A MATEMÁTICA NÃO É UM MONSTRO:

Cálculo para não matemáticos

Carlos Mometti

Atena
Editora
Ano 2022

A MATEMÁTICA NÃO É UM MONSTRO:

Cálculo para não matemáticos

Carlos Mometti

Atena Editora
Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

A matemática não é um monstro: cálculo para não matemáticos

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Maiara Ferreira
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: O autor
Autor: Carlos Mometti

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M732 Mometti, Carlos
A matemática não é um monstro: cálculo para não matemáticos / Carlos Mometti. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0769-0
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.690221011

1. Matemática. 2. Cálculo. 3. Funções. 4. Derivadas. I. Mometti, Carlos. II. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DO AUTOR

O autor desta obra: 1. Atesta não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao conteúdo publicado; 2. Declara que participou ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certifica que o texto publicado está completamente isento de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirma a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhece ter informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autoriza a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

PROJETO

EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

COMO UTILIZAR ESTE LIVRO?

Você, muito provavelmente, já se deparou com algumas dificuldades no que diz respeito a Matemática. Aí vai a primeira proposição deste livro: isso é normal! Sim, é normal. Dificuldades nada mais são do que um alerta para nosso sistema de compreensão de que esse ou aquele tema não foi bem assimilado ou entendido. Temos que aproveitar a presença desse "dispositivo" de aprendizagem para aprendermos de fato.

Ademais, o que ocorre na maioria dos casos e, principalmente, quando se trata da Matemática é o oposto: quando algo não é bem compreendido deixa-se de lado, criam-se sentimentos ruins que acabam por impossibilitar o desenvolvimento nessa disciplina. Além disso, um muro psicológico é construído, impedindo que novos conceitos matemáticos sejam aprendidos e incorporados. Agora lhes apresento a segunda proposição deste livro: a Matemática, como área de conhecimento construída não é um "monstro".

Outrossim, no sentido em que empregamos a palavra "monstro" queremos, na verdade, dizer que a Matemática a nível epistêmico não é constituída por conceitos e temas incompreensíveis, o que acontece, por vezes, é que devemos desenvolver um "amadurecimento" no âmbito matemático de modo a compreendermos definitivamente alguma coisa.

Assim, assumindo como contexto parte das dificuldades que alunas e alunos de diferentes cursos que utilizam a Matemática, bem como os demais interessados que sempre tiveram vontade de compreendê-la sem a "vergonha de ser julgado como um não inteligente", trago-lhes esta obra. A mesma foi escrita ao longo de alguns anos e tem como objetivo principal auxiliar os estudantes em sua jornada pelos estudos da Matemática.

Todavia, faz-se importante destacar que não é escopo deste livro assumir o papel de um livro-texto dessa ou daquela disciplina, ao contrário, para isso existem tantos outros com maior rigor matemático, por exemplo, das coleções disponibilizadas pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). O papel dos temas aqui desenvolvidos, sob a forma de capítulos, é o de auxiliar na compreensão elementar dos conceitos utilizados ao longo dos estudos de disciplinas como Cálculo ou Matemática Básica.

Nesse sentido, não há nenhum pré-requisito necessário para a utilização deste material, ao contrário, cada capítulo foi escrito de modo independente e poderá ser estudado também de modo independente. Dessa forma, trazemos ao longo de cada capítulo a seguinte construção: contextualização do tema, apresentação da linguagem, interpretação da linguagem, conceitos e alguns exercícios de fixação. Não há neste livro demonstrações matemáticas de teoremas e apresentação de resultados matemáticos, por tal motivo insistimos no fato de que não deve ser utilizado como livro-texto, mas sim como um apoio na construção do entendimento.

Desse modo, o eixo central para sua escrita deu-se pela preocupação como a Matemática é ensinada tanto na educação básica como no ensino superior. Lembro-me, quando ainda era aluno do curso de Física, que durante algumas aulas de cálculo tive momentos de “desespero”, isso mesmo, “desespero”, mesmo sabendo que era um amante da Matemática. Muitas vezes ouvia de alguns professores as seguintes expressões “isso é trivial”, “é fácil ver isso, não?”, “como assim você não entendeu?”, como se tudo aquilo seguisse a teoria platônica do inatismo das ideias.

Esses momentos fazia-me ansioso e, por conseguinte, levaram-me a refletir se realmente era “um aluno com capacidade para estar ali”. Vejam quantos absurdos estudantes dos diversos níveis devem enfrentar por simplesmente não compreenderem algum tema. O professor que expressa o que citei, em qualquer que seja a disciplina estudada, não é nem de longe um professor, mas sim um destruidor de mentes.

O que acontece, muitas vezes, e que também tenho percebido nas últimas pesquisas que venho desenvolvendo na área de Educação Matemática e que se encontram, partes delas publicadas, é que o problema da não compreensão de um determinado tema se deve a duas coisas principais: (i) metodologia inadequada do professor e (ii) disposição do aluno/aluna em aprender. O primeiro caracteriza-se por um fenômeno de ordem educacional e, de certa forma, não é muito tratado nos atuais cursos de licenciatura.

Alguns resultados nos mostraram que a tendência do professor pedagogo, que atua nos primeiros anos com o ensino da Matemática, é o de reproduzir um método que julga eficiente e pelo qual aprendeu quando ainda era aluno. Assim, essa reprodução metodológica por parte do professor leva consigo todas as dificuldades inerentes ao processo de aprendizagem, sem considerar que o estudante do século XXI não é aquele estudante do século XX, ou seja, não é um estudante com alto potencial tecnológico e desenvolvimento de pensamento.

Desta maneira, o estudante dito nativo digital – nascido a partir dos anos 2000 com o boom da internet – possui uma capacidade incrível de neuroplasticidade do cérebro, fato este que a literatura científica vem nos últimos anos dando muito destaque. Desse modo, por que não utilizarmos essas habilidades tecnológicas e esse pensamento de alto nível de complexidade que nossos jovens hoje possuem para ensinar a Matemática? Por que mantermos, ainda, a insistência a uma tradição que está com os dias contados no que tange à velha didática? Nossos alunos e alunas, atualmente, são outros e, portanto, nossos métodos e recursos também deve sê-lo.

Já no que se refere ao segundo ponto citado, a disposição do estudante em aprender, não deve ser lido aqui como uma crítica, mas sim como um chamamento daqueles que reclamam pela aprendizagem. Como as pesquisas em psicologia escolar têm nos mostrado nos últimos cinquenta anos, ninguém consegue aprender o que não quer. Se você está em um curso universitário que exige estudar uma disciplina voltada para a Matemática, será um grande desafio se não quiser aprender. Arrisco dizer que será mais do que isso, será um sofrimento desnecessário.

Assim, como fazer para desenvolver o conhecimento necessário nessa disciplina? A receita é simples: encare como um novo conhecimento. Não tenha vergonha de voltar às bases, de assumir não compreender ou conhecer, de perguntar. Absolutamente nenhuma pergunta é fora de contexto ou elementar! Sempre quando inicio um curso universitário com meus alunos, deixo isso bem claro: não há coisa mais eficiente para motivar nosso sistema de aprendizagem do que a dúvida. A partir dela conseguimos acionar mecanismos de atenção e tornar contextualizado um determinado conhecimento.

Dessa forma, não lhe trago com esse livro uma receita, mas um convite a aprender Matemática, sem preconceitos e como um passo antes do rigor exigido. Claro, em nenhum momento afirmaria que o rigor matemático não é importante, ao contrário, deve-se ter e empregar sempre, mas para quem ainda não entrou no navio, precisamos explicar como será a viagem...

Outrossim, ao longo desse material você vai encontrar cinco capítulos. Cada um deles, como já foi mencionado, está escrito de forma independente, o que significa que poderá começar pelo último, ir para o terceiro e terminar no primeiro, se quiser. Isso dependerá o seu próprio percurso de estudo. Além disso, para facilitar o uso e a compreensão da organização do material, disponibilizamos ao longo do texto cinco ícones: respostas dos exercícios, glossário, tome nota, atenção e objetivo.

Assim, com o primeiro deles expomos os resultados esperados para um determinado exercício. O segundo, por sua vez, dá-nos o significado de um conceito específico que talvez não conheçamos naquele momento. O terceiro ícone nos motiva à concentração, dando destaque para um assunto importante e que deve ser revisto. O quarto nos informa um dado ponto do texto que merece especial atenção. Já o último, objetivo, nos apresenta onde queremos chegar com aquele capítulo e tema.

No primeiro capítulo o tema abordado é o de *produtos notáveis*. Geralmente, esse procedimento – sim, se trata de um procedimento algébrico – é estudado ao longo dos anos finais do ensino fundamental. Por tal razão, muitas vezes os alunos e alunas chegam no ensino superior não se recordando – claramente pela falta de uso – desse importante mecanismo de expansão algébrica. Sua utilização se dá nas situações em que devemos expandir ou reescrever um polinômio para, por exemplo, integrarmos uma função. Você verá com maiores detalhes ao longo do capítulo. Mas, deixo-lhe uma dica: o primeiro capítulo será muito útil para compreender o quarto e o quinto, por isso, não deixe de estudá-lo.

No segundo capítulo, por sua vez, trabalhamos as *relações no plano*. No decorrer da minha trajetória como professor de Física e, posteriormente, migrante para a Matemática pude notar que cada vez mais os estudantes desconhecem a representação gráfica. Mais do que isso: não conseguem reconhecer nos pares ordenados um plano. Isso dificulta, sobremaneira, a aprendizagem em Matemática, uma vez que ao estudarmos as funções, por exemplo, representá-las graficamente é o primeiro passo para analisarmos um determinado comportamento. Isso, pode ser estendido para outras áreas, inclusive nas ciências humanas e sociais.

Já no capítulo 3, ademais, abordamos de modo didático e detalhado o estudo das *funções*, dando destaque para as mais utilizadas no estudo do cálculo. Como um amante da Matemática, para além da Geometria, as funções representaram um desenvolvimento e tanto do pensamento humano! Com elas conseguimos não apenas representar situações, mas modelar fenômenos e ser capaz de prever o que poderá acontecer num dado momento. Isso é fantástico!

Após o estudo das funções, vamos no capítulo 4 estudar o conceito de *limite*. Talvez seja um dos mais bonitos que já tenha estudado até o momento, pois por meio de sua compreensão conseguimos estabelecer não apenas relações, como também visualizar e prever o comportamento de determinadas funções. Conhecer os limites, bem como a noção de continuidade, será de extrema importância para seguir aprendendo na Matemática superior.

Assim, seguindo os limites e a noção de continuidade, adentramos no estudo das derivadas no quinto capítulo. Com as derivadas conseguimos interpretar a natureza de modo tal que nos possibilitou, atualmente, todo esse avanço tecnológico. Sim, pode parecer desconectado e longe da visão num primeiro momento, mas acredite, as derivadas são utilizadas por você mesmo sem saber! A principal ferramenta para seu estudo são as funções, por tal razão o capítulo 3 desenvolve primeiramente essa temática.

Finalmente, no capítulo 6 desenvolvemos o estudo das *integrais*. Quando fui perguntado por um estudante de engenharia sobre qual seria o maior "monstro" para os alunos sem muito pensar respondi: certamente as integrais! Embora a maior dificuldade esteja na compreensão de um único símbolo, todos nós fazemos, de certa forma e guardadas as devidas proporções, integrações desde crianças. A partir do momento que você pega uma malha quadriculada e conta quantos quadradinhos são necessários para preencher um retângulo, veja, você já estava integrando e não sabia.

Então, por que razão ela se tornou tão temida? Por exigir maior treino e habilidade de manipulação com a linguagem algébrica. Pode estar certo: se você treinar as transformações polinomiais e compreender que se trata de uma manipulação lógica de uma linguagem, munida de representação de valor, a dificuldade com as integrais não será grande.

Neste sentido, ao elaborar este material, pensamos em como tornar o estudo dos números, equações, expressões e manipulações matemáticas menos *doloroso* e com uma aprendizagem eficaz por parte dos estudantes do ensino superior. Assim, decidimos acrescentar uma linguagem diversa daquela utilizada em muitos livros, onde estão presentes apenas números, símbolos e equações. Optamos por uma linguagem acessível a todos, de modo que tais conteúdos, previstos numa ementa de ensino superior, possam chegar aos nossos alunos e não causar tanto espanto ou desmotivação.

Desse modo, esperamos que nosso trabalho seja útil para sua aprendizagem, caro aluno e cara aluna. Útil no sentido de dar-lhes ferramentas importantes para seu desenvolvimento enquanto estudante e, posterior aplicação durante sua vida profissional. Porquanto temos dado as premissas necessárias, distribuídas e dissolvidas ao longo de todo material, esperamos que tenha um bom percurso e que não veja a matemática como algo "difícil", "impossível" ou, até mesmo, "algo cansativo". Lembre-se: a Matemática não é um "monstro".

Desejamos-lhes bons estudos!

Prof. Carlos Mometti

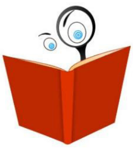
USP e Università di Bologna

SUMÁRIO

LISTA INDICATIVA DE ÍCONES

Ao longo deste material, utilizamos ícones abaixo, os quais representam:

Respostas dos exercícios



Glossário

Tome nota

Atenção!

Objetivo

CAPÍTULO 1

PRODUTOS NOTÁVEIS

Objetivos de aprendizagem

Definir produtos notáveis por meio de suas propriedades, estabelecer algumas relações entre eles para, finalmente, aplicarmos a situações problema do curso.

Em questões cotidianas é muito comum depararmo-nos com situações em que os cálculos matemáticos estão presentes. Seja na compra de alimentos durante a realização da feira semanal, no pagamento de contas ao início de cada mês ou, até mesmo, no plano de comprar algum produto durável que exigirá um parcelamento maior.

Neste sentido, o conhecimento de ferramentas matemáticas faz-se necessário para que saibamos lidar com a linguagem do mundo financeiro e contemporâneo, para não citar aspectos científicos. Nesta primeira unidade, iremos tratar de uma das ferramentas mais utilizadas nos cálculos matemáticos, a fatoração.

1 | FATOR COMUM

Inicialmente, *fatorar*, em matemática, significa decompor em fatores, ou seja, transformar uma adição ou subtração em uma multiplicação. Assim, quando queremos um número qualquer fatorado, significa que o queremos escrito sob outro modo, neste caso, num modo multiplicativo.

Exemplo 1.1

$$6x + 6y = 6\,(x + y)$$

Note que no exemplo 1.1, o número 6 aparece nos dois termos do lado esquerdo da equação e é chamado de *fator comum*. Para reescrevermos tal equação no modo de uma multiplicação, isolamos o número 6 na equação o escrevemos, entre parênteses, o que restar, neste caso a soma x + y.

*Na linguagem matemática, utilizamos a expressão **colocar em evidência**, quando queremos isolar algum número ou fator numa equação.*

Exemplo 1.2

$$12x + 6y = 6(2x + y)$$

Já no exemplo 1.2 acima, o fator comum ainda continua sendo o número 6, porém tivemos que decompor o número 12 de modo a reduzirmos a soma do lado esquerdo numa multiplicação do lado direito.

Para aplicarmos tal fatoração no caso geral, utilizamo-nos de uma regra básica da matemática chamada de **propriedade distributiva.** Tal propriedade diz-nos que um número multiplicado por uma soma ou subtração (entre parênteses) deve ser multiplicado por cada fator. Como podemos observar no exemplo abaixo:

Exemplo 1.3

$$a.(x + y) = ax + ay$$

$$\text{então } ax + ay = a.(x + y)$$

Assim, **fatorar** um número é **reescrevê-lo num formato de multiplicação**. Porém, para quê utilizamos tal ferramenta? Este procedimento é importante, pois auxilia-nos durante a resolução de cálculos matemáticos em equações ou inequações, como veremos posteriormente.

Exemplo 1.4: Fatoração de um número

Conforme explicitado acima, fatorar significa reescrever um número ou expressão em forma de multiplicação, tomemos como exemplo o número 8. Ele pode ser reescrito de algumas formas:

$$8 = 2 . 4$$

$$8 = 4 . 2$$

$$8 = 2 . 2 . 2$$

E todas essas formas são fatorações **válidas** para esse número.

Exercício 1.1

Faça a fatoração dos seguintes números:

a. 4x+8y

b. 3y-12x

c. 15z+10y-5x

d. -16+4x

e. $\frac{1}{2}$x-5x

2 I AGRUPAMENTO

Vimos, na seção anterior, que fatorar um número é o mesmo que colocar o fator comum daquela expressão em evidência. Mas, temos alguns outros casos de fatoração que podemos estudar como, por exemplo, o caso do agrupamento.

Considere a fatoração da seguinte expressão:

$$P = ax + ay + bx + by \quad \textbf{(1.1)}$$

A expressão que representa, matematicamente, a letra P não possui um fator comum a todos os termos, porém se considerarmos cada parcela veremos que para cada duas parcelas haverá um fator comum, ou seja, nas duas primeiras parcelas o fator comum é a letra ***a*** e nas duas seguintes é a letra ***b***. Então, podemos reescrever como:

$$P = a(x + y) + \ b(x + y) \quad \textbf{(1.2)}$$

Na expressão 1.2 acima, fizemos a fatoração separando as duas parcelas iniciais e as duas finais. Porém, seguindo a mesma lógica, notamos que a soma (x + y) está presente nas duas parcelas da expressão, portanto, vamos agrupar tais termos, ou seja, (x + y) é um fator comum a ambas as parcelas:

$$P = (a + b).(x + y) \quad \textbf{(1.3)}$$

Note que a expressão 1.3 acima está reescrita num modo multiplicativo, isto é, fatorado da expressão 1.1. A esta propriedade chamamos de *agrupamento*.

Exemplo 1.5

$$ab + 3b + 7a + 21 = ab + 3b + 7a + 3.7$$

reorganizando os termos temos que:

$$a(7 + b) + 3(b + 7) = a(b + 7) + \ 3(b + 7)$$

e aplicando, agora, a regra do agrupamento:

$$(b + 7).(a + 3)$$

No exemplo 1.5 acima, aplicamos a regra do fator comum e, posteriormente, a regra do agrupamento.

Escrever (7 + b) ou (b + 7), neste caso, não muda em nada nossa expressão, uma vez que a adição possui aquilo que chamamos de comutatividade.

