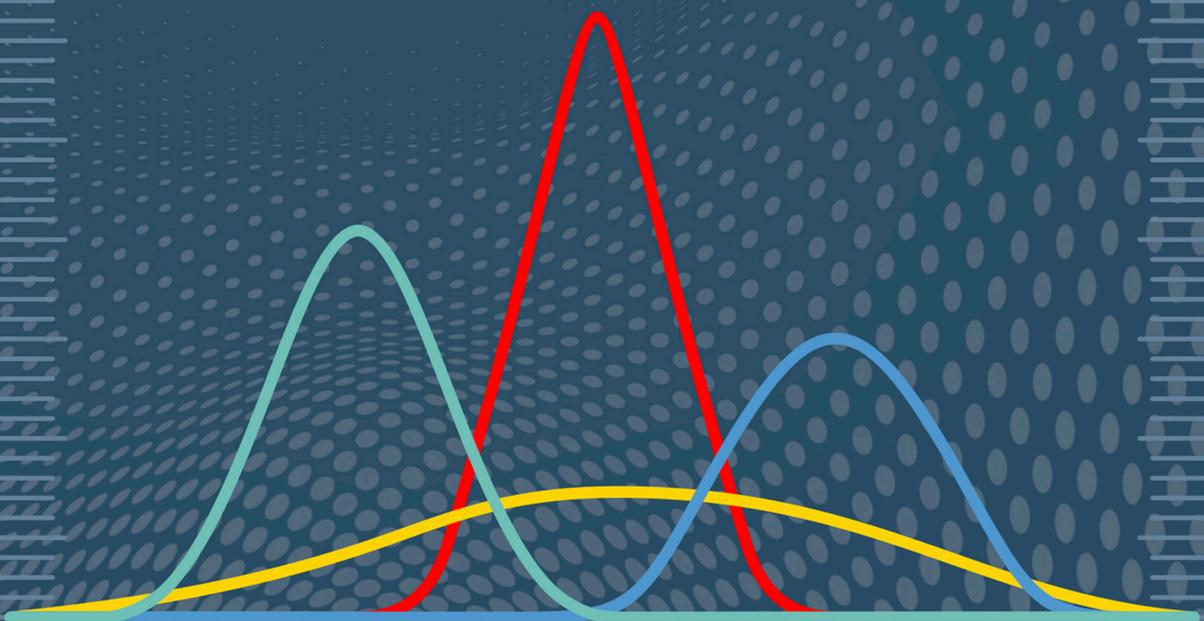


Eduardo Morais  
Paulo Pamplona

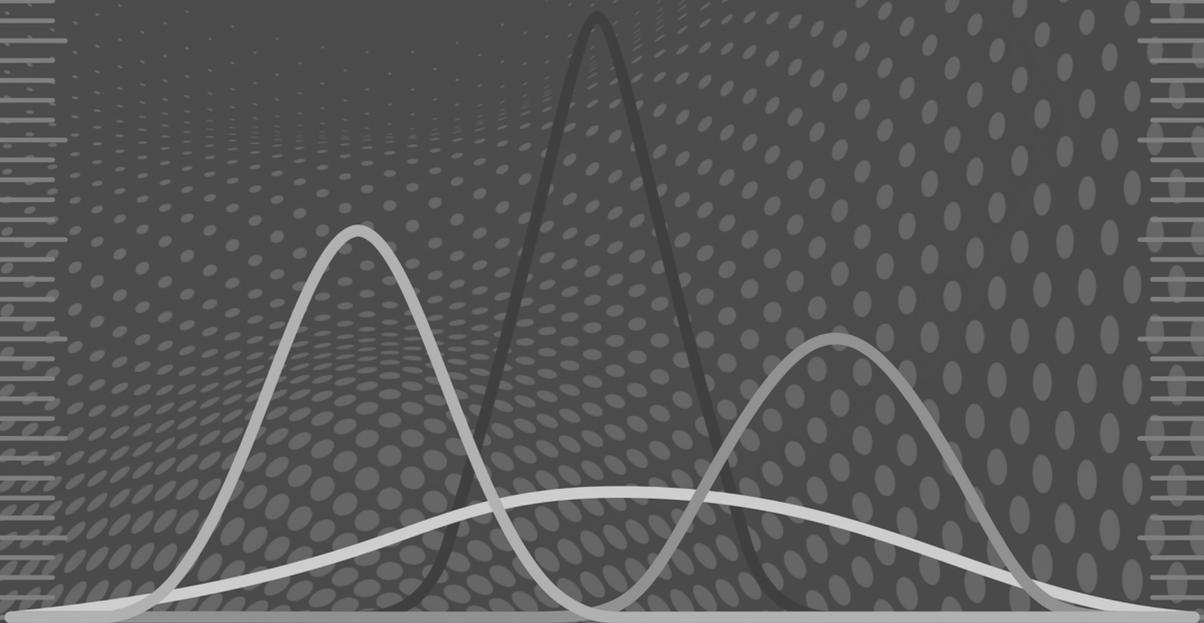
# OTIMIZAÇÃO E CONFIABILIDADE APLICADAS À ENGENHARIA



 **Atena**  
Editora  
Ano 2022

Eduardo Morais  
Paulo Pamplona

# OTIMIZAÇÃO E CONFIABILIDADE APLICADAS À ENGENHARIA



 **Atena**  
Editora  
Ano 2022

**Editora chefe**

Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira

**Editora executiva**

Natalia Oliveira

**Assistente editorial**

Flávia Roberta Barão

**Bibliotecária**

Janaina Ramos

**Projeto gráfico**

Bruno Oliveira

Camila Alves de Cremo

Luiza Alves Batista

**Capa**

Gilberto Oliveira

2022 by Atena Editora

Copyright © Atena Editora

Copyright do texto © 2022 Os autores

Copyright da edição © 2022 Atena

Editora

Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelos autores.

Open access publication by Atena

Editora



Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo do texto e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

**Conselho Editorial****Ciências Exatas e da Terra e Engenharias**

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto

Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre

Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie

Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná

Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof<sup>o</sup> Dr<sup>a</sup> Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof<sup>o</sup> Dr<sup>a</sup> Glécilla Colombelli de Souza Nunes – Universidade Estadual de Maringá  
Prof<sup>o</sup> Dr<sup>a</sup> Iara Margolis Ribeiro – Universidade Federal de Pernambuco  
Prof<sup>o</sup> Dra. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho  
Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense  
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof<sup>o</sup> Dr<sup>a</sup> Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá  
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora  
Prof<sup>o</sup> Dr<sup>a</sup> Maria José de Holanda Leite – Universidade Federal de Alagoas  
Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais  
Prof. Dr. Milson dos Santos Barbosa – Universidade Tiradentes  
Prof<sup>o</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof<sup>o</sup> Dr<sup>a</sup> Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba  
Prof. Dr. Nilzo Ivo Ladwig – Universidade do Extremo Sul Catarinense  
Prof<sup>o</sup> Dr<sup>a</sup> Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas  
Prof<sup>o</sup> Dr Ramiro Picoli Nippes – Universidade Estadual de Maringá  
Prof<sup>o</sup> Dr<sup>a</sup> Regina Célia da Silva Barros Allil – Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

## Otimização e confiabilidade aplicadas à engenharia

**Diagramação:** Letícia Alves Vitral  
**Correção:** Maiara Ferreira  
**Indexação:** Amanda Kelly da Costa Veiga  
**Revisão:** Os autores  
**Autores:** Eduardo Morais  
Paulo Pamplona

### Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M827 Morais, Eduardo  
Otimização e confiabilidade aplicadas à engenharia /  
Eduardo Morais, Paulo Pamplona. – Ponta Grossa - PR:  
Atena, 2022.

Formato: PDF  
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader  
Modo de acesso: World Wide Web  
Inclui bibliografia  
ISBN 978-65-258-0801-7  
DOI: <https://doi.org/10.22533/at.ed.017222012>

1. Engenharia. I. Morais, Eduardo. II. Pamplona, Paulo.  
III. Título.

CDD 620

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

**Atena Editora**  
Ponta Grossa – Paraná – Brasil  
Telefone: +55 (42) 3323-5493  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
[contato@atenaeditora.com.br](mailto:contato@atenaeditora.com.br)

## DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao conteúdo publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que o texto publicado está completamente isento de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

## DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access*, *desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce*, ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

A otimização, como o próprio nome sugere, oferece mecanismos numéricos que permitem obter a solução ótima de um problema. Isto é, a partir de uma busca sistemática do espaço de respostas, os algoritmos de otimização retornam as condições admissíveis que conduzem à extração do melhor rendimento possível de uma determinada medida de desempenho. Nesse contexto, é razoável afirmar, portanto, que a otimização representa a essência da engenharia e, por essa razão, deveria fazer parte do escopo formativo de todo engenheiro.

Por outro lado, para estimar a solução que fará o melhor uso dos recursos disponíveis, é necessário identificar as variáveis que governam o comportamento do sistema e como elas se relacionam para, somente então, ser possível delimitar a fronteira que qualifica uma solução como factível ou não. Muitas dessas variáveis envolvidas nos problemas de engenharia possuem, no entanto, natureza aleatória, tornando essa estimativa ainda mais complexa. Por exemplo, imaginem que, ao projetar a laje que compõe o piso de um edifício, será necessário quantificar o peso e a posição das pessoas e móveis que sobre ela transitarão durante toda vida útil da construção. É um dado absolutamente variável, concordam? Nesses casos, torna-se necessário abstrair o problema em um modelo e, sobre ele, aplicar uma análise de confiabilidade que, por meio de ferramentas estatísticas, projete valores que possuem probabilidade relativamente baixa de, ao longo do tempo, serem ultrapassados no seu sentido desfavorável.

É notável, portanto, a relevante contribuição desta obra que mergulha em temas caros para construção da engenharia na sua mais pura essência. A partir de exemplos simples e uma construção textual sem *firulas*, os autores destacam o potencial de emprego prático desses conceitos e que, embora tenham base matemática relativamente complexa, notadamente não são *bichos de sete-cabeças*. Os autores apresentam uma grata assertividade no equilíbrio entre robustez teórica e simplicidade.

Eric Mateus Fernandes Bezerra

Diversos problemas das Ciências e Engenharias não podem ser apropriadamente analisados no contexto determinístico devido à incerteza e aleatoriedade de seus parâmetros. Nestes casos, torna-se necessária uma análise probabilística, que considera parâmetros como variáveis aleatórias, permitindo, assim, uma modelagem mais representativa em diversas situações. Um problema de grande interesse nas engenharias é aquele da Análise de Confiabilidade, no qual busca-se estimar a probabilidade de ocorrência de eventos indesejados, ou probabilidade de falha.

Por outro lado, nos projetos de Engenharia, a busca por um projeto que atenda a todos os requisitos normativos (de segurança, conforto e pleno funcionamento), e com um menor custo para o cliente, pode ser alcançado através de técnicas e softwares de otimização.

Assim, este livro, **Otimização e Confiabilidade aplicadas à Engenharia**, visa ajudar e estimular o estudante e o profissional de Engenharia na busca por um projeto cada vez mais eficiente (do ponto de vista da segurança, conforto e bom funcionamento do mesmo) e cada vez mais barato (do ponto de vista financeiro). Com isso, conceitos sobre estatística, confiabilidade e otimização, assim como suas aplicações nos problemas de Engenharia, são apresentados nesta obra.

Os Autores

# DEDICATÓRIA

“Dedicamos esta obra a todos aqueles que fizeram e fazem parte do Centro de Ciências e Tecnologia Agroalimentar – CCTA da Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, por todo o empenho e motivação em tornar o mundo cada dia melhor”

Os autores agradecem ao Centro de Ciências e Tecnologia Agroalimentar - CCTA da Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, pelo apoio na elaboração deste trabalho.

Agradecem ao designer de conteúdo de mídia Gilberto Oliveira, pela elaboração da capa deste livro, ao professor Eric Mateus Fernandes Bezerra, pela elaboração do prefácio, ao professor Orlando Xavier de Oliveira, pela colaboração dada na apresentação, e ao professor Daniel Medeiros, pela revisão textual.

Agradecem a Deus, por sua infinita bondade e generosidade com cada um, e por acreditar que é Ele que nos dá o saber.

Agradecem às suas famílias pelo apoio em todos os momentos de suas vidas.

Agradecem a todos aqueles que contribuíram de alguma forma pela elaboração deste trabalho.

**CAPÍTULO 1****ESTATÍSTICA ..... 1**

## 1.1 INTRODUÇÃO ..... 1

## 1.2. TIPOS DE AMOSTRAGEM..... 2

## 1.2.1. Amostras Probabilísticas ..... 4

## 1.2.2. Amostras Não Probabilísticas ..... 4

## 1.3. TIPOS DE VARIÁVEIS..... 5

## 1.3.1. Variáveis Qualitativas ..... 6

## 1.3.2. Variáveis Quantitativas..... 6

## 1.3.3. Variáveis Aleatórias ..... 7

## 1.4. MÉDIA, MEDIANA E MODA..... 7

## 1.4.1. Média ..... 7

## 1.4.2. Mediana ..... 9

## 1.4.3. Moda..... 11

## 1.4.4. Média, Moda e Mediana de Variáveis Aleatórias ..... 13

## 1.5. VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO..... 16

## 1.5.1. Variância e Desvio Padrão..... 17

## 1.5.2. Variância e Desvio Padrão de Variáveis Aleatórias ..... 19

## 1.6. EXERCÍCIOS..... 21

**CAPÍTULO 2****CONFIABILIDADE..... 25**

## 2.1. INTRODUÇÃO ..... 25

## 2.2. ESPAÇO AMOSTRAL ..... 25

## 2.3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS ..... 26

## 2.3.1. Função densidade de probabilidade ..... 26

## 2.3.2. Função densidade acumulada de probabilidade ..... 27

## 2.3.3. Valor Esperado ..... 28

2.4. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS .....	29
2.4.1. Função densidade de probabilidade .....	29
2.4.2. Função densidade acumulada de probabilidade .....	32
2.4.3. Valor Esperado e Variância .....	35
2.5. TIPOS DE DISTRIBUIÇÃO PROBABILÍSTICA PARA VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA .....	37
2.5.1. Distribuição de Bernoulli .....	37
2.5.2. Distribuição Binomial.....	38
2.5.3. Distribuição de Poisson .....	39
2.6. TIPOS DE DISTRIBUIÇÃO PROBABILÍSTICA PARA VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA .....	40
2.6.1. Distribuição Uniforme .....	40
2.6.2. Distribuição Normal .....	42
2.6.3. Distribuição Gama .....	44
2.7. ANÁLISE DE CONFIABILIDADE .....	45
2.8. SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO .....	46
2.8.1. Probabilidade de Falha .....	47
2.9. EXERCÍCIOS .....	50
<b>CAPÍTULO 3</b>	
<b>OTIMIZAÇÃO .....</b>	<b>54</b>
3.1. INTRODUÇÃO .....	54
3.2. OTIMIZAÇÃO EM PROGRAMAÇÃO LINEAR .....	59
3.2.1. Método Gráfico.....	61
3.2.2. Método Simplex.....	66
3.3. OTIMIZAÇÃO EM PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR .....	73
3.4. OTIMIZAÇÃO BASEADA NO PARTICLE SWARM OPTIMIZATION .....	75
3.5. PRINCIPAIS SOFTWARES UTILIZADOS NO RAMO DA OTIMIZAÇÃO.....	77

3.6. EXERCÍCIOS .....	78
-----------------------	----

## **CAPÍTULO 4**

<b>OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE - APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE ENGENHARIA .....</b>	<b>81</b>
---	-----------

4.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DA VIGA.....	81
--	----

4.2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DA BARRAGEM .....	83
---	----

4.3. RESULTADOS PARA A VIGA E A BARRAGEM .....	86
--	----

<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>88</b>
--------------------------	-----------

<b>SOBRE OS AUTORES .....</b>	<b>91</b>
-------------------------------	-----------

## ESTATÍSTICA

### 1.1 INTRODUÇÃO

O uso do termo *estatística* como uma ciência que caracteriza um ramo da matemática aplicada é recente no que condiz a sua história de emprego pelo homem. Evidências demonstram sua primeira aplicação no século XVIII pelo alemão Gottfried Achenwall, porém, há indícios de que ainda no século XVII foi proposta por Schmeitzel na Universidade de Lena. De origem latina, a palavra estatística deriva de *status* que está diretamente relacionada ao estudo do estado, tendo em vista seu uso para auxiliar o Estado na realização de censos e consequentes tomadas de decisões (ANDRADE, 2008).

Ao longo dos anos, os conceitos e aplicações da estatística foram sendo aprofundados e hoje são utilizados nas mais variadas áreas da sociedade. Segundo Mann (2015), a estatística pode ser definida como “*a ciência que corresponde a coletar, analisar, apresentar e interpretar dados, bem como tomar decisões com base nessas análises*”. O uso dessa ciência auxiliou em grandes avanços na sociedade. Foram decisões baseadas em estudos estatísticos que contribuíram, por exemplo, para o milagre industrial japonês no século XX, o que o tornou uma das maiores economias do mundo (WALPOLE et al., 2009).

No século XX, as portas de um mundo em plena globalização se abriram a novas metodologias, e a busca por melhores resultados fez com que universidades e empresas dos setores público e privado aderissem à estatística, que hoje, juntamente com o avanço das tecnologias, tem proporcionado a solução e investigação de problemas nunca antes explicados. Atualmente, em diversos ramos da engenharia, a estatística é aplicada como ferramenta de otimização de processos e controle de produção, auxiliando na diminuição de custo e desperdício, aumento de qualidade, redução de impactos ambientais, entre tantas outras medidas que fomentam o desenvolvimento da nossa sociedade.

Essa integralização da estatística à nossa vida cotidiana reforça a importância de ter conhecimento acerca dessa área. É extremamente necessário analisar e tomar decisões diante de informações que se apresentam predominantemente através de estatísticas. Diante disso, na primeira parte deste livro são apresentados conceitos essenciais sobre a estatística e sua aplicação através de tópicos indispensáveis para compreensão básica dessa ciência.

Antes de adentrar nesses tópicos é importante entender que a estatística, assim como tantos outros campos do conhecimento, apresenta uma divisão clássica entre teórica e aplicada. Essas duas expressões falam por si o que significam. A estatística teórica é aquela voltada para o estudo do conjunto de regras e leis que comprovam os teoremas

estatísticos. Já a estatística aplicada está focada no emprego desses teoremas para a resolução dos problemas da vida real (MANN, 2015).

A estatística aplicada pode ser ainda dividida em duas grandes áreas: estatística descritiva e estatística inferencial. A estatística descritiva é bastante usada quando possuímos muitos dados e para ajudar na sua compreensão aplicamos técnicas que visam resumi-los, descrevê-los e apresentá-los. Dentre essas técnicas podemos citar as medidas de tendência central e de dispersão. Por outro lado, quando não pode ser feito um estudo de toda a população e faz-se necessário o uso de amostras menores para análises e tomadas de decisões, dizemos tratar-se da estatística inferencial (GONÇALVES, 2010; MANN, 2015). No decorrer deste capítulo faremos uma breve descrição e explicação dos conceitos essenciais e básicos relacionados à Estatística, sendo aprofundado, principalmente matematicamente, nos capítulos seguintes.

## 1.2. TIPOS DE AMOSTRAGEM

Antes de falar sobre os tipos de amostragens é necessário discutir e compreender dois conceitos importantes quando se trata de estatística: população e amostra. Essas palavras já foram citadas anteriormente ao se referir à estatística inferencial. Mas você já parou para pensar sobre esses conceitos na estatística?

A maneira mais fácil de compreender esses conceitos é por meio de um exemplo. Digamos, então, que um grupo de engenheiros ambientais pretendem fazer uma pesquisa para determinar a quantidade de espécies de plantas existentes no estado da Paraíba, que possui aproximadamente 56.5 mil quilômetros quadrados, o equivalente a 0.66% do território nacional. É evidente que seria praticamente impossível verificar todas as plantas presentes nessa área, sendo assim, para facilitar o trabalho, os engenheiros selecionaram estrategicamente algumas cidades pertencentes ao estado para serem suas áreas de estudo, locais onde analisaram as plantas e a partir delas determinaram a quantidade de espécies existentes na Paraíba. Veja abaixo, na Figura 1, a delimitação do estado e as cidades selecionadas pelos engenheiros.



Figura 1 - Estado da Paraíba.

Agora, analisando o exemplo anterior e a imagem, fica fácil compreender os conceitos de população e amostra. A população são todas as espécies de plantas existentes na Paraíba, isto é, tudo o que se pretende estudar e que se encontra dentro da delimitação do estado. Já a amostra são apenas as espécies de plantas presentes nas cidades selecionadas, ou seja, que realmente são estudadas e que são representadas pelas áreas pintadas da figura.

Resumidamente, Mann (2015) define população como “*todos os elementos — indivíduos, itens ou objetos — cujas características estejam sendo estudadas*”, já amostra é “*uma parcela da população selecionada para fins de estudo*”.

Examinar toda a população seria o ideal, pois favorece resultados extremamente representativos, mas, nem sempre isso será possível. Sendo assim, a definição da amostra é uma etapa de grande importância da pesquisa, pois ela é quem define a validade dos dados obtidos. Então, para nos ajudar na escolha das amostras utilizamos técnicas de amostragem presentes na literatura.

A amostragem pode ser dividida em dois tipos: probabilística e não probabilística. A diferença entre elas está exatamente em como ocorre a seleção. Enquanto na amostragem probabilística os elementos são selecionados aleatoriamente, sem nenhuma influência do pesquisador, na amostragem não probabilística a seleção depende de uma análise do pesquisador, que será responsável pela escolha dos elementos que melhor compõem a amostra. Dentro desses dois grupos maiores de amostragem temos ainda subdivisões caracterizadas por técnicas específicas na definição de amostras. Na Figura 2 temos um resumo no qual trazemos as principais técnicas de amostragem.

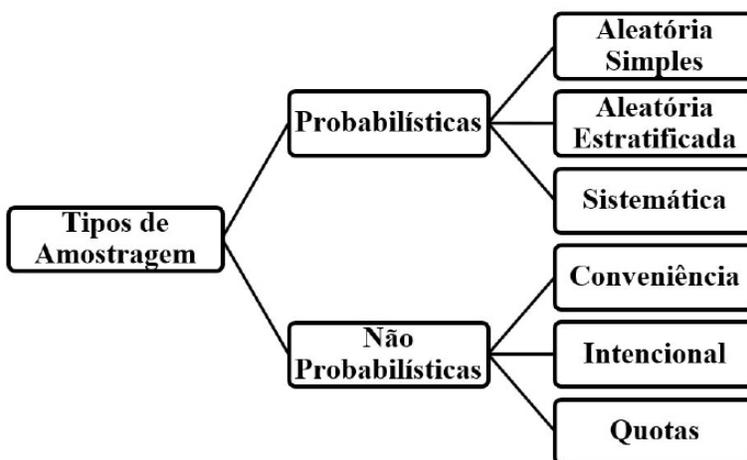


Figura 2 - Tipos de amostragem.

### 1.2.1. Amostras Probabilísticas

Muitas pesquisas utilizam técnicas de amostragem probabilísticas e sempre que possível é interessante utilizá-las para se prevenir, uma vez que todas as escolhas não se basearam em cunho pessoal, mas sim na aplicação de métodos com regras bem definidas. Vejamos, então, um pouco mais sobre as três técnicas de amostragem probabilística:

#### I. Amostragem Aleatória Simples

Essa técnica de amostragem é também chamada de casual e é equivalente a um sorteio lotérico, ou seja, um sorteio justo em que todos os componentes da população têm probabilidade igual de serem selecionados para a amostra.

Basicamente a sua aplicação consiste em enumerar todos os componentes da população (de 1 a  $n$ ) e sortear, dentre eles, uma quantidade  $X$  de números que constituirão a amostra. Para a realização do sorteio pode ser utilizada a Tabela de Números Aleatórios, que possui os algarismos de 0 a 9 distribuídos aleatoriamente nas linhas e colunas, ou um programa de computador, de maneira bem mais rápida.

#### II. Amostragem Aleatória Estratificada

Como o próprio nome sugere, nessa técnica leva-se em consideração a existência de estratos, ou seja, subdivisões que podem existir dentro da população. É necessário, portanto, que os estratos sejam adequadamente representados, especificando a quantidade de elementos de cada um que irá compor a amostra.

#### III. Amostragem Sistemática

A amostragem sistemática é caracterizada por uma listagem ordenada, ou seja, a seleção depende de um sistema preestabelecido que garante uma certa regra entre elementos que compõem a amostra. Basicamente é feita a escolha do primeiro componente (o ponto de partida) e a partir dele, seguindo um critério de espaçamento (obtido pela divisão da população pela amostra), determina-se os demais. Há, portanto, uma dependência de probabilidades.

### 1.2.2. Amostras Não Probabilísticas

Nem sempre é possível um acesso total à população e como consequência não é garantida uma probabilidade ou chance de certo elemento compor a amostra. Nesses casos, em vez de usar as técnicas de amostragem probabilística, usamos técnicas de amostragem não probabilística, como por conveniência, intencional e quotas.

#### I. Conveniência

A amostragem por conveniência é muito utilizada em pesquisas exploratórias

para obter informações de maneira rápida e barata através de um público acessível. Um bom exemplo são as pesquisas de teste de produtos em supermercados, nas quais os participantes são recrutados sem critérios e voluntariamente de acordo com a sua disponibilidade.

## II. Intencional

A amostragem intencional é feita exclusivamente pela escolha do pesquisador. Diante de um certo objetivo, ele irá selecionar, com base simplesmente em sua opinião, elementos que melhor representam a população. Em uma pesquisa de mercado automotivo, por exemplo, para lançamento de novo modelo, o pesquisador irá escolher para fazer parte da amostra pessoas que tem condição financeira de adquiri-lo.

