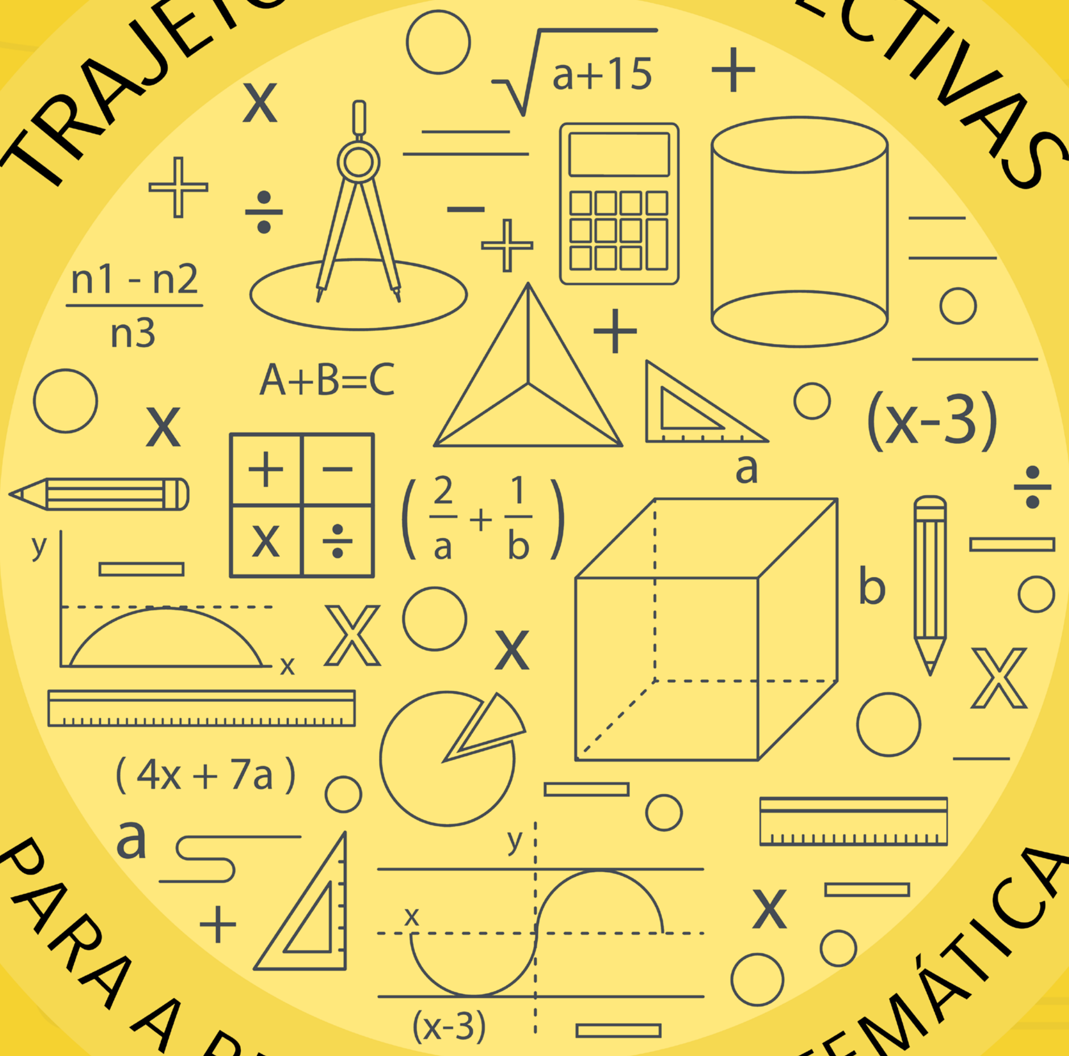
AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
(Organizador)

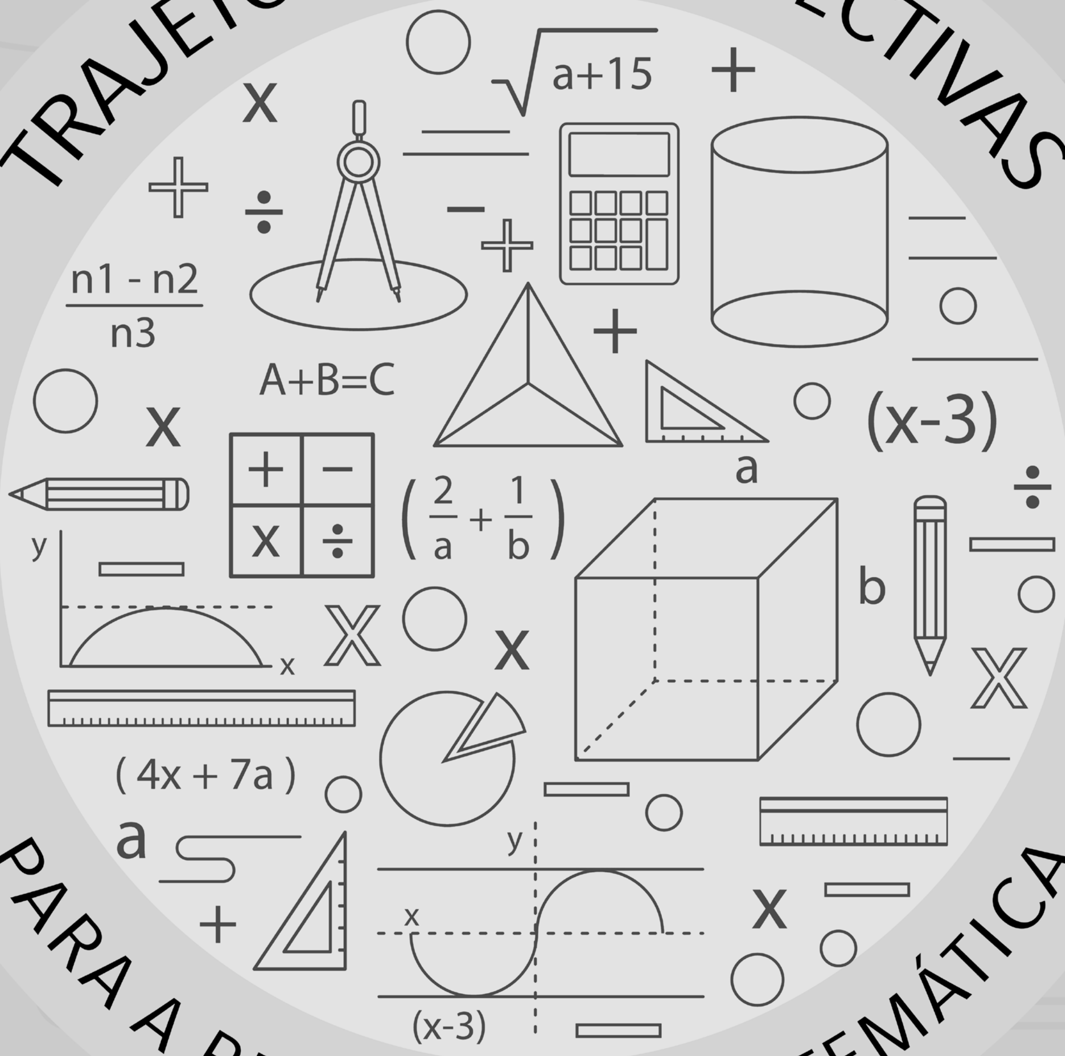
TRAJETÓRIAS E PERSPECTIVAS PARA A PESQUISA EM MATEMÁTICA



Atena
Editora
Ano 2022

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
(Organizador)

TRAJETÓRIAS E PERSPECTIVAS PARA A PESQUISA EM MATEMÁTICA



Atena Editora
Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Trajetórias e perspectivas para a pesquisa em matemática

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

T768 Trajetórias e perspectivas para a pesquisa em matemática / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0854-3
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.543220612

1. Matemática – Pesquisa. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

APRESENTAÇÃO

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, desenvolvimento e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores a se aterem aos cursos de licenciatura e Educação Básica com atenção. Importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país, sobretudo considerando as problemáticas evidenciadas em um mundo de pós-pandemia. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das problemáticas reveladas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

O fazer Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem dessa ciência, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático; e sobre isso, de uma forma muito particular, os autores e autoras abordaram nesta obra.

É neste sentido, que o livro "***Trajetórias e perspectivas para a pesquisa em matemática***" nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor e professora pesquisadora que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores/as da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores/as pesquisadores/as de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

DESAFIOS PARA O PROCESSO DE ENSINO/ APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA ATRAVÉS DE AULAS ON-LINE EM TEMPOS DE PANDEMIA

Data de aceite: 01/12/2022

Cícera de Alencar
http://lattes.cnpq.br/2947542346672542

Elma Mota dos Santos Gonçalves
http://lattes.cnpq.br/8261022764274317

Jaqueline de Araújo Silvestre Batista
http://lattes.cnpq.br/2132269306026196

Eugênia Aurélia Rodrigues
http://lattes.cnpq.br/5513586773019615

Maria da Cruz de Sousa Guimarães
http://lattes.cnpq.br/2715287630698480

Monizy Silva Pereira
http://lattes.cnpq.br/4980066714374443

Fabiula Cristina da Costa Almeida
http://lattes.cnpq.br/5412682853021911

Secília Rodrigues Rosa
http://lattes.cnpq.br/8766068177866589

Ana Maria Sampaio dos Santos
http://lattes.cnpq.br/3812677273124252

Terezinha Aparecida Rodrigues Caputo
http://lattes.cnpq.br/1536604445219217

RESUMO: A educação no Brasil sempre foi ponto de problematização na academia para a sociedade, pois tanto é um eixo fundamental para a luta contra as desigualdades quanto um braço para a perpetuação do sistema capitalista. Desta forma, o objetivo do presente trabalho é investigar os desafios para o processo de ensino/aprendizagem da matemática através do ensino remoto em tempos de pandemia. Para tanto. A metodologia utilizada foi a de caráter exploratório, a partir de levantamento bibliográfico e revisão de literatura para alcançar o objetivo proposto. Os resultados da presente pesquisa apontam que os desafios preliminarmente pensados não são apenas do professor de matemática, mas de todo o sistema, bem como dos pais que auxiliam as crianças. A razão dos desafios e dificuldades também é anterior ao contexto de pandemia e se explica sobretudo na lógica do capitalismo e nas relações de poder que constroem a lógica das desigualdades.
PALAVRAS-CHAVE: Aulas on-line. Matemática. Capitalismo. Educação e Relações de Poder.

ABSTRACT: Education in Brazil has always been a point of questioning in academia for society, as it is both a fundamental axis for the fight against inequalities and an arm

for the perpetuation of the capitalist system. Thus, the objective of the present work is to investigate the challenges for the teaching / learning process of mathematics through remote teaching in times of pandemic. Therefore. The methodology used was exploratory, based on a bibliographic survey and literature review to achieve the proposed objective. The results of the present research point out that the preliminary thought challenges are not only of the mathematics teacher, but of the whole system, as well as of the parents who help the children. The reason for the challenges and difficulties also predates the context of the pandemic and is explained mainly in the logic of capitalism and in the power relations that build the logic of inequalities.
KEYWORDS: Online classes. Math. Capitalism. Education and Power Relations.

1 I INTRODUÇÃO

É possível identificar um hiato entre a epistemologia da matemática e sua aplicação prática. É preciso dialogicidade para sanar a distância comunicativa do professor que não consegue aproximar o educando das ciências exatas para assim alcançar os resultados estatísticos exigidos pelo sistema educacional nacional. Resultados estes que no mais das vezes acentua as desigualdades sociais de fundo na Educação.

Com o advento abruto da pandemia e aulas suspensas, foi necessário utilizar-se do ensino remoto para dar continuidade às aulas presenciais e minimizar o impacto deste momento tão particular em benefício da saúde pública. As escolas públicas, em especial ensino básico, sofreram um impacto ainda mais sensível porque mesmo antes deste momento já contavam com a precariedade dos recursos públicos. Logo, realizar a manutenção do ano letivo através de plataformas como o *google meet*, *zoom* e outras foi um desafio tanto para educandos quanto para educadores. Disciplinas que já possuíam sua carga de dificuldade como é o caso da matemática se tornaram ainda mais complexas com a distância física dos professores e, especialmente, a ausência de tal conhecimento pelos pais que se tornaram os principais responsáveis por auxiliar suas crianças na resolução de suas atividades.

O momento evidenciou abismos sociais para a universalização do ensino, pois muitos se depararam com a falta de acesso a tecnologia e internet, meios indispensáveis para a manutenção do sistema de educação universal. O ponto é que para famílias mais abastardas que outrora tinha como principal preocupação a sobrevivência alimentar no contexto capitalista, agora corre para ter acesso a tecnologia básico para acesso a educação.

Diante disso, mesmo após cessada a pandemia, a ciência, sobretudo através da pesquisa acadêmica, possui o condão de estudar os desafios do momento e propor alternativas para tanto, razão que justifica a presente pesquisa, a qual se propõe contribuir com o arcabouço literário desta área de conhecimento.

Nesse sentido, a presente pesquisa tem por objetivo investigar os desafios para o processo de ensino/aprendizagem da matemática através do ensino remoto em tempos de pandemia.

Neste escopo faz-se importante descrever os desafios do professor de matemática frente as dificuldades do educando em assimilar teoria e prática através de plataformas on-line, bem com apontar jogos matemáticos como alternativas de ensino/aprendizagem a ser desenvolvidas pelos educandos, pais e professores de forma remota e ainda apresentar a matemática como fator de empoderamento do ser e do saber.

2 I REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Os desafios do professor de matemática frente as dificuldades do educando em assimilar teoria e prática através de plataformas on-line

Com o advento da pandemia e como consequência a inserção abrupta de aulas através de plataformas on-line passam a permear o contexto dos professores de matemática inúmeros desafios, especialmente pela natureza da disciplina que faz uso de inúmeras fórmulas, gráficos e contínuo exercício. Esse novo contexto torna ainda mais evidente as dificuldades que já eram um problema mesmo com as aulas presenciais.

Ocorre que a educação no Brasil sempre foi ponto de problematização na academia para a sociedade, pois tanto é um eixo fundamental para a luta contra as desigualdades quanto um braço para a perpetuação do sistema capitalista. Nesse contexto, os níveis de aprendizagem, em sua maioria, têm ligação direta com a classe social no qual o estudante está inserido, pois o acesso as novas e tecnologias e o manuseio destas está diretamente ligado a classe social a qual pertence o indivíduo em razão do acesso aos bens de consumo pelo poder aquisitivo. (SAVIANI, 2003).

Segundo Mészáros (2008) no sistema capitalista a Educação é um produto que é distribuído conforme a capacidade aquisitiva do indivíduo e que serve inclusive para elastecer as desigualdades e formar sujeitos para a perpetuação do capital. Nisso, o Estado deveria ser o Ente mediador da Educação como produto e da capacidade aquisitiva, mas na prática o Estado apenas fornece Educação, sem um controle apurado sobre a qualidade da educação que possa ter equivalência com aquilo que é “comprado” de forma direta.

Nesse sentido, o autor supracitado afirma que

> A educação formal não é a força ideologicamente primária que consolida o sistema do capital; tampouco ele é capaz de, por si só, fornecer uma alternativa emancipadora radical. Uma das funções principais da educação formal nas nossas sociedades é produzir tanta conformidade ou “consenso” quanto for capaz, a partir de dentro, e por meio dos seus próprios limites institucionalizados e legalmente sancionados. (MÉSZÁROS, p. 45, 2008).

Os desafios durante a pandemia não são apenas para o professor de matemática, mas para todo o sistema educacional, porque essa dificuldade já existia muito antes do período pandêmico. Na verdade, a pandemia do COVID-19 apenas evidenciou o abismo de desigualdades já existente e especialmente no sistema educacional.

Como adaptar um sistema de ensino para modalidade remota de forma que funcione quando o sistema convencional sequer atingiu seu propósito? Como ensinar uma ciência tão complexa quanto a matemática quando muitas famílias não dispõem nem da tecnologia nem das noções básicas da matemática para auxiliar as crianças em casa? Muito embora o contexto não tenha sido planejado, pois trata-se de um vírus que não podia ser previsto, também evidencia que para muitas famílias a preocupação com a educação está muito distante, haja vista que a primeira preocupação é com a sobrevivência básica.

Quando Freire (p. 47, 2019) afirma que "saber que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção" nunca pode ser mais atual e mais apropriado a presente temática, pois o professor, que assim como a família também se encontra sem recursos, precisa criar métodos e formas que possibilite o aluno a construir seu próprio saber, pois distante de uma forma depositária. Também oportuno o pensamento seguinte do autor supracitado no sentido de que "uma das tarefas nossas como educador é esta: é decifrar o mundo opressor para o oprimido."

2.2 Jogos matemáticos como alternativas de ensino/aprendizagem

Ante as inúmeras dificuldades de ensinar a matemática através de plataformas on-line os jogos apresentam-se como grande alternativa para a facilitação do ensino, especialmente porque estamos diante de uma realidade de pais despreparados tanto em relação ao conhecimento quanto em relação ao manuseio das tecnologias utilizadas e isso porque o ensino outrora para estes pais já era precarizado, o sistema nunca contemplou uma educação universal para todos e maquiou o acesso ao conhecimento com o manto da meritocracia.

Provavelmente Paulo Freire nunca foi tão invocado e a Educação de adultos tão necessária, pois pais com instrução são capazes de pelo menos manusear as ferramentas de ensino e o próprio conteúdo ou pelo menos a leitura do material para seus filhos, mas esse básico não existe em grande parte das famílias de baixa renda e de escolas públicas.

O que aqui propomos é sobretudo a reflexão crítica do sistema de ensino a partir do professor de matemática e suas dificuldades, pois:

> É pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática. O próprio discurso teórico, necessário à reflexão crítica, tem de ser de tal modo concreto que quase se confunda com a prática. O seu "distanciamento epistemológico" da prática enquanto objeto de sua análise deve dela "aproximá-lo" ao máximo. (FREIRE, p. 40, 2019).

Esse exercício de pensar alternativas ao ensino através de jogos que possa possibilitar a construção do saber pelo estudante, de modo que aproxime teoria e prática, bem como facilite o auxílio dos pais, também é uma forma de lutar contra o sistema que apenas distancia o estudante de classe abastarda e de escola pública das classes com todos os meios de concorrer dentro da lógica capitalista.

Aliás, a educação formal sempre foi um braço forte para a perpetuação reiterada da lógica capitalista, especialmente pela alienação para o trabalho “subaternizado” de modo a manter o trabalhador sem acesso a ciência e ao produto da ciência, de modo a mantê-lo no “seu lugar”, mas conforme argumentou Gramsci há muito

> Não há nenhuma atividade humana da qual se posso excluir qualquer intervenção intelectual – o *Homo faber* não pode ser separado do *Homo sapiens.* Além disso, fora do trabalho, todo homem desenvolve alguma atividade intelectual; ele é, em outras palavras, um “filósofo”, um artista, um homem com sensibilidade; ele partilha uma concepção do mundo, tem uma linha consciente de conduta moral, e portanto ***contribui para manter ou mudar a concepção do mundo***, isto é, para estimular novas formas de pensamento. (GRAMSCI, p. 121, 1957).

Nesse viés, a matemática e suas alternativas propostas são também um mecanismo de empoderamento do saber, especialmente no sentido de democratizar o saber, porque como afirma o autor supracitado todo ser humano contribui para o mundo de alguma forma. No entanto, nosso ponto atual é que as possibilidades de atuação intelectual dos sujeitos são limitadas pelas condições materiais do mundo capitalista.

Vivemos hoje em um contexto de *crise estrutural global,* mas não apenas em razão da pandemia, mas porque a lógica do capital já sucatava nossas estruturas sociais básicas que foram ao chão o vírus pandêmico, mas que possui algum potencial para após ele romper com a lógica do capital o que se coaduna com o pensamento de Mészáros ao afirmar que

> [...] A nossa tarefa educacional é, simultaneamente, a tarefa de uma transformação social, ampla e emancipadora. Nenhuma das duas pode ser posta à frente da outra. Elas são inseparáveis. A transformação social emancipadora radical requerida é inconcebível sem uma concreta e ativa contribuição da educação no seu sentido amplo, tal como foi descrito nesse texto. E vice-versa: a educação não pode funcionar suspensa no ar. Ela pode e deve ser articulada adequadamente e redefinida constantemente no seu inter-relacionamento dialético com as condições cambiantes e as necessidades da transformação social emancipadora e progressiva em curso. (MÉSZÁROS, p. 76, 2008).

Da reflexão do autor supracitado também indagamos se existe em nosso país algum projeto para a construção de uma educação que seja emancipadora e com potencial para reduzir pelo menos as desigualdades relacionadas a este campo. Existe um projeto para a educação universal no Brasil ou um projeto para a educação apenas de alguns? Tal questionamento pode ser melhor explicado no tópico a seguir com o debate acerca das relações de poder. Explicado, porém, não respondido, pois trata-se de uma questão demasiadamente complexa cujo espaço de um artigo não seria suficiente para abarcar os inúmeros pontos transversais a questão levantada.

2.3 A educação e sua relação com o poder

O Ensino Formal reproduz em suas estruturas uma ideologia que naturalmente será aquela pertencente a classe que está no Poder e assim possui uma tarefa central que é a de reproduzir essa perspectiva ideológica, mas também é capaz de fornecer as ferramentas necessárias a produção da crítica ao sistema.

Para Mészáros (2008), a Educação em sentido amplo é um processo de institucionalização e internalização que carrega marcas históricas e influências dos diversos contextos que determinam o paradigma pedagógico atual à consolidação de pautas sociais e mentalidades individuais, inclusive como instrumento de leitura, releitura ou falsificação da história que constrói o sujeito, sua identidade e consciência de si e para si.

Neste viés, importante destacar que o Brasil inicia suas concepções pedagógicas à educação formal sob as fortes influências da tradicional formação jesuítica, ou seja, marcada pela institucionalização do ensino com fontes europeias e suas formas de produção, reprodução de sua hegemonia. Numa perspectiva histórica é possível refletir sobre a existência de um currículo formal e um currículo subliminar, com aspirações à continuidade de um sistema opressor e alienador também institucionalizado. Aquele compreende a sistematização e divisão dos saberes, enquanto este se materializa através das relações de poder que determinam a internalização de um paradigma (SAVIANI, 2002), que segundo Mészáros (2008) seria a internalização do sistema capitalista.

No âmbito teórico/científico, Dias (2005) afirma a Educação como uma das cinco instituições sociais básicas da Estrutura Social, sendo ela responsável pela orientação dos indivíduos aos papéis e normas sociais estabelecidas pela sociedade. Nesta mesma linha, Carrara (2009) ao tratar de educação, diferença, diversidade e desigualdade, declara que a escola deve viabilizar aos alunos e alunas implicações éticas e políticas de modo que possam construir eles mesmos suas próprias opiniões sobre os valores e conjunturas sociais. Ainda sobre educação e poder, Bourdieu e Passeron (2014) tecem considerações acerca das instituições educacionais como contribuintes diretas à reprodução do contexto social.

Também é possível subsidiar a análise pelo âmbito jurídico/administrativo através dos preceitos constitucionais (CF/88) e infraconstitucionais relacionados a Lei 9.394/1996 (LDB).

Sob a égide da Carta Constitucional (CF/88) estão as demais leis, o regimento das políticas públicas e atos administrativos, pelos quais são reguladas as atividades nas instituições públicas de ensino a serem pesquisadas para fins de análise deste trabalho. Em seu Título I traz nos incisos II e III do artigo 1º, como Princípios Fundamentais a cidadania e a dignidade da pessoa humana. O artigo 3º estabelece como objetivos do Estado brasileiro, incisos I, III e IV, a busca pela construção de uma sociedade livre, justa e solidária, pela redução das desigualdades sociais e regionais. Sob o Título II, Capítulo

I, artigo 5º estão previstos os Direitos e Garantias Fundamentais No capítulo III, seção I, artigo 205 a Educação positiva-se como direito de todos e dever do Estado e da família sob a colaboração da sociedade na busca pela efetivação do exercício da cidadania e qualificação para o trabalho.

No que tange a Lei 9.394/1996 (LDB), que estabelece as diretrizes e bases às instituições públicas de ensino médio, observa-se que em seu artigo 12, incisos I, IX, e X reside a incumbência destas instituições ante a elaboração e execução de sua proposta pedagógica incluindo-se a promoção de medidas de conscientização social e cultural nas escolas e sob o artigo 13 estabelece-se a participação dos docentes na elaboração da proposta pedagógica da instituição. O capítulo II, que trata da Educação básica (ensino infantil, fundamental e médio) e das disposições gerais, em sua seção I, artigo 22 estabelece como finalidade a formação comum indispensável para o exercício da cidadania.

O artigo 26 do diploma legal citado acima estabelece que os currículos tenham base nacional comum, e que podem complementar-se a partir das características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e dos educandos, devendo abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil (art. 26, § 1º), bem como podem incluir a critério dos sistemas de ensino, projetos e pesquisas envolvendo os temas transversais relacionados com as peculiaridades locais (art. 16, § 7º).

O artigo 27, inciso III, ainda da Lei nº 9.394/1996 estabelece como diretrizes aos curriculares da educação básica o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico.

E, por fim, o artigo 36 do texto legislativo citado, afirma que o currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas.

Em suma, o Sistema Educacional se desenvolve a partir dos Projetos Pedagógicos, compostos também pelos Currículos escolares, existindo para ambos a abertura à composição dos Currículos Escolares à autonomia intelectual e pensamento crítico com ênfase no contexto e demandas territoriais, sem distinguir-se das proposições pedagógicas de praxe.

Nesse sentido, o Projeto Pedagógico é o instrumento através do qual a escola exerce sua autonomia didática, inclusive de identidade e diálogo com a cultura e realidades locais, conforme artigo 12, incisos I, IX, e X da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

Veiga (2002) aborda o Projeto Pedagógico, em seu tempo ainda denominado de Projeto Político Pedagógico, como via de autonomia institucional no âmbito didático e, portanto, viabilizador da autonomia ideológica dos alunos frente à totalidade dos contextos e possibilidades.

Sacristan (2000) define o Currículo Escolar como um conjunto de matérias a serem superadas pelo aluno dentro de um ciclo de modo a possibilitar melhorias na sociedade à transformação ou reconstrução social.

No que tange a conjuntura das Relações de Poder, na obra “Educação para além do Capital”, Mészáros (2008) analisa um modelo de educação construído sob a égide do Capitalismo que se projeta e se desenvolve apostando na alienação política, econômica e social como propulsora do seu fortalecimento a partir da não proatividade da classe baixa. Ou seja, investe subliminarmente numa educação passiva diante das possibilidades de emancipação ao as mazelas ideológicas do capital, passando a configurar-se também como uma mercadoria.

Paulo Freire também tangencia a perspectiva das Relações de Poder no contexto educacional como espectro para delimitar outros autores e suas concepções, destacando especialmente a obra “pedagogia da autonomia” e “pedagogia da tolerância” (FREIRE, 1997), pois o método freiriano de ensino preocupa-se especialmente como a formação crítica e reflexiva do indivíduo que rompe com as barreiras da alienação para a mão de obra e desenvolve capacidades para a construção de um modelo de sociedade menos agressivo e desigual.

Nesse sentido, defende-se que o currículo contribui à formação humana e ideológica dos indivíduos e consequentemente sua proatividade dentro da sociedade, passível de mutações e adaptações ao longo do tempo. Mas toda essa conjuntura construída a partir da ideologia dominante acentua as desigualdades relacionadas a educação neste contexto atual de pandemia porque além da já constatada restrição a própria construção do pensamento agora estamos diante de uma restrição ao próprio acesso à educação por ausência de acesso as tecnologias e manuseio destas pela população mais pobre.

