsmose, 1997). No obstante, esta antropología cultural matemática, es poco investigada desde la Didáctica de las Matemáticas, lo que se traduce en una exclusión epistémica de este conocimiento en los currículos eurocéntricos que dominan los Sistemas Educativos de todo el mundo (Quintriqueo, 2010; Salas-Salinas, Godino y Oliveras, 2015; Salas-Salinas, 2017). En la acualidad la implementación de la Educación Intercultural Bilingüe (EIB) en Chile y Latinoamérica, ha generando el escenario propicio para la investigación del conocimiento matemático de los pueblos indígenas de América desde la Didáctica de la Matemática.

En este escenario, iniciamos una investigación empíra el año 2013 para aportar evidencias del potencial educativo del conocimiento matemático mapuche que puede ser considerado en la educación intercultural en contexto mapuche. En una primera etapa de nuestro estudio empírico, centramos nuestro interés en las prácticas matemáticas discursivas en *mapunzugun*, lengua mapuche, presentes en: registros históricos, para deconstruir el conocimiento matemático presente en la memoria social mapuche; y en los documentos oficiales del Ministerio de Educación Chile (MINEDUC) para la enseñanza del Sector de aprendizaje Lengua Indígena *Mapuzugun* (SLIM), en los primeros niveles de Educación Básica. Entonces, el problema que abordamos lo planteamos en los siguientes téminos: ¿Cuáles son los nichos ecológicos en los que vive esa aritmética mapuche?, ¿qué características tiene esta aritmética?, ¿existe semejanza con la aritmética escolar?, ¿qué significados tienen las prácticas matemáticas discursivas presentes en los libros de texto mapuzugun?, ¿qué conflictos semióticos plantean a los estudiantes las prácticas matemáticas incluidas en los libros de textos? Reportamos en este artículo, uno de nuestros objetivos: describir la aritmética mapuche y su estructura aditiva, presente en las prácticas matemáticas mapuche; analizando su significado matemático y potencial educativo y/o posibles conflictos semióticos en el aprendizaje de la matemática escolar. Evidenciar este conocimiento matemático mapuche, refuerza la idea de descolonizar el curriculo en tanto desdel el pluralismo epistemológico es posible la articulación de saberes en el aula de matemáticas (Salas-Salinas, 2017).

2 I MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Desde un enfoque educativo intercultural y crítico en la Didáctica de la Matemática es pertinente utilizar el término ‘descolonizar el saber’, ‘descolonizar el currículo’, entre otros, para referirnos a la relación dialógica que debe darse en las aulas de matemáticas interculturales. En la actualidad, distintas culturas que conviven en este mundo multicultural están en búsqueda de preservar su conocimiento y cosmovisión; sin embargo, son conscientes que es necesario aprender los marcos interpretativos de otras culturas para establecer relaciones dialécticas en igualdad de condiciones disminuyendo las actuales relaciones de poder y el racismo epistemológico de la educación monocultural (Mampaey y Zanoni, 2016; Salas-Salinas y Quintrequeo, 2018a, 2018b, Salas-Salinas, 2014, 2018a, 2018b).

No es nuevo el considerar los aprendizajes previos de los estudiantes a la hora de iniciarlos en un nuevo aprendizaje y más aún si recordamos que desde tiempos remotos hasta hoy, fuera del entorno escolar la mayoría de los niños utilizan los números para: contar, clasificar y cuantificar situaciones de su entorno (Bishop, 1999). Entonces, entendemos que es necesario respetar, valorar e incorporar los conocimientos matemáticos de la cultura de origen de los estudiantes al ingresar a la educación formal (Salas-Salinas, 2018b). La etnomatemática es parte de la práctica cotidiana de los estudiantes dentro y fuera de la escuela, por ello reconocerla como una práctica válida refuerza la creatividad, los esfuerzos, el auto-respeto cultural, en una sociedad multicultural (Dámbrosio, 2000, Retamal et al., 2020). Vithal y Skovsmose (1997) describen cuatro campos de estudio de la etnomatemática: historia de la matemática, antropología cultural matemática, matemáticas en la vida cotidiana y relaciones entre etnomatemática y educación matemática. Entonces, a partir de estas facetas y nuestro trabajo previo en Salas-Salinas, Godino y Quintriqueo (2016) proponemos una quinta faceta 'la articulación de la etnomatemática y la matemática escolar', es decir, la inclusión epistemica en el aulas de matemáticas. En esta etapa nos posicionamos en la antropología cultural matemática y sus relaciones con la matemática escolar, describiendo la aritmética mapuche y su potencial para articularlo con la matemática escolar.

Aun cuando existen investigaciones, a nivel nacional e internacional, que abordan el complejo escenario a que se enfrentan los estudiantes indígenas al iniciar su educación obligatoria, sigue siendo un concocimiento excluído de la mayoría de los curriculos de matemáticas en el mundo (Salas-Salinas, 2018b; Retamal et al., 2020). Para nosotros es fundamental la noción de lenguaje, pues todo aprendizaje, en las distintas etapas de la vida, están mediado por el lenguaje como lengua hablada en un contexto social, físico, geográfico y cultural (Salas, Godino y Oliveras, 2015).

En esta etapa del trabajo iniciamos una investigación socio-histórica documental para encontrar el conocimiento matemático mapuche, específicamente el conocimiento relativo a la aritmética y en particular la estructura aditiva (Cohen y Manion, 2002). En esta fase se analizan textos como material empírico para deconstruir la teoría subjetiva de los sujetos, en tanto está presente en la memoria colectica (Flick, 2007). En esta exhaustiva revisión documental, mediante el análisis de contenido, pudimos establecer y deconstruir el conocimiento de la aritmética mapuche para su posterior análisis. Este primer análisis nos arrojó la estructura morfo-matemática de la numeración mapuche, a partir del análisis morfo-sintáctico, y para ello utilizamos el esquema planteado por Bengoechea (2009), desde un enfoque etnomatemático y sociocultural, el que aborda el significado y significante de las palabras numéricas y signos numéricos en un juego de lenguaje específico. Un segundo análisis lo realizamos con algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) de Godino y colaboradores (Godino, Batanero y Font, 2007), para encontrar el conocimiento epistémico matemático mapuche, que puede ser articulado con la matemática escolar. La configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, del EOS, nos permite la deconstrucción de significados parciales, personales e institucionales, para una propuesta de articulación de significados. Godino y Batanero (1994) nos plantean que en las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales o abstractos, los cuales pueden estar representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. Cuando miramos las prácticas matemáticas en el seno de la cultura mapuche, miramos los problemas que resuelven y fijando nuestra atención en qué hacen y qué dicen, cómo y con qué realizan su práctica y de manera muy importante, el para qué hacen o por qué realizan esa práctica (Salas-Salinas, 2017). Según Godino y Batanero (1994) el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas, éstas determinan la emergencia progresiva de los objetos matemáticos y el significado de estos objetos. Dicho de otro modo, la configuración ontosemiótica determina las entidades primarias de la ontología y epistemología desde el EOS, como vemos en figura 1.

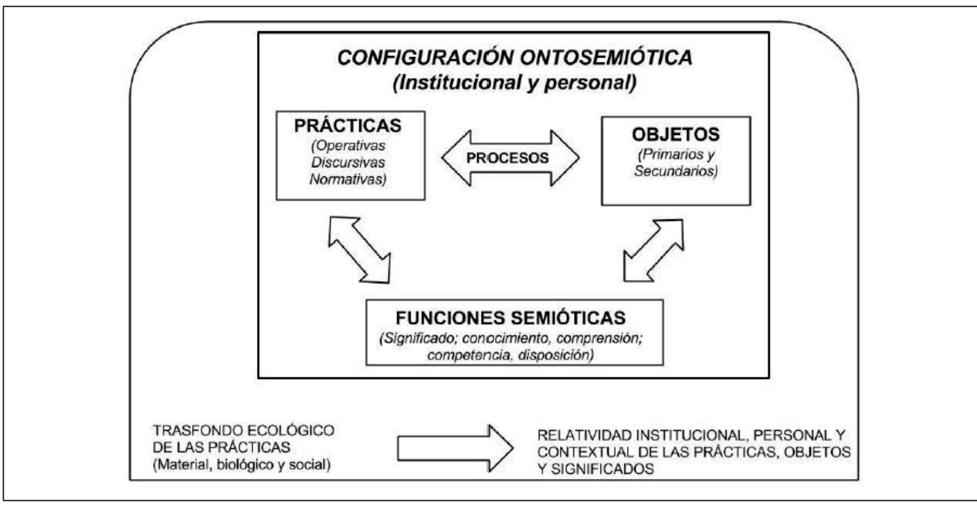


Figura 1. Configuración Ontosemiótica del EOS (Godino y Batanero, 1994)

El EOS considera práctica matemática a “toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Así, estas prácticas se realizan con el soporte y condicionamiento de una serie de cuestiones de orden material, biológico y sociocultural, entonces, hablamos de que existe un trasfondo ecológico de las prácticas matemáticas situadas. Por tanto, las prácticas matemáticas pueden ser idiosincrásicas de una persona, prácticas personales, o compartidas en el seno de una institución, prácticas institucionales (Godino y Batanero, 1994). En suma el EOS asume el postulado antropológico de la relatividad socioepistémica de la triada: sistemas de prácticas, objetos y significados, en tanto concibe a las instituciones como comunidades de prácticas que incluye grupos étnicos, profesionales, grupos culturales y sociales, entre otros (Salas-Salinas, Godino y Oliveras, 2015).

Entonces, los significados de un objeto matemático están dado por las practicas operativas y discursivas, que realiza un sujeto para resolver una situación problema y su significado lo entendemos como el significado personal del objeto matemático. Cuando estas prácticas son compartidas por la comunidad de prácticas del sujeto, entonces el significado es institucional (Godino, 2002; Salas-Salinas, 2017).

Cuando analizamos la configuración epistémica de una práctica matemática, ponemos atención en los objetos primarios: lenguaje, situaciones, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos (Font, Godino y Gallardo, 2013; Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Es decir, utilizar un determinado lenguaje verbal, gráfico y/o simbólico que expresen y soporten los enunciados verbales del campo de problemas planteados, los conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos previos y emergentes que participarán en el proceso. El campo de problemas, los conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos permite la regulación del lenguaje utilizado y propicia la emergencia de conceptos, procedimientos y proposiciones. Finalmente, vemos que los argumentos justifican los conceptos, procedimientos y proposiciones puestas en juego en la resolución del campo de problemas (Salas-Salinas, 2017, 2018a). Las prácticas matemáticas son inseparables de los objetos matemáticos, es decir, no hay práctica sin objeto ni objeto sin práctica y la relación entre ambos, es lo que el EOS define como función semiótica (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011).

Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011), en su estudio, plantean que la naturaleza y significado de los números requiere adoptar una visión antropológica – sociocultural sobre la matemática e ilustran la pluralidad de significados del número natural. En este punto, asumimos el pluralismo epistemólógico implicito en las bases del EOS y que describe muy bien Olivé (2009), para realizar nuestros análisis de la actividad matemática en distintos marcos institucionales o juegos de lenguajes, que en nuestro caso fueron las instituciones, cultura escolar y cultura mapuche. Estas herramientas teóricas complementadas con los enfoques socioculturales, fueron fundamentales para deconstruir parte de la epistemología matemática mapuche posible de incluir en la matemática escolar en las escuelas situadas en Chile.

3 I RESULTADOS

DÀmore (2003) describe los sistemas numerales en tres idiomas, italiano, castellano y quechua, logrando con ello evidenciar la estructura lógica que utilizan los quechuas para nombrar los números. La complejidad de la estructura morfosintáctica de las palabras numérica en castellano la podemos observar en su estructura morfo-matemática, en tanto podemos apreciar sus irregularidades a partir de la palabra once. No se aprecia explícitamente la participación del diez ni los objetos matemáticos no ostensivos en términos de un aprendizaje inductivo. En este caso los objetos matemáticos no ostensivos son la adición y multiplicación que están implícitas en la formación de una cifra de dos a más dígitos, no obstante, en la numeración oral en castellano cambia de ubicación de acuerdo a su irregularidad, como vemos en la figura 2.

Símbolo Numérico	Español	Interpretación aritmética		Símbolo Numérico	Español	Interpretación aritmética	
1	Uno	1		11	Once	1 +10	
2	Dos	1 + 1		12	Doce	2 +10	
3	Tres	2 + 1		13	Trece	3 +10	
4	Cuatro	3 + 1		14	Catorce	4 +10	
5	Cinco	4 + 1		15	Quince	5 +10	
6	Seis	5 + 1		16	Dieciséis	10 + 6	
7	Siete	6 + 1		17	Diecisiete	10 + 7	
8	Ocho	7 + 1		18	Dieciocho	10 + 8	
9	Nueve	8 + 1		19	Diecinueve	10 + 9	
10	Diez	9 + 1	$(10)^1$	20	Veinte	2(10)	
21	Veintiuno	2(10) + 1		5000	Cinco mil	5(1000)	
30	Treinta	3(10)		2625	Dos mil seiscientos veinticinco	2(1000) + 6(100) + 2(10) + 5	
50	Cincuenta	5(10)		9999	Nueve mil novecientos noventa y nueve	9(1000)+9(100)+9(10)+9	
100	Cien	10(10)	$(10)^2$	10000	Diez mil	10(1000)	$(10)^4$
312	Trescientos doce	3(100)+2+1(10)		100000	Cien mil	100(1000)	$(10)^5$
500	Quinientos	5(100)		500000	Quinientos mil	500(1000)	
900	Novecientos	9(100)		602014	Seiscientos dos mil catorce	600(1000)+ 2(1000)+4+10	
1000	Mil	10(100)	$(10)^3$	1000000	Un millón	1(1000000)	$(10)^6$

Figura 2. Interpretación aritmética de la numeración en español (Salas-Salinas, 2014)

Entonces, al poner en juego los procesos de codificación y descodificación, la correspondencia entre la palabra numérica y el símbolo no se condicen, un conflicto semiótico que puede llevar al estudiante a cometer errores o no comprender el valor del dígito de acuerdo a la posición de éste en las palabras numéricas y en la escritura simbólica matemática (Salas-Salinas y Godino, 2016).

La figura 3 muestra la composición morfosintáctica de la numeración en *mapunzugun* y la interpretación aritmética de las palabras numéricas. También el mapuche ideó un sistema numeral oral lógicamente estructurado para facilitar el conteo y las operaciones básicas. Al igual que en quechua, la numeración en *mapunzugun* de basa en un principio aditivo y multiplicativo. Su estructura morfosintáctica es explícitamente lógica, puesto que utiliza las mismas palabras y las potencias de 10 para formar la cifra. Si bien, no tienen un sistema de notación simbólica propia en su cultura, han adoptado la utilización del lenguaje simbólico matemático occidental. Hemos realizado una interpretación morfo-matemática de la numeración en mapuzugun, donde podemos inferir la existencia de objetos matemáticos no ostensivos (adición y multiplicación), en tanto se aprecian explícitamente. Es decir, la regularidad y lógica en la conformación de las palabras numéricas en *mapunzugun*, nos permite evidenciar, más fácilmente, dichos objetos y la posición de los dígitos en la formación de cifras de dos y tres dígitos, como vemos en a figura 3.