## III. Quotas

A amostragem em quotas baseia-se na divisão da população em grupos, porém, não há sorteio na seleção dos elementos que compõem as amostras de cada grupo. Sendo assim, podemos dizer que essa técnica depende de escolhas do pesquisador, que, entretanto, leva em consideração as proporcionalidades dos grupos divididos para selecionar cotas representativas como amostras. O exemplo mais comum de sua aplicação é nas pesquisas de opinião política.

### 1.3. TIPOS DE VARIÁVEIS

As características a serem estudadas de uma população ou amostra, que podem assumir diferentes valores para cada elemento, são classificadas como variáveis. Escolaridade, sexo, altura, idade, cor da pele, número de filhos, renda, número de acidentes e preço são exemplos de variáveis. Como o próprio nome sugere, *variável* indica algo que *não é constante*, que pode ter vários valores/significados.

As variáveis podem ser distribuídas em dois grupos: qualitativa e quantitativa. Podem ainda serem subdivididas em ordinais, nominais, discretas e contínuas, como é apresentado na Figura 3. Além destas, existe ainda as variáveis aleatórias, explicadas em seguida.

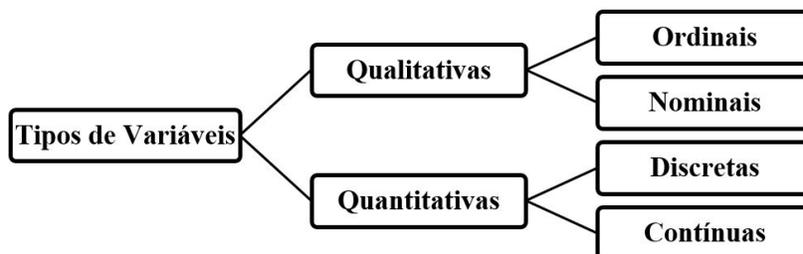


Figura 3 - Tipos de variáveis.

### 1.3.1. Variáveis Qualitativas

As variáveis qualitativas não são expressas através de números, mas sim com base nas qualidades dos elementos em estudo. Elas são definidas através de categorias que denotam características dos componentes presentes nas amostras e populações. Além da classificação em ordinais e nominais, essas variáveis podem ser divididas em dicotômicas (duas categorias) ou politômicas (três ou mais categorias).

#### I. Variáveis ordinais

São aquelas que possuem naturalmente uma ordenação entre as categorias, logo, além de não numéricas, possuem uma ideia intrínseca de hierarquização. Exemplos de variáveis ordinais são: nível social (baixo, médio, elevado), grau de parentesco (pais, irmãos, avós, tios, primos), grau de satisfação com produtos (insatisfeito, pouco satisfeito, satisfeito e muito satisfeito) e estágio da vida (infância, adolescência, idade adulta e velhice).

#### II. Variáveis nominais

São aquelas que não possuem nenhum ordenamento entre as categorias, diferenciando-as apenas pela denominação. Exemplos de variáveis nominais são: sexo (masculino e feminino), cor dos olhos (castanhos, pretos, verdes, azuis), estado civil (solteiro, casado, separado, divorciado ou viúvo), religião e profissão.

### 1.3.2. Variáveis Quantitativas

As variáveis quantitativas são numericamente mensuráveis, ou seja, representadas por números, que podem definir uma contagem ou medição, podendo ser discretas ou contínuas.

#### I – Variáveis discretas

São aquelas que possuem valores contáveis. Elas estão associadas a valores fixos e/ou de números inteiros. Exemplos de variáveis discretas são: número de filhos, número de automóveis, quantidade de animais de estimação, número de acidentes, número de nascimentos, número de mortes anuais, quantidade de alunos etc.

#### II – Variáveis contínuas

São aquelas que, apesar de representadas por números, não podem ser contadas, pois podem assumir infinitos valores. Elas podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo, ou seja, estão associadas a todos os números reais. Exemplos de variáveis contínuas são: tempo para realizar uma caminhada, velocidade de automóveis, a altura de pessoas, pressão arterial, salário, peso de produtos alimentícios, situações onde são consideradas várias casas decimais no seu valor etc.

### 1.3.3. Variáveis Aleatórias

Se possuírem probabilidades associadas à sua ocorrência, as variáveis podem ser definidas como *variáveis aleatórias*. Um exemplo típico é o lançamento de uma moeda honesta várias vezes com o objetivo de observar a face voltada para cima. Nesse caso pode haver ocorrências de cara ou coroa, tudo aleatoriamente e sem manipulação.

A *variável aleatória* (VA) é uma função que associa cada elemento do espaço amostral a um número. Ela pode ser classificada em discreta ou contínua. Será discreta se assumir um conjunto de valores enumeráveis (como o número de caras em um lançamento de duas moedas), e será contínua se assumir um conjunto de valores não enumeráveis, mas representada por um número infinito de valores dentro de certo intervalo, seja ele finito ou infinito (como o intervalo de tempo entre chegadas em uma corrida de Fórmula 1). No próximo capítulo será feita uma nova abordagem sobre essas variáveis.

## 1.4. MÉDIA, MEDIANA E MODA

Uma forma de facilitar a compreensão dos dados de uma pesquisa é resumindo, e para isso podemos utilizar as medidas de posição ou de tendência central, que sintetizam os resultados apresentando um valor em torno do qual os dados se concentram. Iremos apresentar aqui as três medidas de tendência central mais empregadas: média, mediana e moda.

### 1.4.1. Média

A média é a medida de tendência central mais utilizada, não apenas por ser o conceito mais simples da estatística, mas por ter uma grande aplicação cotidiana. Ela fornece facilmente um indicador, um valor típico, que pode representar um conjunto de dados, além de ser a base para o cálculo de outras medidas (MAGINA et al., 2010). A média amostral é representada por  $\bar{x}$  ou  $\mu$  e pode ser calculada através da Equação 1:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1)$$

Na qual:

- $\bar{x}$ : é a média simples (ou aritmética, neste caso);
- $x_i$ : são todos os valores que compõem a amostra; e
- $n$ : é o tamanho da amostra.

Ao se tratar da média populacional é utilizada a mesma equação, basta substituir  $\bar{x}$  por  $\mu$  e  $n$  por  $N$ .

Sendo assim, pode-se dizer que a média é a divisão da soma de todos os valores que compõem a amostra/população pelo número de valores componentes do conjunto. Entretanto, a fórmula anterior só é aplicável para quando temos informações de cada membro da amostra/população (dados não agrupados), e se os dados são apresentados na forma de uma tabela de distribuição de frequência (dados agrupados) é utilizada a seguinte expressão:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (2)$$

Na qual:

$\bar{x}$ : é a média ponderada;

$x_i$ : é o ponto médio da classe  $i$ ; e

$f_i$ : representa a frequência absoluta da classe  $i$  (número de observações que compõe a classe);

Quando trabalhamos com a população utilizamos  $\mu$  em vez de  $\bar{x}$ . Vejamos dois exemplos para entendermos essa diferença.

**Exemplo 1.1** (Média de dados não agrupados):

Em uma empresa de construção civil que possui 50 funcionários com idade de 20 a 60 anos, foram selecionadas como amostra 10 pessoas para realização de uma pesquisa interna de satisfação. A seguir são apresentadas as idades de cada participante:

44 52 23 27 35 45 51 33 40 25

Determine a média de idade dos participantes.

**Solução:**

Para resolver esse problema utilizaremos a Equação 1 (média simples) já que os dados não são agrupados. Como estamos trabalhando com uma amostra,  $n=10$ , então

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ &= \frac{44 + 52 + 23 + 27 + 35 + 45 + 51 + 33 + 40 + 25}{10} \\ \bar{x} &= \frac{375}{10} = 37.5 \text{ anos} \end{aligned}$$

Portanto, a média de idade dos funcionários selecionados é de 37.5 anos, o que corresponde a 37 anos e 6 meses.

### Exemplo 1.2 (Média de dados agrupados):

Tomemos como base a mesma empresa do exemplo anterior e que a pesquisa foi realizada com todos os seus 50 funcionários. A seguir encontra-se uma tabela com o agrupamento das idades dos funcionários:

Idade dos funcionários	Frequência absoluta
20 - 30	12
30 - 40	21
40 - 50	11
50 - 60	6

Tabela 1 - Distribuição da frequência da idade dos funcionários da empresa.

Determine a média de idade dos funcionários.

#### Solução:

Nesse exemplo, por se tratar de dados agrupados, deve ser utilizada a Equação 2 (média ponderada). Como se trata de toda a população, para representar a média utiliza-se  $\mu$ . Na tabela anterior já estão presentes todos os valores de  $f_i$  (12, 21, 11 e 6), sendo necessário determinar o ponto médio de cada classe ( $x_i$ ), por exemplo para  $x_1$ :

$$x_1 = \frac{20 + 30}{2} = 25$$

Foi determinado que  $x_1=25$ . Fazendo o mesmo com os demais intervalos obtêm-se 35, 45 e 55 para  $x_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente. Com todos os dados prontos, basta substituir na Equação 2:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \\ &= \frac{(25 \times 12) + (35 \times 21) + (45 \times 11) + (55 \times 6)}{12 + 21 + 11 + 6} \\ \mu &= \frac{1860}{50} = 37.2 \text{ anos}\end{aligned}$$

Dessa forma, a média de idade dos funcionários é de 37.2 anos, ou seja, aproximadamente 37 anos e 3 meses.

### 1.4.2. Mediana

A mediana corresponde ao valor central de um conjunto de dados ordenados em ordem crescente. A posição desse valor é dada por:

$$P = \frac{(n + 1)}{2} \quad (3)$$

Na qual:

$P$ : é a posição do elemento central; e

$n$ : é o número de elementos.

É uma definição de fácil compreensão, mas sempre gera dúvida quando nos referimos a um número par de dados. Ao se tratar de um número ímpar de dados é simples definir a mediana, pois basta colocar todos os dados em ordem crescente e pegar o valor central, que sempre será um único valor. Porém, quando o número de dados é par, sempre haverá dois valores centrais, e nesse caso não dá para pegar os dois, sendo necessário fazer a média desses valores. Bussab e Morettin (2010), definem a mediana  $Md$  para uma dada variável  $X$  da seguinte forma:

$$\text{Para } n \text{ ímpar: } Md(X) = X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad (4)$$

$$\text{Para } n \text{ par: } Md(X) = \frac{X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} \quad (5)$$

Você deve ter percebido que só é possível seguir os passos definidos anteriormente caso os dados não estejam agrupados. Então, de acordo com Tavares (2011), para um problema em que temos os dados agrupados, utilizamos a seguinte Equação:

$$Md = li + \left[ \frac{(n/2) - f_{antac}}{f_{med}} \right] \times c \quad (6)$$

Na qual:

$li$ : limite inferior da classe mediana;

$n$ : número total de elementos;

$f_{antac}$ : frequência acumulada anterior à classe mediana;

$f_{med}$ : frequência absoluta da classe mediana; e

$c$ : amplitude da classe mediana.

### Exemplo 1.3 (Mediana de dados não agrupados):

Tomaremos como base a situação do Exemplo 1.1. A partir dos dados de idades dos funcionários participantes da pesquisa, pede-se para determinar a mediana.

#### Solução:

Primeiramente todos os dados de idades são colocados em ordem crescente:

23 25 27 33 35 40 44 45 51 52

Como vemos, trata-se de um número par de dados. Então, inicialmente determina-

se os dois valores centrais, por meio de suas posições.

$$X_{\left(\frac{n}{2}\right)} = X_{\left(\frac{10}{2}\right)} = X_5$$
$$X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} = X_{\left(\frac{10}{2}+1\right)} = X_6$$

Os valores centrais são, portanto, o quinto e o sexto valor da sequência em ordem crescente: 35 e 40. Basta agora determinar a mediana:

$$Md = \frac{35 + 40}{2} = \frac{75}{2} = 37.5 \text{ anos}$$

**Exemplo 1.4** (Mediana de dados agrupados):

Tomemos como base a situação do Exemplo 1.2. Considerando a Tabela 1 de frequência de idades dos funcionários da empresa, determine a mediana.

**Solução:**

Primeiramente, sabendo que  $n=50$ , é definida a classe mediana:

$$P = \frac{(50 + 1)}{2} = 25.5$$

O elemento central está na 25.5ª posição, o que corresponde a segunda classe. Portanto, a classe mediana é: (30 + 40). A partir desse dado são obtidos:

- $li=30$  (limite inferior da classe mediana);
- $f_{antac}=12$  (o acumulado da frequência anterior a classe mediana);
- $f_{med}=21$  (frequência absoluta da classe mediana);
- $c=40-30=10$  (amplitude da classe mediana).
- Substitui tudo na Equação 6 e determina:

$$Md = 30 + \left[ \frac{(50/2) - 12}{21} \right] \times 10 = 36.19 \text{ anos}$$

### 1.4.3. Moda

A moda, representada por  $Mo$ , corresponde ao valor ou valores que aparecem com mais frequência em um conjunto de dados. No caso de dados não agrupados basta selecionar os que mais se repetem. Para a moda de um conjunto de dados existem três possíveis resultados: amodal (não possui moda), unimodal (possui apenas uma moda) ou multimodal (possui mais de uma moda).

Para dados agrupados, existe alguns métodos que permitem obter a moda. Um

deles é o método de Czuber, que de acordo com Tavares (2011) pode ser definido a partir da seguinte Equação:

$$Mo = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times c \quad (7)$$

Na qual:

$L_i$ : limite inferior da classe modal;

$d_1$ : diferença entre a frequência da classe modal e a imediatamente anterior;

$d_2$ : diferença entre a frequência da classe modal e a imediatamente posterior; e

$c$ : amplitude da classe modal.

### **Exemplo 1.5** (Moda de dados não agrupados):

Tomaremos como base a situação do Exemplo 1.1. Use os dados de idades disponibilizados e determine a moda.

#### **Solução:**

Como trata-se de dados não agrupados, é muito simples determinar a moda, basta colocar os dados em ordem e pegar o valor que aparece mais vezes.

23 25 27 33 35 40 44 45 51 52

O conjunto de números acima são os dados do Exemplo 1.1 em ordem crescente. Ao analisá-los, constata-se que nenhum valor se repete, portanto, é uma distribuição amodal, pois não existe nenhum valor que ocorre com maior frequência.

### **Exemplo 1.6** (Moda de dados agrupados):

Tomaremos como base o Exemplo 1.2. Use agora a Tabela 1 de distribuição de frequência das idades e determine a moda.

#### **Solução:**

Como esse problema apresenta dados agrupados, para determinar a moda deve ser utilizado o método de Czuber, Equação 7.

Para aplicação desse método, o primeiro passo é definir a classe modal. A classe modal é aquela que apresenta maior frequência, então, para esse exemplo, ela corresponde a classe 2, com frequência igual a 21. A partir desse dado são determinados:

- $L_i = 30$  (limite inferior da classe modal);
- $d_1 = 21 - 12 = 9$  (diferença entre a frequência da classe modal e a imediatamente anterior);

- $d_2 = 21 - 11 = 10$  (diferença entre a frequência da classe modal e a imediatamente posterior);
- $c = 40 - 30 = 10$  (amplitude da classe modal).

Substituindo tudo na Equação 7 obtém-se:

$$Mo = 30 + \frac{9}{9 + 10} \times 10 = 34.74 \text{ anos}$$

#### 1.4.4. Média, Moda e Mediana de Variáveis Aleatórias

Como já foi visto, as variáveis aleatórias se diferem por estarem associadas a probabilidades e se caracterizarem como função. Devido a isso, para obtenção de medidas de posição para essas variáveis são necessários mais alguns conhecimentos. Sendo assim, nesse tópico iremos destacar como obter medidas de posição para variáveis aleatórias discretas e contínuas.

##### I. Variáveis Aleatórias Discretas

Em uma VA cada valor está ligado a uma probabilidade. Para uma variável aleatória discreta, essa probabilidade é atribuída através de uma função denominada função de probabilidade, que para uma dada variável aleatória  $X$  é representada por  $p(x)$ . Essa função densidade de probabilidade deve obedecer aos seguintes critérios:

- $P[X=x_i] = p(x_i)$  : A probabilidade  $P[ ]$  de  $X = x_i$  é igual a  $p(x_i)$ ;
- $0 \leq p(x_i) \leq 1$  : A probabilidade de ocorrência de cada valor deve estar entre 0 (0%) e 1 (100%);
- $\sum p(x_i) = 1$  : A soma de todas as probabilidades é igual a 1 (100%).
- Essa  $p(x)$  é importante para a obtenção do valor esperado ou esperança de uma variável aleatória discreta, que pode ser representada por  $\mu$  ou  $E[X]$ . A esperança representa o valor médio esperado de um conjunto de repetições, podendo ser interpretada como uma média de todos os valores ponderada pela probabilidade de ocorrência de cada um. Pode ser obtida através da seguinte equação:

$$E[X] = \sum_{x \in D} x \cdot p(x) \quad (8)$$

Na qual:

$E[X]$ : esperança ou valor esperado da VA discreta  $X$ ;

$x$ : valores assumidos pela VA no conjunto de possibilidades  $D$ ; e

$p(x)$ : probabilidade associada a cada valor da VA.

A mediana ( $Md$ ) de uma variável aleatória discreta é o valor que acumula 50% da

probabilidade, ou seja, que divide a distribuição em duas partes iguais. Logo, a probabilidade de X ser menor que  $Md$  é igual a probabilidade de X ser maior que  $Md$ . Já a moda ( $Mo$ ) é o valor de X que possui maior probabilidade.

**Exemplo 1.7:**

Considere X uma variável aleatória discreta que representa o número de resultados cara (C) para o lançamento de duas moedas equilibradas. Determine o valor esperado para a variável aleatória X, sua moda e mediana.

**Solução:**

Primeiro determina-se os possíveis resultados ao lançar as moedas. Convencionando C para cara e R para coroa, pode-se obter:

RR   RC   CR   CC

Portanto, dentro de um conjunto de 4 possíveis resultados, a variável aleatória X (quantidade de caras), pode não aparecer, pode aparecer 1 vez ou pode aparecer 2 vezes.

Com esses dados pode ser montada uma tabela com a distribuição de probabilidade:

X	Frequência	$p(x_i)$	$p(x_i)$ acumulada
0	1	1/4	1/4
1	2	2/4	3/4
2	1	1/4	1
Total	4	1	-

Tabela 2 - Distribuição de probabilidade da Variável Aleatória discreta X.

Tendo os dados, para obter a esperança basta substituir na Equação 8:

$$E[X] = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

Sendo assim, é esperado que se obtenha pelo menos 1 cara.

Com os valores da variável X em ordem crescente, observando a probabilidade acumulada na quarta coluna da Tabela 2, conclui-se que o valor que acumula 50% da probabilidade é o 1. Logo:

$$Md = 1$$

A moda é o ponto de maior probabilidade. Pela coluna 3 da tabela vemos que o ponto com maior probabilidade também é o 1, que corresponde a 2/4. Logo:

$$Mo = 1$$

## II – Esperança e Valor Médio de Variáveis Aleatórias Contínuas

Assim como as variáveis aleatórias discretas, as variáveis aleatórias contínuas estão associadas a uma probabilidade definida através da função densidade de probabilidade  $f_{dp}$ , que para uma dada variável aleatória  $X$  também será representada por  $f(x)$ . Como já foi discutido nesse capítulo, uma VA contínua pode assumir um número infinito de valores, portanto, não é enumerável. Sendo assim, para trabalharmos com esse tipo de variável precisamos fazer a aplicação de métodos de integração. No próximo capítulo, que tratará do tema confiabilidade, o conceito de  $f_{dp}$  para VA contínua será aprofundado.

A priori, é importante saber que a  $f(x)$  de uma VA contínua é uma função não negativa, que possui área total delimitada pela curva igual a 1 e que atribui probabilidades a intervalos de valores, uma vez que pode possuir infinitos valores em um mesmo ponto.

A esperança  $\mu$  ou  $E[X]$  de uma VA  $X$  contínua representa o valor médio esperado dentro de um número infinito de valores. O seu cálculo também está associado a  $f_{dp}$  e pode ser obtido através da seguinte equação:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (9)$$

Na qual:

$E[X]$ : esperança da VA contínua;

$f(x)$ :  $f_{dp}$  da VA contínua.

A mediana ( $Md$ ) de uma VA contínua, assim como de uma VA discreta, é o ponto que divide a distribuição igualmente, ou seja,  $f(Md) = 0.5 = 50\%$ . Podemos obtê-la através da seguinte equação:

$$\int_{-\infty}^{Md} f(x) dx = 0.5 = 50\% \quad (10)$$

Já a moda ( $Mo$ ) corresponde ao valor mais provável da variável aleatória contínua, ou seja, ocorre no valor máximo de  $f(x)$ . Logo, para obter a moda basta determinar o valor máximo da função densidade de probabilidade. Devemos realizar os seguintes passos (semelhante a encontrar um ponto de máximo/mínimo):

Determina a  $f'(x)$ ;

Calcula o valor de  $x$  fazendo  $f'(x) = 0$ ;

Obtém  $f''(x)$  em relação a  $x$ .

Se  $f''(x) < 0$ ,  $x$  é ponto de máximo e caracteriza-se como a moda.

**Exemplo 1.8:**

Seja a função abaixo uma fdp:

$$f(x) = \begin{cases} 5x^4, & \text{para } -1 < x < 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine o valor esperado de  $x$ .

**Solução:**

Basta realizar o cálculo da esperança através da Equação 9:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-1}^0 x \cdot 5x^4 dx = 5 \int_{-1}^0 x^5 dx \\ E[X] &= 5 \left[ \frac{x^6}{6} \right]_{-1}^0 = \frac{5}{6} [0^6 - (-1)^6] \\ E[X] &= -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

## 1.5. VARIÂNCIA E DESVIO PADRÃO

As medidas de posição estudadas anteriormente são muito importantes na representação simplificada de dados, porém, elas não dão informações suficientes para compreender a distribuição deles, sendo necessárias as medidas de dispersão para a caracterização completa. Em alguns casos, podem ocorrer de amostras ou populações diferentes possuírem a mesma média, porém, apresentarem distribuição dos dados muito discrepantes. Isso ocorre em virtude da variação desses dados, de como estão dispostos em torno da média.

Veja a Figura 4 com duas curvas simplesmente ilustrativas, correspondentes a duas diferentes populações. Independentemente de escalas, vemos que as duas curvas são centradas na mesma posição no eixo horizontal. Como são simétricas, isso garante que nesse ponto está a média, portanto, elas possuem médias iguais. Entretanto, é evidente a diferença entre elas, enquanto a curva 1 é alta e curta, a curva 2 é baixa e larga. Isso demonstra que os dados componentes de cada amostra não são iguais e estão dispostos de forma diferente em torno da média, levando a conclusão de que podem existir distribuições com médias iguais, porém, irão variar conforme os intervalos de dispersão.

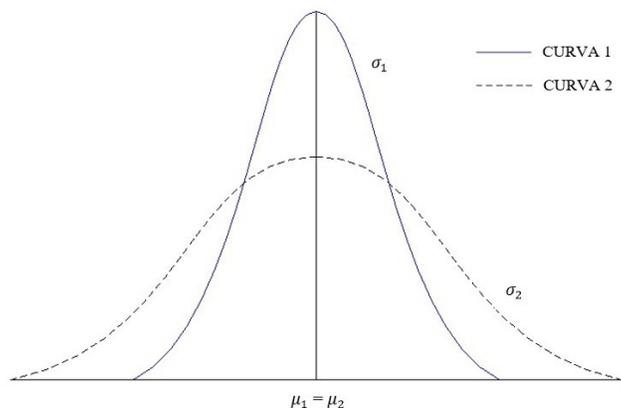


Figura 4 - Curvas com médias iguais e desvios padrões diferentes.

### 1.5.1. Variância e Desvio Padrão

Uma forma de verificar essa dispersão é através da variância e do desvio padrão. A variância corresponde a um único número que representa a dispersão dos dados em torno da média. A verificação dessa dispersão baseia-se na subtração de cada componente do conjunto com a média, seja de toda população ou de uma amostra. Porém, em um conjunto de dados existem valores maiores e menores que a média, como consequência haverá desvios negativos e positivos que se anulam quando somados.

Como a variância corresponde a um único valor, necessitamos realizar o somatório para que haja representatividade. Então, para solucionar o impasse da soma nula, efetuamos a soma do quadrado dos desvios. Dividindo a soma pelo número de componentes populacionais chegamos a fórmula básica para o cálculo da variância populacional ( $\sigma^2$ ) que para dados  $x$  não agrupados é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x - \mu)^2}{N} \quad (11)$$

Para dados agrupados multiplicamos pela frequência acumulada  $fa$ :

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x - \mu)^2 \times fa}{N} \quad (12)$$

Podemos obter a variância para uma amostra ( $S^2$ ) com uma fórmula semelhante, que se diferencia por considerar um grau de liberdade ( $n - 1$ ), tendo em vista que para o cálculo da variância é necessário determinar primeiramente a média. O cálculo para uma amostra de dados não agrupados é feito através da fórmula:

$$S^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (13)$$

Para uma amostra de dados agrupados multiplicamos pela frequência:

$$S^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2 \times fa}{n - 1} \quad (14)$$

O fato de a variância ser calculada utilizando o quadrado dos desvios acaba fornecendo um valor com uma divergência que pode se distanciar muito da realidade. Para dados com muitas casas decimais fica difícil a compreensão. Como solução para isso tem o desvio padrão, que é definido como a raiz quadrada da variância. Abaixo tem-se as fórmulas para o cálculo do desvio padrão populacional ( $\sigma$ ) e amostral ( $S$ ).