Verifica-se que para a construção do currículo escolar há sempre um paradigma que intenciona moldar sujeitos para o convívio social, o que desemboca diretamente em uma interrelação entre currículo, poder e ideologia a partir de uma perspectiva histórica. Para Freire (1996) deveria ser a do pensamento crítico libertário, no entanto, Mészáros (2008) entende que o campo do *dever ser* está distante, sendo como realidade verificável a internalização do sistema capitalista, que embora não se sustente apenas através do ensino formal, o toma como forte braço para sua perpetuação.

Assim, o currículo escolar possui não só a função de nortear o aprendizado, mas também de transformação da sociedade ou manutenção desta. Para refletir tais questões, muitos estudiosos debruçam suas pesquisas a propostas reflexivas sobre a postura pedagógica do sistema educacional, ao que visa contribuir a presente pesquisa, pois até a conquista do sistema utopicamente pensado, o exercício acadêmico de flexão não estará esgotado, pois, “necessária ‘intervenção’ consciente no processo histórico, orientada pela adoção da tarefa de superar a alienação” (MÉSZÁROS, 2008, p. 60).

3 I PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia adotada será a de uma pesquisa documental a partir de uma revisão de literatura, levantamento bibliográfico e qualitativa de caráter exploratório, assim como levantamento de fontes secundárias, como resultado da leitura de artigos, periódicos e livros que tratam da temática do capitalismo, economia verde e responsabilidade socioambiental a partir da sustentabilidade. Quanto a abordagem qualitativa Godoy esclarece que:

> Uma pesquisa qualitativa considera o ambiente como fonte direta dos dados e o pesquisador como instrumento chave;
>
> possui caráter descritivo; o processo é o foco principal de abordagem e não o resultado ou o produto; a análise dos dados foi realizada de forma intuitiva e indutivamente pelo pesquisador; não requereu o uso de técnicas e métodos estatísticos; e, por fim, teve como preocupação maior a interpretação de fenômenos e a atribuição de resultados. (GODOY, 1995, p.58).

Desta maneira, os desafios para o processo de ensino/aprendizagem da matemática através do ensino remoto em tempos de pandemia, foram analisados tendo como âmbito de análise sua compreensão dentro do campo da pedagogia e ciências exatas, considerando escolas públicas e o ensino básico. Do ponto de vista dos procedimentos técnicos adotados lançar-se-á mão de pesquisa documental e bibliográfica, de modo que na primeira serão eleitas as fontes normativas inerentes a legislações voltadas ao sistema nacional de educação, e, quanto a última realizar-se-á um levantamento de autores que possam dialogar com o tema e estabelecer diretrizes conceituais para tanto. Nesse viés, Segundo Souza

> Todo e qualquer trabalho acadêmico requer um conhecimento sobre os livros, artigos, periódicos de modo impresso, eletrônico, etc, sendo imprescindível um processo metodológico, um certo caminho a seguir, como forma de ser racional e econômica para aquele que realiza a pesquisa. (SOUZA. 2001, p.59)

Para alcançar resultados preliminares da presente pesquisa, este projeto se constrói a partir dos dados adquiridos por meio de coleta e seleção de material bibliográfico indicado ao tema central de análise desta pesquisa.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

As reflexões aqui propostas podem até parecer ecléticas demais, porque coleciona no mesmo texto um debate acerca dos “desafios para o processo de ensino/aprendizagem da matemática através de aulas on-line em tempos de pandemia”, mas em diálogo com tema transversais como o capitalismo, relações de poder, currículo formal e informal, bem como problemáticas relacionadas a desigualdade social a partir da educação que já existiam antes mesmo da pandemia, e ainda tendo por objeto de análise o porfessor de matemática, mas tudo isso se deu de forma intencional, para que não adotemos uma posição fragmentada do problema.

Os desafios não apenas do professor de matemtica que possui a dificil tarefa de ensinar cálculos, gráficos, fórmulas pelas paltaformas virtuais e para pais que não conseguem auxiliar seus filhos porque também não tiveram acesso a educação de qualidade. Os desafios são para as escolas públicas, sobretudo. Para as famílias pobres, que antes de lutar por educação, lutam por sobrevivência. O desafio é contra o sistema opressor capitalista que já era um probema muito antes da pandemia e que com ela deixou os abismos que cria entre as classes sociais muito mais evidentes.

Quando o professor de matemática desenvolve jogos como alternativa ao ensino, especialmente quando ele ocorre por plataformas remotas, é mais que uma alternativa a aprendizagem da criança, mas é também dos pais que a auxiliam, pois o conhecimente sequer chegou a eles. Agora com a necessiade de forncer educação em um contexto de pandemia se tornou necessário superar o "não saber" de mais de uma geração.

Refletir críticamente os sistema no qual estamos inseridos é uma função, sobretudo, da academia, que em sua posição de privilégio apresenta-se como co-produtora do conhecimento e consequentemente do proprio poder, cujo saber é uma maneira de se manifestar na sociedade, bem como de tecer a própria exclusão social e suas formas de disgualdade. Por último, chegar a essas reflexões e considerações também é um marco de privilégio, pois se indagarmos quantos alunos de classa subalternizada conseguem fazer este exercício a resposta será: muito poucos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Constituição (1988). **Constituição da República Federativa do Brasil.** Promulgada em 05 de outubro de 1988. Brasília: Congresso Nacional, 1988.

________. Lei 9.394/1996 - **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**

BOURDIEU. Pierre. PASSERON, Jean-Claude. **A reprodução: elementos para uma teoria do sistema de ensino**. Petrópolis: Vozes, 2014.

CARRARA, Sérgio. **Educação, diferença, diversidade e desigualdade**. In: Gênero e diversidade na escola: formação de professoras/es em Gênero, orientação Sexual e Relações Étnico-Raciais. Livro de conteúdo. versão 2009. – Rio de Janeiro: CEPESC; Brasília: SPM, 2009.

DE SENA CORRÊA, Cirlei Marieta; MORETTI, Méricles Thadeu. Da educação problematizadora para a educação matemática crítica. **Revista Contrapontos**, v. 7, n. 3, p. 523-536, 2007.

DIAS, R. **"Introdução à Sociologia".** São Paulo: Pearson, 2005.

FORNER, Régis et al. Paulo Freire e educação matemática: reflexos sobre a formação do professor. 2005.

FRANKENSTEIN, Marilyn. Educação matemática crítica: uma aplicação da espistemologia de Paulo Freire. 1983.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 5ª ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GODOY, A. S. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades**. In: Revista de Administração de Empresas. São Paulo: v.35, n.2, p. 57-63, 1995.

GRAMSCI, Antonio. The formacion of intellectuals". The Modern Prince and Writings, 1957.

LOTÉRIO, Janilson. A dialogicidade na educação: uma experiência com a Matemática. **Revista da UNIFEBE**, v. 1, n. 09, 2011.

MÉSZÁROS, István. **A educação para além do capital.** Tradução Isa tavares. 2ª ed. São Paulo: Boitempo, 2008.

SACRISTAN, José Gimeno. **O currículo: uma reflexão sobre a prática**. 3. ed. Porto Alegre: ArtMed, 2000.

SAVIANI, Dermeval. Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações. 8ª ed. Campinas, SP. Autores associados, 2003.

VEIGA. Ilma Passos Alencasveijtro. **Projeto Político-Pedagógico da Escola: uma construção coletiva**. In: Projeto Político-Pedagógico da Escola: uma construção possível. Campinas: Papirus, 2002.

HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONSIDERAÇÕES DA LICENCIATURA ATÉ A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Data de aceite: 01/12/2022

Rudson Carlos da Silva Jovano
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)

Kesia Santana Machado de Sousa
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)

Danielly da Silva Francisco
Universidade Federal De Rondônia (UNIR)

Nério Aparecido Cardoso
Universidade Federal De Rondônia (UNIR)

RESUMO: A história da educação matemática é parte integrante da história da busca do homem pelo conhecimento. Diz respeito à experiência individual de quantidades e formas, tem caráter nacional específico em cada sociedade e se desenvolveu na cooperação internacional. Neste sentido, tem-se como objetivo geral apresentar a história da educação matemática. Assim, os objetivos específicos buscarão apresentar a história da educação matemática no mundo, descrever a educação matemática no Brasil e no estado de Rondônia e por fim, caracterizar a formação de professores no Brasil. Para este estudo, foi utilizado o método de revisão bibliográfica. Por fim, o presente trabalho deixa o tema em aberto. Fica proposto que, em um futuro, seja feita uma nova pesquisa com a finalidade de atualizar ou contextualizar os pontos que aqui foram abordados, a partir da aplicação de um estudo de caso.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática; Educação matemática; História da matemática.

1 I INTRODUÇÃO

A história da educação matemática é parte integrante da história da busca do homem pelo conhecimento. Diz respeito à experiência individual de quantidades e formas, tem caráter nacional específico em cada sociedade e se desenvolveu na cooperação internacional.

A educação matemática a partir de perspectivas históricas e contemporâneas, em essência, existem apenas algumas razões fundamentais para a educação matemática, eles incluem: (i) contribuir para o desenvolvimento tecnológico e socioeconômico da sociedade em geral, como tal ou em concorrência com outras sociedades/países; (ii) contribuir para a manutenção e desenvolvimento político, ideológico e cultural da sociedade, novamente como tal ou em competição com outras sociedades/países; (iii) proporcionar aos indivíduos pré-requisitos que os ajudem a enfrentar a vida nas diversas esferas em que vivem: educação, vida privada, vida social e vida como cidadão (D'AMBROSIO, 2012).

A matemática é uma criação humana, que vem se desenvolvendo há mais de quatro mil anos. Surgiu como uma resposta a diferentes necessidades sociais e econômicas de civilizações como Babilônia, Egípcia, Indiana, Chinesa, Grega, Romana, para citar apenas algumas. Em civilizações anteriores, a solução para tipos matemáticos de problemas estava na pesquisa empírica, enquanto em períodos posteriores foram aplicados métodos teóricos dedutivos (GONÇALVES, 2015).

O desenvolvimento histórico da matemática enfatiza que a matemática como ciência sempre esteve ligada ao contexto econômico e social e ao desenvolvimento da sociedade. A sociedade moderna é mais do que nunca dependente de mudanças tecnológicas e as fases de seu desenvolvimento não podem ser imaginadas sem a matemática. Ao observar o desenvolvimento de outras ciências como a física, a química ou a biologia, pode-se notar que a matemática desempenhou um papel importante em cada uma delas. Assim, compreende-se o mundo se baseia em teorias científicas e que a matemática representa uma parte importante do patrimônio cultural e científico humano (VALENTE, 2021).

Partindo deste contexto, a presente pesquisa buscará responder como ocorreu a história da educação matemática e sua importância na formação do professor?

Neste sentido, tem-se como objetivo geral apresentar a história da educação matemática. Assim, os objetivos específicos buscarão apresentar a história da educação matemática no mundo, descrever a educação matemática no Brasil e no estado de Rondônia e por fim, caracterizar a formação de professores no Brasil.

Com base no extenso conteúdo deste estudo sobre o tema, que agrega ou fortalece as informações anteriormente disponíveis na literatura sobre o desenvolvimento da educação matemática, esta pesquisa justifica sua importância.

Em decorrência de sua rica e acessível apresentação, assimilação e compreensão, a pesquisa também se justifica por agregar ao seu contexto social, onde pessoas com conhecimento técnico ou que não entendem e conhecem o contexto apresentado podem receber informações sobre a construção da educação matemática e seu papel no currículo do professor.

A investigação e análise das questões-chave sobre o tema e a prática de suas ações, que já estão publicadas na bibliografia, foram empregadas no desenvolvimento deste trabalho.

O objetivo da pesquisa bibliográfica é usar referências teóricas escritas em livros, periódicos, jornais e outras publicações para explicar e explorar um assunto. O contato direto com tudo o que já foi escrito, declarado ou registrado sobre um determinado tópico é o que essa forma de estudo foi projetada para fazer.

Para a coleta de dados para esta investigação, foram observados critérios de citação, pesquisas relevantes, artigos que apresentavam o tema em questão, artigos que não apresentavam o tema em questão, teses e dissertações, textos traduzidos, artigos e citações. A pré-análise foi seguida pela exploração do material, seguida pelo tratamento dos dados e interpretação para uma visão mais clara do objetivo do estudo.

2 I REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 História da educação matemática

A maioria das civilizações históricas, incluindo o Egito, a China, a civilização védica na Índia antes de 500 a.C., a Grécia antiga, o Império Romano, etc., incluíam matemática elementar em seus sistemas educacionais. Homens de grande posição, fortuna ou casta eram muitas vezes os únicos que podiam pagar a educação formal (MIGUEL; MIORIM, 2019).

O primeiro grupo profissional na história que teve que aplicar o conhecimento matemático foi o dos escribas. Sua atividade permitiu uma administração racional das sociedades na Mesopotâmia e no Egito. Muitos escritos sobre matemática e sua metodologia datam de 1800 a.C. (VALENTE, 2021).

O surgimento da matemática e da escrita se deve ao mesmo processo social de estabelecimento da escrituração das mercadorias entregues pela população na forma de impostos, registradas em tabuinhas de barro. O Papiro Matemático de Rhind e o Papiro Matemático de Moscou são famosos trabalhos antigos sobre matemática do Egito (D'AMBROSIO, 2012).

O Papiro Rhind, essencialmente um livro-texto antigo para estudantes egípcios, foi datado de aproximadamente 1650 a.C., mas acredita-se que seja uma cópia de um pergaminho ainda mais antigo (GARNICA; SOUZA, 2012).

No século V a.C., Sócrates poderia usar questionamentos hábeis para levar um menino escravo a descobrir que a área de um quadrado na diagonal de outro quadrado é o dobro do quadrado menor. A matemática pura surgiu primeiro nas cidades-estados gregas, com uma separação epistemológica e social estrita entre aritmética prática e matemática teórica (VALENTE, 2021).

As primeiras formas de uma certa educação geral se estabeleceram. Para os filhos de camadas sociais mais altas dentro dos cidadãos livres, havia alguma escolaridade elementar, incluindo aritmética, e a partir daí a possibilidade de estudar com foco na retórica, ou seguir uma educação mais filosófico-científica. Ao contrário da formação para a tão valorizada profissão de escriba na Mesopotâmia e no Egito, a formação de praticantes, como agrimensores, foi deixada à iniciativa individual ou à organização do respectivo grupo profissional (MIGUEL; MIORIM, 2019).

O texto matemático e o livro didático de matemática mais importante da antiguidade são os Elementos de Euclides, escritos por volta de 300 a.C. Ele apareceu em mais edições do que qualquer outro trabalho além da Bíblia. Nos Elementos, Euclides, que viveu em Alexandria no atual Egito, deduziu os princípios do que hoje é chamado de geometria euclidiana a partir de um pequeno conjunto de axiomas (GARNICA; SOUZA, 2012).

A realização de Euclides foi apresentá-los em um único quadro logicamente coerente, tornando-o fácil de usar e fácil de referenciar, incluindo um sistema de provas matemáticas rigorosas que permanece a base da matemática até os dias atuais. Os Elementos serviram como o principal livro didático para o ensino de matemática, especialmente geometria, desde a época de sua publicação até o final do século XIX ou início do século XX (MIGUEL; MIORIM, 2019).

No Império Romano, as características básicas das estruturas educacionais greco-helenistas foram adotadas e desenvolvidas. No final da Antiguidade Clássica, esses focos de educação geral foram conceituados como as sete artes liberais, definidas pela primeira vez por Platão, o trivium para a formação retórica e o quadrivium para a seleção daqueles que dariam continuidade às quatro disciplinas matemáticas: aritmética, geometria, música/harmonia e astronomia (D'AMBROSIO, 2012).

Nicômaco de Gerasa foi um neo-pitagórico e as ideias apresentadas em seu livro, Introdução à Aritmética, exerceram impacto nos livros didáticos de aritmética europeus no século XIX. As ideias de Nicômaco foram transmitidas à educação medieval europeia por Boécio (c. 480-524/5), que era um filósofo, nascido em Roma (GARNICA; SOUZA, 2012).

A China foi o primeiro estado a introduzir exames oficiais e sofisticados para ingressar em suas carreiras administrativas. A matemática foi uma das matérias para esses exames que se tornaram sistematicamente organizados no século VI para se tornarem prática por cerca de 700 anos. Havia um currículo bem estruturado, com programas e livros didáticos para cada uma das disciplinas do exame. Estes exames são de particular interesse para a aprendizagem da matemática, pois deram origem à primeira lista oficial de manuais admitidos à formação preparatória (MIGUEL; MIORIM, 2019).

A ascensão do Império Franco facilitou um certo avanço do aprendizado na Europa cristã da Idade Média. Em algumas escolas anexas aos mosteiros, ensinavam-se algumas partes das sete artes liberais, mas tendo em vista a futura carreira dos sacerdotes; os conhecimentos matemáticos ali ensinados centravam-se no cálculo, conhecimento astronômico básico para calcular o calendário dos feriados religiosos (GARNICA; SOUZA, 2012).

O interesse pela educação matemática no Ocidente cristão avançou ainda mais com as obras de Gerbert, mais tarde papa Silvestre II. Ele nasceu na França, mas foi educado na Catalunha, na Espanha, onde se familiarizou com a ciência islâmica (D'AMBROSIO, 2012).

Durante o século XII, o intercâmbio cultural entre as três maiores civilizações da

Europa e da bacia do Mediterrâneo – a judaica, a cristã e a islâmica – foi muito intenso. Para fins didáticos, três trabalhos foram importantes no processo de divulgação do sistema decimal (VALENTE, 2021).

Embora houvesse canais entre as civilizações no continente eurasiano, havia outras civilizações, por exemplo, no Hemisfério Ocidental, que desenvolveram sua própria educação matemática que não foi realizada por outros até muito mais tarde (GARNICA; SOUZA, 2012).

A civilização maia floresceu no México e áreas adjacentes e teve seu ponto alto entre os séculos III e IX. Eles tinham uma classe sacerdotal que estudava matemática. Seu sistema de numeração era um sistema misto, em um nível um sistema de valor de lugar com base vinte (MIGUEL; MIORIM, 2019).

A civilização inca floresceu no que hoje é o Peru e arredores de cerca de 1400 a 1560. Eles possuíam um sistema lógico de numeração de nós e acordes de registro do que é chamado de quipus. Havia mais civilizações com sua própria matemática avançada, mas à medida que essas civilizações foram destruídas, elas não tiveram impacto no quadro global da educação matemática (VALENTE, 2021).

No final da Idade Média, a partir do século XIII, as primeiras universidades começaram a funcionar na Europa Ocidental. Atraíam estudantes, que podiam pagar, de várias regiões da Europa para estudar direito, medicina ou teologia. Na Faculdade de Letras preparatória, as sete artes liberais eram ensinadas aos jovens. As palestras do quadrivium eram bastante marginais, ministradas como 'extraordinárias', enquanto o trivium constituía o núcleo das palestras 'comuns' (D'AMBROSIO, 2012).

As oportunidades ocupacionais foram ampliadas de atividades agrícolas e pastorais para incluir a participação em atividades de manufatura e comércio. Aprendizes de ofícios, como pedreiros, comerciantes e agiotas, podiam esperar aprender matemática prática que fosse relevante para sua profissão (MIGUEL; MIORIM, 2019).

Se um estudante desejasse aprender aritmética comercial, geralmente não ia para uma universidade onde a aritmética era ensinada como uma das disciplinas do quadrivium sob a influência da escolástica, mas procurava um mestre de contas, um homem habilidoso nas artes do cálculo comercial. computação, com quem estudar. Muitos deles aceitavam alunos para aulas particulares ou realizavam aulas formais em grupo de sua arte, o que deu origem a escolas de acerto de contas, cujo número aumentou rapidamente nas cidades comerciais e ao longo das rotas comerciais da Europa (GARNICA; SOUZA, 2012).

Este desenvolvimento originou-se juntamente com o Renascimento em cidades do norte da Itália, como Florença, Veneza, Milão e Bolonha. Como uma das principais áreas de comércio dos mercadores italianos era o Oriente Próximo, é natural supor que eles deveriam ter um interesse especial pelos métodos de contabilidade e matemática usados pelos árabes (D'AMBROSIO, 2012).

A ampla adoção do sistema de numeração arábica, que é notada pela primeira vez entre os comerciantes italianos do século XIII, foi, sem dúvida, resultado de seus estreitos contatos com o mundo árabe e das novas demandas criadas por seu sistema cada vez mais complexo de organização empresarial (MIGUEL; MIORIM, 2019).

A revolução comercial criou a necessidade de um novo sistema matemático para acompanhar os novos métodos de organização empresarial e o sistema árabe atendeu perfeitamente a essa necessidade (VALENTE, 2021).

2.2 A educação matemática no Brasil

Havia alternativas à filosofia modernista quando se tratava da disciplina necessária à matemática no ensino fundamental, que compreendia quatro anos do ensino médio, em 1986. Suas qualidades se opunham àquelas que prevaleciam durante a preponderância de noções ligadas à cultura contemporânea. matemática, uma vez que estavam centrados em três temas-chave: números, medida e geometria (GONÇALVES, 2015).

Além do rigor e precisão, há um forte foco no significado da geometria e na retirada do uso de conjuntos, bem como o uso da linguagem simbólica e uma abordagem histórica do assunto (BICUDO, 2021).

Acontecimentos históricos alternativos tiveram uma influência significativa na educação matemática secundária brasileira e na formação de professores ao longo das duas últimas décadas do século XX. A partir de 1971, as faculdades começaram a oferecer programas de matemática em nível de pós-graduação, e vários estados agora oferecem cursos especializados, de mestrado e doutorado em ensino de matemática (DIAS et al., 2011).

Houve também encontros estaduais e nacionais sobre educação matemática de 1987 a 1988, que foram cruciais, e em 1988 foi fundada uma organização cívica de caráter científico e cultural chamada Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Campos de estudo em educação matemática Os envolvidos no ensino de matemática nas instituições de ensino fundamental e médio do Brasil compõem a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBME) (GONÇALVES, 2015).

A legislação vigente para a educação nacional foi adotada em 1996, que inclui o arcabouço da educação no país, bem como suas características básicas. De acordo com as propostas curriculares mais recentes, as mudanças nas recomendações para o ensino da matemática foram provocadas por diversos fatores, incluindo a crise do Movimento da Nova Matemática, bem como uma quantidade significativa de pesquisas que examinaram muitas tendências e os mais diversos contextos em que a matemática é ensinado (BICUDO, 2021).

Dentre eles, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, lançados em 1997-1998, são os mais significativos. A educação secundária, de jovens e adultos e a educação indígena receberam ideias semelhantes logo depois. Desde o final da década de 1970, a pesquisa acadêmica em educação matemática no Brasil e no exterior foi incluída nessas recomendações (DIAS et al., 2011).

A incorporação de tecnologias de informação e comunicação (TICs), jogos e materiais tangíveis (como manipuláveis), a história da matemática e o objetivo de dar às crianças a aplicação da matemática no mundo real na escola primária são tópicos semelhantes (GONÇALVES, 2015).

Existem novos materiais curriculares, chamados de Base Nacional Comum Curricular, que incluem todos os tópicos da educação básica no Brasil, incluindo aritmética do ensino médio. Ao contrário do Núcleo Comum Curricular Nacional, os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam princípios mais amplos, enquanto este último define detalhadamente a disciplina a ser apresentada em cada ano letivo (BICUDO, 2021).

2.2.1 Breve histórico do curso de licenciatura em matemática em Ji-Paraná Rondônia

Em todo território nacional, a história dos cursos de matemática passaram por várias evoluções e marcos históricos ao longo dos anos no Brasil, isso fica evidente no trabalho proposto por Albuquerque (2014), estudo este que demonstra a trajetória histórica da formação de professores de matemática na Universidade Federal de Rondônia em Ji-Paraná, destacando a evolução histórica entre os anos e 1988 até 2012.

Albuquerque (2014, p. 37) cita que:

> As pesquisas realizadas estão permeadas das concepções advindas do paradigma da nova história, geralmente inscritas, dentre outras, nas áreas de História da Educação, História das Instituições Educacionais, História das Disciplinas Escolares, e mais especificamente na área de matemática, História da Matemática e História da Educação Matemática, porém,[...] o campo da história da educação matemática tem crescido consideravelmente, a ponto de ultrapassar as produções relativas ao campo da história na educação matemática.

Na perspectiva da evolução histórica da matemática no município de Ji-Paraná, o autor Candido (2015, p. 14) cita que o campus específico para tal, “foi criado na década de 80 para atender as necessidades da região que se encontrava, então, em larga expansão.”

O autor ainda específica que:

> Hoje o Campus conta com 7 cursos, entre eles o Curso de Licenciatura em Matemática que está dentro do departamento de Matemática e Estatística - DME. O curso de licenciatura em matemática é oriundo do curso de licenciatura em ciências com habilitação em matemática, que juntamente com o curso de pedagogia foram os responsáveis pelo crescimento do Campus (CANDIDO, 2015, p. 10).

Segundo Ruezzene (2012, p. 85-87):

> Em Ji-Paraná, o Curso de Ciências foi autorizado a funcionar por meio do Conselho Federal de Educação, Parecer nº 1050/87, assinado em 1 de dezembro de 1987 (Anexo 7), com carga horária prevista de 1980 horas, sendo integralizada em três anos. Apesar das inúmeras dificuldades, o

reconhecimento do Curso de Ciências – Licenciatura de 1º Grau, em Ji-Paraná, ocorreu em 21 de julho de 1995, por meio da Portaria nº 873/95.

Este marco histórico que ocorreu em Ji-Paraná, é retrato na maioria dos *campus* de matemática no Brasil, sendo cursos essenciais para o desenvolvimento da sociedade, porém que não recebem o devida atenção dos meios de desenvolvimento da educação no país, fato evidente no período em que o curso de matemática em Ji-Paraná foi estabelecido.

Em conformidade com o que Gilcimar pesquisou em seu trabalho há uma tentativa de oferecer um curso de Licenciatura em Matemática no estado de Rondônia com as mesmas características de um curso localizado num grande centro do país. Nessa perspectiva, as especificidades regionais nem sempre são contempladas nos projetos desses cursos. Com a fnalidade de investigação das licenciaturas em matemática em Rondônia se constituiu um processo dinâmico e constante, pois, os cursos investigados são sujeitos a ações externas que influenciam suas mudanças e ou suas continuidades. A formação que privilegia o oferecimento de disciplinas específicas devem ser fortalecidas e melhoradas. Já as disciplinas pedagógicas a maior parte de sua carga horária se concentra nos três últimos semestres do curso. As mudanças que permanecem relaciona-se aos dispositivos legais que regulamentam a formação de professor.

Por conseguinte, as pesquisas dizem que a medida adotada pelo curso em Ji-Paraná se constitui numa forma paliativa de enfrentar a situação na medida em que as políticas públicas para a educação estadual e a Universidade não estabelecem uma relação de diálogo. Produzir políticas públicas educacionais para o Estado sem discutir com a Universidade, bem como com os cursos de Licenciatura em Matemática e, desse modo, desconsiderar a realidade da educação básica, desaguará em problemas futuros para ambos. A troca de experiência pode facilitar a formação dos futuros professores de Matemática.

Por isso, é notável que muito se tem avançado em relação à habilitação para o ensino de Matemática no estado de Rondônia, porém ainda há muito a se fazer. Atualmente, o grande debate entre os docentes que atuam nos curso de Licenciatura em Matemática no estado de Rondônia se constitui em função da insatisfação da atual realidade do Ensino Médio no Estado, pois a decadência dos estudos ainda se referendo ao ensino básico que é insuficiente para a continuação no nível superior. O que se aponta é a integração e aprimoramento deste ensino para que os alunos ao entrarem no ensino superior estejam preparados de fato para contextualizxar o nível que a faculdade oferece.