Símbolo Numérico	Mapuzugun	Interpretación aritmética		Símbolo Numérico	Mapuzugun	Interpretación aritmética	
1	Kiñe	1		11	Mari kiñe	10 + 1	
2	Epu	1 + 1		12	Mari epu	10 + 2	
3	Küla	2 + 1		13	Mari küla	10 + 3	
4	Meli	3 + 1		14	Mari meli	10 + 4	
5	Kechu	4 + 1		15	Mari kechu	10 + 5	
6	Kayu	5 + 1		16	Mari kayu	10 + 6	
7	Reqle	6 + 1		17	Mari reqle	10 + 7	
8	Pura	7 + 1		18	Mari pura	10 + 8	
9	Aylla	8 + 1		19	Mari aylla	10 + 9	
10	Mari	9 + 1	$(10)^1$	20	Epu mari	2(10)	
40	Meli mari	4(10)		5000	Kechu waragka	5(1000)	
50	Kechu mari	5(10)		2625	Epu waragka kayu pataka epu mari kechu	2(1000) + 6(100) + 2(10) + 5	
100	Pataka	10(10)	$(10)^2$	9999	Aylla waragka aylla pataka aylla mari aylla	9(1000)+9(100)+9(10)+9	
200	Epu pataka	2(100)		10000	Mari waragka	10(1000)	(10)□
312	Küla pataka mari epu	3(100)+10+2		100000	Pataka waragka	100(1000)	(10)□
400	Meli pataka	4(100)		500000	Kechu pataka waragka	5(100)(1000)	
500	Kechu pataka	5(100)		602014	Kayu pataka waragka epu waragka mari meli	6(100)(1000)+ 2(1000)+10+4	
1000	Waragka	10(100)	$(10)^3$	1000000	Kiñe waragka waragka	1(1000)(1000)	$(10)^6$

Figura 3. Interpretación aritmética de la numeración en mapuzugun (Salas-Salinas, 2014)

El resumen de los distintos segmentos de palabras, en castellano y mapuzugun, con significado matemático que representan un número en la conformación de las palabras numéricas en ambos idiomas, los presentamos en la figura 4. Estos antecedentes nos pueden indicar las múltiples funciones semióticas que el estudiante mapuche y no mapuche debe establecer para comprender el sistema de numeración decimal posicional en otra lengua y cultura.

Dígito / Lengua	1	2	3	4	5	6	7	8	9						
Español	uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve	diez	cien	mil	diez mil	cien mil	millón
	on	do	tre	cator	quin	ses	set	och	nov	ce	ciento(s)				millones
		ve		cuar	cincu				nove	dieci	ientos				
										inte					
										Inti					
										inta					
										enta					
Mapuzugun	kiñe	epu	küla	meli	kechu	kayu	reqle	pura	aylla	mari	pataka	waragka	mari waragka	pataka waragka	waragka waragka

Figura 4. Cuadro comparativo numeración en mapuzugun y castellano (Salas-Salinas, 2014)

La habilidad de contar, en castellano o *mapunzugun*, está precedida de una coordinación, al mismo tiempo, entre los elementos a contar y las manos o la vista, y la emisión de la palabra cuantificadora en el orden establecido por ellos como cultura. Como plantea Cid et al. (2003), las técnicas de contar para obtener los cardinales, en el caso del pueblo mapuche, pone de manifiesto los principios necesarios para entender y contar correctamente:

- Principio de orden estable. Las palabras numéricas *kiñe, epu, küla*, ... deben recitarse siempre en el mismo orden, sin saltarse ninguna.
- Principio de la correspondencia uno a uno. A cada elemento del conjunto sometido a recuento se le debe asignar una palabra numérica distinta y sólo una.
- Principio de irrelevancia del orden. El orden en que se cuentan los elementos del conjunto es irrelevante para obtener el cardinal del conjunto.
- Principio cardinal. La palabra adjudicada al último elemento contado del conjunto representa, no sólo el ordinal de ese elemento, sino también el cardinal del conjunto.

Un ejemplo: (...) *yemege kayu kuram*, buscar seis huevos (Ministerio de Educación, 2011. Lengua Mapuzugun 2º básico, p. 83)

El estudiante mapuche debe desarrollar estas habilidades en dos lenguajes al mismo tiempo. Al observar y conocer estos elementos de la matemática mapuche, podemos identificar en el contar la puesta en correspondencia de cada elemento de un conjunto con los elementos de otro conjunto, vale decir la coordinabilidad. Se puede apreciar que subyace la biyección entre un conjunto de elementos a contar y el conjunto de números en palabras, en un contexto concreto no abstracto, es decir el uno a uno, *kiñe a kiñe*. Frente a la necesidad de contar más de diez, se utiliza los mismos numerales hasta el 19 y una forma que podemos representarlo es como 10 + n, siendo n cualquier número de *kiñe* a *aylla*, es decir *mari* + n. Para los siguientes números aparece una nueva configuración, en el ámbito del 20 al 99 y que podemos modelar como n (10) + n, siendo n cualquier número *kiñe* a *aylla*, es decir n (*mari*) + n. Cuando llegan a la necesidad de contar cien, introducen una nueva palabra, *pataka,* con la que forma los siguientes números hasta el 999 y que podemos representar como n (100) + n (10) + n, siendo n cualquier número *kiñe* a *aylla*, es decir n (*pataka*) + n (*mari*) + n; un ejemplo para entender sería el número 345: n(100) + n (10) + n = 3(100) + 4(10) + 5 y en mapuzugun sería n(*pataka*) + n (*mari*) + n= *küla pataka meli mari kechu.* Al llegar al mil, se requiere una nueva palabra, *waragka*, y se sigue la misma lógica (Salas-Salinas, 2014).

Este sistema de numeración en *mapunzugun* es reconocido por la institucionalidad y lo plasma en los Programas y Planes de Estudio de la asignatura Sector de Lengua Indígena *Mapunzugun* (SLIM). Esta institucionalización de la numeración mapuche ha llevado a los editores de textos para estudiantes, profesores y educadores tradicionales a utilizar este sistema de numeración en las actividades propuestas a los estudiantes en el sector de lengua indígena *mapunzugun* (SLIM). Por razones de espacio incluimos dos actividades en los primeros niveles de educación básica, para evidenciar las prácticas discursivas y el posterior análisis epistémico. La primera actividad se propone en el texto del estudiante *mapunzugun* 1º Básico y en la Guía del Educador Tradicional. En ésta escuchan ül Üñümche de Lorenzo Aillapan, un poema, en el cual aparece la expresión *zoy mari waranka txipanthü rupalnien tañi küme* ül ülkantuken *mülen mew wera pezkiñ*, hace diez mil años que circundo este camino magistral.

Ta chi willkikawün

Itxofill wünül ka ülkantun wallmapu tunien rüf az müna küpa weñangulkefiñ pu wera mogen che, zoy mari waranka txipanthü rupalnien tañi küme ül ülkantuken mülen mew wera pezkiñ, akun pewüngen chew ñi wefken mawizantu inaltu lhewfü, Maule ka willipüle rarawi tañi ül, chew ñi mülen mawizantu lelfün.

El zorzal director de orquesta

De todas las melodías y canciones
de la tierra capto sus esencias
con gran deseo llevo sabor alegre a
la gente que vive
hace diez mil años que circundo
este camino magistral
canto en las estaciones de las flores
que comienzan en primavera
en la frondosa orilla de los lagos del
Maule al sur
resalta mi canto en el campo
montañoso.

Figura 5. Actividad propuesta al estudiante en el SLIM

Fuente: Guía del Educador Tradicional Mapuzugun 1º Básico (MINEDUC, 2015, p. 114)

En la figura 5 vemos, vemos un texto en *mapunzugun*, que se utiliza en la asignatura SLIM en primero básico. Entonces nos preguntamos ¿qué conflicto semiótico puede enfrentar el estudiante, cuando se le presenta el número diez mil años en *mapuzugun, mari waranka txipanthü*, ¿cómo puede comprender el texto el estudiante, si en matemáticas no se trabaja con la numeración en *mapunzugun*? Además, el currículo de matemáticas en nuestro país, establece el ámbito numérico de cero a cien en castellano, para primer año básico. Entonces, si las prácticas matemáticas son inseparables de los objetos matemáticos, es decir, no hay práctica sin objeto ni objeto sin práctica y la relación entre ambos, es lo que el EOS define como función semiótica, ¿qué sucede en este caso? En este caso, estamos frente a una disparidad de significados atribuidos al mismo objeto matemático, por dos sujetos o instituciones, lo que entendemos como un 'conflicto semiótico'. En el marco del EOS podemos encontrar 'conflicto semiótico de tipo epistémico, disparidad de significados institucionales; conflicto cognitivo, disparidad de significados personales de un mismo sujeto en relación a un referente; y conflicto instruccional o interaccional, cuando la disparidad se produce en la interacción de dos sujetos: entre estudiante y/o profesor y estudiante (Godino, Font et al., 2011). Entonces, en esta actividad, el estudiante enfrenta un conflicto semiótico de tipo epistémico, pues en la cultura escolar, diez mil, es una expresión que no se utiliza en la clase de matemáticas, y en la cultura mapuche, es *mari waranka*, expresión que utilizan en los relatos orales, en decir, disparidad de significados institucionales. Además, como el significado de referencia no es situado, al tener dos significados de referencia institucionales, el estudiante enfrenta un conflicto semiótico cognitivo, en tanto el estudiante debe construir un significado personal en relación a un significado de referencia, pero, ¿qué significado de referencia utilizará el estudiante, el escolar o de su cultura de origen? En el proceso de aprendizaje el estudiante, en este caso, se enfrenta a un conflicto cognitivo, pues debe poner en juego dos racionales distintas, para construir su conocimiento. Complejo escenario para a un estudiante de seis años, en tanto en la escuela no se utiliza la matemática mapuche.

Luego nos encontramos con una receta en el texto para el estudiante en 3º año básico en SLIM. Esta actividad la analizamos con las herramientas del EOS para establecer la pluralidad de significados implicados en la actividad, lo que evidencia una base epistémica del conocimiento matemático mapuche. En la figura 6, vemos que se plantea a los estudiantes escuchar, leer y comentar una receta de cocina. Luego, se les pide crear su propia receta, para lo cual se le da una pauta igual al formato presentado en el texto (Texto estudiante mapuzugun 3º básico, 1º unidad, p. 18-19). Esta actividad se enmarca en el eje temático de comunicación escrita en el SLI *mapunzugun*.

Fewla wirintukuge kiñe pepilkawam zewma iyaelal tüfa mew:

Receta dulce de murta

Necesitas

Diez puñados de murta limpia
Diez cargas suaves de azúcar
Tres frascos con tapas

Preparación

Primero

- Hervir la murta con azúcar durante veinte minutos.

-Retirar del fogón.

Segundo

- Poner caliente en los frascos.
- Cubriendo bien

Tercero

-Entonces llevar al horno a fuego lento por quince minutos.
-Listo para comer con catuto o con pan.

Ahora crea tu propia receta y escríbela acá:

Figura 6. Actividad propuesta al estudiante de 3º básico en SLIM (traducción propia)
Fuente: MINEDUC, 2015. Texto estudiante mapuzugun 3º básico, 1º unidad, p. 18-19

Podemos apreciar las prácticas de: enumerar pasos a seguir en mapuzugun, *Kiñe* (1), *Epu* (2) *y Küla* (3); seguido de la utilización de magnitudes arbitrarias *mari runa* (diez puñados), *mari panü* (diez cargas o medidas) y *küla fürasko* (tres frascos). Intervienen unidades de tiempo: *epu mari minutu* (veinte minutos) y *mari kechu minutu* (quince minutos). Para delimitar las configuraciones epistémicas en este problema, desde un análisis a priori, utilizaremos el planteamiento de preguntas que habitualmente se presenta a los estudiantes al resolver este tipo de problema matemático. Por razones de espacio, sólo presentamos la configuración epistémica 1 (CE1), para luego terminar con la pluralidad de significados, epistémica.

Configuración epistémica 1 (CE1)

La primera cuestión problema que debe enfrentar el estudiante es aplicar de manera competente su significado personal de número para determinar el cardinal de los conjuntos finitos de elementos involucrados en la elaboración de la receta. En la figura 7, mostramos la configuración epistémica 1(CE1) y cómo se relacionan entre sí los distintos objetos matemáticos involucrados que se asocian al significado de número como cardinal del conjunto. La interrogación del texto nos delimita el campo de problemas implicado en la tarea en esta CE1.

La resolución del problema implica dar respuesta a las interrogantes: ¿Cuántas medidas de murta?, ¿Cuántas medidas de azúcar?, ¿Cuántos frascos?, ¿Cuánto tiempo debo cocinar la murta?, ¿Cuánto tiempo debo llevar al horno?, ¿en cuántos pasos puedo hacer el dulce de murta? Para dar respuesta a estas interrogantes, el estudiante requiere poner en juego algunos conocimientos previos: principio del orden estable en castellano y *mapunzugun*; de correspondencia uno a uno; cardinal de un conjunto; de irrelevancia de orden; de abstracción; de conservación de la cantidad; coordinabilidad entre conjuntos; correspondencia biyectiva; números naturales <100; secuencia numérica en *mapunzugun* y en castellano (*kiñe, epu, küla*). Sin embargo, los conocimientos emergentes que podemos visualizar son: estructura aditiva del sistema numeral oral en *mapunzugun* y castellano; estructura sistema de numeración decimal simbólico matemático asociado a la numeración oral en *mapunzugun*; sucesor de un número en *mapunzugun*; cardinal de un conjunto finito en *mapunzugun*. Estas cuestiones, nos llevan a preguntarnos ¿podrá entender el problema el estudiante, si en matemáticas no se trabaja el sistema de numeración en *mapunzugun*?, ¿a qué racionalidad podrá recurrir el estudiante para asociar todos los objetos matemáticos que debe poner en juego? En la figura 7 podemos apreciar la trama de prácticas, objetos y funciones semióticas, a que se enfrenta el estudiante para resolver un problema simulado.