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (15)$$

$$S = \sqrt{S^2} \quad (16)$$

Tanto a variância como o desvio padrão são importantes e seus resultados podem ser facilmente interpretados. Valores de variância e desvio padrão grandes indicam que os dados do conjunto se encontram dispersos em uma maior amplitude em torno da média, enquanto valores menores indicam uma dispersão mais próxima da média.

### Exemplo 1.9:

Calcule a variância e o desvio padrão da situação do Exemplo 1.1, em que a amostra de 10 funcionários possui as seguintes idades:

44 52 23 27 35 45 51 33 40 25

### Solução:

Na solução do Exemplo 1.1, já calculamos a média que corresponde a 37.5 anos. Primeiro calcula a variância. Como se trata de uma amostra de dados não agrupados utilizaremos a Equação 11:

$$S^2 = \frac{(44 - 37.5)^2 + (52 - 37.5)^2 + (23 - 37.5)^2 + (27 - 37.5)^2 + (35 - 37.5)^2 + (45 - 37.5)^2 + (51 - 37.5)^2 + (33 - 37.5)^2 + (40 - 37.5)^2 + (25 - 37.5)^2}{10 - 1}$$

$$S^2 = 111.17 \text{ anos}^2$$

Para o cálculo do desvio padrão basta tirar a raiz quadrada do valor encontrado:

$$S = \sqrt{111.17} = 10.54 \text{ anos}$$

**Exemplo 1.10:**

Calcule a variância e o desvio padrão para a situação do Exemplo 1.2.

**Solução:**

Na solução do Exemplo 1.2, já foi calculada a média, que corresponde a 37.2 anos.

Primeiro deve ser calculada a variância. Como se trata da população com dados agrupados utiliza-se a Equação 12:

$$\sigma^2 = \frac{[(25 - 37.2)^2 \times 12] + [(35 - 37.2)^2 \times 21] + [(45 - 37.2)^2 \times 11] + [(55 - 37.2)^2 \times 6]}{50}$$

$$\sigma^2 = 89.16 \text{ anos}^2$$

Para o cálculo do desvio padrão basta tirar a raiz quadrada do valor encontrado:

$$\sigma = \sqrt{89.16} = 9.44 \text{ anos}$$

**1.5.2. Variância e Desvio Padrão de Variáveis Aleatórias**

As variáveis aleatórias também podem ser caracterizadas por um valor que represente a sua dispersão em torno do valor esperado. Então, para medir a variabilidade de uma amostra de variáveis aleatórias, seja discreta ou contínua, calculamos a variância e o desvio padrão.

Se  $X$  é uma variável aleatória com esperança dada por  $E[X]$ , temos que a variância  $\sigma^2$  ou  $V[X]$  de uma variável aleatória discreta é definida por:

$$V[X] = \sum_D (x - E[X])^2 \cdot p(x) = E[(X - E[X])^2] \quad (17)$$

$$= E[X^2] - E[X]^2$$

Em que:

$V[X]$ : variância da VA discreta;

$E[X]$ : esperança da VA discreta;

$E[X^2]$ : esperança da VA discreta ao quadrado;

$x$ : valores assumidos pela VA no conjunto de possibilidades  $D$ ;

$p(x)$ : probabilidade associada a cada valor  $x$  da VA

De forma semelhante, a variância de uma variável aleatória contínua é definida por:

$$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot f(x) dx \quad (18)$$

$$= E[X^2] - E[X]^2$$

Em que:

$E[X]$ : esperança da VA contínua;

$E[X^2]$ : esperança da VA contínua ao quadrado;

$x$ : variável aleatória contínua;

$f(x)$ : fdp da VA contínua.

Para ambas as variáveis, o desvio padrão, representado por  $\sigma_x$ , é obtido através da raiz quadrada da variância:

$$\sigma_x = \sqrt{V[X]} \quad (19)$$

### Exemplo 1.11:

Calcular a variância e o desvio padrão para as situações do Exemplo 1.7 e Exemplo 1.8, correspondentes a variáveis aleatórias discretas e contínuas, respectivamente.

### Solução:

Primeiro vamos calcular para o Exemplo 1.7. Calculado anteriormente, o valor esperado para a variável aleatória  $X$  é de 1 Cara. Com essa informação e os dados da Tabela 2, obtém-se a variância substituindo na Equação 17:

$$\begin{aligned} V[X] &= (0 - 1)^2 \times \frac{1}{4} + (1 - 1)^2 \times \frac{2}{4} + (2 - 1)^2 \times \frac{1}{4} \\ V[X] &= \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Com o valor da variância, basta tirar a raiz quadrada e obtemos o desvio padrão:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Agora calcularemos para o Exemplo 1.8. A média da variável aleatória contínua já foi calculada e é de  $-5/6$ . Para obter a variância utiliza-se a Equação 18. Primeiro calcula  $E[X^2]$ .

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-1}^0 x^2 \cdot 5x^4 dx = 5 \int_{-1}^0 x^6 dx \\ E[X^2] &= 5 \left[ \frac{x^7}{7} \right]_{-1}^0 = \frac{5}{7} [0^7 - (-1)^7] \\ E[X^2] &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

A variância será:

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{5}{7} - \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{252} \cong 0.02$$

Por fim, pode-se encontrar o valor do desvio padrão calculando a raiz quadrada da variância:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{5}{252}} \cong 0.141$$

## 1.6. EXERCÍCIOS

1. Analise as situações abaixo e diga quais técnicas de amostragem probabilística você utilizaria na obtenção das amostras.
  - a. Selecionar 20 peças entre 100 para verificação de falhas.
  - b. Selecionar 10% dos alunos do sexo masculino e do sexo feminino entre 360 alunos matriculados em uma escola.
2. O concreto armado é um material amplamente utilizado em todo o mundo para a construção de estruturas. Ele é confeccionado basicamente por dois materiais: concreto simples e aço. São componentes bastante distintos e por isso possuem diferentes deformações quando solicitados por carregamentos externos. Baseado nisso, Fernandes (1996) em estudo acerca das deformações do concreto e do comportamento de vigas submetidas à flexão simples, analisou amostras de peças de concreto e aço e obteve experimentalmente, para diversos carregamentos, as seguintes deformações para os dois materiais:

Força (KN)	Deformações Experimentais do concreto ( $\epsilon_c$ )	Deformações Experimentais do aço ( $\epsilon_a$ )
2.16	17.00	16.50
3.95	32.75	33.21
6.00	51.50	57.36
7.95	75.25	112.00
9.95	102.75	185.50
12.00	133.25	265.64
13.95	169.50	353.21
16.00	210.75	445.14
18.00	252.25	529.93
20.00	298.50	621.86
22.00	345.50	713.86
25.00	404.25	833.43
30.00	509.75	1048.50
35.00	618.50	1257.21
39.95	734.75	1461.57
45.00	852.50	1665.71

50.00	980.00	1871.07
55.00	1119.50	2081.00

Tabela 3 - Forças x Deformações: 7Ø10.

- Determine a média e a mediana amostral para as deformações do concreto e do aço.
  - O que podemos afirmar a respeito da moda para ambos os materiais?
- Utilizando os mesmos dados da questão anterior, calcule a variância e o desvio padrão para as deformações do concreto e do aço.
  - O estudo da pluviosidade é muito importante para analisar disponibilidade hídrica e prever possíveis situações críticas relacionadas a água. Santos (2016) em pesquisa acerca da climatologia da pluviosidade na bacia hidrográfica do Rio Paranaíba, analisou através de dados disponibilizados pela Agência Nacional das Águas, a variabilidade mensal da pluviosidade de 22 postos pluviométricos localizados em municípios nessa bacia. Na tabela abaixo encontram-se os dados para 5 desses municípios.

Município	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
Ituiutaba	261	192	175	76	31	14	11	14	51	122	177	257
Jataí	247	209	231	119	45	15	10	22	62	118	214	245
Itajá	293	192	202	92	52	22	16	16	63	129	163	250
Aporé	301	244	259	108	48	23	16	24	75	138	200	243
Brasília	221	195	206	133	32	6	7	15	51	161	240	252

Tabela 4 - Média mensal da precipitação (mm) em postos pluviométricos da Bacia do Paranaíba

- Determine a média de precipitação anual de cada um dos 5 municípios.
  - Determine a precipitação mediana de Jataí e Aporé.
  - Qual a moda da precipitação em cada um dos municípios?
  - Agora analisando os meses, qual deles possui a maior média de precipitação?
- Utilizando os dados da questão anterior, calcule a variância e o desvio padrão para as precipitações de todas as cidades. Qual delas possui a maior variabilidade de precipitações?
  - Em estudo do desenvolvimento do sistema radicular da parte aérea do feijoeiro comum, Moreira (2004) analisou o teor de fósforo presente no tecido da parte aérea de plantas de feijão submetidas a diferentes tratamentos, obtendo, para primeira repetição, os seguintes valores em g.kg-1:

4.3    1.4    4.8    3.4    4.0    4.1

- Determine a média.

- b. Determine a variância e o desvio padrão.
7. Um engenheiro diagnóstico, ao realizar uma vistoria em uma obra muito antiga, encontrou diversas manifestações patológicas. Entre as manifestações mais recorrentes estavam as aberturas. Para contabilizar essas aberturas ele as dividiu em classes, diferenciando-as de acordo com as espessuras em mm. Na tabela abaixo temos as classes e as frequências absolutas (Qualquer abertura acima de 10 mm é considerada brecha, mas como não foi encontrada nenhuma acima de 15 mm, então definiu-se esse como o valor máximo da última classe).

Anomalias	Aberturas (mm)	Frequência absoluta
Fissura	0 † 0.5	20
Trinca	0.5 † 1.5	24
Rachadura	1.5 † 5.0	10
Fenda	5.0 † 10.0	5
Brecha	10.0 † 15.0	1

Tabela 5 - Aberturas encontradas na vistoria.

- a. Determine a média, moda e mediana.
- b. Determine a variância e o desvio padrão.
8. Mil (1000) reservatórios de água domiciliar passaram por processo de descontaminação através da cloração, método caracterizado pela adição de cloro (Cl<sub>2</sub>) na água. Os reservatórios recebiam uma dose controlada de cloro e após uma semana passavam por novos testes. Caso ainda apresentassem um grau elevado de contaminação, recebiam outra dose. Ao fim de 4 semanas foram considerados descontaminados. Considerando o número de doses de cloro uma variável aleatória discreta X, obteve-se a seguinte distribuição:

Doses de cloro (X)	1	2	3	4
Freq.	234	380	207	179
p(x)	0.234	0.380	0.207	0.179

Tabela 6 - Doses de cloro e frequência de descontaminação.

Com os dados acima, determine a média, a variância e o desvio padrão para a variável aleatória discreta X.

9. Considere que a variável aleatória X tem a seguinte fdp:

$$f(x) = \begin{cases} -8x^3 + 4x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule a esperança, a variância e o desvio padrão dessa variável aleatória.

10. A proporção de argila em um solo pode ser considerada uma variável aleatória  $X$ , com função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 20x^3 - 20x^4, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Determine:

- A esperança
- A moda
- A variância e o desvio padrão

## CONFIABILIDADE

### 2.1. INTRODUÇÃO

Para a engenharia, a confiabilidade está ligada aos diversos fatores que oferecem segurança a um projeto. Desse modo, tanto estruturas quanto elementos estruturais são desempenhados a partir de determinadas funções que cumprem o papel de proporcionar confiabilidade à obra envolvendo a vida útil do projeto, adequada segurança e economia na construção (BECK, 2019).

Com isso, toda e qualquer questão possui fatores e medidas que são aleatórias e podem ser otimizadas para obtenção de um rendimento ótimo em condições favoráveis, ou seja, é possível aprimorar elementos e potencializá-los para o melhor resultado existente.

O método do índice de confiabilidade envolve as variáveis incertas expressas na média (ou valor esperado), desvio padrão e uma medida de correlação (ou como pode ser conhecida de função objetivo que relaciona as variáveis para desempenhar o papel sobre as distribuições probabilísticas), e assim, obter a probabilidade de falha.

Em contrapartida, são utilizados métodos mais difundidos para o cálculo da confiabilidade e probabilidade de falha, amplamente conhecido como Simulação de Monte Carlo.

Neste capítulo, serão apresentados conceitos relacionados ao espaço amostral, funções de densidade probabilística para variáveis discretas e contínuas e, por fim, mostrado o cálculo da probabilidade de falha pela Simulação de Monte Carlo.

### 2.2. ESPAÇO AMOSTRAL

De maneira geral, espaço amostral é o conjunto de dados obtidos do resultado de experimentos aleatórios que são enumerados de forma lógica. Esse então, devendo compreender todos os resultados da experiência sem haver ambiguidade dos elementos levantados.

No que cabe a forma lógica do espaço amostral, este deve ser listado de modo que não haja elementos repetitivos e que sejam dispostos de maneira detalhada suficiente para atender aos interesses desejados, omitindo resultados, que embora possíveis, não causem consequências na análise.

Como consta em Albuquerque, Fortes e Finamore (2018), é necessário que se faça uma definição do modelo matemático que esteja sendo trabalhado, de maneira que o espaço amostral seja detalhado até o necessário e seja compacto de forma a não restringir

nenhum dado importante.

Como exemplo simples, o experimento de jogar uma moeda para cima, será possível obter dois resultados: cara ou coroa. Logo, o espaço amostral é contemplado por  $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$ .

De acordo com Walpole et al. (2009), o espaço amostral pode ser subdividido em dois grandes grupos quando contém um número finito ou uma sequência infinita de possibilidades com números inteiros, sendo denominado por *espaço amostral discreto*, o outro conjunto consequentemente composto por um número de infinitas possibilidades, adequando desse modo os números fracionados, conhecido por *espaço amostral contínuo*.

## 2.3 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

### 2.3.1 Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade (fdp) ou função massa de probabilidade (fmp) analisa a probabilidade exata de uma variável aleatória  $X$  acontecer durante a realização de um experimento. Como exemplo podemos pensar no lançamento de um dado, onde se pode enumerar todos os possíveis resultados e assim aplicar a fdp.

**Exemplo 2.1:** Suponha que em um supermercado existe duas marcas distintas que são concorrentes. Seja então:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{Marca A} \\ 0, & \text{Marca B} \end{cases}$$

Se a cada cliente que compra o produto apenas 30% compram a Marca “A”. A fdp  $p$  de  $X$  será:

$$p(0) = P[X = 0] = P[\text{próximo cliente compra Marca B}] \\ = 0.7$$

$$p(1) = P[X = 1] = P[\text{próximo cliente compra Marca A}] \\ = 0.3$$

$$p(x) = P[X = x] = 0, \text{ se } x \neq 0 \text{ ou } 1.$$

A Figura 5 a seguir contém o gráfico da fdp deste exemplo:

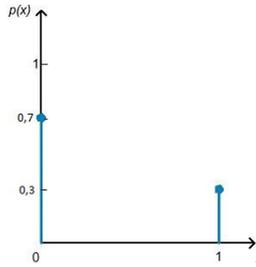


Figura 5 - Gráfico de linhas da fdp.

O nome “*função de massa de probabilidade*” é sugerido por um modelo usado em física para um sistema de “*pontos de massa*”. Nesse modelo, as massas são distribuídas nos diversos locais  $x$  ao longo de um eixo unidimensional. A *fmp* descreve como a massa total das probabilidades igual a 1 e é distribuída nos diversos pontos ao longo dos eixos dos possíveis valores da variável aleatória (onde e quanto de massa em cada  $x$ ). (DEVORE, 2006).

### 2.3.2. Função densidade acumulada de probabilidade

A função densidade acumulada (*fda*) para uma variável aleatória discreta  $X$  irá calcular a probabilidade  $P$  desta ser menor ou igual a um  $x$  arbitrário. Esta deverá atender as propriedades da *fdp*.

A *fda* é apenas uma forma simplificada de calcular a probabilidade de um evento ocorrer dentro de um intervalo, diferentemente da *fdp* que descreve a probabilidade para um valor exato.

Por definição:

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{n=x} p(x) \quad (20)$$

Onde,  $p(x)$  representa cada probabilidade individual de um valor  $x$  ser maior que  $X$  e  $F(x)$  é a probabilidade acumulada.

**Exemplo 2.2:** Considere a *fdp* a seguir:

$x$	1	2	3	4
$p(x)$	0.3	0.3	0.2	0.2

Determinamos então o espaço amostral  $\{1, 2, 3, 4\}$ , que são os valores possíveis e as seguintes *fda*:

$$\begin{aligned}
 F(1) &= P[X \leq 1] = P[X = 1] = p(1) = 0.3 \\
 F(2) &= P[X \leq 2] = P[X = 1 \text{ ou } 2] = p(1) + p(2) = 0.6 \\
 F(3) &= P[X \leq 3] = P[X = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3] = p(1) + p(2) + p(3) = 0.8 \\
 F(4) &= P[X \leq 4] = P[X = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3 \text{ ou } 4] \\
 &= p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1
 \end{aligned}$$

Logo, podemos definir que:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ 0.3, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 0.6, & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ 0.8, & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{se } 4 \leq x \end{cases}$$

Essa é a forma característica da *fda* apresentada visualmente na forma de degrau de maneira contínua até a margem do máximo onde a *fda* é igual a 1, como pode ser observado na Figura 6. Através disso podemos dizer que a *fda* será sempre crescente e termina no valor 1 (100% dos valores possíveis atingidos).

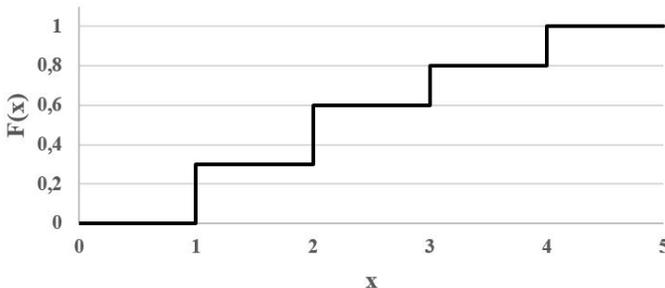


Figura 6 - Gráfico de linhas da *fda*.

### 2.3.3. Valor Esperado

Ainda que já tenha sido explicado no Capítulo anterior, cabe lembrar aqui os conceitos relacionados ao valor esperado de uma amostra. Assim, dado um espaço amostral discreto, a fim de observar a tendência natural de uma eventualidade, baseia-se em parâmetros de localização e dispersão, ou seja, as medidas de localização estão relacionadas a um ponto médio em relação aos resultados e as medidas de dispersão estão ligadas ao quanto os resultados fogem da média.

Para tal, temos definidas algumas medidas, como média e desvio padrão, que serão aplicadas diretamente na *fdp* de uma variável aleatória X.

Assim, como medida de localização para estudo das variáveis aleatórias discretas, temos a média equivalente, por definição:

$$E[X] = \mu_x = \sum_{x \in D} x \cdot p(x) \quad (21)$$

Onde, X é uma variável aleatória discreta com conjunto de valores possíveis D e  $p(x)$  é a função densidade de probabilidade. Sendo  $E[X]$  a esperança ou valor esperado e  $\mu_x$  a média, também chamada de esperança ou valor esperado.

Para medida de dispersão usa-se como parâmetros a variância e o desvio padrão. Por definição, temos que a variância V:

$$V[X] = \sum_D (x - \mu)^2 \cdot p(x) = E[(X - \mu)^2] \quad (22)$$

Assim, o desvio padrão  $\sigma_x$  de X é:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \quad (23)$$

## 2.4. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

### 2.4.1. Função densidade de probabilidade

Para a engenharia, a função densidade de probabilidade é continuamente utilizada para descrever sistemas físicos, ou seja, avalia dentro de uma situação uma variável que está de forma contínua dentro de um intervalo, que comumente pertence a um espaço amostral contável (MONTGOMERY; RUNGER, 2009).

Inicialmente, a função densidade de probabilidade é função  $f(x)$  ou  $p(x)$  e para classificação desse modo é necessário que atendam alguns critérios:

- $f(x) \geq 0$ ;
- A área total sob o gráfico de  $f(x)$  é igual a 1;
- A função de  $f(x)$  descrita deve atender a uma variável aleatória contínua, de maneira que  $P[a \leq X \leq b]$  é o espaço que deve estar delimitando a curva, conforme Figura 7.

Devido a relação com áreas, as probabilidades são sempre números positivos, devendo sempre estar inteiramente acima do eixo x. Similar aos critérios aplicados sobre a função densidade de probabilidade, ainda é possível redirecioná-los diretamente para um espaço amostral contínuo sempre que puder estender a amplitude de **X** para um intervalo de número incluindo o conjunto inteiro de números reais (WALPOLE et al., 2009). De modo que passa a representar de maneira mais precisa envolvendo o conceito de integral de uma função variável.

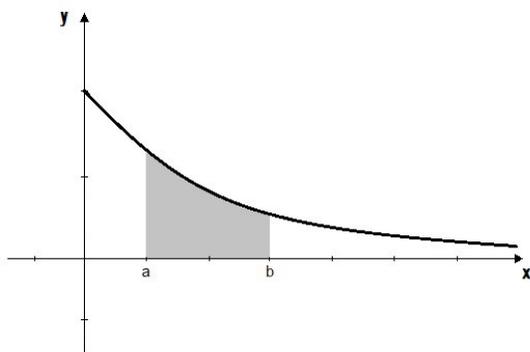


Figura 7 - Probabilidade de  $P[a \leq X \leq b]$ .

Logo, para a função densidade de probabilidade envolvendo integral expõe também critérios a serem seguidos:

- $f(x) \geq 0$ , para todo  $x \in R$ ;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ ;
- $P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$ .

Diante dos critérios, uma observação importante que deve ser analisada é com relação à interpretação sobre a probabilidade na curva de densidade, na qual é possível notar que o evento de  $X = a$  é zero, ou seja, a probabilidade de que isso aconteça é nula.

Em termos de integral, esse resultado corresponde ao fato de que  $\int_a^a f(x)dx = 0$ . Além disso, também pode ser classificado como nulo os resultados impossíveis relacionada as variáveis aleatórias contínuas dentro do intervalo ponderado (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2005).

**Exemplo 2.3** - Tomemos como exemplo um experimento em que um laboratório relatou um erro na temperatura de uma reação e obteve a variável aleatória contínua  $X$ , definida pela seguinte função densidade de probabilidade, conforme apresentado na Figura 8:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{3x}{8}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Atestando para o segundo critério da função densidade de probabilidade relacionado a integral:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 1 \rightarrow \\ \int_0^2 \left( \frac{1}{8} + \frac{3x}{8} \right) dx &\Rightarrow \left. \frac{x}{8} + \frac{3x^2}{16} \right|_0^2 \Rightarrow \frac{2}{8} + \frac{3 \cdot 2^2}{16} - \frac{0}{8} - \frac{3 \cdot 0^2}{16} \Rightarrow \frac{2}{8} + \frac{12}{16} \\ &= 1 \end{aligned}$$

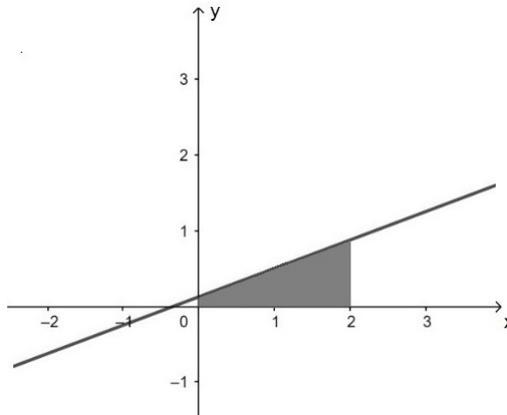


Figura 8 - Gráfico da área sob a  $f(x)$ .

Além disso, a área formada pelo gráfico pode ser caracterizada como uma figura geométrica. Baseando-se na formulação específica de área para tal é possível comprovar se a função densidade de probabilidade está dentro do critério de área total igual a 1.

A Figura 9 forma um trapézio no qual possui área A:

$$A = \frac{(B + b) * h}{2} = \frac{(0.875 + 0.125) * 2}{2} = 1$$

No qual,

B: base maior;

b: base menor;

h: altura.

Logo, utilizando o método convencional também consegue comprovar se a função densidade de probabilidade atende as exigências. Porém, só é possível demonstrar por meio desse quando através do gráfico puder identificar uma figura geométrica conhecida.

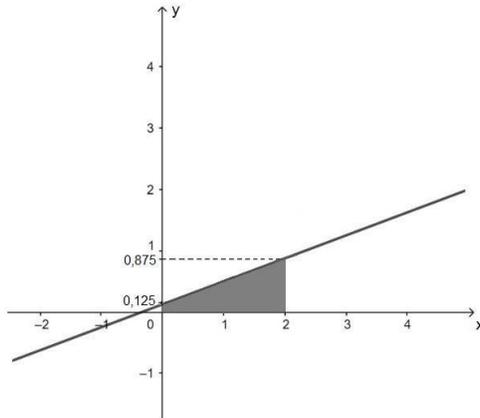


Figura 9 - Gráfico da área sob a f(x).