Por isso, a formação de matemática é de suma importância para o estado de Rondônia e obviamente precisa ser aperfeiçoada. A Matemática faz parte de todos os aspectos da vida. do conteúdo básico ensinado nas escolas até os conceitos mais avançados, os profissionais que construíram carreira como professor de Matemática estão sempre presentes. É uma especialidade bastante rica pra quem ama números, resolução de problemas e, claro, ensinar.

Embora, o curso de Licenciatura em Matemática seja de suma importância para o estado de Rondônia, as universidades ainda têm que lidar com a evasão no curso.

2.3 A formação de professores de matemática no Brasil

Os professores são o terceiro maior subgrupo ocupacional do Brasil. Aproximadamente dois milhões de professores, 80% dos quais no setor de escolas públicas, atendem a 51 milhões de alunos em escolas de educação básica. Portanto, não surpreende que a formação dessa grande categoria profissional influencie fortemente o crescimento do ensino superior no Brasil (DE JESUS BRITO, 2017).

Do total de cursos inscritos pelo Censo do Ensino Superior de 2011, 26% foram dedicados à formação de professores da educação básica. As faculdades de professores são as segundas escolas de ensino superior mais comuns no Brasil, totalizando 1.801 e a maioria entre as que oferecem credenciamento de professores (OLIVEIRA, 2017).

A expansão dos cursos de formação de professores em todo o país segue, em termos gerais, a expansão das oportunidades educacionais para a população. Como um país atrasado para introduzir a escolaridade, a frequência escolar fundamental universal obrigatória só foi alcançada na virada do milênio. Em 2006, a escolaridade obrigatória foi ampliada de oito para nove anos e, posteriormente, a Emenda Constitucional 59/2009 aumentou a escolaridade obrigatória para crianças de 4 a 17 anos, o que corresponde da pré-escola ao final do ensino médio (BÚRIGO; DALCIN; FISCHER, 2017).

Além disso, a educação como um direito de crianças pequenas desde os primeiros meses de vida, conforme determinado pela Constituição Federal de 1988, também tornou um dever público oferecer cuidados de primeira infância para crianças de até três anos de idade. Embora a taxa de natalidade tenha diminuído drasticamente no Brasil e esteja abaixo da taxa de reposição, a necessidade de ampliar as oportunidades de escolarização é grande, pois é a forma dominante pela qual as crianças e os adolescentes são educadas nas sociedades contemporâneas (DE JESUS BRITO, 2017).

A educação básica, portanto, representa um terreno fértil para a formação de professores e certamente fornece um mercado de trabalho para professores de proporções sem precedentes. Há, no entanto, dinâmicas dentro do sistema educacional e no mercado que expandem ou retraem a oferta e demanda por cursos que educam os profissionais docentes (OLIVEIRA, 2017).

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1996 (BRASIL, 1996) tem servido como uma estrutura regulatória decisiva para a formação de professores nas últimas décadas. Seguindo uma tendência global, esta lei determina que os professores de todos os níveis de ensino devem ter um grau de ensino superior. Não sem razão, a mesma lei considera a educação a distância como uma forma de educação formal em todos os níveis de ensino, o que favorece a expansão da formação necessária de professores.

Embora o credenciamento de professores em cursos de ensino superior esteja se tornando a norma em todo o Brasil, a qualidade da educação básica não pode ser melhorada simplesmente pelo grau de oferta aos professores. Existem problemas que surgem da expansão dos cursos, que também estão relacionados à sua qualidade (BÚRIGO; DALCIN; FISCHER, 2017).

Desde meados dos anos setenta, tem havido uma crescente discussão internacional sobre quais qualificações profissionais os professores de matemática precisam e que tipo de formação é adequada para desenvolver essas qualificações. Não é por acaso que essa discussão surgiu na década de 70 porque, naquela época, as mudanças sociais em muitos países ao redor do mundo trouxeram discórdia entre duas filosofias de formação de professores bastante diferentes (DE JESUS BRITO, 2017).

A “matemática” não deve ser vista dentro dos limites estreitos de uma disciplina especializada que é representada exclusivamente pelos departamentos de matemática pura das universidades; em vez disso, deve ser visto em todo o espectro de suas relações com a ciência, a tecnologia, as humanidades e a vida humana (OLIVEIRA, 2017).

Algumas características da formação do professor desempenham um papel crítico na transmissão da informação matemática. “Emocional/afetivo, político e saber” são as três principais facetas das “qualidades” desse educador. Como resultado, pode-se concluir que a educação é um ato político devido às muitas conexões entre os processos de ensino e aprendizagem da matemática (BÚRIGO; DALCIN; FISCHER, 2017).

Acredita-se que a formação de professores tenha um impacto significativo em sua capacidade de perceber, desenvolver e organizar informações didáticas distintas, as quais combinadas serão expressas em sua prática cotidiana como professores. Não de forma simples, mas indissociável, a formação de professores é responsável pela criação de conhecimento profissional, pois as informações não poderiam ser continuamente sistematizadas na ausência de procedimentos de formação (DE JESUS BRITO, 2017).

O currículo de matemática, conforme determina o artigo 26 da LDB-9.394/96, o Ministério da Educação e Cultura (MEC) desenvolveu em 1998 os “Parâmetros Curriculares Nacionais” (PCNs) para o ensino fundamental e em 1999 os PCNs para o ensino médio, e sistemas de avaliação externa com eles. Houve também o Exame Nacional do Ensino Fundamental e Médio (ENEM) e o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais ditam como devem ser ensinadas a história da matemática, a resolução de problemas, a etnomatemática e a técnica de jogos e ferramentas didáticas.

3 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio desta pesquisa pode-se concluir que a história da matemática no Brasil ao longo dos anos vem evoluindo, de forma a proporcionar para alunos e professores novas perspectivas e novos meios de ensino e aprendizado.

Quando observado os artigos e obras avaliadas neste trabalho, concluiu-se que a matemática é uma disciplina recém estudada e valorizada no cenário nacional, o que mostra o quão importante é a abordagem temática deste assunto.

Esperamos que que os cursos de Licenciatura em Matemática sejam valorizados não somente pela comunidade, mas também pelos governantes e assim evidenciar aspectos educacionais vindouras para o ensino superior.

Desta forma, concluiu-se então que estudar a história da matemática, e citá-la, como apresentado nesta pesquisa, é de suma importância afim de incentivar novas pesquisas e novos métodos de desenvolvimento deste curso indispensável para o crescimento intelectual de qualquer pessoa.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, M. G. **Da formação polivalente ao movimento da educação matemática:** uma trajetória histórica da Formação de Professores de Matemática na Universidade Federal de Rondônia em Ji-Paraná (1988-2012). Universidade Federal De Mato Grosso Rede Amazônica De Educação Em Ciências E Matemática Doutorado Em Educação Em Ciências E Matemática, 2014.

BICUDO, M. A. V. (Ed.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.** Editora Unesp, 2021.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. **Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.** Disponível em: <www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 03 de agosto de 2022.

BÚRIGO, E. Z; DALCIN, A; FISCHER, M. C. B. História da Educação Matemática: a institucionalização do campo em um curso de licenciatura. **Cadernos de história da educação.** Uberlândia. Vol. 16, n. 3 (set./dez. 2017), p. 619-639, 2017.

CANDIDO, L. S. **Uma construção histórica do curso de licenciatura em matemática da universidade federal de Rondônia campus de Ji-Paraná.** Universidade Estadual Paulista "Júlio De Mesquita Filho". Instituto DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS, 2015.

D'AMBROSIO, U. Tendências e perspectivas historiográficas e novos desafios na História da Matemática e na Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 14, n. 3, p. 336-347, 2012.

DE JESUS BRITO, A**.** A História da Matemática e da Educação Matemática na formação de professores. **Educação Matemática em Revista**, n. 22, p. 11-15, 2017.

DIAS, A. L. M. et al. **Uma história da educação matemática na Bahia**. In: Simpósio Nacional de História, v. 26, 2011.

GARNICA, A. V. M; SOUZA, L. A. **Elementos de história da educação matemática.** Coleção PROPG Digital (Unesp), 2012.

GONÇALVES, F. D. S. **História da Educação Matemática no Brasil: contribuições das pesquisas para professores da educação básica.** 2015. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

MIGUEL, A; MIORIM, M. A. **História na educação matemática**. Autêntica Editora, 2019.

OLIVEIRA, M. C. A. História da educação matemática como disciplina na formação de professores que ensinam Matemática. **Cadernos de História da Educação**, v.16, n.3, p.653-665, set.-dez. 2017

RUEZZENE, G. B. **Os cursos de licenciatura em matemática no estado de Rondônia: um panorama histórico.** Universidade Federal De Mato Grosso Instituto De Educação Programa De Pós-Graduação Em Educação, 2012.

VALENTE, W. R. História da educação matemática. **Cadernos CEDES**, v. 41, p. 164-167, 2021.

CAPÍTULO 3

UMA DISCUSSÃO SOBRE OS ASPECTOS METODOLÓGICOS DAS INSVESTIGAÇÕES DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA NO GRUPO DE ESTUDOS EM EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL (GREF)

Data de aceite: 01/12/2022

Rudson Carlos da Silva Jovano
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)

Nério Aparecido Cardoso
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)

Ana Fanny Benzi de Oliveira Bastos
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)

Danielly da Silva Francisco
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)

Késia Santana Machado de Sousa
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)

RESUMO: Este estudo tem como objetivo analisar os aspectos metodológicos empregados em pesquisas que se relacionam ao ensino e aprendizagem em Educação Estatística, realizadas por integrantes do Grupo de Estudos em Educação Estatística no Ensino Fundamental (GREF). Olhar para essas questões se destaca como um fator importante, pois nos mostra os avanços para aplicação e compreensão dos métodos de pesquisa e no próprio ensino das instituições escolares. A metodologia utilizada trata-se de um estudo de caso descritivo, tendo como base a bibliografia e sem a manipulação de variáveis pelo pesquisador. Pode-se concluir que nos estudos analisados destaca-se o emprego de natureza qualitativa e quanti-quali e objetivo exploratório. Também foi observado a predominância do estudo de campo, com a prevalência do emprego de entrevistas, formulários e questionários. Cabe ressaltar, que as metodologias de pesquisa podem variar mesmo tratando-se de pesquisas que envolvam um único campo de estudo. Porém, nota-se também que a similaridade nos temas e os objetivos de cada pesquisa pode contribuir para a definição da metodologia utilizada. Vale destacar, que as conclusões aqui levantadas são iniciais e apontam para a importância da realização de novos estudos sobre o tema.

PALAVRAS-CHAVE: GREF. Educação estatística. Procedimentos metodológicos.

INTRODUÇÃO

Para a realização de uma pesquisa é preciso ter sempre em mente os objetivos que se pretende alcançar. Logo, esses irão contribuir na produção, interpretação e avaliação sistemática dos dados. Em outras palavras, esse movimento de maneira planejada e amparada por um método é chamado de “pesquisa científica”, sendo realizada pelo(a) pesquisador(a).

A pesquisa científica é um processo dinâmico ou uma abordagem racional que permite o exame dos fenômenos, dos problemas a serem resolvidos e a obtenção de respostas (ou questionamentos outros) a partir das investigações. Este processo caracteriza-se pelo fato de ser sistemático e rigoroso e conduzir à aquisição de novos conhecimentos (PEREIRA *et al.,* 2018).

As funções da pesquisa científica podem ser destacadas como: descrever, explicar, compreender, controlar e prever fatos, fenômenos e comportamento. O rigor científico é pautado pela noção de objetividade, ou seja, o pesquisador lida apenas com fatos dentro de um quadro definido pela comunidade científica. Antes de iniciar a pesquisa científica, o pesquisador deve definir o assunto, fazer o planejamento e especificar a metodologia (GALVÃO, 2010).

Pesquisar é uma busca lógica e sistemática por informações novas e úteis sobre um determinado tópico. A pesquisa é importante tanto em campos científicos quanto não científicos. No cotidiano, novos problemas, eventos, fenômenos e processos ocorrem todos os dias. Na prática, soluções e sugestões implementáveis são necessárias para lidar com os novos problemas que surgem. Os cientistas devem realizar pesquisas sobre eles e encontrar suas causas, soluções, explicações e aplicações (MANZATO; SANTOS, 2012).

Dessa forma, diversos grupos se formaram ao longo dos anos a fim de investigar áreas específicas, como ciências médicas, métodos de ensino, impactos sociais e diversos outros campos. Entre eles, cita-se um grupo de estudos brasileiro, fundado na região nordeste do país, o Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental (GREF) da Universidade Federal de Pernambuco.

O ensino-aprendizagem de estatística tem chamado atenção nos últimos anos, frente ao seu potencial educacional e os resultados alcançados em sua aplicação em sala de aula. Dessa forma, a compreensão de seu emprego no dia-a-dia das instituições de ensino é fundamental para alcançar melhorias em sua prática.

Neste artigo, o objetivo proposto é analisar os aspectos metodológicos empregados em pesquisas que se relacionam ao ensino e aprendizagem em Educação Estatística, realizadas por integrantes do Grupo de Estudos em Educação Estatística no Ensino Fundamental (GREF). Olhar para essas questões se destaca como um fator importante, pois nos mostra os avanços na aplicação e compreensão dos métodos de pesquisa e do próprio ensino da Estatística nas instituições escolares.

GRUPO DE ESTUDOS EM EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL - GREF

Desde o ano de 2008, a Universidade Federal de Pernambuco coordena o Grupo de Estudo em Educação Estatística no Ensino Fundamental (GREF), sendo este parte do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da referida universidade (GREF, 2021).

O GREF defende que a formação estatística de alunos e professores é essencial para o desenvolvimento acadêmico. Segundo ele, é uma das formas de aproximá-los de investigações sistemáticas. Dessa forma, o contato e experiência com os processos investigativos auxiliam na compreensão de como se desenvolve uma pesquisa científica. Neste sentido, a integração e ensino do “pesquisar” junto aos alunos é uma forma de integrar e envolver a probabilidade e estatísticas à educação básica e a formação inicial e/ou continuada de professores da disciplina de matemática (GREF, 2021).

Para esta finalidade, o GREF tem como foco a investigação de variados métodos e ferramentas de ensino e aprendizagem da estatística e da probabilidade, abrangendo os mais variados níveis de ensino. Sejam eles presentes em livros, em experimentos, tecnologias, conceitos, procedimentos de ensino, dentre outros, pois as investigações realizadas pelo GREF comumente envolvem estudos experimentais, de campo, análises de ocorrências no ensino e análises estatísticas (GREF, 2021).

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Os modos de investigação são determinados pelos paradigmas de pesquisa e pelos objetivos do pesquisador. Este último, pode escolher entre três modos de investigação/natureza: a abordagem quantitativa, a abordagem qualitativa e a abordagem mista.

A abordagem quantitativa visa coletar dados observáveis e quantificáveis. Este tipo de pesquisa consiste em descrever, explicar, controlar e predizer a partir da observação de fatos e acontecimentos “positivos”, ou seja, existindo independentemente do pesquisador, fatos objetivos. Este método baseia-se em instrumentos de pesquisa quantitativa ou técnicas de coleta de dados cuja confiabilidade e validade são, em princípio, garantidas (PASCHOARELLI; MEDOLA; BONFIM, 2015).

Com isso, resulta em dados quantificados que permitem análises descritivas, tabelas e gráficos, análises estatísticas para pesquisar ligações entre variáveis ou fatores, análises de correlação ou associação, etc. Para aproximar as propostas teóricas da realidade, ou para confrontar as hipóteses com a observação, é necessário operacionalizar os conceitos, ou seja, estabelecer uma relação sistemática entre os conceitos e a realidade observável, por meio de indicadores (MATTAR; RAMOS, 2021).

Pode-se definir os indicadores como sinais, comportamentos ou reações diretamente observáveis pelos quais identifica-se o nível da realidade e as dimensões de um conceito. Para operacionalizar um conceito, é preciso associar-lhe um ou mais indicadores que o tornem possível distinguir com precisão as variações observadas na realidade do conceito. Distinguir as variações significa medir: a operacionalização de um conceito leva, portanto, à medição (PASCHOARELLI; MEDOLA; BONFIM, 2015).

Já na abordagem qualitativa, o pesquisador parte de uma situação concreta envolvendo um determinado fenômeno que se trata em compreender e não de demonstrar, provar ou controlar. Ele quer dar sentido ao fenômeno por meio ou além da observação, da descrição, da interpretação e da apreciação do contexto e do fenômeno como ele é apresentado. Este método usa técnicas de pesquisa qualitativa para estudar fatos específicos (estudos de caso, observação, entrevistas semiestruturadas ou não estruturadas, etc.). O modo qualitativo fornece dados de conteúdo, não dados criptografados (CRESWELL; CRESWELL, 2021).

A terceira abordagem é uma combinação das duas anteriores. Permite ao pesquisador mobilizar tanto as vantagens do modo quantitativo quanto as do modo qualitativo. Esse comportamento ajuda a dominar o fenômeno em todas as suas dimensões. As duas abordagens não são, portanto, opostas. Eles se complementam: A abordagem qualitativa, por observação, por entrevista, por protocolos, etc., permite coletar uma grande quantidade de informações (MATTAR; RAMOS, 2021).

Além disso, três objetivos de pesquisa se destacam na literatura, sendo eles exploratório, descritivo e explicativo. O objetivo exploratório pode envolver uma pesquisa bibliográfica ou a realização de entrevistas com grupos focais. A exploração de novos fenômenos, desta forma, pode ajudar na necessidade do pesquisador por um melhor entendimento. Pode testar a viabilidade de um estudo mais extenso ou determinar os melhores métodos a serem usados em um estudo subsequente. Por essas razões, a pesquisa exploratória tem um foco amplo e raramente fornece respostas definitivas para questões específicas de pesquisa. O objetivo da pesquisa exploratória é identificar questões-chave e variáveis-chave (REICHARDT; FRASSON; SANTOS JUNIOR, 2017).

O objetivo descritivo é direcionado a estudar "o quê" e quantos destes "o quê". Assim, é direcionado para responder a questões como: "O que é isto?". Seu objetivo principal é compreender ou explicar relacionamentos. Ele usa correlações para estudar relações entre dimensões ou características de indivíduos, grupos, situações ou eventos. Já o objetivo explicativo explica como as partes de um fenômeno estão relacionadas entre si e faz a pergunta "Por quê" (ZANANDREA *et al.,* 2017).

Com os avanços e aumento das pesquisas científicas, diversos métodos ou procedimentos foram sendo acrescentados e utilizados, entre eles a revisão bibliográfica, documental/histórico, *ex-post facto*, experimental, estudo de caso, estudo de campo, pesquisa-ação, experimental.

Ao longo dos anos, vários tipos de revisões bibliográficas ou revisões da literatura surgiram, mas os quatro tipos principais são: tradicional ou narrativa, sistemática, meta-análise e meta-síntese.

O objetivo principal de uma revisão bibliográfica tradicional ou narrativa é analisar e resumir um corpo de literatura. Isso é importante para destacar novos fluxos de pesquisa, identificar lacunas ou reconhecer inconsistências. Este tipo de revisão de literatura pode ajudar a refinar, enfocar e moldar questões de pesquisa, bem como no desenvolvimento de estruturas teóricas e conceituais (GIL, 2009).

A revisão sistemática da literatura, por outro lado, empreende uma abordagem mais rigorosa para revisar a literatura, talvez porque esse tipo de revisão seja frequentemente usado para responder as questões de pesquisa altamente estruturadas e específicas (GOMES; CAMINHA, 2014).

A revisão bibliográfica de meta-análise envolve pegar os achados da literatura escolhida e analisá-los usando procedimentos estatísticos padronizados. Os métodos de meta-análise ajudam a tirar conclusões e detectar padrões e relações entre os resultados. Eles também discutem a meta-síntese, que é um procedimento não estatístico; em vez disso, avalia e analisa os resultados de estudos qualitativos e visa construir em conceitos e interpretações anteriores (GIL, 2009).

Embora a pesquisa histórica/documental não possa responder a alguns dos testes do método científico interpretado no sentido específico de seu uso nas ciências físicas (não pode depender, por exemplo, da observação direta ou da experimentação, mas deve fazer uso de relatórios que não podem ser repetidos), qualifica-se como um empreendimento científico do ponto de vista de sua adesão, aos mesmos princípios e à mesma bolsa geral que caracterizam toda a pesquisa científica (KRIPKA, SCHELLER; BONOTTO, 2015).

O ato de pesquisa histórica envolve a identificação e limitação de um problema ou área de estudo, ou ainda a formulação de uma hipótese (ou conjunto de questões); a coleta, organização, verificação, validação, análise e seleção de dados; testar a hipótese (ou responder às perguntas) quando apropriado e escrever um relatório de pesquisa. Essa sequência leva a uma nova compreensão do passado e da sua relevância para o presente e o futuro (RODRIGUES, 2017).

Embora seja uma das áreas mais difíceis de realizar pesquisas, os resultados da investigação neste domínio podem trazer grandes benefícios aos educadores e à comunidade em geral. Pode, por exemplo, fornecer percepções sobre alguns problemas educacionais que não poderiam ser alcançados por nenhum outro meio. Além disso, o estudo histórico de uma ideia ou instituição educacional pode fazer muito para ajudar a entender como o sistema educacional atual surgiu. Esse tipo de compreensão pode, por sua vez, ajudar a estabelecer uma base sólida para um maior progresso de mudança (KRIPKA; SCHELLER; BONOTTO, 2015).

A pesquisa *ex-post facto* é um tipo de pesquisa em que o pesquisador prevê as possíveis causas de um efeito que já ocorreu. É um ponto interessante notar que o pesquisador prevê uma causa com base em um efeito controlado (uma vez que nenhuma variação pode ser feita no efeito que já ocorreu com base na variável independente ou na causa) (FANTINATO, 2015).

Assim, uma pesquisa *ex-post facto* pode ser definida como uma investigação com base empírica que não envolve o controle direto dos pesquisadores sobre as variáveis independentes, porque elas já levaram a efeitos que nenhuma Pesquisa *Ex-Post Facto* pode ser manipulada. As conclusões sobre a relação entre as variáveis são inferidas sem intervir ou variar a variável independente ou dependente. O termo *ex-post facto* é usado para se referir a um experimento no qual um pesquisador, em vez de encontrar um tratamento, examina o efeito de um tratamento que ocorre naturalmente após sua ocorrência. Em outras palavras, é um estudo que tenta descobrir as condições causais pré-existentes entre os grupos (FANTINATO, 2015).

A pesquisa experimental é usada principalmente em disciplinas de ciências como física, química, medicina, biologia, etc. A experiência requer duas variáveis: uma variável independente e a outra variável dependente. É importante que na pesquisa experimental a variável independente seja manipulada e o efeito da manipulação seja observado na variável dependente (FANTINATO, 2015).

Todos os outros fatores estranhos são totalmente controlados dentro do laboratório. É baseado em um projeto de pesquisa que usa manipulação e testes controlados para entender os processos causais. Geralmente, pode-se manipular uma ou mais variáveis para determinar seu efeito em uma variável dependente. Em outras palavras, é uma abordagem sistemática e científica da pesquisa em que o pesquisador manipula uma ou mais variáveis e controla e mede as outras variáveis (FANTINATO, 2015).

No campo das ciências sociais, o estudo de caso é uma ferramenta importante para uma boa metodologia de pesquisa. Pode ser aplicado em uma única disciplina, grupos pequenos e grandes, uma classe dentro de uma escola, uma escola com em uma cidade ou evento. Os métodos de estudo de caso envolvem um estudo aprofundado, exame longitudinal de um único assunto ou evento e podem ser descritivos ou explicativos. Um estudo de caso não é diferente de um método de pesquisa, mas em vez de coletar dados sobre alguns fatores de um grande número de unidades, o pesquisador faz um estudo aprofundado e intensivo de um único assunto. É limitado em escopo, mas é mais exaustivo e informativo em comparação com a pesquisa (ANDRÉ, 2013).

O estudo de caso fornece uma maneira sistemática e científica de perceber ou examinar eventos, coletar dados, analisar informações e preparar um relatório. Como resultado, o pesquisador pode obter uma compreensão apurada de por que a instância aconteceu daquela forma e o que pode ser importante examinar mais extensivamente em pesquisas futuras. Os estudos de caso se prestam tanto à geração quanto ao teste de hipóteses (ANDRÉ, 2013).

Os estudos de campo são investigações científicas *ex-post* destinadas a descobrir as relações e interações entre variáveis sociológicas, psicológicas e educacionais em situações sociais. Em estudos científicos, grandes ou pequenos, eles sistematicamente buscam relações e hipóteses de teste, que são *ex-post facto*, que são feitas em situações da vida real, serão considerados fator *ex post* de campo, que é feito em situações da vida real, sendo considerado campo de estudos. O investigador em um estudo de campo analisa a situação social ou institucional e então estuda as relações entre as atitudes, valores, percepções e comportamentos de indivíduos e grupos na situação (FANTINATO, 2015).

O realismo dos estudos de campo é óbvio. Eles são altamente heurísticos. Uma das dificuldades de pesquisa dos estudos de campo é mantê-lo contido dentro dos limites de seu problema. O campo é rico em potencialidades de descoberta. Depois de começar a coletar dados, ele pode tropeçar em muitas noções interessantes que podem refletir o curso da investigação (FANTINATO, 2015).

Na pesquisa-ação, o pesquisador enfatiza um problema que é imediato, urgente e tem aplicabilidade local. Assim, o pesquisador aqui se concentra nas consequências imediatas e aplicações de um problema e não sobre aplicação geral ou universal, nem no desenvolvimento de uma teoria ou modelo. Um professor pode realizar uma pesquisa, saber as razões subjacentes aos hábitos não saudáveis de sala de aula, para que o resultado imediato possa beneficiar os alunos locais (THIOLLENT; COLETE, 2014).

Embora os dados possam ser valiosos, muitas informações são difíceis de controlar e os dados errados são inúteis. O método certo de coleta de dados pode significar a diferença entre percepções úteis e desorientação que desperdiça tempo. Felizmente, existem várias ferramentas disponíveis para a coleta de dados. Os seis principais métodos de coleta de dados na pesquisa científica são:

- Entrevistas;
- Formulários e pesquisas;
- Observações;
- Documentos e registros;
- Grupos de foco;
- Histórias orais.

No método de coleta por entrevistas, o entrevistador faz perguntas aos entrevistados. Nos casos em que as entrevistas são realizadas pessoalmente, o entrevistador faz uma série de perguntas ao entrevistado pessoalmente e anota as respostas. Caso não seja viável um encontro presencial, o entrevistador pode realizar uma entrevista por telefone ou utilizar ferramentas *online* para coletar as respostas (MERCADO, 2012).

No caso de formulários e pesquisas, as pesquisas são compostas por uma questão de escolha única ou múltipla. As pesquisas *online* também podem ser incorporadas em várias plataformas. Um questionário trata-se de um conjunto de perguntas abertas ou fechadas, geralmente. Seus respondentes respondem baseados em suas próprias experiências e compreensão do assunto em questão (MAZUCATO *et al.* 2018).

O método observacional envolve a coleta de informações sem fazer perguntas. Esse método é mais subjetivo, pois exige que o pesquisador, ou observador, acrescente seu julgamento aos dados. Mas em algumas circunstâncias o risco de viés é mínimo. Em geral, a observação pode determinar a dinâmica de uma situação, que geralmente não pode ser medida por meio de outras técnicas de coleta de dados. A observação também pode ser combinada com informações adicionais, como vídeo (HOCAYEN DA SILVA, 2014).