Exemplo 1.6

$$2xy - 12x + 3by - 18b$$

aplicando a regra do fator comum, temos:

$$x(2.1.y - 2.6) + b(3.1.y - 3.6)$$

onde decompomos os números de dentro dos parênteses para facilitar os cálculos, então temos:

$$2x(y - 6) + 3b(y - 6)$$

aplicando a regra do agrupamento, ficamos com:

$$(2x + 3b).(y - 6)$$

Exercício 1.2

Faça a fatoração e aplique a regra do agrupamento nas seguintes expressões:

a. 2xy-4x+3xy-6x+4xy-8x

b. 2x+ai+2y+ax

c. 28ab-21ac-7a

d.ax-a+bx-b

3 I DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS

Em alguns casos, aparecerá expressões com grau maior do que um, ou seja, expressões quadráticas (grau 2), cúbicas (grau 3) etc. Tais expressões também podem ser fatoradas e um dos casos para isso é o que chamamos de diferença de dois quadrados.

Tal diferença é definida por:

$$a^2 - b^2 = (a + b).(a - b) \quad \textbf{(1.4)}$$

A expressão 1.4 é chamada de diferença de dois quadrados. Quando nos depararmos com expressões análogas, basta decompor os números de modo a reduzi-los em tais condições. Como veremos nos exemplos abaixo:

Exemplo 1.7

$$(4x)^2 - (3y)^2 = (4x - 3y).(4x + 3y)$$

QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$\underbrace{(x-y)^2}_{\text{Quadrado da diferença de dois termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{Quadrado do 1º termo}} - \underbrace{2xy}_{\text{Duas vezes o produto do 1º pelo 2º}} + \underbrace{y^2}_{\text{Quadrado do 2º termo}}$$

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo.

Exemplo 1.8

$$25x^2 - 4y^2$$

dada a expressão acima vamos, inicialmente, fatorar o 25 e o 4, para deixá-los como potências de dois, ou seja:

$$5^2 = 25 \; e \; 2^2 = 4$$

então, reescrevemos a expressão como:

$$(5x)^2 - (2y)^2$$

feito isso, aplicamos a definição dada pela equação 1.4 acima, resultando em:

$$(5x)^2 - (2y)^2 = (5x - 2y).(5x + 2y)$$

Exemplo 1.9

Dada a expressão,

$$64a^2 - 1$$

utilizando o mesmo procedimento que no exemplo 1.7 temos

$$(8a)^2 - 1^1 = (8a - 1).(8a + 1)$$

Exercício 1.3

Dadas as expressões abaixo, reescreva-as utilizando a definição 1.4:

a. y^4-16a^2

b. (xy+a)(xy-a)

c. x^2- $\frac{1}{2}$).(x^2+ $\frac{1}{2}$)

d. 9b^2-1

4 I TRINÔMIO QUADRADO PERFEITO

Do mesmo modo, podemos ir aumentando o grau de complexidade das expressões que queremos fatorar. Para isso, lançaremos uso de duas outras definições, a saber:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad \textbf{(1.5)}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad \textbf{(1.6)}$$

As expressões 1.5 e 1.6 são o que chamamos na matemática de trinômio quadrado perfeito. Elas nos ajudam a simplificar expressões durante a resolução de cálculos matemáticos. A diferença da primeira com relação a segunda identidade está no sinal. Vejamos alguns exemplos abaixo.

Exemplo 1.10

$$(2x + 2)^2 = (2x)^2 + 2.2.x + 2^2$$

o que nos dá:

$$4x^2 + 4x + 4$$

Observe:

(1) representa o quadrado do primeiro termo

(2) representa duas vezes a multiplicação do 1º pelo 2º termo

(3) representa o segundo termo elevado ao quadrado

QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

$$\underbrace{(x+y)^2}_{\text{Quadrado da soma de dois termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{Quadrado do 1º termo}} + \underbrace{2xy}_{\text{Duas vezes o produto do 1º pelo 2º}} + \underbrace{y^2}_{\text{Quadrado do 2º termo}}$$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

Exemplo 1.11

Usando o mesmo raciocínio do exemplo anterior:

$$(x + 4y)^2 = x^2 + 8xy + 16y^2$$

Exemplo 1.12

Seguindo com a aplicação da diferença ao quadrado:

$$(4-y)^2 = 16 - 8y + y^2$$

Deste modo, vimos nos três casos anteriores que para cada expressão algébrica temos um modo diferente de reduzir a uma multiplicação. Assim, resumidamente podemos aplicar as seguintes regras:

$$(a-b).(a+b) = a^2 - b^2 \quad \textbf{(1.7)}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \textbf{(1.8)}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \textbf{(1.9)}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \textbf{(1.10)}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \textbf{(1.11)}$$

$$(a+b).(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \quad \textbf{(1.12)}$$

$$(a-b).(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad \textbf{(1.13)}$$

Todas as sete igualdades acima listadas são chamadas, na matemática, de produtos notáveis. Sua correta manipulação auxilia-nos a resolver muitos dos problemas algébricos envolvendo cálculos de limites e derivadas, por exemplo, conforme estudaremos mais adiante.

Exercício 1.4

Aplicando a regra dos produtos notáveis, desenvolva as seguintes expressões:

a. $(x+8)^2$

b. $(2-3a)^2$

c. $(3x+y)^2$

d. $(1+5m).(1-5m)$

e. $(ab-c)^2$

f. $(m-1)^3$

g. $(a^3-b^3).(a^3+b^3)$

h. $(4+h)^2$

i. $(10+a^2x).(10-a^2x)$

j. $(x-\frac{y}{2})^2$

k. $(a+t)^3$

l. $(y+2xy)^2$

Exercício 1.5

Simplifique as expressões algébricas abaixo

a. $(x-y)^2 - x(x-2y)$

b. $(x-2)^2 + a(3a+2)$

c. $(m+1).(m-1) + (m+1)^2 - 2m$

d. $(x+a^2).(x-a^2) + a^2(a^2-1)$

e. $(a+b)^2-(a-b)^2-4ab$

Exercício 1.6

Fatore os seguintes polinômios:

a. x^2+5x

b. $4x^2-12x+9$

c. x^3-2x^2+4x-8

d. $4x^2-9$

e. $a^6-5a^5+6a^3$

f. $ax-a+bx-b$

g. $64y^2+80y+25$

h. m^6-1

Exercícios complementares

1. Colocar em evidência significa:

a) multiplicar

b) dividir

c) extrair o mínimo múltiplo comum

d) isolar um número ou fator numa equação

e) dividir frações com diferentes denominadores

2. (7x – 13) e (-13 + 7x) são equivalentes pela propriedade:

a) associativa

b) distributiva

c) comutativa

d) fator comum

3. Podemos dizer, de modo geral, que um produto notável:

a) possui duas parcelas da soma

b) é o produto pela diferença

c) produto de duas somas

d) produto de duas subtrações

4. Sobre o cubo da soma é correto afirmar que:

a) possui três somas com as quais se faz o produto

b) possui três diferenças com as quais se faz o produto

c) possui duas parcelas de soma e uma de subtração com as quais se faz o produto

d) possui duas parcelas de subtração e uma de soma com as quais se faz o produto

5. Simplificando a expressão resulta em:

(a) $\frac{c-3}{c+3}$

(b) 1

(c) $\frac{c+3}{c-3}$

(d) c^2

(e) $\frac{c+1}{c-1}$

Respostas dos exercícios propostos

Exercício 1.1

a) $4(x+2y)$ b) $3(y-4x)$ c)$5(3z+2y-x)$ d)$4(-4w+x)$ e)$x(-\frac{9}{2})$

Exercício 1.2

a) $11xy-18x$ b)$(a+2)(x+y)$ c)$a(28b-21c-7)$ d) $(x-1)(a+b)$

Exercício 1.3

a)$(y^2+4a)(y^2-4a)$ b)$x^2y^2-a^2$ c) $x^4-\frac{1}{4}$ d)$(3b+1)(3b-1)$

Exercício 1.4

a)$x^2+16x+64$ b)$4-12a+9a^2$ c)$9x^2+6xy+y^2$ d)$1-m^2$

e)$a^2b^2-2abc+c^2$ f)m^3+3m^2+3m+1 g)a^6-b^6 h)$16+8h+h^2$

i)$100-a^4x^2$ j)$x^2-xy+\frac{y^2}{4}$ k)$a^3-3a^2t-3at^2-t^3$ l)$y^2(1+4x+4x^2)$

Exercício 1.5

a)$y(y-4x)$ b)$x^2-4x+4+3a^2+2a$ c)$2m^2$

d)x^2-a^2 e) 0

Exercício 1.6

a)$x(x-5)$ b)$(2x-3)^2$ c)$(x-2)(x^2-4)$

d) $(2x-3)(2x+3)$ e) $a^3(6-5a^2+a^3)$ f)$(a+b)(x-1)$

g)$y(64y+80)+25$ h) $(m^3-1)(m^3-1)$

Exercícios complementares da unidade

1. D 2. C 3. B 4. A 5. C

CAPÍTULO 2

RELAÇÕES NO PLANO

Objetivos de aprendizagem

Estudar a definição de plano cartesiano e suas relações, para aplicações posteriores.

Como vimos na unidade anterior, algumas relações algébricas podem ser representadas por diversas letras, e associações de letras e números. É muito comum, durante nosso estudo da matemática, desenvolvermos algumas confusões no que diz respeito à simbologia utilizada nos cálculos e representações. Deste modo, nesta unidade iremos tratar brevemente de algumas representações matemáticas algébricas e gráficas, definindo os conceitos de par ordenado, produto cartesiano e plano cartesiano.

1 | PAR ORDENADO

Em Matemática, chamamos de *par* todo conjunto formado por dois elementos. Representamo-lo do seguinte modo: {a, b} De acordo com a igualdade de conjuntos, se invertermos a ordem de um par ordenado não produziremos, necessariamente, um novo par. Assim,

$$\{1, 2\} = \{2,1\};\ \{a, b\} = \{b, a\};\ \{-C, D\} = \{D, -C\} \quad \textbf{(2.1)}$$

Partindo desta noção definiremos, então, que *par ordenado* é todo par que para cada elemento a e cada elemento b, admitimos a existência de um terceiro elemento (a, b), de modo que:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d \quad \textbf{(2.2)}$$

A relação dada por 2.2 lê-se: o par (a, b) é igual ao par (c, d) se, e somente se, o elemento a for igual ao elemento c e se o elemento b for igual ao elemento d. Isto é: se, e somente se na matemática significa que tudo que acontece na “ida” de uma expressão deve acontecer, também, na “volta”.

No entanto, poderíamos nos perguntar: para que utilizamos tal noção matemática? Utilizamos o conceito matemático de pares ordenados para representarmos, por exemplo, um ponto num plano.

2 I SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

A partir da noção anterior de par ordenado, vamos tratar agora de um sistema cartesiano ortogonal. Um sistema cartesiano ortogonal é definido como o conjunto formado por duas retas, perpendiculares entre si, determinando um plano.

De acordo com a imagem 1, tal sistema cartesiano é determinado por duas retas, as quais chamamos de eixo. O eixo vertical é denominado *ordenada* e o eixo horizontal *abscissa*. O ponto de intersecção entre estes dois eixos – ponto no qual as retas se tocam – é conhecido como a origem O do sistema. Além disso, as quatro regiões que se originam a partir da divisão do plano pelos eixos são chamadas de quadrantes. Iniciando da direita para a esquerda, temos o primeiro, segundo, terceiro e quarto quadrantes.

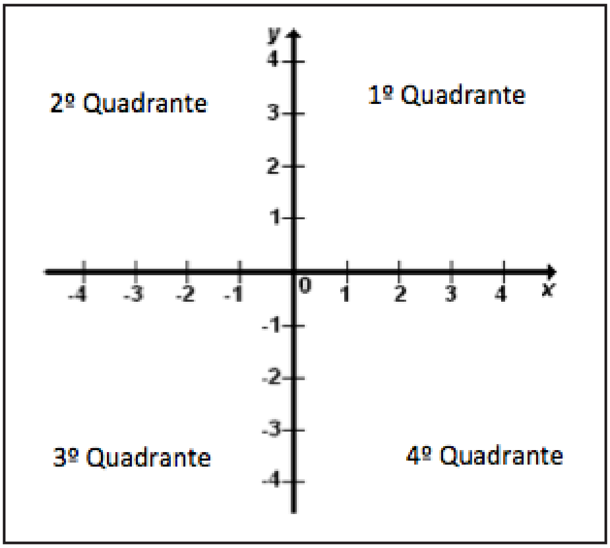


Figura 1: sistema cartesiano ortogonal. Fonte: autoria.

Para representarmos um ponto neste plano, precisamos atribuir ao primeiro um par ordenado, ou seja, o eixo horizontal representando a abscissa e o vertical a ordenada. Na geometria definida como analítica, um ponto no plano é sempre representado por um par (x, y). Na ordem, x representa a coordenada horizontal e y a vertical.

Deste modo, dividimos os eixos, a partir da origem, em sinais – positivo e negativo. Tomando o ponto 0 (origem do sistema) para cima (vertical) temos o sinal positivo. Deste mesmo ponto de origem para baixo (vertical) temos o sinal negativo. O mesmo se aplica para o eixo horizontal, uma vez que todos os pontos que estão à esquerda de 0 são negativos e os que estão à direita de 0 são positivos.

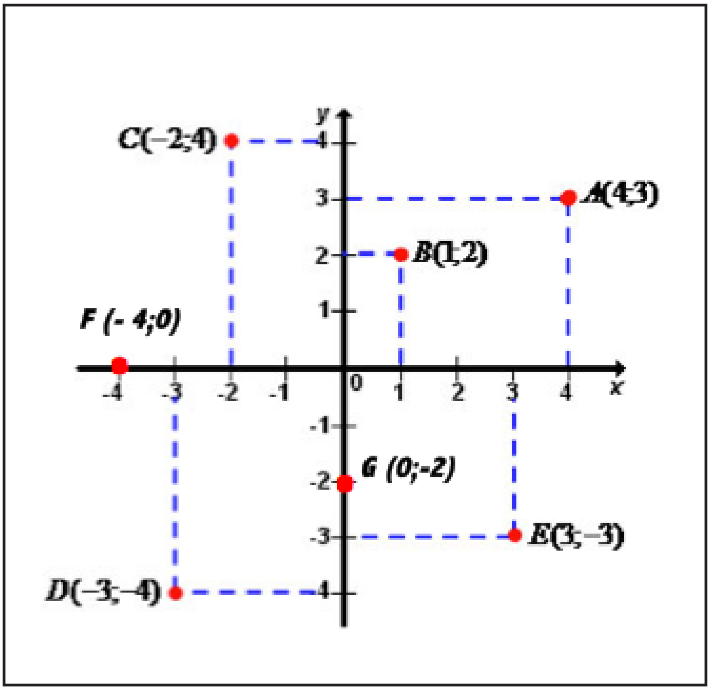


Figura 2: Pontos representados no sistema cartesiano. Fonte: autoria.

Como podemos observar, na figura 2, temos os seguintes pontos:

$$A = (4,3); B = (1,2); C = (-2,4);\ D = (-3,-4);\ E = (3,-3);$$
$$F = (-4,0); G = (0,-2)$$

Onde, o primeiro número de cada par ordenado representado pelas letras do alfabeto localizam-se no eixo horizontal (x) e o segundo número deste mesmo par no eixo y.

Exercício 2.1

Faça um plano cartesiano e localize os seguintes pontos:

(a) $A\ (2,0), B(0,-3), C(5,4), D(-2,0),$

(b) $A(-7,-3), B(4,-5), C\left(\frac{1}{2},0\right), D(6,6)$

Exercício 2.2

Dadas as figuras abaixo determine:

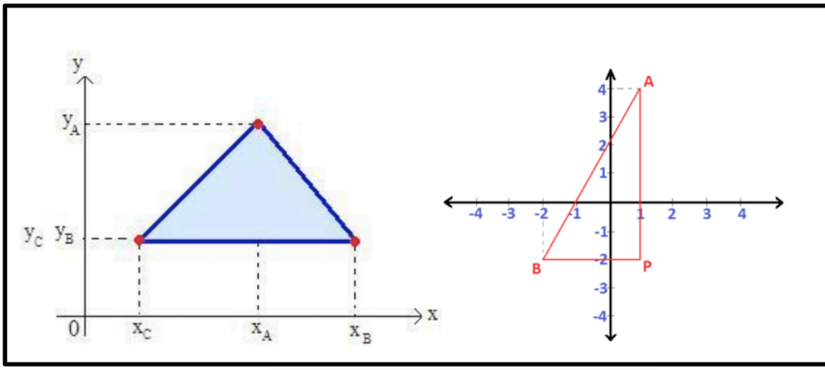


Figura 3: Triângulos 1 e 2. Fonte: autoria.

(a) As coordenadas dos vértices dos triângulos.

(b) Escreva dois pontos que estão no interior do triângulo 2.

(c) Determine a área do triângulo 2.

Exercícios Complementares da unidade

1. Um ponto no plano é definido por:

a) um par de números

b) três números inteiros

c) uma tripla ordenada

d) um número natural

2. Assinale a alternativa que contém da ordenada e da abscissa, respectivamente, ao quadrante.

a) (+, -), (-, -), (+, +) e (+, +)

b) (+, +), (-, +), (-, -) e (+, -)

c) (+, -), (-, -), (-, +) e (-, -)

d) (-, -), (+, +), (-, +) e (+, -)

3. Os pontos (2,0), (-2, 5) e (7,3) estão, respectivamente:

a) No eixo y, primeiro quadrante, segundo quadrante

b) No eixo x, segundo quadrante, terceiro quadrante

c) No eixo x, segundo quadrante, primeiro quadrante

d) Todos no terceiro quadrante

4. A que quadrantes pertencem, respectivamente, os pontos (-2, -2) e (5, -1):

a) primeiro, segundo

b) terceiro, quarto

c) quarto, primeiro

d) primeiro, quarto

5. Localizando os pontos (1, 2), (3, 4) e (-6, 3) no plano, os mesmos encontram-se, respectivamente nos:

a) primeiro, segundo e quarto quadrantes

b) quarto, terceiro e primeiro quadrantes

c) primeiro, primeiro e segundo quadrantes

d) segundo, segundo e primeiro quadrantes

A ordem do par de números que representa o ponto no plano é sempre horizontal e depois vertical, porém os eixos podem ser invertidos nos gráficos. Tal procedimento traduz o tipo de informação que se deseja passar com tal representação gráfica.

