Ricardo da Silva Souza
Camila Leão Cardozo

MATEMÁTICA ELEMENTAR PARA ECONOMIA

VOL.1

Atena Editora
Ano 2023

Ricardo da Silva Souza

Camila Leão Cardozo

MATEMÁTICA ELEMENTAR PARA ECONOMIA

VOL.1

Atena Editora

Ano 2023

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS

CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS

Matemática elementar para ciências econômicas e administração - Volume 1

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Yaiddy Paola Martinez
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Autores: Ricardo da Silva Souza
Camila Leão Cardozo

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S729 Souza, Ricardo da Silva
Matemática elementar para ciências econômicas e administração - Volume 1 / Ricardo da Silva Souza, Camila Leão Cardozo. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2023.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-1008-9
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.089232302

1. Economia matemática. 2. Administração. I. Souza, Ricardo da Silva. II. Cardozo, Camila Leão. III. Título.
CDD 330.015195

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao conteúdo publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que o texto publicado está completamente isento de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

PREFÁCIO

Este livro possui a utilidade e a finalidade de auxiliar os estudantes das áreas de Economia e de Administração aos estudos da matemática contida nas diretrizes básicas de nossa educação.

O objetivo desta publicação é proporcionar ao aluno o conhecimento de conteúdos que quando inseridos a um nível acadêmico, são tomados como pré-requisitos de aprendizagem do aluno nos anos finais do Ensino Fundamental.

De fato, este conteúdo não permite ser exaustivo, nem menos detalhista, uma vez que os componentes curriculares de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental possuem significativa extensão de conteúdo.

Uma vez permitido o conhecimento destes conteúdos, a abordagem de outro tipo de conhecimento predeterminado a um aluno entrante na graduação em Ciências Econômicas e Administração se torna mais fácil. Este conhecimento está associado aos conteúdos trabalhados nos anos do Ensino Médio e, posteriormente, será o segundo volume desta coleção.

Os meus anos como docente da disciplina Matemática para Economia e da extensão de Matemática Elementar para as Ciências Econômicas nas instituições que lecionamos até este momento a Universidade Estadual do Norte de Paraná (UENP) e a Universidade Estadual de Londrina (UEL) me proporcionaram a realizar este conteúdo. Torço com carinho que este material possa chegar aos alunos que necessitam e que façam excelente proveito deste conteúdo.

Os autores

SUMÁRIO

OS NÚMEROS

COMO SURGIU O SISTEMA NUMÉRICO?

O número surgiu a partir do momento a partir do momento em que existiu a necessidade de contar objetos e coisas, há mais de 30 mil anos. Os homens nessa época viviam em grupos e não sabiam representar os números, mas tinham a necessidade de contar.

Desta forma, o primeiro conjunto historicamente registrado foi o conjunto dos números naturais pela necessidade de contar do ser humano.

1 I OS NÚMEROS NATURAIS

Os números naturais são os números estritamente positivos que não possuem vírgula, ou seja, representado por quantidades inteiras. O **conjunto dos números naturais** pode ser representado da seguinte maneira:

$$N = \{1,2,3,4,5,6,...\}$$

O conjunto dos números naturais é um conjunto infinito, ou seja, dado um número natural qualquer, existe pelo menos um número maior que ele.

Exemplos:

- $2 \in N$
- $10 \in N$
- $100 \in N$
- $-1 \notin N$
- $1{,}33 \notin N$

Percebe-se que não são todos os números que conhecemos que pertencem ao conjunto dos números naturais.

2 I OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS

As operações com os números naturais têm certas condições avaliativas que mostram a natureza de seu conjunto. Verifique as seguintes situações a partir do julgamento entre verdadeiro ou falso. Caso negativo, justifique:

1. A adição entre dois naturais resulta em um número natural?
2. A subtração entre dois naturais resulta em um número natural?
3. A multiplicação entre dois naturais resulta em um número natural?

4. A divisão entre dois naturais resulta em um número natural?

Para complementar, segue um desafio: O quociente entre dois números naturais é 10. Multiplicando-se o dividendo por 5 e reduzindo o divisor à metade, o quociente da nova divisão será:

a) 2

b) 5

c) 25

d) 50

e) 100

3 I OS NÚMEROS NEGATIVOS

Na época do Renascimento, os matemáticos começaram a sentir a necessidade de contar com números específicos para garantir a boa resolução de equações simples. Era necessário novos símbolos para representar fenômenos como a temperatura e, na economia, perdas e dívidas.

Desta forma surgiram os números negativos que basicamente são representações "opostas" aos números naturais, simetricamente a origem, que é o número zero.

Da união dos números negativos, positivos e o zero, constrói-se o **conjunto dos números inteiros** (Z). O conjunto é representado por:

$$Z = \{...,3,2,1,0,1,2,3,...\}$$

$$= \{...,-3,-2,-1\} \text{ U } \{0\} \text{ U } N$$

4 I OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Da mesma forma que os números naturais, os números inteiros possuem propriedades operatórias características. Julgue verdadeiro ou falso cada sentença abaixo. Caso negativo, justifique:

1. A adição entre dois inteiros resulta em um inteiro?

2. A subtração entre dois inteiros resulta em um inteiro?

3. A multiplicação entre dois inteiros resulta em um inteiro?

4. A divisão entre dois inteiros resulta em um inteiro?

Desafio: Se a soma e a diferença entre dois números inteiros são iguais a 33 e 7, respectivamente, o produto desses números é:

a) 400

b) 260

c) 13

d) 20

e) 169

5 | VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO INTEIRO

O **módulo** ou **valor absoluto** de um número inteiro é a distância desse número até a origem da reta numérica. Em outras palavras, o módulo é a distância entre zero e o número observado na unidade de medida em que a reta foi construída.

Como não existem distâncias negativas, o módulo sempre será um número positivo. Além disso, o módulo de um número é representado por esse número entre duas barras, como em: | -2 | .

Então, o módulo de é a distância desse número até zero, portanto,

| -2 | =2.