A pesquisa baseada em documentos e registros usa dados existentes para um estudo. Usar documentos e registros pode ser eficiente e mais acessível financeiramente, uma vez que se utiliza predominantemente pesquisas que já foram concluídas. No entanto, como o pesquisador tem menos controle sobre os resultados, documentos e registros podem ser uma fonte de dados incompleta (FANTINATO, 2015).

No caso do grupo focal ou grupo de foco, trata-se de uma coleta de dados onde vários indivíduos são envolvidos, seja por meio de entrevistas, pesquisa ou observações (HOCAYEN DA SILVA, 2014).

Já a história oral é definida como o registro, preservação e interpretação de informações históricas com base nas opiniões e experiências pessoais de pessoas que estiveram envolvidas nos eventos. Ao contrário das entrevistas e pesquisas, as histórias orais estão ligadas a um único fenômeno. Trata-se de uma abordagem holística de avaliação que usa uma variedade de técnicas (BOURGUIGNON, 2019).

APRESENTAÇÃO

Para o desenvolvimento do presente trabalho realizou-se um estudo de caso descritivo. Foram selecionadas 20 dissertações e teses com abordagem sobre os aspectos metodológicos de investigações referente ao ensino aprendizagem em Educação Estatística. Para o registro das informações, utilizou-se o banco de dados do Grupo de Estudos em Educação Estatística no Ensino Fundamental - GREF, onde foram selecionados os trabalhos publicados entre os anos de 2010 a 2021, que abordaram o ensino aprendizagem de Estatística no Ensino Fundamental I.

O levantamento do estudo realizou-se por meio de uma amostragem não-probabilística. Coelho (2018) define este tipo de amostragem como:

> A escolha dos elementos da amostra foi feita de forma não-aleatória, justificadamente ou não. A escolha é intencional ou por conveniência, considerando as características particulares do grupo em estudo ou ainda o conhecimento que o pesquisador tem daquilo que está investigando.

Desta forma, o material selecionado foi enumerado para uma melhor identificação visual, sendo classificados de 1 a 20, como apresentado no Quadro 1.

Código	Título	Autor(a) e Orientador(a)	IES	ANO
1	Como adultos e crianças compreendem a escala representada em gráficos	Tâmara Marques da Silva Gomes Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2010
2	Fazendo média: compreensões de alunos e professores dos anos iniciais do ensino fundamental	Mabel Cristina Marques Melo Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2010
3	Para variar: compreensões de estudantes dos anos iniciais diante de aspectos da variabilidade	Erica Michelle Silva Cavalcanti Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2011
4	Classificações nos anos iniciais do ensino fundamental: o papel das representações	Patrícia Santos da Luz Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2011
5	Média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental	José Ivanildo Felisberto de Carvalho Verônica Gitirana Gomes Ferreira	Universidade Federal de Pernambuco	2011
6	Analisando a transformação entre gráficos e tabelas por alunos do 3º e 5º ano do ensino fundamental	Dayse Bivar da Silva Ana Coêlho Vieira Selva	Universidade Federal de Pernambuco	2012
7	A provinha Brasil de matemática e o conhecimento estatístico: instrumento avaliativo a ser utilizado pelo professor?	Pollyanna Nunes de Oliveira Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2012
8	Explorando a compreensão de gráficos nos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo com professoras do 4º e 5ºano dos municípios de Igarassu e Itapissuma	Kátia Barros Cabral dos Santos Ana Coêlho Vieira Selva	Universidade Federal de Pernambuco	2012
9	Classificação na educação infantil: o que propõem os livros e como é abordada por professores	Edneri Pereira Cruz Ana Coelho Vieira Selva	Universidade Federal de Pernambuco	2013
10	O todo é a soma das partes, mas uma parte representa o todo? Compreensão de estudantes do 5º e 9º ano sobre amostragem	Tâmara Marques da Silva Gomes Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2013
11	A estatística e a probabilidade nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática no Brasil	Lucicleide Bezerra da Silva Verônica Gitirana Gomes Ferreira	Universidade Federal de Pernambuco	2014
12	Gráficos e tabelas no Ensino Fundamental: uma análise com base em elementos da teoria da atividade	Alissá Mariane Garcia Grymuza Rogéria Gaudencio do Rêgo	Universidade Federal da Paraíba	2015

13	Aplicativos que abordam conceitos estatísticos em tablets e smartphones	Paulo Marcos Ribeiro da Silva Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2015
14	Aprender a classificar nos anos iniciais do ensino fundamental	Paula Cristina Moreira Cabral Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2016
15	O PNLD e o currículo de estatística em livros didáticos de matemática no ciclo de alfabetização	Natália Dias de Amorim Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2017
16	Escala apresentada em gráficos: Conhecimentos Matemáticos para o ensino dos anos iniciais do ensino fundamental (crianças e EJA)	Milka Rossana Guerra Cavalcanti de Albuquerque Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2018
17	Análise de dados e construção do conceito de amostragem por estudantes do 5º e 9º ano: uma proposta à luz da teoria da atividade	Tâmara Marques da Silva Gomes Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2019
18	Aprendizagem de estudantes do ensino fundamental sobre levantamento de hipóteses, análise de dados e conclusões a partir de dados estatísticos	Erica Michelle Silva Cavalcanti Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2019
19	Aprendizagem de gráficos com e sem uso do excel por alunos do 5º ano do ensino fundamental	Marcília Elane do Nascimento Pontes Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2020
20	Ensino e aprendizagem de tabelas nos anos iniciais do ensino fundamental	Maria Betânia Evangelista da Silva Gilda Lisbôa Guimarães	Universidade Federal de Pernambuco	2021

Quadro 01 – Relação dos trabalhos analisados sobre a temática em estudo desenvolvidos no GREF

Fonte: Adaptado pelos autores Grupo de Estudos em Educação Estatística no Ensino Fundamental – GREF, 2021.

Para a análise de dados nesta pesquisa foi utilizado a análise de verificação. De acordo com Moraes (1999), a análise de verificação faz a análise de documentos e literaturas especializadas, tendo como objetivo a hipótese de verificação, sabendo-se o que se busca para atingir um determinado objetivo.

DESCREVENDO OS ASPECTOS METODOLÓGICOS PRESENTES NOS TRABALHOS ANALISADOS

Em relação ao delineamento quanto à natureza das pesquisas, nota-se que a maioria dos trabalhos analisados são de natureza qualitativa (15/29) e quali-quantitativa ou de métodos mistos (13/29) os seguintes valores:

Delineamento quanto à natureza	Frequência
Qualitativo	15
Quantitativo	1
Quali-quantitativo	13
Total	**29**

Tabela 1: Descrição das pesquisas analisadas quanto a natureza.

Fonte: Os autores (2021).

No que refere-se aos objetivos, evidencia-se nos trabalhos avaliados conforme tabela 2, pesquisas exploratórias (23/29), descritivas (5/29) e explicativa (1/29).

Delineamento quanto aos objetivos	Frequência
Exploratória	23
Descritiva	5
Explicativa	1
Total	**29**

Tabela 2: Descrição dos objetivos nas pesquisas analisadas.

Fonte: Os autores (2021).

Em relação aos procedimentos técnicos descritos na tabela 3, constata-se o desenvolvimento de pesquisas por meio da Revisão bibliográfica, Estudo de caso, Experimental, Estudo de campo e também da Pesquisa-ação.

Delineamento quanto aos procedimentos técnicos	Frequência
Revisão bibliográfica	4
Estudo de caso	5
Experimental	2
Estudo de campo	16
Pesquisa-ação	2
Total	**29**

Tabela 3: Relação aos procedimentos técnicos utilizados nas pesquisas analisadas

Fonte: Os autores (2021).

Por fim, nota-se que a coleta de dados foram obtidas por meio de entrevistas, formulários e pesquisas, observações, documentos e registros. Cabe ressaltar, que os formulários e pesquisas foram utilizados com maior frequência conforme tabela 4.

Delineamento quanto aos procedimentos de coletas de dados	Frequência
Entrevistas	9
Formulários e pesquisas	11
Observações	9
Documentos e registros	6
Total	35

Tabela 4: Relação dos procedimentos de coleta de dados utilizados nas pesquisas analisadas.

Fonte: Os autores (2021).

A partir das informações apresentadas nas tabelas acima, nota-se que dos 20 trabalhos selecionados houve alguns que abordaram em sua caracterização mais de um objetivo, técnica ou procedimento de coleta de dados, resultando assim em um número total de análises maior do que a quantidade de trabalhos selecionados.

Em seu estudo "Como adultos e crianças compreendem a escala representada em gráficos", Albuquerque (2010) utilizou uma metodologia de objetivo exploratório de natureza quali-quantitativa. Além disso, seu procedimento técnico pode ser denominado como estudo de campo, fazendo uso de instrumento de coleta do tipo formulários de pesquisas e observações.

No estudo "Fazendo média: compreensões de alunos e professores dos anos iniciais de ensino fundamental", de Melo (2010), identifica-se metodologia de objetivos exploratórios e natureza quali-quantitativa, tendo como procedimento técnico um estudo de campo com coleta de dado por meio de formulário e pesquisas.

Em 2011, Cavalcanti realizou o estudo "Para variar: compreensões de estudantes dos anos iniciais diante de aspectos da variabilidade", onde identificou-se um estudo de campo, constituída por uma metodologia de natureza quali-quantitativa, com objetivo exploratório adotando como instrumento de coleta os formulários.

A autora Luz (2011), em sua obra "Classificações nos anos iniciais do ensino fundamental: o papel das representações", fez uso de uma metodologia de objetivos exploratórios e natureza quali-quantitativa. O procedimento técnico pode ser denominado estudo de campo e o instrumento de coleta foram entrevistas e observações.

Já o estudo "Média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental", de Carvalho (2011), identifica-se pelo uso de um método de pesquisa de natureza quali-quantitativa e objetivo exploratório, sendo seu procedimento técnico denominado revisão bibliográfica e o instrumento de coleta foi o estudo de documentos e registros.

Em 2012, Silva realizou o estudo “Analisando a transformação entre gráficos e tabelas por alunos do 3º e 5º ano do ensino fundamental”, que identifica-se por uma metodologia de objetivo exploratório e natureza qualitativa, sendo seu procedimento técnico constituído por um estudo de campo no qual utilizou-se como instrumento de coleta os formulários de pesquisa.

Em seu estudo “A provinha Brasil de matemática e o conhecimento estatístico: instrumento avaliativo a ser utilizado pelo professor?”, Oliveira (2012) faz uso do procedimento técnico do estudo de campo, em que os instrumentos de coleta de dados consistiu na adoção de observações e entrevistas, com objetivo descritivo e natureza quali-quantitativa.

Já o autor Santos (2012), em seu estudo “Explorando a compreensão de gráficos nos anos iniciais do ensino fundamental: um estudo com professores do 4º e 5º ano dos municípios de Igarassu e Itapissuma”, apresenta um método de pesquisa onde o procedimento técnico é denominado estudo de campo, possuindo objetivo exploratório e natureza quali-quantitativa, além dos instrumentos de coleta serem dos tipos: entrevistas e observações.

A autora Cruz (2013), em sua obra “Classificação na educação infantil: o que propõem os livros e como é abordada por professores”, fez uso de três etapas para realização de seu estudo. A primeira etapa do estudo trata-se do uso de um método de pesquisa com objetivo descritivo e natureza qualitativa. Também se identifica o procedimento técnico de revisão bibliográfica e instrumento de coletas os documentos e registros. A segunda etapa trata-se de um método de pesquisa, que possui objetivo exploratório e natureza qualitativa. Também se identifica o procedimento técnico como estudo de caso e o instrumento de coleta foram as observações. Por fim, a terceira etapa do estudo trata-se da adoção de um método de pesquisa com objetivo exploratório e natureza quali-quantitativa. Também se identifica o procedimento técnico como estudo de campo no qual o instrumento de coletas foram entrevistas.

O estudo “O todo é a soma das partes, mas uma parte representa o todo?: compreensão de estudantes do 5º e 9º ano sobre amostragem”, de Gomes (2013), utilizou o procedimento técnico do tipo estudo de campo, sendo seu instrumento de coleta a aplicação de entrevistas, teve natureza qualitativa e objetivo exploratório.

Na obra “A estatística e a probabilidade nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática no Brasil”, de Silva (2014), identifica-se uma metodologia que possui objetivo descritivo e natureza qualitativa. Também se identifica o procedimento técnico de revisão bibliográfica e instrumento de coletas os documentos e registros.

Na pesquisa realizada por Grymuza (2015), intitulada “Gráficos e tabelas no ensino fundamental: uma análise com base em elementos da teoria da atividade”, identifica-se uma metodologia de natureza qualitativa, utilizando como instrumento de coleta de dados questionários e entrevistas, tendo objetivo exploratório e o procedimento técnico estudo de campo.

O autor Silva (2015), em seu estudo “Aplicativos que abordam conceitos estatísticos em tablets e smartphones”, faz uso de um método de pesquisa onde seu objetivo se enquadra no tipo exploratório de natureza qualitativa, sendo seu procedimento técnico o estudo de caso e tendo como instrumento de coleta as observações.

A autora Cabral (2016), em seu estudo “Aprender a classificar nos anos iniciais do ensino fundamental”, utilizou uma metodologia de natureza quali-quantitativa e objetivo exploratório, tendo como procedimento técnico o estudo de campo e o instrumento de coleta foi a aplicação de formulários.

Em sua obra “O PNLD e o currículo de estatística em livros didáticos de matemática no ciclo de alfabetização”, a autora Amorim (2017) utilizou uma metodologia onde o objetivo foi do tipo explicativo e natureza do tipo qualitativa. O procedimento técnico é denominado revisão bibliográfica e o instrumento de coleta foram documentos e registros.

A autora Albuquerque (2019), em seu trabalho intitulado “Escala apresentada em gráficos: conhecimentos matemáticos para o ensino dos anos iniciais do ensino fundamental (crianças e EJA)”, realizou três estudos. No primeiro estudo de caso, a autora utiliza uma revisão de literatura, a qual tem por natureza o delineamento qualitativo. Referente aos objetivos de pesquisa, caracteriza-se como uma pesquisa descritiva com procedimentos técnicos bibliográficos. No segundo estudo, Albuquerque (2019) utilizou uma pesquisa de natureza quantitativa, tendo esta metodologia o objetivo exploratório, utilizando-se de dois procedimentos técnicos (estudo de campo e participantes), tendo o formulário como instrumento de coleta de dados. Já em seu terceiro estudo de caso, Albuquerque (2019) realizou uma pesquisa exploratória de natureza quali-quantitativa, sendo seu procedimento um estudo de caso e o instrumento de coleta de dados, a entrevista.

O estudo “Análise de dados e construção do conceito de amostragem por estudantes do 5º e 9º ano: uma proposta à luz da teoria da atividade” de Gomes (2019), desenvolveu-se em quatro etapas. Na primeira etapa, foi realizada uma revisão bibliográfica exploratória de natureza qualitativa a partir de documentos e registros. A segunda etapa, consistiu em um estudo de campo exploratório de natureza qualitativa, tendo como instrumento de coleta a realização de entrevista. Na terceira etapa, foi realizada uma pesquisa exploratória qualitativa de procedimentos técnicos, denominada pesquisa-ação, tendo como instrumento de coleta da pesquisa as entrevistas e observações. Por fim, a quarta etapa do estudo foi realizada a partir de uma pesquisa exploratória qualitativa, caracterizando-se como um estudo de campo e utilizando o formulário como instrumento de coleta de dados.

No estudo “Aprendizagem de estudantes do ensino fundamental sobre levantamento de hipóteses, análise de dados e conclusões a partir de dados estatísticos”, de Cavalcanti (2019), foram realizados 2 estudos. No primeiro foram aplicados questionários (instrumento de coleta), tendo uma natureza quali-quantitativa e objetivos exploratórios, sendo seu procedimento técnico o estudo de campo. Já o segundo estudo, tratou-se de um procedimento experimental (procedimento técnico) de natureza quali-quantitativa e objetivo exploratório, tendo como instrumento de coleta o formulário e as observações.

Já na obra de Pontes (2020), denominada "Aprendizagem de gráficos com e sem uso do excel por alunos do 5º ano ensino fundamental", o procedimento técnico é do tipo experimental, sendo seu instrumento de coleta as observações e aplicação de formulários de pesquisa, de natureza qualitativa e objetivo exploratório.

Por fim, a obra "Ensino e aprendizagem de tabelas nos anos iniciais do ensino fundamental", do autor Silva (2021), aponta a realização de três estudos. O primeiro estudo apresenta uma metodologia onde identifica-se o objetivo de pesquisa descritivo e sua natureza do tipo qualitativa. Além disso, seu procedimento técnico pode ser identificado como revisão bibliográfica e seu instrumento de coleta foram os documentos e registros. Enquanto o segundo estudo traz objetivo de pesquisa exploratório e de natureza qualitativa, teve seu procedimento técnico identificado como estudo de campo e seu instrumento de coleta os formulários de pesquisa. Já o terceiro estudo apresenta como objetivo de pesquisa o exploratório e sua natureza do tipo quali-quantitativo. O procedimento técnico denominado pesquisa-ação e seus instrumentos de coleta foram as observações e formulários.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se que as metodologias de pesquisa podem variar mesmo tratando-se de pesquisas que envolvam um único campo de estudo. Porém, também nota-se que a similaridade nos temas e os objetivos de cada pesquisa pode contribuir para a definição da metodologia utilizada.

Observa-se que o delineamento de natureza qualitativa e quali-quantitativa são predominantes nas pesquisas do GREF, que tem como foco o ensino aprendizagem em Educação Estatística. Além disso, destaca-se o desenvolvimento de pesquisas com objetivo exploratório, buscando melhor entendimento sobre o fenômeno em questão. O procedimento técnico utilizado com maior frequência trata-se do estudo de campo, com a prevalência do emprego de entrevistas, formulários e questionários.

As classificações aqui apresentadas foram realizadas a partir de uma pesquisa com interpretações do pesquisador, em que evidencia-se uma lacuna existente nas metodologias analisadas, ausência de informações e apresentações dos métodos escolhidos. Há, muitas vezes, apenas uma apresentação do método, sem uma explanação mais completa e fundamentada.

Vale destacar, que as conclusões aqui levantadas são iniciais e apontam para a importância da realização de novos estudos sobre o tema. Também é importante destacar que o estudo da metodologia é uma parte importante da pesquisa acadêmica e muitos estudantes apresentam grandes dificuldades nessa área. Assim, promover uma formação que possibilite o esclarecimento dessas questões é o primeiro passo para contribuir na elaboração de pesquisas bem fundamentadas teoricamente e metodologicamente.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. E. D. A. **Estudo de caso:** seu potencial na educação. Cadernos de pesquisa, n. 49, p. 51-54, 2013.

BOURGUIGNON, J. A. O projeto de pesquisa e os procedimentos metodológicos para coleta e análise dos dados na pesquisa social e qualitativa. **Humanidades em Perspectivas,** v. 1, n. 1, 2019.

COELHO, A. M. **Métodos e técnicas de pesquisa**. 2018. Disponível em:< http://www.riopomba.ifsudestemg.edu.br/dcc/dcc/materiais/610228303_a>. Acesso em: 01/11/2021.

CRESWELL, J. W.; CRESWELL, J. D. **Projeto de pesquisa:** Métodos qualitativo, quantitativo e misto. Penso Editora, 2021.

FANTINATO, M. **Métodos de pesquisa**. São Paulo: USP, 2015.

GALVÃO, M. C. B. **O levantamento bibliográfico e a pesquisa científica**. In: Franco, L. J.; Passos, A. D. C. (Orgs.). Fundamentos de epidemiologia. 2. ed. São Paulo: Manole, 2010.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** 4. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

GOMES, I. S.; CAMINHA, I. O. Guia para estudos de revisão sistemática: uma opção metodológica para as Ciências do Movimento Humano. **Movimento,** Porto Alegre, v. 20, n. 01, p. 395-411, jan./mar. 2014.

GREF. GRUPO DE ESTUDO EM EDUCAÇÃO DE ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO. 2021. Disponível em:< https://ufpepesquisas.wixsite.com/gref>. Acesso em: 01/11/2021.

HOCAYEN DA SILVA, A. J. **Metodologia de pesquisa:** conceitos gerais. Paraná: UNICENTRO, 2014.

KRIPKA, R. M. L.; SCHELLER, M.; BONOTTO, D. L. Pesquisa documental na pesquisa qualitativa: conceitos e caracterização. **Revista de investigaciones UNAD**, v. 14, n. 2, p. 55-73, 2015.

MANZATO, A. J.; SANTOS, A. B. **A elaboração de questionários na pesquisa quantitativa.** Departamento de Ciência de Computação e Estatística – IBILCE/UNESP, p. 1-17, 2012.

MATTAR, J.; RAMOS, D. K. **Metodologia da Pesquisa em Educação:** abordagens qualitativas, quantitativas e mistas. São Paulo: Edições 70, 2021.

MAZUCATO, T. *et al.* **Metodologia da pesquisa e do trabalho científico**. Penápolis: Funepe, 2018.

MERCADO, L. P. Pesquisa qualitativa online utilizando a etnografia virtual. **Revista Teias**, v. 13, n. 30, p. 15, 2012.

MORAES, R. Análise de conteúdo. **Revista Educação,** Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999. Disponível em: <http://cliente.argo.com.br/~mgos/analise_de_conteudo>. Acesso em: 01/11/2021.

PASCHOARELLI, L. C.; MEDOLA, F. O.; BONFIM, G. H. C. Características Qualitativas, Quantitativas e Quali-quantitativas de Abordagens Científicas: estudos de caso na subárea do Design Ergonômico. **Revista de Design, Tecnologia e Sociedade,** v. 2, n. 1, p. 65-78, 2015.

PEREIRA, A. S. *et al*. **Metodologia da pesquisa científica.** Núcleo de Tecnologia Educacional da Universidade Federal de Santa Maria para os cursos da UAB. 1. ed. Santa Maria, RS: UFSM, NTE, 2018.

REICHARDT, A. L.; FRASSON, A. C.; SANTOS JUNIOR, G. Análise metodológica em dissertações no curso de mestrado profissional em ensino de ciência e tecnologia, UTFPR-PR. **Análise,** v. 38, n. 35, 2017.

RODRIGUES, A. C. Diplomática e Arquivística: diálogos para a construção do método de identificação da tipologia documental. *In:* Encontro Nacional de Pesquisa em Ciência da Informação, 17, 2017, **Anais...** 2017.

THIOLLENT, M. J. M.; COLETTE, M. M. Pesquisa-ação, formação de professores e diversidade. **Acta Scientiarum. Human and Social Sciences,** v. 36, n. 2, p. 207-216, 2014.

ZANANDREA, G.*et al.* Análise metodológica das dissertações defendidas no programa de pós-graduação em administração da UCS. **Revista Gestão Universitária na América Latina-GUAL,** v. 10, n. 2, p. 155-170, 2017.

TEORIA DE SISTEMAS: METODOLOGIA PARA MODELAÇÃO UNIFORMIZADA DE DISTINTAS REALIDADES FÍSICAS

Data de aceite: 01/12/2022

João M. Gago Lima
University of Algarve

ABSTRACT: Automatic Control Systems are far and wide used in all modern and industrialized societies. Devices designed to control automatized tasks are each time more present from small plants to large industrial buildings. The development of mathematical models is a compulsory task for whom aim at analyzing or design any control systems. These mathematical models should reproduce some performance measures as accurate as possible. So, no matter the physical nature of the process we aim at control, an accurate mathematical model should be evaluate. So, the development of mathematical models can be considered an hi-level step over the physical nature of the system that we aim at analyze or design. For this reason the study of Systems Theory and Control Systems are considered transversal areas of the knowledge and them studies are compulsory in many branches of sciences and technologies in many universities all over the world. In spite of normal systems are non-linear the linearization procedure simplify the analysis and design of control systems and, depending on the accuracy of the model can give us good results.

KEYWORDS: Physical Systems, mathematical models, differential equations.

1 I INTRODUÇÃO

A Teoria dos Sistemas é composta por métodos formais com vista ao estudo, projeto, interpretação analítica e homogeneizada de sistemas físicos do nosso quotidiano independentemente de quais sejam as suas naturezas (Ribeiro, M. (2002)).

Sistemas de controlo automático estão cada vez mais presentes em todas as sociedades industrializadas, então, facilmente se compreende que a Teoria dos Sistemas inclua temas e metodologias úteis em diferentes ramos das ciências e tecnologias.

Um enquadramento mais palpável da Teoria dos Sistemas pode ser apresentado num contexto de conceção de um sistema de controlo (Ribeiro, M. (2002)). Desta forma, independentemente de qual seja a dimensão ou a natureza física do sistema que se pretenda controlar, o projeto de um controlador deverá ter em conta as seguintes fases:

- Especificação
- Modelação
- Análise
- Verificação das especificações
- Síntese

O controlador que se pretende sintetizar (ou projetar) deverá ter em conta uma lista de especificações que deverão ser atendidas pelo sistema uma vez que este esteja controlado. Um sistema (ou processo) que se pretenda controlar terá uma complexidade mais ou menos elevada. O projeto de controladores é por vezes um procedimento iterativo tal que, até se atingir a solução final, soluções intermédias são experimentadas podendo resultar funcionamentos mais ou menos lesivos para o processo que se pretende controlar. Assim sendo, a utilização direta do processo que se pretende controlar durante o procedimento de síntese do controlador poderá originar danos graves, desta forma, assume-se com especial importância a fase de modelação. A utilização de um modelo adequado do processo que se pretende controlar tem como vantagem a preservação deste durante a fase de síntese do controlador.

Para além disso, em ambiente laboratorial dispõe-se, dum modo geral, de dispositivos que de alguma forma modelam processos do quotidiano.

Um modelo consiste geralmente numa simplificação da realidade e deverá ter em conta as especificações a ser atendidas na fase de síntese do controlador.

Estabelecido um modelo para o processo que se pretende controlar, passa-se à fase de análise deste para se verificar se a lista de especificações é ou não atendida. Nessa altura, consoante o grau de verificação das especificações, assim se se decidirá (ou não) pelo projeto dum controlador. Tal projeto consiste na associação de dispositivos e determinação dos respetivos parâmetros com vista à verificação das especificações.

A Teoria dos Sistemas está presente, em maior ou menor grau, em todas as fases da conceção de um sistema de controlo automático, independentemente de qual seja a sua natureza física. Apesar das abordagens iniciais versarem sobre sistemas elétricos ou mecânicos, presentemente a Teoria dos Sistema encontra aplicabilidade numa larga gama de áreas do conhecimento estendendo-se inclusivamente às ciências sociais (Ribeiro, M. (2002)).

No presente artigo vão ver estudadas, recorrendo a exemplos, representações matemáticas de sistemas que se poderão incluir na etapa de modelação; neste contexto, este artigo é composto pelas secções que se descrevem de seguida. A secção 2 debruçase sobre a representação matemática de sistemas sendo dado enfase a sistemas lineares e invariantes no tempo SLIT contínuos. Na secção 3 será exemplificado como diferentes realidades físicas são modeladas pela mesma realidade matemática. Na secção 4 será apresentado um procedimento uniformizador para a representação de sistemas. O artigo termina com a secção 5 onde se concluirá que diferentes realidades físicas podem ser descritas pela mesma realidade matemática.

2 I REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS

Os sistemas que usualmente se encontram no quotidiano são dum modo geral não lineares. Sistemas lineares correspondem a aproximações da realidade que, em maior ou menor grau, podem ser consideradas bastante satisfatórias resultando em modelos cuja exatidão deverá ser tida em conta, tendo em vista o fim a que se destinam. Pode-se assim dizer que um modelo é uma abstração da realidade física extraindo dela as características que se considerem relevantes para o fim em vista, tendo em conta hipóteses simplificativas.