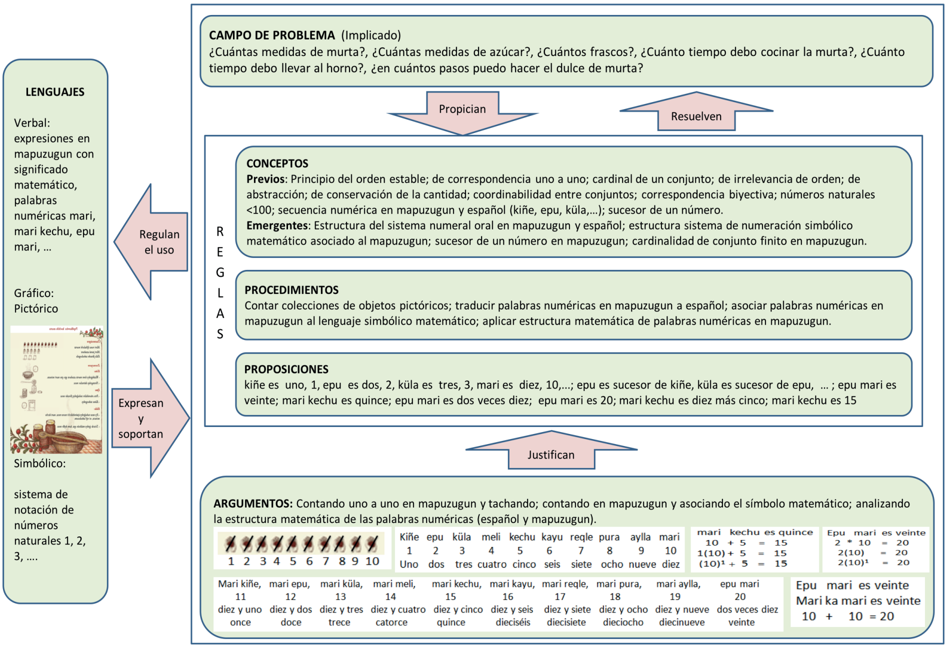


Figura 7. Objetos matemáticos implicados CE1

Fuente, Salas-Salinas, 2018b

En suma, el estudiante mapuche y no mapuche, que asiste a la escuela situada en contexto mapuche en la que se implementa la actual educación intercultural bilingüe a través de la asignatura SLIM, se enfrenta a distintos conflictos semióticos, epistémicos, cognitivos y muy probablemente, instruccional. Entonces, una vez más podemos apreciar la necesidad de articulación epistémica que requieren las escuelas situadas, en tanto, el aula de matemáticas debiera incorporar el conocimiento matemático mapuche y articularlo con la matemática escolar, a fin de facilitar el aprendizaje de las y los estudiantes para resolver problemas en cualquier contexto.

Resumiendo, algunas configuraciones epistémicas involucradas en la resolución de este problema, para el desarrollo del aprendizaje de la lengua *mapunzugun*, son:

Configuración epistémica 1 (CE1), hace referencia al significado del objeto número como cardinal, pues deben ponerse en juego conocimiento y habilidades que les permita a los estudiantes realizar: agrupamientos, suma de colecciones de minutos, horas y segundos; contar vueltas de las manillas del reloj, etcétera.

Configuración epistémica 2 (CE2), se relaciona con el significado del número como racional, al establecer fraccionamientos de tiempo horario, de cantidades.

Configuración epistémica 3 (CE3) se refiere al significado de número como una magnitud, es decir a la unidad de tiempo en el sistema horario sexagesimal.

En suma, podemos plantear la pluralidad de significados (Ramos y Font, 2006), desde el pluralismo epistémico, con un problema simulado, la cocina mapuche. En la figura 8, podemos apreciar esta pluralidad de significados epistemológicos en contextos reales que tiene la cocina mapuche, un recurso didáctico intercultural situado para el aprendizaje de las matemáticas escolares en escuelas situadas.

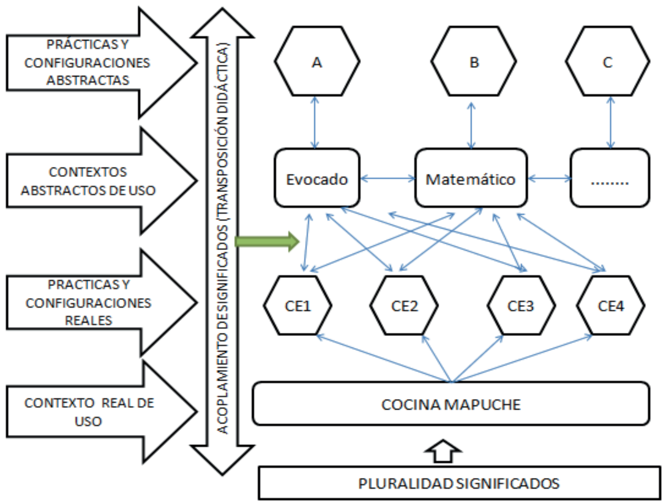


Figura 8. Pluralidad de significados del objeto ‘número’ en mapuzugun

Fuente: Salas-Salinas (2018b)

Sin ser exhaustivos, hemos analizado dos actividades, una del libro de texto del estudiante y la otra del programa de estudios del SLIM, para evidenciar que existen prácticas matemáticas mapuche, que pueden ser utilizadas para el aprendizaje de la matemática escolar. No obstante, debemos ser cuidadosos a la hora de enfrentar al estudiante a un nuevo aprendizaje, pues los análisis demuestran la trama compleja de objetos matemáticos que intervienen en la comprensión de conceptos culturales mapuche y eso no está siendo atendido en la escuela. Esta trama de objetos, implica multiplicidad de significados, y, a la vez, implica múltiples funciones semióticas (Ramos y Font, 2006). Entonces, estamos convencidos que estas cuestiones no atendidas por las escuelas situadas, son potenciales obstáculos de aprendizaje propiciados por el racismo epistémico lo que afecta, además, la autodeterminación identitaria mapuche (Quintriqueo, 2010; Salas-Salinas, 2017).

4 | CONSIDERACIONES FINALES

Las irregularidades en las palabras numéricas, en castellano, pueden ser una dificultad para la comprensión del sistema de numeración decimal posicional simbólico y su estructura aditiva para el niño mapuche y no mapuche en las escuelas situadas. En tanto, al igual que Bengoechea, creemos que para un hablante adulto puede ser fácil identificar que el segmento "ce" alude al diez y los segmentos "do", "tre" y "cator", aluden al dos, tres y cuatro respectivamente. Sin embargo, para a un estudiante que inicia su formación escolar no es tan obvio, lo que nos lleva a plantear que el sistema de conteo escolar oral en castellano posee muchas irregularidades sintácticas lo que complejiza la asociación del símbolo matemático que lo representa al superar el ámbito numérico de diez y por ende su estructura aditiva. Al contrario, la numeración oral en *mapunzugun* es lógica en su estructura, lo que permite visualizar la estructura aditiva de la matemática escolar en los primeros años.

También, hemos evidenciado las prácticas matemáticas en el seno de la cultura mapuche y reconocidas por la institucionalidad en Chile, lo que implica que la matemática escolar debe abrir su campo de acción desde un pluralismo epistémico, permitiendo la inclusión del conocimiento local, territorial y cultural de los estudiantes que atiende. Facilitando la comprensión de la matemática escolar desde situaciones de aprendizajes situadas, promoviendo la reflexión, justificación y argumentación sobre el conocimiento matemático. Con esto nos referimos, a que es necesario la articulación del conocimiento matemático escolar y mapuche en las aulas de matemáticas de las escuelas situadas. Así, minimizar los posibles conflictos semióticos a que se enfrentan los estudiantes al tratar de entender una matemática mapuche presente en los libros de textos de la asignatura SLIM y tratar de traducir dicho conocimiento a la matemática escolar para poder resolver las situaciones problemas a que los enfrentan en la escuela. Entonces, la clase de matemáticas debiera abordar la matemática mapuche, para que los estudiantes puedan resolver problemas como los expuestos en este artículo y comprender los significados culturales presentes en los problemas, que permita, además, afianzar su identidad cultural.

Evidenciar la epistemología mapuche, permite que sea considerada transversalmente en el sistema escolar, más aún en la implementación de la Educación Intercultural Bilingüe en contexto mapuche.

RECONOCIMIENTO

Proyecto FONDEF ID21110187, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile y Programa de Capital Humano Avanzado, Comisión Nacional Científica y Tecnológica, CONICYT/BECAS CHILE Nº72150172.

REFERENCIAS

Bengoechea de, N. (2009). Etnomatemáticas, métodos y objetos culturales. Tesis de Máster. Documento no publicado, Universidad de Granada. España.

Bishop, A. J. (1999). Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural (Vol. 49). Barcelona: Editorial Paidós

Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/

Cohen, L. y Manion, L. (2002). Método de investigación educativa. Madrid: La Muralla.

D'Ambrosio, U. (2000). Las dimensiones políticas y educacionales de la etnomatemática. Números, (43), 439-444.

D'Amore B. (2003). Matemática en algunas culturas suramericanas. Una contribución a la Etnomatemática. Relime. México D.F., México. 6, 3, 279-290.

Flick, U. (2007). Introducción a la investigación cualitativa. Ediciones Morata. Madrid.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies in Mathematics, 82, 97–124.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques, 22(2/3), 237-284.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en didactique des Mathématiques, 14(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39(1-2), 127-135. https://doi:10.1007/s11858-006-0004-1.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es el número? Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 19, p. 34-46.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. Educational Studies in Mathematics 77 (2), 247-265.

Mampaey, J. y Zanoni, P. (2016) Reproducing monocultural education: ethnic majority staff's discursive constructions of monocultural school practices. British Journal of Sociology of Education, 37(7), 928-946, DOI: 10.1080 / 01425692.2014.1001059

MINEDUC, (2011). Programa de Estudio de Lengua Mapuzugun para 2º año de educación básica. Santiago: Autor.

MINEDUC (2015). Guía del Educador Tradicional para 1° básico. Santiago: Autor.

MINEDUC (2015). Texto Estudiante Mapuzugun 3º básico. Santiago: Autor.

Olivé, L. (2009). Por una auténtica interculturalidad basada en el reconocimiento de la pluralidad epistemológica. Pluralismo epistemológico, 19-30.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico- matemático sobre la derivada. Educação Matemática Pesquisa 13(1).

Quintriqueo, S. (2010). Implicancias de un modelo curricular monocultural en contexto mapuche. Santiago: Lom Ediciones

Ramos, A.B. y Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prospettiva ontosemiotica. La Matematica e la sua didattica, Anno 20, n. 4, 535-556.

Retamal, S., Pino-Fan, L. R. y Salas-Salinas, S. (2020). Una Reflexión sobre el Aprendizaje de la Matemática fuera del Espacio Escolar. Revista Paradigma, 41, 308-325.

Salas-Salinas, S. (2014). Etnomatemática y multiculturalidad en la educación básica en Chile. El caso de la aritmética mapuche. Tesis de Máster publicada. http://dx.doi.org/10.30827/Digibug.71021

Salas-Salinas, S. (2017). Hacia un significado de referencia del sistema de numeración mapuche. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. http://hdl.handle.net/10481/45384

Salas-Salinas. S. (2018a). Conocimiento matemático Mapuche en libros de textos de lengua Mapuzugun. En Medrano, C., Soto, M. y Domínguez, M (Eds). La humanidad al centro: variaciones del ser en la educación. ReDIE: Durango, México, p 62-76.

Salas-Salinas (2018b) Articulación de las matemáticas mapuche y escolar en el caso de los conocimientos aritméticos. Tesis Doctoral publicada. http://hdl.handle.net/10481/54976

Salas-Salinas, S. y Godino, J. D. (2016). Potencial educativo de la aritmética mapuche en Chile. En Rosas, A. (Ed.) *Avances en Matemática Educativa Tecnología y Matemática* (pp. 72-84). México: Instituto Politécnico Nacional.

Salas, S., Godino, J. y Oliveras, M. L. (2015). Números mapuches en el currículo de la lengua mapuzugun en la educación básica chilena. Revista Latinoamericana de Etnomatemática Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática, 8(2), 194-213.

Salas-Salinas, S., Godino, J. D., y Quintriqueo, S. (2016). Análisis exploratorio de las prácticas matemáticas de dos estudiantes mapuches en colegios con y sin Educación Intercultural Bilingüe. Bolema: boletim de Educação Matemática, 30, 481-501.

Salas-Salinas, S. y Quintriqueo, S. (2018a). Hacia un modelo de articulación del conocimiento matemático mapuche y el escolar. XXI Jornada Nacionales Educación Matemática, Universidad de Tarapacá. Arica, Chile. https://www.sochiem.cl/documentos/actas-jnem/2017-arica-xxi-uta.pdf

Salas-Salinas, S. y Quintriqueo, S. (2018b). Elementos claves para el diseño didáctico situado en contexto indígena. XXI Jornada Nacionales Educación Matemática, pp 72-73, Arica, Chile. https://www.sochiem.cl/documentos/actas-jnem/2017-arica-xxi-uta.pdf

Vithal, R., y Skovsmose, O. (1997). The end of innocence: a critique of 'ethnomathematics'. Educational Studies in Mathematics, 34(2), 131-157.

CAPÍTULO 5

GROUP OF WEAKLY CONTINUOUS OPERATORS ASSOCIATED TO A SCHRÖDINGER TYPE HOMOGENEOUS MODEL

Data de aceite: 03/04/2023

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

ABSTRACT: In this work, we prove the existence and uniqueness of the solution of the Schrödinger type homogeneous model in the periodic distributional space P'. Furthermore, we prove that the solution depends continuously respect to the initial data in P'. Introducing a family of weakly continuous operators, we prove that this family is a group of operators in P'. Then, with this family of operators, we get a fine version of the existence and dependency continuous theorem obtained. Finally, we give some remarks derived from this study.
KEYWORDS: Groups theory, weakly continuous operators, existence of solution, Schrödinger type equation, distributional problem, periodic distributional space.

1 I INTRODUCTION

First, we begin by commenting that [3] has proven the existence of a solution of the Schrodinger type equation in the Hilbert space H^s_{per}. Also in [3] a family of bounded operators is introduced in the Hilbert space H^s_{per} and it is proved that forms a unitary group. Thus motivated by these ideas we will solve the problem (P_2) in the topological dual of P : P', which is not a Banach space.

In this article, we will prove the existence and uniqueness of the solution of (P_2). Furthermore, we will demonstrate that the solution depends continuously with respect to the initial data in P', considering the weak convergence in P'. And we will prove that the introduced family of operators forms a group of weakly continuous linear operators. Thus, with this family we will rewrite our result in a fine version. Our article is organized as follows. In section 2, we indicate the methodology used and cite the references used. In section 3, we put the results obtained from our study. This section is divided into three subsections. Thus, in subsection 3.1 we prove that the problem (P_2) has a unique solution and also demonstrate that the solution depends continuously with respect to the initial data.

In subsection 3.2, we introduce families of weakly continuous linear operators in P' that manage to form a group. In subsection 3.3 we improve Theorem 3.1.

Finally, in section 4 we give the conclusions of this study.

2 | METHODOLOGY

As theoretical framework in this article we use the references [1], [2], [3], [4] and [5] for Fourier Theory in periodic distributional space, periodic Sobolev spaces, topological vector spaces, weakly continuous operators, group of operators and existence of solution of a distributional differential equation.

3 | MAIN RESULTS

The presentation of the results obtained has been organized in subsections and is as follows.

3.1 Solution of the Schrödinger Equation (P_2)

In this subsection we will study the existence of a solution to the problem (P_2) and the continuous dependence of the solution with respect to the initial data in P'.

Theorem 3.1 *Let* $\mu > 0$, $\alpha > 0$ *and the distributional problem*

$$(P_2) \quad \left| \begin{array}{l} u \in C(I\!R, P') \\ \partial_t u - i\mu\partial_x^2 u + i\alpha u = 0 \ \in P' \\ u(0) = f \in P'\,. \end{array} \right.$$

then (P_2) *has a unique solution* $u \in C^1(I\!R, P')$*. Furthermore, the solution depends continuously on the initial data. That is, given* f_n, $f \in P'$ *such that* $f_n \xrightarrow{P'} f$ *implies* $u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)$, $\forall t \in I\!R$, *where* u_n *is solution of* (P_2) *with initial data* f_n *and* u *is solution of* (P_2) *with initial data* f.