6 | NÚMEROS RACIONAIS

Vimos que a divisão entre dois números inteiros não necessariamente resulta em um número inteiro. Para tanto, dados dois números inteiros α e b, com b≠0, a divisão de α por b é um número racional.

Representamos o **conjunto dos números racionais** por Q e seu conjunto é formado por:

$$Q = \left\{\frac{a}{b} : a \in Z, b \in Z, b \neq 0\right\}$$

Isto é, podemos representar um número racional como uma fração, ou seja, é uma divisão cujo dividendo é α e o divisor é b, com α e b inteiros e b≠0. O resultado dessa divisão pode ser ou não um número inteiro. As representações não inteiras são chamadas decimais.

Desafio: Qual desses números não é um número racional?

a) 3

b) -3

c) 0,8999999...

d) $\frac{3}{5}$

e) 1,34687994616971...

7 | O CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Em relação ao desafio anterior, o número 1,34687994616971... é um número irracional (I). Os **números irracionais** são os números que não podem ser representados por uma fração.

A união entre o conjunto dos números racionais (Q) e dos números irracionais (I) gera o conjunto dos **números reais**, isto é:

$$R = Q \cup I$$

8 | OPERAÇÕES COM NÚMEROS REAIS

Iremos estudar três pares de operações com números reais:

- Adição e Subtração;
- Multiplicação e Divisão;
- Potenciação e Radiciação.

8.1 Adição e Subtração de Números Reais

Veja esses dois exemplos:

Exemplo1: Clara estava devendo R$30,00 para Erasmo. Porém, Erasmo perdoou a dívida.

Na situação apresentada, ao "se livrar" da dívida, é como se Clara tivesse ganhado R$30,00 de Erasmo e então pagado a ele para quitar o que estava devendo. Matematicamente:

$$-(-30) = +30$$

Exemplo 2: Jessica foi ao Shopping com R$ 90,00. Porém, ao pegar o dinheiro para comprar um lanche, percebeu que havia perdido R$40,00, pois ela estava com apenas R$ 50,00.

Nesse caso, Jessica ficou com R$ 20,00 a menos do que tinha no início. A expressão correspondente será:

$$+90 -(+40) = 90 - 40 = 50.$$

Observe as quatro expressões abaixo:

i. $(+5)+(+3)$

ii. $(+5)+(-3)$

iii. $(-5)+(+3)$

iv. (-5)+(-3)

Os resultados da adição serão iguais? Por quê?

Regra: O sinal de "-" antes dos parênteses indica que devemos fazer uma troca pelo oposto (simétrico) do número que está dentro dos parênteses.

Por exemplo:

$$+3 - (+4) = 3 - 4 = -1.$$

8.2 Multiplicação e divisão de Números Reais

Observe os seguintes exemplos abaixo:

Exemplo 1: Ao sacar dinheiro no banco, Carlos recebeu 5 cédulas de R$ 100,00 Carlos. Quanto ele recebeu?

Carlos pode somar todas as notas ou fazer uma multiplicação:

$$100+100+100+100+100+100=5x100=500$$

A multiplicação e a divisão entre dois números positivos resultam em um número positivo.

Exemplo 2: Em um jogo de tabuleiro, Mariana retirou a carta "volte duas casas" três vezes seguidas. Quantas casas ela voltou?

Podemos representar a situação da Marina da seguinte forma:

$$3.(-2)=(-2)+(-2)+(-2)=-6$$

A multiplicação e a divisão entre um número positivo e um número negativo, ou vice-versa, resulta em um número negativo.

Veja as quatro expressões abaixo:

i. (+2)(+3)

ii. (+2)(-3)

iii. (-2)(+3)

iv. (-2)(-3)

Os resultados da multiplicação serão iguais? Por quê?

A multiplicação e a divisão entre dois números negativos resultam em um número negativo.

9 I OPERAÇÃO ENTRE FRAÇÕES

A fração é uma divisão entre dois inteiros e as relações vistas anteriormente são conservadas. Agora, veremos as operações de adição, multiplicação e divisão entre frações.

9.1 Adição de frações

Na adição de frações, devemos transformar ambos os números em frações equivalentes cujo denominador seja igual.

Exemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

Devemos multiplicar o numerador e o denominador do primeiro termo por 3 e do segundo termo por 2:

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{3}+\frac{1}{3}.\frac{2}{2}$$

A soma de frações de mesmo denominador é simples: Repete-se o denominador e some o numerador.

$$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}.$$

9.2 Multiplicação de frações

A multiplicação entre frações é relativamente simples. Basta multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador.

Exemplo:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{8}{15}$$

9.3 Divisão entre frações

A divisão entre frações aplica-se a seguinte regra: Repita a primeira fração e inverta os números do numerador e do denominador da segunda fração. Exemplo:

$$\frac{2}{3}:\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{10}{12}$$

9.4 Potenciação entre números reais

Potência é todo número na forma $a^n=b$, na qual a é a base, n é o expoente e b é a potência.

$$a^n = a.a.a\ldots a, n \text{ vezes}$$

Por convenção, admitimos que:

- Todo número elevado a 0 é igual a 1 ↔ $a^0=1$.

- Todo número elevado a 1 é igual a ele mesmo 1 ↔ $\alpha^1=\alpha$.
- Toda potência com base igual a 0, sendo o expoente n ≠ 0, é igual a 0 ↔ $0^n=0$.

9.5 Potências cuja base é negativa

Deve tomar cuidado quando a base é negativa. A regra é o número do expoente:

- Se o expoente é par, o sinal se altera.

Exemplo: $(-3)^2=(-3).(-3)=9$.

- Se o expoente é ímpar, o sinal não se altera.

Exemplo: $(-3)^3=(-3).(-3).(-3)=-27$.

9.6 Radiciação entre números reais

Só um lembrete sobre números resultantes de radiciação:

- Quando o índice do radical é par, admitiremos apenas raízes reais, por exemplo: $\sqrt{4} = 2$.
- Quando o índice do radical é ímpar, as raízes têm o mesmo sinal do radicando, isto é, admite-se raízes positivas e negativas, por exemplo: $\sqrt[3]{-27} = -3$.