No âmbito da Teoria dos Sistemas, ao modelo chama-se sistema, e este constitui a sua entidade básica sobre a qual ela (Teoria dos Sistemas) se debruça (Ribeiro, M. (2002)).

O caracter simplificado do modelo relativamente ao sistema físico que o originou explica o facto de, a partir de um mesmo sistema físico poderem ser extraídos vários modelos consoantes as questões relativas ao sistema físico que se pretendam ver resolvidas. Por exemplo, considerando o sistema físico (elétrico) transístor sabe-se que o modelo para baixas frequências é diferente do modelo para as altas frequências, então, o modelo a adotar deverá ter em conta a gama de frequência onde se pretende trabalhar.

As hipóteses simplificativas na linearização de um sistema deverão ter em conta o ponto de funcionamento do sistema físico não linear para o qual se pretende extrair o modelo. Por exemplo, a dinâmica do pêndulo gravítico pode ser linearizada assumindo que para pequenas elongações o seno dum ângulo pode ser aproximado pela sua amplitude.

A linearização de um modelo resulta numa simplificação considerável em termos de conceção e uso das ferramentas matemáticas necessárias à sua análise. Por este motivo esta secção desenvolve-se assumindo sistemas lineares e invariantes no tempo, SLIT.

Neste contexto considere-se um sistema contínuo linear e invariante no tempo arbitrário, descrito pela equação diferencial linear e de coeficientes constantes (1).

$$\begin{aligned} & y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_2\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_0 y(t)=\ldots \\ & b_m\,\mathrm{u}^{(m)}(t)+b_{m-1}\,\mathrm{u}^{(m-1)}(t)+\ldots+b_2\ddot{u}(t)+b_1\dot{u}(t)+b_0\,\mathrm{u}(t), \quad n>m \end{aligned} \qquad (1)$$

Trata-se de um sistema de ordem igual à ordem da equação diferencial, (ordem n), em que a entrada é o sinal u(t) e a saída é o sinal y(t).

A linearidade do sistema traduz-se na linearidade da correspondente equação diferencial (1) e a invariância no tempo reflete-se no facto de serem constantes os coeficientes a_i e b_j.

A equação diferencial **(1**) descreve completamente o correspondente sistema significando isso que, a partir dela, conhecido o sinal de entrada u(t) e *n* valores iniciais da saída y(t) e das suas *n-1* primeiras derivadas, é possível determinar, de forma única, a evolução temporal da saída do sistema, y(t).

Partindo-se de **(1**) pode-se obter representação em termos de entrada-saída, (ou representação externa) e representação em termos de estado (ou representação interna).

Olhando para **(1**) na perspetiva de entrada-saída e tendo em conta que a transformada de Laplace pode ser usada na resolução de equações diferenciais lineares, então, pode-se obter uma representação externa do sistema que resulta no quociente entre a transformada de Laplace da saída, Y(s), e a transformada de Laplace da entrada, U(s). Esta representação externa denomina-se função de transferência que, para o sistema representado por **(1**), resulta **(2**), sendo que, no instante inicial se consideram nula a saída y(t) bem como as suas *n-1* primeiras derivadas (Dorf, R. and Bishop, R. (1995)).

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0} \qquad \textbf{(2)}$$

A equação diferencial **(1**) permite a obtenção de uma representação interna alternativa àquela vertida em **(2**). Esta representação interna denomina-se modelo de estado acomodando, para além da entrada e da saída, a definição de variáveis internas. Estas variáveis internas são funções do tempo e coordenadas do vetor de estado X(t), poderão ter significado físico ou serem entidades matemáticas abstratas: $X(t)=[x_1(t)\ x_2(t)\ \ldots\ x_n(t)]^T$ (Dorf, R. and Bishop, R. (1995)).

A escolha duma representação, interna ou externa, faz-se consoante as técnicas de análise ou projeto que se pretendam utilizar enquadradas num eventual procedimento para controlo do sistema. Nomeadamente, a representação **(2**) permite calcular a saída *y*(*t*) conhecida a entrada *u*(*t*) desde que o sistema parta do repouso, ou seja, as condições iniciais sejam nulas. Porém, muitas situações do quotidiano existem em que o sistema não parte do repouso mas sim, apresenta um estado inicial não nulo, nessas circunstâncias o modelo **(2**) revela-se incompleto, sendo que, uma representação interna, ou modelo de estado, por acomodar a existência de condições iniciais não nulas, revela-se adequado.

A partir da representação externa **(2**) pode-se calcular uma infinidade de representações internas, (uma por cada conjunto de variáveis de estado $[x_1(t)\ x_2(t)\ \ldots\ x_n(t)]$ que se escolha), sendo que, uma delas está representada pelo diagrama de simulação na Fig. 1.

A leitura direta da Fig. 1 permite estabelecer a equação de estado **(3**) e a equação de saída **(4**).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad \textbf{(3)}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4)}$$

O par de equações **(3**) e **(4**) pode ser escrito na forma compacta **(5**).

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

Definindo-se:

- *A* - matriz da dinãmica [nxn],
- *B* – matriz de entrada [nxq], *q* is the number of inputs,
- *C* – matriz de saída [pxn], *p* is the number of outputs,
- *D* - matriz [pxq] matrix (D=0, para este caso).

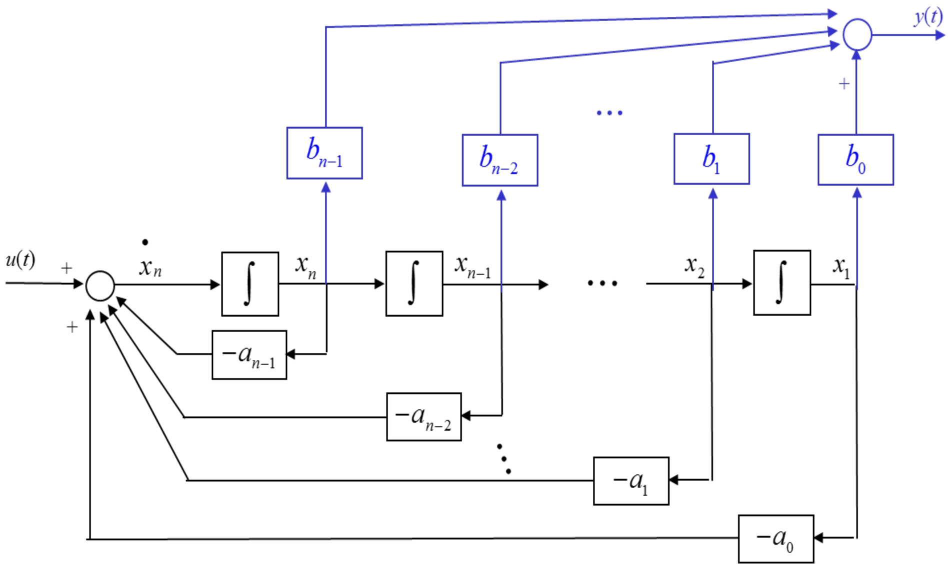


Fig. 1 –Diagrama de simulação respeitante à função de transferência (2).

A representação de SLIT desenvolvida nesta secção é genérica, para sistemas contínuos, não tendo havido a necessidade de se particularizar a suas naturezas físicas; semelhante estudo pode ser feito para sistemas discretos. Nessas circunstâncias a equação diferencial linear de coeficientes constantes **(1**) daria lugar a uma equação com diferenças, linear e de coeficientes constantes. O cálculo da transformada de Laplace de **(1**) seria substituído pelo cálculo da transformada *z* da equação com diferenças, originando uma função de transferência discreta análoga à que se apresenta em **(2**) mas sendo função de *z*. O diagrama de simulação (Fig. 1) daria lugar a um diagrama de simulação em que os integradores seriam substituídos por elementos de atraso unitários para tempo discreto representados por Z^{-1}. O modelo de estado discreto análogo ao contínuo **(5**) é dado por **(6**), tendo as matrizes *A*, *B*, *C* e *D* denominações análogas.

$$\begin{cases} X[k+1] = AX[k] + BU[k] \\ Y[k] = CX[k] + DU[k] \end{cases} \qquad (6)$$

3 I MODELOS MATEMÁTICOS DE SISTEMAS FÍSICOS

A função de transferência como representação externa de sistemas em termos de entrada-saída e, o modelo de estado onde se definem variáveis internas (variáveis de estado), foram apresentados na secção anterior para *SLIT* contínuos. Ficou claro nessa secção que a metodologia exposta não mencionava a natureza física de nenhum sistema em particular.

Nesta secção vão ser apresentados exemplos de sistemas físicos para os quais se calcularão as correspondentes representações matemáticas (D'Azzo, J. and Houpis, C. (1988)). Apesar de se tratar de exemplos de sistemas físicos de naturezas diferentes, vai ficar claro que os mesmos serão representáveis pelo mesmo modelo matemático.

3.1 Sistema elétrico

Nesta secção vai ser estudado o sistema da Fig. 2 que consiste num circuito elétrico.

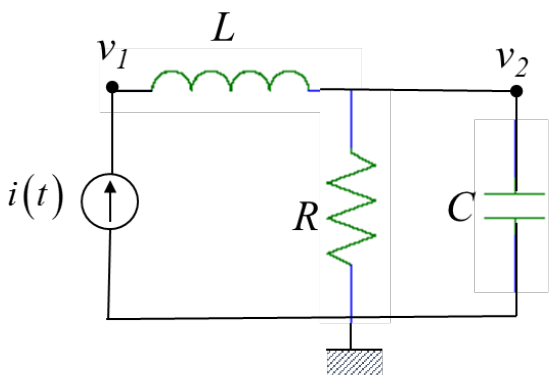


Fig. 2 – Circuito elétrico.

Este circuito é composto por uma bobine de indutância *L* medida em Henry [*H*] ligada a um paralelo de uma resistência *R* medida em Ohm [Ω] com um condensador de capacidade *C* medida em Farad [*F*]; o circuito é alimentado por uma fonte de corrente *i*(*t*). Para este circuito será determinada uma função de transferência e um modelo de estado que serão confrontados com os modelos representados pelas expressões **(2**), **(3**) e **(4**).

Na representação externa (função de transferência), é considerada como entrada a tensão aos terminais da fonte de corrente $v_1(t)$ e como saída a tenção aos terminais do condensador $v_2(t)$. Tratando-se de um sistema de natureza elétrica, as leis fundamentais da análise de circuitos elétricos (Dorf, R. (1993)) vão ser utilizadas para se chegar à função de transferência **(7**).

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \tag{7}$$

A função de transferência dada por **(7**) é formalmente idêntica ao modelo expresso por **(2**) tendo em conta que a saída *Y* corresponde à tensão V_2, e a entrada *U* corresponde à tensão V_1. Para além disso, a função racional **(7**) obtém-se da que se apresenta em **(2**) fazendo m=0, n=2e definindo-se os coeficientes da seguinte forma:

- $b_0 = \dfrac{1}{LC}$
- $a_0 = \dfrac{1}{LC}$
- $a_1 = \dfrac{1}{RC}$

Alternativamente, uma representação interna para o circuito elétrico da Fig. 2 pode ser estabelecida. Para os valores dos coeficientes a_0, a_1 e b_0, tendo em conta o modelo de estado apresentado em **(3**) e **(4**), pode-se estabelecer o modelo de estado para o circuito elétrico da Fig. 2, representado pela equação de estado **(8**) e a equação de saída **(9**). A saída y(t) representa v_2(t) e a entrada u(t) representa v_1(t) .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-1}{LC} & \dfrac{-1}{RC} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{8}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{LC} & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

3.2 Sistema mecânico

Nesta secção vai ser estudado o sistema mecânico translacional da Fig. 3.

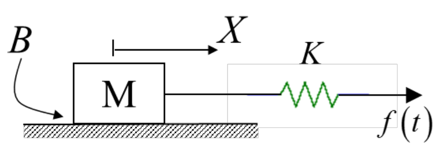


Fig. 3 – Sistema mecânico translacional.

Trata-se de uma massa *M* medida em Quilograma [*Kg*] que se desloca numa superfície horizontal segundo uma reta (eixo dos *X*), por ação de uma força *f*(*t*) medida em Newton [*N*] aplicada a uma mola em hélice de constante de elasticidade *K* medida em $\left[{}^{N}\!/_{m} \right]$ ligada à massa. Do contacto da massa com a superfície gera-se um atrito de constante *B* medida em $\left[{}^{Ns}\!/_{m} \right]$.

De forma análoga ao que foi feito para o exemplo elétrico anterior, será determinada uma função de transferência e um modelo de estado que serão confrontados com os modelos representados pelas expressões **(2**), **(3**) e **(4**).

Dada a natureza física do sistema em estudo, vão ser utilizadas as leis da mecânica para o estabelecimento das equações diferenciais que descrevem a sua dinâmica (Ribeiro, M. (2002)). Assumindo-se como entrada a velocidade da extremidade da mola onde é aplicada a força f, v_F, e como saída a velocidade da massa, v_M, determina-se a função de transferência **(10**) a partir das equações diferenciais obtidas previamente.

$$\frac{V_M(s)}{V_F(s)} = \frac{\frac{K}{M}}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}} \qquad (10)$$

Semelhantemente ao que aconteceu com o circuito elétrico, a função de transferência agora obtida corresponde àquela representada por **(2**) tendo em conta que a saída *Y* corresponde à velocidade V_M e a entrada *U* corresponde à velocidade V_F. Trata-se de um sistema de 2ª ordem sem zeros pelo que m=0 e n=2, assim, a partir de **(2**) obtém-se **(10**) fazendo os coeficientes:

- $b_0 = \frac{K}{M}$
- $a_0 = \frac{K}{M}$
- $a_1 = \frac{B}{M}$

Apresenta-se de seguida um modelo de estado para o sistema da Fig. 3. Assim, particularizando o diagrama de simulação da Fig. 1 para os coeficientes a_0, a_1 e b_0 podem-se então estabelecer as equações de estado **(11**) e de saída **(12**).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-K}{M} & \frac{-B}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad (11)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

As representações externas na forma de funções de transferência, respetivamente **(7**) e **(10**), bem como as a representações internas na forma de modelos de estado, respetivamente **(8**) e **(9**), **(11**) e **(12**), servem de base tanto a procedimentos de análise como a procedimentos de síntese de controladores. A escolha da representação por função de transferência ou por modelo de estado depende de que técnicas se pretendem utilizar. Tais representações permitem estudos tando no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

4 I REPRESENTAÇÃO UNIFORMIZADA DE SISTEMAS

Na secção anterior foram estudados 2 sistemas físicos de naturezas distintas, elétrico Fig. 2, e mecânico Fig. 3. Para tais sistemas foram apresentadas as funções de transferência e os modelos de estado respetivos (Dorf, R. and Bishop, R. (1995)). Tratando-se de SLIT as funções de transferência estão na forma de **(2**) e os modelos de estado estão na forma de **(5**). Dada a similaridade das representações matemáticas destes 2 sistemas físicos de natureza distinta pode-se colocar a seguinte questão:

- Obtido um modelo para um dado sistema, existirão outros sistemas para os quais esse modelo seja adequado?

No caso da resposta ser afirmativa poder-se-á questionar se os outros sistemas poderão ser de natureza física distinta do sistema original.

Os exemplos apresentados na secção anterior permitem responder afirmativamente à questão colocada, na medida em que, o modelo a que se chega para o circuito elétrico é idêntico ao modelo a que se chega para o sistema mecânico. Assim, pode-se dizer que o outro sistema para o qual o modelo do sistema elétrico é adequado é de natureza distinta (mecânico).

Neste contexto, cingindo-se a sistemas de natureza elétrica e mecânica, vai-se apresentar nesta secção uma metodologia para, partindo-se de um sistema mecânico arbitrário, encontrar-se um sistema (circuito) elétrico cujo modelo matemático seja idêntico ao modelo matemático do sistema mecânico. Encontrado o circuito elétrico diz-se que este é um sistema análogo do sistema mecânico.

Consideremos as grandezas físicas envolvidas em cada um dos sistemas da secção anterior; para o circuito elétrico a perturbação do sistema é feita à custa de uma fonte de corrente enquanto para o sistema mecânico a perturbação é feita pela aplicação de uma força. Assim, pode-se considerar que a corrente elétrica num circuito tem função análoga a uma força num sistema mecânico. Na verdade, tanto a força como a corrente propagam-se através dos elementos, mecânicos e elétricos respetivamente. Os respetivos aparelhos de medida, dinamómetro para medição da força e amperímetro para medição da intensidade de corrente, são colocados em série. Assim, na procura de analogias pode-se afirmar que as seguintes grandezas físicas:

<u>Intensidade da corrente</u>, i $\sim$ <u>Força</u>, f

são análogas.

Semelhante leitura pode ser feita relativamente à tensão elétrica num circuito e à velocidade de um ponto num sistema mecânico. Ambas as grandezas medem-se em relação a uma referência; a tensão num nó dum circuito mede-se relativamente a um nó de referência bem como a velocidade de um ponto se mede em relação a um referencial que se considera parado. Assim, na procura de analogias pode-se afirmar que as seguintes grandezas físicas:

<u>Tensão elétrica</u>, v $\sim$ <u>Velocidade</u>, v_e

são análogas.

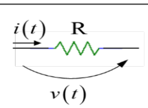
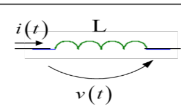
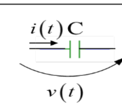
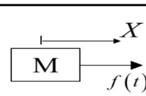
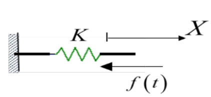
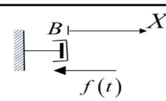
Considere-se agora os elementos básicos dos circuitos elétricos e dos sistemas mecânicos da Tab. 1 onde se apresentam as leis elementares que os governam.

Com base as leis que governam a massa *M* e o condensador *C*, respetivamente, $f(t)=M\frac{dv_e(t)}{dt}$ [1] e $i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$; então, assumindo as analogias anteriores (força, corrente elétrico e velocidade, tensão), pode-se dizer que:

- o modelo da massa *M* é igual ao modelo do condensador *C* desde que a capacidade do condensador seja C=M.

Considere-se agora as leis que governam a mola de constante de elasticidade *K* e a bobine de indutância *L*, respetivamente f(t)=Kx(t)[2] e $v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$. Derivando ambos os membros da lei que governa a mola e resolvendo em ordem à velocidade tem-se $v_e(t)=\frac{1}{K}\frac{df(t)}{dt}$. Comparando esta expressão com a lei que governa a bobine e tendo em conta as analogias anteriores, pode-se dizer que:

- o modelo da mola *K* é igual ao modelo da bobine *L* desde que a indutância da bobine seja $L=\frac{1}{K}$.

	Resistência	Bobina	Condensador
Elementos elétricos			
	$v(t)=Ri(t)$	$v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$	$i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$
Elementos mecânicos	Massa	Mola	Atrito
			
	$f(t)=M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$	$f(t)=-Kx(t)$	$f(t)=-B\frac{dx(t)}{dt}$

Tab. 1 Elementos básicos de circuitos elétricos e de sistemas mecânicos, suas representações e leis que os governam.

Por último, repare-se no atrito de constante *B* e na resistência *R* , bem como nas respetivas leis que as governam, $f(t)=Bv_e(t)$ e $i(t)=\frac{1}{R}v(t)$; então, tendo em conta as

1 $v_e(t)=\frac{dx(t)}{dt}$

2 A ausência do sinal negativo relativamente ao que se apresenta na tabela deve-se ao facto de agora não se estar a considerar a força de restituição da mola mas sim a força externa que se deve aplicar para que a mola sofra um alongamento *x*.

analogias habituais pode-se dizer que:

- o modelo do elemento de atrito *B* é igual ao modelo da resistência *R* desde que a resistência seja $R = \frac{1}{B}$.

Resumindo, na Tab. 2 registam-se as condições que se devem verificar entre cada par de elementos análogos para que o modelo dum circuito elétrico seja igual ao modelo do sistema mecânico.

Nesta altura, pode-se verificar que, tanto para a função de transferência **(10**), como para o modelo de estado **(11**) e **(12**), obtidos para o sistema mecânico Fig. 3, substituindo os seus parâmetros *M, K* e *B* de acordo com a Tab. 2, resultam na função de transferência **(7**) e no modelo de estado **(8**) e **(9**) do circuito elétrico Fig. 2. De forma inversa, os modelos (função de transferência e modelo de estado) a que se chegaram para o circuito elétrico resultam nos correspondentes modelos para o sistema mecânico desde que se façam as substituições dos parâmetros elétricos de acordo com a Tab. 2.

Massa – Condensador	$M = C$
Mola – Bobine	$K = \frac{1}{L}$
Atrito – Resistência	$B = \frac{1}{R}$

Tab. 2 Condições a verificar para que elementos análogos sejam governados pelo mesmo modelo.

5 I CONCLUSÕES

Chega-se então à conclusão de que se está perante sistemas físicos distintos que são representáveis pelo mesmo modelo matemático.

Esta conclusão é extrapolável a sistemas de outras naturezas que não elétrica ou mecânica, por exemplo, sistemas de naturezas tão dispares como hidráulicos ou térmicos são constituídos por elementos básicos que terão correspondência em termos de modelos para com, por exemplo, sistemas mecânicos ou elétricos.

Esta conclusão permite dizer que:

- **diferentes realidades físicas são representadas pela mesma realidade matemática.**

Esta conclusão uniformizadora tem implicações para toda a metodologia que integra a Teoria de Sistemas, seja no que se refere à representação de sistemas, análise ou síntese.

REFERÊNCIAS

Ribeiro, M. (2002). Análise de Sistemas Lineares. IST Press. ISBN: 972-8469-13-6.

D’Azzo, J. and Houpis, C. (1988). Linear Control System Analysis and Design Conventional and Modern. 3rd edition, McGraw-Hill International Editions. ISBN 0-07-016186-0.

Dorf, R. and Bishop, R. (1995). Modern Control Systems. 7th edition, Addison Wesley. ISBN 0-201-84559-8.

Dorf, R. (1993). Introduction to Electric Circuits. 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc. ISBN 0-471-60011-3.

CAPÍTULO 5

ON THE WELLPOSEDNESS OF THE KDV-K-S EQUATION IN PERIODIC SOBOLEV SPACES

Data de aceite: 01/12/2022

Yolanda Silvia Santiago Ayala
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Lima, Peru
https://orcid.org/0000-0003-2516-0871

2020 Mathematics Subject Classification: 35G10, 35Q53, 35B40, 47D06.

ABSTRACT: In this work we prove that the Cauchy problem associated to the KdV-Kuramoto-Sivashinky (KdV-K-S) equation is globally well posed. We do this in an intuitive way using Fourier theory and in a fine version using Semigroups theory. Also, we study the corresponding nonhomogeneous problem and prove it is locally well posed and even more we obtain the continuous dependence of the solution with respect to the initial data and the non homogeneity. Finally, we prove the uniqueness solution of the homogeneous KdV- K-S equation using its dissipative property.

KEYWORDS: Semigroups theory, existence of solution, KdV - Ku- ramoto - Sivashinski equation, nonhomogeneous equation, periodic Sobolev spaces, Fourier theory.

1 I INTRODUCTION

We will study the KdV-Kuramoto-Sivashinsky equation:

$$(P_1): \; u_t + u_{xxx} + \beta(u_{xxxx} + u_{xx}) = 0 \text{ in } H^{s-4}_{per}, \text{ with } u(0) = \phi \in H^s_{per},$$

considering β a positive constant, *s* a real number and denoting by H^s_{per} to the periodic Sobolev space. For physical support to the model, we cite [15]. In this work we will make a complete study of the existence, uniqueness and continuous dependence of the solution of the KdV-K-S equation and its corresponding non-homogeneous problem, giving more properties, improvement of results and additional proofs. Thus, this is a unified study with improvements of [10] and [13].

We can cite [2] and [1] for this class of equations. We also cite some works about existence by semigroups [3], [4], [6], [7], [8] and take support in some results of [9].

Our article is organized as follows. In section 2 we state the preliminary results. In section 3, we prove that problem (P_1) is well posed and has regularity H^∞. Moreover, we introduce a family of operators, known as semigroups of contraction of class C_0 to state the result and prove it in a fine version. In section 4, we prove that the non homogeneous problem has a unique local solution and it continuously depends respect to the initial data and respect to the non homogeneity. In section 5, we study the uniqueness of the for homogeneous case using another technique that involves the dissipative property of the problem.

Finally, in section 6, we give the conclusions of our study.

2 I METHODOLOGY

We use the references [2], [10], [11], [12], [14] and [5] for the Fourier theory in periodic Sobolev spaces, and differential and integral calculus in Banach spaces.

3 I PROBLEM (P_1) IS WELL POSED

Theorem 3.1. *Let s a fixed real number,* $\beta > 0$ *and the problem*

$$(P_1)\quad \left| \begin{array}{l} u \in C([0,+\infty), H^s_{per}) \\ \partial_t u + \partial_x^3 u + \beta(\partial_x^4 u + \partial_x^2 u) = 0 \in H^{s-4}_{per} \\ u(0) = \phi \in H^s_{per} \end{array} \right.$$

then (P_1) *is globally well posed, that is*

$$\exists!\, u \in C([\,0,\infty),\ H^s_{per}) \cap C^1([0,\infty), H^{s-4}_{per})$$

satisfying equation (P_1) *so that the application:* $\phi \to u$ *, which to every initial data* ϕ *assigns the solution u of the IVP* (P_1)*, is continuous. That is, for* ϕ *and* $\tilde{\phi}$ *initial data close in* H^s_{per} *, their corresponding solutions u and* $\tilde{u}$ *respectively, are also close in the solution space. Also,*

$$\|u(t) - \widetilde{u}(t)\|_s \leq \|\phi - \widetilde{\phi}\|_s\,,\ \forall t \geq 0\,,$$

and

$$\sup_{t>0} \|u(t) - \widetilde{u}(t)\|_s \leq \|\phi - \widetilde{\phi}\|_s\,.$$

Moreover, solution u satisfies the regularity:

$$u(t) \in H^\infty\,,\ \forall t > 0$$

with $\| u(t) \|_r \leq C\| \phi \|_s$ *,* $\forall r \in \mathbb{R}$ *and* $t > 0$*, where*

$$H^\infty := \bigcap_{r\in\mathbb{R}} H^r_{per}$$

The application: $\phi \to \partial_t u$, which for every initial data ϕ assigns the derivative of solution u of the IVP (P_1) is continuous. That is, for ϕ and $\tilde{\phi}$ initial data close in H^s_{per} their corresponding $\partial_t u$ and $\partial_t \tilde{u}$, respectively, are also close in the solution space.

Also, the following inequalities are verified

$$\|\partial_t u(t) - \partial_t \widetilde{u}(t)\|_{s-4} \leq (1+2\beta)\|\phi - \widetilde{\phi}\|_s\,,\ \forall t \geq 0\,,\ ,$$

$$\sup_{t\geq 0} \|\partial_t u(t) - \partial_t \widetilde{u}(t)\|_{s-4} \leq (1+2\beta)\|\phi - \widetilde{\phi}\|_s\,.$$

Proof. We prove it in the following way.