Avaliando no critério para uma possível probabilidade para  $P[0 < X \leq 1]$ , conforme mostrado na Figura 10:

$$\begin{aligned}
 P[0 < X \leq 1] &= \int_0^1 \left( \frac{1}{8} + \frac{3x}{8} \right) dx \\
 P[0 < X \leq 1] &= \int_0^1 \left( \frac{1}{8} + \frac{3x}{8} \right) dx \Rightarrow \frac{x}{8} + \frac{3x^2}{16} \Bigg|_0^1 \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{3 \cdot 1^2}{16} - 0 \\
 &= \frac{5}{16}
 \end{aligned}$$

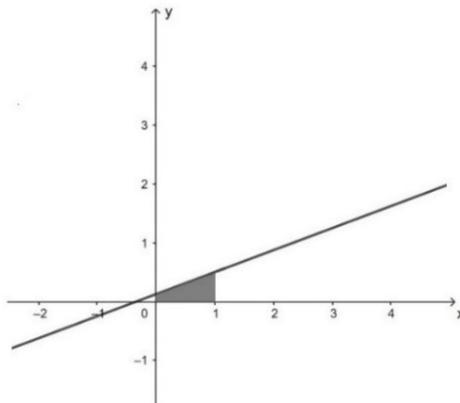


Figura 10 - Gráfico da área sob  $P[0 < X \leq 1]$ .

### 2.4.2. Função densidade acumulada de probabilidade

Outra forma de obter a função densidade de probabilidade é através da derivação da função densidade acumulada de probabilidade que será calculada, como o próprio nome sugere, pela distribuição acumulada das variáveis até o valor arbitrário de  $x$ , ou seja, irá

calcular a probabilidade de se atribuir um número real menor ou igual a  $x$ .

Assim, pode-se dizer que a função de distribuição acumulada  $F(x)$  de uma variável aleatória contínua  $X$  representa o acumulativo das probabilidades anteriores a um valor  $x$ , ou seja, esta calcula  $F(x)$  para qualquer valor menor ou igual a  $x$ , a qual podemos descrever como  $P[X \leq x]$ .

De forma análoga ocorre o somatório de probabilidades associadas a uma variável  $y \leq x$  e para obtenção integra-se  $f(x)$ , com limites entre  $-\infty$  e  $x$ .

Por definição, a função distribuição acumulada  $F(x)$  é descrita como:

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(x)dx \quad (24)$$

Na Figura 11, observa-se os gráficos referentes a  $fdp$  e  $fda$ , consecutivamente, assim, a partir deles é possível verificar que para cálculo da  $fda$ , a função se restringe somente a área pela esquerda abaixo da curva densidade de probabilidade, e também que  $F(x)$  à direita tende para um valor constante.

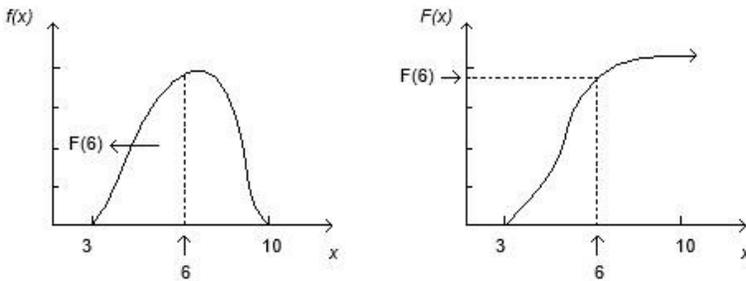


Figura 11 - Gráfico  $fdp$  e  $fda$  de uma variável aleatória contínua.

Para efeitos de cálculos, sendo  $X$  uma variável contínua com  $f(x)$  e  $F(x)$  para quaisquer dois números  $a$  e  $b$ , sendo  $a < b$ , tem-se que:

$$P[X > a] = 1 - F(a) \quad (25)$$

$$P[a \leq X \leq b] = F(b) - F(a) \quad (26)$$

É possível observar as equações a seguir através da Figura:

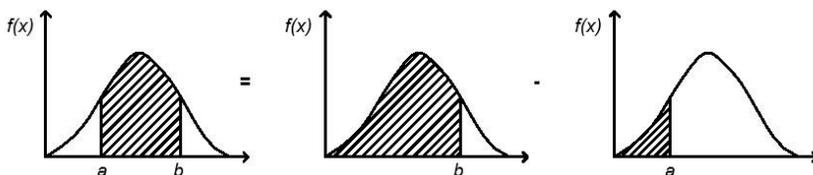


Figura 12 - Cálculo de  $P[a \leq X \leq b]$  pelas probabilidades acumuladas.

Na Figura 12, calcula-se a probabilidade de  $X$  estar entre os limites  $a$  e  $b$ . Para isso, destrinchando como se obteve tal resultado, tem-se a probabilidade acumulada até o limite superior  $b$  subtraído da probabilidade acumulada do limite inferior obtendo assim a  $P[a \leq X \leq b]$ .

**Continuação do Exemplo 2.3:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{3x}{8}, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como visto nesse tópico, para obtenção da *fdp* é necessário integrar  $f(x)$  definida entre  $-\infty$  e  $x$ . Logo tem-se que:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x \left( \frac{1}{8} + \frac{3x}{8} \right) dx$$

Integrando, para qualquer  $x$  entre 0 e 2.

$$\int_0^x \left( \frac{1}{8} + \frac{3x}{8} \right) dx = \left( \frac{x}{8} + \frac{3}{16} x^2 \right)$$

Dessa forma, obtemos a função acumulada no intervalo entre 0 e 2. Sendo assim, teremos que para todo valor menor que 0 a função será nula e para valores maiores que 2 será 1, pois como visto anteriormente a função torna-se constante. Logo podemos escrever  $F(x)$  como:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \left( \frac{x}{8} + \frac{3}{16} x^2 \right), & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & 2 < x \end{cases}$$

Na Figura 13, verificamos os gráficos de *fdp* e *fdp* respectivamente.

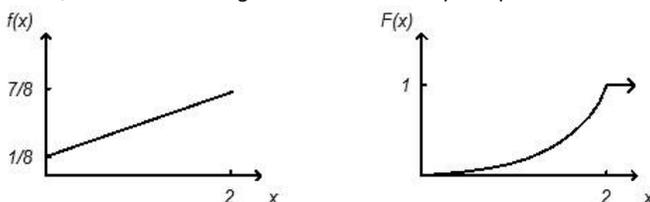


Figura 13 - *fdp* e *fdp* consecutivamente.

Calculando a probabilidade de  $x$  estar entre 0 e 1 usaremos a proposição apresentada acima, assim:

$$\begin{aligned} P[a \leq X \leq b] &= F(b) - F(a) = P[0 \leq X \leq 1] \\ &= F(1) - F(0) \\ &= \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{16} 1^2\right) - \left(\frac{0}{8} + \frac{3}{16} 0^2\right) \\ &= 0.3125 \end{aligned}$$

Podemos também calcular a probabilidade de exceder 1.

$$\begin{aligned} P[X > 1] &= 1 - P[X \leq 1] \\ &= 1 - F(1) = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{16} 1^2\right) \\ &= 0.6875 \end{aligned}$$

Tendo em vista os conceitos anteriores, pode-se dizer que com o cálculo da *fdp* de uma variável aleatória contínua  $X$  é possível obter a sua *fdp* através da derivada de  $F(x)$ . Neste caso, tem-se que para todo  $x$  derivável e existente:  $F'(x) = f(x)$ .

Dessa forma, torna-se mais simples a obtenção da *fdp* através da *fdp*, de modo que quando  $x$  tende para  $-\infty$ ,  $F(x) = 0$  e  $x$  tendendo para  $\infty$ ,  $F(x) = 1$ . Conclui-se, assim que  $F(x)$  será sempre uma função crescente.

### 2.4.3. Valor Esperado e Variância

Como visto no capítulo 1, o valor esperado de uma variável é nada mais do que uma forma de medir a média dos valores observados e obtidos, e a variância indica a dispersão em torno da média ou valor esperado. Essas são medidas de localização e são parâmetros utilizados para o cálculo de métodos probabilísticos.

Assim, aplicando esse conceito, o valor esperado de uma variável aleatória contínua, também chamado de esperança, é dado por definição como a integral da *fdp* multiplicada por uma variável  $x$  e representada como  $E(x)$ , tal expressão é descrita a seguir:

$$\mu_x = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (27)$$

Já a variância  $V[X]$  de uma variável aleatória contínua, por definição, é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 = V[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx \\ &= E[(X - \mu)^2] \end{aligned} \quad (28)$$

O desvio padrão  $\sigma_x$  de  $X$  é dado por:

$$\sigma_x = \sqrt{V[X]} \quad (29)$$

Como a variância está estreitamente ligada ao valor médio, a forma mais simplificada de calcular é definida a seguir:

$$V[X] = E[X^2] - E(X)^2 \quad (30)$$

### Continuação Exemplo 2.3

Para obtenção do valor esperado utilizaremos a Equação 27, logo:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \\ E[X] &= \int_0^2 x \cdot \left( \frac{1}{8} + \frac{3x}{8} \right) dx \\ E[X] &= \int_0^2 \left( \frac{1x}{8} + \frac{3x^2}{8} \right) dx \\ E[X] &= \left( \frac{2^2}{16} + \frac{3 \cdot 2^3}{24} \right) - \left( \frac{0^2}{16} + \frac{3 \cdot 0^3}{24} \right) \\ E[X] &= 1.25 \end{aligned}$$

Logo, o valor esperado de  $x$  será 1.25. Consequente, calculando a variância e o desvio padrão, tem-se que, usando a maneira simplificada:

$$V[X] = E[X^2] - E(X)^2$$

Assim, para calcular  $E(X^2)$ , teremos:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^2 x^2 \cdot \left( \frac{1}{8} + \frac{3x}{8} \right) dx \\ E[X^2] &= \int_0^2 \left( \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{8} \right) dx \\ E[X^2] &= \left( \frac{2^3}{24} + \frac{3 \cdot (2^4)}{32} \right) - \left( \frac{0^3}{24} + \frac{3 \cdot (0^4)}{32} \right) \\ E[X^2] &= 1.833 \end{aligned}$$

Assim, encontrando a variância:

$$\begin{aligned} V[X] &= E[X^2] - E(X)^2 \\ V[X] &= 1.833 - [1.25]^2 \\ V[X] &= 0.2705 \end{aligned}$$

E para o desvio padrão, temos que:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{V[X]} \\ \sigma_x &= \sqrt{0.2705} \\ \sigma_x &= 0.520 \end{aligned}$$

## 2.5. TIPOS DE DISTRIBUIÇÃO PROBABILÍSTICA PARA VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

A distribuição de probabilidades pode ser representada por um histograma de probabilidades onde a escala vertical representa o número de acontecimentos e a horizontal representa alguma variável observada. Além disso, através da distribuição probabilística pode-se encontrar as medidas de localização e dispersão vistas anteriormente, como: valor esperado, variância e desvio padrão.

Existem vários tipos de distribuição de probabilidades estudadas e desenvolvidas ao longo do tempo, e cada qual possui uma finalidade e funcionalidade diferente. Elas são diferenciadas a partir dos parâmetros utilizados e conseqüentemente pelo método de cálculo utilizado. Dentre esses métodos, existem alguns que têm maior relevância devido a sua praticidade, os quais devem-se dar maior atenção e por isso estarão presentes nesse tópico.

Esses tipos podem ser chamados também de modelos probabilísticos e são utilizados e aplicados em fenômenos naturais, físicos ou até mesmo experimentos e pesquisas de múltiplas áreas. Esses são caracterizados por sua função de probabilidade e parâmetros de medida ou dispersão. Assim, estão divididos conforme o tipo de variável aleatória podendo ser discreta ou contínua.

A distribuição discreta é aplicada a eventos numeráveis e finitos. Como por exemplo: o resultado de um teste de gravidez ou os possíveis resultados ao se jogar um dado. Nesse caso, a probabilidade associada a valores discretos assume valores únicos e é possível calcular a eventualidade exata daquele fenômeno. Assim, mostraremos a seguir alguns tipos de funções de densidade de probabilidade.

### 2.5.1. Distribuição de Bernoulli

A distribuição de Bernoulli é caracterizada por assumir valores a uma VA  $X$  de fracasso que serão representados numericamente como 0 ou o sucesso que será descrito como 1. Por definição, é dado que:

$$P[X = x] = p^x(1 - p)^{1-x} \quad , \quad x = [0, 1] \quad (31)$$

Onde  $p$  é o parâmetro no intervalo  $0 \leq p \leq 1$  e é a probabilidade de sucesso. É denotado como  $X \sim Ber(p)$ . Para medidas de localização e dispersão tem-se que:

$$E[x] = p \quad e \quad Var[X] = p(1 - p) \quad (32)$$

**Exemplo 2.4:** Para um teste de gravidez, considere como positivo evento de sucesso. Qual a probabilidade de dar positivo, sendo que  $p = 1/2$  ?

$$X = \begin{cases} 1, & \text{Positivo} \\ 0, & \text{Negativo} \end{cases}$$

Utilizando a Equação 31 e 32, se o teste for positivo  $X = 1$  e  $p = 1/2$ , assim:

$$P[X = x] = p^x(1 - p)^{1-x}$$

$$P[X = 1] = \frac{1^1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1-1}$$

$$P[X = 1] = \frac{1}{2}$$

Se o teste for negativo  $X = 0$  e  $p = 1/2$ , assim:

$$P[X = x] = p^x(1 - p)^{1-x}$$

$$P[X = 0] = \frac{1^0}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1-0}$$

$$P[X = 1] = 1/2$$

Logo, temos que:

$X$	$P[X = x]$	$p$
0	$1 - p$	$1/2$
1	$p$	$1/2$

Fazendo o gráfico mostrado na Figura 14 pode-se verificar tal fenômeno.

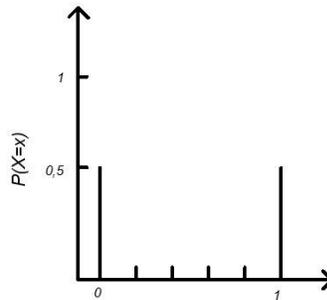


Figura 14 - Distribuição de Bernoulli.

## 2.5.2. Distribuição Binomial

A distribuição Binomial utiliza-se da distribuição de Bernoulli para realização de  $n$  ensaios independentes, cada ensaio assumindo apenas dois resultados possíveis: sucesso e fracasso, sendo a probabilidade  $p$  de sucesso constante. A probabilidade será calculada e então associada a quantidade de sucessos obtidos.

Assim, por definição tem-se que:

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = [0, 1, 2, \dots, n] \quad (33)$$

Em que:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad (34)$$

Em outras palavras, o coeficiente que representa o número total de combinações possíveis de n elementos, com x sucessos, denota-se como  $X \sim \text{bin}(n, p)$ . Para determinação dos parâmetros temos então que:

$$E[x] = np \quad (35)$$

$$\text{Var}[X] = np(1-p) \quad (36)$$

Na Figura 15, podemos observar como funciona esse método. Nesta, tem-se uma situação arbitrária onde o número de elementos é equivalente a 10 ( $n=10$ ) com uma probabilidade de sucesso igual a 0.3 ( $p=0.3$ ).

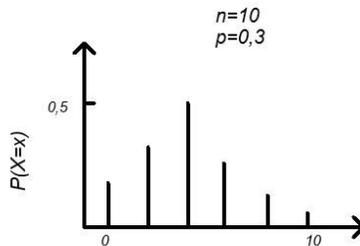


Figura 15 - Distribuição Binomial.

### 2.5.3. Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é utilizada quando o fenômeno ocorre no intervalo constante (de tempo ou espaço) e possui características de eventos independentes e aleatórios. Dessa forma, poderá assumir valores sem um limite superior, sendo definido no intervalo  $[0, t)$ , onde t é o tamanho do intervalo contínuo. Logo, por definição tem-se que:

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad \lambda > 0 \text{ e } x = 0, 1, \dots \quad (37)$$

Sendo  $\lambda$  um parâmetro que indica a taxa de ocorrência por unidade de medida t. Denota-se então  $X \sim Po(\lambda)$ . Dessa forma, o valor esperado e variância são:

$$E[x] = \lambda = \text{Var}[X] \quad (38)$$

Baseado na Figura 16 observamos o comportamento desse modelo. Em que de

forma arbitrária para exemplificação,  $\lambda=4$ , observa-se que onde  $\lambda=4$  seria o máximo de elementos observados, sendo assim, verifica-se a preposição da equação do valor esperado onde será igual ao parâmetro  $\lambda$ .

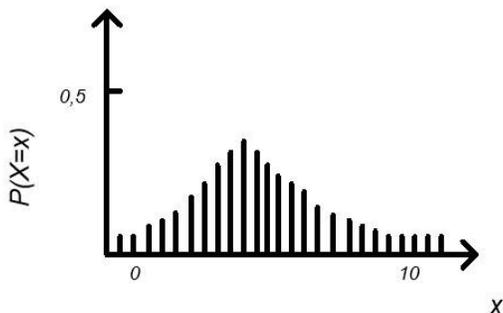


Figura 16 - Distribuição de Poisson.

## 2.6. TIPOS DE DISTRIBUIÇÃO PROBABILÍSTICA PARA VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

A distribuição contínua é aplicada a ocorrências que atribuem uma quantidade não enumerável de valores. Como por exemplo: velocidade, peso, precipitação, ou seja, qualquer recurso que pode ser medido em escala contínua.

No caso das variáveis aleatórias contínuas, a probabilidade de uma função resultar em único valor específico é zero, por isso, para a constituição do histograma é feita a divisão em classes ou intervalos que irão facilitar e direcionar o cálculo de probabilidade.

### 2.6.1. Distribuição Uniforme

A distribuição uniforme é bastante simples, porém, extremamente importante e muito útil na estatística. Nessa, a probabilidade de um evento ocorrer é constante, ou seja, dentro de um intervalo de um espaço amostral a probabilidade não irá mudar. É utilizada para casos particulares como fenômenos que têm o mesmo grau de forma.

Por definição, tem-se que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (39)$$

Em que,  $[a, b]$  é um intervalo de uma variável aleatória  $X$ .

O gráfico contido na Figura 17 ilustra a função densidade da distribuição uniforme com parâmetros  $a=0$  e  $b=1$ .

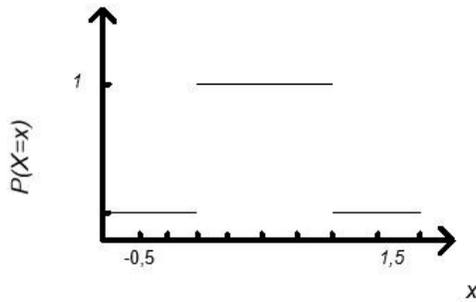


Figura 17 - Distribuição Uniforme.

**Exemplo 2.5:** seja  $X$  a espessura de uma determinada chapa de metal, com distribuição uniforme no intervalo  $[A, B]$ . A função de densidade é exibida na Figura 18.

Para  $x < A$ ,  $F(x) = 0$ , porque não há área sob o gráfico da função de densidade à esquerda de  $x$ . Para  $x \geq B$ ,  $F(x) = 1$ , já que toda a área está acumulada à esquerda de  $x$ .

Finalmente, para  $A \leq x \leq B$  (DEVORE, 2006):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_A^x \frac{1}{B-A} dx = \frac{1}{B-A} \cdot x = \frac{x-A}{B-A}$$

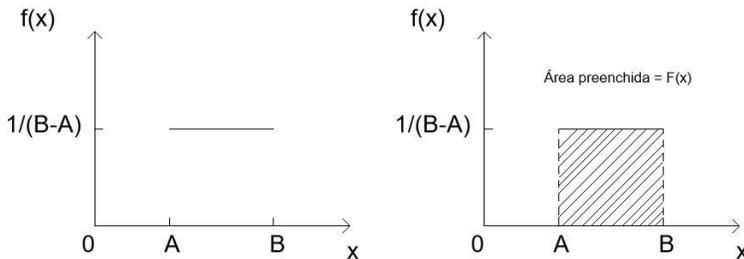


Figura 18 - Distribuição uniforme.

A *fda* completa é:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , & x < A \\ \frac{x-A}{B-A} & , & A \leq x \leq B \\ 1 & , & x \geq B \end{cases}$$

Logo, o gráfico da *fda* observa-se na Figura 19

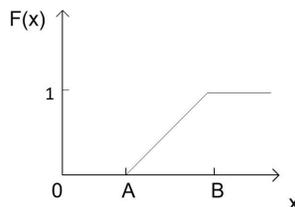


Figura 19 - Gráfico da *fda*.

Quando  $X$  tem distribuição uniforme,  $F(x)$  é diferenciável exceto nos pontos  $x = A$  e  $x = B$ , onde no gráfico de  $F(x)$  forma cantos agudos. Como  $F(x)=0$  para  $x < A$  e  $F(x)=1$  para  $x > B$ ,  $F'(x)=0= f(x)$  para qualquer  $x$ . Para  $A < x < B$ :

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x - A}{B - A} \right) = \frac{1}{B - A} = f(x)$$

## 2.6.2. Distribuição Normal

A distribuição normal é uma das mais utilizadas e considerada uma das mais importantes distribuições de probabilidade da estatística, devido a sua precisão em resultados. Também é conhecida como Distribuição de Gauss, pois a curva de tendência da distribuição foi desenvolvida a partir de seus estudos.

Logo, para exemplificar vamos considerar uma amostragem do peso de recém-nascidos, que pode ser visualizada na Figura 20, onde o eixo horizontal representa o peso os recém-nascidos e o eixo vertical representa a probabilidade/frequência de ocorrência (ou seja, a função densidade de probabilidade). A partir desta figura, observa-se uma certa tendência de um valor médio do peso e é possível observar o intervalo de dispersão, ou seja, o desvio padrão.

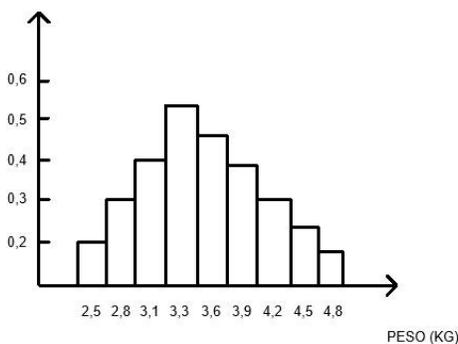


Figura 20 - Gráfico de distribuição do peso de recém-nascidos.

Para análise dessa distribuição utilizaremos a curva tendenciosa desenvolvida por Gauss. Sendo assim, o gráfico toma formato característico de sino, de modo que o ponto máximo é a média  $\mu$  e é o ponto de simetria da curva de distribuição e o desvio padrão será a distância do ponto médio até um ponto de inflexão da curva. Pode-se observar essas características através da Figura 21 e 22.

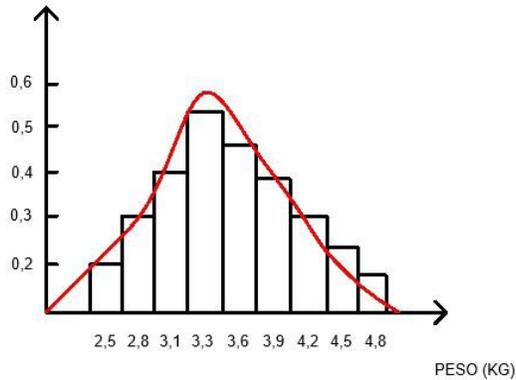


Figura 21 - Curva densidade da distribuição normal (linha tendência).

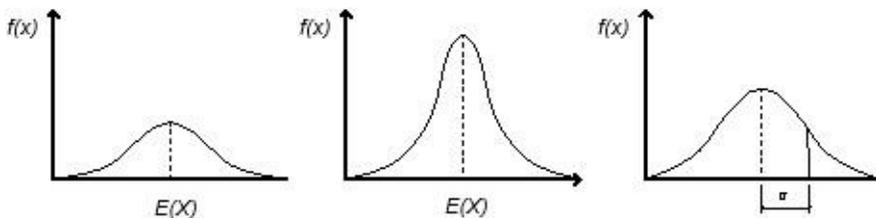


Figura 22 - Gráfico com linha de Gauss demonstrando média e desvio padrão.

Por definição tem-se que:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad -\infty < x < \infty \quad (40)$$

Em que,  $\mu$  é a média e  $\sigma$  é o desvio padrão. Atendendo as seguintes restrições que  $-\infty < \mu < \infty$  e  $0 < \sigma$ . E possui notação de  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

Claramente  $f(x; \mu, \sigma) \geq 0$  para qualquer número  $x$ , mas as técnicas do cálculo de multivariados são usadas para demonstrar que  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x; \mu, \sigma) dx = 1$ . Cabe ressaltar que  $E[X] = \mu$  e  $V[X] = \sigma^2$ , de forma que os parâmetros são a média e o desvio padrão de  $X$ .

Sabendo disso, utiliza-se uma forma padronizada  $Z$  com distribuição  $N(0,1)$  que é denominada distribuição normal padrão, na qual  $Z$  é tido como:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (41)$$

Essa forma padrão irá transpor a média para o centro do eixo cartesiano e ajustar desvio padrão para simplificar o cálculo, ou seja, média nula e desvio padrão unitário. Como a distribuição normal é bastante utilizada, há tabelas em que os resultados da integral são previamente calculados para facilitar os cálculos e resumir a uma simples pesquisa. A tabela possui resultados apenas de valores positivos. Essa pode ser encontrada facilmente

na literatura em diferentes formatos, motivo este que não mostraremos aqui.

**Exemplo 2.6:** Em um determinado sistema de distribuição de água, a pressão por coluna d'água tem pressão média de 6 mca com desvio padrão de aproximadamente 0.5 mca. Calcule a probabilidade de a pressão ser maior que 6.5 mca.