Proof.- We have organized the proof as follows.

1. Suppose there exists $u \in C(I\!R, P')$ satisfying (P_2), then taking the Fourier transform to the equation

$$\partial_t u - i\mu\partial_x^2 u + i\alpha u \;=\; 0\,,$$

we get

$$0 \;=\; \partial_t \hat{u} - i\mu(ik)^2\hat{u} + i\alpha\hat{u} \;=\; \partial_t\hat{u} + i\mu k^2\hat{u} + i\alpha\hat{u},$$

which for each $k \in Z$ is an ODE with initial data $\hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k)$.

Thus, we propose an uncoupled system of homogeneous first-order ordinary differential equations

$$(\Omega_k) \left| \begin{array}{l} \hat{u} \in C(I\!R, S'(Z)) \\ \partial_t \hat{u}(k,t) + i\mu k^2 \hat{u}(k,t) + i\alpha \hat{u}(k,t) = 0 \\ \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k) \text{ with } \hat{f} \in S'(Z)\,, \end{array} \right.$$

$\forall k \in Z$ and we get

$$\hat{u}(k,t) = e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \hat{f}(k)\,,$$

from where we obtain the explicit expression of u, candidate for solution:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t)\phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \hat{f}(k)\phi_k\,, \tag{3.1}$$

$$= \left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \right)_{k\in Z} \right]^{\vee}. \tag{3.2}$$

Since $f \in P'$ then $\hat{f} \in S'(Z)$. Thus, we affirm that

$$\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \right)_{k\in Z} \in S'(Z)\,, \quad \forall t \in I\!R\,. \tag{3.3}$$

Indeed, let $t \in I\!R$, since $\hat{f} \in S'(Z)$ then satisfies: $\exists C > 0$, $\exists N \in I\!N$ such that $|\hat{f}(k)| \leq C|k|^N$, $\forall k \in Z - \{0\}$, using this we get

$$|\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t}| = |\widehat{f}(k)|\, \underbrace{|e^{-i\mu k^2 t}|}_{=1}\, \underbrace{|e^{-i\alpha t}|}_{=1} = |\widehat{f}(k)| \leq C|k|^N\,.$$

Then,

$$\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \right)_{k\in Z} \in S'(Z)\,.$$

If we define

$$u(t) := \left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \right)_{k\in Z} \right]^{\vee}, \quad \text{for all } t \in I\!R\,, \tag{3.4}$$

we have that $u(t) \in P'$, $\forall t \in I\!R$, since we apply the inverse Fourier transform to$(\hat{f}(k)$ $e^{-i\mu k2t} e^{-i\alpha t})_{k\in Z} \in S'(Z)$.

2. We will prove that u defined in (3.4) is solution of (P_2).

Evaluating (3.2) at $t = 0$, we obtain

$$u(0) = \left[\left(\widehat{f}(k) \right)_{k\in Z} \right]^{\vee} = \left[\widehat{f} \right]^{\vee} = f\,.$$

In addition, the following statements are verified.

a) $\partial_t u(t) = i\mu\partial_x^2 u(t) - i\alpha u(t)$ in P', $\forall t \in I\!R$. That is, we will prove that the following equality

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} < \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \varphi >}_{<\partial_t u(t), \varphi> :=} = i\mu < \partial_x^2 u(t), \varphi > -i\alpha < u(t), \varphi >\,,\ \forall \varphi \in P$$

is satisfied, for all $t \in \mathbb{R}$.

Indeed, let $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in P$ and $h \in \mathbb{R} - \{0\}$, we denote

$$I_{h,t} :=< \frac{u(t+h) - u(t)}{h}, \varphi > \ .$$

Thus, we get

$$\begin{aligned}
I_{h,t} &= \frac{1}{h}\{< u(t+h), \varphi > - < u(t), \varphi >\} \\
&= \frac{1}{h}\Bigg\{ \lim_{n \to +\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 (t+h)} e^{-i\alpha(t+h)} \phi_k, \varphi > \\
&\qquad - \lim_{n \to +\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \phi_k, \varphi > \Bigg\} \\
&= \frac{1}{h}\left\{ \lim_{n \to +\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \left(e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1 \right) \phi_k, \varphi > \right\} \\
&= \lim_{n \to +\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \left(\frac{e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1}{h} \right) \phi_k, \varphi > \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \left(\frac{e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1}{h} \right) \underbrace{< \phi_k, \varphi >}_{=2\pi \widehat{\varphi}(-k)} \right\} \\
&= \lim_{n \to +\infty} 2\pi \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \left(\frac{e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1}{h} \right) \widehat{\varphi}(-k) \right\} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \left(\frac{e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1}{h} \right) \widehat{\varphi}(-k) \, . \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Let $h > 0$, we have

$$\begin{aligned}
e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1 &= \int_0^h [e^{-i\mu k^2 s} e^{-i\alpha s}]' \, ds \\
&= \int_0^h (-i\mu k^2 - i\alpha) e^{-i\mu k^2 s} e^{-i\alpha s} \, ds \, . \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Taking norm to equality (3.6) we obtain

$$\begin{aligned}
\left| e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1 \right| &\leq \int_0^h \{\mu |k|^2 + |\alpha|\} \underbrace{|e^{-i\mu k^2 s}|}_{=1} \underbrace{|e^{-i\alpha s}|}_{=1} \, ds \\
&= \{\mu |k|^2 + |\alpha|\} \underbrace{\int_0^h ds}_{=h} \\
&= \{\mu |k|^2 + |\alpha|\} h \, . \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

That is, from (3.7) we get

$$\left| \frac{e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1}{h} \right| \leq \mu |k|^2 + |\alpha| \, . \qquad (3.8)$$

Note that (3.8) is valid for $h \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Using the inequality (3.8) and that $\hat{f} \in S'(\mathbb{Z})$ we obtain

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \underbrace{|e^{-i\mu k^2 t}|}_{=1} \underbrace{|e^{-i\alpha t}|}_{=1} |\widehat{\varphi}(-k)| \left| \frac{e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1}{h} \right| \\
&\quad \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)||\widehat{\varphi}(-k)|\{\mu |k|^2 + |\alpha|\} \\
&\quad = \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)||\widehat{\varphi}(-k)||k|^2 + |\alpha| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)||\widehat{\varphi}(-k)| \\
&\quad \leq C \left\{ \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| + |\alpha| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^N |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| \right\} \\
&\quad = C \left\{ \mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2} |\widehat{\varphi}(J)| + |\alpha| \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^N |\widehat{\varphi}(J)| \right\} < \infty
\end{aligned}
$$

since $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{Z})$.

Using the Weierstrass M-Test, the series $I_{h,t}$ is absolute and uniformly convergent. Then we can take limit and get

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} I_{h,t} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1}{h} \right\}}_{=-i\mu k^2 - i\alpha} \\
&= (-i\mu) 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \widehat{\varphi}(-k) k^2 \\
&\quad - i\alpha 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \widehat{\varphi}(-k) . \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Using (3.9) and that $< T^{(2)}, \varphi >= (-1)^2 < T, \varphi^{(2)} >=< T, \varphi^{(2)} >$ for $\varphi \in P$, $T \in P'$, we have

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} I_{h,t} &= (-i\mu) 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \underbrace{\widehat{\varphi}(-k)}_{=\frac{1}{2\pi} < \varphi, \phi_k >} k^2 \\
&\quad - i\alpha 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \underbrace{\widehat{\varphi}(-k)}_{=\frac{1}{2\pi} < \varphi, \phi_k >} \\
&= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} < \varphi, \underbrace{-k^2 \phi_k}_{=(ik)^2 \phi_k} > \\
&\quad - i\alpha \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} < \varphi, \phi_k > \\
&= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \underbrace{< \varphi, {\phi_k}^{(2)} >}_{=< \varphi^{(2)}, \phi_k >} \\
&\quad - i\alpha \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} < \varphi, \phi_k >
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} < \phi_k, \varphi^{(2)} > \\
&\quad -i\alpha \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} < \phi_k, \varphi > \\
&= i\mu \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} < \phi_k, \varphi^{(2)} > \\
&\quad -i\alpha \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} < \phi_k, \varphi > \\
&= i\mu \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \phi_k, \varphi^{(2)} > \\
&\quad -i\alpha \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \phi_k, \varphi > \\
&= i\mu < u(t), \varphi^{(2)} > -i\alpha < u(t), \varphi > \qquad (3.10) \\
&= i\mu < \partial_x^2 u(t), \varphi > \; -i\alpha < u(t), \varphi > \; .
\end{aligned}$$

Therefore,

$$< \partial_t u(t), \varphi > \;=\; i\mu < \partial_x^2 u(t), \varphi > -i\alpha < u(t), \varphi >, \quad \forall \varphi \in P, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

That is,

$$\partial_t \, u(t) \;=\; i\mu \, \partial_x^2 \, u(t) - i\alpha \; u(t) \qquad \text{in } P', \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

b) $u \in C(\mathbb{R}, P')$. That is, we will prove that

$$u(t+h) \xrightarrow{P'} u(t) \;\; \text{when} \;\; h \to 0\,, \;\forall t \in \mathbb{R}.$$

In effect, let $t \in \mathbb{R}$ and $\varphi \in P$, we will prove that

$$H_{t,h} := < u(t+h) - u(t), \varphi > \longrightarrow 0\,, \qquad \text{when} \;\; h \to 0\,.$$

We know that if $\varphi \in P$ then $\hat{\varphi} \in S(\mathbb{Z})$. Using (3.5) we have

$$H_{t,h} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \left(e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k)\,.$$

Let $0 < |h| < 1$, from (3.8) we get

$$\left| e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1 \right| \leq \mu |k|^2 |h| + |\alpha||h| < \mu |k|^2 + |\alpha|\,. \qquad (3.11)$$

Using (3.11) and that $\hat{f} \in S'(\mathbb{Z})$ we obtain

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \underbrace{|e^{-i\mu k^2 t}|}_{=1} \underbrace{|e^{-i\alpha t}|}_{=1} \left| e^{-i\mu k^2 h} e^{-i\alpha h} - 1 \right| |\widehat{\varphi}(-k)| \\
&\leq C\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| + C|\alpha| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})|
\end{aligned}$$

$$= C\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2}|\widehat{\varphi}(J)| + C|\alpha| \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N}|\widehat{\varphi}(J)| \, < \, \infty$$

since $\hat{\varphi} \in S(Z)$.

Using the Weierstrass M-Test we conclude that the series $H_{t,h}$ converges absolute and uniformly. Then it is possible to take limit and obtain

$$\lim_{h\to 0} H_{t,h} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{h\to 0}\left\{e^{-i\mu k^2 h}e^{-i\alpha h} - 1\right\}}_{=0} \, = \, 0 \, .$$

Since $t \in I\!R$ was taken arbitrarily, then we can conclude that

$$u \in C(I\!R, P') \, .$$

c) $\partial_t u \in C(I\!R, P')$. That is, we will prove that

$$\partial_t u(t+h) \xrightarrow{P'} \partial_t u(t) \quad \text{when} \;\; h \to 0 \, , \;\; \forall t \in I\!R \, .$$

In effect, let $t \in I\!R$ and $\varphi \in P$, using item a) we have

$$\begin{aligned}
&< \partial_t u(t+h), \varphi > - < \partial_t u(t), \varphi > \\
&\quad = i\mu\{< \partial_x^2 u(t+h), \varphi > - < \partial_x^2 u(t), \varphi >\} \\
&\qquad -i\alpha\{< u(t+h), \varphi > - < u(t), \varphi >\} \\
&\quad = i\mu \underbrace{\{< u(t+h), \varphi^{(2)} > - < u(t), \varphi^{(2)} >\}}_{\longrightarrow 0} \\
&\qquad -i\alpha \underbrace{\{< u(t+h), \varphi > - < u(t), \varphi >\}}_{\longrightarrow 0} \; \longrightarrow \; 0 \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

when $h \to 0$, since item b) is valid with $\varphi^{(r)} \in P$ for $r = 0, 2$.

From b) and c) we have that $u \in C^1(I\!R, P')$.

d) Now, if $f_n \xrightarrow{P'} f$ we will prove that:

$$u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t) \, , \quad \forall t \in I\!R \, .$$

We know that if $f_n \xrightarrow{P'} f$ then $\widehat{f_n} \xrightarrow{S'(Z)} \widehat{f}$, that is

$$< \widehat{f_n} - \widehat{f}, \xi > \longrightarrow 0 \quad \text{when} \;\; n \to +\infty \, , \quad \forall \xi \in S(Z) \, . \qquad (3.13)$$

For $t \in I\!R$ fixed and arbitrary, we want to prove that

$$< u_n(t), \psi > \longrightarrow < u(t), \psi > \quad \text{when} \;\; n \to +\infty \, , \quad \forall \psi \in P \, .$$

Thus, let $t \in I\!R$ be fixed and $\psi \in P$, using the generalized Parseval identity, we obtain the following equalities:

$$\begin{aligned}
< u_n(t), \psi > \; &= \; 2\pi < \left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\right)_{k\in Z}, \widehat{\widetilde{\psi}} > \qquad (3.14) \\
< u(t), \psi > \; &= \; 2\pi < \left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\right)_{k\in Z}, \widehat{\widetilde{\psi}} > \, . \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

From (3.14) and (3.15) we obtain:

$$< u_n(t), \psi > - < u(t), \psi >$$
$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)\} \underbrace{e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \widetilde{\widehat{\psi}}(k)}_{\xi_k :=} \longrightarrow 0$$

when $n \to +\infty$, since $\xi := (\xi_k)_{k\in Z} \in S(Z)$ and (3.13) holds.

Corollary 3.1 *Let $\mu > 0$ and $\alpha > 0$, then the unique solution of (P_2) is*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \phi_k = \left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \right)_{k\in Z} \right]^{\vee} ,$$

where $\phi_k(x) = e^{ikx}$, $x \in I\!R$.

3.2 Group of Operators in P'

In this subsection, we will introduce families of operators $\{T_{\mu,\alpha}(t)\}_{t\in I\!R}$ in P', with $\mu > 0$ and $\alpha > 0$; and we will prove that these operators are continuous in the weak sense and satisfy the group properties.

For simplicity, we will denote this family of operators by $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$.

Theorem 3.2 *Let $t \in I\!R$, we define:*

$$\begin{aligned} T(t) : \; P' &\longrightarrow \; P' \\ f &\longrightarrow \; T(t)f := \left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \right)_{k\in Z} \right]^{\vee} \in P' , \end{aligned}$$

then the following statements are satisfied:

1. *$T(0) = I$.*
2. *$T(t)$ is $\mathbb{C}$ - linear and continuous $\forall t \in I\!R$. That is, for every $t \in I\!R$, if $f_n \xrightarrow{P'} f$ then $T(t)f_n \xrightarrow{P'} T(t)f$.*
3. *$T(t + r) = T(t) \circ T(r)$, $\forall t, r \in I\!R$.*
4. *$T(t)f_n \xrightarrow{P'} f$ when $t \to 0$, $\forall f \in P'$.*

That is, for each $f \in P'$ fixed, the following is satisfied

$$< T(t)f, \psi > \longrightarrow < f, \psi >, \text{ when } t \to 0 \,, \forall \psi \in P \,.$$

Proof.- Let $f \in P'$ then $\hat{f} \in S'(Z)$. Then, from (3.3) we have

$$\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \right)_{k\in Z} \in S'(Z) ;$$

taking the inverse Fourier transform, we obtain

$$\underbrace{\left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \right)_{k\in Z} \right]^{\vee}}_{=T(t)f} \in P' , \quad \forall t \in I\!R .$$

That is, $T(t)$ is well defined for all $t \in I\!R$.