Respostas dos exercícios desta unidade:

Exercício 2.1

Dica: Proceda como foi feito na figura 2 da seção 2.2.

Exercício 2.2

a) Triângulo 1: $(x_a, y_a), (x_b, y_b), (x_c, y_c)$; Triângulo 2: $A(1,4), B(-2,-2), C(1,-2)$

b) $\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

c) 18 unidades de área

Exercícios complementares da unidade

1. A 2. C 3. D 4. B 5. C

CAPÍTULO 3

FUNÇÕES: PRIMEIRAS APROXIMAÇÕES

Objetivos de aprendizagem

Revisar algumas noções de conjuntos numéricos, definir o conceito de função, relembrar algumas operações com funções, construir gráficos e, finalmente, estudar propriedades das funções linear, quadrática e logarítmica.

Para toda compra feita no supermercado, temos um valor final a pagar. Sempre atentos aos preços de cada volume, quantidade em grãos ou farelo etc.

Utilizando um dos principais aparatos ferramentais da matemática que são as funções. Deste modo, esta terceira unidade será iniciada com a seguinte pergunta: para cada litro de combustível que abasteço, qual será o valor final se encher o tanque? Esta pergunta, por mais simples que pareça de antemão, é nada mais do que uma fórmula matemática expressa com palavras.

Neste capítulo, iremos estudar o conceito de funções, alguns de seus tipos como as funções linear, quadrática, modular e exponencial, bem como suas representações gráficas. Para isso, iremos utilizar todas as ferramentas expostas até o presente momento. Bons estudos!

1 I UMA BREVE REVISÃO SOBRE CONJUNTOS NUMÉRICOS

Como já enfatizado anteriormente, algumas expressões matemáticas podem ser representadas com números e letras, combinações destes e rearranjadas de modo que de adição e subtração pode-se representar com modos multiplicativos (por exemplo, no capítulo 1 deste material).

Neste sentido, tais números matemáticos são chamados, respeitando sua generalidade, de grandezas. Estas grandezas, na física por exemplo, representam quantidades – que sabemos a priori ou não! – e que podem ou não ser mensuradas com equipamentos que temos à disposição para isso. Neste caso, podemos citar a velocidade de um carro (grande velocidade), a distância que percorremos para ir de um lugar da cidade para outro, o tempo que levamos para chegar lá entre outros aspectos.

Além destas grandezas, que são valores fixos podendo representar quantidades numéricas (grandezas escalares) como também sua direção e sentido (vetoriais) tem-se as variáveis.

Estas últimas, tão necessárias quanto as grandezas, não são valores fixos e, como o próprio nome diz, variam de acordo com o que foi medido e estamos estudando. Por exemplo, a questão do combustível elucidada acima, a variável não é o preço que será pago, pois este *depende* quase que exclusivamente da quantidade de combustível que será consumido. Portanto, nossa variável é aquilo que muda na nossa equação, gerando o que chamamos na matemática de *relação de dependência*.

No entanto, antes de definir mais precisamente o conceito de função na matemática, revisaremos algumas noções sobre conjuntos numéricos, pois tais funções operam sobre estes conjuntos numéricos que podem ser classificados, a priori, como: naturais ($\mathbb{N}$), inteiros ($\mathbb{Z}$), racionais ($\mathbb{Q}$), irracionais ($\mathbb{I}$) e reais ($\mathbb{R}$)

1.1 Conjunto dos naturais ($\mathbb{N}$)

Este conjunto está associado, basicamente, à quantidade de coisas facilmente contáveis, tais como frutas, cadernos, livros etc. Por exemplo, "vou comprar três livros para ler nas férias" estou definindo um conjunto de números naturais. O símbolo matemático utilizado para representá-lo é aquele já exposto acima, ou seja, $\mathbb{N}$.

Matematicamente, escreve-se este conjunto na seguinte forma:

$$\mathbb{N} = \{0, 1,2,3,4,5,6, \dots\}$$

Deste modo, podemos notar que o conjunto dos números naturais é formado, exclusivamente, por números positivos. Também pode-se representá-lo geometricamente, onde neste caso teríamos uma reta infinita partindo do zero, conforme mostra a figura 4 abaixo:

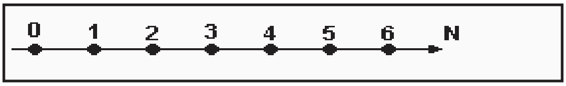


Figura 4: representação geométrica dos naturais. Fonte: autoria.

Vejamos alguns exemplos sobre este conjunto.

Exemplo 3.1

Seja o conjunto dado por A={x ϵ $\mathbb{N}$; **x** > **2**}*. Pode-se dizer que este conjunto é de naturais? A resposta é sim, pois a expressão acima dada pode ser lida do seguinte modo: seja A o conjunto dado por todo número x que pertence aos naturais, tal que, x é sempre maior que 2.*

Representando este conjunto geometricamente, teríamos a figura 5 abaixo, onde todos os pontos em negrito representam os números naturais pertencentes ao conjunto mencionado acima. Cabe notar que o 2 não faz parte do conjunto, conforme veremos explicação no exemplo a seguir.

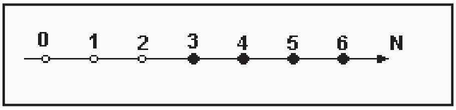


Figura 5: representação geométrica do conjunto. Fonte: autoria.

Exemplo 3.2

Seja o conjunto dado por B={y є $\mathbb{N}$; **1** < **y** < **5**}*. Tal expressão pode ser lida como: seja o conjunto B formado por todos os números y que pertencem aos naturais, tal que, todo y está no intervalo entre 1 e 5. Ou seja, será considerado como pertencente a este conjunto todo número localizado entre os números 1 e 5, desconsiderando 1 e o 5. A este tipo de intervalo denomina-se de aberto, ou seja, os extremos não participam do conjunto. Geometricamente, a figura 6 representa este conjunto, onde os três pontinhos em negrito são o conjunto mencionado.*

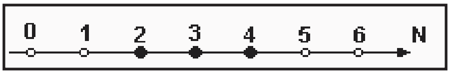


Figura 6: Representação geométrico do conjunto. Fonte: autoria.

1.2 Conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros é aquele formado pelos números positivos a partir do zero e, também, os negativos. Ou seja, dizemos que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros.

Dito de outro modo: o conjunto dos números inteiros contém o conjunto dos naturais. As variáveis do nosso cotidiano que podem ser descritas pelos inteiros são altitude, temperatura, contas bancárias etc.

Como já mostrado anteriormente, o símbolo para este conjunto é Z**.** Matematicamente, escreve-se este conjunto do seguinte modo:

$$\mathbf{Z} = \{..., -6,-5,-4,-3,-2,-1,0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$$

Assim, nota-se que além dos números naturais positivos verifica-se os negativos. Já geometricamente temos a seguinte representação:

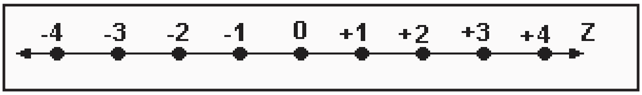


Figura 7: Representação Geométrica dos inteiros. Fonte: autoria.

Do mesmo modo, utilizando a ideia de intervalos iniciada no *exemplo 3.2* acima, escreve-se o conjunto dos números inteiros do seguinte modo:

$$\mathbf{Z} = \{x \in Z \,/\, -\infty < x < +\infty\}$$

Exercício 3.1

Escreva os seguintes conjuntos utilizando os sinais de desigualdade (utilize os exemplos 3.1 e 3.2)

(a) **B**= {*2,3,4,5,6*}

(b) **G**= {*..., -2,-1,0,1*}

(c) **J**= {*2,3,4,5, 6, ...*}

(d) **C**= {*-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3*}

1.3 Conjunto dos Racionais $\mathbb{Q}$

Este conjunto é mais amplo do que os dois anteriores, pois todo racional pode ser escrito na forma de uma fração $\frac{a}{b}$, com b≠0. Aqui, temos um detalhe muito importante para definição de qualquer fração: o denominador nunca poderá ser nulo!

Caso isso ocorra, teremos aquilo que se denomina de indefinição matemática. Assim como os inteiros contém os naturais, os racionais contém os inteiros. O símbolo matemático que representa este conjunto, como já exposto, é $\mathbb{Q}$

Todo número decimal que seja finito é um número racional. Deste modo, toda dízima que seja finita, ou seja, que não possui indefinidamente números depois da vírgula, pode ser escrito como uma fração.

Representa-se geometricamente, os números racionais do seguinte modo:

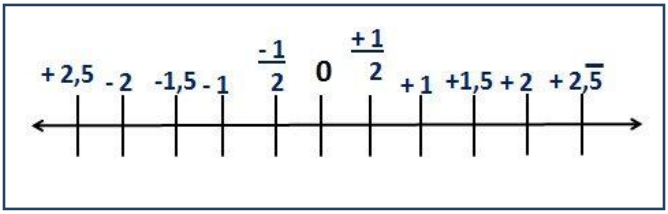


Figura 8: Representação geométrica dos racionais. Fonte: autoria.

Exercício 3.2

Para cada um dos casos abaixo, somar os números em forma de frações:

(a) 0,25 + 1,25

(b) 0,25 + 2,5

(c) 0,25 + 3,7

(d) 0,25 + 6,2

(e) 0,3 + 2,5

1.4 Conjunto dos Irracionais $\mathbb{I}$

Este conjunto é formado, diferentemente dos racionais, por dízimas infinitas, ou seja, não periódicas. São chamados de irracionais porque não podem ser escritos na forma de fração. Os exemplos mais famosos desses números são:

$$\sqrt{2} = 1{,}4242135 \ldots$$

$$\pi = 3{,}141592 \ldots$$

Os números irracionais também estão muito presentes em nossa vida cotidiana, pois uma calculadora ao trabalhar com somas nos dá um resultado através de aproximações de casas decimais que, muitas vezes, são infinitas.

1.5 Conjunto dos números reais $\mathbb{R}$

Todos os números utilizados no dia a dia, em nossos cálculos, expressões, contas etc., fazem parte do conjunto dos números reais. Este conjunto contém todos os anteriores mencionados e é geometricamente representado por uma reta infinita.

Conforme um dos postulados da geometria plana, dado por um matemático egípcio chamado Euclides, uma reta é a soma de infinitos pontos. Se cada ponto desta reta representa um número real teremos, então, o conjunto dos reais.

A esta reta dá-se o nome de reta real. Não importa se o número é positivo, negativo, fração, dízima periódica ou aperiódica, se é uma raiz quadrada de número positivo, ele será real.

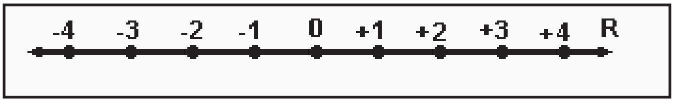


Figura 9: Representação geométrica da reta real. Fonte: autoria.

Para representar o conjunto dos números reais em termos de intervalos, pode-se dizer que o conjunto dos reais A é tal que:

$$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R};\ -\infty < \boldsymbol{x} < \infty\}$$

O símbolo ∞ representa o infinito de números reais e, quando acompanhado do número negativo, representa todos os infinitos reais que estão à esquerda do 0 na reta real.

Grande parte das funções que serão estudas daqui por diante estão definidas na reta real. Por este motivo, a importância de se conhecer tais conjuntos e algumas de suas características principais.

De forma **pictórica**, pode-se representar os conjuntos numéricos conforme a figura 10 abaixo, a qual recebe um nome especial na Matemática, é chamada de **diagrama de Venn**.

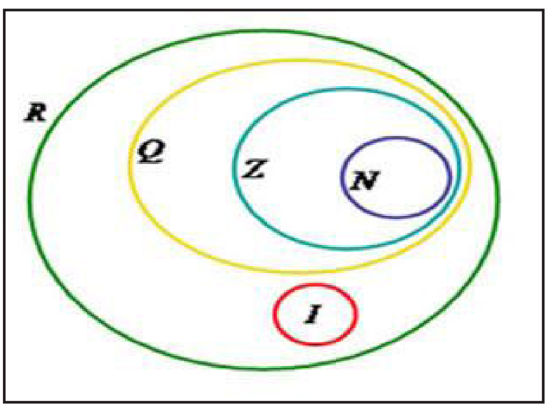


Figura 10: Representação pictórica dos conjuntos numéricos. Fonte: autoria.

2 | FUNÇÃO DE PRIMEIRO GRAU – OU *AFIM*

Como já mencionado anteriormente, as relações utilizadas no cotidiano expressam uma dependência entre variáveis e grandezas, todas elas interrelacionadas. A estas interrelações dá-se o nome de função.

Basicamente, uma função é uma relação de interdependência entre variáveis que, geralmente, são indicadas por x e y. A primeira, x, é chamada de variável independente – aquela que independe de qualquer outro valor para existir – e a última, y, variável dependente, pois seu valor depende de x para existir.

Neste sentido, ao definir uma função como uma relação de interdependência entre duas variáveis, é necessário expressá-la por meio de uma fórmula matemática. Mas, para não criar alguma possibilidade de bloqueio emocional com relação a estas fórmulas, tem-se em mente que *para cada situação modelada ou estudada há uma fórmula matemática específica*.

Assim, ao voltarmos no problema do abastecimento, a fórmula matemática que representaria esta situação é:

$$y = ax + b \quad \mathbf{(3.1)}$$

onde, y é o valor total a ser pago ao final do abastecimento, a o valor referente a cada 1 L (definido previamente, ou seja, é uma constante), b também é uma constante (que, em muitos casos, aparece como um valor pré-fixado, uma taxa acrescida ao valor total entre outros) e x é a quantidade de litros abastecida.

A expressão dada por 3.1 é chamada, matematicamente, de lei de formação de uma *função afim* ou de *primeiro grau*. Mas, por que de primeiro grau? Se o expoente da incógnita x não aparece, equivalerá a 1. Neste sentido, diz-se que toda expressão matemática que possui como expoente 1 recebe o nome de primeiro grau.

Mais adiante, quando estudarmos sobre derivadas e integrais, iremos trabalhar muito com tais expressões matemáticas, às quais muitas vezes encontramos na literatura como polinômios.

*A palavra **polinômio,** na Matemática, significa um conjunto de parcelas que compõem uma expressão. Vale lembrar que equação é diferente de expressão.*

Exemplo 3.3

Seja a lei de formação dada por y=5x-3, pela 3.1 acima, temos que:

$$a = 5\ e\ b = -3$$

Exemplo 3.4

Seja a função dada pela lei f(x)=-2x+7, o que pela 3.1 acima, temos:

$$a = -2\ e\ b = 7$$

Nos exemplos 3.3 e 3.4 podemos ver como uma lei de formação de uma função de primeiro grau é representada matematicamente. No entanto, notamos que no segundo exemplo mencionado temos f(x) no lugar de y.

Basicamente, os dois anteriores são equivalentes quando representamos uma função. Quando utilizamos f(x) estamos dizendo que para cada valor de *x* existe um, e somente um, valor de *y* correspondente. Em alguns textos encontraremos o nome de *imagem da função*.

2.1 Domínio e conjunto imagem

Como citado anteriormente, todos os números que utilizamos para nossos cálculos do cotidiano – como também para expressões algébricas – são categorizados por conjuntos. Isso significa dizer que sempre quando estamos efetuando algum tipo de cálculo, seja numérico ou algébrico, estamos operando sobre algum conjunto. Neste sentido, como estamos agora trabalhando com as funções de primeiro grau, precisamos definir em qual conjunto nossas variáveis *x* e *y* terão validade.

Assim, o conjunto no qual a variável independente reside (onde coletamos tais números, digamos) é chamado de *domínio da função*. Já o conjunto em que iremos encontrar os valores correspondentes de y, a partir da lei de formação 3.1 supracitada, é denominado de conjunto *imagem da função*. A figura 11 abaixo representa, pictoricamente, os conjuntos domínio e imagem da função.

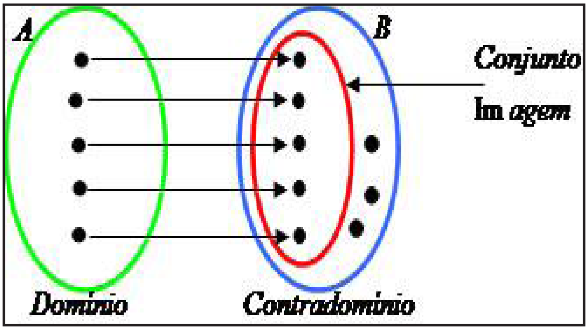


Figura 11: domínio, contradomínio e imagem da função f. Fonte: autoria.

Na figura 11, a elipse representada em verde (conjunto A) é o domínio da função *f*, ou seja, os números que representam a variável *x* habitam neste lugar matemático. Já a elipse representada pela cor azul (conjunto B) é chamado de contradomínio, pois é o conjunto maior que abriga os números que correspondem ao valor de y, isto é, o que estamos chamando de imagem (elipse vermelha).

Portanto, sempre que se fala em domínio de uma função estamos interessados em caracterizar as condições de existência de qualquer função, ou seja, naquele conjunto que abriga todos os valores possíveis da variável independente *x*.

Exemplo 3.5

Dada a função f(x)=$\frac{x+2}{x-2}$ *determine seu domínio.*

Solução: determinar o domínio de qualquer função, é descobrir quais são os valores possíveis que a função não pode assumir de modo que não exista. Sabemos que, para toda fração dada seu denominador jamais poderá ser zero (nulo). Como a função fornecida está na forma de fração, temos que:

$$x - 2 \neq 0$$

onde a partir das regrinhas para se resolver uma diferença (as mesmas que para uma equação) temos:

$$x \neq 2$$

ou seja, nosso domínio é formado por todos os números reais com exceção do 2. Em linguagem matemática representamos como

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

onde lê-se: o domínio da função f é formado por todo x que pertence aos reais, tal que, x deve ser diferente de 2.

O exemplo acima mostra-nos que para determinar o domínio de qualquer função precisamos saber de sua condição de existência, ou seja, aquilo que faz com que a lei de formação matemática exista. Outras situações possíveis de aparecer são raízes quadradas com valores negativos e equações no modo geral.