**Resolução:**

Utilizando a distribuição normal padrão tem-se que:

$$\begin{aligned} P[X > 6.5] &= P\left(Z > \frac{6.5 - 6}{0.5}\right) \\ P[X > 6.5] &= P(Z > 1) \end{aligned}$$

Como visto anteriormente, utilizaremos os conceitos vistos no cálculo da *fda* para obtenção da probabilidade de  $Z > 1$ , assim teremos:

$$P[X > 6.5] = 1 - P(Z \leq 1)$$

Utilizando os valores previamente calculados da tabela, obtém-se o resultado a seguir:

$$\begin{aligned} P[X > 6.5] &= 1 - 0.85 \\ P[X > 6.5] &= 0.15 \end{aligned}$$

Outro meio de resolver seria através da integral, dessa forma teríamos:

$$\begin{aligned} P[X > 6.5] &= 1 - P[Z \leq 6.5] \\ P[X > 6.5] &= \int_{-\infty}^{6.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} \\ P[X > 6.5] &= 0.15 \end{aligned}$$

### 2.6.3. Distribuição Gama

A distribuição gama é considerada de bastante relevância pois é aplicada à análise de tempo de vida de produtos.

Por definição, tem-se que:

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (42)$$

Em que, os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  satisfazem  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ . Temos que  $\alpha$  é considerado um parâmetro de forma e  $\beta$  é denominado um parâmetro de taxa. É denotada por  $X \sim \text{Gama}(\alpha, \beta)$ . Quando  $\beta = 1$ , denomina-se distribuição gama padrão. O gráfico dessa função irá variar em função de  $\beta$ , quando diferente de 1 esticam ou comprimem a curva da fdp na direção de  $x$ , conforme mostrado na Figura 23.

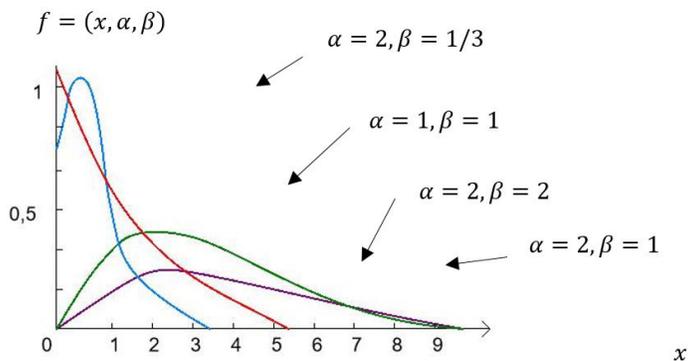


Figura 23 - Curvas densidade de Gama.

Para obtenção dos parâmetros de média e desvio padrão de uma VA contínua  $X$  com distribuição gama  $f(x, \alpha, \beta)$  teremos que:

$$E[X] = \mu = \alpha\beta \tag{43}$$

$$V[X] = \sigma^2 = \alpha\beta^2 \tag{44}$$

## 2.7. ANÁLISE DE CONFIABILIDADE

Em conformidade com as crescentes mudanças e exigências advindas da economia globalizada, a probabilidade de falha em produtos tornou-se um dos pontos centrais a ser dominado e diminuído para que fosse oferecido produtos de alta segurança e com redução nos custos (FOGLIATTO; RIBEIRO, 2011). A análise de confiabilidade tomou força em todos os âmbitos da área de exatas, principalmente nas engenharias, sendo usada em aplicações para análises de segurança e riscos em estruturas, otimização e qualidade de produtos, entre outros aspectos.

A análise de confiabilidade desempenha um papel minimizado de situações indesejáveis, no qual está intimamente ligado ao conceito de risco, logo, quando ocorre falhas é dito que os esforços na análise não foram suficientes para oferecer segurança (LAFRAIA, 2001).

Confiabilidade admite-se como uma ferramenta de verificação tomada por base dos dados das suas variáveis aleatórias, no qual é obtido uma probabilidade de falha, a partir de inúmeras variações das referências. Em uma descrição mais frequente, Fogliatto e Ribeiro (2011), conceituam como sendo uma relação entre um produto bem fabricado com inexistência de defeitos. Está associada a *probabilidade* vinculada a função de um *período*, além disso, em último aspecto está relacionada também às *condições ambientais*, pois os produtos desempenham diferentes estados quando expostos a circunstâncias variadas.

Todavia, a análise de confiabilidade é baseada em métodos como FORM (*first order reliability method*), SORM (*second order reliability method*) e a Simulação de Monte Carlo, esta última será trabalhada nesse livro. Através desses, é possível obter a probabilidade de falha e a partir dela determinar a segurança do produto. Sendo assim, por meio de uma função objetivo e utilizando as variáveis aleatórias contínuas relacionadas a média e desvio padrão, obtêm-se uma série de resultados, que são classificados tal que a função:

- $g(x) > 0$  indica segurança;
- $g(x) < 0$  a falha do sistema e;
- $g(x) = 0$  o estado limite do problema de confiabilidade.

Como foi dito, utiliza-se de uma função objetivo  $g(x)$ , de acordo com Brasil e Silva (2019), essa função recebe atribuição de encargo das variáveis do projeto que tem a importante tarefa de oferecer confiabilidade ao produto. A função é centrada em relacionar parâmetros que causam impacto direto na segurança do sistema, ou seja, quando essas instâncias são associadas e geram um determinado resultado, o método utilizado resultará em uma série de respostas, no qual concebe uma média denominada de probabilidade de falha que será discutida mais à frente.

## 2.8. SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

O método de Monte Carlo surgiu da necessidade de diminuir os gastos com o tempo produzindo cálculos utilizando a análise combinatória. Após testagem e estudo com técnicas de amostragem estatística, foi possível desenvolver o método através de custos computacionais.

De acordo com Beck (2019), a simulação é uma metodologia aplicada para solucionar sistemas muito complexos sob condições de qualquer natureza, sendo analisado seu desempenho a longo prazo. Não existe limite com relação ao número de variável, ou seja, pode ser acrescido uma grande quantidade de variáveis que a simulação obtém os resultados na mesma simplicidade. Entretanto, de modo geral, quanto mais variáveis, maior o custo computacional do problema.

O método pode ser utilizado de instrumento para cálculo de integrais e equações algébricas e diferenciais complexas. A simulação tem o propósito de reproduzir variáveis randômicas que seguem uma distribuição probabilística. Porém, existe a necessidade de que a distribuição em questão esteja em termos de função densidade de probabilidade.

O processo está ligado a repetição de resultados alcançados por meio das técnicas estatística, que são a média, desvio padrão e em alguns casos utilização da variância, sobre elas são realizadas as amostras. A Figura 24 a seguir apresenta como ocorre o

procedimento da simulação de Monte Carlo.

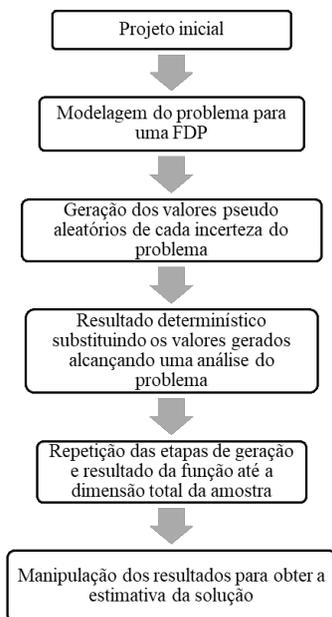


Figura 24 - Fluxograma para simulação de Monte Carlo.

A incerteza citada relaciona-se com as variáveis que passam por alterações para obtenção da análise do problema. Geralmente, ela é referente aos componentes estatísticos da função densidade de probabilidade, é a partir dessas incertezas que são obtidos os valores aleatórios para os parâmetros do problema.

O procedimento acima tem o intuito apenas de ponderar uma análise da solução proposta, é fundamental que seja realizada inúmeras vezes a observação para obtenção minuciosa do melhor resultado para a probabilidade de falha.

É necessário que seja definido um número de simulações que será relacionado a quantidade de repetições dos valores aleatórios das incertezas. Quanto menor a probabilidade de falha, maior o número de simulações necessárias para obtenção de um resultado confiável. Isso também se associa ao custo computacional, quanto maior o total de simulações realizadas, proporcionalmente maior o esforço computacional. Uma regra básica usada no meio probabilístico é que são necessárias  $(n+2)$  simulações para uma probabilidade de falha da ordem de  $10^{-n}$ .

### 2.8.1. PROBABILIDADE DE FALHA

A probabilidade de falha é o critério obtido através da utilização de um método para realização da análise de confiabilidade do sistema. Define Beck (2019), como uma probabilidade subjetiva para caso as especificações não sejam atendidas e o sistema

possa vir a atingir a falha.

Admitindo um número de simulações  $n_{si}$  para a realização do método de Monte Carlo, a probabilidade de falha calculada é definida como uma média entre a razão do somatório dos resultados determinísticos, no qual a função tenha obtido falha no sistema  $g < 0$ , e o total de simulações desenvolvidas.

$$P_f = \frac{n_f}{n_{si}} \quad (45)$$

no qual  $n_f$  é o somatório onde  $g < 0$  ocorre.

**Exemplo 2.7:** Dados obtidos de Kroetz (2019).

Admitindo uma função de estado limite definida da equação do “chapéu”:

$$g(x) = 20 - (x_1 - x_2)^2 - 8(x_1 + x_2 - 4)^3$$

Da qual, os dados das variáveis estatísticas a partir da distribuição normal estão descritos na Tabela 7.

VA	Média	Desvio Padrão
$x_1$	0.25	1
$x_2$	0.25	1

Tabela 7 - Valores das variáveis aleatórias da função do “chapéu”.

Calcule a probabilidade de falha a partir de um número de simulação de ordem  $10^6$ ,  $10^7$  e  $10^8$ .

**Resposta:**

Através da Simulação de Monte Carlo, utilizando o software *Matlab*, que será abordado no Capítulo 4, possibilitou a análise mais precisa da função por meio de um número de simulações de ordem  $10^6$ ,  $10^7$  e  $10^8$ .

Conforme descrito na Figura 24, é informado as variáveis aleatórias estatísticas relacionadas a função em estudo para geração de valores aleatórios das incertezas, ou seja, são processados a partir de comandos randômicos do software diversos números que estão associados a média e desvio padrão.

Os números obtidos são substituídos nas incógnitas da equação. Cada vez que a equação é submetida a novos valores é feito a testagem para classificar se esses estão dentro dos parâmetros, ou seja, se  $g(x) > 0$  o sistema é aceito,  $g(x) < 0$  ocorreu falha e  $g(x) = 0$  corresponde ao estado limite da função (admitido como falha, para ser a favor da segurança).

O princípio do problema é obter a probabilidade de falha do sistema, logo, quando

a função admite a falha é armazenada a informação para o somatório dos momentos de ocorrência que a equação admite valor  $g(x) < 0$ .

Terminado o procedimento de amostragem de ordem  $10^6$ , é realizada uma média aritmética entre o somatório das ocorrências de falha e o número de simulações. Para situação em questão foi alcançado uma probabilidade de falha igual a  $3.65 \times 10^{-4}$ .

Quando aumentado o número de simulações para ordem de  $10^7$ , obtém-se uma probabilidade de falha de  $3.92 \times 10^{-4}$ . Realizado para a amostragem de ordem  $10^8$  adquire-se um valor de  $3.8592 \times 10^{-4}$ .

Note-se que a ordem da probabilidade de falha não se altera quando é modificado os números de simulações para o sistema. Ademais, a diferença entre os valores fica em torno de 5%, o que é considerado baixa para esses tipos de problemas. Assim, significa que, o sistema já atingiu uma convergência e um valor de ordem bruta para a probabilidade de falha, que mesmo com alterações na amostragem, continuará com a mesma chance de ocorrer erro na sua análise.

**Exemplo 2.8:** Treliça plana com 6 barras.

Uma estrutura de treliça plana com 6 barras, retirada do trabalho de Medeiros (2018), conforme Figura 25, biapoada, submetida a carga concentrada e formada por perfis I de aço, no qual possui um comprimento  $L$  de 800mm e área  $A$  da seção transversal de  $1620\text{mm}^2$ , composto de um Momento de Inércia  $I = 6160000\text{mm}^4$  e o módulo de Plasticidade  $Z = 25400\text{mm}^3$ .

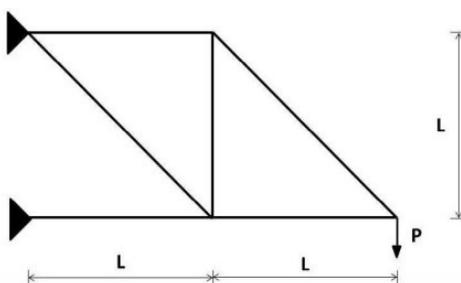


Figura 25 - Treliça plana com 6 barras.

A análise da probabilidade de falha desta estrutura é baseada na função de estado limite que envolve a tensão de escoamento  $f_y$  e a tensão máxima na estrutura, no qual avalia que o rompimento de uma barra levará ao colapso estrutural, representada por  $\sigma = 2P/A$ . Com isso resulta na seguinte equação:

$$g = f_y - 2P/A$$

Na qual:

P: carga concentrada

Os dados das variáveis aleatórias estatísticas adotadas através da distribuição normal estão descritas na Tabela 8.

VA	Média	Desvio Padrão
$f_y$ (N/mm <sup>2</sup> )	345	35
P(N)	215000	21500

Tabela 8 -Valores das variáveis da estrutura.

Foi calculada a probabilidade de falha da estrutura para um número simulação de ordem  $10^6$ . Realizando a simulação de Monte Carlo, conforme o fluxograma da Figura 24, a probabilidade de falha nessa estrutura obtida em uma amostragem de ordem de  $10^6$  é de 3.54%.

## 2.9. EXERCÍCIOS

- (DEVORE, 2006) Uma instalação de recondicionamento de automóveis especializada em regulagem de motores sabe que 45% de todas as regulagens são feitas em automóveis de quatro cilindros, 40% em automóveis de seis cilindros e 15% em automóveis de oito cilindros. Seja  $X$  = número de cilindros do próximo carro a ser preparado.
  - Qual é a fdp de  $X$ ?
  - Desenhe um gráfico de linhas e um histograma de probabilidade da fdp da parte (a).
  - Qual a probabilidade de o próximo carro a ser regulado ter no mínimo seis cilindros? Mais de seis cilindros?
- (DEVORE, 2006) Uma empresa de seguros oferece aos seus segurados diferentes opções de pagamento *premium*. Para um segurado selecionado aleatoriamente, seja  $X$  = número de meses entre pagamentos sucessivos. A *fd* de  $X$  é como segue:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.30, & 1 \leq x < 3 \\ 0.40, & 3 \leq x < 4 \\ 0.45, & 4 \leq x < 6 \\ 0.60, & 6 \leq x < 12 \\ 1, & 12 \leq x \end{cases}$$

- Qual é a fdp de  $X$ ?
- Usando apenas a *fd*, calcule  $P[3 \leq X \leq 6]$  e  $P[4 \leq X]$ .

3. Uma variável aleatória contínua  $X$ , de função  $f(x)=3/2 \sqrt{x}$ , pode assumir valores de  $x=0$  e  $x=1$ .
- Mostre que a área abaixo curva do gráfico é igual 1.
  - Determine  $P [0 \leq x \leq 1/2]$ .

4. Seja  $f(x) = \begin{cases} x + k & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$

Determine:

- Valor de  $k$  para que a  $f(x)$  seja uma função densidade de probabilidade;
  - Gráfico de  $f(x)$ ;
  - $P [0 \leq x \leq 1/2]$ .
5. A fdp a seguir, representa o tempo de secagem de uma amostra de solo exposto ao sol.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 5 \\ 2 + x, & 5 \leq x \leq 9 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Encontre a fda
- Calcule a probabilidade de que o tempo de secagem seja menor que 5hrs.
- Calcule a  $E[X]$  e  $\sigma_x$ .

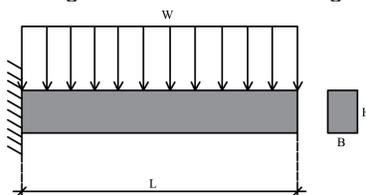
6. (DEVORE, 2006) A fda de  $X$  é:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

Use tais condições para calcular os itens a seguir:

- $P[X \leq 1]$
- $P[0,5 \leq X \leq 1]$
- $P[X > 0.5]$
- $F'(x)$  para obter a função densidade  $f(x)$
- $E[X]$
- $\sigma_x$

7. Um modelo de viga em balanço tem uma falha determinada por um deslocamento máximo em sua extremidade livre. Esse deslocamento não pode exceder o limite de serviço de  $L/325$ , sendo  $L$  o comprimento total da viga. Na figura abaixo temos o modelo da viga submetida a um carregamento  $W$ .



A função de falha é descrita pela seguinte equação:

$$G(x) = \frac{L}{325} - \frac{W * B * L^4}{8 * E * I}$$

Onde o E (módulo de elasticidade) e L são variáveis determinísticas com valores 26 GPa e 6 m, respectivamente. I é o momento de inércia e é dado por:

$$I = \frac{B * H^3}{12}$$

Substituindo esses valores, a função de falha passa a ser escrita da seguinte forma:

$$G(x) = \frac{6}{325} - \frac{15552 * W}{20.8 * 10^{10} * H^3}$$

W (carregamento) e H (altura da viga) são variáveis aleatórias, cujos valores de média e desvio padrão estão presentes na tabela abaixo:

Variável	Unidade	Distribuição	Média	Desvio Padrão
W	N/m <sup>2</sup>	Normal	1000	200
H	mm	Normal	250	37.5

A partir do modelo acima, determine a probabilidade de falha para a viga em balanço utilizando Simulação de Monte Carlo, a partir de um número de simulações de ordem 10<sup>6</sup>.

8. (Adaptada) O modelo analisado por (BRASIL E SILVA, 2019) refere-se a uma viga biapoiada submetida à flexão. Ela está sujeita a uma carga concentrada P aplicada no meio do vão L = 10 m. A função de falha da resistência admissível da viga é descrita pela seguinte equação:

$$G = \frac{3}{2} \frac{PL}{bh^2} - \sigma$$

Onde b e h são a base e a altura da seção transversal da viga, respectivamente. Os valores das variáveis aleatórias estão presentes na tabela abaixo:

Variável	Unidade	Distribuição	Média	Coefficiente de Variação (%)
σ	Mpa	Normal	20	5
P	tf	Normal	20	6
b	m	Normal	0.25	5
h	m	Normal	1	5

A partir do modelo acima, determine a probabilidade de falha para a viga utilizando Simulação de Monte Carlo, a partir de um número de simulações de ordem 10<sup>6</sup>.

9. Suponha que a resistência máxima de uma parede estrutural foi calculada para aguentar em média 20KPa com o desvio padrão de 1.25KPa. Qual é a probabilidade da resistência da parede.
- Ser no máximo 18 KPa?
  - Estar entre 18 e 22 KPa?
10. Um cientista ao realizar um experimento da quantidade de efluentes na água encontrou que aquela amostra obteve um desvio padrão equivalente a 1.5. Considerando que a média de PH para considerarmos a água sem poluentes é igual a 7. Qual a probabilidade dessa água estar contaminada com PH acima de 8.
11. Ao verificar a lâmina d'água de uma barragem em seu estado máximo observou que essa tem distribuição onde a média da barragem equivale a 8.5 metros com desvio padrão de 1.5. Desse modo, verifique a probabilidade da barragem sangrar. Considere a altura da barragem igual a 9 metros.
12. A partir dos dados de Kroetz (2019), calcule a probabilidade de falha assumindo que:

$$g(X) = 20 - (X_1 - X_2)^2 - 8.(X_1 + X_2 - 4)^3 \quad (46)$$

onde  $g(X)$  é a função de estado limite e  $X_1$  e  $X_2$  são as variáveis aleatórias do problema com distribuição, média e desvio padrão iguais a:

VA	Distribuição	Média	Desvio Padrão
$X_1$	Normal	0,25	1
$X_2$	Normal	0,25	1

## OTIMIZAÇÃO

### 3.1. INTRODUÇÃO

Nas atividades diárias sempre tem alguém querendo melhorar suas ações ou escolhas. Um fabricante deseja criar seu melhor produto gastando o mínimo de matéria prima; uma transportadora deseja fazer o transporte de sua mercadoria escolhendo o trajeto mais rápido ou mais econômico, em geral, as empresas estão sempre querendo minimizar seus custos e maximizar seus lucros. As técnicas utilizadas para se obter esse melhor resultado, dentre várias possibilidades, é o que chamamos de otimização.

A modelagem matemática para um problema de otimização consiste em maximizar (ou minimizar) uma função  $f$ , chamada função objetivo, definida num conjunto de possibilidades  $\Omega$ , ou seja, determinar  $\max f(x), x \in \Omega$  ou  $\min f(x), x \in \Omega$ , onde  $x$  é um ponto qualquer do  $\mathbb{R}^n$ .

Um valor máximo absoluto (ou máximo global) para uma função  $f$  é o maior valor que  $f$  assume no conjunto de possibilidades  $\Omega$ . De modo análogo, um valor mínimo absoluto (ou mínimo global) para uma função  $f$  é o menor valor que  $f$  assume no conjunto  $\Omega$ . Além disso,  $f$  pode assumir valores máximos e mínimos para valores de  $x$  numa vizinhança de algum ponto de  $\Omega$ , é o que chamamos de máximos e mínimos relativos (ou locais) para  $f$ .

Dependendo das características da função objetivo  $f$  e de como o conjunto  $\Omega$  é descrito, temos várias classes de problemas, para os quais existe diversas técnicas de otimização. Em geral,  $\Omega$  é um conjunto de possibilidades onde existem restrições para as variáveis da função objetivo  $f$ . Um dos casos mais simples é quando o conjunto  $\Omega$  é um intervalo  $[a,b]$  e  $f$  é uma função de uma variável real. Vejamos um exemplo a seguir.

**Exemplo 3.1:** Determinar os valores máximo e mínimo absolutos da função  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  no intervalo  $[0.5, 3.5]$ .

**Solução:** Analisando a Figura 26, podemos ver que  $f$  atinge seu valor mínimo absoluto igual a 1 no ponto  $x = 3$  e atinge seu valor máximo absoluto igual a 5 no ponto  $x = 1$ .

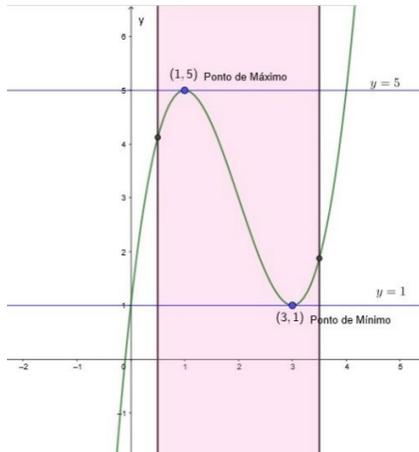


Figura 26 - Gráfico da função  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ .

Notamos que se considerarmos a função  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$  no intervalo  $[0, 4]$  (ver Figura 27), obteremos os mesmos valores de máximo e de mínimo absolutos para  $f$ . O que muda é que o valor mínimo absoluto 1 é encontrado em  $x=0$  e em  $x=3$ , e o valor máximo absoluto 5 é encontrado em  $x=1$  e em  $x=4$ .

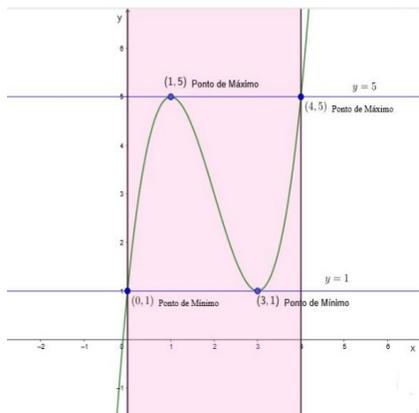


Figura 27 - Gráfico da função  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ .

Agora se considerarmos a mesma função  $f$  no intervalo  $[-1, 5]$ , os valores máximo e mínimo absolutos de  $f$  são alterados. Neste caso, encontramos o valor mínimo absoluto -15 em  $x=-1$  e o valor máximo absoluto 21 em  $x=5$ . Os valores 1 e 5 passam a serem valores mínimo e máximo relativos para  $f$ , respectivamente (ver Figura 28).

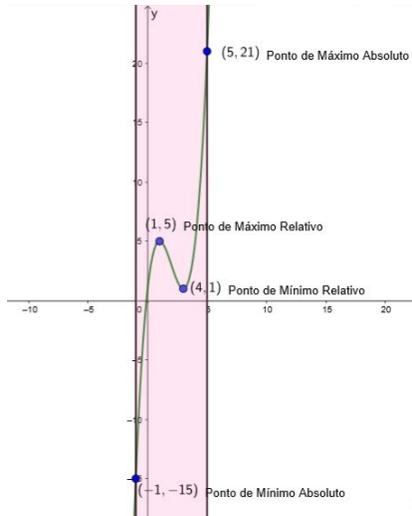


Figura 28 - Gráfico da função  $f(x) = y^1 - 6x^2 + 9x + 1$

Vejamos agora o caso em que  $\Omega$  é um conjunto do  $\mathbb{R}^2$  e  $f$  é uma função de duas variáveis reais.

**Exemplo 3.2:** Determinar os valores máximo e mínimo absolutos da função  $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$  no retângulo  $R = \{(x,y); 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2\}$ .

**Solução:** Analisando a Figura 29, podemos ver que para este caso, o conjunto de possibilidade  $\Omega$  é formado por todos os pontos que estão na fronteira do retângulo, ou seja, os pontos que estão sobre as retas

$$\begin{aligned} r_1 &: \{(x, 0), 0 \leq x \leq 3\}, \\ r_2 &: \{(3, y), 0 \leq y \leq 2\}, \\ r_3 &: \{(x, 2), 0 \leq x \leq 3\}, \\ r_4 &: \{(0, y), 0 \leq y \leq 2\} \end{aligned}$$

e por todos os pontos que estão dentro do retângulo.