1. We easily obtain:

$$T(0)f = \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 0}e^{-i\alpha 0}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} = \left[\left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} = \left[\widehat{f}\right]^{\vee} = f\,, \quad \forall f \in P'\,.$$

2. Let $t \in \mathbb{R}$, we will prove that $T(t) : P' \to P'$ is $\mathbb{C}$-linear. In effect, let $a \in \mathbb{C}$ and $(\phi, \psi) \in P' \times P'$, we have

$$\begin{aligned}
T(t)(a\phi+\psi) &= \left[\left(e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}[a\phi+\psi]^{\wedge}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= \left[\left(e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}[a\widehat{\phi}(k)+\widehat{\psi}(k)]\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= \left[a\left(e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z} + \left(e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\widehat{\psi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= a\left[\left(e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} + \left[\left(e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\widehat{\psi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= a\,T(t)\phi + T(t)\psi\,.
\end{aligned}$$

Now, for $t \in \mathbb{R}$ we will prove that $T(t) : P' \to P'$ is continuous. That is, if $f_n \xrightarrow{P'} f$ then we will prove that $T(t)f_n \xrightarrow{P'} T(t)f$. Note that the case $t = 0$ is obvious. We know that if $f_n \xrightarrow{P'} f$ then $\hat{f}_n \xrightarrow{S'} \hat{f}$, that is,

$$< \widehat{f_n}, \xi > \to < \widehat{f}, \xi >, \quad \text{when } n \to +\infty\,, \quad \forall \xi \in S(Z)\,.$$

That is,

$$< \widehat{f_n} - \widehat{f}, \xi > \to 0\,, \quad \text{when } n \to +\infty\,, \quad \forall \xi \in S(Z)\,. \tag{3.16}$$

We want to prove that:

$$< T(t)f_n, \psi > \to < T(t)f, \psi > \ \text{when } n \to +\infty\,, \quad \forall \psi \in P\,.$$

Thus, let $t \in \mathbb{R}$ fixed and $\psi \in P$, using the generalized Parseval identity, we obtain the following equalities

$$\begin{aligned}
< T(t)f_n, \psi > &= < \left[\left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}, \psi > \\
&= 2\pi < \left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} >,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
< T(t)f, \psi > &= < \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}, \psi > \\
&= 2\pi < \left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > \,.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

From (3.17) and (3.18) we get

$$\begin{aligned}
&< T(t)f_n, \psi > - < T(t)f, \psi > \\
&\quad = 2\pi\left\{< \left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > - < \left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} >\right\} \\
&\quad = 2\pi\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\widetilde{\widehat{\psi}}(k) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\widetilde{\widehat{\psi}}(k)\right\}
\end{aligned}$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)\} \underbrace{e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \widetilde{\widehat{\psi}}(k)}_{\xi_k :=} \longrightarrow 0$$

when $n \to +\infty$, since $\xi := (\xi_k)_{k\in Z} \in S(Z)$ and (3.16) holds, that is $< \hat{f}_n - \hat{f}, \xi > \to 0$ when $n \to +\infty$.

3. Let $t, r \in I\!R - \{0\}$, we will prove that $T(t) \circ T(r) = T(t + r)$. In effect, let $\phi \in P'$,

$$\begin{aligned} T(t+r)\phi &= \left[\left(\widehat{\phi}(k) e^{-i\mu k^2 (t+r)} e^{-i\alpha(t+r)}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= \left[\left(\underbrace{\widehat{\phi}(k) e^{-i\mu k^2 r} e^{-i\alpha r}} \cdot e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Since $\phi \in P'$, using (3.3) we hav`e that

$$\left(\widehat{\phi}(k) e^{-i\mu k^2 r} e^{-i\alpha r}\right)_{k\in Z} \in S'(Z), \quad \forall r \in I\!R. \tag{3.20}$$

Then, taking the inverse Fourier transform, we get:

$$\left[\left(\widehat{\phi}(k) e^{-i\mu k^2 r} e^{-i\alpha r}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P', \quad \forall r \in I\!R.$$

Thus, we define:

$$g_r := \left[\left(\widehat{\phi}(k) e^{-i\mu k^2 r} e^{-i\alpha r}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P'.$$

That is,

$$g_r := T(r)\phi. \tag{3.21}$$

Taking the Fourier transform to g_r we get:

$$\widehat{g_r} = \left(\widehat{\phi}(k) e^{-i\mu k^2 r} e^{-i\alpha r}\right)_{k\in Z},$$

that is,

$$\widehat{g_r}(k) = \widehat{\phi}(k) e^{-i\mu k^2 r} e^{-i\alpha r}, \quad \forall k \in Z. \tag{3.22}$$

Using (3.22) in (3.19) and from (3.21) we have:

$$\begin{aligned} T(t+r)\phi &= \left[\left(\widehat{g_r}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P' \\ &= T(t) g_r \\ &= T(t)(T(r)\phi) \\ &= [T(t) \circ T(r)](\phi), \quad \forall t, r \in I\!R - \{0\}. \end{aligned}$$

So we have proven,

$$T(t+r) = T(t) \circ T(r)\,, \ \forall t, r \in I\!R - \{0\}\,. \tag{3.23}$$

If $t = 0$ or $r = 0$ then equality (3.23) is also true, with this we conclude the proof of

$$T(t+r) = T(t) \circ T(r)\,, \quad \forall t, r \in I\!R\,. \tag{3.24}$$

4. Let $f \in P'$, we will prove that:

$$T(t)f \xrightarrow{P'} f \ \text{ when } t \to 0\,.$$

That is, we will prove that

$$< T(t)f, \varphi > \longrightarrow < f, \varphi > \ \text{ when } t \to 0\,, \quad \forall \varphi \in P\,.$$

In effect, for $t \in I\!R - \{0\}$ and $\varphi \in P$, we have

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_t &:= < T(t)f, \varphi > - < f, \varphi > \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left\{ < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} \phi_k, \varphi > - < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \phi_k, \varphi > \right\} \\
&= \lim_{n \to +\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} - 1 \right) \phi_k, \varphi > \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} - 1 \right) < \phi_k, \varphi > \\
&= \lim_{n \to +\infty} 2\pi \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k) \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \left(e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k)\,. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Since $t \in I\!R - \{0\}$, from (3.8) we get

$$\left| \frac{e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} - 1}{t} \right| \le \mu |k|^2 + |\alpha|\,. \tag{3.26}$$

From (3.26) we obtain

$$\left| e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} - 1 \right| \le \{\mu |k|^2 + |\alpha|\} |t|\,, \quad \forall t \in I\!R\,. \tag{3.27}$$

From (3.27) with $0 < |t| < 1$, we have

$$\left| e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} - 1 \right| \le \mu |k|^2 + |\alpha|\,. \tag{3.28}$$

Then using (3.28) and that $f \in P'$, we obtain

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \left| e^{-i\mu k^2 t} e^{-i\alpha t} - 1 \right| |\widehat{\varphi}(-k)|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\left\{\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2}|\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| + |\alpha| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N}|\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})|\right\} \\
&= C\left\{\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2}|\widehat{\varphi}(J)| + |\alpha| \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N}|\widehat{\varphi}(J)|\right\} \;<\; \infty
\end{aligned}
$$

since $\hat{\varphi} \in S(Z)$.

Using the Weierstrass M-Test we conclude that the H_t series converges absolute and uniformly. So,

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \mathcal{H}_t &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{t\to 0}\{e^{-i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t} - 1\}}_{=0} \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Thus, we have proved

$$
\lim_{t\to 0} < T(t)f, \varphi > = < f, \varphi > \ .
$$

Theorem 3.3 *For each $f \in P'$ fixed and the family of operators $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$ from Theorem 3.2, then the application*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} : I\!R &\longrightarrow P' \\
t &\longrightarrow T(t)f
\end{aligned}
$$

is continuous in $I\!R$. That is,

$$
T(t+h)f \xrightarrow{P'} T(t)f \ \ when\ h \to 0\,,\ \forall t \in I\!R\,. \tag{3.29}
$$

(is the continuity at t).

That is, (3.29) tell us that for each $t \in I\!R$ fixed, the following is satisfied

$$
< T(t+h)f, \psi > \longrightarrow < T(t)f, \psi >\,, \quad when \ \ h \to 0\,,\ \forall\, \psi \in P\,.
$$

And if $t = 0$, we have the continuity of M at 0, which is item 4) of Theorem 3.2.

Proof.- Let $t \in I\!R - \{0\}$, arbitrary fixed and $f \in P'$ then $g := T(t)f \in P'$, using item 4) of Theorem 3.2, we have that $T(h)g \xrightarrow{P'} g$ when $h \to 0$. That is,

$$
\underbrace{T(h)(T(t)f)}_{=\underbrace{[T(h)\circ T(t)]f}_{=T(h+t)f}} \xrightarrow{P'} T(t)f \text{ when } h \to 0\,,
$$

where we use item 3) of Theorem 3.2.

Remark 3.1 *The results obtain in Theorems 3.2 and 3.3 are also valid for the family of operators $\{S(t)\}_{t\in I\!R}$, defined as*

$$
S(t) : P' \ \longrightarrow \ P'
$$

$$f \quad \rightarrow \quad S(t)f := \left[\left(e^{i\mu k^2 t}e^{-i\alpha t}\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee},$$

for $t \in I\!R$. Its proof is similar.

3.3 Version of Theorem 3.1 using the family $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$

We improve the statement of theorem 3.1, using a family of weakly continuous Operators $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$.

Theorem 3.4 *Let $f \in P'$ and the family of operators $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$ from Theorem 3.2, defining $u(t) := T(t)f \in P'$, $\forall t \in I\!R$, then $u \in C(I\!R, P')$ is the unique solution of (P_2). Furthermore, u continuously depends on f. That is, given f_n, $f \in P'$ with $f_n \xrightarrow{P'} f$ implies $u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)$, $\forall t \in I\!R$, where $u_n(t) := T(t)f_n$, $\forall t \in I\!R$ (that is, u_n is a solution of (P_2) with initial data f_n).*

Proof.- It is analogous to the proof of Theorem 3.1.

Corollary 3.2 *Let $f \in P'$ be fixed and the family of operators $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$ from Theorem 3.4, then $\exists\, \partial_t T(t)f$, $\forall t \in I\!R$ and the mapping*

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}:\ I\!R \ &\rightarrow\ P' \\ t\ &\rightarrow\ \partial_t T(t)f = i\mu\partial_x^2 T(t)f - i\alpha T(t)f \end{aligned}$$

is continuous at $I\!R$. That is,

$$\partial_t T(t+h)f \xrightarrow{P'} \partial_t T(t)f \quad when\ h\rightarrow 0\,, \quad \forall t\in I\!R\,. \tag{3.30}$$

(3.30) tells us that for each $t \in I\!R$ fixed, it holds:

$$< \partial_t T(t+h)f, \varphi > \longrightarrow < \partial_t T(t)f, \varphi > \quad when\ h\rightarrow 0\,, \quad \forall \varphi \in P\,.$$

Proof.- Indeed,

$$\begin{aligned} &< \partial_t T(t+h)f, \varphi > \ - \ < \partial_t T(t)f, \varphi > \\ &\qquad = i\mu\{< \partial_x^2 T(t+h)f, \varphi > - < \partial_x^2 T(t)f, \varphi >\} \\ &\qquad\quad -i\alpha\{< T(t+h)f, \varphi > - < T(t)f, \varphi >\} \\ &\qquad = i\mu\{\underbrace{< T(t+h)f, \varphi^{(2)} > - < T(t)f, \varphi^{(2)} >}_{\longrightarrow 0}\} \\ &\qquad\quad -i\alpha\{\underbrace{< T(t+h)f, \varphi > - < T(t)f, \varphi >}_{\longrightarrow 0}\} \ \longrightarrow\ 0 \end{aligned}$$

when $h \rightarrow 0$, due to Theorem 3.3 with $\psi := \varphi^{(J)} \in P$, for $J = 0, 2$.

Corollary 3.3 *Let $f \in P'$ be fixed and the family of operators $\{T(t)\}_{t\in I\!R}$ from Theorem 3.4, then the solution of (P_2): $u(t) := T(t)f$, $\forall t \in I\!R$, satisfies $u \in C^1(I\!R, P')$.*

Proof.- It comes out as a consequence of Corollary 3.2.

Remark 3.2 *If the order of the equation is even and not multiple of four, we can obtain similar results.*

4 I CONCLUSIONS

In our study of the Schrödinger type homogeneous model in the periodic distributional space P', we have obtained the following results:

1. We prove the existence, uniqueness of the solution of the problem (P_2). Thus we also prove the continuous dependence of the solution respect to the initial data.

2. We introduce families of operators in P': $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ and we prove that they are linear and weakly continuous in P'. Furthermore, we proved that they form a group of weakly continuous operators in P'.

3. With the family of operators $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ we improve Theorem 3.1.

4. Finally, we must indicate that this study can be applied to other evolution equations in P'.

REFERENCES

[1] Iorio, R. and Iorio V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University, 2002.

[2] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 32(02)(2017), 207-230.

[3] Candia Estradas, V. and Santiago Ayala, Y. Existence of the solution of a Schrödinger type homogeneous model in Periodic Sobolev Spaces. Selecciones Matemáticas. 09(02)(2022), 357-369.

[4] Santiago Ayala, Y. Results on the well posedness of a distributional differential problem. Selecciones Matemáticas. 08(02)(2021), 348-359.

[5] Santiago Ayala, Y. Existencia de solución de un problema distribucional para una ecuación de Schrödinger generalizada. Selecciones Matemáticas. 09(01)(2022), 91-101.

SEMIGROUP OF WEAKLY CONTINUOUS OPERATORS ASSOCIATED TO A SCHRÖDINGER EQUATION

Data de aceite: 03/04/2023

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas
https://orcid.org/0000-0003-2516- 0871

ABSTRACT: In this article, we prove the existence and uniqueness of the solution of the Schrödinger equation in the periodic distributional space P'. Furthermore, we prove that the solution depends continuously respect to the initial data in P'. Introducing a family of weakly continuous operators, we prove that this family is a semigroup in P'. Then, with this family of operators, we get a fine version of the existence and dependency continuous theorem obtained. Finally, we give some remarks derived from this study.

KEYWORDS: Semigroups theory, weakly continuous operators, existence of solution, Schrödinger equation, distributional problem, periodic distributional space.

1 I INTRODUCTION

We know from [5], with m = 2, that the Schrödinger equation

$$u_t - i\mu\partial_x^2 u = 0 \;\in\; P' \qquad (1.1)$$

with initial data in the periodic distributional sapce: P', has a solution in P'. So we set up the model:

$$u_t - i\mu\partial_x^2 u = \beta\partial_x^2 u \;\in\; P' \qquad (1.2)$$

with initial data in P', which we will solve following the ideas of [4] and [5].