9.7 Expressões Numéricas com Números Reais

Geralmente, usamos expressões maiores e, para organizá-las, se utilizam os símbolos: parênteses, colchetes e chaves.

A ordem dos “símbolos” na resolução das expressões:

- 1º Resolvemos as operações que estão entre os parênteses ().
- 2º Resolvemos as operações entre colchetes [ ].
- 3º Resolvemos as operações entre chaves { }.

As operações também uma ordem que deve ser respeitada.

- 1º Resolvemos as potenciações e as radiciações.
- 2º Resolvemos as multiplicações e divisões.
- 3º Resolvemos as adições e subtrações.

Exemplo:

$-(-6).(-5)+\{10-[-3.(+2)+(72-4)+\sqrt{64}]+4:(-2)\}=$

Resolvemos primeiramente dentro das chaves a potenciação e a radiciação:

$-(-3).(-5)+\{10-[-3.(+2)+(49-4)+8]+4:(-2)\}=$

Depois, a multiplicação e a divisão dentro das chaves:

-(-3).(-5)+{10-[-6+(49-4)+8]-2}=

Depois, a adição e subtração dentro das chaves, primeiramente dentro das chaves:

$$-(-3).(-5) + \{10 - [-6 + (45) + 8] - 2\} =$$

$$-(-3).(-5) + \{10 - [+47] - 2\} =$$

$$-(-3).(-5) + \{10 - 47 - 2\} =$$

$$-(-3).(-5) + \{-39\} =$$

$$-(-3).(-5) - 39 =$$

E por fim, a multiplicação entre os números dos parênteses:

-15 -39 = -54

Exercício

1.Resolva a expressão

[-20 -5 -15]: (-8) - (-5)

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Um pouquinho da História da Álgebra

A palavra **álgebra** vem da palavra árabe al-jabr utilizado no livro Ciência da Redução, do matemático Árabe Al- Khwarizmi, nos meados do século IX a.c, em que ideias presentes neste livro tornaram possível a representação dos números por meio de letras, como utilizamos atualmente.

- Babilônia: tábuas de argila contendo problemas e resoluções
- Egito: Papiro de Rhind, em 1650 a.C, contém resoluções de aritmética e geometria.
- Grécia: Século III, A obra Arithmética continha resoluções de equações de primeiro e segundo grau.
- Mundo moderno: Simbologia que conhecemos atualmente, o uso das letras para representar algo desconhecido, François Viete.

Muitos matemáticos foram fundamentais para chegar na Matemática atual. E esse processo se alastrou em Economia. Nós, economistas, usamos símbolos e letras para representar fenômenos econômicos.

Para avançar o conceito de incógnita. Veja o exemplo da empresa The Suco: A empresa produz 300 litros de suco por hora. Sendo assim, podemos formalizar a produção por hora:

- $t=1 \rightarrow 1.300 = 300$
- $t=2 \rightarrow 2.300 = 600$
- ...
- $t=T \rightarrow T.300 = 300T$

Assim, da formalização, é possível escrever uma regra que associa o tempo (em horas) e a produção de suco, chamada **expressão algébrica**.

1 I CONCEITO DE VARIÁVEL

Ao substituir a letra T por um número que represente o tempo transcorrido, é possível calcular, de maneira rápida e prática a produção de suco.

Em uma expressão matemática se as letras assumem o valor de um número qualquer elas são chamadas de **variáveis**.

Definição informal de incógnita e variável

De maneira informal e, também, "irresponsável" diferenciaremos o que é incógnita e o que é variável.

- Incógnita: Dada expressão ou equação, você encontra o valor da "letra" para determinada lei.
- Variável: Aplica-se valores as "letras" e para determinada lei você encontrará um determinado resultado.

Exercícios

1. Faça a conversão da linguagem comum para a linguagem algébrica utilizando a variável x.

a) O dobro de um número.

b) Um número.

c) Um número mais 5.

d) O sucessor de um número.

e) A metade de um número.

f) A terça parte de um número.

g) A soma de um número com 9.

2. Seja um quadrilátero de base igual a b e altura a+b. Determine as expressões, respectivamente, da área e do perímetro:

a) $a + b; a^2 + b$

b) $2a + b; a^2b^2$

c) $a + 2b; a^2 + b^2$

d) $2a + 4b; b^2 + ab$

e) $a^2; (a + b)^2$

2 I FORMALIZAÇÃO DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Ao transcrever as situações do slide anterior foi necessário utilizar letras, números e operações. Essas representações são chamadas de **expressões algébricas**.

As expressões algébricas são compostas por termos. O que diferencia um termo do outro são os sinais de + ou -. A expressão 5x-2 apresenta dois termos, o 5x e o -2.

Cada termo pode ser composto de duas partes: **coeficiente numérico** (os números e o sinal) e a **parte literal** (as letras, incluindo seus expoentes, caso possuam).

Exemplo:

Termo 5x

- Coeficiente numérico =5;

- Parte literal = x.

Termo: -2

- Coeficiente numérico = -2;
- Parte literal = não há.

Um termo sempre apresentará coeficiente numérico. Caso o coeficiente numérico não apareça no termo ele tem valor 1 (caso positivo) ou -1 (caso negativo), por exemplo:

$$x = 1.x \qquad -y = (-1).y$$

A parte literal pode ou não aparecer em um coeficiente, exemplo:

$$4 + 0x = 4 \qquad -10 - 0y = -10$$

Exercícios

1. Dos termos a seguir, identifique o coeficiente numérico e a parte literal.

a) x.

b) $3xy$.

c) -100.

d) $1{,}3ab^2$.

e) $-x^3$.

f) m^2n.

g) 19.

3 I TERMOS SEMELHANTES

Se, em uma expressão, dois ou mais termos apresentam a mesma parte literal, podemos chamá-los de **semelhantes**.

Exemplo:

3x e 7x são semelhantes, pois possuem a mesma parte literal: x

4x e $9x^2$ não são semelhantes, pois não possuem a mesma parte literal, isto é: $x \neq x^2$.

12y e -9z não são semelhantes, pois não possuem a mesma parte literal, isto é: $y \neq z$.