Exercício 3.3

Determinar o conjunto domínio das funções abaixo:

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x+3}$

(b) $y = 4x - 5$

(c) $f(x) = -3x - 2$

(d) $y = \sqrt{4x - 2}$

2.2 Gráfico de uma função de primeiro grau

Como já estudamos, todo par ordenado dado por (x, y) representa, no plano, um gráfico. Assim, se associarmos esta ideia à lei de formação representada por 3.1, temos que para cada valor de x nesta fórmula (obtido no domínio) haverá um único valor de y correspondente (que encontramos no conjunto imagem da função).

Isto é, utilizando ainda o exemplo do abastecimento da gasolina, podemos representar graficamente esta situação colocando o número de litros que foram abastecidos no eixo horizontal do plano cartesiano (abscissa – eixo da variável independente) e o valor final que deverá ser pago no eixo das ordenadas (eixo da variável dependente).

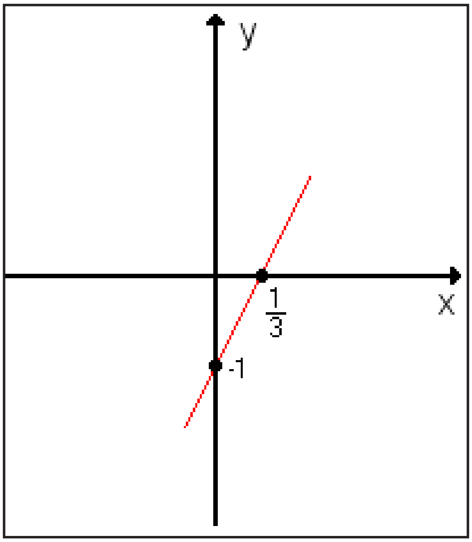


Figura 12: gráfico da função de primeiro grau. Fonte: autoria.

O gráfico da função de primeiro grau é sempre uma reta, pois para cada valor de x teremos um único valor de y correspondente. Na figura 12 acima, os pares ordenados representados pelos dois pontos em destaque são (0, -1) e ($\frac{1}{3}$,0). Quando o ponto está sobre um dos eixos, o valor de seu par será 0. Isto é, se o ponto está sobre o eixo x, o seu correspondente y será 0, e vice-versa.

Importante ressaltar, quando o valor de y de uma função de primeiro grau por nulo (0) diz-se que o correspondente valor de *x* é uma *raiz da função*.

As retas que representam os gráficos deste tipo de função podem ser *crescentes* ou *decrescentes*. A figura 13 representa uma reta crescente (a>0) e uma reta decrescente (a<0).

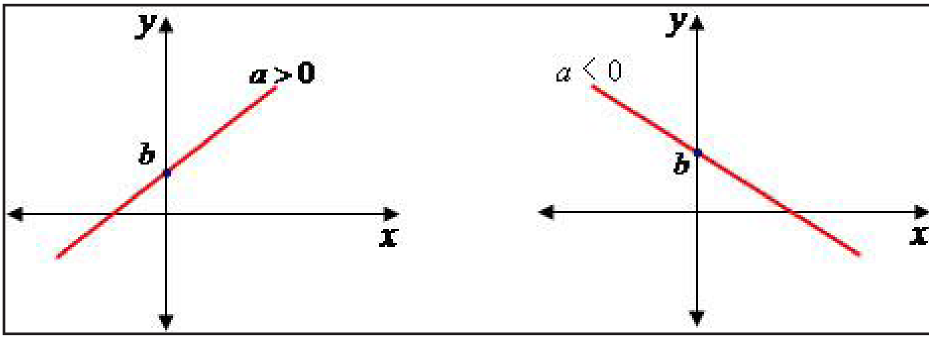


Figura 13: reta crescente e decrescente. Fonte: autoria.

Para construção destes gráficos, precisa-se apenas da lei de formação da função, pois para cada valor de *x* atribuído respeitando o domínio da função, corresponderá um valor de *y*. Com tais pares ordenados, constrói-se uma reta no plano.

Exemplo 3.6

Dada a função f(x) = 5x-10 encontre sua raíz.

Solução: encontrar a raiz de uma equação (neste caso representando uma função) é nada mais do que determinar aquele valor de x para o qual y é nulo. Neste caso, temos:

$$5x - 10 = f(x) = 0$$

onde, aplicando as regrinhas básicas para resolução de equações, temos:

$$5x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{5} = 2$$

Portanto, o valor de x para o qual y é nulo é 2. Assim, representamos esta raíz da função como

$$f(2) = 0$$

Exemplo 3.7

Suponhamos que iremos aplicar num fundo de investimento. Nosso capital inicial é de R$100,00. Para simplificarmos, supomos também que a cada mês nosso capital aumenta R$10,00.

(a) Qual é a lei de formação que representa nosso investimento?

(b) A partir desta lei, construa o gráfico.

(c) Qual será o montante do investimento no terceiro mês?

Solução:

(a) chamaremos de x a variável que representa o mês e de y a variável que representa o montante final após cada mês. Assim, no primeiro dia de nosso investimento temos um

mês 0, ou seja, ainda não acumulamos nada. Portanto, temos em linguagem matemática

$$f(0) = 100$$

porém, sabemos que a cada mês nosso montante acresce um valor 10, ou seja, podemos construir uma tabela dos valores acumulados ao longo dos meses:

x	*f(x)*
0	*100*
1	*110*
2	*120*

Assim, a partir da tabela acima e comparando com a lei de formação 3.1, temos que:

$$y = f(x) = ax + b \Longrightarrow f(0) = a.0 + b = 100, portanto\ para\ x = 0\ b = 100$$

utilizando, agora, para x=1, temos:

$$f(1) = a.1 + 100 = 110 \Longrightarrow a + 100 = 110$$

aplicando as regrinhas básicas de resolução de equações, temos então que:

$$a = 110 - 100 = 10$$

portanto, a lei de formação para nosso investimento é:

$$f(x) = 10x + 100$$

(b)a partir da tabela dada no item (a) temos os seguintes pares ordenados: (0,100), (1,110), (2,120) ...

deste modo, plotando no gráfico temos o seguinte:

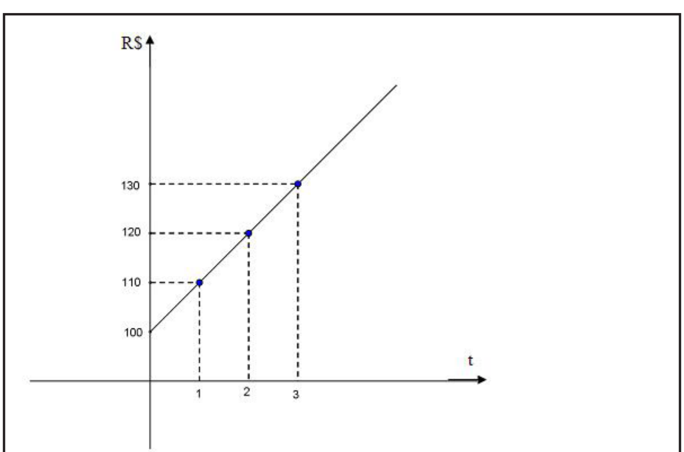


Figura 1: gráfico do montante final em função do tempo. Fonte: autoria.

Onde t representa a quantidade de meses e R$ o montante final do meu investimento.

(c)de acordo com o gráfico temos que no terceiro mês o montante será de R$130,00.

Exercício 3.4

Dadas as funções abaixo, encontre sua raiz:

(a) $x + 5 = 8$

(b) $x + 9 = -1$

(c) $9x - 2 = 4x + 18$

(d) $4x + 5 = x + 20$

Exercício 3.5

Construa os gráficos das seguintes funções de primeiro grau:

(a) $f(x) = 2x - 1$

(b) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$

(c) $f(x) = -3x - 2$

3 I FUNÇÃO DE SEGUNDO GRAU OU QUADRÁTICA

Uma função do segundo grau é toda lei de formação que pode ser expressa do seguinte modo:

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c \quad \textbf{(3.2)}$$

onde *a*, *b* e *c* são chamados de coeficientes da função. Assim como a função do primeiro grau, a quadrática também pode ser representada por um gráfico, possui conjunto domínio, imagem e raízes.

A diferença da primeira, é que esta possui duas raízes ao invés de uma, como visto anteriormente. Neste sentido, são exemplos de funções quadráticas as seguintes leis de formação:

$$f(r) = 5r^2 + 3r + 9 \quad \textbf{(3.3)}$$

$$f(z) = \frac{2}{3}z^2 - 2 \ \textbf{(3.4)}$$

Se compararmos a função (3.3) acima com a lei de formação (3.2), teremos que a=5, b=3 e c=9. Se fizermos o mesmo com a função (3.4) observamos que a$\frac{2}{3}$= ,b=0 e c=-2. Assim, podem ocorrer situações nas quais os coeficientes *b* e *c* sejam nulos, com exceção do coeficiente *a*.

Todas as noções acima expostas sobre domínio, conjunto imagem e construção de gráficos também se aplicam a este tipo de função.

No entanto, ao tratarmos das raízes das funções quadráticas devemos ter em mente que não teremos apenas um valor de *x* para o qual *y* será nulo, mas sim dois valores de *x*. Neste caso, não teremos como gráfico uma reta, como na função afim, mas sim o que chamamos de parábola.

3.1 Raízes das funções quadráticas

Como já dito, as raízes de uma função são aqueles valores da variável x que tornam y igual a zero, por meio da lei de formação. Assim, para encontrarmos as raízes de uma equação quadrática (representada através de uma lei de formação) precisaremos utilizar uma fórmula resolutiva, chamada de *fórmula de Bhaskara*, dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \quad \textbf{(3.5)}$$

$$com \quad \Delta = b^2 - 4.a.c$$

*O símbolo Δ é chamado de **delta** (letra do alfabeto grego) e representa a **diferença** entre duas grandezas, seja na Física que na Matemática.*

As letras *a*, *b* e *c* da fórmula dada por (3.5) são os coeficientes da equação quadrática. O sinal de mais e menos indica dois tipos de raízes: uma positiva e outra negativa. Em alguns textos pode-se encontrar a nomenclatura de *discriminante* para o delta.

No entanto, como interpretar os valores originados pelo Δ? Inicialmente, cabe ressaltar que o discriminante da equação (3.5) informa a respeito de suas raízes, pois:

$$Se\ \Delta > 0, significa\ que\ a\ equação\ admite\ duas\ raízes\ reais\ e\ distintas$$
$$Se\ \Delta = 0, significa\ que\ a\ equação\ admite\ duas\ raízes\ reais\ e\ iguas$$
$$Se\ \Delta < 0, significa\ que\ a\ equação\ não\ admite\ raízes\ reais$$

Portanto, primeiramente é importante identificar a lei de formação da função, quais são nossos coeficientes, encontrar o valor do discriminante, aplicá-lo na fórmula (3.5) para encontrar as raízes, caso existam.

Exemplo 3.8

Dada a equação $2x^2-11x+5=0$ *encontre, caso existam, suas raízes.*

Solução:

Inicialmente, sabemos que os nossos coeficientes são a = 2, b = -11 e c =5. Vamos encontrar o valor do discriminante,

$$\Delta = (-11)^2 - 4.2.5 \Rightarrow \Delta = 121 - 40 = 81$$

de acordo com o que vimos acima, o discriminante é maior do zero, portanto, tal equação possui duas raízes reais e distintas. Então, pela (3.5) temos que:

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{81}}{2.2}$$

agora, desmembrando esta equação em duas outras, iremos atribuir índices para as raízes, chamando de x_1 a raíz positiva e de x_2 a raíz negativa.

Então, temos que:

$$x_1 = \frac{11+9}{4} = 5$$

$$e$$

$$x_2 = \frac{11-9}{4} = \frac{1}{2}$$

portanto, as raízes desta equação são .x_1=5 e x_2=$\frac{1}{2}$.

Exercício 3.6

Dadas as equações quadráticas abaixo, ache as raízes caso existam:

(a) $x^2 - 8x + 16 = 0$

(b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

(c) $2x^2 - 7x = 0$

(d) $2x^2 - 18 = 0$

3.2 Gráficos das funções quadráticas

Como já dito, os gráficos das funções quadráticas são representados por meio de parábolas (curvas) que podem ou não tocar o eixo das abscissas, dependendo do valor do discriminante delta.

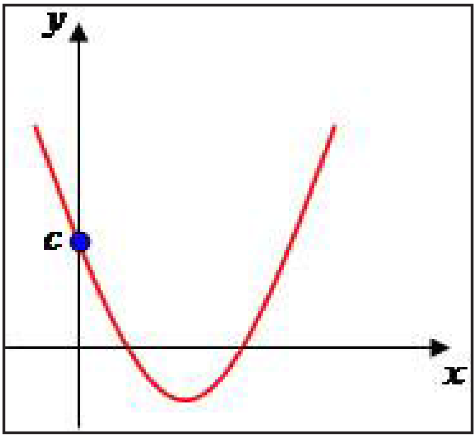


Figura 15: gráfico da função quadrática. Fonte: autoria.

Além disso, sua concavidade (a "boca" da parábola) pode estar voltada para cima ou para baixo, fator este que depende exclusivamente do sinal do coeficiente *a*. Como pode ser visto na figura 16 abaixo.

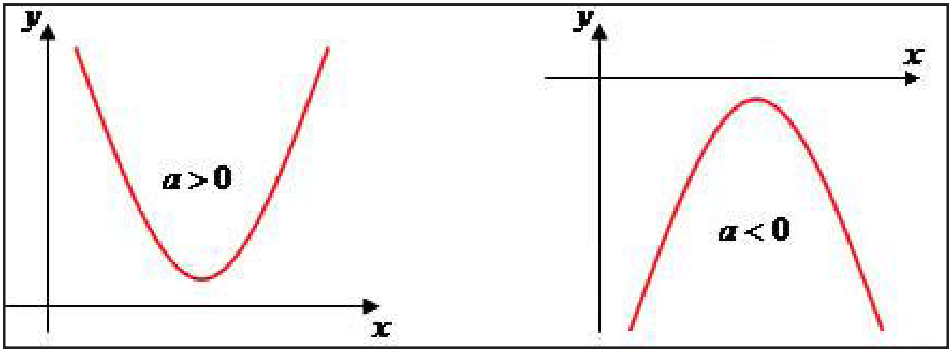


Figura 16: gráficos da função quadrática. Fonte: autoria.

Nota-se que, quando o coeficiente a é maior do que zero (positivo) a concavidade da parábola está voltada para cima, já quando é negativo a concavidade estará voltada para baixo.

Outro aspecto interessante, que se observa nas figuras 15 e 16 acima é o fato de a parábola tocar ou não o eixo das abscissas. Quando ela não toca o eixo x significa que não existe nenhuma raiz real para esta função, ou seja, o $\Delta<0$.

Quando ela toca o eixo x em dois pontos distintos, significa que tal função possui duas raízes reais e distintas, isto é, seu $\Delta>0$. E, finalmente, quando ela toca em um único ponto o eixo das abscissas tem-se uma única raiz real positiva, com $\Delta=0$.

A concavidade da parábola será de extrema importância quando estudarmos as derivadas e os processos de derivação no capítulo 5.

De um modo geral, a figura 17 apresenta um resumo acerca do gráfico da função quadrática.

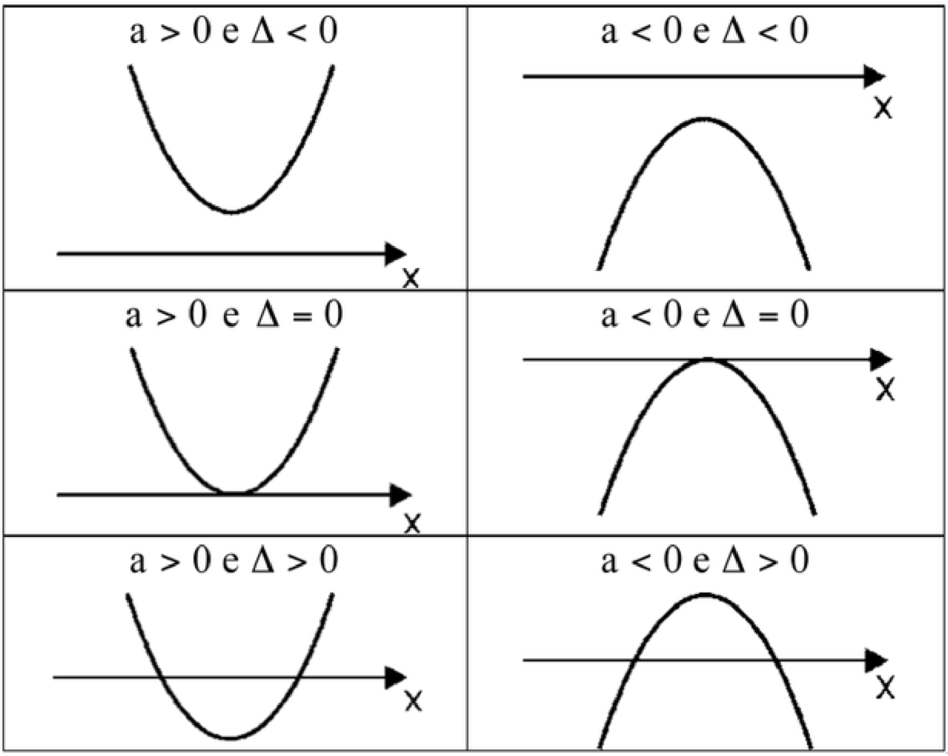


Figura 17: gráficos da função quadrática. Fonte: autoria.

Exemplo 3.9

Dada a função $f(x)=x^2-2x-3$ construa o gráfico.

Solução:

Inicialmente, vamos identificar os coeficientes da equação, a = 1, b = -2 e c = -3. Neste sentido, sabemos que o coeficiente aΔ0, portanto a concavidade da parábola é voltada para cima. Agora, num segundo passo, vamos determinar o discriminante Δ

$$\Delta = (-2)^2 - 4.1.(-3) = 4 + 12 = 16$$

como $\Delta > 0$, sabemos que a função possui duas raízes reais distintas, ou seja, a parábola irá tocar em dois pontos no eixo das abscissas. Então, vamos determinar as raízes x_1 e x_2 por meio da fórmula (3.5)

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{16}}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{2-\sqrt{16}}{2} = \frac{2-4}{2} = -1$$

Agora, vamos determinar o ponto vértice da parábola, ou seja, aquele ponto em que a parábola altera sua direção no gráfico. Tal determinação facilitará a construção do gráfico. Este ponto é formado por um par ordenado do tipo (x_v, y_v), os quais são dados pelas seguintes fórmulas

$$x_v = \frac{-b}{2a} \ e \ y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

o que nos dá, portanto, os valores de x_v=1 e y_v=-4.