1. First, we obtain the candidate to the solution. In order to get it we apply the Fourier transform to the equation

$$\partial_t u \quad = \quad -\partial_x^3 u - \beta(\partial_x^4 u + \partial_x^2 u)$$

and have

$$\begin{aligned}
\partial_t \hat{u} &= -(ik)^3\hat{u} - \beta((ik)^4\hat{u} + (ik)^2\hat{u}) \\
&= ik^3\hat{u} - \beta(k^4\hat{u} - k^2\hat{u}) \\
&= (ik^3 - \beta(k^4 - k^2))\hat{u} \\
&= (ik - \beta(k^2-1))k^2\hat{u}\,,
\end{aligned}$$

which for every k is an ODE with initial data $\hat{u}(k, 0) = \hat{\phi}(k)$. Thus, solving the IVP's

$$(\Omega_k)\left|\begin{array}{l}
\hat{u} \in C([0,+\infty), l_s^2(Z)) \\
\partial_t \hat{u}(k,t) = (ik - \beta(k^2-1))k^2\hat{u}(k,t) \\
\hat{u}(k,0) = \hat{\phi}(k)
\end{array}\right.$$

we obtain

$$\hat{u}(k,t) = e^{(ik-\beta(k^2-1))k^2 t}\hat{\phi}(k)\,,$$

from which we get our candidate to the solution:

$$\begin{aligned}
u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t)\phi_k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^3 t} F_k \hat{\phi}(k)\phi_k
\end{aligned} \tag{3.1}$$

here we are denoting $\phi_k(x) = e^{ikx}$ and $F_k := e^{-\beta(k^2-1)k^2 t}$. We remark that when $k \in Z$ and $|k| = 1$ or $k = 0$, F_k is 1. When $k \in Z$ and $0 \neq |k| \neq 1$, we have that $(k^2 - 1)k^2 > 0$, and since β

> 0 have $F_k \to 0$ when $t \to +\infty$. Also $|e^{ik^3 t}| = 1$.

2. Second, we prove:

$$u(t) \in H^s_{per} \ \text{ and } \ \|u(t)\|_s \leq \|\phi\|_s\,, \ \forall t \in [0, \infty)\,. \tag{3.2}$$

In effect, let $t > 0$, $\phi \in H^s_{per}$ and remarking that $e^{-2\beta(k^2-1)k^2 t} < 1$, we have

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |e^{ik^3 t} e^{-\beta(k^2-1)k^2 t} \hat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |e^{-\beta(k^2-1)k^2 t} \hat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 |e^{-\beta(k^2-1)k^2 t}|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 e^{-2\beta(k^2-1)k^2 t} \qquad (3.3) \\ &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 \quad < \infty \\ &= \|\phi\|^2_{H^s_{per}}\,. \end{aligned}$$

Obviously it holds (3.2) for $t = 0$.

3. We will prove that $u(\cdot)$ is continuous in $[0, +\infty)$.

Let $t' \in [0, \infty)$,

$$\begin{aligned} &\|u(t) - u(t')\|^2_{H^s_{per}} \\ &\quad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |(e^{ik^3 t} e^{-\beta(k^2-1)k^2 t} \\ &\qquad\qquad - e^{ik^3 t'} e^{-\beta(k^2-1)k^2 t'}) \hat{\phi}(k)|^2 \\ &\quad = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\hat{\phi}(k)|^2 |H(t)|^2 \qquad (3.4) \end{aligned}$$

where $H(t) := e^{(ik^3 - \beta(k^2-1)k^2)t} - e^{(ik^3 - \beta(k^2-1)k^2)t'}$.

We see that $\lim_{t \to t'} H(t) = 0$. In order to interchange limits, we need the uniform convergence of the series. For this, we take the k-th term of the series and bound it by a convergent series, i.e.

$$\begin{aligned} I_{k,t} : &= 2\pi(1+k^2)^s|\hat{\phi}(k)|^2 \left| e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} - e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t'} \right|^2 \\ &\leq 8\pi(1+k^2)^s|\hat{\phi}(k)|^2 , \end{aligned}$$

there we have used the triangular inequality (property of the norm) and the inequality $e^{-\theta} \leq 1$ for $\theta \geq 0$. Thus,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t} \leq 4\|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty ,$$

and using the M-Test of Weierstrass Theorem, we have the series converges uniformly. Now, we can interchange limits, that is

$$\lim_{t\to t'} \|u(t) - u(t')\|^2_{H^s_{per}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lim_{t\to t'} I_{k,t} = 0$$

and then we conclude

$$\lim_{t\to t'} \|u(t) - u(t')\|_{H^s_{per}} = 0 .$$

4. We will prove

$$\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} + \left(\partial_x^3 + \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2)\right) u(t) \right\|_{H^{s-4}_{per}} \longrightarrow 0 \text{ when } h \to 0 .$$

In effect,

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} + \partial_x^3 u(t) + \beta(\partial_x^4 u(t) + \partial_x^2 u(t)) \right\|^2_{H^{s-4}_{per}} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} \left|\hat{\phi}(k)\right|^2 \cdot \\ &\quad \left| \frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)} - e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t}}{h} \right. \\ &\quad \left. + (ik)^3 e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} + \beta((ik)^4 + (ik)^2) e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} \right|^2 \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} \left|\hat{\phi}(k)\right|^2 \left| e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t} \cdot M(h) \right|^2 \qquad (3.5) \end{aligned}$$

where $M(h) := \left\{ \frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)h}-1}{h} + (ik)^3 + \beta((ik)^4 + (ik)^2) \right\}$.

Using L'Hospital we have $M(h) \to 0$ when $h \to 0$.

Again, to interchange limits, we need the uniform convergence of the series. For this we will bound the k-th term of the series. Previously, we observe for $h > 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)h}-1}{h} \\
&= \int_0^h \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left\{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)s}\right\} ds \\
&= \int_0^h \frac{1}{h}\left[ik^3-\beta(k^2-1)k^2\right] e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)s} ds
\end{aligned}$$

and taking norm we have

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)h}-1}{h}\right| \\
&\leq \frac{1}{h}|ik^3-\beta(k^2-1)k^2| \int_0^h \left|e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)s}\right| ds \\
&\leq \frac{1}{h}\left\{|k|^3+\beta|k|^4+\beta|k|^2\right\}\cdot h \\
&= \left\{|k|^3+\beta|k|^4+\beta|k|^2\right\}. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Using the inequalities (3.6), we are going to bound $|M(h)|^2$ as follows:

$$\begin{aligned}
|M(h)|^2 &\leq \left\{2\left[|k|^3+\beta|k|^4+\beta|k|^2\right]\right\}^2 \\
&\leq \left[C_4|k|^4\right]^2 \\
&\leq C_5\left[|k|^2\right]^4 \\
&\leq C_5\left[1+|k|^2\right]^4. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Let us bound the k-th term of the series. Here we will use the estimation (3.7)

$$\begin{aligned}
&(1+k^2)^{s-4}\left|\hat{\phi}(k)\right|^2 e^{-2\beta(k^2-1)k^2t}[M(h)]^2 \\
&\leq (1+k^2)^{s-4}\left|\hat{\phi}(k)\right|^2 [M(h)]^2 \\
&\leq (1+k^2)^{s-4}\left|\hat{\phi}(k)\right|^2 C_5(1+|k|^2)^4 \\
&= C_5(1+k^2)^s\left|\hat{\phi}(k)\right|^2
\end{aligned}$$

and, since $2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\left|\hat{\phi}(k)\right|^2 = \|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty$ for $\phi \in H^s_{per}$, using the M-Test of Weierstrass we get the series (3.5) converges uniformly and then it is possible to interchange limits and obtain

$$\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} + \left(\partial_x^3 + \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2)\right) u(t) \right\|^2_{H^{s-4}_{per}} \longrightarrow 0 \qquad (3.8)$$

when $h \to 0^+$.

Considering $h < 0$, for the case $t > 0$ we get

$$\begin{aligned} &\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)h}-1}{h} \\ &\quad = -\int_h^0 \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial s}\left\{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)s}\right\} ds \\ &\quad = -\int_h^0 \frac{1}{h}\left[ik^3-\beta(k^2-1)k^2\right] e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)s} ds\,, \end{aligned}$$

taking norm, we have

$$\begin{aligned} &\left|\frac{e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)h}-1}{h}\right| \\ &\quad \le \frac{1}{|h|}|ik^3-\beta(k^2-1)k^2| \int_h^0 \left|e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)s}\right| ds \\ &\quad \le \frac{1}{|h|}|ik^3-\beta(k^2-1)k^2| \int_h^0 e^{(-\beta(k^2-1)k^2)s}\, ds\,. \end{aligned} \qquad (3.9)$$

We know that the area under the graph of the function $G(t) := e^{-\beta(k^2-1)k^2 t}$ from h to 0 is less than or equal to the area of the rectangle with base $|h|$ and height $e^{-\beta(k^2-1)k^2 h}$, that is

$$\int_h^0 e^{-\beta(k^2-1)k^2 s}\, ds \le |h| e^{-\beta(k^2-1)k^2 h}\,. \qquad (3.10)$$

Using (3.10) in (3.9) we get

$$\left|\frac{e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]h}-1}{h}\right| \le \{|k|^3+\beta|k|^4+\beta|k|^2\} e^{-\beta(k^2-1)k^2 h}\,. \quad (3.11)$$

Using (3.11) we have

$$|M(h)| \quad \le \quad \{|k|^3+\beta|k|^4+\beta|k|^2\}\{e^{-\beta(k^2-1)k^2 h}+1\}\,. \quad (3.12)$$

Using (3.12) we get

$$
\begin{aligned}
H(t,h) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4}|\widehat{\phi}(k)|^2 |e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]t} M(h)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4}|\widehat{\phi}(k)|^2 |e^{i2k^3t}||e^{[-\beta(k^2-1)k^2]t} M(h)|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4}|\widehat{\phi}(k)|^2 \underbrace{\{|k|^3+\beta|k|^4+\beta|k|^2\}^2}_{\leq \max\{1,\beta\}^2\{|k|^2\}^4} \cdot \\
&\qquad \left\{e^{-\beta(k^2-1)k^2(t+h)} + e^{-\beta(k^2-1)k^2 t}\right\}^2 . \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Taking $h < 0$ with $|h|$ small enough such that $0 < t + h < t$, we have

$$
e^{-\beta(k^2-1)k^2(t+h)} \leq 1 . \qquad (3.14)
$$

Thus using (3.14) in (3.13) and that $\phi \in H^s_{per}$ we obtain

$$
\begin{aligned}
H(t,h) &\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4}|\widehat{\phi}(k)|^2 \max\{1,\beta\}^2\{1+|k|^2\}^4 \cdot 4 \\
&= (4\max\{1,\beta\}^2)\cdot 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4}|\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&= (4\max\{1,\beta\}^2)\|\phi\|_s^2 < \infty .
\end{aligned}
$$

Using the M-Test of Weierstrass, the series (3.5) is convergent absolutely and uniformly. Then it is possible to interchange limits and obtain

$$
\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} + \left(\partial_x^3 + \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2)\right) u(t) \right\|^2_{H^{s-4}_{per}} \longrightarrow 0 \qquad (3.15)
$$

when $h \to 0^-$.

From (3.8) and (3.15) we have

$$
\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} + \left(\partial_x^3 + \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2)\right) u(t) \right\|^2_{H^{s-4}_{per}} \longrightarrow 0
$$

when $h \to 0$, $\forall t > 0$.

This is also true for the case $t = 0$, there we use (3.6) only.

5. We will prove the continuous dependency of the solution with respect to the initial data, that is, let ϕ and $\tilde{\phi}$ be close data in H^s_{per}, then their corresponding solutions u and $\tilde{u}$, respectively, are also close in the solution space. Let $t \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
&\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|^2_{H^s_{per}}\\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| e^{ik^3 t} e^{-\beta(k^2-1)k^2 t}(\widehat{\phi}(k) - \widehat{\widetilde{\phi}}(k)) \right|^2 (1+k^2)^s\\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-2\beta(k^2-1)k^2 t} \left| \widehat{\phi}(k) - \widehat{\widetilde{\phi}}(k) \right|^2 (1+k^2)^s\\
&\leq 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{\phi}(k) - \widehat{\widetilde{\phi}}(k) \right|^2 (1+k^2)^s\\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \left| \widehat{\phi}(k) - \widehat{\widetilde{\phi}}(k) \right|^2\\
&= \|\phi - \widetilde{\phi}\|^2_{H^s_{per}} \,.
\end{aligned}
$$

Taking supremum over $(0, +\infty)$ we have

$$
\sup_{t\in(0,+\infty)} \|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi - \widetilde{\phi}\|_{H^s_{per}} \,. \tag{3.16}
$$

Hence, we have: if $\phi \to \tilde{\phi}$ then $u \to \tilde{u}$.

6. Uniqueness of Solution. Inequality (3.16) will allow us to prove the solution is unique. In effect, let $\phi \in H^s_{per}$ and suppose there are u and $\tilde{u}$ two solutions, then using (3.16) we have,

$$
\|u(r)-\widetilde{u}(r)\|_{H^s_{per}} \leq \sup_{t\in[0,\infty)} \|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_{H^s_{per}} \leq \|\phi - \phi\|_{H^s_{per}} = 0 \,,
$$

$\forall r \in [0, \infty)$, from where we conclude that $u = \tilde{u}$.

Thus, problem (P_1) is well posed and its unique solution, which depends continuously on the initial data, is

$$
u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^3 t - \beta(k^2-1)k^2 t} \hat{\phi}(k)\phi_k \,.
$$

7. Let $t > 0$. From (3.3) we have for $r > s$:

$$
\|u(t)\|^2_r \;=\; 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r |\widehat{\phi}(k)|^2 |e^{-\beta(k^2-1)k^2 t}|^2
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 F(k,t) \\
&\leq C^* 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 < \infty \\
&= C^* \|\phi\|_s^2 ,
\end{aligned}
$$

where $F(k, t) := e^{-2\beta(k^2-1)k^2 t} \cdot (1+k^2)^{r-s}$ and satisfies $|F(k, t)| \leq C^*$, $\forall k \in Z$, $t > 0$. Thus,

$$
u(t) \in H^r_{per} , \ \forall r \in (s, +\infty) . \tag{3.17}
$$

The case $r = s$ was already proven on the item 2.

8. Now, we consider the case $r < s$. Here we have $H^s_{per} \subset H^r_{per}$ and since the initial data $\phi \in H^s_{per}$, then $\phi \in H^r_{per}$ and satisfies

$$
\|\phi\|_r \leq \|\phi\|_s . \tag{3.18}
$$

From (3.3) for r and using (3.18) we get

$$
\|u(t)\|_r^2 \leq \|\phi\|_r^2 \leq \|\phi\|_s^2 < \infty .
$$

That is,

$$
u(t) \in H^r_{per}, \forall r \in (-\infty, s) . \tag{3.19}
$$

Therefore, from (3.17), (3.2) and (3.19), we conclude for $t > 0$

$$
u(t) \in H^r_{per} , \ \forall r \in \mathbb{R} ,
$$

and there exists $C := \max\{1, \sqrt{C^*}\}$ such that $\| u(t) \|_r \leq C \| \phi \|_s$, $\forall r \in$ R and $\forall t > 0$.

9. We will prove that $\partial_t u(\cdot)$ is continuous in $[0, \infty)$. Let $t, t' \in [0, \infty)$, using the inequality $\| \partial^m_x u(t) \|_{s-m} \leq \| u(t) \|_s$ and continuity of $u(\cdot)$, we obtain

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_t u(t) - \partial_t u(t')\|_{H^{s-4}_{per}} \\
&= \| - \partial_x^3 u(t) - \beta(\partial_x^4 u(t) + \partial_x^2 u(t)) + \partial_x^3 u(t') \\
&\quad + \beta(\partial_x^4 u(t') + \partial_x^2 u(t'))\|_{s-4} \\
&= \| - (\partial_x^3 u(t) - \partial_x^3 u(t')) - \beta(\partial_x^4 u(t) - \partial_x^4 u(t')) \\
&\quad - \beta(\partial_x^2 u(t) - \partial_x^2 u(t'))\|_{s-4} \\
&= \|\partial_x^3 (u(t) - u(t'))\|_{s-4} + \beta \|\partial_x^4 (u(t) - u(t'))\|_{s-4} \\
&\quad + \beta \|\partial_x^2 (u(t) - u(t'))\|_{s-4}
\end{aligned}
$$

$$\leq \|u(t)-u(t')\|_{s-1}+\beta\|u(t)-u(t')\|_s+\beta\|u(t)-u(t')\|_{s-2}$$
$$= (1+2\beta)\|u(t)-u(t')\|_s \to 0 \tag{3.20}$$

when $t \to t'$. That is $\partial_t u \in C([0,\infty), H_{per}^{s-4})$.

10.Let $\phi \in H^s_{per}$, if we define

$$W(t)\phi := \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(k^3 i-\beta(k^2-1)k^2)e^{[k^3 i-\beta(k^2-1)k^2]t}\widehat{\phi}(k)\phi_k$$

then $W(t)\phi \in H_{per}^{s-4}$ and $\| W(t)\phi \|_{s-4} \leq (1+2\beta)\|\phi\|_s$, $\forall t \geq 0$. That is, $W(t) \in L(H^s_{per}, H_{per}^{s-4})$ with $\| W(t)\| \leq (1+2\beta)$.

In effect, using $|k^3 i - \beta(k^2-1)k^2|^2 \leq (1+2\beta)^2(|k|^4)^2 = (1+2\beta)^2(|k|^2)^4 \leq (1+2\beta)^2(1+|k|^2)^4$, $\forall k \in Z$ and $e^{-\theta} \leq 1$, $\forall \theta \geq 0$, we have

$$\begin{aligned}
&\|W(t)\phi\|_{s-4}^2\\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-4}|(k^3 i-\beta(k^2-1)k^2)e^{[k^3 i-\beta(k^2-1)k^2]t}\widehat{\phi}(k)|^2\\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-4}|k^3 i-\beta(k^2-1)k^2|^2 e^{[-2\beta(k^2-1)k^2]t}|\widehat{\phi}(k)|^2\\
&\leq (1+2\beta)^2 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s e^{[-2\beta(k^2-1)k^2]t}|\widehat{\phi}(k)|^2\\
&\leq (1+2\beta)^2 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\widehat{\phi}(k)|^2 < \infty\\
&= (1+2\beta)^2\|\phi\|_s^2 .
\end{aligned}$$

1. From item 4 and 10, we have $\partial_t u(t) = W(t)\phi$.

Next, we have the following result

Corollary 3.2. *The unique solution of (P_1) is*

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik^3 t-\beta(k^2-1)k^2 t}\hat{\phi}(k)\phi_k ,$$

where $\phi_k(x) := e^{ikx}$ for $x \in \mathbb{R}$.

Corollary 3.3. *With the hypothesis of preceding Theorem, we obtain*

1. $u \in C([0,\infty), H^r_{per}) \cap C^1([0,\infty), H^{r-4}_{per})$, $\forall r \leq s$.

2. Also,

$$\begin{aligned}
\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_r &\le \|\phi-\widetilde{\phi}\|_s\,,\ \forall t\ge 0\,,\ \forall r\le s\,,\\
\sup_{t>0}\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|_r &\le \|\phi-\widetilde{\phi}\|_s\,,\ \forall r\le s\,.
\end{aligned}$$

3. Moreover,

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u(t)-\partial_t\widetilde{u}(t)\|_{r-4} &\le (1+2\beta)\|\phi-\widetilde{\phi}\|_s\,,\ \forall t\ge 0\,,\ \forall r\le s\,,\\
\sup_{t\ge 0}\|\partial_t u(t)-\partial_t\widetilde{u}(t)\|_{r-4} &\le (1+2\beta)\|\phi-\widetilde{\phi}\|_s\,,\ \forall r\le s\,.
\end{aligned}$$

4. If $r > s$ then $\| u(t) \|_r \le \sqrt{C^*}\| \phi\|_s$, $\forall t > 0$, $\| \partial_t u(t) \|_{r-4} \le (1 + 2\beta)\sqrt{C^*}\| \phi\|_s$, $\forall t > 0$, where C^* is such that $|G(k, t)| \le C^*$, $\forall k\in Z$, $\forall t > 0$, with $G(k, t) := e^{-2\beta(k^2-1)k^2 t}\cdot(1 + k^2)^{r-s}$.

5. Finally, $\forall r\in \mathbb{R}$

$$\|u(t)\|_r \le \min\{1,\sqrt{C^*}\}\|\phi\|_s\,,\ \forall t>0\,, \tag{3.21}$$

$$\|\partial_t u(t)\|_{r-4} \le (1+2\beta)\min\{1,\sqrt{C^*}\}\|\phi\|_s\,,\ \forall t>0\,, \tag{3.22}$$

Proof. The inequality (3.21) follows of the Sobolev continuous imbedding. We will use the Sobolev continuous Imbedding and item 10 for prove that if $\phi \in H^s_{per}$ then $W(t)\phi \in H_{per}^{r-4}$ and $\| W(t)\phi\|_{r-4} \le (1 + 2\beta)\| \phi\|_s$, $\forall t \ge 0$, $\forall r \le s$. That is, $W(t) \in L(H^s_{per}, H_{per}^{r-4})$ with $\| W(t)\| \le (1 + 2\beta)$, $\forall r \le s$.

In effect, using $|k^3 i - \beta(k^2 - 1)k^2|^2 \le (1 + 2\beta)^2(1 + |k|^2)^4$, $\forall k \in Z$ and $e^{-\theta} \le 1$, $\forall\theta \ge 0$, we have

$$\begin{aligned}
&\|W(t)\phi\|^2_{r-4}\\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{r-4}|k^3 i-\beta(k^2-1)k^2|^2 e^{[-2\beta(k^2-1)k^2]t}|\widehat{\phi}(k)|^2\\
&\le (1+2\beta)^2 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{r}e^{[-2\beta(k^2-1)k^2]t}|\widehat{\phi}(k)|^2\\
&\le (1+2\beta)^2 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{r}|\widehat{\phi}(k)|^2\\
&\le (1+2\beta)^2 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s}|\widehat{\phi}(k)|^2<\infty\\
&=(1+2\beta)^2\|\phi\|_s^2\,.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Also, we will prove that if $\phi \in H_{per}^{s}$ then $W(t)\phi \in H_{per}^{r-4}$ and $\| W(t)\phi\|_{r-4} \le (1 + 2\beta)\sqrt{C^*}\| \phi\|_s$, $\forall t > 0$, $\forall r > s$. That is, $W(t) \in L(H_{per}^{s}, H_{per}^{r-4})$ with $\| W(t)\| \le (1 + 2\beta)\sqrt{C^*}$, $\forall r > s$.

In effect, using $|k^3 i - \beta(k^2 - 1)k^2|^2 \le (1 + 2\beta)^2(1 + |k|^2)^4$, $\forall k \in Z$ and that $|G(k, t)| \le C^*$, $\forall k \in Z$, $\forall t > 0$ with $r > s$, we have

$$\begin{aligned}
&\|W(t)\phi\|_{r-4}^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{r-4} |k^3 i - \beta(k^2-1)k^2|^2 e^{[-2\beta(k^2-1)k^2]t} |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\leq (1+2\beta)^2 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^r e^{[-2\beta(k^2-1)k^2]t} |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&= (1+2\beta)^2 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s \underbrace{(1+k^2)^{r-s} e^{[-2\beta(k^2-1)k^2]t}}_{G(k,t):=} |\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&\leq (1+2\beta)^2 C^* 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 < \infty \\
&= (1+2\beta)^2 C^* \|\phi\|_s^2 . \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

From (3.23) and (3.24), we have (3.22).

Now, we will introduce a family of operators which verify the condition of being a semigroup of contraction of class C_0.

Theorem 3.4. *Let* $\beta > 0$ *and* $s \in \mathbb{R}$. *The application*

$$\begin{aligned}
S : [0, +\infty) &\rightarrow L(H^s_{per}) \\
t &\rightarrow S(t)
\end{aligned}$$

such that $S(t) = e^{-(\partial_x^3 + \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2))t}$, *that is, applies*

$$S(t)\phi = \left[\left(e^{(ik^3 - \beta(k^4 - k^2))t} \hat{\phi}(k) \right)_{k \in Z} \right]^{\vee}, \ \forall \phi \in H^s_{per},$$

then $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *is a semigroup of class* C_0 *of contraction on* $H_{per}{}^s$.

Moreover, the following assertions hold:

1. *If* $\phi \in H_{per}{}^s$ *then* $S(\cdot)\phi \in C([0, \infty), H_{per}{}^s)$.

2. *The application* $\phi \rightarrow S(\cdot)\phi$ *is continuous and verifies:*

$$\|S(t)\psi_1 - S(t)\psi_2\|_{H^s_{per}} \leq \|\psi_1 - \psi_2\|_{H^s_{per}}, \ \forall t \geq 0$$

and

$$\sup_{t>0} \|S(t)\psi_1 - S(t)\psi_2\|_{H^s_{per}} \leq \|\psi_1 - \psi_2\|_{H^s_{per}}$$

with $\psi_i \in H_{per}{}^s$ *for* $i = 1, 2$.

3. *If* $\phi \in H_{per}{}^s$ *then* $\partial_t S(t)\phi \in H_{per}{}^{s-4}$ *and* $\| \partial_t S(t)\phi \|_{s-4} \leq (1 + 2\beta) \| \phi \|_s$, *that is,* $\partial_t S(t) \in L(H_{per}{}^s, H_{per}{}^{s-4})$, $\forall t \geq 0$, *where*

$$\partial_t S(t)\phi = \left[\left((ik^3 - \beta(k^2-1)k^2)e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]t}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in H^{s-4}_{per},$$
$$\forall \phi \in H^s_{per} .$$

4. If $\phi \in H_{per}{}^s$ then $\partial_t S(\cdot)\phi \in C([0, \infty), H_{per}{}^{s-4})$.

5. The application: $\psi \to \partial_t S(\cdot)\psi$ is continuous and verifies:

$$\begin{aligned} \|\partial_t S(t)\psi_1 - \partial_t S(t)\psi_2\|_{s-4} &\leq (1+2\beta)\|\psi_1 - \psi_2\|_s\,,\ \forall t \geq 0\,, \\ \sup_{t\geq 0}\|\partial_t S(t)\psi_1 - \partial_t S(t)\psi_2\|_{s-4} &\leq (1+2\beta)\|\psi_1 - \psi_2\|_s \end{aligned}$$

with $\psi_i \in H_{per}{}^s$ for $i = 1, 2$.

Proof. We first observe that $S(0)\phi = \left[\left(\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} = \left[\widehat{\phi}\right]^{\vee} = \phi,\ \forall \phi \in H_{per}{}^s$, thus $S(0) = I$. From linearity of Fourier transformation and its inverse, we have that $S(t)$ is linear. In effect, let be $a \in \mathbb{C}$, ϕ, $\psi \in H_{per}{}^s$, we have

$$\begin{aligned} &S(t)(a\phi + \psi) \\ &= \left[\left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]t}[a\phi+\psi]^{\wedge}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= \left[\left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]t}[a\widehat{\phi}(k)+\widehat{\psi}(k)]\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= \left[a\left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]t}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z} + \left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]t}\widehat{\psi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= a\left[\left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]t}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} + \left[\left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]t}\widehat{\psi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= a\,S(t)\phi + S(t)\psi\,, \end{aligned}$$

for $t \geq 0$.

If $\phi \in H_{per}{}^s$ and $t > 0$, we will prove that $S(t)\phi \in H_{per}{}^s$ and $\|S(t)\phi\|_s \leq \|\phi\|_s$, that is $\|S(t)\| \leq 1$. In effect, similar to (3.3) we have

$$\begin{aligned} \|S(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|e^{ik^3t}e^{-\beta(k^2-1)k^2t}\hat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\hat{\phi}(k)|^2e^{-2\beta(k^2-1)k^2t} \qquad (3.25) \\ &\leq 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\hat{\phi}(k)|^2 = \|\phi\|^2_{H^s_{per}} \quad < \infty\ . \end{aligned}$$

Then, $S(t)\phi \in H_{per}{}^s$ and $\|S(t)\phi\|_s \leq \|\phi\|_s$, $\forall t > 0$, that is $S(t) \in L(H_{per}{}^s)$ with $\|S(t)\| \leq 1$, $\forall t > 0$.