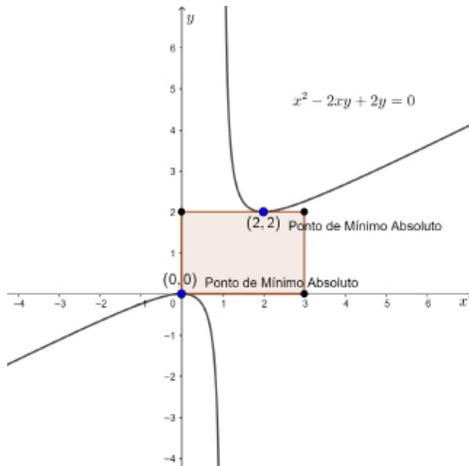


Figura 29 - Gráfico da função  $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y = 0$ .

Observando a Figura 29, notamos que a função  $f$  assume valor mínimo absoluto igual a 0 nos pontos  $(0,0)$  e  $(2,2)$ . Por outro lado, podemos ver através da Figura 30 que  $f$  assume valor máximo absoluto 9 no ponto  $(3,0)$ .

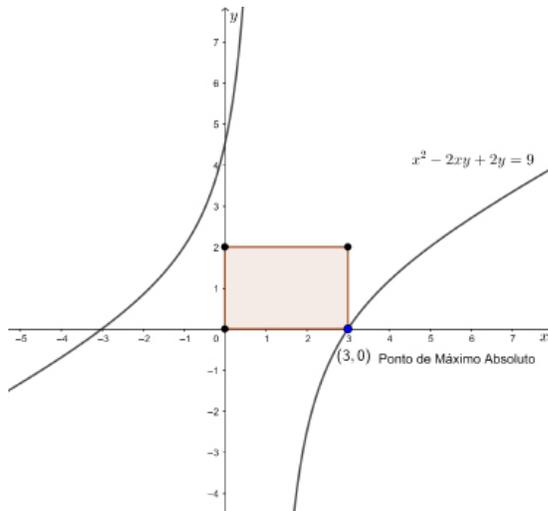


Figura 30 - Gráfico da função  $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y = 9$ .

Vejamos outro exemplo em que  $\Omega$  é um conjunto do  $\mathbb{R}^2$  e  $f$  é uma função de duas variáveis reais.

**Exemplo 3.3:** Determinar os valores máximo e mínimo absolutos da função  $f(x,y) = x^2 + 2y^2$  no disco  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Solução:** Para este caso, o conjunto de possibilidade  $\Omega$  é formado por todos os pontos que estão na fronteira do disco, ou seja, no círculo  $x^2 + y^2 = 1$  e todos os pontos que estão dentro do disco, ou seja, os pontos  $(x,y)$  que satisfazem a inequação  $x^2 + y^2 < 1$ .

Observando a Figura 31, notamos que a função  $f$  assume valor mínimo absoluto igual a 0 no ponto  $(0,0)$  e valor máximo absoluto igual a 2 nos pontos  $(0,-1)$  e  $(0,1)$ .

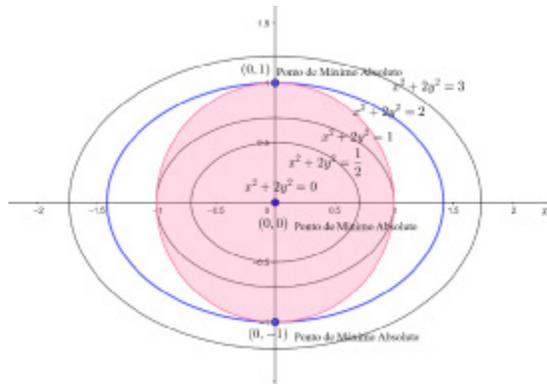


Figura 31 - Gráfico da função  $f(x,y) = x^2 + 2y^2 = constante$ .

Notamos no exemplo anterior que o cálculo dos valores máximo e mínimo absolutos para  $f$  estão sujeitos a uma restrição de desigualdade do tipo  $\leq$  (menor ou igual). Para resolver analiticamente este problema, usamos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para o caso da restrição de igualdade ( $x^2 + y^2 = 1$ ) e usamos argumentos de diferenciação para funções de duas variáveis para determinar os valores ótimos para o caso de desigualdade  $x^2 + y^2 < 1$ . A partir desses valores obtidos, define-se os valores de máximo e mínimo absolutos no disco  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Isto é feito desta forma porque o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange só se aplica para o caso de uma restrição de igualdade. Outra forma de solucionar esse problema é usar uma extensão do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange que se aplica ao caso em que existe restrições de desigualdades.

Um exemplo mais amplo é quando  $\Omega$  é um conjunto de pontos que satisfaz várias restrições. Neste caso, a função a ser maximizada (ou minimizada), chamada de função objetivo, pode ser linear ou não. Da mesma forma, as restrições podem ser equações (ou inequações) lineares ou não. No caso em que a função objetivo e as restrições são lineares, nos deparamos com um problema de Programação Linear. No entanto, existe problemas que podem ter não linearidade na função objetivo em alguma das restrições ou em todas as restrições. Neste caso, tem-se um problema de otimização não linear.

Uma grande vantagem da otimização linear está na formulação matemática e resolução dos problemas formulados. No entanto, os problemas que aparecem na prática, geralmente, apresentam não linearidades na função objetivo ou em alguma das restrições. Tanto na programação linear quanto na programação não linear os problemas podem ser resolvidos pelo método gráfico, desde que o problema apresente até duas variáveis. No entanto, quando o problema envolve mais de duas variáveis usamos outros métodos de

resolução, como veremos no decorrer deste capítulo.

As aplicações de problemas de otimização são encontradas em diversas áreas. Por exemplo, na indústria de petróleo, na indústria siderúrgica, na indústria de alimentos, no planejamento de produção, na agricultura, em problemas de transportes, nas aplicações financeiras, etc. No que segue, veremos alguns métodos de resolução de problemas de otimização linear e não linear.

### 3.2 OTIMIZAÇÃO EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

Uma das técnicas mais utilizadas na resolução de problemas de otimização é a Programação Linear (PL). Para os problemas da PL deseja-se determinar valores ótimos para uma determinada atividade, sabendo-se que dispomos de recursos limitados para a realização desta atividade. Em geral, deseja-se maximizar (ou minimizar) uma função objetivo sujeito a um conjunto de restrições.

A programação linear foi criada pelo matemático e economista russo Leonid Kantorovich em 1939 e teve maior destaque com a descoberta do Método Simplex em 1947 pelo matemático norte-americano George B. Dantzig enquanto trabalhava no projeto de computação científica de otimização SCOOP (Scientific Computation of Optimal Programs) na RAND (Research and Development) Corporation para a Força Aérea Americana.

Até meados de 1978 o Método Simplex era a única alternativa para solucionar problemas mais complexos na programação linear, quando começou a aparecer outros métodos, tais como, o Método dos Elipsóides de Khachiyan e o Método dos Pontos Interiores de Karmarkar.

Um modelo de PL pode ser dado na forma canônica (as restrições são dadas na forma de inequações) ou na forma padrão (as restrições são dadas na forma de equações). Tanto a forma canônica como a forma padrão assumem as formas cartesiana e matricial. Vejamos:

#### Problema na forma canônica cartesiana:

Maximizar:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \quad (47)$$

Sujeito às restrições

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (48)$$

**Problema na forma canônica matricial:**

Maximizar:

$$Z = C^T \cdot A \quad (49)$$

Sujeito às restrições

$$\begin{cases} A \cdot X \leq B, \\ X \geq 0, \end{cases} \quad (50)$$

Onde

$$C^T = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \quad (51)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \emptyset_j \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \emptyset_j \end{bmatrix} \quad (54)$$

Dizemos que  $A$  é a matriz tecnológica que contém os coeficientes das equações das restrições,  $C^T$  é o vetor custos que contém os coeficientes da função objetivo,  $X$  é o vetor das variáveis do problema e  $B$  é o vetor de recursos disponíveis que contém os termos independentes das inequações das restrições. No entanto, o problema pode ser representado na forma padrão por:

**Problema na forma padrão cartesiana:**

Maximizar:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \quad (55)$$

Sujeito às restrições

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{cases} \quad (56)$$

### Problema na forma padrão matricial:

Maximizar:

$$Z = C^T \cdot A \quad (57)$$

Sujeito às restrições

$$\begin{cases} A \cdot X = B, \\ X \geq 0, \end{cases} \quad (58)$$

onde  $A$ ,  $C^T$ ,  $B$  e  $X$  são como dados acima.

Vejam os a seguir algumas observações para um problema de otimização em programação linear.

1. No caso de um problema de minimização ao invés de minimizar a função  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , o que fazemos é maximizar a função objetivo

$$\begin{aligned} -Z &= -f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n. \end{aligned} \quad (59)$$

2. Se a restrição vem com desigualdade do tipo  $\geq$  (maior ou igual), multiplicamos a respectiva desigualdade por (-1) para que tenhamos a restrição com desigualdade do tipo  $\leq$  (menor ou igual).
3. Em geral, na resolução analítica de um problema de programação linear, coloca-se o problema na forma padrão.
4. Para que o problema na forma canônica (restrições com inequações) se transforme num problema na forma padrão (restrições com equações) devemos adicionar variáveis de folga às inequações de  $\leq$  (menor ou igual) e subtrair variáveis de excesso às inequações de  $\geq$  (maior ou igual).

Existem vários métodos de resolução para um problema de programação linear. Dentre eles, destacamos aqui o Método Gráfico (quando existem até duas variáveis de decisão) e o Método Simplex (quando existe um número finito qualquer de variáveis de decisão). Vejamos esses dois métodos no que segue.

#### 3.2.1. Método Gráfico

Para um problema em programação linear envolvendo até duas variáveis podemos usar argumentos geométricos conhecidos, como o Método Gráfico, para chegar a uma solução ótima do problema. No Método Gráfico em programação linear as restrições são retas que se interceptam formando um poliedro convexo. Essa região convexa é denominada “região viável” ou “região factível”. Toda solução do problema deve estar contida nessa região que também denominamos “região das soluções”, ou seja, qualquer ponto da região viável deve satisfazer todas as restrições do problema. No entanto, as soluções que darão

um valor ótimo ao problema dado sempre ocorrem na fronteira da região viável.

O procedimento para determinar a solução ótima do problema através do Método Gráfico é o seguinte:

1. Considerando as restrições do problema como desigualdades, temos vários semiplanos que devem se interceptarem formando um poliedro convexo que é o conjunto das possibilidades para as soluções do problema, ou seja, a região viável.
2. Considerando-se as restrições do problema como igualdades, teremos retas que podem ser traçadas e cujas interseções são os vértices do poliedro convexo.
3. Para obter os valores ótimos considera-se a função objetivo  $f(x_1, x_2) = C$ , onde  $C$  é uma constante, formando um feixe de retas paralelas que interceptam a região viável.
4. O maior valor que  $C$  assumir para uma reta interceptando a região viável será o valor máximo do problema, e o menor valor que  $C$  assumir será o valor mínimo do problema. Essa escolha é feita de acordo com o objetivo do problema.

**Observação:** Outra forma de determinar os valores ótimos através do método gráfico é calculando os valores da função objetivo  $f$  nos vértices da região viável. A partir daí o maior valor obtido é o máximo e o menor é o mínimo.

Temos três casos que podem acontecer. Vejamos:

1. Existência de solução única

Neste caso, o valor ótimo ocorre num único ponto da região viável. A reta  $r$  dada pela equação  $f(x_1, x_2) = C$ , intercepta a região viável num único vértice, conforme mostrado na Figura 32.

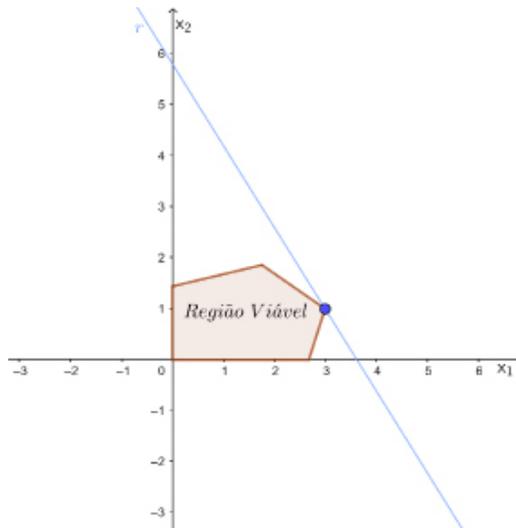


Figura 32 - Método Gráfico com existência de solução única.

## 2. Existência de infinitas soluções

Neste caso, o valor ótimo ocorre em infinitos pontos da região viável. A reta  $f(x_1, x_2) = C$  intercepta a região viável em uma das retas que compõe a fronteira dessa região (Figura 33).

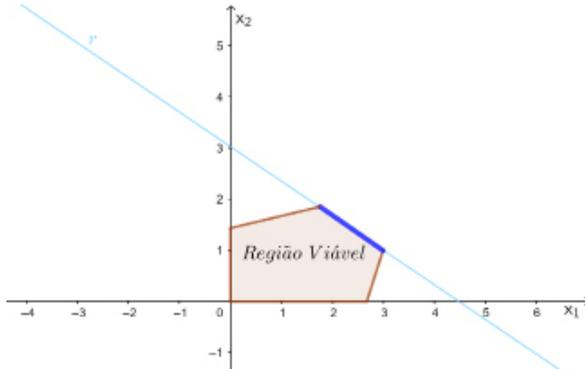


Figura 33 - Método Gráfico com existência de infinitas soluções.

## 3. Não existência de soluções

Neste caso, não há como definir um valor máximo ou mínimo para  $C$  dentro da região viável, ou seja, nenhuma solução atende todas as restrições. Dizemos que o problema é inviável. Isso acontece porque as restrições do problema não formam uma região convexa. Geralmente, a região formada é não convexa e/ou ilimitada (ver Figura 34 e 35).

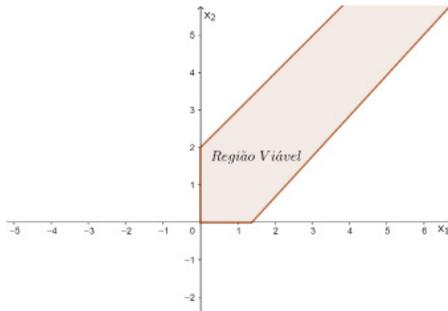


Figura 34 - Método Gráfico com inexistência de solução.

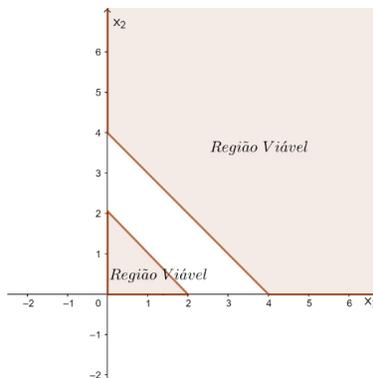


Figura 35 - Método Gráfico com inexistência de solução.

Vejamos a seguir um exemplo em programação linear com resolução através do Método Gráfico.

**Exemplo 3.4:** Maximizar a função objetivo  $Z = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ , sujeita às restrições

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ g_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ g_3(x_1, x_2) = x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Solução:** Considerando as restrições do problema como desigualdades, temos os semiplanos que formam a região convexa, ou seja, a região viável que é a região plana mais escura que aparece na Figura 36.

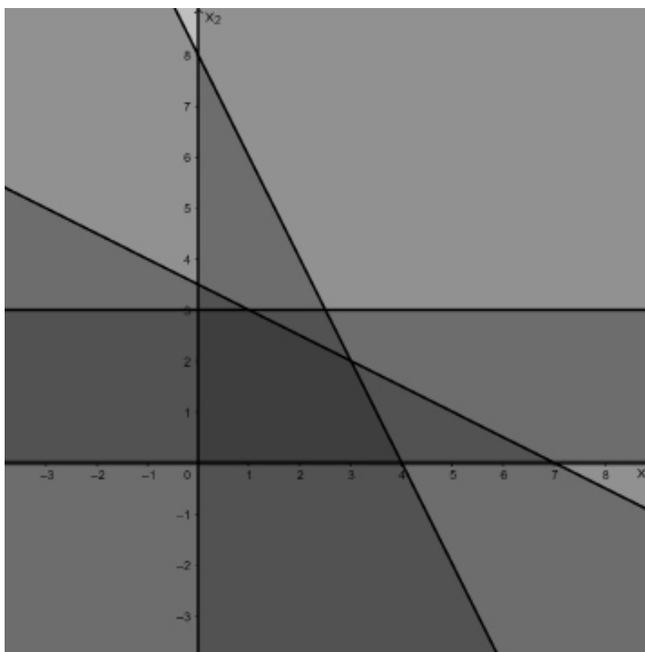


Figura 36 - Determinação da região viável.

Considerando as restrições do problema como igualdades, Figura 37, temos as seguintes retas:

$$\begin{cases} r_1: 2x_1 + x_2 = 8; \\ r_2: x_1 + 2x_2 = 7 \\ r_3: x_2 = 3 \\ r_4: x_1 = 0 \\ r_5: x_2 = 0 \end{cases}$$

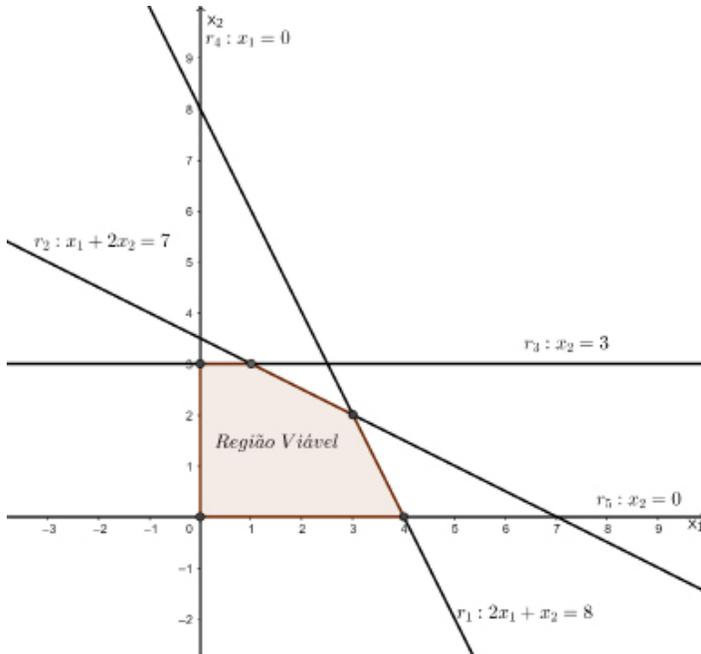


Figura 37 - Determinação da região viável.

Notamos na Figura 37 que as retas se interceptam duas a duas formando os vértices de um poliedro convexo que é a região viável. Estes vértices são os candidatos à solução ótima do problema.

Para obtermos a solução ótima do problema consideramos um feixe de retas da forma  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = C$ , onde  $C$  é um valor arbitrário não negativo, visto que o valor de  $C$  representa o valor ótimo do problema. Vejamos na Figura 38 algumas dessas retas interceptando a região viável. Consideramos os casos  $C = 0, C = 1, C = 2, C = 3, C = 4, C = 5$  e  $C = 6$ .

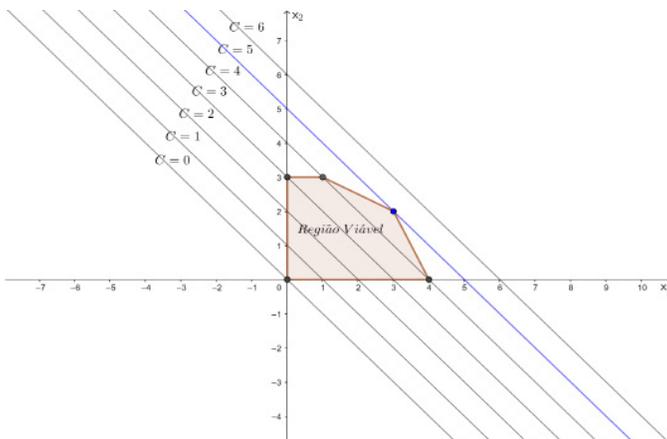


Figura 38 - Valores da função  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = C$ .

Notamos que o maior valor para  $C$ , de modo que a reta  $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = C$ , intercepte a região viável é  $C = 5$  e a interseção da reta  $x_1 + x_2 = 5$  com a região viável é o ponto  $(3,2)$ . Neste caso, concluímos que o valor ótimo do problema é 5 e é atingido no ponto  $(3,2)$  que é um dos vértices da região viável.

### 3.2.2. Método Simplex

Um dos métodos de resolução mais usados na Programação Linear é o Método Simplex. Criado pelo matemático norte-americano George Bernard Dantzig em 1947, o Método Simplex é um algoritmo que usa as formas de escalonamento de Gauss-Jordan para solucionar um problema de programação linear partindo de uma solução nula até chegar numa solução que otimiza o valor objetivo do problema, ou seja, que maximiza (ou minimiza) o valor da função objetivo.

Para se usar o Método Simplex, o modelo matemático deve apresentar a forma canônica cartesiana, isto é:

Maximizar:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

Sujeito às restrições

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

A partir daí, cria-se uma base formada por variáveis de folga ( $y_1, y_2, \dots, y_m$ ) de modo que as restrições de desigualdades se transformem em restrições de igualdades, criando assim o seguinte modelo:

Maximizar:

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

Sujeito às restrições

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + y_m = b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0. \end{cases}$$

Para o procedimento de solução através do Método Simplex, partimos da seguinte

solução inicial:

- Variáveis não básicas:  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ;
- Variáveis básicas:  $y_1 = b_1, y_2 = b_2, \dots, y_m = b_m$ ;
- Valor da função objetivo:  $Z = 0$ .

Dizemos que  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  é a solução básica inicial para o problema e que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é uma solução não básica do problema.

Como iniciamos com o valor da função objetivo sendo nulo, a ideia do Método Simplex é aumentar esse valor o maior possível. Isso é feito fazendo uma mudança de base, ou seja, trazendo para a base, as variáveis não básicas que fazem aumentar o valor da função objetivo. No Método Simplex só pode entrar na base uma variável não básica de cada vez e essa escolha está relacionada com o custo que cada variável não básica exerce sobre o valor da função objetivo.

Após escolher uma variável não básica a entrar na base, usa-se operações elementares (como o método de pivotamento de Gauss – Jordan) sobre as linhas que representam as equações do problema para obter um novo sistema de equações equivalente. Este procedimento é feito até chegar num sistema equivalente que dê a solução ótima do problema. Quando os coeficientes que representam os custos forem todos não negativos tem-se a solução ótima e o método deve parar.

Com isso, o procedimento para o Método Simplex é o seguinte:

1. Colocar o problema na forma padrão adicionando variáveis de folga às restrições do tipo  $\leq$  (menor ou igual);
2. Escrever a função objetivo  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  da forma:

$$Z - f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

3. Criar a tabela com os coeficientes da equação de  $Z$  juntamente com os coeficientes das equações que representam as restrições. Nesta tabela, as linhas são formadas pela equação de  $Z$  e pelas equações que representam as variáveis da base, e as colunas são formadas com as variáveis básicas, as variáveis não básicas e com os elementos que ficam no lado direito das equações. Essa tabela é denominada *Quadro Tableau*.
4. Escolher a variável que entra na base determinando o coeficiente negativo da linha de  $Z$  com maior valor absoluto, obtendo assim a coluna pivô (se existir coeficientes com valores iguais, pode-se escolher qualquer um deles).
5. Escolher a variável que sai da base fazendo o quociente entre os elementos que se encontram na coluna do lado direito com os elementos que se encontram na coluna pivô (com exceção da linha de  $Z$ ). A linha que der o menor resultado positivo é a linha da variável que sai da base, tendo assim a linha pivô.
6. Escolher o elemento pivô como sendo aquele que se encontra na coluna pivô

e na linha pivô.

7. Criar uma nova linha dividindo todos os elementos da linha pivô pelo elemento pivô. No novo quadro, a variável que entra na base fica na linha pivô no lugar da variável que sai da base.
8. Substituir as linhas do quadro (com exceção da linha pivô) por novas linhas através de operações elementares sobre as linhas do quadro usando a operação :

$$(linha\ antiga) - (coeficiente\ da\ coluna\ pivô) \cdot (nova\ linha\ pivô)$$

9. Verificar se o novo quadro possui números negativos na linha de Z. O processo deve continuar se ainda existir, caso contrário, deve parar e determinar a solução ótima.

Vejam os a seguir um exemplo em programação linear com resolução através do Método Simplex, retirado e adaptado de Porto et. al. (2002).

**Exemplo 3.5:** Maximizar a função objetivo

$$Z = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

sujeito às restrições

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ g_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ g_3(x_1, x_2) = x_2 \leq 3, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Solução:** O problema dado está na forma canônica cartesiana. Para usarmos o Método Simplex, devemos acrescentar três variáveis de folga ( $y_1, y_2, y_3$ ) às equações de restrições, respectivamente. Dessa forma, o problema torna-se:

Maximizar a função objetivo

$$Z = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2,$$

sujeito às restrições

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + y_1 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + y_2 = 7, \\ x_2 + y_3 = 3, \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Partimos da seguinte solução inicial:

- Variáveis não básicas:  $x_1 = 0, x_2 = 0$ ;
- Variáveis básicas:  $y_1 = 8, y_2 = 7, y_3 = 3$ ;
- Valor da função objetivo:  $Z = 0$ .

Escrevendo a equação de  $Z$  na forma  $Z - x_1 - x_2 = 0$  e preenchendo a tabela com os dados do problema, temos a Tabela 9.