That is, we will prove that (1.2) has a solution and that it is unique. Furthermore, we will demonstrate that the solution depends continuously with respect to the initial data in P', considering the weak convergence in P'. And we will prove that the introduced family of operators forms a semigroup of weakly continuous operators. Thus, with this family we will rewrite our result in an elegant version.

Our article is organized as follows. In section 2, we indicate the methodology used and cite the references used. In section 3, we put the results obtained from our study. This section is divided into three subsections. Thus, in 3.1 we prove that the problem (P_2) has a unique solution and also demonstrate that the solution depends continuously with respect to the initial data. In subsection 3.2, we introduce families of weakly continuous linear operators in P' that manage to form a semigroup. In subsection 3.3 we improve Theorem 3.1.

Finally, in section 4 we give the conclusions of this study.

2 I METHODOLOGY

As theoretical framework in this article we use the references [1], [2], [3], [4] and [5] for Fourier Theory in periodic distributional space, periodic Sobolev spaces, topological vector spaces, weakly continuous operators and existence of solution of a distributional differential equation.

3 I MAIN RESULTS

The presentation of the results obtained has been organized in subsections and is as follows.

3.1 Solution of the Schrödinger Equation (P_2)

In this subsection we will study the existence of a solution to the problem (P_2) and the continuous dependence of the solution with respect to the initial data in P'.

Theorem 3.1 *Let $\mu > 0$, $\beta > 0$ and the distributional problem*

$$(P_2) \quad \left| \begin{array}{l} u \in C([0,+\infty), P') \\ \partial_t u - i\mu\partial_x^2 u = \beta\partial_x^2 u \ \in P' \\ u(0) = f \in P' \,. \end{array} \right.$$

then (P_2) has a unique solution $u \in C^1((0, +\infty), P')$. Furthermore, the solution depends continuously on the initial data. That is, given f_n, $f \in P'$ such that $f_n \xrightarrow{P'} f$ P' implies $u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)$, $\forall t \in [0, +\infty)$, where u_n is solution of (P_2) with initial data f_n and u is solution of (P_2) with initial data f.

Proof.- We have organized the proof as follows.

1. Suppose there exists $u \in C([0, +\infty), P')$ satisfying (P_2), then taking the Fourier transform to the equation

$$\partial_t u - i\mu\partial_x^2 u \;\; = \;\; \beta\partial_x^2 u \,,$$

we get

$$-\beta k^2\hat{u} = \beta(ik)^2\hat{u} \;\; = \;\; \partial_t\hat{u} - i\mu(ik)^2\hat{u} \; = \; \partial_t\hat{u} + i\mu k^2\hat{u},$$

which for each $k \in Z$ is an ODE with initial data $\hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k)$.

Thus, we propose an uncoupled system of homogeneous first-order ordinary differential equations

$$(\Omega_k)\left|\begin{array}{l}\hat{u}\in C((0,+\infty),S'(Z))\\ \partial_t\hat{u}(k,t)+i\mu k^2\hat{u}(k,t)=-\beta k^2\hat{u}(k,t)\\ \hat{u}(k,0)=\hat{f}(k)\text{ with }\hat{f}\in S'(Z)\,,\end{array}\right.$$

$\forall k \in Z$ and we get

$$\hat{u}(k,t)=e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\hat{f}(k)\,,$$

from where we obtain the explicit expression of u, candidate for solution:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{u}(k,t)\phi_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\hat{f}(k)\phi_k\,, \tag{3.1}$$

$$= \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}. \tag{3.2}$$

Since $f \in P'$ then $\hat{f} \in S'(Z)$. Thus, we affirm that

$$\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}\in S'(Z)\,,\quad \forall t\geq 0\,. \tag{3.3}$$

Indeed, let $t \geq 0$, since $\hat{f} \in S'(Z)$ then satisfies: $\exists C > 0$, $\exists N \in IN$ such that $|\hat{f}(k)| \leq C|k|^N$, $\forall k \in Z - \{0\}$, using this we get

$$|\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}| = |\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}|\underbrace{e^{-\beta k^2 t}}_{\leq 1} \leq |\widehat{f}(k)|\underbrace{|e^{-i\mu k^2 t}|}_{=1} = |\widehat{f}(k)| \leq C|k|^N\,.$$

Then,

$$\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}\in S'(Z)\,.$$

If we define

$$u(t):=\left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}\,,\qquad \text{for all } t\geq 0\,, \tag{3.4}$$

we have that $u(t) \in P'$, $\forall t \geq 0$, since we apply the inverse Fourier transform to $(\hat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t})_{k\in Z} \in S'(Z)$.

2. We will prove that u defined in (3.4) is solution of (P_2).

Evaluating (3.2) at $t = 0$, we obtain

$$u(0)=\left[\left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}=\left[\widehat{f}\right]^{\vee}=f\,.$$

In addition, the following statements are verified.

a) $\partial_t u(t) = i\mu\partial_x^2 u(t) + \beta\,\partial_x^2 u(t)$ in P', $\forall t \geq 0$. That is, we will prove that it is satisfied:

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} < \frac{u(t+h)-u(t)}{h}, \varphi >}_{<\partial_t u(t),\varphi>:=} = i\mu < \partial_x^2 u(t),\varphi > +\beta < \partial_x^2 u(t),\varphi >\,,\ \ \forall\varphi\in P$$

and for all $t \geq 0$.

Indeed, let $t > 0$, $\varphi \in P$ and $0 < |h| < t$, we denote

$$I_{h,t} :=< \frac{u(t+h)-u(t)}{h}, \varphi > \;.$$

Thus, we get

$$\begin{aligned}
I_{h,t} &= \frac{1}{h}\{< u(t+h), \varphi > - < u(t), \varphi >\} \\
&= \frac{1}{h}\left\{ \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 (t+h)} e^{-\beta k^2 (t+h)} \phi_k, \varphi > \right. \\
&\qquad \left. - \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \phi_k, \varphi > \right\} \\
&= \frac{1}{h}\left\{ \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \left(e^{-i\mu k^2 h} e^{-\beta k^2 h} - 1 \right) \phi_k, \varphi > \right\} \\
&= \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \left(\frac{e^{-i\mu k^2 h} e^{-\beta k^2 h} - 1}{h} \right) \phi_k, \varphi > \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \left(\frac{e^{-i\mu k^2 h} e^{-\beta k^2 h} - 1}{h} \right) \underbrace{< \phi_k, \varphi >}_{=2\pi\widehat{\varphi}(-k)} \right\} \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2\pi \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \left(\frac{e^{-i\mu k^2 h} e^{-\beta k^2 h} - 1}{h} \right) \widehat{\varphi}(-k) \right\} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \left(\frac{e^{-i\mu k^2 h} e^{-\beta k^2 h} - 1}{h} \right) \widehat{\varphi}(-k) \,. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Let $h > 0$, we have

$$\begin{aligned}
e^{-i\mu k^2 h} e^{-\beta k^2 h} - 1 &= \int_0^h [e^{-i\mu k^2 s} e^{-\beta k^2 s}]' \, ds \\
&= \int_0^h (-i\mu k^2 - \beta k^2) e^{-i\mu k^2 s} e^{-\beta k^2 s} \, ds \,. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Taking norm to equality (3.6) we obtain

$$\begin{aligned}
\left| e^{-i\mu k^2 h} e^{-\beta k^2 h} - 1 \right| &\leq \int_0^h \{\mu|k|^2 + \beta|k|^2\} \underbrace{|e^{-i\mu k^2 s}|}_{=1} \underbrace{e^{-\beta k^2 s}}_{\leq 1} \, ds \\
&= \{\mu|k|^2 + \beta|k|^2\} \underbrace{\int_0^h ds}_{=h} \\
&= \{\mu|k|^2 + \beta|k|^2\} h \,. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

That is, from (3.7) we get

$$\left|\frac{e^{-i\mu k^2 h}e^{-\beta k^2 h}-1}{h}\right| \le \mu|k|^2+\beta|k|^2\,. \tag{3.8}$$

Using the inequality (3.8) and that $\hat{f} \in S'(Z)$ we obtain

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|\, \underbrace{|e^{-i\mu k^2 t}|}_{=1}\, \underbrace{e^{-\beta k^2 t}}_{\le 1} |\widehat{\varphi}(-k)| \left|\frac{e^{-i\mu k^2 h}e^{-\beta k^2 h}-1}{h}\right| \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)||\widehat{\varphi}(-k)|\{\mu|k|^2+\beta|k|^2\} \\
&= \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)||\widehat{\varphi}(-k)||k|^2 + \beta \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)||\widehat{\varphi}(-k)||k|^2 \\
&\le C\left\{\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2}|\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| + \beta \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2}|\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})|\right\} \\
&= C\left\{\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2}|\widehat{\varphi}(J)| + \beta \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2}|\widehat{\varphi}(J)|\right\} < \infty
\end{aligned}$$

since $\hat{\varphi} \in S(Z)$.

Using the Weierstrass M-Test, the series $I_{h,t}$ is absolutely and uniformly convergent. Then we can take limit and get

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} I_{h,t} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{h\to 0}\left\{\frac{e^{-i\mu k^2 h}e^{-\beta k^2 h}-1}{h}\right\}}_{=-i\mu k^2-\beta k^2} \\
&= (-i\mu)2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \widehat{\varphi}(-k) k^2 \\
&\quad -\beta 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \widehat{\varphi}(-k) k^2\,.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Using (3.9) and that $< T^{(2)}, \varphi >= (-1)^2 < T, \varphi^{(2)} >=< T, \varphi^{(2)} >$ for $\varphi \in P$, $T \in P'$, we have

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} I_{h,t} &= (-i\mu)2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \underbrace{\widehat{\varphi}(-k)}_{=\frac{1}{2\pi}<\varphi,\phi_k>} k^2 \\
&\quad -\beta 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \underbrace{\widehat{\varphi}(-k)}_{=\frac{1}{2\pi}<\varphi,\phi_k>} k^2 \\
&= i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} < \varphi, \underbrace{-k^2\phi_k}_{=(ik)^2\phi_k} >
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\beta \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} < \varphi, \underbrace{-k^2\phi_k}_{=(ik)^2\phi_k} > \\
= \; & i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \underbrace{< \varphi, \phi_k{}^{(2)} >}_{=<\varphi^{(2)},\phi_k>} \\
& +\beta \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \underbrace{< \varphi, \phi_k{}^{(2)} >}_{=<\varphi^{(2)},\phi_k>} \\
= \; & i\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} < \phi_k, \varphi^{(2)} > \\
& +\beta \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} < \phi_k, \varphi^{(2)} > \\
= \; & i\mu \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} < \phi_k, \varphi^{(2)} > \\
& +\beta \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} < \phi_k, \varphi^{(2)} > \\
= \; & i\mu \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \phi_k, \varphi^{(2)} > \\
& +\beta \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \phi_k, \varphi^{(2)} > \\
= \; & i\mu < u(t), \varphi^{(2)} > +\beta < u(t), \varphi^{(2)} > \qquad (3.10) \\
= \; & i\mu < \partial_x^2 u(t), \varphi > \; +\beta < \partial_x^2 u(t), \varphi > \; .
\end{aligned}
$$

Therefore,

$$
< \partial_t u(t), \varphi > \; = \; i\mu < \partial_x^2 u(t), \varphi > +\beta < \partial_x^2 u(t), \varphi >, \quad \forall \varphi \in P, \quad \forall t \geq 0 .
$$

That is,

$$
\partial_t u(t) = i\mu\, \partial_x^2 u(t) + \beta\, \partial_x^2 u(t) \qquad \text{in } P', \quad \forall t \geq 0 .
$$

b) $u \in C([0, +\infty), P')$. That is, we will prove that

$$
u(t+h) \xrightarrow{P'} u(t) \;\; \text{when} \;\; h \to 0, \; \forall t \geq 0 .
$$

In effect, let $t > 0$ and $\varphi \in P$, we will prove that

$$
H_{t,h} := < u(t+h) - u(t), \varphi > \longrightarrow 0, \qquad \text{when} \;\; h \to 0 .
$$

We know that if $\varphi \in P$ then $\hat{\varphi} \in S(Z)$. Using (3.5) we have

$$H_{t,h} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \left(e^{-i\mu k^2 h} e^{-\beta k^2 h} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k) \,.$$

Let $0 < h < 1$, form (3.8) we get

$$\left| e^{-i\mu k^2 h} e^{-\beta k^2 h} - 1 \right| \le \mu |k|^2 |h| + \beta k^2 |h| < \mu |k|^2 + \beta |k|^2 \,. \qquad (3.11)$$

Using (3.11) and that $\hat{f} \in S'(Z)$ we obtain

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)| \underbrace{|e^{-i\mu k^2 t}|}_{=1} \underbrace{e^{-\beta k^2 t}}_{\le 1} \left| e^{-i\mu k^2 h} e^{-\beta k^2 h} - 1 \right| |\widehat{\varphi}(-k)| \\ &\le C\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| + C\beta \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2} |\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})| \\ &= C\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2} |\widehat{\varphi}(J)| + C\beta \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2} |\widehat{\varphi}(J)| \; < \; \infty \end{aligned}$$

since $\hat{\varphi} \in S(Z)$.

Using the Weierstrass M-Test we conclude that the series $H_{t,h}$ converges absolutely and uniformly. Then it is possible to take limit and obtain

$$\lim_{h \to 0} H_{t,h} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \widehat{\varphi}(-k) \underbrace{\lim_{h \to 0} \left\{ e^{-i\mu k^2 h} e^{-\beta k^2 h} - 1 \right\}}_{=0} \; = \; 0 \,.$$

Since $t \in \mathbb{R}^+$ was taken arbitrarily, then we can conclude that

$$u \in C([0, \infty), P') \,.$$

c) $\partial_t u \in C(\mathbb{R}^+, P')$. That is, we will prove that

$$\partial_t u(t+h) \xrightarrow{P'} \partial_t u(t) \quad \text{when} \;\; h \to 0 \,, \;\; \forall t \in \mathbb{R}^+ \,.$$

In effect, let $t \in \mathbb{R}^+$ and $\varphi \in P$, using item a) we have

$$\begin{aligned} &< \partial_t u(t+h), \varphi > - < \partial_t u(t), \varphi > \\ &\quad = i\mu \{ < \partial_x^2 u(t+h), \varphi > - < \partial_x^2 u(t), \varphi > \} \\ &\quad\quad + \beta \{ < \partial_x^2 u(t+h), \varphi > - < \partial_x^2 u(t), \varphi > \} \\ &\quad = i\mu \underbrace{\{ < u(t+h), \varphi^{(2)} > - < u(t), \varphi^{(2)} > \}}_{\longrightarrow 0} \\ &\quad\quad + \beta \underbrace{\{ < u(t+h), \varphi^{(2)} > - < u(t), \varphi^{(2)} > \}}_{\longrightarrow 0} \; \longrightarrow \; 0 \qquad (3.12) \end{aligned}$$

when $h \to 0$, since item b) is valid with $\varphi^{(2)} \in P$.