Therefore,

$$\|S(t)\phi\|_s \leq \|\phi\|_s\,,\ \forall t \geq 0\,,\ \forall \phi \in H^s_{per}\,. \tag{3.26}$$

That is,

$$S(t) \in L(H^s_{per})\,, \quad \text{with } \|S(t)\| \leq 1\,,\ \forall t \geq 0\,. \tag{3.27}$$

Now we will prove that $S(t+r) = S(t) \circ S(r)$, $\forall t,\ r \geq 0$. In effect, let be $f \in H_{per}{}^{s}$ and t, $r \in (0, \infty)$,

$$\begin{aligned} S(t+r)f &= \left[\left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2](t+r)}\hat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= \left[\left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]t}e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]r}\hat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

We know that if $f \in H_{per}{}^{s}$ then $\hat{f} \in l_s^2$, that is

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\widehat{f}(k)|^2 \ < \ \infty\,. \tag{3.29}$$

We affirm that

$$\left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]r}\hat{f}(k)\right)_{k\in Z} \in l^2_s\,,\ \forall r \geq 0\,. \tag{3.30}$$

Indeed, when $r = 0$ it is evident that the statement is true. Thus, we will prove the case $r > 0$. For this, it is enough to observe that

$$\begin{aligned} &\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|e^{ik^3r}e^{-\beta(k^2-1)k^2r}\widehat{f}(k)|^2 \\ &\quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s\underbrace{|e^{i2k^3r}|}_{=1}\underbrace{e^{-2\beta(k^2-1)k^2r}}_{\leq 1}|\widehat{f}(k)|^2 \\ &\quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\widehat{f}(k)|^2 \ < \ \infty\,, \end{aligned}$$

since it worth (3.29).

Then, from (3.30) and taking the inverse Fourier transform, we have

$$\left[\left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]r}\hat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in H^s_{per}\,,\ \forall r \geq 0\,.$$

This motivates us to define

$$g_r := \left[\left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]r}\hat{f}(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \in H^s_{per}\,.$$

That is,

$$g_r = S(r)f\,. \tag{3.31}$$

Also, taking the Fourier transform to g_r we obtain

$$\widehat{g_r} = \left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]r}\hat{f}(k)\right)_{k\in Z}\,,$$

that is

$$\widehat{g_r}(k) = e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]r}\hat{f}(k)\,,\ \forall k\in Z\,. \tag{3.32}$$

Using (3.32) in (3.28) and from (3.31) we have

$$\begin{aligned} S(t+r)f &= \left[\left(e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]t}\hat{g}_r(k)\right)_{k\in Z}\right]^{\vee} \\ &= S(t)g_r \\ &= S(t)[S(r)f] \\ &= [S(t)\circ S(r)]f\,,\ \forall t,r\in(0,\infty)\,. \end{aligned}$$

Thus,

$$S(t+r) = S(t)\circ S(r)\,,\ \forall t,r\in(0,\infty)\,. \tag{3.33}$$

If $t = 0$ or $r = 0$, then the equality of (3.33) is also true, with this we conclude the proof of

$$S(t+r) = S(t)\circ S(r)\,,\ \forall t,r\in[0,\infty)\,. \tag{3.34}$$

Now, we will prove the continuity of $t\to S(t)\phi$

$$\|S(t+h)\phi - S(t)\phi\|_{H^s_{per}} \to 0 \ \text{ when } h\to 0\,. \tag{3.35}$$

In effect, using item 3 of the proof of the preceding theorem, we have

$$\begin{aligned} &\|S(t+h)\phi - S(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} \\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|(e^{ik^3(t+h)}e^{-\beta(k^2-1)k^2(t+h)} \\ &\qquad\qquad -e^{ik^3t}e^{-\beta(k^2-1)k^2t})\hat{\phi}(k)|^2 \\ &= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^s|\hat{\phi}(k)|^2|H(t+h)|^2 \end{aligned} \tag{3.36}$$

where $H(t+h) := e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)} - e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t}$.

We observe that $\lim_{h\to 0} H(t+h) = 0$.

Now, we again need the uniform convergence of the series in order to interchange the limits. For this, we take the k-th term of the series and bound it with a convergent series, that is

$$
\begin{aligned}
I_{k,t,h}: &= 2\pi(1+k^2)^s|\hat{\phi}(k)|^2\left|e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(t+h)}-e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)t}\right|^2 \\
&\leq 8\pi(1+k^2)^s|\hat{\phi}(k)|^2,
\end{aligned}
$$

where we have used the triangular inequality (property of the norm) and the inequality $e^{-\theta} \leq 1$ for $\theta \geq 0$.

Thus,

$$
\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t,h} \leq 4\|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty, \tag{3.37}
$$

and using the M-Test Weierstrass Theorem we get the series in (3.37) converges uniformly. Then, interchanging limits is allowed, that is

$$
\lim_{h\to 0}\|S(t+h)\phi - S(t)\phi\|^2_{H^s_{per}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lim_{h\to 0} I_{k,t,h} = 0
$$

and from here we conclude

$$
\lim_{h\to 0}\|S(t+h)\phi - S(t)\phi\|_{H^s_{per}} = 0 .
$$

Remark 3.5. It verifies

$$
\lim_{t\to 0^+}\|S(t)\phi - \phi\|_{H^s_{per}} = 0 .
$$

Therefore, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ is a semigroup of contraction of class C_o on $H_{per}{}^s$. Let ψ_1 and ψ_2 close data in $H_{per}{}^s$, then we will prove that their corresponding $S(\cdot)\psi_1$ and $S(\cdot)\psi_2$, respectively, are also close. Since $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ is of contraction for $t \geq 0$, we have

$$
\|S(t)\psi_1 - S(t)\psi_2\|_{H^s_{per}} = \|S(t)[\psi_1 - \psi_2]\|_{H^s_{per}} \leq \|\psi_1 - \psi_2\|_{H^s_{per}} .
$$

Taking supremum over $(0, +\infty)$ we have

$$
\sup_{t\in(0,+\infty)}\|S(t)\psi_1 - S(t)\psi_2\|_{H^s_{per}} \leq \|\psi_1 - \psi_2\|_{H^s_{per}} . \tag{3.38}
$$

From here we have that if $\psi_1 \to \psi_2$ then $S(\cdot)\psi_1 \to S(\cdot)\psi_2$.

We will prove: If $\phi \in H_{per}{}^s$ then $\partial_t S(t)\phi \in H_{per}{}^{s-4}$ and $\|\partial_t S(t)\phi\|_{s-4} \leq (1 + 2\beta)\|\phi\|_s$.

In effect, using $|k^3 i - \beta(k^2 - 1)k^2|^2 \leq (1 + 2\beta)^2(|k|^4)^2 = (1 + 2\beta)^2(|k|^2)^4 \leq (1 + 2\beta)^2(1 + |k|^2)^4$, $\forall k \in Z$ and $e^{-\theta} \leq 1$, $\forall \theta \geq 0$, we have

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_t S(t)\phi\|^2_{s-4} \\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-4}|(k^3 i - \beta(k^2-1)k^2)e^{[k^3 i - \beta(k^2-1)k^2]t}\widehat{\phi}(k)|^2 \\
&= 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)^{s-4}|k^3 i - \beta(k^2-1)k^2|^2 e^{[-2\beta(k^2-1)k^2]t}|\widehat{\phi}(k)|^2
\end{aligned}
$$

$$\leq (1+2\beta)^2 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s e^{[-2\beta(k^2-1)k^2]t} |\widehat{\phi}(k)|^2$$

$$\leq (1+2\beta)^2 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^s |\widehat{\phi}(k)|^2 < \infty$$

$$= (1+2\beta)^2 \|\phi\|_s^2 .$$

That is, $\|\partial_t S(t)\phi\|_{s-4} \leq (1+2\beta)\|\phi\|_s$. From this inequality we obtain

$$\|\partial_t S(t)\varphi_1 - \partial_t S(t)\varphi_2\|_{s-4} \leq (1+2\beta)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_s ,$$

with $\varphi_i \in H_{per}{}^s$ for $i = 1, 2$.

So, taking supremum over $[0, \infty)$ we have

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|\partial_t S(t)\varphi_1 - \partial_t S(t)\varphi_2\|_{s-4} \leq (1+2\beta)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_s .$$

Finally, if $\phi \in H_{per}{}^s$ we will prove the continuity of $t \to \partial_t S(t)\phi$. That is

$$\|\partial_t S(t+h)\phi - \partial_t S(t)\phi\|_{s-4} \to 0 \text{ when } h \to 0 .$$

In effect, as item 3 of the proof of the preceding theorem, we have

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t S(t+h)\phi - \partial_t S(t)\phi\|^2_{H^{s-4}_{per}} \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} \Big|(e^{ik^3(t+h)} e^{-\beta(k^2-1)k^2(t+h)} - e^{ik^3t} e^{-\beta(k^2-1)k^2t}). \\
&\qquad (ik^3 - \beta(k^2-1)k^2)\hat{\phi}(k)\Big|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} \Big|(e^{ik^3(h)} e^{-\beta(k^2-1)k^2(h)} - 1)(e^{ik^3t} e^{-\beta(k^2-1)k^2t}). \\
&\qquad (ik^3 - \beta(k^2-1)k^2)\hat{\phi}(k)\Big|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} \Big|e^{ik^3(h)} e^{-\beta(k^2-1)k^2(h)} - 1\Big|^2 e^{-2\beta(k^2-1)k^2t} . \\
&\qquad \Big|\hat{\phi}(k)\Big|^2 |ik^3 - \beta(k^2-1)k^2|^2 \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} |\hat{\phi}(k)|^2 |ik^3 - \beta(k^2-1)k^2|^2 e^{-2\beta(k^2-1)k^2t} |H(h)|^2
\end{aligned} \tag{3.39}$$

where $H(h) := e^{(ik^3-\beta(k^2-1)k^2)(h)} - 1$.

We observe that $\lim_{h\to 0} H(h) = 0$.

Now, we again need the uniform convergence of the series in order to interchange the limits. For this, we take the k-th term of the series and bound it with a convergent series, that is

$$\begin{aligned} I_{k,t,h}: &= 2\pi(1+k^2)^{s-4}|\hat{\phi}(k)|^2|ik^3-\beta(k^2-1)k^2|^2 e^{-2\beta(k^2-1)k^2t}|H(h)|^2 \\ &\leq (1+2\beta)^2 8\pi(1+k^2)^s|\hat{\phi}(k)|^2 , \end{aligned}$$

where we have used the triangular inequality (property of the norm) and the inequality $e^{-\theta} \leq 1$ for $\theta \geq 0$.

Thus,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{k,t,h} \leq 4(1+2\beta)^2\|\phi\|^2_{H^s_{per}} < \infty , \tag{3.40}$$

and using the M-Test Weierstrass Theorem we get the series in (3.40) converges uniformly. Then, interchanging limits is allowed, that is

$$\lim_{h\to 0}\|\partial_t S(t+h)\phi - \partial_t S(t)\phi\|^2_{H^{s-4}_{per}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\lim_{h\to 0} I_{k,t,h}}_{=0} = 0$$

hence we conclude

$$\lim_{h\to 0}\|\partial_t S(t+h)\phi - \partial_t S(t)\phi\|_{H^{s-4}_{per}} = 0 \ .$$

We will give some additional properties of $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Corollary 3.6. *With the hypothesis of preceding Theorem, the following assertions hold*

1. *If $\varphi \in H_{per}^s$ then $S(t)\varphi \in H_{per}^r$ and $\|S(t)\varphi\|_r \leq \|\varphi\|_s$, $\forall t \geq 0$, $\forall r \leq s$. That is $S(t) \in L(H_{per}^s, H_{per}^r)$, $\forall t \geq 0$, $\forall r \leq s$.*

2. *If $\varphi \in H_{per}^s$ then $S(\cdot)\varphi \in C([0,\infty), H_{per}^r)$, $\forall r \leq s$.*

3. *The application: $\varphi \to S(\cdot)\varphi$ is continuous and verifies:*

$$\begin{aligned} \|S(t)\varphi_1 - S(t)\varphi_2\|_r &\leq \|\varphi_1-\varphi_2\|_s , \ \forall t \geq 0 , \ \forall r \leq s , \\ \sup_{t>0}\|S(t)\varphi_1 - S(t)\varphi_2\|_r &\leq \|\varphi_1-\varphi_2\|_s , \ \forall r \leq s \end{aligned}$$

with $\varphi_i \in H_{per}^s$ for $i = 1, 2$.

4. *If $\varphi \in H_{per}^s$ then $\partial_t S(t)\varphi \in H_{per}^{r-4}$ and $\|\partial_t S(t)\varphi\|_{r-4} \leq (1+2\beta)\|\varphi\|_s$, $\forall t \geq 0$, $\forall r \leq s$. That is $\partial_t S(t) \in L(H_{per}^s, H_{per}^{r-4})$, $\forall t \geq 0$, $\forall r \leq s$* where

$$\partial_t S(t)\varphi = \left[\left((ik^3-\beta(k^2-1)k^2)e^{[ik^3-\beta(k^2-1)k^2]t}\widehat{\phi}(k)\right)_{k\in Z}\right]^\vee \in H^{r-4}_{per},$$

$$\forall \varphi \in H^s_{per} \ .$$

5. If $\varphi \in H_{per}^{s}$ then $\partial_t S(\cdot)\varphi \in C([0, \infty), H_{per}^{r-4})$, $\forall r \leq s$.

6. The application: $\varphi \to \partial_t S(\cdot)\varphi$ is continuous and verifies:

$$\begin{aligned} \|\partial_t S(t)\varphi_1 - \partial_t S(t)\varphi_2\|_{r-4} &\leq (1+2\beta)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_s\,,\ \forall t \geq 0\,, \\ \sup_{t\geq 0} \|\partial_t S(t)\varphi_1 - \partial_t S(t)\varphi_2\|_{r-4} &\leq (1+2\beta)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_s\,, \end{aligned}$$

$\forall r \leq s$ with $\varphi_i \in H_{per}^{s}$ for $i = 1, 2$.

7. If $r > s$ then $\| S(t)\varphi \|_r \leq \sqrt{C^*} \| \varphi \|_s$ and $\| \partial_t S(t)\varphi \|_{r-4} \leq (1 + 2\beta)\sqrt{C^*} \| \varphi \|_s$, $\forall t > 0$, $\forall \varphi \in H_{per}^{s}$, where C^* is such that $|G(k, t)| \leq C^*$, $\forall k \in Z$, $\forall t > 0$ with $G(k, t) := e^{-2\beta(k^2-1)k^2 t} \cdot (1 + k^2)^{r-s}$.

8. Finally,

$$\begin{aligned} \|S(t)\varphi\|_r &\leq \min\{1, \sqrt{C^*}\}\|\varphi\|_s\,,\ \forall t > 0\,,\ \forall r \in \mathbb{R}\,, \\ \|\partial_t S(t)\varphi\|_{r-4} &\leq (1+2\beta)\min\{1, \sqrt{C^*}\}\|\varphi\|_s\,,\ \forall t > 0\,,\ \forall r \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Proof. Its proof is analogous to the proof of the second Corollary of The- orem 3.1, where we use Sobolev imbedding.

Following, we state the Theorem 3.1 in function of the semigroup $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Theorem 3.7. *Let $\beta > 0$, $s \in \mathbb{R}$ and $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ the semigroup of class C_0 from Theorem 3.4, then $S(\cdot)\phi$ is the unique solution of*

$$\left| \begin{array}{l} u \in C([0, \infty), H^s_{per}) \cap C^1([0, \infty), H^{s-4}_{per}) \\ u_t = Au \ \ in \ H^{s-4}_{per} \\ u(0) = \phi \in H^s_{per} \end{array} \right.$$

in the sense that

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{S(t+h)\phi - S(t)\phi}{h} - AS(t)\phi \right\|_{H^{s-4}_{per}} = 0 \qquad (3.41)$$

where $A := -\partial_x^3 - \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2)$, and if $\phi_1 \sim \phi_2$ then $S(\cdot)\phi_1 \sim S(\cdot)\phi_2$.

Moreover, the following regularity is satisfied: If $\phi \in H_{per}^{s}$ then $S(t)\phi \in H^{\infty}$, $\forall t > 0$ and there is a constant $C > 0$ such that $\| S(t)\phi \| H_{per}^{r} \leq C \| \phi \| H_{per}^{s}$, $\forall t > 0$ and $\forall r \in \mathbb{R}$.

Also, $\| \partial_t S(t)\phi \|_r \leq (1 + 2\beta) \| \phi \|_s$, $\forall t \geq 0$, $\forall \phi \in H_{per}^{s}$.

Proof. The proof of (3.41) is analogous to the item 4 of the proof of The- orem 3.1. And the proof of the remaining statement is also similar to the proof of Theorem 3.1 and as a consequence of Theorem 3.4.

4 I THE NON HOMOGENEOUS PROBLEM IS LOCALLY WELL POSED

Using the Fourier transform, we will prove that the non homogeneous problem has a unique solution and it continuously depends respect to the initial data and the non homogeneity in compact intervals.

Theorem 4.1. *Let $s \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $F \in C([0, T], Hper^s)$, where $T > 0$, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ the semigroup of class C_o of homogeneous case ($F = 0$), introduced in the Theorem 3.4, and*

$$u_p(t) := \int_0^t S(t-\tau)F(\tau)d\tau$$

then $u_p \in C([0, T], H_{per}{}^s) \cap C^1([0, T], H_{per}{}^{s-4})$ and satisfies

$$\left| \begin{array}{l} \partial_t u_p + \partial_x^3 u_p + \beta(\partial_x^4 u_p + \partial_x^2 u_p) = F(t) \in H_{per}^{s-4} \\ u_p(0) = 0 \end{array} \right. \tag{4.1}$$

with the derivative given by

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u_p(t+h) - u_p(t)}{h} + \partial_x^3 u_p + \beta(\partial_x^4 u_p + \partial_x^2 u_p) - F(t) \right\|_{s-4} = 0\,. \tag{4.2}$$

Proof. We remark that $S(t-\tau)F(\tau) \in H_{per}{}^s$ $\forall \tau \in (0, t)$ and $\tau \mapsto S(t-\tau)F(\tau)$ is continuous in [0, t] then $\exists\, \underbrace{\int_0^t S(t-\tau)F(\tau)d\tau}_{u_p(t):=} \in H_{per}^s$.

Now, we will prove $u_p \in C([0, T], H_{per}{}^s)$, that is, $\| u_p(t+h) - u_p(t) \|_s \to 0$ when $h \to 0$. Let $h > 0$

$$\begin{aligned} u_p(t+h) - u_p(t) &= \int_0^{t+h} S(t+h-\tau)F(\tau)d\tau - \int_0^t S(t-\tau)F(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t \{S(t+h-\tau) - S(t-\tau)\}F(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_t^{t+h} S(t+h-\tau)F(\tau)d\tau\,, \end{aligned}$$

taking the norm $\| \cdot \|_s$ we obtain

$$\begin{aligned} \|u_p(t+h) - u_p(t)\|_s &\leq \underbrace{\| \int_0^t \{S(t+h-\tau) - S(t-\tau)\}F(\tau)d\tau \|_s}_{I_1:=} \\ &\quad \underbrace{+ \| \int_t^{t+h} S(t+h-\tau)F(\tau)d\tau \|_s}_{I_2:=}\,. \end{aligned}$$

Using the M-Test of Weierstrass we get

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^t \|S(t+h-\tau)F(\tau) - S(t-\tau)F(\tau)\|_s d\tau \\ &\leq \frac{\epsilon}{2T}\int_0^t d\tau = \frac{\epsilon t}{2T} \leq \frac{\epsilon T}{2T} = \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

since $\exists \delta > 0$ such that:

if $|h| < \delta$ then $\| S(t+h-\tau)F(\tau) - S(t-\tau)F(\tau)\|_s < \frac{\epsilon}{2T}$, $\forall \tau \in (0, t)$.

Using the mean value Theorem in H_{per}^{s} we obtain

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)F(\tau)d\tau \longrightarrow S(0)F(t) = F(t)$$

when $h \to 0$. Then

$$\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)F(\tau)d\tau = \underbrace{h}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)F(\tau)d\tau}_{\to F(t)} \longrightarrow 0$$

when $h \to 0$. So, we have

$$I_2 = \|\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)F(\tau)d\tau\|_s \longrightarrow 0$$

when $h \to 0$. That is, $I_2 < \frac{\epsilon}{2}$ whenever $|h| < \delta^*$.

Therefore, $\| u_p(t+h) - u_p(t)\|_s \leq I_1 + I_2 < \epsilon$ whenever $|h| < \min\{\delta, \delta^*\}$.

From definition of $u_p(t)$ we have $u_p(0) = 0$.

Now, we will prove that $\exists \partial_t u_p(t)$ in H_{per}^{s-4}. In effect,

$$\begin{aligned} &\frac{u_p(t+h) - u_p(t)}{h} \\ &= \frac{1}{h}\left\{\int_0^{t+h} S(t+h-\tau)F(\tau)d\tau - \int_0^t S(t-\tau)F(\tau)d\tau\right\} \\ &= \frac{1}{h}\int_0^t \{S(t+h-\tau)F(\tau) - S(t-\tau)F(\tau)\}d\tau \\ &\quad + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)F(\tau)d\tau\,. \end{aligned}$$

Using the mean value Theorem in H_{per}^{s-4} we obtain

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-\tau)F(\tau)d\tau \longrightarrow S(0)F(t) = F(t) \tag{4.3}$$

when $h \to 0$.

Since

$$\frac{S(t+h-\tau)F(\tau) - S(t-\tau)F(\tau)}{h}$$

converges uniformly to $\partial_t\{S(t-\tau)F(\tau)\}$ in H_{per}^{s-4} $\forall \tau \in [0, t]$, we obtain that

$$\int_0^t \frac{S(t+h-\tau)F(\tau)-S(t-\tau)F(\tau)}{h}d\tau$$

converges to $\int_0^t \partial_t\{S(t-\tau)F(\tau)\}d\tau$ when $h \to 0$.

Now, we remark that $\partial_t\{S(t-\tau)F(\tau)\} = (-\partial_x^3 - \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2))S(t-\tau)F(\tau)$ in H_{per}^{s-4}. Since $(-\partial_x^3 - \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2))$ is a closed operator, then

$$\int_0^t (-\partial_x^3-\beta(\partial_x^4+\partial_x^2))S(t-\tau)F(\tau)d\tau = (-\partial_x^3-\beta(\partial_x^4+\partial_x^2)) \int_0^t S(t-\tau)F(\tau)d\tau\,.$$

Therefore,

$$\int_0^t \partial_t\{S(t-\tau)F(\tau)\}d\tau = (-\partial_x^3-\beta(\partial_x^4+\partial_x^2)) \underbrace{\int_0^t S(t-\tau)F(\tau)d\tau}_{u_p(t):=}\,.$$

That is,

$$\int_0^t \frac{S(t+h-\tau)F(\tau)-S(t-\tau)F(\tau)}{h}d\tau \longrightarrow (-\partial_x^3-\beta(\partial_x^4+\partial_x^2))u_p(t) \tag{4.4}$$

when $h \to 0$.

Finally, in H_{per}^{s-4}, using (4.3) and (4.4) we get

$$\exists \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{u_p(t+h)-u_p(t)}{h}}_{\partial_t u_p(t)=} = (-\partial_x^3-\beta(\partial_x^4+\partial_x^2))u_p(t) + F(t)\,.$$

Using that $\| \partial_x^m f \|_{s-m} \leq \| f \|_s$, $\forall m \in Z^+$, $\forall f \in H_{per}^s$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t u_p(t+h) - \partial_t u_p(t)\|_{s-4} \\
=\ &\|(-\partial_x^3-\beta(\partial_x^4+\partial_x^2))u_p(t+h) + F(t+h) \\
&\quad -\{(-\partial_x^3-\beta(\partial_x^4+\partial_x^2))u_p(t) + F(t)\}\|_{s-4} \\
\leq\ &\|F(t+h)-F(t)\|_{s-4} \\
&\quad +\|(-\partial_x^3-\beta(\partial_x^4+\partial_x^2))\{u_p(t+h)-u_p(t)\}\|_{s-4} \\
\leq\ &\|F(t+h)-F(t)\|_{s-4} + \|-\partial_x^3\{u_p(t+h)-u_p(t)\}\|_{s-4} \\
&\quad +\|-\beta\partial_x^4\{u_p(t+h)-u_p(t)\}\|_{s-4} \\
&\quad +\|-\beta\partial_x^2\{u_p(t+h)-u_p(t)\}\|_{s-4} \\
\leq\ &\|F(t+h)-F(t)\|_{s-4} + \|u_p(t+h)-u_p(t)\|_{s-1} \\
&\quad +\mu\|u_p(t+h)-u_p(t)\|_s + \beta\|u_p(t+h)-u_p(t)\|_{s-2}\,.
\end{aligned}$$

Since $u_p(t) \in H_{per}^s \subset H_{per}^{s-1} \subset H_{per}^{s-2}$ then

$$\|\partial_t u_p(t+h) - \partial_t u_p(t)\|_{s-4}$$
$$\leq \|F(t+h) - F(t)\|_{s-4} + (1+2\beta)\|u_p(t+h) - u_p(t)\|_s .$$

Now, since F: $[0, T] \to H_{per}^{s-4}$ and u_p: $[0, T] \to H_{per}^{s}$ are continuous, then $\partial_t u_p$: $[0, T] \to H_{per}^{s-4}$ is continuous for $t \in [0, T]$, that is, $\partial_t u_p \in C([0, T], H_{per}^{s-4})$.

Therefore, $u_p \in C([0, T], H_{per}^{s}) \cap C^1([0, T], H_{per}^{s-4})$.

Theorem 4.2. *Let $\phi \in H_{per}^{s}$, $s \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $F \in C([0, T], H_{per}^{s})$, where $T > 0$, and $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ the semigroup of class C_o of contraction in H_{per}^{s} as* in Theorem 4.1, then

1. The function:

$$u^F(t) := S(t)\phi + \underbrace{\int_0^t S(t-\tau)F(\tau)d\tau}_{u_p(t)=}\,,\ t \in [0,T] \tag{4.5}$$

belongs to $C([0, T], H_{per}^{s}) \cap C^1([0, T], H_{per}^{s-4})$ and

2. $u^F(t)$ is the unique solution of

$$(P_1^F) \left| \begin{array}{l} u_t + u_{xxx} + \beta(u_{xxxx} + u_{xx}) = F(t) \in H_{per}^{s-4} \\ u(0) = \phi \end{array} \right. \tag{4.6}$$

with the derivative given by

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} + u_{xxx} + \beta(u_{xxxx} + u_{xx}) - F(t) \right\|_{s-4} = 0\,. \tag{4.7}$$

3. Let $\psi_j \in H_{per}^{s}$, $F_j \in C([0, T], H_{per}^{s})$, $j = 1, 2$. The map $\psi \to u$ is continuous in the following sense. Let u_1 and u_2 the corresponding solutions to initial data ψ_1 and ψ_2, and with non homogeneity F_1 and F_2 respectively. Then

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_s$$
$$\leq \|\psi_1 - \psi_2\|_s + T\|F_1 - F_2\|_{\infty,s}\,,\ t \in [0,T], \tag{4.8}$$

$$\underbrace{\sup_{t\in[0,T]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_s}_{\|u_1 - u_2\|_{\infty,s} :=}$$
$$\leq \|\psi_1 - \psi_2\|_s + T\|F_1 - F_2\|_{\infty,s}, \tag{4.9}$$

$$\|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{s-4}$$
$$\leq (1+2\beta)\|u_1(t) - u_2(t)\|_s + \|F_1 - F_2\|_{\infty,s-4}\,,\ t \in [0,T],$$
$$\leq (1+2\beta)\|u_1 - u_2\|_{\infty,s} + \|F_1 - F_2\|_{\infty,s}$$

$$\leq (1+2\beta)\|\psi_1-\psi_2\|_s + [(1+2\beta)T+1]\|F_1-F_2\|_{\infty,s} \tag{4.10}$$

where we have used the notation:

$$\|h\|_{\infty,r} = \sup_{t\in[0,T]} \|h(t)\|_r \ , \quad h \in C([0,T],H^r_{per}) \,. \tag{4.11}$$

Proof. We work the following steps.