Função Objetivo e Variáveis Básicas	Coeficientes que representam os custos na função objetivo e coeficientes das equações que representam as restrições					Lado Direito
	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
<b>Z</b>	-1	-1	0	0	0	0
$y_1$	2	1	1	0	0	8
$y_2$	1	2	0	1	0	7
$y_3$	0	1	0	0	1	3

Tabela 9 - Quadro Tableau inicial para o Método Simplex.

Para a escolha do pivô, primeiro escolhemos a coluna do pivô que é a coluna que contém o elemento negativo da linha de  $Z$  com maior valor absoluto. Neste caso, podemos escolher qualquer uma delas, visto que temos valores iguais. Vamos escolher a variável  $x_1$  para entrar na base. Portanto, a coluna do pivô é a coluna da variável  $x_1$ . A partir daí, escolhemos a linha pivô fazendo o quociente entre os elementos que se encontram na coluna *lado direito* com os respectivos elementos que se encontram na coluna pivô (com exceção da linha de  $Z$ ), ou seja:

$$\frac{8}{2} = 4, \quad \frac{7}{1} = 7, \quad \frac{3}{0} \nexists.$$

Como o menor resultado positivo fornece o elemento pivô, segue que o pivô deve ser o elemento 2 que se encontra na linha de  $y_1$  e na coluna de  $x_1$ . Como pode ser visto na Tabela 10.

Função Objetivo e Variáveis Básicas	Coeficientes que representam os custos na função objetivo e coeficientes das equações que representam as restrições					Lado Direito
	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
<b>Z</b>	-1	-1	0	0	0	0
$y_1$	2	1	1	0	0	8
$y_2$	1	2	0	1	0	7
$y_3$	0	1	0	0	1	3

Tabela 10 - Quadro Tableau apresentando o elemento pivô.

O próximo passo é dividir a linha do pivô pelo elemento pivô. No novo quadro, a variável da coluna do pivô entra na base na nova linha do pivô, ou seja,  $x_1$  entra na base no lugar de  $y_1$  que sai da base, como podemos ver na a Tabela 11.

Função Objetivo e Variáveis Básicas	Coeficientes que representam os custos na função objetivo e coeficientes das equações que representam as restrições					Lado Direito
	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
$x_1$	-1	-1	0	0	0	0
$y_1$	1	1/2	1/2	0	0	4
$y_2$	1	2	0	1	0	7
$y_3$	0	1	0	0	1	3

Tabela 11 - *Quadro Tableau* apresentando a linha pivô unitária com a variável  $x_1$  entrando na base elemento pivô.

Agora usaremos a seguinte operação elementar sobre as linhas da Tabela 11:

$$(linha\ antiga) - (coeficiente\ da\ coluna\ pivô) \cdot (nova\ linha\ pivô)$$

Para operar sobre a linha de Z na Tabela 11, usamos o elemento -1 como coeficiente da coluna pivô. Daí, temos

$$\begin{aligned} -1 - (-1) \cdot (1) &= 0; & -1 - (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2}; & 0 - (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}; \\ 0 - (-1) \cdot (0) &= 0; & 0 - (-1) \cdot (0) &= 0; & 0 - (-1) \cdot (4) &= 4. \end{aligned}$$

Para operar sobre a linha de  $y_2$  na Tabela 11, usamos o elemento 1 como coeficiente da coluna pivô. Daí, temos:

$$\begin{aligned} 1 - (1) \cdot (1) &= 0; & 2 - (1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{3}{2}; & 0 - (1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2}; \\ 1 - (1) \cdot (0) &= 1; & 0 - (1) \cdot (0) &= 0; & 7 - (1) \cdot (4) &= 3. \end{aligned}$$

Para operar sobre a linha de  $y_3$  na Tabela 11, usamos o elemento 0 como coeficiente da coluna pivô. Daí, temos:

$$\begin{aligned} 0 - (0) \cdot (1) &= 0; & 1 - (0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) &= 1; & 0 - (0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) &= 0; \\ 0 - (0) \cdot (0) &= 0; & 0 - (0) \cdot (0) &= 0; & 13 - (0) \cdot (4) &= 13. \end{aligned}$$

O novo quadro pode ser visto na Tabela 12.

Função Objetivo e Variáveis Básicas	Coeficientes que representam os custos na função objetivo e coeficientes das equações que representam as restrições					Lado Direito
	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
Z	0	-1/2	1/2	0	0	4
$x_1$	1	1/2	1/2	0	0	4
$y_2$	0	3/2	-1/2	1	0	3
$y_3$	0	1	0	0	1	3

Tabela 12 - *Quadro Tableau* apresentando uma nova solução para o problema.

Analisando a Tabela 12, chegamos à seguinte solução para o problema:

- Variáveis não básicas:  $x_2 = 0$ ,  $y_1 = 0$ ;
- Variáveis básicas:  $x_1 = 4$ ,  $y_2 = 3$ ,  $y_3 = 3$ ;
- Valor da função objetivo:  $Z = 4$ .

Essa solução ainda não é a solução ótima, pois apesar da função objetivo ter aumentado seu valor, ainda temos elementos negativos na linha de  $Z$  da Tabela 12. Sendo assim, devemos continuar o processo.

Para a escolha do novo pivô na Tabela 12, devemos escolher a coluna do pivô como a coluna da variável  $x_2$  pois é a coluna que possui o único elemento negativo da linha de  $Z$ . Portanto, a variável  $x_2$  deve entrar na base. Para escolher a linha pivô e, conseqüentemente, a variável que sai da base, faremos o quociente entre os elementos que se encontram na coluna *lado direito* com os respectivos elementos que se encontram na coluna pivô (com exceção da linha de  $Z$ ). Temos

$$\frac{4}{\frac{1}{2}} = 8, \quad \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2, \quad \frac{3}{1} = 3.$$

Logo, o pivô é o elemento  $3/2$  que se encontra na linha de  $y_2$  e na coluna de  $x_2$  como pode ser visto na Tabela 13.

Função Objetivo e Variáveis Básicas	Coeficientes que representam os custos na função objetivo e coeficientes das equações que representam as restrições					Lado Direito
	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
<b>Z</b>	0	-1/2	1/2	0	0	4
<b><math>x_1</math></b>	1	1/2	1/2	0	0	4
<b><math>y_2</math></b>	0	3/2	-1/2	1	0	3
<b><math>y_3</math></b>	0	1	0	0	1	3

Tabela 13 - Quadro Tableau apresentando novo elemento pivô.

Neste caso, a variável  $x_2$  entra na base no lugar da variável  $y_2$  que sai da base. Após dividir a linha do pivô pelo elemento pivô, temos o novo quadro dado na Tabela 14.

Função Objetivo e Variáveis Básicas	Coeficientes que representam os custos na função objetivo e coeficientes das equações que representam as restrições					Lado Direito
	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
<b>Z</b>	0	-1/2	1/2	0	0	4
<b><math>x_1</math></b>	1	1/2	1/2	0	0	4
<b><math>x_2</math></b>	0	1	-1/3	-2/3	0	2
<b><math>y_3</math></b>	0	1	0	0	1	3

Tabela 14 - Quadro Tableau apresentando a linha pivô unitária com a variável  $x_2$  entrando na base.

Novamente usaremos a seguinte operação elementar sobre as linhas da Tabela 14:

$$(linha\ antiga) - (coeficiente\ da\ coluna\ pivô) \cdot (nova\ linha\ pivô)$$

Para operar sobre a linha de Z na Tabela 14, usamos o elemento  $-1/2$  como coeficiente da coluna pivô. Daí, temos

$$0 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (0) = 0; \quad \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1) = 0; \quad \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ = \frac{1}{3}; \\ 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}; \quad 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (0) = 0; \quad 4 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (2) \\ = 5.$$

Para operar sobre a linha de  $x_1$  na Tabela 14, usamos o elemento  $1/2$  como coeficiente da coluna pivô. Daí, temos

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (0) = 1; \quad \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (1) = 0; \quad \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ = \frac{2}{3}; \\ 0 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}; \quad 0 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (0) = 0; \quad 4 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (2) = 3.$$

Para operar sobre a linha de  $y_3$  na Tabela 14, usamos o elemento 1 como coeficiente da coluna pivô. Daí, temos

$$0 - (1) \cdot (0) = 1; \quad 1 - (1) \cdot (1) = 0; \quad 0 - (1) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}; \\ 0 - (1) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}; \quad 1 - (1) \cdot (0) = 1; \quad 3 - (1) \cdot (2) = 1.$$

O novo quadro pode ser visto na Tabela 15.

Função Objetivo e Variáveis Básicas	Coeficientes que representam os custos na função objetivo e coeficientes das equações que representam as restrições					Lado Direito
	$x_1$	$x_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	
Z	0	0	1/3	1/3	0	5
$x_1$	1	0	2/3	-1/3	0	3
$x_2$	0	1	-1/3	-2/3	0	2
$y_3$	0	0	1/3	-2/3	1	1

Tabela 15 - Quadro Tableau apresentando uma nova solução para o problema.

Analisando a Tabela 15, chegamos à seguinte solução para o problema:

- Variáveis não básicas:  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 0$ ;
- Variáveis básicas:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 2$ ,  $y_3 = 1$ ;
- Valor da função objetivo:  $Z = 5$ .

Notamos que a solução é ótima, pois não existem elementos negativos na linha de  $Z$ . Neste caso, concluímos que o máximo da função objetivo é  $Z = 5$  e é atingido no ponto  $(3,2)$ . Ou seja, o valor máximo do problema é

$$Z = f(3,2) = 5.$$

Ademais, no caso de minimização, podemos usar o método colocando o sinal negativo na função objetivo, isto é,

$$\text{minimizar } f = \text{maximizar } (-f).$$

### 3.3. OTIMIZAÇÃO EM PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Nos casos onde se pretende fazer a otimização de várias variáveis de projeto com a presença de restrições de desigualdades, pode-se usar o famoso método baseado na função de Lagrange, ao qual será descrito a seguir. Cabe ressaltar que todo o conteúdo deste tópico foi retirado, principalmente, do livro do Rao (1996), por ser uma referência nesta área. Assim, mais detalhes podem ser acessados em tal material.

Para resolver o problema:

$$\text{Minimize } f(x)$$

Sujeito a

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$$

As restrições de desigualdades  $g_j(\mathbf{X})$  podem ser transformadas em restrições de igualdade pela adição de uma variável de “folga” não negativa  $y_j^2$ , tal que:

$$g_j(\mathbf{X}) + y_j^2 = 0, j = 1, 2, \dots, m$$

onde os valores das variáveis de folga ainda são desconhecidos. O problema de otimização agora se torna:

$$\text{Minimize } f(x)$$

Sujeito a

$$G_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = g_j(\mathbf{X}) + y_j^2 = 0, j = 1, 2, \dots, m$$

onde  $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y^m\}$  é um vetor de variáveis de “folgas”. Com isso, este problema pode ser resolvido convenientemente pelo método dos Multiplicadores de Lagrange. Para isto, constrói-se a Função Lagrangeana (ou Função de Lagrange ou Função Lagrangiana) dada por:

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

com  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$  sendo o vetor dos multiplicadores de Lagrange. As condições necessárias para a resolução da Função Lagrange são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \lambda)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j(\mathbf{X})}{\partial x_i} = 0, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \lambda)}{\partial \lambda_i} = G_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = g_j(\mathbf{X}) + y_j^2 = 0, \text{ com } j = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \lambda)}{\partial y_i} = 2\lambda_j y_j = 0, \text{ com } j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Com isso, percebe-se que é formado um sistema com  $(n+2m)$  equações com  $(n+2m)$  valores desconhecidos  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  e  $\lambda)$ . Assim, a solução do sistema acima resulta na solução ótima  $\mathbf{X}^*$ ; vetor dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda^*$  e vetor das variáveis de folga  $\mathbf{Y}^*$ .

Além disso, as condições para satisfazer as restrições no ponto ótimo (ou ponto mínimo)  $\mathbf{X}^*$  do problema podem ser expressas pelas chamadas *Condições Kuhn-Tucker* (ou *Condições de Karush-Kuhn-Tucker - KKT*):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_j g_j > 0, & j = 1, 2, \dots, m \\ g_j \leq 0, & j = 1, 2, \dots, m \\ \lambda_j \geq 0, & j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Essas condições *KKT* são necessárias mas, em geral, não são suficientes para garantir um mínimo relativo. No entanto, existe uma classe de *problemas*, chamados de problemas *convexos*, para os quais as condições *KKT* são necessárias e suficientes para um mínimo global. Mais informações sobre as condições *KKT* e os procedimentos que devem ser satisfeitos e verificados na obtenção do mínimo ou máximo global, podem ser obtidas em Rao (1996).

**Exemplo 3.6:** Minimizar a função  $f$  dada por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 40x_1 + 20x_2$$

sujeita a

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 50 \geq 0 \\ g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 100 \geq 0 \\ g_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 150 \geq 0 \end{cases}$$

**Solução:** Inicialmente, as condições *KKT* são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \lambda_3 \frac{\partial g_3}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

tal que

$$\begin{cases} 2x_1 + 40 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2x_2 + 20 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2x_3 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_j g_j = 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

onde  $\lambda_j g_j = 0$  é

$$\begin{cases} \lambda_1(x_1 - 50) = 0 \\ \lambda_2(x_1 + x_2 - 100) = 0 \\ \lambda_3(x_1 + x_2 + x_3 - 150) = 0 \\ g_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

tal que  $g_j \geq 0$  é

$$\begin{cases} (x_1 - 50) \geq 0 \\ (x_1 + x_2 - 100) \geq 0 \\ (x_1 + x_2 + x_3 - 150) \geq 0 \\ \lambda_j \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

sendo  $\lambda_j \leq 0$  igual a:

$$\begin{cases} \lambda_1 \leq 0 \\ \lambda_2 \leq 0 \\ \lambda_3 \leq 0 \end{cases}$$

Como é de se imaginar, a solução de todos os sistemas anteriores pode ser obtida de várias maneiras. A partir da equação  $\lambda_1(x_1 - 50) = 0$ , tem-se que  $\lambda_1 = 0$  ou  $x_1 = 50$ .

Adotando inicialmente  $\lambda_j = 0$  em todas as equações, percebe-se que, em algum momento, haverá incompatibilidade e incoerência nas demais equações, fato este que torna esta solução inviável.

Com isso, adotando  $x_1 = 50$ , chega-se à solução ótima para os multiplicadores de Lagrange de:

$$\lambda_1 = -20, \lambda_2 = -20, \lambda_3 = -100$$

e para a solução final do problema:

$$x_1^* = 50, x_2^* = 50, x_3^* = 50$$

Mais detalhes sobre o procedimento matemático realizado podem ser observados no Rao (1996).

### 3.4. OTIMIZAÇÃO BASEADA NO PARTICLE SWARM OPTIMIZATION

Para o processo de otimização, de maneira geral, podem ser usados os métodos baseados em gradientes ou os métodos metaheurísticos. No entanto, esses métodos possuem algumas peculiaridades que devem ser levadas em consideração no momento

da escolha de qual método será utilizado para otimizar o problema analisado (RAO, 1996).

- Os métodos baseados em gradientes são eficientes, mas possuem algumas desvantagens, entre elas:
- Servem apenas para problemas com domínio contínuo, não podendo ser usados em problemas de domínio discreto;
- Podem convergir para um mínimo local diferente do mínimo global, encontrando uma solução final diferente da solução ótima;
- Necessita do cálculo de gradientes, que na maioria das vezes requer grande custo matemático.

Em contrapartida, existem os métodos metaheurísticos, que podem ser aplicados a uma maior gama de problemas (tanto de domínio contínuo como de domínio discreto), dispensa o cálculo de gradientes e também é capaz de evitar os mínimos locais diferentes dos mínimos globais, garantindo assim uma solução final ótima (DRÉO et al., 2006). Entre os principais tipos desses métodos estão:

- *Particle Swarm Optimization*;
- *Simulated Annealing*;
- *Tabu Search*;
- *Genetic Algorithms*;
- *Memetic Algorithms*;
- *Ant Colony Optimization*

Como meio de exemplificação será explicado o funcionamento do *Particle Swarm Optimization* (PSO) (ou *enxame de partículas*, em tradução livre).

Criado inicialmente por Eberhart e Kennedy (1995), este tipo de algoritmo foi inspirado no comportamento de espécies de pássaros e a fácil implementação computacional, rápida convergência e poucos parâmetros para serem calibrados, estão entre as suas principais vantagens (KAR et al., 2012).

De maneira geral, o PSO é iniciado com uma população formada por partículas aleatórias e caracterizadas pelas suas posições  $x_j$  e velocidades  $v_j$ . A cada iteração, os valores de  $x_j$  e  $v_j$  são atualizados e as partículas (possíveis soluções do problema) tendem a convergir para o melhor resultado final, finalizando assim o processo de otimização na solução ótima do problema.

Atualmente, o software *MatLab* possui uma toolbox com este tipo de algoritmo genético e que pode ser facilmente utilizado junto aos problemas de confiabilidade estrutural. Mais detalhes a respeito desse e de outros tipos de algoritmos metaheurísticos podem ser encontrados em Eberhart e Kennedy (1995), Kar et al. (2012) e Rao (1996).

### 3.5. PRINCIPAIS SOFTWARES UTILIZADOS NO RAMO DA OTIMIZAÇÃO

Como apresentado nos capítulos anteriores, existem alguns métodos de confiabilidade e otimização que necessitam de várias operações matemáticas para a obtenção dos resultados. Visando facilitar o processo de cálculo existem alguns softwares disponíveis no mercado que são capazes de resolver esses problemas, tais como: o MATLAB, o GeoGebra, o Excel, o Scilab e o Freemath, entre outros.

O MATLAB (*Matrix Laboratory*) é um software pago destinado a fazer cálculos com matrizes. Desenvolvido pela MathWorks®, foi criado no fim dos anos 1970, por Cleve Moler, então presidente do departamento de ciências da computação da Universidade do Novo México.

Segundo a definição de Matsumoto (2002), o MATLAB “[...] é um ambiente de computação técnico-científica para o desenvolvimento de sistemas [...]”. Nesse software é possível trabalhar desde as operações mais simples, até fazer simulações, executar comandos em sequencias para automatizar o cálculo de equações em suas mais diversificadas maneiras de resolução.

O MATLAB possui uma biblioteca extensa de funções, porém o usuário também pode criar suas próprias funções facilitando o desenvolvimento e a depuração de sub tarefas independentes. Geralmente, esse recurso é utilizado quando uma parte do código é repetida várias vezes. Por isso, criar uma função com determinado trecho deste código o torna menor e mais fácil de ser visualizado. Igualmente, funções bem projetadas reduzem enormemente o esforço requerido pelas máquinas em grandes projetos de programação e minimiza problemas envolvendo “*bugs*” que atrapalham o seu andamento.

O GeoGebra (aglutinação das palavras **Geometria** e **Álgebra**) é um *software* de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo, além disso, é um programa gratuito, escrito em linguagem Java. O projeto foi iniciado na Universidade de Salzburg por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula, prosseguindo em desenvolvimento até os dias atuais.

Esse software possui todas as ferramentas tradicionais de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas. Além disso, equações e coordenadas podem ser inseridas diretamente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e algébrica.

O GeoGebra se aplica na interpretação de análise gráfica em diversos problemas de engenharia. A análise através do método Gráfico no Geogebra só se aplica quando o problema envolve, no máximo, duas variáveis, já que só podem ser gerados gráficos em

três dimensões, sendo mais complicada a análise gráfica com mais de três variáveis neste software.

Além do Matlab e Geogebra, o Excel também é um software extremamente utilizado para realizar o processo de otimização, principalmente nos problemas práticos de diversas áreas da Engenharia. Embora não seja sua principal missão, o Excel otimiza funções através do comando “*fsolve*”, sendo aplicado à diversas situações do dia a dia do Engenheiro, como por exemplo: otimizar dimensões de sapatas estruturais; otimizar parâmetros relacionados ao processo de produção de algum material; otimização na escolha da melhor combinação de preços e quantidades, entre outras situações.

### 3.6. EXERCÍCIOS

1. Aplicando um dos métodos de otimização estudados neste capítulo, encontre o mínimo e o máximo da função  $f = y^3 - 5y^1 - 20$  no intervalo de  $[-4,4]$ .
2. Aplicando um dos métodos de otimização estudados neste capítulo, encontre o mínimo e o máximo da função  $f = 6x_1^2 6x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - 2x_2$ .
3. Aplicando um dos métodos de otimização estudados neste capítulo e verificando as condições de KKT:

Minimize

$$f = 5x_1x_2$$

Sujeito a

$$25 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$$

4. Aplicando um dos métodos de otimização estudados neste capítulo e verificando as condições de KKT:

Minimize

$$f = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2$$

Sujeito a

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 1 \leq x_i \leq 10, i = 1,2 \end{cases}$$

5. Aplicando um dos métodos de otimização estudados neste capítulo:

Minimize

$$f = x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 + x_3$$

Sujeito a

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \leq 0 \\ 4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \leq 0 \\ x_3 - 5 \leq 0 \\ -x_i \leq 0; i = 1,2,3 \end{cases}$$

6. Duas cidades A e B devem receber suprimentos de água de um reservatório a ser localizado às margens de um rio em linha reta que está a 20km de A e a 10km de B. Se a distância entre A e B é de 20km e A e B estão do mesmo lado do rio, a que distância de A e de B deve estar localizado o reservatório para que se gaste o mínimo de tubulação? (Sugestão: fazer no Matlab, GeoGebra ou Excel).
7. Dados obtidos de Serpa (2018), modificada para fins de aprendizado. Uma viga biapoiada de concreto armado é utilizada como modelo para o dimensionamento e avaliação de confiabilidade. A viga está sujeita à flexão simples com momentos nulos nos apoios e momento positivo no meio do vão efetivo, dessa forma foi dimensionada a área de aço longitudinal positiva para resistir aos esforços de tração. A viga é representada na Figura 39.

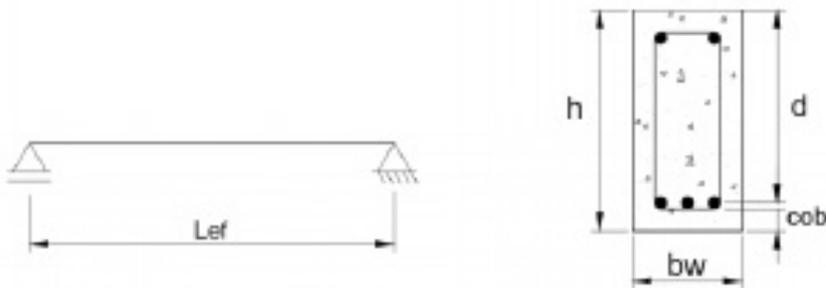


Figura 39 - Viga biapoiada de concreto. Adaptado de Serpa (2018).

Onde:

- $L_{ef}$  – comprimento efetivo da viga;
- $h$  – altura da seção;
- $b_w$  – largura da seção;
- $cob$  – cobrimento adotado;
- $d$  – distância da face superior da viga até o centro das armaduras longitudinais.

A viga de concreto armado possui seção transversal com 20 cm de largura e 50 cm de altura. Essa, de acordo com Santos, Stucchi e Beck (2014), é comum em edificações com distância entre pilares de cinco a seis metros. O concreto adotado será C25 ( $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$ ) e aço longitudinal CA-50 ( $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ ).

No dimensionamento de uma viga existem variáveis aleatórias que influenciam a resistência da estrutura. São elas: dimensões de altura e base da viga, resistência à compressão característica do concreto, distância da face inferior do concreto em relação ao eixo das barras de aço posicionadas na região que sofre tração, carregamentos. Para cada variável utilizada definiu-se média, desvio padrão e tipo de distribuição, conforme mostrado na Tabela 16.

Sabendo que as resistências devem ser na maioria das vezes superiores às

solicitações em uma estrutura, caso contrário não será respeitada condição de segurança de estado limite último, é feita uma correlação entre momento solicitante e momento resistente. A resultante é a função de estado limite  $g(x)$ :

$$g(X) = \theta R . A_s . f_y (h - d' - 0,5 . \frac{A_s . f_y}{0,85 . b . f_c}) - \theta S (M_g + M_q)$$

Onde:

- $\theta R$  – média do erro de modelo das resistências;
- $A_s$  – área de aço calculada;
- $f_y$  – média da tensão de escoamento do aço;
- $h$  - média da altura da viga adotada;
- $d'$  - média da distância da face inferior do concreto em relação ao eixo das barras de aço;
- $f_c$  – média da resistência à compressão do concreto;
- $\theta S$  – média do erro de modelo das solicitações;  $M_g$  – média da solicitação de carga permanente;
- $M_q$  – média da solicitação de carga variável.

Variáveis	Símbolo	Dimensão	Distribuição	$\mu$	$\sigma$
Permanente	g	kN.cm	Normal	5471.47	547.147
Variável	q	kN.cm	Normal	632.981	126.596
Concreto	fck	kN/cm <sup>2</sup>	Normal	2.925	0.439
Aço	fyk	kN/cm <sup>2</sup>	Normal	54	2.7
Altura de viga de concreto	h	cm	Normal	50	2.25
Largura da viga de concreto	b	cm	Normal	20	1.2
Distância CG das barras (fibra inferior viga)	d'	cm	Normal	2.9	0.1305
Ações	$\theta_S$	-	Lognormal	1	0.2
Resistência	$\theta_R$	-	Lognormal	1.1	0.077
Aço inf	As	cm <sup>2</sup>	Normal	4.731	0.114

Tabela 16 - Parâmetros e variáveis aleatórias.

Considerando o estudo de uma única viga de concreto armado, determine a probabilidade de falha e faça uma otimização estrutural da seção transversal média da viga, considerando os parâmetros apresentados na tabela e usando o Matlab.

# OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE - APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE ENGENHARIA

Com o intuito de mostrar a aplicação conjunta de confiabilidade e otimização aplicadas em problemas da Engenharia, os resultados do trabalho de Carvalho et. al. (2020) são apresentados neste tópico. Para efeito de exemplificação, foram consideradas um problema de uma Viga e outro de uma Barragem.

## 4.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DA VIGA

O problema trabalhado foi baseado e adaptado de Arora (2012), e se trata para encontrar a seção transversal ótima de uma viga de concreto armado (inicialmente com seção transversal de 20y30cm), fazendo utilização das informações de tensão de escoamento do material de flexão e de cisalhamento, e sujeita a ações do momento fletor e cortante.

Toda a programação foi realizada no Matlab, onde em um primeiro momento foram inseridos os dados estatísticos da média, desvio padrão e o número de simulações que será executado. O tipo de distribuição e as propriedades das variáveis aleatórias consideradas no problema são mostrados na Tabela 17.

Variável	Unidade	Distribuição	Média	Desvio Padrão
Momento fletor (M)	kN.m	Normal	40	8
Força cortante (V)	kN	Normal	100	20
Tensão de escoamento em flexão ( $S_y$ )	MPa	Normal	20	2
Tensão de escoamento em cisalhamento ( $\tau_y$ )	MPa	Normal	6	0.6

Tabela 17 - Variáveis aleatórias usadas na otimização da viga.

Para a Simulação de Monte Carlo, é utilizado o comando *for* que tem encargo de repetir uma função em um determinado número de vezes. Além de realizar as repetições para funções expostas, esse também possibilitará a geração de números aleatórios com ajuda do comando *randn*, que estimula a criação desses a partir de distribuição normal por meio de combinação com as referências estatísticas. Na figura 40, mostra-se o *Script* do Matlab formado pelas informações dispostas inicialmente.

```

1 function area = fun(x)
2 %% Dados
3 media = [10000 40 2000 1000]; %Média de S, M, T e V, respectivamente.
4 DP = [1000 8 200 20]; %Desvio padrão de de S, M, T e V, respectivamente.
5 Nmc = 1e5;
6
7 %% Simulação de Monte Carlo
8 for i=1:Nmc
9     S(i) = media(1)+ randn*DP(1); %Tensão de flexão
10    M(i) = media(2)+ randn*DP(2); %Momento fletor
11    T(i) = media(3)+ randn*DP(3); %Tensão de cisalhamento
12    V(i) = media(4)+ randn*DP(4); %Força cortante
13
14    d(i) = ((S(i)/2)*x(1)*x(2)^2)-6*M(i); %Cálculo da tensão máxima devido ao momento
15    g(i) = (2*(T(i)/2)*x(1)*x(2))-(3*V(i)); %Cálculo da tensão de cisalhamento
16
17
18    R = min(d,g);
19    I = R<0;
20    P = mean(I); %Probabilidade de falha obtida

```

Figura 40 - Algoritmo no Matlab para Simulação de Monte Carlo.

Os números aleatórios gerados são introduzidos nas funções de estado limite  $g_s$  (resistência ao momento fletor) e  $g_t$  (resistência ao cisalhamento). Tais funções são dependentes, principalmente, das variáveis de base  $b$  e altura  $h$ , que são representadas no algoritmo por  $x(1)$  e  $x(2)$ , respectivamente. Com a finalidade dessas de servir como suporte ao desenvolvimento da probabilidade de falha do sistema, tem-se as funções de estado limite  $g_s$  e  $g_t$  dadas por:

$$\begin{cases} g_s(d) = S_y b h^2 - 6M = 0 \\ g_t(d) = 2\tau_y b h - 3V = 0 \end{cases}$$

A probabilidade de falha  $P_f$  é obtida através da razão do número de falhas  $n_f$ , seja devido ao valor de  $g_s$  ou de  $g_t$ , pelo número total de simulações  $n_{si}$  dada por:

$$P_f = \frac{n_f}{n_{si}}$$

Para a formulação das restrições, conforme mostrado na Figura 41, foi considerada uma probabilidade de falha admissível de ordem  $10^{-3}$  e, além disso, é imposto que a altura da seção transversal não seja maior que duas vezes a largura da base, ou seja,  $h \leq 2b$ .

Através da utilização do comando *if-else*, que desempenha o papel de classificar como verdadeira a situação pelas condições das restrições impostas, posteriormente essas informações obtidas são transferidas para um novo Script, no qual será trabalhada a otimização pelo *Particle Swarm Optimization* (PSO).

```

22 %% Probabilidade de falha
23 Pft = 1e-3; %Probabilidade de falha admissível
24
25 if P > Pft || x(2)>2*x(1)
26     area = x(1)*x(2)+10^6;
27 else
28     area = x(1)*x(2);
29 end
30
31 end

```

Figura 41 - Algoritmo para condicionamento das restrições.

O outro *Script* criado interessa ao desenvolvimento da otimização via PSO. As etapas explanadas anteriormente serão conduzidas por intermédio desse para calcular a melhor circunstância. Ele apresentará delimitações através de limites inferiores e superiores e o informativo da quantidade de variáveis que será necessário otimizar. Além disso, sua composição terá por base o comando *options* que encaminha os parâmetros específicos para a otimização.

Por fim, como analisado na Figura 42 o último comando utilizado é o *particleswarm* que será responsável por otimizar, unir todas as etapas do algoritmo criado e propor o valor mínimo global para a seção transversal da viga, como apresentado a seguir.



```
Viga.m x fun.m x +
1 - rng default
2 - clear all
3 - clc
4 - tic
5
6 - %% Limites Inferiores e Superiores
7 - lb = [0 0];
8 - ub = [1 1];
9 - nvars = 2;
10
11 - %% Otimização
12 - options = optimoptions('particleswarm','Display','Iter','FunctionTolerance',1e-06,...
13 - 'MaxIterations',50,'MaxStallIterations',20,'SwarmSize',100);
14 - [X,fval] = particleswarm(@fun,nvars,lb,ub,options)
15 - toc
```

Figura 42 - Algoritmo para otimização via PSO.

## 4.2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DA BARRAGEM

O problema trabalhado nesse estudo é de uma barragem de gravidade de concreto. Segundo Jesus (2011), a barragem de gravidade é uma “estrutura maciça, com a seção transversal triangular dimensionada para que o peso próprio permita mobilizar grande parte da resistência necessária às forças que sobre ela atuam”. Ao longo da seção da barragem podem aparecer alguns elementos, como a galeria de drenagem, uma passagem interior utilizada para realizar inspeções. Nesse estudo, de modo a facilitar a análise de carregamentos e ações desestabilizadoras, optou-se por um modelo com drenos inexistentes ou inoperantes.

A verificação quanto a estabilidade da barragem levará em consideração duas importantes condições: segurança contra o deslizamento e segurança contra o tombamento. Há também a verificação contra a flutuação, porém, seguindo recomendações de guias como USACE (1995), optou-se por não fazer a verificação desse modo de falha, tendo em vista que as probabilidades de falha inerentes a essa condição são sempre muito baixas. A análise de estados limites são feitas tomando como base Krüger (2008), através das seguintes equações:

Para o deslizamento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_d = \frac{(\gamma_c A + V) \operatorname{tg}(\varphi) + CL}{H} \\ (\gamma_c A + V) \operatorname{tg}(\varphi) + CL \geq \lambda_d H \\ g(x) = (\gamma_c A + V) \operatorname{tg}(\varphi) + CL - H \end{array} \right.$$

Onde:

$\lambda_d$ : Fator de segurança ao deslizamento;

$g(x)$ : Equação do estado limite do deslizamento;

$\gamma_c$ : Peso específico do concreto;

$A$ : Área da seção transversal da barragem;

$V$ : Soma das componentes verticais das forças hidrostáticas;

$\operatorname{tg}(\varphi)$ : Tangente do ângulo de atrito interno do solo;

$C$ : Coesão;

$L$ : Comprimento da base da barragem;

$H$ : Soma das componentes verticais das forças hidrostáticas;

Para o tombamento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_t = \frac{M_e}{M_t} \\ M_e \geq \lambda_t M_t \\ f(x) = M_e - M_t \end{array} \right.$$

Onde:

$\lambda_t$ : Fator de segurança ao tombamento;

$f(x)$ : Equação do estado limite do tombamento;

$M_e$ : Soma dos momentos estabilizadores;

$M_t$ : Soma dos momentos tombadores.

As equações de estados limites envolvem quatro variáveis aleatórias: peso específico do concreto, coesão do material, ângulo de atrito e pressão dos poros. Todos os dados de variáveis aleatórias necessários para a determinação das ações de projetos desse estudo foram obtidos de García (2012). As variáveis possuem incertezas e por isso foram usadas distribuições de probabilidade. Foi considerado para todas as variáveis a distribuição Log-normal. Na Tabela 18 encontram-se todos os valores, com médias e desvios padrão.

Variável	Unidade	Distribuição	Média	Desvio Padrão
Densidade do concreto	kg/m <sup>3</sup>	Log-normal	2400	470
Coesão	MPa	Log-normal	0.420	0.188
Ângulo de atrito	(°)	Log-normal	50	5
Pressão de poros	-	Log-normal	0.2	0.04

Tabela 18 - Variáveis aleatórias usadas na otimização da barragem.

Para que a estrutura atue adequadamente deve haver uma margem de segurança entre a parcela resistente e a parcela solicitante. Essa margem é o fator de segurança estabelecida por normas de segurança de barragens, definido com base no grau de incerteza associado à análise. Nesse estudo foi levado em consideração o manual de Critérios de Projeto Civil de Usinas Hidrelétricas da Eletrobrás (2003), que apresenta para uma Condição de Carregamento Normal:  $\lambda_d = 1.5$  e  $\lambda_t = 1.5$ .

Para a densidade da água foi usado o valor de 1000 kg/m<sup>3</sup> e as demais variáveis de projeto utilizadas no estudo foram embasadas no modelo de García (2012). Foram adotados os seguintes valores:  $H=92$  m (altura da barragem),  $h_m=82.5$  m (nível da água à montante) e  $h_j=26$  m (nível da água à jusante). Um esquema da seção transversal da barragem, apresentando suas medidas e as principais forças estabilizantes e desestabilizadoras, está representado na Figura 43.

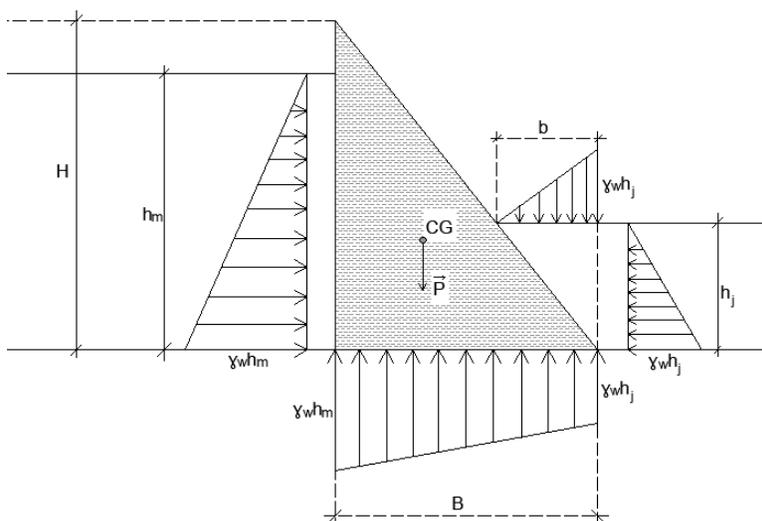


Figura 43 - Esquema da seção transversal da barragem.

As forças envolvidas são o peso do concreto, pressão das colunas de água à montante e à jusante e a pressão dos poros na base. A verificação da segurança contra o

deslizamento foi avaliada apenas na base, considerando a inexistência de estacas ou outra fundação, e para o cálculo de equilíbrio foi usado um comprimento unitário. A única variável de projeto considerada na otimização do modelo é a largura da base da barragem (B), logo, a função objetivo foi:

$$f_{obj}(B) = \frac{B * H}{2} = B * 46$$

Para efetuar a calibração do critério de projeto foi necessário estabelecer uma confiabilidade alvo, ou seja, o nível de segurança aceitável da estrutura. Segundo Badimuen (2017), para novas estruturas, considerando uma baixa consequência de falha e vida útil de 50 anos, são utilizados valores próximos de 3 para índice de confiabilidade. Sendo assim, nesse estudo foi considerada um índice de confiabilidade alvo igual a 3, que corresponde a uma probabilidade de falha de aproximadamente  $1,35 \times 10^{-3}$ .

### 4.3. RESULTADOS PARA A VIGA E A BARRAGEM

Em todos os casos, para a simulação de Monte Carlo foram realizadas  $10^5$  simulações e para o PSO foi considerado um número máximo de 50 iterações para um total de 10 partículas.

No algoritmo realizado para a viga, tomado para otimização uma viga com seção transversal inicial de 20x30cm, confirmou a possibilidade de se receber valores que reduzem custos com relação as dimensões de base e altura, sob as restrições impostas para modelagem. Conclui-se que através de um número de simulações de ordem  $10^5$ , uma probabilidade de falha admissível de ordem  $10^{-3}$  e a utilização do PSO, a economia proposta a essa viga é apresentada na Tabela 19 abaixo.

Base (m)	0,2224
Altura (m)	0,4426

Tabela 19 - Resultado das variáveis otimizadas.

O resultado alcançado através dos dados estatísticos das componentes dos esforços solicitados apresentou uma relação de aumento para base de 2cm e uma redução de aproximadamente 6cm para altura. O acréscimo da base se molda para melhor adequar o valor da altura, resultando em uma diminuição da área total da seção transversal.

Para o problema da Barragem, ao finalizar a otimização utilizando o algoritmo de PSO e levando em consideração todas as variáveis e fatores de segurança citados anteriormente, foi obtido um valor ótimo para a base da barragem de 51.49 m. Na Tabela

20 abaixo estão presentes os resultados de probabilidade de falha, índice de confiabilidade e fator de segurança, tanto para tombamento como para deslizamento.

Condições	Probabilidade de falha		Índice de Confiabilidade		Fator de segurança	
	Esperada	Obtida	Esperada	Obtida	Esperada	Obtida
Tombamento	$1,35 \cdot 10^{-3}$	$1,31 \cdot 10^{-3}$	3	3.01	1.5	1.79
Deslizamento	$1,35 \cdot 10^{-3}$	$1,60 \cdot 10^{-4}$	3	3.60	1.5	2.75

Tabela 20 - Probabilidade de falha e fator de segurança para valor ótimo da base.

Como podemos analisar na Tabela 20, era esperada uma probabilidade de falha igual ou inferior a  $1,35 \cdot 10^{-3}$  tanto para o tombamento quanto para o deslizamento, valor correspondente a um índice de confiabilidade igual a 3. Os resultados de probabilidade de falha obtidos para ambas as condições,  $1,31 \cdot 10^{-3}$  para tombamento e  $1,60 \cdot 10^{-4}$  para deslizamento, satisfazem o valor limite esperado. Os índices de confiabilidade de ambas as condições também foram superiores ao valor mínimo esperado.

Os valores obtidos de probabilidade de falha demonstram que a condição de falha dominante é o tombamento, uma vez que seu resultado é muito maior quando comparado ao deslizamento. Comportamento contrário foi analisado por Pires et al. (2019), que ao realizarem análise de confiabilidade de barragem de concreto obtiveram probabilidades de falha e confiabilidades superiores para o deslizamento. Essa diferença ocorre devido aos carregamentos distintos envolvidos nos problemas, que dependem das variáveis aleatórias.

Os fatores de segurança mínimos para uma estrutura em Condição de Carregamento Normal estabelecidos no manual de Critérios de Projetos Civil para Usinas Hidrelétricas é de 1.5 para tombamento e 1.5 para deslizamento. Como pode ser analisado na Tabela 20, em ambas as condições foram obtidos valores superiores a 1.5, sendo assim a segurança requerida foi atingida.

Quando comparamos os fatores de segurança com as probabilidades de falha constatamos que ocorre probabilidade de falha maior para fator de segurança menor, o que já era esperado. Segundo Pires et al. (2019), a probabilidade de falha é muito sensível aos parâmetros de projeto, coisa que o fator de segurança não consegue contemplar. Dessa forma, os fatores de segurança devem ser analisados cuidadosamente e não podemos considerar apenas eles na quantificação da segurança, pois mesmo com valores muito grandes, sempre haverá uma probabilidade de falha envolvida.

# REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, J. P. A.; FORTES, J. M. P.; FINAMORE, W. A. Probabilidade, variáveis aleatórias e processos estocásticos. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2018.

ANDRADE, M. M. Ensino e Aprendizagem de Estatística por meio da Modelagem Matemática: Uma Investigação com o Ensino Médio. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

ARORA, J. S. Introduction to Optimum Design. 3rd ed. Waltham, Elsevier, 2012.

BADIMUENA, B. L. Avaliação da Confiabilidade de Estruturas Existentes: Influência da Resistência à Compressão do Concreto. 2017. 220 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2017.

BECK, A. T. Confiabilidade e Segurança das Estruturas. 1. Ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.

BRASIL, R. M. L. R. F.; SILVA, M. A. Otimização de projetos de engenharia. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2019.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. Estatística Básica. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

CARVALHO, J. V. A.; SIQUEIRA, C. F.; PEREIRA, G. O. S.; RIBEIRO, H. M. D.; PAMPLONA, P. X.; MEDEIROS, E. M. Otimização de estruturas de concreto armado baseada em confiabilidade usando o Matlab. 62ª IBRACON, Florianópolis, SC, 2020.

COSTA NETO, P. L. O.; CYMBALISTA, M. Probabilidades. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2005.

DEVORE, J. L. Probabilidade & Estatística para engenharia e ciências. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2006.

DRÉO, J., SIARRY, P., PÉTROVSKY, A., TAILLARD, E. Metaheuristics for Hard Optimization. Springer, 2006.

EBERHART, R., KENNEDY, J. A new optimizer using particle swarm theory. In: Micro Machine and Human Science. MHS'95., Proceedings of the Sixth International Symposium on, pp. 39-43, 1995

ELETROBRÁS (Centrais Elétricas Brasileiras S. A.). Critérios de Projeto Civil de Usinas Hidrelétricas. 2003.

FERNANDES, S. A. Análise das deformações do concreto e do comportamento de vigas submetidas à flexão simples. 1996. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

FOGLIATTO, F. S.; RIBEIRO, J. L. D. Confiabilidade e Manutenção Industrial. Rio de Janeiro: Elsevier: ABEPRO, 2011.

GARCÍA, L. A.; BUENO, I. E.; LOMBILLO, A. S.; ORTUÑO, M. G. M. Methodology for estimating the probability of failure by sliding in concrete gravity dams in the context of risk analysis. Journal Structural Safety, v. 36-37, p. 1-13, 2012.

- GONÇALVES, S. P. Estratégias Didáticas no Ensino de Estatística Básica em Curso de Ecologia. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.
- JESUS, R. D. Otimização da Forma Estrutural de Uma Barragem. 2011. 142 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2011.
- KAR, R., MANDAL, D., MONDAL, S., GHOSHAL, S. P. Crazy based Particle Swarm Optimization algorithm for FIR band stop filter design, *Swarm and Evolutionary Computation*, 2012.
- KROETZ, H. M. Otimização estrutural sob incertezas: métodos e aplicações. 2019. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- KRÜGER, C. M. Análise de Confiabilidade Estrutural Aplicada às Barragens de Concreto. 2008. 146 f. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.
- LAFRAIA, J. R. B. Manual de confiabilidade, manutenibilidade e disponibilidade. 3. ed. Rio de Janeiro: Qualitymark: Petrobras, 2001.
- MAGINA, S.; CAZORLA, I.; GITIRANA, V.; GUIMARÃES, G. Concepções e Concepções Alternativas de Média: Um Estudo Comparativo Entre Professores e Alunos do Ensino Fundamental. *Educar em Revista, Brasil*, n. especial 2, p. 59-72, 2010.
- MANN, P. S. Introdução à Estatística. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- MATSUMOTO, E. Y. Matlab 6.5 – Fundamentos de Programação. 1. ed. São Paulo: Editora Érica, 2002.
- MEDEIROS, E. M. Análise de confiabilidade estrutural usando expansão polinomial. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil e Ambiental) – Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa/PB. 40 páginas. 2018.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- MOREIRA, M. F. Desenvolvimento do sistema radicular e da parte aérea do feijoeiro comum em função da distribuição e do teor de fósforo no solo. 2004. Tese (Doutorado em agronomia) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2004.
- PIRES, K. O.; BECK, A. T.; BITTENCOURT, T. N.; FUTAI, M. M. Análise de confiabilidade de barragem de concreto construída. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*, v. 12, n. 3, p. 551-579, 2019.
- PORTO, R. L. L., LAANA, A. E. L., JÚNIOR, B. P. F. B., CIRILO, J. A., FILHO, K. Z., AZEVEDO, L. G. T., CAIVO, L., BARROS, M. T. L., BARBOSA, P. S. F. Técnicas quantitativas para o gerenciamento de recursos hídricos, 2ª edição. Editora da UFRGS/ Associação brasileira de recursos hídricos. Porto Alegre, 2002.
- RAO, S. S. Engineering optimization: theory and practice. 4ª Ed., John Wiley & sons, 2009.

SANTOS, D. C. Climatologia da pluviosidade na bacia hidrográfica do Rio Paranaíba. 2016. Dissertação (Mestrado em Geografia) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016.

SANTOS, D. M.; STUCCHI, F. R.; BECK, A. T. Confiabilidade de vigas projetadas de acordo com as normas brasileiras. Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, São Paulo, v. 7, n. 5, p.723-746, 2014.

SERPA, V. C. Análise de confiabilidade de vigas em concreto armado: sensibilidade dos parâmetros de dimensionamento. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Instituto Federal de Educação, ciência e tecnologia de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.

TAVARES, M. Estatística Aplicada à Administração. 1. vol. Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração /UFSC; [Brasília]: CAPES:UAB, 2011.

USACE (U. S. Army Corps of Engineers). Gravity Dam Design. 1995.

WALPOLE, R. E.; MEYERS, R. H.; MEYERS, S. L.; YE, K. Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

Apaixonado pela Engenharia, o professor **Eduardo Morais de Medeiros** fez um intercâmbio na Universidade de Santiago de Compostela – USC/Espanha (2012-2013) e se formou em Engenheiro Civil pela UFRN (2016). Desde sua graduação, atua nas áreas de métodos numéricos, otimização e confiabilidade, sendo estes, inclusive, os temas do seu mestrado (2018) e doutorado (2022).

O professor **Paulo Xavier Pamplona** possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba (2003), Mestrado em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (2005) e Doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (2009). Atualmente é professor associado 3 da Universidade Federal de Campina Grande. Tem experiência na área de matemática pura e aplicada, com ênfase em equações diferenciais parciais, modelagem matemática e pesquisa operacional, atuando principalmente nos seguintes temas: estabilidade de semigrupos, problemas termo-elástico-poroso, otimização e educação financeira.

**José Valderisso, Camila Fragoso, Gabrielly de Oliveira e Heitor Moura**, são todos egressos do curso de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia Agroalimentar da Universidade Federal de Campina Grande. Estudantes que tiveram uma graduação de excelência e se tornaram profissionais extremamente competentes.

Diversos problemas das Ciências e Engenharias não podem ser apropriadamente analisados no contexto determinístico devido à incerteza e aleatoriedade de seus parâmetros. Nestes casos, torna-se necessária uma análise probabilística, que considera parâmetros como variáveis aleatórias, permitindo, assim, uma modelagem mais representativa em diversas situações. Um problema de grande interesse nas engenharias é aquele da Análise de Confiabilidade, no qual busca-se estimar a probabilidade de ocorrência de eventos indesejados, ou probabilidade de falha.

Por outro lado, nos projetos de Engenharia, a busca por um projeto que atenda a todos os requisitos normativos (de segurança, conforto e pleno funcionamento), e com um menor custo para o cliente, pode ser alcançado através de técnicas e softwares de otimização.

Assim, este livro, **Otimização e Confiabilidade aplicadas à Engenharia**, visa ajudar e estimular o estudante e o profissional de Engenharia na busca por um projeto cada vez mais eficiente (do ponto de vista da segurança, conforto e bom funcionamento do mesmo) e cada vez mais barato (do ponto de vista financeiro). Com isso, conceitos sobre estatística, confiabilidade e otimização, assim como suas aplicações nos problemas de Engenharia, são apresentados nesta obra.

Diversos problemas das Ciências e Engenharias não podem ser apropriadamente analisados no contexto determinístico devido à incerteza e aleatoriedade de seus parâmetros. Nestes casos, torna-se necessária uma análise probabilística, que considera parâmetros como variáveis aleatórias, permitindo, assim, uma modelagem mais representativa em diversas situações. Um problema de grande interesse nas engenharias é aquele da Análise de Confiabilidade, no qual busca-se estimar a probabilidade de ocorrência de eventos indesejados, ou probabilidade de falha.

Por outro lado, nos projetos de Engenharia, a busca por um projeto que atenda a todos os requisitos normativos (de segurança, conforto e pleno funcionamento), e com um menor custo para o cliente, pode ser alcançado através de técnicas e softwares de otimização.

Assim, este livro, **Otimização e Confiabilidade aplicadas à Engenharia**, visa ajudar e estimular o estudante e o profissional de Engenharia na busca por um projeto cada vez mais eficiente (do ponto de vista da segurança, conforto e bom funcionamento do mesmo) e cada vez mais barato (do ponto de vista financeiro). Com isso, conceitos sobre estatística, confiabilidade e otimização, assim como suas aplicações nos problemas de Engenharia, são apresentados nesta obra.