Com estas informações, temos o seguinte gráfico

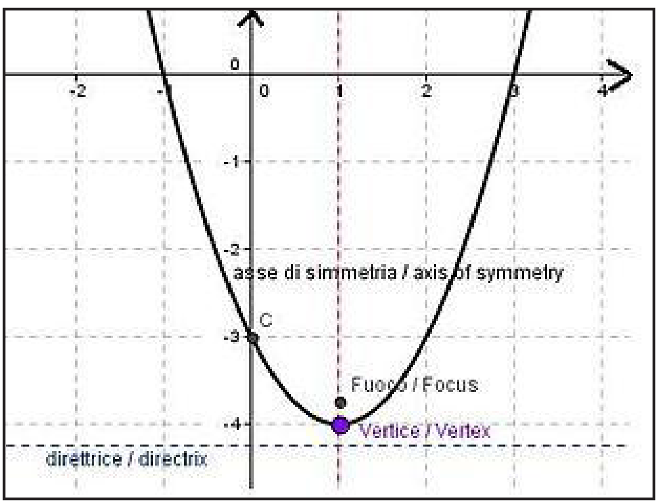


Figura 18: gráfico do exemplo 3.9. Fonte: autoria utilizando http://geogebra.org.

Exercício 3.7

Construa o gráfico das seguintes funções quadráticas:

(a) $f(x) = x^2 - 13x + 42$

(b) $f(x) = -2x^2 - 5x + 6$

(c) $y = 3x^2 + x - 14$

(d) $f(z) = 5z^2 - 3z - 2$

(e) $y = 12 - 2x^2 = 8x + 2$

(f) $f(w) = 2w(5 - w) - w^2 - 3$

4 I FUNÇÃO LOGARÍTMICA

As funções logarítmicas são muito utilizadas quando se quer resolver equações exponenciais ou, também, quando é possível expressar um número muito grande em uma pequena ordem. Antes de seguir adiante com exemplos e exercícios acerca da função logarítmica, é preciso recordar um pouco sobre as propriedades da potenciação.

4.1 Potenciação

Tem-se uma potência quando se tem um número – chamado de base – elevado a algum outro número (ou incógnita). Representa-se tal definição pela seguinte simbologia:

$$a^b, com\ a \neq 0$$

onde *a* é a base e *b* é o expoente, que pode ser negativo ou positivo.

As propriedades da potenciação são dadas pela figura 19 abaixo.

$$P_1 \rightarrow a^n = \underbrace{a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.a}_{\text{n vezes}}$$

$$P_2 \rightarrow a^1 = a$$
$$P_3 \rightarrow a^0 = 1, \text{ com } a \neq 0$$

$$P_4 \rightarrow 1^n = 1$$

$$P_5 \rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ com } a \neq 0$$

$$P_6 \rightarrow a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$$

$$P_7 \rightarrow \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ com } a \neq 0$$

$$P_8 \rightarrow (a^m)^n = a^{m\,.\,n}$$

$$P_9 \rightarrow (a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$$

$$P_{10} \rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ com } b \neq 0$$

$$P_{11} \rightarrow \quad a^n \begin{cases} n \text{ é par} \rightarrow \text{potência positiva} \\ n \text{ é ímpar} \rightarrow \text{potência leva o sinal da base} \end{cases}$$

Figura 19: propriedades das potências. Fonte: autoria.

As propriedades acima ser-nos-ão importantes quando formos trabalhar com logaritmos e polinômios no cálculo de derivadas e integrais.

4.2 Logaritmos

Dados dois números reais,a e b, de modo que 1≠a>0 e b>0. Definimos por logaritmo de *b* na base *a* o expoente que devemos elevar *a*, de modo que a potência obtida seja igual a *b*. Em linguagem matemática temos:

$$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad (3.6)$$

A definição (3.6) é o que chamamos de operador logaritmo, em matemática, nela ***a*** é a base, ***b*** é o logaritmando e ***x*** é o logaritmo de *b* na base *a*.

Exemplo 3.10

Qual é o logaritmo de 4 na base 2?

Solução: pela definição dada pela (3.6), temos que:

$$log_2 4 = 2, pois \;\; 2^2 = 4$$

Como consequência da definição (3.6) temos as seguintes propriedades dos logaritmos apresentadas na figura 20 abaixo.

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b \rightarrow a \neq 1 \rightarrow b > 0 \\
\log_a 1 = 0 \\
\log_a a = 1 \\
a^{\log_a b} = b \\
\log_a b = \log_a c \rightarrow b = c \\
\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \\
\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \\
\log_a b^c = c \cdot \log_a b \\
\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \\
\log_a b \cdot \log_b a = 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Figura 20: propriedades dos logaritmos.

Fonte: autoria.

Cabe ressaltar, todavia, que as seis propriedades acima elencadas são de extrema importância quando da resolução de equações exponenciais.

Importante

Quando a base for dez (chamado de logaritmo decimal), podemos omiti-la do símbolo do log, escrevendo apenas $log_{10}b = log\ b$..

Exemplo 3.11

Dada a equação exponencial $(\frac{1}{5})^x$ =125.

Solução: resolver uma equação exponencial é encontrar o valor da incógnita x de modo a satisfazer a igualdade apresentada. Neste caso, temos que:

$$125 = 5.5.5 = 5^3 \quad (3.7)$$

mas, quando invertemos uma fração, pelas propriedades básicas de potenciação, invertemos o sinal do expoente do denominador, ou seja

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = (5^{-1})^x = 5^{-x} \ (3.8)$$

comparando as igualdades (3.7) com (3.8), temos que;

$$5^3 = 5^{-x}$$

portanto, x = -3.

No exemplo acima, vimos que as propriedades da potenciação dadas pela figura 18 são aplicadas. Então, para toda situação que encontrarmos equações exponenciais iremos trabalhar, basicamente, com potências e logaritmos.

Exemplo 3.12

Dada a expressão 4.log+ $\frac{1}{2}$ log *y, reduza em um único logaritmo.*

Solução:

Reduzirmos num único logaritmo significa que devemos reescrever a expressão dada numa única parcela de log. Utilizando as propriedades apresentadas na figura 20, precisamos verificar se os logs estão na mesma base. Como isso é afirmativo para este problema, então temos:

$$\log x^4 + \log y^{\frac{1}{2}} = \log(x^4 + y^{\frac{1}{2}})$$

mas, y elevado a ½ é o mesmo que a raiz quadrada de y, então reescrevemos como:

$$\log x^4 + \log y^{\frac{1}{2}} = \log(x^4 + \sqrt{y})$$

No exemplo acima tem-se uma importante propriedade dos logs sendo aplicada: o log de um produto é igual a soma dos logs. Para toda situação que exigir manuseio dessas expressões, será importante recorrer à figura 20.

4.3 Logaritmo como função e gráfico

De acordo com o exposto até aqui, pode-se definir uma função logarítmica como a lei de formação dada por

$$f(x) = log\ x \ \ (3.9)$$

Assim como estudado nas funções anteriores, esta possui domínio e conjunto imagem, sendo o primeiro definido pelas propriedades de sua existência e o segundo após a aplicação na lei de formação.

Já de modo geral, o gráfico da função logarítmica é dado pela figura 21 abaixo.

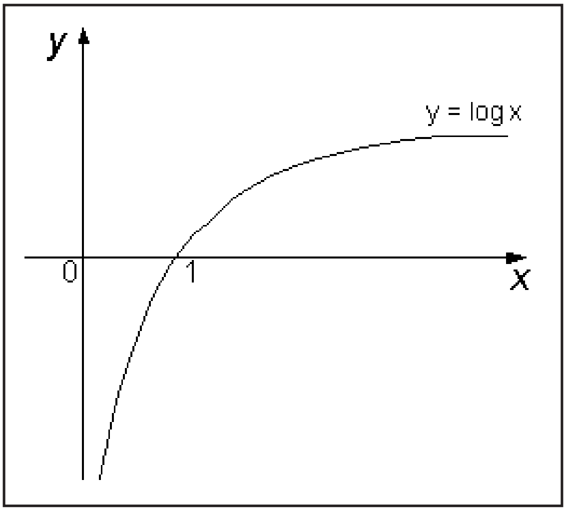


Figura 21: gráfico da função logarítmica. Fonte: autoria.

Cabe notar que a curva da função logarítmica nunca irá tocar o eixo das ordenadas (y), pois se *x = 0* não se tem a *existência* do logaritmo. Na figura 22 abaixo temos outro exemplo do gráfico de uma função logarítmica, porém com base 2.

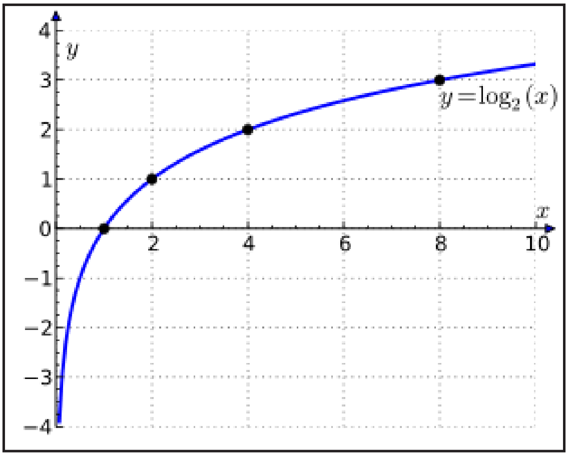


Figura 22: função logaritmo na base 2. Fonte: autoria.

Vimos, nas seções anteriores o conceito de função, alguns de seus tipos, gráficos e propriedades. Ressalta-se que, uma função é sempre uma relação de dependência entre duas variáveis, sendo uma dada *a priori*. Seus gráficos são dados, pictoricamente, e o comportamento desta função informam acerca de seu crescimento, decrescimento e estabilidade.

Nos próximos capítulos será utilizado todo esse conhecimento acerca das funções de primeiro e segundo graus (também chamadas de polinomiais) bem como as exponenciais e logarítmicas para trabalharmos com suas variações e aproximações. A estas últimas, atribui-se o estudo das derivadas e integrais.

5 I FUNÇÕES APLICADAS À ECONOMIA

Muitas grandezas estudadas em ciências econômicas, por exemplo, são descritas por alguns tipos funções. Vamos observar, a seguir, algumas delas com mais detalhes.

*Quando não há especificação de moeda nos referimos ao preço em **u.m**, que significa unidade monetárias.*

Tipo 1: Função de Demanda

Na economia, a demanda é um importante motor que rege seu funcionamento. Neste sentido, seja então p o preço de um bem e x a quantidade desse bem que é demandada pelos consumidores. Pode-se, nesse caso, inferir que p depende de x e, assim, tem-se a função f, tal que $p = f(x)$. Essa é a ***função de demanda*** cujo gráfico é referido como ***curva de demanda.*** Observe que, quanto menor o preço maior a demanda por esse bem, o que se pode traduzir por f ser decrescente. Muitas vezes essa relação pode ser dada implicitamente por meio de uma equação do tipo $x^2+p^2=1$, por exemplo, conhecida como ***equação de demanda***.

Tipo 2: Função de Oferta

Uma quantidade de um dado bem, colocada no mercado por seu produtor, relaciona-se com o seu preço p. Observa-se que, de forma geral, quanto maior o preço, maior a quantidade oferecida. Temos então uma função g, onde $p=g(x)$, crescente e chamada de ***função de oferta***. Assim como a função de demanda, a oferta também pode ser dada implicitamente e refere-se a ela como ***equação de oferta***.

Exercício 3.8

Certo produto tem equação de demanda dada por $2x+4p-6=0$, x em milhares de unidades.

a) Qual o preço por unidade para uma demanda de 1000 unidades?

b) Qual a demanda se o produto for oferecido gratuitamente.

Exercício 3.9

Uma equação de oferta sendo $33x-8p+10=0$, sendo x em centenas de unidades, *qual o preço por unidade pelo qual 200 unidades são ofertadas?*

É interessante, na análise dos cenários econômicos, observar uma ***situação de equilíbrio*** entre as curvas de oferta e demanda. Esta situação caracteriza-se pelo ***encontro das curvas*** num ponto específico, o qual é denominado ponto de equilíbrio. Local este em que o preço correspondente ao bem é chamado de preço ***de equilíbrio*** *(ponto pe)* e a quantidade demandada é ***a quantidade de equilíbrio*** *(ponto qe).*

A situação em que temos equilíbrio entre oferta e demanda é conhecida como ***equilíbrio de mercado*** *e matematicamente representada pela* ***igualdade*** *entre as equações ou funções de oferta e demanda.*

Exemplo 3.13

Sejam $x^2+p^2=25$ e $p-x-1=0$ respectivamente equações de demanda e oferta de um bem, x dado em 1000 unidades, determine o preço e a quantidade de equilíbrio.

Solução:

Devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2 + p^2 = 25 \\ p - x - 1 = 0 \end{cases},$$

tirando o valor de p da segunda equação temos:

$$p = x + 1$$

Substituindo na primeira equação:

$$x^2 + (x+1)^2 = 25,$$

ou seja,

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25,\ 2x^2 + 2x - 24 = 0.$$

Resolvendo essa equação de segundo grau obtemos as raízes x= 3 e x= -4. O valor de x representa a quantidade de produto, que não pode ser negativa, assim descartamos o segundo valor. Para x = 3, obtemos para p o valor p =4. Então, o preço de equilíbrio é 4 u.m (unidades monetárias), e a quantidade de equilíbrio é 3.1000 = 3000 unidades.

Exercício 3.10

Dadas as equações de demanda e oferta a seguir, onde x é dada em milhares de unidades, determine o ponto de equilíbrio nos casos a seguir:

$$a)\ 2p + x = 12 \ \ e \ \ p = 2x + 1 \qquad b)\ p = 4 - x^2 \ e\ 2p = 3x + 3$$

Tipo 3: Funções Receita e receita média

Uma pergunta que pode ocorrer ao longo deste estudo seria: *a partir do momento em que um vende x unidades a um preço p quanto isso gera em termos de unidades monetárias?* Para que fique mais claro, tem-se que um vendedor de rádios vendeu 15 unidades por x reais, quanto em dinheiro representa essa transação? Pode-se representar a situação da seguinte maneira:

R (x) = (preço por unidade). (Quantidade demandada) *= x. 15 u.m = 15x*

Aqui o preço é fixo em *x* reais, mas poderia variar de acordo com alguma expressão, bastaria apenas substituir essa expressão no lugar de *x*. A ***R (x)*** na forma como escrito acima dá-se o nome de ***função receita R***, e sua representação matemática é dada por

$$R(x) = p(x) \cdot x$$

Em que p (x) é o preço por unidade e x a quantidade demandada. Note que R (0) = 0. Chamamos de ***receita média*** à função que a cada *x* associa *R (x) /x*, que coincide com a função preço se $x \neq 0$.

Exercício 3.11

Um certo bem tem por equação de demanda $p^2+x^2 - 2500=0$

a) Dê a expressão da função de receita e receita média.

b) Qual a receita e a receita média se a quantidade demandada é de 40 unidades?

Tipo 4: Função custo e custo médio

Para produzir um bem, tem-se um custo associado e este, por sua vez, pode ser representado por uma função. Geralmente, tal função possui uma parte fixa e outra variando de acordo com a quantidade demandada x. Um exemplo de função custo é dado por: $C(x)=123+4x+0,7x^2$, em que 123 é o *custo fixo*, e $4x+0,7x^2$ é o *custo variável.* Neste sentido, podemos definir o custo médio por:

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Já para o exemplo de função C (x) que utilizamos acima, o custo médio é dado por:

$$C_m(x) = \frac{123+4x + 0,7x^2}{x} = \frac{123}{x} + 4 + 0,7x$$

Exercício 3.12

O custo de produção de um bem é uma função afim. Quando nenhuma quantidade é produzida, o custo vale 500 u.m e quando 50 unidades são produzidas, o custo é de 600 u.m. Calcule o custo médio para 100 unidades produzidas.

Tipo 5: Função Lucro

O lucro consiste no total arrecadado com as vendas retirando-se os gastos de produção, ou seja,

$$\mathbf{L = R - C}$$

Suponha que a receita gerada por uma venda foi de 30 u.m e o custo de produção para essa quantidade é de 10 u.m, o lucro nada mais é que:

$$L = 30 - 10 = 20 \text{ u.m}$$

Neste sentido, numa referida quantidade vendida, deve se observar as seguintes situações:

Há lucro, se ***L (x) > 0***

Há prejuízo, se ***L (x) < 0***

Exercício 3.13

Um produto tem equação de demanda $p+x=50$, e a função custo é $C(x)=0,5x^2+5x+187,5$. Para 50 unidades, calcule se houve lucro ou prejuízo.

Exercícios complementares da unidade

1. Classifique o tipo das seguintes funções $7-248x$, $3-4x+x^2$ e $13x-1$.

a) logarítmica, afim, logarítmica

b) quadrática, afim, afim

c) afim, quadrática, afim

d) quadrática, quadrática, afim

2. Qual a raiz da equação $13x - 2 - 24$?

a) 2

b) 3

c) -1

d) 0

3. A função $f(x)=x^2-10x$ tem raízes? Quais são?

a) possui raízes, 3 e 0.

b) não possui raízes reais

c) possui só uma raiz, 0

d) possui raízes, 0 e 10

4. Existem raízes para a equação $-7-x^2=0$? Se sim, quais são?

a) não possui raízes reais

b) tem uma raiz, $x = 7$

c) tem duas raízes, $x= \pm 3$

d) tem duas raízes, $x_1 = 2$, $x_2 = 7$

5. Seja $f(x)=x^2-2$, calculando $f(0) - f(-2)$, obtemos:

a) 2

b) -1

c) 0

d) -4

seguirmos no curso de cálculo de básico.