4 I OPERAÇÕES NAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

As operações nas expressões algébricas ocorrem com o objetivo de reduzir a expressão. Desta forma, as operações de redução ocorrem apenas em termos semelhantes.

Exemplo 1: 10x - 4x

Note que 10x e 4x são semelhantes, pois x é o termo “comum”. Logo:

$$10x - 4x = (10 - 4)x = 6x$$

Exemplo 2: 3k + 2t

Note que 3k e 2t não são semelhantes, pois x e t não são semelhantes.

Exercício

1. Dada a expressão $x^2 + 4y^2 - 2x + 2y + y - 5x + 4 - 1 + x.x,$ a sua forma reduzida será:

a) $x^2 + 4y^2 - 7x + 3y + 3$

b) $x^2 + 4y^2 - 7x + 3y + 3 + x.x$

c) $2x^2 + 4y^2 - 7x + 3y + 3$

d) $x^2 + 4y^2 - 7x + 3y + 3 + x$

e) $2x^2 + 4y^2 - 7x + 3y + 3 + x.x$

5 I VALOR NUMÉRICO DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Como vimos, é possível usar a linguagem algébrica em expressões que representam situações. As letras auxiliam na visualização dessas expressões e são substituídas por números para que se descubra o valor numérico desta expressão.

Ao substituir a variável por um número específico, transformamos a expressão algébrica em uma expressão numérica. Ao calcular seu valor, dizemos que encontramos **o valor numérico da expressão algébrica**.

Exemplo

Veja esta situação: Emerson conserta geladeiras e atende em domicílio. Ele cobra R$ 65,00 pela visita e R$40,00 a cada peça que precisa ser substituída.

Escreva uma expressão algébrica que represente o valor cobrado pelos serviços de Emerson.

Podemos representar o valor cobrado pelos serviços de Emerson da seguinte forma: 65+40p, sendo p a quantidade de peças que serão trocadas.

Se, ao prestar um serviço, Emerson trocou 4 peças de uma geladeira. Quanto ele deve cobrar por um trabalho?

Resolução:

Sabemos que o valor a ser cobrado é expresso por: 65+40p

Se ele trocou 4 peças, devemos substituir a letra p pelo número 4, logo:

$$65 + 40p = 65 + 40.4 = 65 + 160 = 225$$

Resposta: Emerson deve cobrar R$225,00 pelo trabalho.

Exercícios

1. Encontre o valor numérico das expressões algébricas a seguir para $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$ e $x = 3$.

a) $3x + 2$

b) $x - 5$

c) $x + 2 + x$

d) $x^2 + 2 - 2x$

e) $5x$

2. Uma empresa tem a seguinte expressão de custos: $C_f + C_v$, em que C_f é chamado de custo fixo e C_v é chamado de custo variável. Se os custos fixos dessa empresa são R$ 100,00 e os custos variáveis, 8.q, em que q é a quantidade produzida. Determine o total de custos dessa empresa, quando q=8.

a) 160

b) 162

c) 164

d) 166

e) 168

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

As equações expressam uma igualdade por meio de operações entre números e letras. Para ser uma equação, é necessário que a operação tenha ao menos uma letra.

As letras são chamadas de incógnitas, pois representam um valor específico que, inicialmente, é desconhecido.

Exemplo:

- $x + 10 = 15$ → É uma equação com a incógnita x.
- $m^2+m+1=0$ → É uma equação com a incógnita .
- $3y>2y+5$ → Não é uma equação, pois não representa uma igualdade.

1 | GRAU DE UMA EQUAÇÃO

O grau de uma equação é dado pelo maior expoente de sua incógnita.

Exemplos:

- $8x^2 - 3x + 7 = 1$ → O maior expoente da incógnita é , então a equação é de segundo grau.
- $x^5 - 25 = x^3$ → O maior expoente da incógnita é 5, então a equação é de quinto grau.

2 | ESTRUTURA DE UMA EQUAÇÃO

Uma equação é dividida por dois membros. O **primeiro membro** é a parte da equação que fica à esquerda do sinal de igual; o **segundo membro** é a parte da equação que fica à direita do sinal de igual.

Exemplo:

$$x - 5 = 13$$

Note que x-5 é o primeiro membro e 13, o segundo membro.

3 | RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE PRIMEIRO GRAU COM UMA INCÓGNITA

A partir deste momento, focaremos nossos estudos na resolução de equações do primeiro grau com uma incógnita, aquelas que podem ser escritas na forma $ax + b = 0$, em que a e b representam números reais, com $a \neq 0$ e x representando a incógnita da equação.

Estudaremos dois importantes princípios de equivalência: o princípio aditivo eo princípio multiplicativo.

Princípio aditivo da igualdade ao adicionar ou subtrair um mesmo elemento a dois membros de uma igualdade, obtemos uma nova igualdade, equivalente à inicial. Observe a igualdade:

$$3 + 4 = 7$$

Adicionamos 2 unidades em cada membro.

$$3 + 4 + 2 = 7 + 2$$
$$9 = 9$$

Ao adicionar a mesma quantidade aos dois membros da igualdade, obtemos uma nova igualdade.

Princípio multiplicativo da igualdade ao multiplicar ou dividir os dois membros da igualdade por um mesmo elemento diferente de zero, obtemos uma nova igualdade, equivalente a inicial.

Observe a igualdade:

$$3 + 7 = 4 + 6$$

Multiplicamos os membros por 3.

$$3.(3 + 7) = 3.(4 + 6)$$

$$3.(10) = 3.(10)$$

$$30 = 30$$

Também pode se aplicar a propriedade multiplicativa.

4 | RESOLUÇÃO A PARTIR DOS PRINCÍPIOS ADITIVO E MULTIPLICATIVO

Em uma equação, o objetivo é identificar seu valor desconhecido (incógnita). Para isso precisamos utilizar os princípios de equivalência, que tornam possível a escrita de equações diferentes, porém, equivalentes, de modo a chegar ao resultado: encontrar o valor da incógnita que satisfaz a igualdade dada inicialmente.