1. Let $u(t) := u^F(t) = S(t)\phi + u_p(t)$, we will prove that

$$u \in C([0,T],H^s_{per}) \cap C^1([0,T],H^{s-4}_{per}).$$

In effect, as $S(\cdot)\phi \in C([0,T],H_{per}{}^s)$ and $u_p(\cdot) \in C([0,T],H_{per}{}^s)$ then $u(\cdot) = S(\cdot)\phi + u_p(\cdot) \in C([0,T],H_{per}{}^s)$.

Moreover, as $S(\cdot)\phi \in C^1([0,+\infty),H_{per}{}^{s-4})$ and $u_p(\cdot) \in C^1([0,T],H_{per}{}^{s-4})$, then $u(\cdot) = S(\cdot)\phi + u_p(\cdot) \in C^1([0,T],H_{per}{}^{s-4})$.

2. We will prove that u is the solution of $(P_1{}^F)$. In effect, we know that $\exists\partial_t S(t)\phi$ and $\exists\partial_t u_p(t)$ in $H_{per}{}^{s-4}$, then

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t) &= \partial_t \underbrace{S(t)\phi}_{u_h(t)=} + \partial_t u_p(t) \\
&= -\partial_x^3 u_h(t) - \beta(\partial_x^4 u_h(t) + \partial_x^2 u_h(t)) \\
&\quad -\partial_x^3 u_p(t) - \beta(\partial_x^4 u_p(t) + \partial_x^2 u_p(t)) + F(t) \\
&= -\partial_x^3\{u_h(t)+u_p(t)\} - \beta\left(\partial_x^4\{u_h(t)+u_p(t)\}\right. \\
&\quad \left. +\partial_x^2\{u_h(t)+u_p(t)\}\right) + F(t) \\
&= -\partial_x^3 u(t) - \beta\left(\partial_x^4 u(t) + \partial_x^2 u(t)\right) + F(t)
\end{aligned}$$

in $H_{per}{}^{s-4}$, where $u_h(\cdot)$ is solution of the homogeneous equation (P_1).

3. Also, $u(0) = u_h(0) + u_p(0) = \phi + 0 = \phi$.

4. Let $\psi_j \in H_{per}{}^s$ and $F_j \in C([0,T],H_{per}{}^s)$ for $j = 1, 2$, then

$$u_j(t) = S(t)\psi_j + \int_0^t S(t-\tau)F_j(\tau)d\tau$$

is solution of $(P_1{}^{Fj})$ with initial data $u_j(0) = S(0)\psi_j = \psi_j$, for $j = 1, 2$.

Then

$$u_1(t) - u_2(t) = S(t)\{\psi_1-\psi_2\} + \int_0^t S(t-\tau)\{F_1(\tau)-F_2(\tau)\}d\tau \,.$$

From where we obtain, for $t < T$:

$$
\begin{aligned}
&\|u_1(t) - u_2(t)\|_s \\
&\leq \|S(t)\{\psi_1 - \psi_2\}\|_s + \int_0^t \|S(t-\tau)\{F_1(\tau) - F_2(\tau)\}\|_s d\tau \\
&\leq \|\psi_1 - \psi_2\|_s + \int_0^t \|F_1(\tau) - F_2(\tau)\|_s d\tau \\
&\leq \|\psi_1 - \psi_2\|_s + \sup_{\tau\in[0,T]} \|F_1(\tau) - F_2(\tau)\|_s \int_0^t d\tau \\
&\leq \|\psi_1 - \psi_2\|_s + T \cdot \sup_{\tau\in[0,T]} \|F_1(\tau) - F_2(\tau)\|_s .
\end{aligned}
$$

Therefore,

$$
\sup_{t\in[0,T]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_s \leq \|\psi_1 - \psi_2\|_s + T \cdot \sup_{\tau\in[0,T]} \|F_1(\tau) - F_2(\tau)\|_s .
$$

5. On the other hand, in H_{per}^{s-4} we have

$$
\begin{aligned}
\partial_t u_j(t) &= \partial_t u_{h,j}(t) + \partial_t u_{p,j}(t) \\
&= [-\partial_x^3 - \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2)]u_{h,j}(t) + [-\partial_x^3 - \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2)]u_{p,j}(t) \\
&\quad + F_j(t) \\
&= [-\partial_x^3 - \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2)]u_j + F_j(t)
\end{aligned}
$$

for $j = 1, 2$. So,

$$
\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t) = [-\partial_x^3 - \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2)]\{u_1(t) - u_2(t)\} + \{F_1(t) - F_2(t)\}.
$$

Taking norm, we obtain

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{s-4} \\
&\quad = \|[-\partial_x^3 - \beta(\partial_x^4 + \partial_x^2)]\{u_1(t) - u_2(t)\} + \{F_1(t) - F_2(t)\}\|_{s-4} \\
&\quad \leq \|\partial_x^3\{u_1(t) - u_2(t)\}\|_{s-4} + \beta\|\partial_x^4\{u_1(t) - u_2(t)\}\|_{s-4} \\
&\qquad + \beta\|\partial_x^2\{u_1(t) - u_2(t)\}\|_{s-4} + \|F_1(t) - F_2(t)\|_{s-4} .
\end{aligned}
$$

Using $\| \partial_x^m \psi \|_{s-m} \leq \| \psi \|_s$, for $m = 1, 2, 3$ and $H_{per}^{s} \subset H_{per}^{s-1} \subset H_{per}^{s-2}$, we get

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_t u_1(t) - \partial_t u_2(t)\|_{s-4} \\
&\leq \|u_1(t) - u_2(t)\|_{s-1} + \beta\|u_1(t) - u_2(t)\|_s \\
&\quad + \beta\|u_1(t) - u_2(t)\|_{s-2} + \|F_1(t) - F_2(t)\|_{s-4} \\
&\leq (1 + 2\beta)\|u_1(t) - u_2(t)\|_s + \|F_1(t) - F_2(t)\|_s \\
&\leq (1 + 2\beta)\|u_1(t) - u_2(t)\|_s + \sup_{t\in[0,T]} \|F_1(t) - F_2(t)\|_{s-4} \\
&\leq (1 + 2\beta)\|u_1 - u_2\|_{\infty,s} + \|F_1 - F_2\|_{\infty,s} \\
&\leq (1 + 2\beta)\|\psi_1 - \psi_2\|_s + [(1 + 2\beta)T + 1]\|F_1 - F_2\|_{\infty,s} .
\end{aligned}
$$

Remark 4.3. Inequality (4.8) says that the solution of the non homoge- neous problem (P_1^F) continuously depends on the initial data and the non homogeneity F, in compact intervals.

Corollary 4.4. *The problem (P_1^F) has a unique solution.*

Proof. This follows by applying inequality (4.8) with $\psi_1 = \psi_2 = \phi$ and $F_1 = F_2 = F$.

Corollary 4.5. *The unique solution of* (P_1^F) *is*

$$\begin{aligned} u^F(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\{-ik^3+\beta(k^2-1)k^2\}t}\widehat{\phi}(k)\phi_k \\ &\quad + \int_0^t \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\{-ik^3+\beta(k^2-1)k^2\}(t-\tau)}\widehat{F}(k,\tau)\phi_k d\tau \, , \end{aligned}$$

where $\phi_k(x) := e^{ikx}$ *for* $x \in \mathbb{R}$.

5 I DISSIPATIVE PROPERTY OF THE HOMOGENEOUS PROBLEM

We will study the uniqueness of the solution for homogeneous case using another technique that involves the dissipative property of the prob- lem.

Let $\beta > 0$, $s \in \mathbb{R}$ and the homogeneous problem

$$(P_1) \quad \left| \begin{array}{l} w \in C([0,\infty), H^s_{per}) \cap C^1([0,\infty), H^{s-4}_{per}) \\ \partial_t w + \partial_x^3 w + \beta(\partial_x^4 w + \partial_x^2 w) = 0 \ \in H^{s-4}_{per} \\ w(0) = \phi \in H^s_{per} \, . \end{array} \right.$$

Theorem 5.1. *Let w the solution of (P_1) with initial data $\phi \in H_{per}^s$, then we obtain the following results:*

1. $\partial_t \| w(t) \|^2_{s-4} = -2\beta < \partial_x^2 w(t) + \partial_x^4 w(t),\ w(t) >_{s-4} \leq 0.$

2. $\| w(t) \|_{s-4} \leq \| \phi \|_{s-4} \leq \| \phi \|_s,\ t \geq 0.$

Proof. As $H_{per}^s \subset H_{per}^{s-4}$ then the following expressions are well defined: $< \partial_t w,\ w >_{s-4}$ and $< w,\ \partial_t w >_{s-4}$.

So, we have

$$\begin{aligned} \partial_t \|w(t)\|^2_{s-4} &= \partial_t < w(t), w(t) >_{s-4} \\ &= < \partial_t w(t), w(t) >_{s-4} + < w(t), \partial_t w(t) >_{s-4} \\ &= 2Re < \partial_t w(t), w(t) >_{s-4} \, . \end{aligned} \tag{5.1}$$

For the other hand,

$$\begin{aligned} < \partial_x^2 w + \partial_x^4 w, w >_{s-4} &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} \{\partial_x^2 w + \partial_x^4 w\}\widehat{\ }(k)\overline{\widehat{w}(k)} \\ &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} \underbrace{k^2(k^2-1)}_{M(k):=} \widehat{w}(k)\overline{\widehat{w}(k)} \end{aligned}$$

$$= \quad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} M(k) |\widehat{w}(k)|^2 \,. \qquad (5.2)$$

We remark that the series in (5.2) is convergent since $M(k) \leq k^4 \leq (k^2)^4 \leq (1 + k^2)^4$, $\forall k \in Z$ and $w(t) \in H_{per}^{\;s}$.

Moreover, as

$$M(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \in \{-1,0,1\} \\ k^2(k^2-1) > 0 & \text{if } k \in Z - \{-1,0,1\} \,, \end{cases}$$

and $M(k) \geq 12$, $\forall k \in Z - \{-1, 0, 1\}$, then the convergent series (5.2) is not negative. That is,

$$< \partial_x^2 w + \partial_x^4 w, w >_{s-4} \; \geq \; 0 \,.$$

So, we have

$$- < \partial_x^2 w + \partial_x^4 w, w >_{s-4} \; \leq \; 0 \,. \qquad (5.3)$$

Also, we obtain

$$\begin{aligned} < \partial_x^3 w, w >_{s-4} \quad &= \quad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} \widehat{\partial_x^3 w}(k) \, \cdot \overline{\widehat{w}(k)} \\ &= \quad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} (ik)^3 \widehat{w}(k) \, \cdot \overline{\widehat{w}(k)} \\ &= \quad -i \, 2\pi \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} k^3 |\widehat{w}(k)|^2}_{b:=} \,. \qquad (5.4) \end{aligned}$$

Now, we will prove that the series of the equality (5.4) is convergent. In effect, using the inequality: $|k|^3 \leq |k|^8 = (|k|^2)^4 \leq (1 + k^2)^4$ and $w(t) \in H_{per}^{\;s}$ we have

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} k^3 |\widehat{w}(k)|^2 \right| \\ &\qquad \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} |k|^3 |\widehat{w}(k)|^2 \\ &\qquad \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s-4} (1+k^2)^4 |\widehat{w}(k)|^2 \\ &\qquad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{s} |\widehat{w}(k)|^2 \; = \; \frac{1}{2\pi} \|w(t)\|_s^2 < \infty \,. \end{aligned}$$

Then the series (5.4) is convergent, that is,

$$< \partial_x^3 w, w >_{s-4} = -ib, \text{ with } b \in \mathbb{R} . \tag{5.5}$$

From (5.1), using $\partial_t w = -\beta(\partial_x^2 w + \partial_x^4 w) - \partial_x^3 w$, $\beta > 0$, the inequality (5.3) and the equality (5.5) we get

$$\begin{aligned}
\partial_t \|w(t)\|_{s-4}^2 &= 2Re < \partial_t w(t), w(t) >_{s-4} \\
&= 2Re < -\beta(\partial_x^2 w(t) + \partial_x^4 w(t)) - \partial_x^3 w(t), w(t) >_{s-4} \\
&= 2\beta Re \underbrace{\left\{- < \partial_x^2 w(t) + \partial_x^4 w(t), w(t) >_{s-4}\right\}}_{\leq 0} \\
&\quad -2 \underbrace{Re < \partial_x^3 w(t), w(t) >_{s-4}}_{=0} \\
&= -2\beta < \partial_x^2 w(t) + \partial_x^4 w(t), w(t) >_{s-4} \quad \leq \quad 0 .
\end{aligned}$$

Therefore, $\| w(t) \|^2_{s-4}$ is not increasing. Then, $\| w(t) \|^2_{s-4} \leq \| w(0) \|^2_{s-4}$, $\forall t \geq 0$.

As $(\| w(t) \|_{s-4} - \| w(0) \|_{s-4})(\| w(t) \|_{s-4} + \| w(0) \|_{s-4}) \leq 0$, we have

$$\| w(t) \|_{s-4} \leq \| w(0) \|_{s-4} \leq \| w(0) \|_s , \ \forall t \geq 0 .$$

That is, $\| w(t) \|_{s-4} \leq \| \phi \|_{s-4} \leq \| \phi \|_s$, $\forall t \geq 0$.

Corollary 5.2 (Continuous dependence of the solution of (P_1)). *Let u and v solutions of (P_1) with initial data ψ_1 and ψ_2 in H_{per}^s, respectively.*

Then the following assertions hold

$$\begin{aligned}
&\partial_t \|u(t) - v(t)\|_{s-4}^2 \\
&\quad = -2\beta < \partial_x^2\{u(t) - v(t)\} + \partial_x^4\{u(t) - v(t)\}, u(t) - v(t) >_{s-4} \\
&\quad \leq \ 0
\end{aligned}$$

and

$$\|u(t) - v(t)\|_{s-4} \leq \|\psi_1 - \psi_2\|_{s-4} \leq \|\psi_1 - \psi_2\|_s , \quad t \geq 0 . \tag{5.6}$$

Proof. Define $w := u - v$ then w satisfies:

$$\left| \begin{array}{l} \partial_t w + \partial_x^3 w + \beta\{\partial_x^2 w + \partial_x^4 w\} = 0 \\ w(0) = \psi_1 - \psi_2 . \end{array} \right.$$

We conclude using the Theorem 5.1.

Corollary 5.3 (Uniqueness of solution of (P_1))**.** *The problem (P_1) has a unique solution.*

Proof. In effect, let u and v solutions of (P_1) with the same initial data, that is $\psi_1 = \psi_2 = \psi$.

From (5.6) we obtain $\| u(t) - v(t) \|_{s-4} \leq \| 0 \|_s = 0$. Then, $\| u(t) - v(t) \|_{s-4} = 0$. So, $u(t) = v(t)$, $\forall t \geq 0$, that is $u = v$.

6 I CONCLUSIONS

From our study of the KdV-K-S equation in periodic Sobolev spaces, for the homogeneous (P_1) and non homogeneous (P_1^F) case we have obtained the following results:

1. By Fourier theory, we proved in detail the existence and uniqueness of solution to the model (P_1), as well as the continuous dependency of the solution respect to the initial data. Here we proved the regularity of the solution.

2. We introduced the semigroup theory to rewrite the solution of prob- lem (P_1) by this theory, making it much more fine.

3. In Theorem 4.2, using the Fourier transform, we proved that the non homogeneous problem (P_1^F) is locally well posed in compacts, obtaining continuous dependence with respect to the initial data and the non homogeneity.

4. We showed the dissipative property of the homogeneous problem, where an estimate for the norm of global solution was obtained, which allowed us to deduce the continuous dependence (with respect to the initial data) and uniqueness solution of (P_1).

5. In this paper we have obtained results that can be applied to the KdV-K-S models with two parameters, and these promote the anal- ysis of the corresponding convergence.

REFERENCES

[1] H.A. Biagioni, J.L. Bona, R. Iorio and M. Scialom, On the Korteweg de Vries Kuramoto Sivashinsky equation, *Adv. Diff. Eq.* **1**(1996), No. 1, 1–20.

[2] R. Iorio, V. Iorio, *Fourier Analysis and partial Differential Equa- tions*, Cambridge University, 2002.

[3] Z. Liu, S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative system*, Chapman Hall/CRC, 1999.

[4] J. Muñoz Rivera, *Semigrupos e equações Diferenciais Parciais*, LNCC, Petrópolis, 2007.

[5] H. K. Pathak, *An introduction to Nonlinear Analysis and Fixed Point Theory*, Springer-Singapur, 2018.

[6] A. Pazy, *Semigroups of linear operator and applications to partial dif- ferential equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer- Verlag, Berlín, 1983.

[7] Y. Santiago Ayala, Sobre la analiticidad del semigrupo C_o asoci- ado a un sistema viscoelástico, *Pesquimat* **6**(2003), No. 2, 27–36.

[8] Y. Santiago Ayala, Global existence and exponential stability for a coupled wave system, *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications* **16**(2012), No. 12, 29–46.

[9] Y. Santiago Ayala, *Tópicos de Análisis Funcional. Fundamentos y aplicaciones*, Ed. Acad. Española, Alemania, 2014.

[10] Y. Santiago Ayala, S. Rojas, Regularity and wellposedness of a problem to one parameter and its behavior at the limit, *Bulletin of the Allahabad Mathematical Society* **32**(2017), No. 2, 207–230.

[11] Y. Santiago Ayala, S. Rojas, Existencia y regularidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev periódico, *Selecciones Matemáticas* **6**(2019), No. 1, 49–65.

[12] Y. Santiago Ayala, S. Rojas, Unicidad de solución de la ecuación del calor en espacios de Sobolev periódico, *Selecciones Matemáticas* **7**(2020), No. 1, 172–175.

[13] Y. Santiago Ayala, S. Rojas, Existence and continuous depen- dence of the local solution of non-homogeneous KdV-K-S equation in periodic Sobolev spaces, *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications* **64**(2021), No. 1, 1–19.

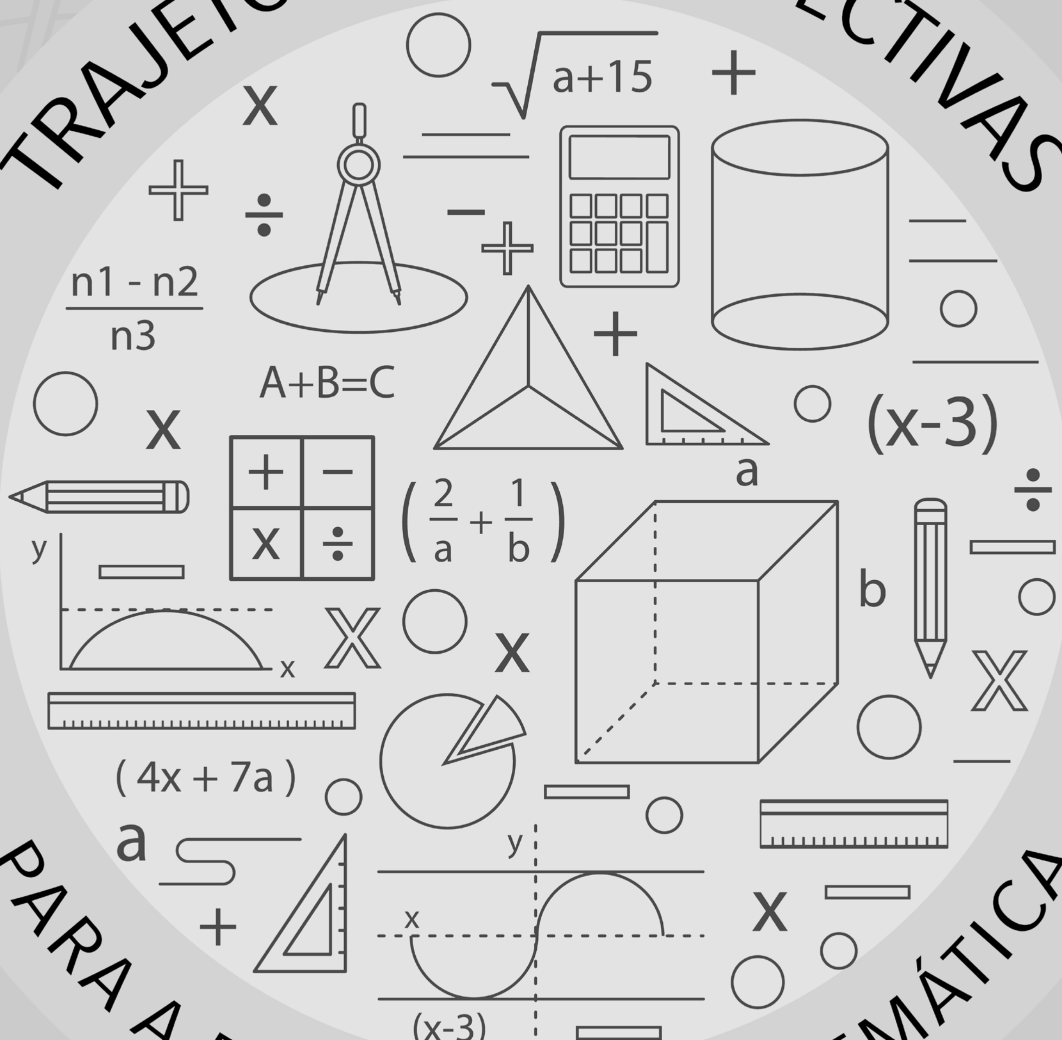
[14] D. Stuart, *Partial Differential Equations Example sheet 2*, 2014. http://www.damtp.cam.ac.uk/user/examples/D15b.pdf

[15] J. Topper, T. Kawahara, Approximate equations for long nonlin- ear waves on a viscous fluid, *J. Phys. Soc. Japan*, **44**(1978), 663–666.

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA - Professor do Departamento de Educação da Universidade do Estado da Bahia (Uneb - Campus VII) e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA (Uneb - Campus III). Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB), Especialista em Psicopedagogia Institucional e Clínica pela Faculdade Regional de Filosofia, Ciências e Letras de Candeias (IESCFAC), Especialista em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pelo Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco (CESVASF). Foi professor e diretor escolar na Educação Básica. Coordenou o curso de Licenciatura em Matemática e o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) no Campus IX da Uneb. Foi coordenador adjunto, no estado da Bahia, dos programas Pró-Letramento e PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa). Participou, como formador, do PNAIC/UFSCar, ocorrido no Estado de São Paulo. Pesquisa na área de formação de professores que ensinam Matemática, Ludicidade e Narrativas. Integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/UFSCar), na condição de pesquisador, o Grupo Educação, Desenvolvimento e Profissionalização do Educador (CNPq/PPGESA-Uneb), na condição de vice-líder e o Laboratório de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/LEPEM-Uneb) na condição de líder. É editor-chefe da Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM) e da Revista Multidisciplinar do Núcleo de Pesquisa e Extensão (RevNUPE); e coordenador do Encontro de Ludicidade e Educação Matemática (ELEM).

Atena
Editora
Ano 2022

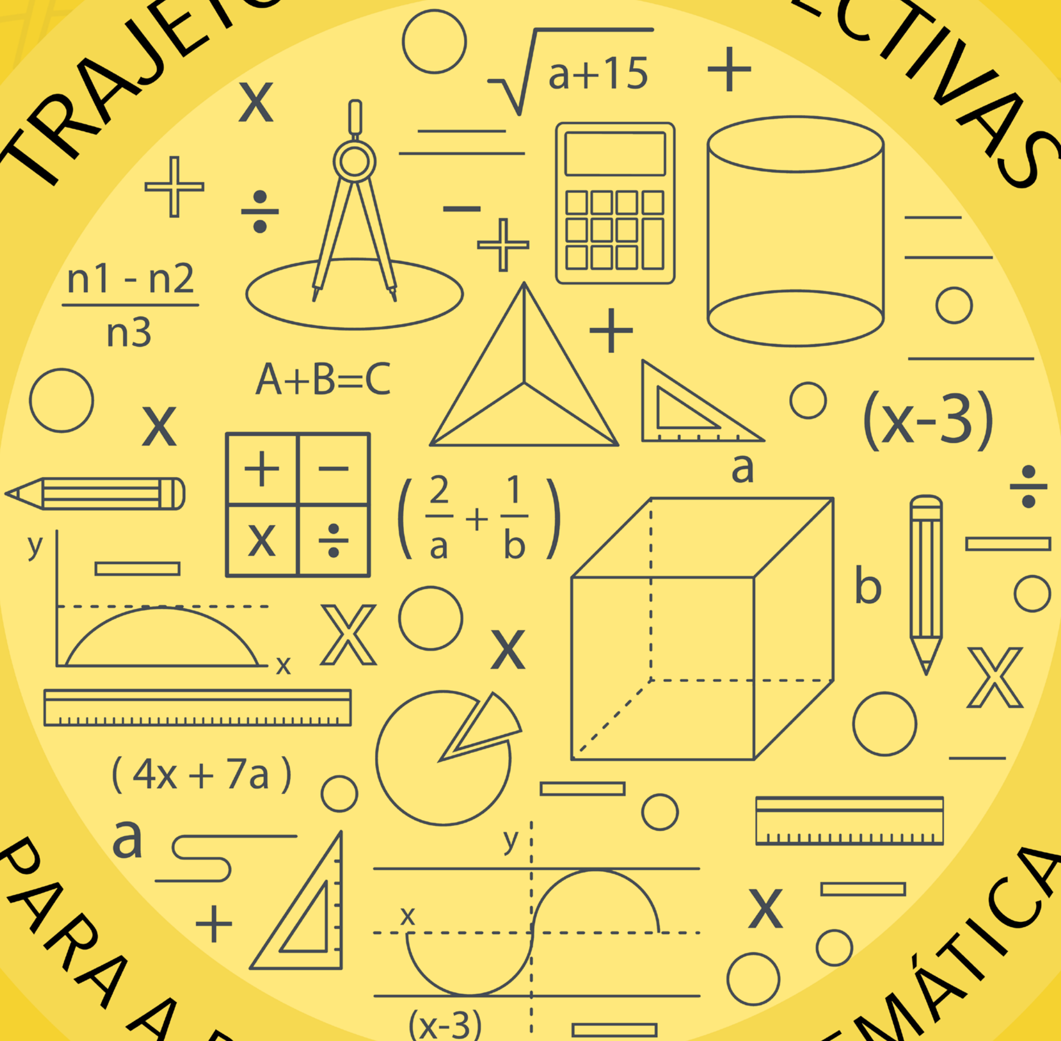
TRAJETÓRIAS E PERSPECTIVAS PARA A PESQUISA EM MATEMÁTICA



www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena
Editora
Ano 2022

TRAJETÓRIAS E PERSPECTIVAS



PARA A PESQUISA EM MATEMÁTICA

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br