Respostas dos exercícios desta unidade:

Exercício 3.1

a) $B = \{x \in \mathbb{N} /\ 2 \leq 6\}$
b) $G = \{x \in \mathbb{Z} /\ -\infty < x \leq 1\}$
c) $J = \{x \in \mathbb{N} /\ 2 \leq x < \infty\}$
d)$C = \{x \in \mathbb{N} /\ -5 \leq x \leq 3\}$

Exercício 3.2

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{11}{4}$ c) $\frac{79}{20}$ d) $\frac{67}{20}$ e) $\frac{28}{10}$

Exercício 3.3

a) $D = \mathbb{R} - \{-3\}$ b) $D = \mathbb{R}$ c)$D = \mathbb{R}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{1}{2}\}$

Exercício 3.4

a) $x = 3$ b) $x = -10$ c)$x = 4$ d)$x = 5$

Exercício 3.5

Dica: Proceda como no exemplo 3.7.

Exercício 3.6

a) 4 b) não tem raízes c) $0, -\frac{7}{2}$ d) $3, -3$

Exercício 3.7

Dica: Proceda como no exemplo 3.9.

Exercício 3.8

a) 1 u.m b) 3000 unidades

Exercício 3.9

2 u.m

Exercício 3.10

a) quantidade de equilíbrio: 2000 unidades; preço de equilíbrio: 5 u.m

b) quantidade de equilíbrio: 1000 unidades; preço de equilíbrio: 3 u.m

Exercício 3.11

a) $R(x) = x\sqrt{2500 - x^2}$; $R(x)/x = \sqrt{2500 - x^2}$

b) 1200 u.m; 30 u.m por unidade

Exercício 3.12

7 u.m/ unidade

Exercício 3.13

-1687,5, terá prejuízo.

Exercícios complementares da unidade

1. D 2. A 3. D 4. A 5. D

CAPÍTULO 4

LIMITE E CONTINUIDADE

Objetivos de aprendizagem

Primeiramente, será estudado o conceito de limite por meio de um exemplo, o qual proporcionará uma noção intuitiva do assunto. Esta noção será formalizada na sequência e, nos ajudará a definir a propriedade de continuidade de uma função, seus limites laterais finitos e infinitos.

Após o estudo de funções realizado ao longo do capítulo 3, veremos agora o conceito de *limite*. Será analisado o comportamento de funções próximas a alguns pontos de interesse, dados a priori. Este conceito ser-nos-á importante na formulação das noções de continuidade, derivada e integral, objetos de estudo das unidades 5 e 6, respectivamente. Bons estudos!

1 I PROCESSO DE LIMITE

Para iniciarmos nosso estudo acerca dos limites, começamos por analisar o comportamento da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a qual possui como lei de formação f (x) = 3x+2. Como estudado no capítulo anterior, podemos construir uma tabela com alguns valores para a função em alguns pontos previamente dados.

x	***f(x)***
0,5	3,5
0,9	4,7
0,99	4,97
0,999	4,997
0,9999	4,9997

Tabela 1: valores aproximados para a função dada. Fonte: autoria.

x	*f(x)*
1,5	6,5
1,1	5,3
1,01	5,03
1,001	5,003
1,0001	5,0003

Tabela 2: valores aproximados para a função dada. Fonte: autoria.

Note que o valor de f *(x)* se aproxima de 5 quando *x* se aproxima de 1, ou seja, diz-se neste caso que *x* tende a 1. Em notação matemática, representa-se por $x \to 1$. Isso se aplica, por exemplo, se escolher valores menores ou maiores que ele.

Em suma, tem-se que a ***f (x) tende ao valor 5 quando x tende ao valor 1.*** Na linguagem matemática, tem-se que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

Tal exemplo supracitado, leva-nos à seguinte definição:

> ***Definição 4.1:*** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, se f aproxima-se de um valor constante L quando x aproxima-se de um dado valor x_0 diz-se que f tende ao limite L. Formalmente, escrevemos:*
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Este valor real *L* é chamado de *limite* de *f (x)* no ponto x_0, onde por $x \to x_0$ queremos dizer um número *x* muito próximo de x_0, mas diferente dele. Em nosso exemplo, temos que *f (x) =* 3x+2 e que seu valor se aproxima de 5 conforme x se aproxima de 1.

Exemplo 4.1

Determine o $\lim_{x \to 3} x^3 - 1$.

Solução:

Ao fazer x tender a 3, fazemos então x^3 tender a 27, e x^3-1 tende a 26.

Assim, temos: $\lim_{x \to 3} x^3 - 1 = 26$.

Exemplo 4.2

Função constante

Seja f (x) = a, onde a é um número real qualquer, então:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a\,.$$

Temos que o limite é a para qualquer ponto x_0.

Exemplo 4.3

Seja f(x)= $\sqrt{3-x}$, *calcule* $\lim_{x \to 3} f\ (x)$.

Solução:

Lembremos que essa função pertence a $\mathbb{R}$ *se 3-x ≥0, ou seja, x ≤ 3. Assim:*

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{3-x} = \sqrt{3-3} = 0.$$

Mas, nem sempre podemos calcular o limite de forma direta como nos exemplos anteriores, pois é necessário analisar sempre o comportamento da função em valores próximos ao ponto que estamos considerando.

Exemplo 4.4

Vejamos, então, o comportamento de f(x)= $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$ *quando queremos determinar o* $\lim_{x \to 2} f\ (x)$.

Solução 1:

Para termos uma ideia do comportamento da f (x) vamos calcular alguns de seus valores em pontos próximos a 2, sem, no entanto, calculá-la nesse ponto.

Aqui vemos uma aproximação de f (x) feita por valores de x menores que 2.

x	**1**	**1,25**	**1,50**	**1,75**	**1,90**	**1,99**	**1,999**
f(x)	**-2**	**-1,75**	**-1,50**	**-1,25**	**-1,1**	**-1,01**	**-1,001**

Já a próxima tabela, considera valores de f (x) quando x se aproxima de 2 mas por valores maiores que ele:

x	**3**	**2,75**	**2,5**	**2,25**	**2,1**	**2,01**	**2,001**
f(x)	**0**	**-0,25**	**-0,5**	**-0,75**	**-0,9**	**-0,99**	**-0,999**

Por estas aproximações observamos a tendência de que f (x) atinja o valor -1 quando x tende ao valor 2, ou seja, temos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = -1$$

Fizemos a inspeção acerca deste limite de forma intuitiva, mas podemos usar a definição para estudar esse limite.

Solução 2: *Usando a definição 4.1*

Ao observarmos f (x) podemos perceber que ela é uma razão entre duas funções, p (x) = x^2-5x+6 e q(x)=x-2, se substituirmos x= 2 de forma direta teremos q (x) =0 e a fração não estará definida nesse ponto pois teremos zero no denominador e f(x)=$\frac{0}{0}$.

> *Vale lembrar que a divisão por 0 não está definida no conjunto dos números reais, que foi onde estabelecemos os conceitos de função e limites.*

Porém, não interessa calcular o limite dessa função exatamente no ponto x=2, mas sim o seu limite quando x se aproxima de 2, quando seu valor tende a 2. Então, para x ≠ 2 pode-se manipular a função de modo a que ela fique definida próxima ao ponto em questão:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)} = x - 3$$

Reescrevendo f(x) e, consequentemente, quando x→2, f(x) →-1, isto é, faz-se:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x - 3 = 2 - 3 = -1$$

Este procedimento demonstra que ao se calcular um limite assume-se valores tão próximos de 2 quanto desejado, porém nunca iguais a 2.

Podemos, deste modo, concluir que para determinar o limite de uma *f (x)*, na situação em que $x \to x_0$, não nos interessa o valor de *f (x)* exatamente em $x=x_0$, e sim nas proximidades (ou vizinhanças) de x_0.

Baseando-nos nas considerações acima podemos, também, identificar três possíveis situações que envolvem limites. Dado um limite qualquer e supondo-o existir tal que $\lim_{x \to x_0}$ f(x)=L, um dos seguintes casos acontece:

Caso 1: *f* está definida em x_0 e $f(x_0)$=L,

Caso 2: *f* está definida em x_0,

Caso 3: *f* está definida em x_0 e $f(x_0) \neq L$

A seguir, vamos trabalhar com alguns exemplos que ilustram cada um desses casos.

Exemplo 4.5

1. Calcule $\lim_{x \to 3}$ 10-*x.*

Solução:

Sabemos que f está definida em x=3 e f (3) =7, ou seja, quando x→3, f (x) →7, então:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 7$$

2. Determine $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$.

Solução:

Observe que no ponto x=3, a função não está definida (teremos 0 no denominador), porém, para x ≠ 3:

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = (x+3),$$

logo:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6$$

3. Calcule $\lim_{x \to 3} \begin{cases} x+3 & , se\ x \neq 3 \\ 10 & , se\ x = 3 \end{cases}$

Solução:

Lembre-se de que estamos interessados em calcular o limite na vizinhança de 3 e não nesse ponto, por isso vamos usar a sentença que nos dá a parte da função em que x≠3.

Deste modo:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} x + 3 = 6$$

Note que $\lim_{x \to 3}$ *f(x)≠f(3) pois f(3) = 10≠6, o limite quando x→3 é diferente do valor da função no ponto.*

Essa separação em casos foi realizada para que se possa, posteriormente, identificar uma importante característica de funções: *a continuidade. De*fine-se, agora, o conceito de continuidade.

> ***Definição 4.2 (continuidade):*** *se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f\ (x_0)$ *a função é contínua*

Por essa definição, as funções dos exemplos 4.1 e 4.2 são ditas contínuas no valor 3, mas não a do exemplo 4.3.

1.1 Definição Formal de Limite

Até o momento, tratou-se o processo de limite de forma quase intuitiva, explorando cálculos algébricos e suas aproximações que, certa forma, justificam os valores que encontramos. No entanto, há uma definição mais rigorosa de limite utilizada na Matemática que confere maior precisão às estimativas do valor L. Vamos, então, à formalização.

Definição 4.3 (formalização de Limite):

Dizemos que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

existe se, para todo número real $\varepsilon > 0$ *, existe em correspondência um número real* $\delta > 0$ *tal que:*

$$se\ 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

As letras gregas ***ε*** *(épsilon) e* ***δ*** *(delta) são números reais que satisfazem as diferenças dentro dos módulos.*

Vamos explorar com maiores riquezas detalhes no próximo exemplo.

Exemplo 4.6

Usando a definição 4.3, demonstre que

$$\lim_{x \to 2}(5x - 3) = 7\,.$$

Solução:

Seja f(x) = 5x-3, x_0*=2 e L=7, segundo a definição formal de limite temos que mostrar que para um ε>0 arbitrário existe δ>0 tal que: se 0<* | *x-2* | < δ $\Rightarrow$ | (5x-3)-7 | < ε.

Para resolver problemas com desigualdades desse tipo vamos encontrar um δ *adequado analisando a afirmação feita sobre . As seguintes desigualdades equivalentes:*

$$|(5x - 3) - 7| < \varepsilon$$

$$|(5x - 10)| < \varepsilon$$

$$|5(x - 2)| < \varepsilon$$

$$5|(x - 2)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x - 2| < \frac{1}{5}\varepsilon$$

Essa última desigualdade nos orienta sobre a escolha de δ*. Escolhemos convenientemente*

$$\delta \leq \frac{1}{5}\varepsilon \; já \; que \; \varepsilon > 0 \,,$$

e, assim obtemos:

$$0 < |x-2| < \delta$$

$$0 < |x-2| < \frac{1}{5}\varepsilon$$

$$0 < 5|x-2| < \varepsilon$$

$$0 < |5x-10| < \varepsilon$$

$$0 < |(5x-3)-7| < \varepsilon$$

Completando a prova de que $\lim_{x \to 2}$*(5x-3)=7.*

2 | PROPRIEDADES DOS LIMITES

Como visto nas unidades 1 e 2, existem alguns dispositivos práticos na matemática que auxiliam a resolver problemas com expressões algébricas, o que se caracteriza como propriedades.

Do mesmo modo, não seria diferente para calcular limites. Abaixo estão relacionadas as propriedades dos limites, as quais deverão ser utilizadas para sua determinação, tais como nos exemplos posteriores – uma vez que obtê-lo por meio da definição 4.3 seria muito laborioso.

Propriedades: *Sejam f e g funções quaisquer em* $\mathbb{R}$ *e* ***a*** *uma constante. Se temos que* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$*, então:*

1. *Propriedade da Soma:*

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = L + M$$

2. *Propriedade da Diferença:*

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$

3. *Propriedade do Produto:*

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) . g(x)\big) = L . M$$

4. *Propriedade de Multiplicação por constante:*

$$\lim_{x \to x_0} a . f(x) = a . L$$

5. *Propriedade do Quociente:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}\ , \textit{válido se } M \neq 0$$

6. *Regra da Potência:*

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = L^n$$

Exemplo 4.7

Seja f (x) = 14x -1, calcule o $\lim_{x \to 2} f\ (x)$.

Solução:

Podemos utilizar as propriedades 2 e 4, juntamente com a informação do exemplo 4.2 sobre o limite de funções constantes:

$$\lim_{x \to 2} 14x - 1 = 14 \lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 1 = 14.2 - 1 = 27$$

Exemplo 4.8

Calcule o limite dado por $\lim_{x \to a} \frac{x^2 - x + 4}{3x - 2}$

Solução:

Vamos fazer uso da propriedade do quociente:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - x + 4}{3x - 2} = \frac{\lim_{x \to a} x^2 - x + 4}{\lim_{x \to a} 3x - 2} = \frac{a^2 - a + 4}{3a - 2}$$

Exemplo 4.9:

Calcule o limite dado por $\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 25}$.

Solução:

Observe que nesse caso não podemos aplicar a propriedade do quociente diretamente pois:

$$\lim_{x \to 5} \frac{x - 5}{x^2 - 5} = \frac{\lim_{x \to 5} x - 5}{\lim_{x \to 5} x^2 - 5} = \frac{0}{0},$$

que é uma indeterminação. Todavia, podemos tentar contornar essa indeterminação por meio de manipulações algébricas. Nesse caso, fazemos:

$$\frac{x - 5}{x^2 - 5} = \frac{(x - 5).1}{(x - 5).(x + 5)} = \frac{1}{(x + 5)}$$

Assim

$$\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-5}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{x+5}=\frac{1}{10}\,.$$

Exemplo 4.10

Calcule o $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}$.

Solução:

Aqui também ocorre indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Façamos então:

$$\frac{x^2-7x+10}{x-2}=\frac{(x-2).(x-5)}{(x-2)}=(x-5)$$

Deste modo podemos prosseguir com o cálculo, obtendo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-5)=2-5=-3\,.$$

Exemplo 4.11

Calcule o $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+36}-6}{x^2}$

Solução:

Não podemos substituir imediatamente x=0, note que o numerador e o denominador não têm fator comum que possamos perceber diretamente. A maneira como criamos um fator comum é multiplicá-los pelo inverso da expressão do numerador da seguinte maneira:

$$\frac{\sqrt{x^2+36}-6}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+36}-6}{x^2}.\frac{\sqrt{x^2+36}+6}{\sqrt{x^2+36}+6}$$

$$=\frac{(\sqrt{x^2+36})^2+6\sqrt{x^2+36}-6\sqrt{x^2+36}-36}{x^2.(\sqrt{x^2+36}+6)}=\frac{(\sqrt{x^2+36})^2-36}{x^2.(\sqrt{x^2+36}+6)}$$

$$=\frac{x^2+36-36}{x^2(\sqrt{x^2+36}+6)}=\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+36}+6)}=\frac{1}{(\sqrt{x^2+36}+6)}$$

Então:

Se tivermos em quocientes $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L, L\neq 0$ *mas* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, ***não existe o limite de*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}}$.

Exemplo 4.12

Calcule se existir o $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$

Solução:

Percebemos, novamente, a indeterminação. Neste caso, vamos utilizar o que estudamos na unidade 1, isto é, a fatoração:

$$\frac{x^2-x-x}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x-2)} = \frac{(x+1)}{(x-2)},$$

temos, então

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{(x-2)^2} = \frac{\lim_{x\to 2}(x+1)}{\lim_{x\to 2}(x-2)} = \frac{2+1}{2-2} = \frac{3}{0}$$

A indeterminação permanece e nesse caso concluímos que o limite não existe.

Exemplo 4.13

Calcule, se existir, o $\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{2+5x-3x^3}{x^2-1}}$

Solução:

Analisemos o conteúdo da raíz via a propriedade do quociente:

$$\lim_{x\to 1} 2+5x-3x^3 = 2+5-3 = 4\,,\, enquanto\ que\ \ \lim_{x\to 1} x^2-1 = 1-1 = 0$$

Sendo assim, chegamos à indeterminação $\frac{4}{0}$ *que não conseguimos remover. Portanto, o limite não existe.*

Exercício 4.1

1.Calcule os limites se existirem:

$(a)\ \lim_{x\to -7}(2x+5)$

$(b)\ \lim_{x\to 2} x^4+5x-2$

$(c)\ \lim_{t\to 6} 8(t-5)(t-7)$

$(d)\ \lim_{y\to 5}\frac{y^2}{5-y}$

$(e)\ \lim_{x\to -4}(x+3)^{1984}$

$(f)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{2x}}{3}$

$(g)\ \lim_{x\to {}^3/_2}\frac{4x^2-9}{2x-3}$

$(h)\ \lim_{x\to 3}\frac{1}{x-4}$

$(i)\ \lim_{x\to 35}\sqrt{99-x}$

$(j)\ \lim_{x\to -1}\frac{1}{(x-1)^4}$

Exercício 4.2

Suponha $\lim_{x\to x_0} f(x) = 5\ \ e\ \ \lim_{x\to x_0} g(x) = -2$*. Calcule:*

$(a)\ \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) \quad (b)\ \lim_{x\to x_0} 2f(x)g(x) \quad (c)\ \lim_{x\to x_o}(f(x)+3g(x)) \quad (d)\ \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}-1$

Exercício 4.3

Os limites a seguir, existem?

$$(a)\lim_{x\to -5}\frac{x^2+3x-10}{x+5}\quad (b)\lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{x^3+2x^2}\quad (c)\lim_{u\to 1}\frac{u^4-1}{u^3-1}\quad (d)\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

$$(e)\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}\quad (f)\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{x-2}\quad (g)\lim_{x\to -3}\frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}\quad (h)\lim_{x\to \pi}\frac{\sqrt{x-\pi}}{\sqrt{x+\pi}}$$

Exercício 4.4

Prove pela definição formal os seguintes limites:

$$(a)\lim_{x\to 3}5x=15\qquad (b)\lim_{x\to -3}(2x+1)=-5\qquad (c)\lim_{x\to -6}(10-9x)=64$$

$$(d)\lim_{x\to 6}(9-\frac{1}{6}x)=8\quad (e)\lim_{x\to 0.25}\frac{1}{x}=4$$

$$(f)\lim_{x\to {}^1/_2} mx+b=({}^m/2)+b, e\ m>0\qquad (g)\lim_{x\to 1}mx+b=m+b$$

Exercício 4.5

Calcule:

$$(a)\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^3}\quad (b)\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x}{x}\quad (c)\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x+1}{x-1}\quad (d)\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}$$

3 | CONTINUIDADE E LIMITES LATERAIS

Na seção anterior, mencionamos o fato de que quando temos o $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ isso significa que a função é contínua (definição 4.2). Porém, vamos formalizar esta definição.