From b) and c) we have that $u \in C^1(\mathbb{R}^+, P')$.

d) Now, if $f_n \xrightarrow{P'} f$ we will prove that:

$$u_n(t) \xrightarrow{P'} u(t)\,, \quad \forall t \in I\!R^+\,.$$

We know that if $f_n \xrightarrow{P'} f$ then $\hat{f}_n \xrightarrow{S'(Z)} \hat{f}_n$, that is

$$< \widehat{f_n} - \widehat{f}, \xi > \longrightarrow 0 \quad \text{when } n \to +\infty\,, \quad \forall \xi \in S(Z)\,. \tag{3.13}$$

For $t \in I\!R^+$ fixed and arbitrary, we want to prove that

$$< u_n(t), \psi > \longrightarrow < u(t), \psi > \quad \text{when } n \to +\infty\,, \quad \forall \psi \in P\,.$$

Thus, let $t \in I\!R^+$ be fixed and $\psi \in P$, using the generalized Parseval identity, we obtain the following equalities:

$$< u_n(t), \psi > \;=\; 2\pi < \left(\widehat{f_n}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > \tag{3.14}$$

$$< u(t), \psi > \;=\; 2\pi < \left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > . \tag{3.15}$$

From (3.14) and (3.15) we obtain:

$$\begin{aligned} &< u_n(t), \psi > - < u(t), \psi > \\ &\qquad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)\} \underbrace{e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \widetilde{\widehat{\psi}}(k)}_{\xi_k :=} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

when $n \to +\infty$, since $\xi := (\xi_k)_{k\in Z} \in S(Z)$ and (3.13) holds.

Corollary 3.1 *Let $\mu > 0$ and $\beta > 0$, then the unique solution of (P_2) is*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \phi_k = \left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}\,,$$

where $\phi_k(x) = e^{ikx}$, $x \in I\!R$.

3.2 Semigroup of Operators in P'

Let's remember that P' is the topological dual of P, where P is a complete metric space.

In this subsection, we will introduce families of operators $\{T_{\mu,\beta}(t)\}_{t\geq 0}$ in P', with $\mu > 0$ and $\beta > 0$; and we will prove that these operators are continuous in the weak sense and satisfy the semigroup properties.

For simplicity, we will denote this family of operators by $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Theorem 3.2 *Let $t \geq 0$, $\mu > 0$ and $\beta > 0$, we define:*

$$\begin{aligned} T(t) :\; P' &\longrightarrow P' \\ f &\longrightarrow T(t)f := \left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P'\,, \end{aligned}$$

then the following statements are satisfied:

1. *$T(0) = I$.*
2. *$T(t)$ is $\mathbb{C}$ - linear and continuous $\forall t \geq 0$. That is, for every $t \geq 0$, if $f_n \xrightarrow{P'} f$ then $T(t)$*

$f_n \xrightarrow{P'} f$ $T(t)f$.

3. $T(t+r) = T(t) \circ T(r)$, $\forall t, r \geq 0$.

4. $T(t)f \xrightarrow{P'} f$ when $t \to 0^+$, $\forall f \in P'$.

That is, for each $f \in P'$ fixed, the following is satisfied

$$< T(t)f, \psi > \longrightarrow < f, \psi >, \quad when \;\; t \to 0^+ \,, \; \forall \psi \in P \,.$$

Proof.- Let $f \in P'$ then $\hat{f} \in S'(Z)$. Then, from (3.3) we have

$$\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z} \in S'(Z)\,;$$

taking the inverse Fourier transform, we obtain

$$\underbrace{\left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}}_{=T(t)f} \in P'\,, \quad \forall t \geq 0\,.$$

That is, $T(t)$ is well defined for all $t \geq 0$.

1. We easily obtain:

$$T(0)f = \left[\left(\widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 0} e^{-\beta k^2 0}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} = \left[\left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} = \left[\widehat{f}\right]^{\vee} = f\,, \quad \forall f \in P'\,.$$

2. Let $t \in \mathbb{R}^+$, we will prove that $T(t): P' \to P'$ is $\mathbb{C}$-linear. In effect, let $\alpha \in \mathbb{C}$ and $(\phi, \psi) \in P' \times P'$, we have

$$\begin{aligned}
T(t)(a\phi + \psi) &= \left[\left(e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} [a\phi + \psi]^{\wedge}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= \left[\left(e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} [a\widehat{\phi}(k) + \widehat{\psi}(k)]\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= \left[a\left(e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z} + \left(e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \widehat{\psi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= a\left[\left(e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} + \left[\left(e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \widehat{\psi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\
&= a\,T(t)\phi + T(t)\psi\,.
\end{aligned}$$

Now, for $t \in \mathbb{R}^+$ we will prove that $T(t): P' \to P'$ is continuous. That is, if $f_n \xrightarrow{P'} f$ we will prove that $T(t)f_n \xrightarrow{P'} T(t)f$.

We know that if $f_n \xrightarrow{P'} f$ then $\hat{f}_n \xrightarrow{S'} \hat{f}$, that is,

$$< \widehat{f_n}, \xi > \to < \widehat{f}, \xi >, \quad \text{when } n \to +\infty\,, \quad \forall \xi \in S(Z)\,.$$

That is,

$$< \widehat{f_n} - \widehat{f}, \xi > \to 0\,, \quad \text{when } n \to +\infty\,, \quad \forall \xi \in S(Z)\,. \tag{3.16}$$

We want to prove that:

$$< T(t)f_n, \psi > \to < T(t)f, \psi > \;\text{ when } n \to +\infty\,, \quad \forall \psi \in P\,.$$

Thus, let $t \in \mathbb{R}^+$ fixed and $\psi \in P$, using the generalized Parseval identity, we obtain the following equalities

$$\begin{aligned} < T(t)f_n, \psi > &= < \left[\left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}, \psi > \\ &= 2\pi < \left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} >, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} < T(t)f, \psi > &= < \left[\left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}, \psi > \\ &= 2\pi < \left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > . \end{aligned} \tag{3.18}$$

From (3.17) and (3.18) we get

$$\begin{aligned} &< T(t)f_n, \psi > - < T(t)f, \psi > \\ &= 2\pi \left\{ < \left(\widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > - < \left(\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}, \widetilde{\widehat{\psi}} > \right\} \\ &= 2\pi \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f_n}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\widetilde{\widehat{\psi}}(k) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\widetilde{\widehat{\psi}}(k) \right\} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)\} \underbrace{e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\widetilde{\widehat{\psi}}(k)}_{\xi_k :=} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

when $n \to +\infty$, since $\xi := (\xi_k)_{k\in Z} \in S(Z)$ and (3.16) holds, that is $< \hat{f}_n - \hat{f}, \xi > \to 0$ when $n \to +\infty$.

3. Let $t, r \in \mathbb{R}^+$, we will prove that $T(t) \circ T(r) = T(t + r)$. In effect, let $\phi \in P'$,

$$\begin{aligned} T(t+r)\phi &= \left[\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 (t+r)}e^{-\beta k^2 (t+r)}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= \left[\left(\underbrace{\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}e^{-\beta k^2 r}} \cdot e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Since $\phi \in P'$, using (3.3) we hav`e that

$$\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}e^{-\beta k^2 r}\right)_{k\in Z} \in S'(Z), \quad \forall r \in [0, +\infty) . \tag{3.20}$$

Then, taking the inverse Fourier transform, we get:

$$\left[\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}e^{-\beta k^2 r}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P', \quad \forall r \in [0, +\infty) .$$

Thus, we define:

$$g_r := \left[\left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}e^{-\beta k^2 r}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P' .$$

That is,

$$g_r := T(r)\phi . \tag{3.21}$$

Taking the Fourier transform to g_r we get:

$$\widehat{g_r} = \left(\widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}e^{-\beta k^2 r}\right)_{k\in Z},$$

that is,

$$\widehat{g_r}(k) = \widehat{\phi}(k)e^{-i\mu k^2 r}e^{-\beta k^2 r}, \quad \forall k \in Z. \tag{3.22}$$

Using (3.22) in (3.19) and from (3.21) we have:

$$\begin{aligned} T(t+r)\phi &= \left[\left(\widehat{g_r}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in P' \\ &= T(t)g_r \\ &= T(t)(T(r)\phi) \\ &= [T(t)\circ T(r)](\phi), \quad \forall t,r \in I\!R^+. \end{aligned}$$

So we have proven,

$$T(t+r) = T(t)\circ T(r), \ \forall t,r \in I\!R^+. \tag{3.23}$$

If $t = 0$ or $r = 0$ then equality (3.23) is also true, with this we conclude the proof of

$$T(t+r) = T(t)\circ T(r), \quad \forall t,r \in [0,+\infty). \tag{3.24}$$

4. Let $f \in P'$, we will prove that:

$$T(t)f \xrightarrow{P'} f \ \text{ when } t \to 0^+.$$

That is, we will prove that

$$< T(t)f,\varphi > \longrightarrow < f,\varphi > \quad \text{when } t \to 0^+, \quad \forall \varphi \in P.$$

In effect, for $t > 0$ and $\varphi \in P$, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t &:= < T(t)f,\varphi > - < f,\varphi > \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left\{< \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\phi_k,\varphi > - < \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\phi_k,\varphi >\right\} \\ &= \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\left(e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}-1\right)\phi_k,\varphi > \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\left(e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}-1\right) < \phi_k,\varphi > \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2\pi\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)\left(e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}-1\right)\widehat{\varphi}(-k) \\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)\left(e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}-1\right)\widehat{\varphi}(-k). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Since $t > 0$, from (3.7) we get

$$\left|e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}-1\right| \leq \{\mu|k|^2+\beta|k|^2\}t\,. \tag{3.26}$$

From (3.26) we obtain

$$\left|e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}-1\right| \leq \{\mu|k|^2+\beta|k|^2\}t\,, \quad \forall t\in[0,+\infty)\,. \tag{3.27}$$

From (3.27) with $0 < t < 1$, we have

$$\left|e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}-1\right| \leq \mu|k|^2+\beta|k|^2\,. \tag{3.28}$$

Then using (3.28) and that $f \in P'$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|\left|e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}-1\right||\widehat{\varphi}(-k)| \\
&\quad\leq C\left\{\mu\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k|^{N+2}|\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})|+\beta\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k|^{N+2}|\widehat{\varphi}(\underbrace{-k}_{=J})|\right\} \\
&\quad= C\left\{\mu\sum_{J=-\infty}^{+\infty}|J|^{N+2}|\widehat{\varphi}(J)|+\beta\sum_{J=-\infty}^{+\infty}|J|^{N+2}|\widehat{\varphi}(J)|\right\} \;<\; \infty
\end{aligned}$$

since $\hat{\varphi} \in S(Z)$.

Using the Weierstrass M-Test we conclude that the H_t series converges absolutely and uniformly. So,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to0^+}\mathcal{H}_t &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)\widehat{\varphi}(-k)\underbrace{\lim_{t\to0^+}\{e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}-1\}}_{=0} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Thus, we have proved

$$\lim_{t\to0^+} < T(t)f,\varphi > = < f,\varphi > \,.$$

Theorem 3.3 *For each $f \in P'$ fixed and the family of operators $\{T(t)\}_{t\geq0}$ from Theorem 3.2, then the application*

$$\begin{aligned}
\zeta \,:\, [0,+\infty) &\longrightarrow P' \\
t &\longrightarrow T(t)f
\end{aligned}$$

is continuous in $[0, +\infty)$. That is,

$$T(t+h)f \xrightarrow{P'} T(t)f \;\; when\;\; h\to0\,,\;\forall t\in[0,+\infty)\,. \tag{3.29}$$

(is the continuity at t).

That is, (3.29) tell us that for each $t \in (0, +\infty)$ fixed, the following is satisfied

$$< T(t+h)f,\psi > \longrightarrow < T(t)f,\psi >\,, \quad when\;\; h\to0\,,\;\forall\,\psi\in P\,.$$

If $t = 0$, we have the continuity of ζ at 0 on the right, which is item 4) of Theorem 3.2.

Proof.- Let $t > 0$, arbitrary fixed, then $g := T(t)f \in P'$, using item 4) of Theorem 3.2, we have that $T(h)g \xrightarrow{P'} g$ when $h \to 0^+$. That is,

$$\underbrace{\underbrace{T(h)(T(t)f)}_{=[T(h)\circ T(t)]f}}_{=T(h+t)f} \xrightarrow{P'} T(t)f \text{ when } h \to 0^+ ,$$

where we use item 3) of Theorem 3.2. With this we have proved that

$$T(t+h)f \xrightarrow{P'} T(t)f \text{ when } h \to 0^+ , \ \forall t \in (0,+\infty) . \tag{3.30}$$

Now, we will prove that $T(t+v)f \xrightarrow{P'} T(t)f$ when $v \to 0^-$. That is, we will demonstrate

$$< T(t-h)f, \varphi > \longrightarrow < T(t)f, \varphi > \text{ when } h \to 0^+ , \quad \forall \varphi \in P . \tag{3.31}$$

In effect, for $t > h > 0$ and $\varphi \in P$, we have

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{t,h} &:= < T(t-h)f, \varphi > - < T(t)f, \varphi > \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Bigg\{ < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2(t-h)} e^{-\beta k^2(t-h)} \phi_k, \varphi > \\
&\qquad - < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \phi_k, \varphi > \Bigg\} \\
&= \lim_{n\to+\infty} < \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \left(e^{i\mu k^2 h} e^{\beta k^2 h} - 1 \right) \phi_k, \varphi > \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \left(e^{i\mu k^2 h} e^{\beta k^2 h} - 1 \right) < \phi_k, \varphi > \\
&= \lim_{n\to+\infty} 2\pi \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \left(e^{i\mu k^2 h} e^{\beta k^2 h} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k) \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) e^{-i\mu k^2 t} e^{-\beta k^2 t} \left(e^{i\mu k^2 h} e^{\beta k^2 h} - 1 \right) \widehat{\varphi}(-k) . \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

In the series (3.32), we need to delimit the expression $e^{-i\mu k}2he^{-\beta k}2h - 1$. So, we have

$$\begin{aligned}
e^{i\mu k^2 h} e^{\beta k^2 h} - 1 &= \int_0^h [e^{(i\mu k^2 + \beta k^2)s}]' ds \\
&= (i\mu k^2 + \beta k^2) \int_0^h e^{(i\mu k^2 + \beta k^2)s} ds . \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Taking norm to equality (3.33) and using: $\int_0^h e^{(\beta k2)s}\, ds \le e^{(\beta k2)h} h$ for $h > 0$, we obtain

$$\begin{aligned}
|e^{i\mu k^2 h} e^{\beta k^2 h} - 1| &\le |i\mu k^2 + \beta k^2| \int_0^h e^{(\beta k^2)s}\, ds \\
&\le \{\mu|k|^2 + \beta|k|^2\} e^{(\beta k^2)h} \cdot h \\
&\le \{\mu|k|^2 + \beta|k|^2\} e^{(\beta k^2)h} \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

whenever $0 < h < 1$.