Exemplo:

Resolveremos a equação 4x - 5 = x - 20.

Uma forma de iniciar essa equação é cancelar o termo -5. Para isso, adicionamos

5 em ambos os membros.

$$4x - 5 = x - 20$$

$$4x - 5 + 5 = x - 20 + 5$$

$$4x = x - 15$$

Na equação, a incógnita x está presente nos dois membros. Precisamos, então, cancelar a incógnita em um dos membros. Quando isso acontece, é mais fácil excluir a incógnita de menor quantidade que, no caso, é o termo x. Para isso, adicionamos -x em ambos os membros.

$$4x = x - 15$$

$$4x - x = x - x - 15$$

$$3x = -15$$

$$\frac{3}{3}x = -\frac{15}{3}$$

$$x = -5$$

5 I RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES UTILIZANDO OPERAÇÕES INVERSAS

Ao resolver equações utilizando os princípios de equivalência, você percebeu, que para cancelar uma adição, é necessário inserir uma subtração; para cancelar uma divisão, usamos a multiplicação, e assim por diante. Assim, nesses casos, a resolução das equações sempre será realizada por uma operação inversa.

Relações das operações inversas

Portanto, segue, a relação das operações com cada operação inversa:

- Adição ↔ Subtração
- Multiplicação ↔ Divisão
- Potenciação ↔ Radiciação

Passos para resolução

Os processos para aplicar a operação inversa exige seguir 3 passos:

- Passo 1: Deixar os termos que apresentam incógnita em um membro da equação e os que não tem incógnita no outro, utilizando as operações inversas sempre que mudar um termo de membro.

- Passo 2: Agrupar os termos semelhantes em cada membro.
- Passo 3: Deixar a incógnita isolada, sem o coeficiente numérico (coeficiente igual a 1), trocando de membro por meio das operações inversas, se necessário.

Exemplo

Resolveremos a equação

2x -4 = 12.

Retira-se o termo -4 do primeiro membro para o segundo membro, aplicando a operação inversa, neste caso, da subtração para a adição.

$$2x - 4 = 12$$

$$2x = 12 + 4$$

$$2x = 16$$

Como a incógnita tem coeficiente numérico diferente de 1, no primeiro membro, aplica-se a operação inversa a multiplicação do coeficiente com a incógnita, neste caso, a divisão, ao segundo membro.

$$2x = 16$$

$$x = \frac{16}{2}$$

$$x = 8$$

Exercícios:

1. Resolva as seguintes equações:

a) $2x - 7 = 7$

b) $8y - 6 = 10$

c) $7x + 1 = 9 + 5x$

d) $m + 9m + 5 = -15$

e) $5t + 1 = -94$

f) $15 - x = x + 25$

g) $8x - 72 = 2x$

h) $20a - 13 = 20 + 9a$

2. Resolva as seguintes equações:

a) $3(x - 10) = x - 16$

b) $2y = 5(y - 9)$

c) $x + (x + 2) - 3(1 - x) = 2(5 - 3x)$

d) $3(1 - b) - 2(b + 1) = 9(b - 1) + 6$

e) $3(t - 3) - 2t = 2(1 - t) + 1$

f) $3x - \frac{12}{3} - x = \frac{2x}{3}$

3. Resolva os problemas a seguir utilizando equações:

a) Qual é o número cuja metade menos 5 é igual a 9?

b) A soma de dois números consecutivos é 35. Quais números são esses?

INEQUAÇÕES

Em diversos momentos do nosso dia a dia, fazemos comparações. Ao falar, por exemplo, de preços, altitudes ou qualidades, utilizamos termos como igual, diferente, mais, menos, maior ou menor. Em Matemática, essas comparações são representadas por sinais. Quando referimos as igualdades e sua negação, as desigualdades, referimos as equações. Agora, para as demais comparações utilizamos as desigualdades e associamos as inequações.

1 I REPRESENTAÇÃO DOS SINAIS

Uma sentença matemática que representa uma desigualdade pode utilizar um dos sinais a seguir:

- = igual
- ≠ diferente
- < menor
- ≤ menor ou igual
- > maior
- ≥ maior ou igual

Situações

Observe as situações a seguir expressas por meio de desigualdades:

- O saldo da conta de Guilherme é diferente de R$100,00.

$$s \neq 100$$

- A altura de Jéssica (1,47 m) é menor que a altura de Paula (1,52 m).

$$1{,}47<1{,}52$$

2 I DEFINIÇÃO DE INEQUAÇÃO

Inequação são desigualdades que apresentam, pelo menos, uma incógnita.

Exemplos:

$$x - 9 > 0$$

$$2x - 4 < 12 - x$$

$$3x - x \leq 9 + 14$$

As inequações também apresentam princípios de equivalência.

Princípio aditivo da desigualdade: ao adicionar ou subtrair um mesmo elemento aos dois membros de uma desigualdade, obtemos uma nova desigualdade equivalente a inicial.

Exemplo: Considere a desigualdade

$$1 < 4$$

Adicionando 3 aos dois membros, temos:

$$1 + 3 < 3 + 4$$
$$4 < 7$$

3 I PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO DA DESIGUALDADE

I - Ao multiplicar ou dividir os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número positivo, obtemos uma nova desigualdade, de mesmo sentido que a inicial.

Exemplo: Considere a desigualdade

$$10 > 8$$

Dividindo ambos os membros por 2, temos:

$$\frac{10}{2} > \frac{8}{2}$$

$$5 > 4$$

4 I PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO DA DESIGUALDADE

I - Ao multiplicar ou dividir os dois membros de uma desigualdade por um mesmo número **negativo**, obtemos uma nova desigualdade, de **sentido oposto** que a inicial.

Exemplo: Considere a desigualdade

$$7 < 14$$

Dividindo ambos os membros por -2, temos:

$$(-2).7 < (-2).14$$
$$-14 > -28$$

5 I RESOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES UTILIZANDO OPERAÇÕES INVERSAS

Respeitando os princípios aditivo e multiplicativo das desigualdades, o processo operatório é semelhante ao das equações.