> ***Definição 4.4 (Formalização de Continuidade):*** *Diz-se que a função é contínua em um número x_0 se e só se forem válidas as seguintes condições:*
>
> ***(i)*** *$f(x_0)$ está definida,*
>
> ***(ii)*** *$\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe*
>
> ***(iii)*** *$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.*

Do mesmo modo que expomos para os limites, vamos falar das propriedades das funções contínuas. Para isso, sejam *f* e *g* duas funções contínuas em um certo número x_0, dessa forma, temos:

1. Soma:

A soma de funções contínuas f +g é contínua.

2. Diferença:

A diferença de funções contínuas f - g é contínua.

3.Produto:

O produto de funções contínuas f.g é contínuo.

4.Quociente:

O quociente de funções contínuas $\frac{f}{g}$ *é contínuo desde que g≠0.*

Nada melhor como alguns exemplos para entendermos a continuidade das funções.

Exemplo 4.14

Verifique se x^3-2 *é contínua em* 0.

Solução:

Vamos testar as condições (i) a (iii):

(i) $f(x_0)$ *está definido pois* $f(0) = -2$

(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^3 - 2) = \lim_{x\to 0} x^3 - \lim_{x\to 0} 2 = 0 - 2 = -2$

(iii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = -2 = f\ (0)$

Logo, com todas as condições satisfeitas a f é contínua em 0.

Adicionalmente podemos mostrar que f é contínua para todo x_0 *fazendo:*

$$f(x_0) = {x_0}^3 - 2\ ,\ \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} {x_0}^3 - 2 = {x_0}^3 - 2 = f(x_0)$$

Caso uma das três condições não seja obedecida, então a f não é contínua no ponto x_0 *(ou no número* x_0*).*

Exemplo 4.15

Verifique se a f a seguir é contínua em x_0=3

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & , se\ x \neq 3 \\ 2 & , se\ x = 3 \end{cases}$$

Solução:

Quando x ≠ 3, temos:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = x + 3 \; e \; o \; \lim_{x \to 3} f(x) \; fica:$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$$

Mas f (3) =2 e $\lim_{x \to 3}$ *f(x)=6, por essas informações concluímos que f não é contínua em 3.*

Exemplo 4.16

Estude a continuidade da seguinte função x_0=1

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x, se \; x \leq 1 \\ 3 - x, se \; x > 1 \end{cases}$$

Solução:

Temos que $\lim_{x \to 1}$(3-x)=2, *mas no ponto* 1 f(1)=3+x=4.

Logo, essa função não é contínua.

Resultados como os que obtivemos com as funções estudadas nos exemplos anteriores, motivam-nos à análise dos limites próximos aos pontos de descontinuidades. Deste modo, definiremos a partir deste momento os limites na vizinhança de tais pontos como *limites laterais*.

3.1 Limites Laterais

Estudado um ponto de descontinuidade de uma função, é possível considerar aproximações a esse número, feita por valores menores que ele (à sua esquerda) e por valores maiores que ele (ou seja, à sua direita). Na função do exemplo 4.16 da seção anterior, há uma descontinuidade no ponto 1. Neste sentido, estudaremos os limites quando x→1 pela esquerda que denotaremos $x \to 1^-$ e do mesmo modo quando x→1 pela direita, denotando por $x \to 1^+$.

Retomando a função dada pelo exemplo 4.16, verificamos que $\lim_{x \to 1^+}$ f(x)=2 enquanto $\lim_{x \to 1^-}$ f(x)=4.

Este estudo dos limites laterais nos permite escrever algumas conclusões sobre o processo de obtenção de limites, a saber:

Conclusão 1. *Se os limites laterais existem e são iguais então o limite da função existe, como consequência os três limites são iguais.*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Conclusão 2. *Por outro lado, se os limites laterais existem, mas são diferentes, não existe o limite.*

Exemplo 4.17

Seja a função f definida por f=$\sqrt{25 - x^2}$*. Calcule* $\lim_{x \to -5^-}$ *f(x) e* $\lim_{x \to -5^+}$ *f(x).*

Solução:

Temos então:

$$\lim_{x \to -5^+} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 25} = 0$$

mas,

$$\lim_{x \to -5^-} \sqrt{25 - x^2}$$

não fornece um valor real para a raíz, vamos utilizar, por exemplo, o valor x= - 5.001, obtemos:

$$\sqrt{25 - (-5.001)^2} = \sqrt{25 - 25.010} = \sqrt{-0.010}$$

que não está definida para os reais e, portanto, $\lim_{x \to -5^-}$ *f(x)* não existe.

Exemplo 4.18

Seja f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, se\ x > 0 \\ x - 2, se\ x < 0 \end{cases}$$

Calcule $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ *e* $\lim_{x \to 0^+} f(x)$*.*

Solução:

Ao aproximar-se de 0 pela direita $\lim_{x \to 0^+}$ *x+2=2 e ao aproximar-se de 0 pela esquerda* $\lim_{x \to 0^-}$ *x-2=-2, os limites laterais existem, mas são diferentes; por isso dizemos que não existe o limite* $\lim_{x \to 0}$ *f(x).*

Exemplo 4.19

Seja f dada por

$f(x) = f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$*, verifique os limites laterais quando x→1.*

Solução:

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \; e \; \lim_{x \to 1^+} 2 - x = 1$$

Como temos os limites laterais iguais temos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

Exercício 4.6

Calcule:

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|} \quad e \quad \lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|}$$

Ao lidar com a função módulo, considere as situações em que o que está dentro dele é maior ou menor que 0.

Exercício 4.7

Resolva os limites:

$a)\ \lim_{x \to 0.5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ $\qquad$ $b)\ \lim_{x \to -2^+} \left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{2x+5}{x^2+x}\right)$

$c)\ \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$ $\qquad$ $d)\ \lim_{x \to 2^+} (x+3)\frac{|x+2|}{x+2} \; e \; \lim_{x \to 2^-} (x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$

Exercício 4.8

Mostre que f é continua em a:

$a)\ f(x) = \sqrt{2x-5} + 3x\ , em\ \ a = 4$

$b)\ f(x) = 3x^2 + 7\ , em\ a = -5$

Exercício 4.9

Explique por que f não é contínua em a:

$a)\ f(x) = \frac{3}{x+2}\ \ , em\ a = -2$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}\ , se\ x \neq 3 \\ 4\ , se\ x = 3 \end{cases} \quad , em\ a = 3$$

Exercício 4.10

Determine cada limite se existir, fazendo: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *para:*

$a) f(x) = \sqrt{5-x}\ ;\ \boldsymbol{x_0} = 5$

$b)\ f(x) = \sqrt[3]{x^3-1}\ , \boldsymbol{x_0} = 1$

4 | LIMITES QUE ENVOLVEM INFINITO

Até o momento trabalhou-se com valores finitos de L, ou seja, com valores conhecidos. No entanto, na altura em que estão os estudos, é conveniente fazer uma extensão para o estudo de limites infinitos.

4.1 Limites infinitos

Muitas vezes, ao analisar os limites laterais de determinadas funções, percebe-se um comportamento crescente do numerador, do denominador ou de ambos, de modo que o seu quociente não seja finito. Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 4.20

Seja f a seguinte função $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ *, queremos analisar o comportamento dessa função quando x → 4.*

Solução:

Ao fazer $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{1}{(x-4)^2}$ *e* $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2}$ *temos sucessivas divisões de 1 por números muito pequenos, por exemplo:*

x+	***x-***	***f(x)***
4.1	3.9	100
4.01	3.99	1000
4.001	3.999	1000000
4.0001	3.9999	100000000
4.00001	3.99999	10000000000

Pode-se afirmar, então, que $\lim\limits_{x\to 4^{\mp}} \frac{1}{(x-4)^2} = \lim\limits_{x\to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty$.

E neste caso, como os limites laterais apresentam o mesmo comportamento, escrevemos:

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$$

Veja o comportamento da função f no gráfico abaixo:

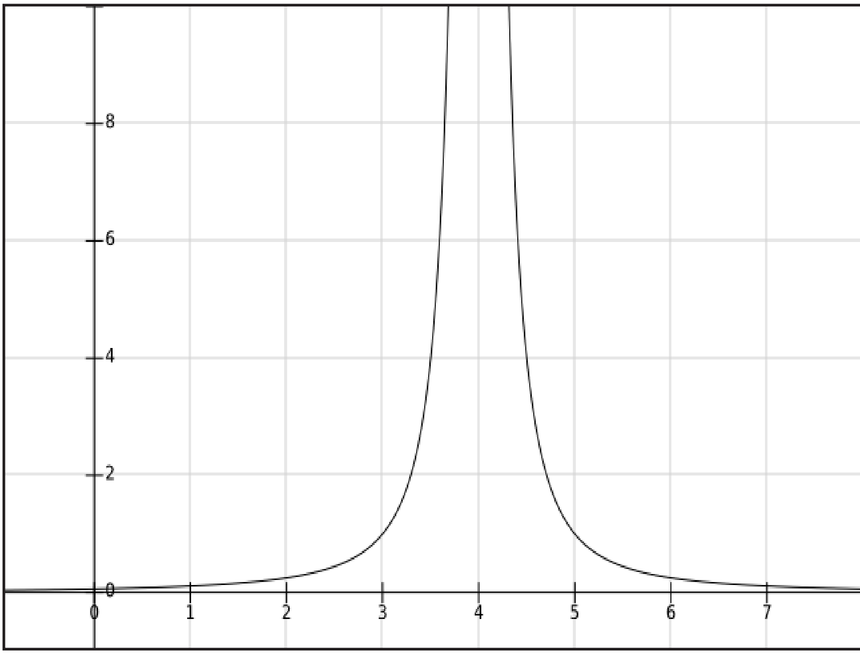


Figura 23: comportamento da função f. Fonte: autoria.

Exemplo 4.21

Vejamos agora a seguinte função:

$$f(x) = (-\frac{1}{x^{2}}),$$

Analisemos seus limites laterais quando x→0 pela esquerda e pela direita.

Na medida em que temos tomamos x próximos a 0 tanto por valores maiores quanto por menores, o denominador torna-se arbitrariamente grande. Indicamos o comportamento da função por:

$$\lim_{x\to 0^+}(-\frac{1}{x^2}) = -\infty \; e \; \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$

Já que nos limites laterais a f (x) exibe o mesmo comportamento, afirma-se que:

$$\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{x^2}) = -\infty$$

Como gráfico da função, temos:

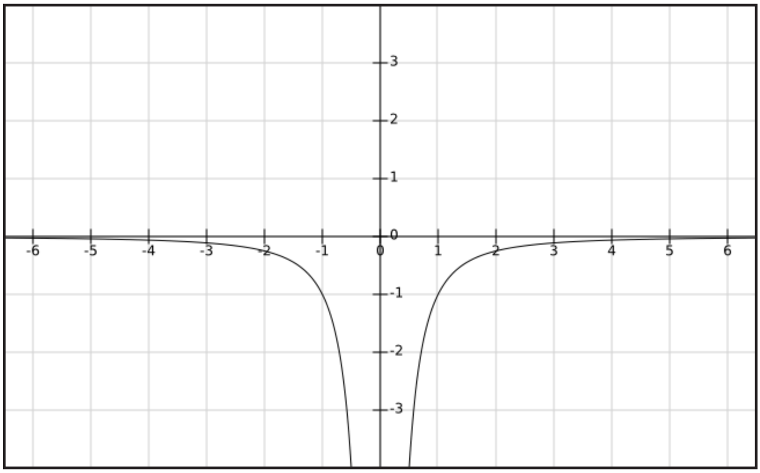


Figura 24: gráfico dos limites laterais. Fonte: autoria.

Exemplo 4.22

Vamos estudar o comportamento das seguintes funções em torno de $x_0=2$*:*

$$(a)\ h(x) = \frac{x^3-1}{x^2-4} \qquad\qquad (b)\ h(x) = \frac{x^3-1}{(x^2-4)^4}$$

Solução:

(a) Quando fazemos x tender a 2 o numerador permanece finito, pois $2^3-1=7\neq 0$*, no denominador, no entanto, surge uma indefinição já que* $2^2-4=0$*. Ao nos aproximarmos de 2 tanto pela esquerda quanto pela direita, o numerador se mantém positivo e finito (próximo de 7) enquanto no denominador para* $x < 2$ *é negativo e para* $x>2$ *ele é positivo, então* $h(x) < 0$ *se* $x < 2$ *e* $h(x) >0$ *se* $x> 2$*, portanto:*

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-1}{x^2-4} = -\infty \quad e \quad \lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-1}{x^2-4} = \infty$$

(b) Procedendo como no item (a) temos o mesmo resultado para o numerador e a tendência a 0 no denominador, porém, a potência par faz com que h (x) seja sempre positiva tanto para valores que se aproximam de dois pela esquerda ou pela direita. Logo,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{(x^2-4)^4} = \infty$$

Generalizando as possibilidades de limites laterais infinitos:

$$1.\ \lim_{x\to {x_0}^+} f(x) = +\infty \qquad 2.\ \lim_{x\to {x_0}^-} f(x) = +\infty$$

$$3.\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \qquad 4.\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Quando estivermos estudando funções do tipo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ e a função $q(x)$ for igual a 0 no ponto considerado, a fração tenderá a um enorme valor absoluto.

Então:

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = L \neq 0 \ e \ \lim_{x\to x_0} q(x) = 0\text{, então } \lim_{x\to x_0} \left|\frac{p(x)}{q(x)}\right| = +\infty$$

4.2 Limites no Infinito

Os valores dos quais se aproxima x lateralmente por outros valores menores ou maiores do que ele, forneceram o valor de f (x) para essas situações, e acabaram por levar, na seção anterior, a investigar o comportamento de funções. Tal comportamento atinge valores infinitos. Nesta seção, investiga-se, por meio de exemplos, o que ocorre quando se faz os valores de x tenderem ao infinito.

Exemplo 4.23

Vamos investigar o comportamento de g(x)=$\frac{1}{x^3}$ quando $x_0 \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \ e \ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

Na forma de notação única podemos dizer que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

Nota: Observando-se o comportamento da função acima, em geral, valem:

i) Seja n um inteiro positivo,

$$1)\ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad 2)\ \lim_{x\to\infty} x^n = \infty \qquad 3)\ \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty \text{ se } n \text{ é par} \\ -\infty \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

ii) Seja k um número real. Em (1) ficamos com k/x^n, quanto a (2) e (3) temos dois casos, se k > 0 teremos kx^n, mas se k < 0, troca-se os resultados ∞ e -∞.

Em virtude do que foi destacado acima, obtemos os seguintes exemplos de resultados:

$\lim_{x\to\infty} x^5 = \infty$ $\lim_{x\to\infty} 13x^4 = \infty$ $\lim_{x\to\infty}(-2x^7) = -\infty$ $\lim_{x\to\infty}(-8x^{12}) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} 13x^4 = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} (-2x^7) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} (-8x^{12})$

$= -\infty$

Adota-se a seguinte estratégia ao tratar-se de funções polinomiais ou racionais com $x_0 \to \pm\infty$:

Funções Polinomiais:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0) = \cdots = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

Funções Racionais:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Concluímos então que quando $x_0 \to \pm\infty$ *é o termo de maior potência quem define o resultado do limite em uma função polinomial e a razão dos termos de maior potência no caso de funções racionais.*

Exemplo 4.24

Alguns resultados obtidos a partir d cálculo de limites de funções polinomiais e racionais:

$$(a)\ \lim_{x\to-\infty} (3x^5 - 2x^4 + 3) = \lim_{x\to-\infty} 3x^5 = -\infty$$

$$(b)\ \lim_{t\to-\infty} (3 - t + 4t^4) = \lim_{t\to-\infty} 4t^4 = \infty$$

$$(c)\ \lim_{x\to\infty} (6x^3 - 3x^2 + 1) = \lim_{x\to\infty} 6x^3 = \infty$$

$$(d)\ \lim_{x\to\infty} (2 - x^{30} + x^{60} - 56^{75}) = \lim_{x\to\infty} -56^{75} = -\infty$$

$$(e)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{8x^9 + 3x^4 - 4}{7x^6 - x + 12} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x^9}{7x^6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3}{7} = -\infty$$

$$(f)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{121u^{13} + 337}{11u^{13} - 4x + 456} = \lim_{u\to-\infty} \frac{121u^{13}}{11u^{13}} = \lim_{u\to-\infty} 11 = 11$$

Exercício 4.11

Observe a figura 26 a seguir e complete as informações sobre f (x):

$a)\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$ $\quad b)\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$

$c)\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$ $\quad d)\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$

$e)\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ $\quad f)\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$

$g)\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ $\quad h)\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

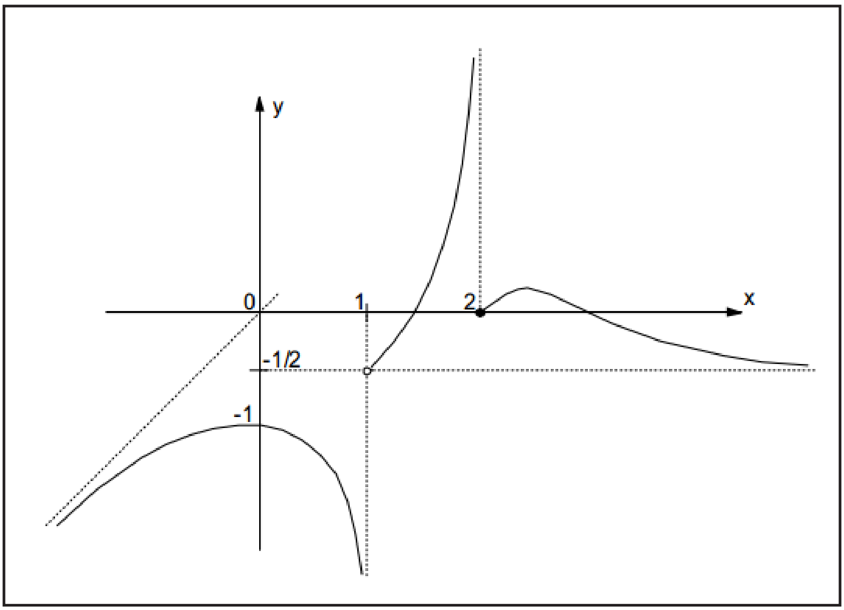


Figura 25: Gráfico para o exercício 4.11. Fonte: autoria.