Using inequality (3.34) and $e^{-\beta k2(t-h)} \leq 1$ for $0 < h < t$ with $h << 1$, we have

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)||e^{-i\mu k^2 t}|e^{-\beta k^2 t}\left|e^{i\mu k^2 h}e^{\beta k^2 h}-1\right| |\widehat{\varphi}(-k)| \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)|e^{-\beta k^2(t-h)}\left\{\mu|k|^2+\beta|k|^2\right\}|\widehat{\varphi}(-k)| \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)||\widehat{\varphi}(-k)|\left\{\mu|k|^2+\beta|k|^2\right\} \\
&\leq \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)||\widehat{\varphi}(-k)||k|^2 + \beta \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k)||\widehat{\varphi}(-k)||k|^2 \\
&\leq C\left\{\mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2}|\widehat{\varphi}(-k)| + \beta \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{N+2}|\widehat{\varphi}(-k)|\right\} \\
&\leq C\left\{\mu \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2}|\widehat{\varphi}(J)| + \beta \sum_{J=-\infty}^{+\infty} |J|^{N+2}|\widehat{\varphi}(J)|\right\} < \infty \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

since $\hat{\varphi} \in S(Z)$.

Using the Weierstrass M-Test e obtain that the series $\mathcal{L}_{h,t}$ is absolutely and uniformly convergent.

Then, we can take limit and get:

$$\lim_{h\to 0^+} \mathcal{L}_{h,t} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k)e^{-i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t} \underbrace{\lim_{h\to 0^+}\left\{e^{i\mu k^2 h}e^{\beta k^2 h}-1\right\}}_{=0} \widehat{\varphi}(-k) = 0\,,$$

with this (3.31) is proved.

From (3.30) and (3.31) we conclude that

$$T(t+h)f \xrightarrow{P'} T(t)f \text{ when } h \to 0\,,\ \forall t \in (0,+\infty)\,. \qquad (3.36)$$

Remark 3.1 *The results obtain in Theorems 3.2 and 3.3 are also valid for the family of operators* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, *defined as*

$$
\begin{aligned}
S(t): P' &\longrightarrow P' \\
f &\rightarrow S(t)f := \left[\left(e^{i\mu k^2 t}e^{-\beta k^2 t}\widehat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee},
\end{aligned}
$$

for $t \in [0, +\infty)$. *Its proof is similar.*

3.3 Version of Theorem 3.1 using the family $\{T(t)\}_{t\geq 0}$

We improve the statement of theorem 3.1, using a family of weakly continuous Operators $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Theorem 3.4 *Let* $f \in P'$ *and the family of operators* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *from Theorem 3.2, defining* $u(t) := T(t)f \in P'$, $\forall t \in [0, +\infty)$, *then* $u \in C([0, +\infty), P')$ *is the unique solution of* (P_2). *Furthermore, u continuously depends on f. That is, given* f_n, $f \in P'$ *with* $f_n \xrightarrow{P'} f$ *implies* $u_n(t)$

$\xrightarrow{P'} u(t)$, $\forall t \in [0, +\infty)$, *where* $u_n(t) := T(t)f_n$, $\forall t \in [0, +\infty)$ *(that is,* u_n *is a solution of* (P_2) *with initial data* f_n*).*

Proof.- It is analogous to the proof of Theorem 3.1.

Corollary 3.2 *Let* $f \in P'$ *be fixed and the family of operators* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *from Theorem 3.4, then* $\exists\, \partial_t T(t)f$, $\forall t \in (0, +\infty)$ *and the mapping*

$$\begin{array}{rcl} \eta:\ (0,+\infty) & \to & P' \\ t & \to & \partial_t T(t)f = i\mu\partial_x^2 T(t)f + \beta\partial_x^2 T(t)f \end{array}$$

is continuous at $(0, +\infty)$*. That is,*

$$\partial_t T(t+h)f \xrightarrow{P'} \partial_t T(t)f \quad when\ h \to 0\,, \quad \forall t \in (0,+\infty)\,. \tag{3.37}$$

(3.37) tells us that for each $t \in (0, +\infty)$ *fixed, it holds:*

$$< \partial_t T(t+h)f, \varphi > \longrightarrow < \partial_t T(t)f, \varphi > \quad when\ h \to 0\,, \quad \forall \varphi \in P\,.$$

Proof.- Indeed,

$$\begin{aligned} &< \partial_t T(t+h)f, \varphi > - < \partial_t T(t)f, \varphi > \\ &\quad = i\mu\{< \partial_x^2 T(t+h)f, \varphi > - < \partial_x^2 T(t)f, \varphi >\} \\ &\qquad + \beta\{< \partial_x^2 T(t+h)f, \varphi > - < \partial_x^2 T(t)f, \varphi >\} \\ &\quad = i\mu\{\underbrace{< T(t+h)f, \varphi^{(2)} > - < T(t)f, \varphi^{(2)} >}_{\longrightarrow 0}\} \\ &\qquad + \beta\{\underbrace{< T(t+h)f, \varphi^{(2)} > - < T(t)f, \varphi^{(2)} >}_{\longrightarrow 0}\} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

when $h \to 0$, due to Theorem 3.3 with $\psi := \varphi^{(2)} \in P$.

Corollary 3.3 *Let* $f \in P'$ *be fixed and the family of operators* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *from Theorem 3.4, then the solution of* (P_2)*:* $u(t) := T(t)f$, $\forall t \in [0, +\infty)$, *satisfies* $u \in C^1((0, +\infty), P')$.

Proof.- It comes out as a consequence of Corollary 3.2.

Remark 3.2 *We can generalize this study to the even case not multiple of four, obtaining analogous results.*

4 I CONCLUSIONS

In our study of the Schrödinger equation in the periodic distributional space P', for the case (P_2) we have obtained the following results:

1. We prove the existence, uniqueness of the solution of the problem (P_2). Thus we also prove the continuous dependence of the solution respect to the initial data.

2. We introduce families of operators in P': $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ and we prove that they are linear and weakly continuous in P'. Furthermore, we proved that they form a semigroup of weakly continuous operators in P'.

3. With the family of operators $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ we improve Theorem 3.1.

4. Finally, we must indicate that this study (or technique) can be applied to other evolution equations in P'.

REFERENCES

[1] Iorio, R. and Iorio V. Fourier Analysis and partial Differential Equations. Cambridge University, 2002.

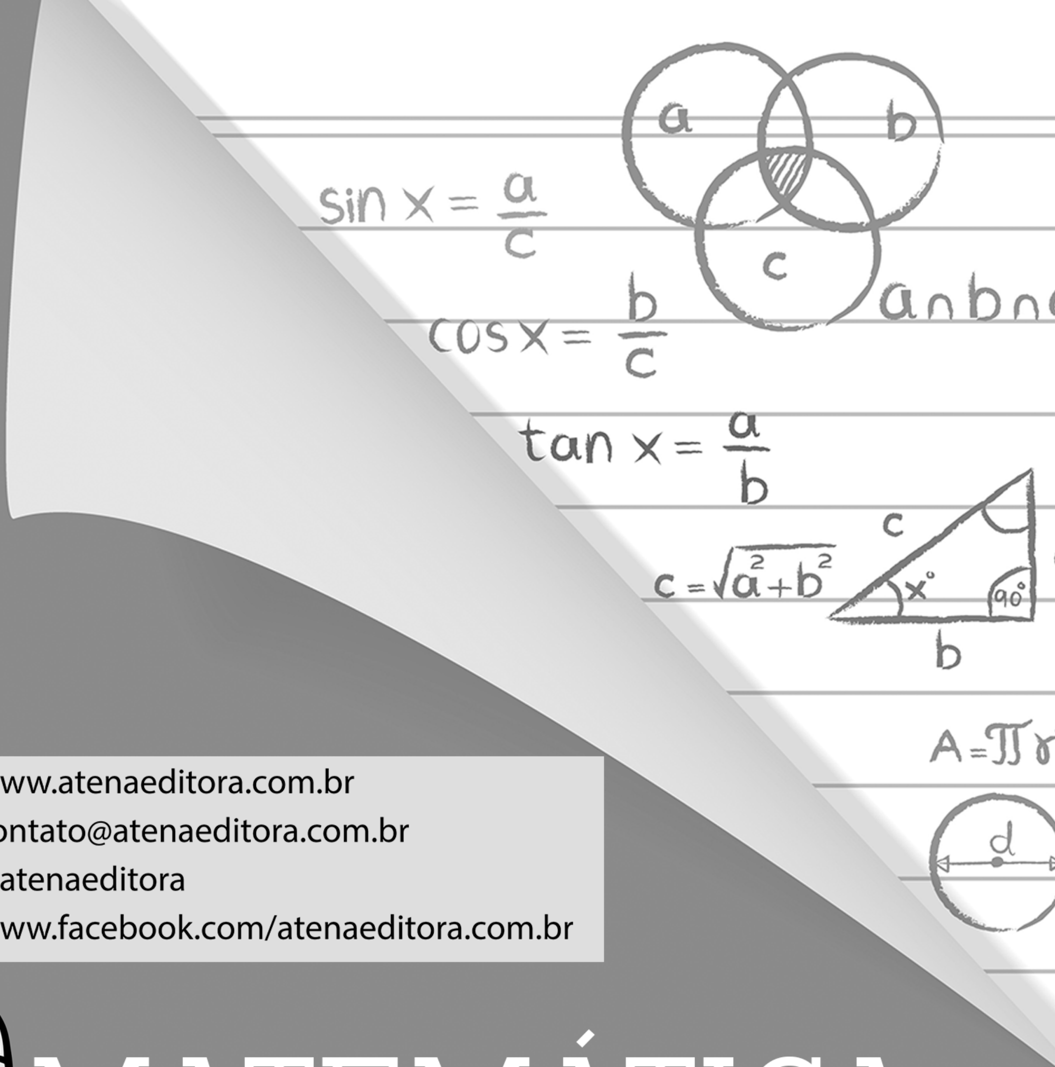
[2] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit. Bulletin of the Allahabad Mathematical Society. 32(02)(2017), 207-230.

[3] Santiago Ayala, Y. and Rojas, S. Existencia y regularidad de solución de la ecuación de Schrödinger no homog´enea en espacios de Sobolev Periódico. Selecciones Matemáticas. 08(01)(2021), 37-51.

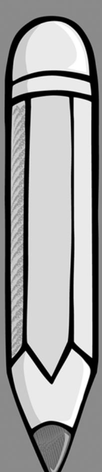
[4] Santiago Ayala, Y. Results on the well posedness of a distributional differential problem. Selecciones Matemáticas. 08(02)(2021), 348-359.

[5] Santiago Ayala, Y. Existencia de solución de un problema distribucional para una ecuación de Schrödinger generalizada. Selecciones Matemáticas. 09(01)(2022), 91-101.

ANIELE DOMINGAS PIMENTEL SILVA - Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática e especialização em Educação Matemática pela Universidade Federal do Pará - UFPA. Mestre em Educação pela Universidade Federal do Oeste do Pará - UFOPA, na linha de pesquisa "Práticas Educativas, Linguagens e Tecnologias", com ênfase em Modelagem Matemática e Tecnologias, atualmente é doutoranda pelo Programa de Pós-Graduação em Educação na Amazônia PGEDA/EDUCANORTE (2022) da Universidade Federal do Oeste do Pará – UFOPA, atuando na linha de pesquisa "Educação na Amazônia: formação do educador, práxis pedagógica e currículo". Integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Interdisciplinaridade na Amazônia - GEPEIMAZ. Tem experiência como professora de matemática na educação básica pela Secretaria Municipal de Educação de Santarém-PA, professora colaboradora na UFOPA no programa PARFOR nos cursos de Licenciatura integrada em Matemática e Física e professora substituta no Instituto Federal do Amapá – IFAP em turmas do ensino médio integrado e de ensino superior.



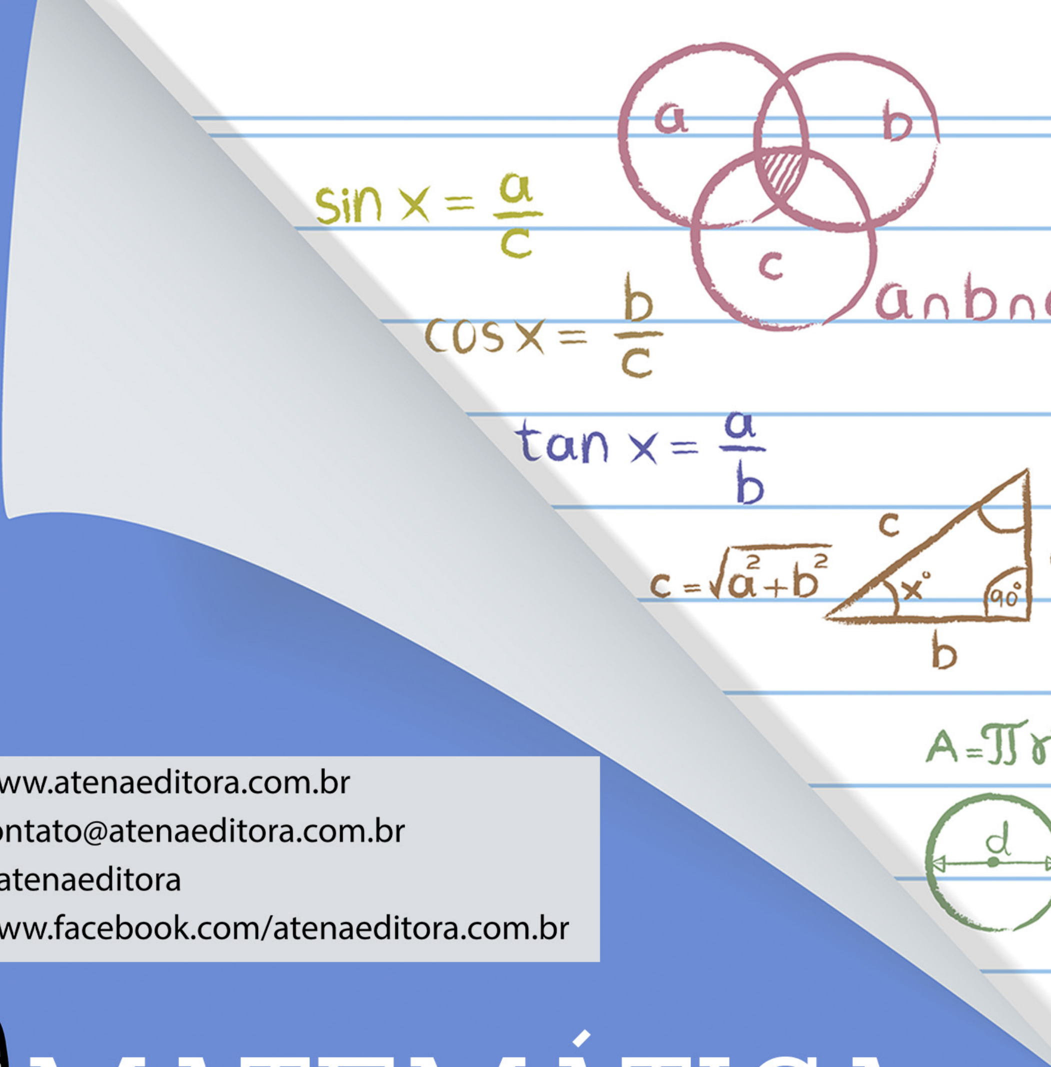
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br



MATEMÁTICA:

O sujeito e o conhecimento matemático

Atena Editora
Ano 2023



www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

MATEMÁTICA:

O sujeito e o conhecimento matemático

Atena Editora
Ano 2023