Exemplo: Resolveremos a inequação

$$4x - 3 < 5.$$

Aplica-se a operação inversa a subtração ao termo -3.

$$4x < 5 + 3.$$
$$4x < 8$$

Posteriormente, o coeficiente 4 irá ao segundo membro, dividindo.

$$x < \frac{8}{4}$$

$$x < 2$$

Exercícios

1. Resolva as seguintes inequações:

a) $17 + x < -30$

b) $10x - 35 \geq 75$

c) $7x - 28 > 6x - 23$

d) $0 > -2x - 20$

e) $4x - 6 < -8x + 18$

f) $3x + 3 \leq 2(1 - x)$

2. Resolva os seguintes problemas:

a) Um paralelogramo tem perímetro menor que 36 cm e a medida de um lado é conhecido é igual a 12 cm, calcule as medidas que os lados conhecidos podem ter.

b) José quer construir uma casa retangular, de modo que o comprimento tenha 1 m a mais do que a largura e o perímetro da casa sejam maiores ou iguais a 50 m. Quantos metros, no mínimo, devem ter o comprimento e a largura dessa casa?

c) Encontre três números naturais consecutivos cuja soma seja menor do que 15.

PRODUTOS NOTÁVEIS

Alguns tipos de binômios seguem um padrão, ou seja, têm características semelhantes. Assim, como o objetivo de aprender procedimentos que facilitem os nossos cálculos, temos:

1 I PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS (a+b)(a-b)

$$\overbrace{(a+b)}^{\textit{Soma dos termos}} \quad \overbrace{(a-b)}^{\textit{Diferença dos termos}} \quad = \underbrace{a^2 - b^2}_{\substack{\textit{Quadrado do primeiro} \\ \textit{menos o quadrado} \\ \textit{do segundo termo}}}$$

Outra maneira de calcular o produto da soma pela diferença de dois termos é aplicar a propriedade distributiva:

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})(\mathrm{a}-\mathrm{b}) = a^2 - \mathrm{ab} + \mathrm{ba} - b^2 = a^2 - b^2$$

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Desenvolvendo os produtos notáveis utilizando a regra prática, temos:

1. $(3+a)(3-\mathrm{a}) = 3^2 - a^2 = 9 - a^2$
2. $(5x+2y)(5x-2y) = (5x)^2 - (2y)^2 = 25x^2 - 4y^2$
3. $(a^3+b^2)(a^3-b^2) = (a^3)^2 - (b^2)^2 = a^6 - b^4$
4. $\left(\frac{2mb}{3}+\frac{n}{5}\right)\left(\frac{2mb}{3}-\frac{n}{5}\right) = \left(\frac{2mb}{3}\right)^2 - \left(\frac{n}{5}\right)^2 = \frac{4m^2b^2}{9} - \frac{n^2}{25}$

Exercícios

1. Aplique a regra prática para desenvolver os seguintes produtos:

a) $(5-y)(5+y) =$

b) $(2x+3y)(2x-3y) =$

c) $(1-5a)(1+5a) =$

d) $\left(\frac{2}{9}b^5+\frac{1}{11}\right)\left(\frac{2}{9}b^5-\frac{1}{11}\right) =$

2. Simplifique as expressões a seguir:

a) $(a+b)(a-b)-a(a-b)=$

b) $(m-n^2)(m+n^2)+n^2(n^2-1)=$

c) $5(2x-1)-(2x-1)(2x+1)=$

2 I QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS: (a + b)²

Nosso próximo objetivo é calcular o produto (a+b)(a+b) ou $(a+b)^2$.

Para calcular o produto dos polinômios, utilizamos a propriedade distributiva como segue:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

O nome desta expressão é trinômio quadrado perfeito.

Tomando a como o primeiro termo e b como o segundo termo. Obtemos:

$(a+b)^2=$	a^2	$+$	$2ab$	$+$	b^2
	quadrado do 1º termo	$+$	*2 vezes o 1º termo vezes o 2º termo*	$+$	*quadrado do 2º termo*

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Exemplos

Vamos desenvolver os seguintes produtos notáveis, utilizando a regra:

- $(x+b)^2=x^2+2xb+b^2$
- $(3+a)^2=3^2+2.3a+a^2=9+6a+a^2$
- $(y+5)^2=y^2+2y5+5^2=y^2+10y+25$
- $\left(\frac{2x}{3}+\frac{ay}{5}\right)^2=\left(\frac{2x}{3}\right)^2+2\,\frac{2x}{3}.\frac{ay}{5}+\left(\frac{ay}{5}\right)^2=\frac{4x^2}{9}+\frac{4axy}{15}+\frac{a^2y^2}{25}$

3 I QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS: (a + b)²

Outro tipo de trinômio quadrado perfeito.

Podemos também utilizar a propriedade distributiva da multiplicação, isto é:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b)b(a-b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

Tomando a como o primeiro termo e b como o segundo termo. Obtemos:

$(a-b)^2 =$	a^2	$-$	$2ab$	$+$	b^2
	quadrado do 1º termo	$-$	*2 vezes o 1º termo vezes o 2º termo*	$+$	*quadrado do 2º termo*

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo termo, mais o quadrado do segundo termo.

Vamos desenvolver os seguintes produtos notáveis, utilizando a regra:

1. $(5-x)^2 = 5^2 - 2.5.x + x^2 = 25 - 10x + x^2$
2. $(a-3)^2 = a^2 - 2.a.3 + 3^2 = a^2 - 6a + 9$
3. $(2a-3b)^2 = (2a)^2 - 2.2a.3b + (3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$
4. $\left(\frac{4x}{5} - \frac{ay}{3}\right)^2 = \frac{(4x)^2}{5^2} - 2.\frac{4x}{5}.\frac{ay}{3} + \frac{(ay)^2}{3^2} = \frac{16x^2}{25} - \frac{8axy}{15} + \frac{a^2y^2}{9}$

Exercícios

1.Aplique a regra prática para desenvolver os seguintes produtos:

a) $(x-2a)^2 =$

b) $(3a-5b)^2 =$

c) $(xy-3a)^2 =$

d) $\left(\frac{4}{3}x - y\right)^2 =$

2. Desenvolva os produtos notáveis e reduza os termos semelhantes:

a) $(a+b)(a-b) + (a-b)^2 =$

b) $(5-n)(5+n) - (5-n)^2 =$

c) $(3a+b)^2 - (3a-b)^2 =$

3. Uma pergunta que passa pela cabeça dos alunos de Matemática é: para que

serve tudo isso que estou estudando? Qual a aplicação desse conteúdo? Mesmo que não enxergue um uso imediato, possivelmente em algum ligar existe uma aplicação preparada para cada conteúdo estudado. Além disso, a intenção da matemática é facilitar a vida, não complicá-la. Uma das aplicações dos produtos notáveis é para facilitar alguns cálculos numéricos que aparentemente seriam complicados de realizar sem calculadora. Acompanhe o exemplo:

$$520^2 = (500+20)^2 + 2.500.20 + 20^2$$
$$= 250000 + 20000 + 400 = 270400$$

Além do quadrado da soma, é possível utilizar também os outros produtos notáveis. Acompanhe:

i) $39^2 = (40-1)^2 = 40^2 - 2.40.1 + 1^2 = 1600 - 80 + 1 = 1521$
ii) $53^2 - 47^2 = (53+47)(53-47) = 100.6 = 600$

Com base nisso, resolva os seguintes produtos notáveis, depois confira os resultados com uma calculadora:

a) $48^2 =$
b) $202^2 =$
c) $104^2 - 96^2 =$
d) $999^2 =$
e) $101^2 - 99^2 =$

FATORAÇÃO ALGÉBRICA

Para podermos entender o que é fatoração, vamos tentar resolver o seguinte problema:

Encontre uma multiplicação que dê como: $5x^2+5xy+5xz$

Há pelo menos duas respostas para o problema proposto.

Se observarmos bem a expressão, podemos notar que:

$$5x^2 + (5x)y + (5x)z$$

$$(5x)x + (5x)y + (5x)z$$

Ou seja, há um fator (o fator $5x$) que aparece em todos os termos de da nossa expressão. Desta forma, fica claro que a expressão dada pode resultar da multiplicação:

$$5x(x + y + z)$$

Verifique se a solução encontrada está correta utilizando a propriedade distributiva.

No exemplo resolvido, o fator comum foi destacado e colocado à frente da expressão. Dizemos que colocamos o **fator comum em evidência** que é o nome deste tipo de fatoração que aprendemos.

Escreva de forma fatorada a expressão $20a^2+72ab$

Observando a express*ão, podemos notar que*

$$20a^2 + 72ab \;=\; 4.5.a.a + 4.18.a.b$$

ou ainda,

$$(4a)5a + (4a)18b.$$

Colocando o termo $4a$ em evidência, obtemos

$$20a^2 + 72ab \;=\; 4a(5a + 18b).$$

Exercícios:

1) Identifique o fator comum a todos os termos dos polinômios a seguir, fatore-os e faça as verificações:

a) $4a - 4b - 4c =$

b) $8m^3 - 16m^2 + 24mn =$

c) $10(x - y) + m(x - y) =$

2) Observe o polinômio ax+3a+2x+6 e responda:

a) Há algum fator comum a todos os termos?

b) E nos dois primeiros termos, há fator comum? E para os dos últimos termos? Quais são os fatores comuns para cada um dos pares?

c) Reescreva a expressão, colocando em evidência os fatores comuns encontrados em **b**. O que você percebe nesta expressão?

d) Complete a fatoração da expressão dada.

Você acabou de fazer e de aprender um novo tipo de fatoração. O nome deste tipo de fatoração é **fatoração por agrupamento**. O nome é este, pois precisamos separar a expressão em grupos para poder fatorá-la. Veja este outro exemplo: x^2*-ax+bx-ab*

- Formamos grupos de dois termos: x^2-ax e bx-ab:

$$x^2 - ax + bx - ab;$$

- Colocamos em evidência o fator comum de cada grupo:

$$x^2 - sx + bx - ab = x(x - a) + b(x - a)$$

- Por fim, colocamos o fator comum (x-a) em evidência, obtendo a fatoração: (x-a)(x-b)

Exercícios

1. Fatore os polinômios a seguir.

a) $ax + bx + 4a + 4b =$

b) $ay - 3a + y - 3 =$

c) $a^3 + a^2 + a + 1 =$

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Veja um Problema relacionada a Economia:

Damian comprou uma quantidade de camisas por 450 reais. Por ter obtido um desconto de 5 reais no preço de cada uma, ele conseguiu comprar 1 camisa a mais do que no início. Quantas camisas Damian comprou?

Resolução:

Consideremos p o preço de cada camisas e x a quantidade de camisas que ele comprou. Damian pagou na compra: px = 450 reais.

Tendo recebido desconto de 5 reais em cada peça, Damian comprou mais 1 camisa (p-5)(x+1)=450. Isolando p, temos: p=$\frac{450}{x}$.

Agora, reescrevemos:

$$\left(\frac{450}{x} - 5\right)(x+1) = 450$$

As soluções possíveis são x_1=-10 e x_2=9. Como o número de calças deve ser positivo, Damian comprou 9 camisas.

Inicialmente, temos que as equações são expressões matemáticas que possuem incógnitas, coeficientes, sinais e expoentes em sua composição. O maior expoente da incógnita determina o grau da equação. Desta forma, a equação do segundo grau tem a cara

$$ax^2 + bx + c = 0$$

com a<0, a, b, c $\in$ R, é de segundo grau pelo número do seu maior expoente, 2. Por ser de segundo grau, são dois valores que satisfazem a equação.

1 I EQUAÇÕES COMPLETAS E INCOMPLETAS DO SEGUNDO GRAU

Uma equação é dita incompleta quando ou

i. b=0, ou

ii. c=0

Para o caso i., b=0, temos

$$ax^2 + 0x + c = 0$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Para o primeiro caso a solução é x=$\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Para o caso ii., c=0, temos

$$ax^2 + bx + 0 = 0$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

ou x=0, ou (ax+b)=0, isto é,

$$ax = -b$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

As soluções são x=0 e x=$\frac{-b}{a}$.

Exercícios

1. Determine o conjunto solução das seguintes equações do segundo grau incompletas:

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $x^2 + 9 = 0$

c) $2x^2 - 72 = 0$

d) $10x^2 + 10x = 0$

e) $x^2 - x = 0$

f) $3x^2 + 3x = 0$

g) $\frac{1}{2}x^2 - 32 = 0$

2 I EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU COMPLETA

A equação completa do segundo grau é escrita na forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a,b e c são não nulos. Se x satisfaz a equação acima, dizemos que ou x é uma raiz da equação, ou x é um zero da equação, ou x anula a equação.

Para encontrar os valores de que satisfaz a equação há duas etapas:

1) Discriminante ou Δ, o qual é dado pela fórmula:

$$\Delta = b^2 - (4.a.c).$$

- Se Δ>0, então há duas raízes distintas;
- Se Δ=0, então há duas raízes iguais;
- Se Δ<0 então não há raízes reais.

2) Determinação das raízes:

O algoritmo para a determinação das raízes é dado por:

$$\mathrm{x}' = \frac{-\mathrm{b}+\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{x}'' = \frac{-\mathrm{b}-\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}$$

Exemplo: Encontre as raízes da equação de segundo grau

$$\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x} - 8 = 0.$$

A equação acima é completa, pois a=1, b=2 e c=-8, todos diferentes de zero. Para encontrar as raízes da equação, utilizaremos o método dado acima, como segue.

Primeira etapa: Encontrar o “delta”.

$$\Delta = b^2 - (4ac)$$

$$\Delta = 2^2 - \big(4.1.(-8)\big)$$

$$\Delta = 4 + 32$$

$$\Delta = 36 > 0.$$

Como Δ>0, temos que a equação possui duas raízes reais.

Assim, podemos ir para a próxima etapa, a determinação das raízes.

De fato, substituindo o valor de Δ encontrado e os valores de a e b, dados na equação, obtemos as soluções:

$$\mathrm{x}' = \frac{-\mathrm{b}+\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}} = \frac{-2+\sqrt{36}}{2.1} = \frac{-2+6}{2} = 2$$

e

$$x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{36}}{2.1} = \frac{-2-6}{2} = -4.$$

Portanto, as soluções da equação $x^2+2x-8=0$ são x=2 e x=-4. Podemos, também, representar as soluções em forma de um conjunto, chamado conjunto solução, isto é, S={-4,2} é o conjunto que contém todas as soluções da equação.

Exercícios

1. Determine o conjunto solução das seguintes equações do segundo grau:

a) $4x^2 - 7x + 3 = 0$

b) $x^2 - 12x + 36 = 0$

c) $x^2 - 14x + 50 = 0$

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

e) $2x^2 + 16x + 24 = 0$

f) $-4x^2 - 404x = 600$

g) $4x^2 - 12x + 28 = 0$

h) $-15x^2 - 45x + 1620 = 0$

3 I ESTUDO DAS RAÍZES DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Sejam x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$, onde

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

A soma das raízes é dada por é dada por:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} = S.$$

O produto é dado por:

$$x_1.x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{\left(-b+\sqrt{\Delta}\right)\left(-b-\sqrt{\Delta}\right)}{2a.2a}$$

$$= \frac{(-b)^2 + (-b)\left(-\sqrt{\Delta}\right) + \sqrt{\Delta}(-b) + \sqrt{\Delta}\left(-\sqrt{\Delta}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - \left(b^2 - (4a.c)\right)}{4a^2} = \frac{c}{a} = P$$

Portanto, temos que:

- $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

- $P = x_1 . x_2 = -\frac{c}{a}$

Esta relação é conhecida como *soma e produto*.

4 I EXEMPLO DE PROBLEMAS COM A EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Exemplo 1: Paulo cercou um terreno retangular de área 28 m² com 24 metros de corda. Encontre as dimensões deste local.

Resolução:

Primeiramente, vamos chamar os lados do retângulo de a e b. Sabemos que a área envolve o produto de a por b, e que o perímetro é a soma dos lados a+b.

Logo:

$$a.b = 28$$

$$a + b = 12$$

Isolando b na equação (2) e substituindo na equação (1), temos:

$$a(12 - a) = 28,$$

isto é,

$$12a - a^2 - 28 = 0$$

Agora, basta utilizar os métodos de resolução para encontrar as dimensões.

R: $a = 6 - 2\sqrt{2}$m e $b = 6 + 2\sqrt{2}$m.

Exemplo 2: A diferença entre um número e o dobro de outro é 6, e o produto entre eles é 8. Quais são esses números?

Resolução:

Vamos chamar esses números de x e y. Equacionando o problema temos:

- A diferença entre um número e o dobro de outro é 6: x - 2y = 6.
- O produto entre eles é 8: xy = 8.

Para calcular esses números, vamos montar um sistema de equações com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$$

A solução é x=8 e y=1.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. História da matemática. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

DANTE, L. R. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. São Paulo: Editora Ática, 2003.

DANTE, Luiz Roberto : Matemática : Contexto & Aplicações. São Paulo. Editora Ática, 4ª edição, 2013.

GIOVANNI, J; CASTRUCCI, B; Giovanni, Jr. A Conquista da Matemática. São Paulo: FTD, 2010. (coleção do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental).

IEZZI, Gelson - Fundamentos da Matemática Elementar Vol 1 – Atual Editora, 6ª Edição, 2005.

IEZZI, Gelson - Fundamentos da Matemática Elementar Vol 2 – Atual Editora, 6ª Edição, 2005.

IEZZI, Gelson - Fundamentos da Matemática Elementar Vol 3 – Atual Editora, 6ª Edição, 2005.

POLYA, G. A Arte de Resolver Problemas. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

MATEMÁTICA ELEMENTAR PARA ECONOMIA

VOL.1

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena
Editora

Ano 2023

MATEMÁTICA ELEMENTAR PARA ECONOMIA

VOL.1

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora

Ano 2023