Exercício 4.12

Para a f (x) dada, expresse cada um dos limites como ∞, -∞ ou NE (não existente):

$a)\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ $\qquad c)\lim\limits_{x \to a} f(x)$

$1.\ f(x) = \frac{5}{x-4}\ ,em\ a = 4$

2. $f(x) = \frac{8}{(2x+5)^3}$, $em\ a = -\frac{5}{2}$

3. $f(x) = \frac{3x}{(x+8)^2}$, $em\ a = -8$

4. $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-x-2}$, $em\ a = -1$

5. $f(x) = \frac{1}{x(x-3)^2}$, $em\ a =$

Exercício 4.13

Determine o limite, se existir:

$$a)\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x+1}{2x^2+4x-7}$$

$$b)\lim_{x\to-\infty} \frac{4-7x}{2+3x}$$

$$c)\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{4x^3+5x}$$

$$d)\lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+2x}{2x^2-3}$$

$$e)\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x^2}{x+3}$$

Exercício 4.14

Determine o limite de cada função quando x→ ±∞:

$$a)f(x) = \frac{2x+3}{5x+7} \qquad b)f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$$

$$c)\ f(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x} \qquad d)f(x) = \frac{10x^5+x^4+31}{x^6}$$

$$e)\ f(x) = \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$$

Exercício 4.15

Calcule os limites laterais:

(a) $\lim_{x \to \pi^-} \frac{|\pi - x|}{x - \pi}$ (b) $\lim_{x \to \pi^+} \frac{|\pi - x|}{x - \pi}$ (c) $\lim_{x \to 8^-} \frac{1}{x - 8}$

(d) $\lim_{x \to 8^+} \frac{1}{x - 8}$ (e) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{2 - x}$ (f) $\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x - 2}$

Exercícios complementares da unidade

1. *Analise as informações abaixo:*

I. f (x) é contínua

II. g (x) não é contínua

Então, podemos dizer que f (x). g (x) é contínua?

a) verdadeiro

b) falso

2. Para que o limite de uma dada função exista:

a) devem existir os limites laterais

b) é suficiente que exista apenas um limite lateral

c) os limites laterais devem existir e serem iguais

d) a função deve ser continua e independente dos limites

3. Quando temos o limite de uma função do tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$*:*

a) o limite sempre existe

b) o limite nunca existe

c) temos que analisar g (x)

d) temos que analisar f (x)

4. Calculando o limite $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x-1}$ *obtemos:*

a) -1

b) 0

c) +∞

d) -∞

5. Calculando o limite $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ *obtemos:*

a) 0

b) -∞

c) 1

d) +∞

Respostas dos exercícios desta unidade

Exercício 4.1

1. a) -19	f) 0
b) 40	g) 6
c) -8	h) -1
d) não existe	i) 8
e) 1	j) $\frac{1}{32}$

Exercício 4.2

a) -10

b) -20

c) -1

d) $-\frac{7}{6}$

Exercício 4.3

a) -7	e) não existe
b) não existe	f) não existe
c) não existe	g) não existe
d) não existe	h) 0

Exercício 4.4

Use a definição

Exercício 4.5

a) não existe b) 0 c) 1 d) não existe

Exercício 4.6

Veja que $x + 2 > 0$ se, e somente se $x > -2$. Assim sendo, se $x > -2$, temos $x + 2 > 0$ e então $|x + 2| = x + 2$. Por outro lado, se $x < -2$, temos $x + 2 < 0$ e então $|x + 2| = -$ (x + Assim sendo, temos:

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x \to -2} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x+2}{|x+2|} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x+2}{-(x+2)} = \lim_{x \to -2} -1 = -1$$

Exercício 4.7

a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) $2\sqrt{5}$ d) a) 1, b) -1

Exercício 4.8

a) $\lim_{x\to 4} f(x) = f\,(4)$ b) $\lim_{x\to -2} f(x) = f(-2)$

Exercício 4.9

a) *f* não está definida em -2 b) $\lim_{x\to 3} f(x) \neq f\,(3)$

Exercício 4.10

a) não existe b) 0

Exercício 4.11

a) -∞ b) $-\frac{1}{2}$ c) +∞ d) 0

e) -1 f) -1 g) $-\frac{1}{2}$ h) -∞

Exercício 4.12

1 a) -∞	2 a) -∞	3 a) -∞	4 a) ∞	5 a) ∞
b) ∞	b) ∞	b) -∞	b) -∞	b) ∞
c) NE	c) NE	c) -∞	c) NE	c) ∞

Exercício 4.13

a) $\frac{5}{2}$ b) $-\frac{7}{3}$ c) 0 d) -∞ e) ∞

Exercício 4.14

a) $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}$ b) 0, 0 c) 7,7 d) 0, 0 e) $-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$

Exercício 4.15

a) -1 b) 1 c)- ∞ d)+ ∞ e) +∞ f) 0

Exercícios Complementares da unidade

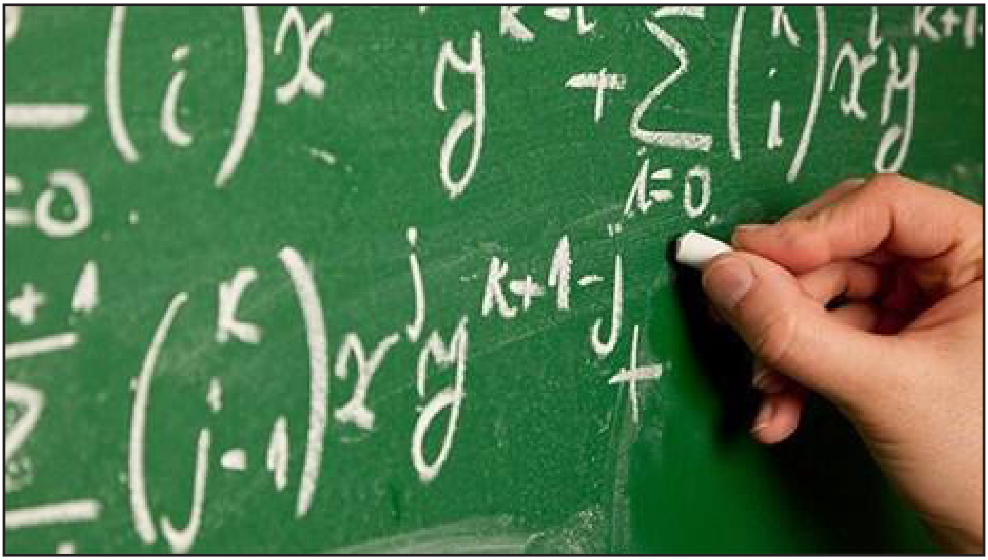
1. B 2. C 3. C 4. A 5. D

CAPÍTULO 5

DERIVAÇÃO

Objetivos de aprendizagem

Definir a operação de derivação por meio de problemas, esclarecer a relação entre eles, estudar as derivadas de ordem superior e, finalmente, trabalhar com suas aplicações em administração e economia.



https://www.google.com.br/url?sa=i&rct=j 4

Neste capítulo, dando sequência ao curso de cálculo básico, estudaremos o processo de diferenciação, o qual está relacionado a problemas que envolvem taxas de variação de quantidades.

Além disso, será utilizado na determinação do coeficiente angular de retas tangentes às curvas de funções. Para percorrer este caminho, será utilizado o conceito de limite estudado na unidade 3 e, das técnicas para o cálculo de derivadas e bem com suas aplicações.

1 I TAXA DE VARIAÇÃO, COEFICIENTE ANGULAR E DERIVADAS

Nesta seção, por meio de problemas que servirão de motivação, será analisada a taxa de variação de uma quantidade. Posteriormente, será estudado como determinar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto dado. A seguir alguns problemas.

Problema 1: Velocidade de um móvel

> ***Nota:*** *móvel, na física, refere-se a um corpo, partícula ou ponto material que realiza o movimento no qual estamos interessados.*

O físico e matemático inglês Isaac Newton (1642-1727) estudou uma grande quantidade de problemas relacionados a esses campos, entre eles a velocidade de um móvel entre dois pontos de uma dada trajetória. Seja s = *s (t)* a distância percorrida por um móvel durante um tempo t. Pode-se escrever, para o seu deslocamento a seguinte expressão:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) \qquad \textbf{(5.1)}$$

como sendo a variação do espaço percorrido entre os tempos *t* e t+Δt. Observe na figura 23 a seguir:

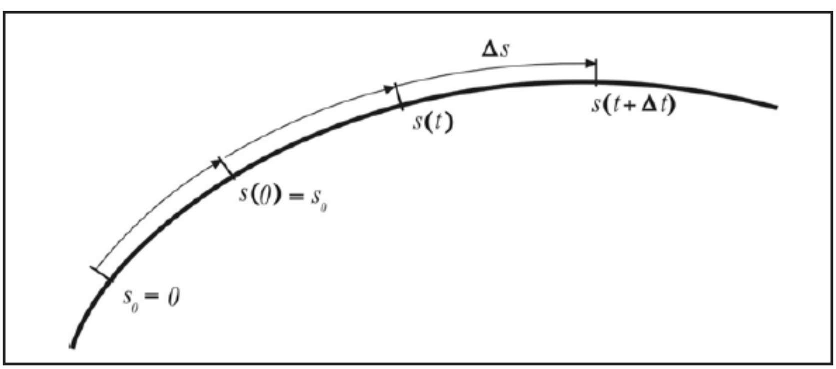


Figura 26: trajetória de um móvel. Fonte: autonomia.

Deste modo, a velocidade média nesse intervalo é definida por:

$$v_m = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \textbf{(5.2)}$$

Isso significa que a expressão dada por (5.2) quer-nos dizer que a velocidade é dada a partir da variação do espaço dividida pela variação do tempo.

Porém, vamos considerar, nesse exemplo, que o movimento seja *uniforme*, em que v_m=v é constante em qualquer que seja o intervalo observado. Relembrando alguns conceitos da Física Básica, teremos o seguinte:

$$s(t) = s_0 + vt, \quad onde \quad s_0 = s(0).$$

Caso o movimento não seja uniforme, a velocidade média não dirá nada sobre a velocidade do corpo no instante t. Suponha, agora, que um automóvel vai de São Paulo à Santos, em um dado instante t no intervalo de tempo de t+Δt, no qual o carro pode registrar velocidade 90 km/h, 60 km/h ou pode inclusive estar parado.

Para informações mais precisas sobre o movimento do automóvel em um instante t' bem próximo ao instante *t*, definimos a *velocidade instantânea* desse móvel como sendo:

$$v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \textbf{(5.3)}$$

A equação 5.3 dada acima é, como podemos ver, um limite. Isto é, já começamos a relacionar aquilo que estudamos na unidade 3 com as derivadas. Importante saber que, sempre que queremos maior precisão com relação a funções, iremos utilizar a ferramenta da derivação. Por ora, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.1

Da janela de um prédio a 30 metros de altura cai um vaso de violetas. Desprezando-se a resistência do ar, podemos escrever a seguinte equação:

$$s(t) = -4{,}9t^2 + 30$$

Determine a velocidade do vaso nos seguintes casos:

(a) no instante logo após o início do movimento

(b) exatamente no instante t=2 segundos

(c) no instante em que toca o solo

Solução:

(a) O início do movimento ocorre em t=0, então:

$$s(0) = -4{,}9(0)^2 + 30 = 30m$$

Logo após o início do movimento, podemos calcular a velocidade instantânea do vaso num instante :

$$v(k) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-4{,}9(k+\Delta t)^2 + 30 - (-4{,}9k^2 + 30)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-9{,}8k\Delta t - 4{,}9\Delta t^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} -9{,}8k - 4{,}9\Delta t = -9{,}8k\ m/s$$

(b) A velocidade exatamente no instante t= 2 segundos é a instantânea nesse momento e pode ser calculada usando a expressão do item anterior. Assim:

v (2) = -9,8. (2) = -19,6 m/s

(c) vamos calcular em que instante o vaso toca o solo:

Fazendo s= 0 na equação horária, vem

0= -4,9t² +30 → t± 2,48 s

mas, a solução negativa é descartada e substituindo o valor positivo na expressão encontrada no item (a) temos:

$$v(2{,}48) = -9.8.(2{,}48) = 24{,}30\ m/s$$

A velocidade aparece com sinal negativo pois foi adotado o referencial 0 na janela de onde cai o vaso, o sentido do movimento é negativo segundo esse referencial.

Exemplo 5.2

Um cubo de metal de aresta x é aquecido causando uma expansão uniforme. Calcule:

(a) A taxa de variação média de seu volume em relação à aresta quando x aumenta de 2 para 2,01 centímetros.

(b) A taxa de variação instantânea do volume em relação à aresta no instante em que x=2 centímetros.

Dados: y é o volume do cubo, y=x^3 cm^3

Solução:

(a) Relação de dados:

$$x_1 = 2cm, y_1 = 2^3 = 8cm^3$$

$$x_2 = 2{,}01cm, y_2 = (2{,}01)^3 = 8{,}120601cm^3$$

$$\Delta x = 2{,}01 - 2 = 0{,}01 e \Delta y = 0{,}120601$$

Taxa média de variação:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}120601}{0{,}01} = 12{,}0601\, cm^3/comp.daaresta$$

(b) Para calcular a taxa de variação vamos considerar que x varia de uma quantidade x=2 para 2+, a variação em y fica:

$$\Delta y = (2{,}01 + \Delta x)^3 - 2^3 = 8 + 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3 - 8$$

$$12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3 cm^3$$

Taxa de variação instantânea:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 12 + 6\Delta x + \Delta x^2 = \frac{12cm^3}{comp.dearesta}$$

Problema 2: Coeficiente da reta tangente

Gottfried Leibniz (1646 – 1716) matemático alemão que, juntamente com Newton, é considerado um dos pioneiros no desenvolvimento do cálculo diferencial. Leibniz estudou, entre outros, uma classe de problemas relativos à determinação do coeficiente angular de retas que interceptam curvas.

Da geometria elementar, sabe-se que a reta tangente T em um ponto P de um círculo C pode ser entendido como a reta que toca C nesse ponto P, ou como a reta que é perpendicular ao raio de C de forma equivalente.

Isto não pode ser estendido a uma curva C qualquer, pois a reta que toca uma curva C em apenas um ponto nem sempre é tangente àquela curva.

Então, é possível definir a inclinação da reta tangente em P, já que em posse de sua inclinação, poderemos determinar a equação de sua reta tangente. Na figura 24 abaixo, temos uma representação gráfica da reta tangente à uma curva C.

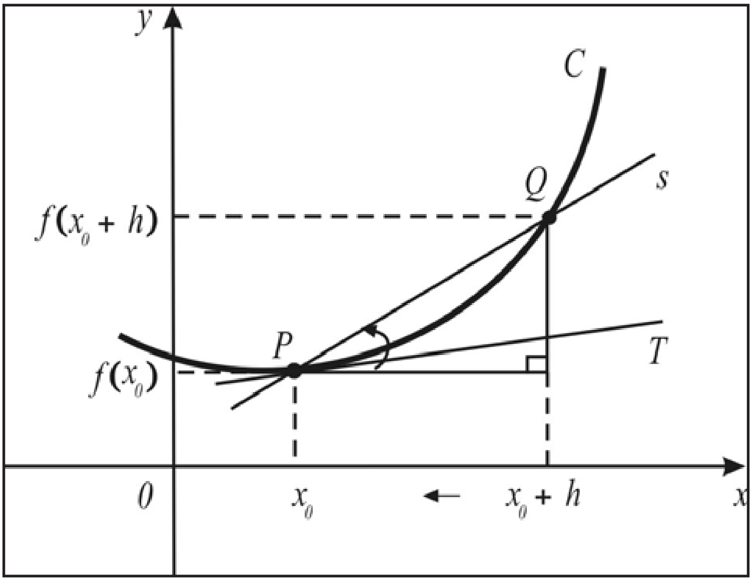


Figura 27: coeficiente da reta tangente à curva dada. Fonte: autoria.

Consideremos, agora, um ponto P de coordenadas P = (x_0, y_0). Observe que y_0= *f* (x_0), é um ponto de C, por onde queremos traçar a reta tangente à curva C.

Vamos considerar, posteriormente, outro ponto, Q, qualquer de C que tenha coordenadas Q = (x_0 + h, f (x_0 + h)), note que h ≠ 0. A reta que vai do ponto P ao Q é secante com relação a C (vide figura 24 acima), com inclinação dada por:

$$tan\theta = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \textbf{(5.4)}$$

Ao fazermos h aproximar-se de 0, tan (θ) se aproxima de um número *m*. Nesta situação, a reta tangente à curva C passa a ser definida como a que passa por P e que tem inclinação m, ou seja,

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad \textbf{(5.5)}$$

que escrito em notação de limite, conforme estudamos na unidade 3, nos dá:

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \textbf{(5.6)}$$

Exemplo 4.3

Determine a reta tangente à curva $y=x^2$, em P = (2, 4).

Solução:

Sabemos um ponto da tangente que intercepta esta curva, P= (2,4), eles serão *nossos valores de x_0 e y_0,usando a definição de coeficiente angular:*

$$y - 4 = m(x - 2)$$

Mas,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)^2 - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h - h^2 - 4}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} 4 + h = 4$$

Logo, o coeficiente angular da reta tangente à curva em P (2,4) é m= 4 e a equação da reta é: y – 4 = 4(x – 2) ou y = 4x – 4.

Exercício 5.1

Uma partícula se move sobre uma linha reta de acordo com a equação dada, onde s é a distância percorrida em metros da partícula ao seu ponto de partida ao final de t segundos.

$\boldsymbol{a)}$ $s = 6t^2, t_1 = 2, t_2 = 3$

$\boldsymbol{b)}$ $s = t^2 + t, t_1 = 3, t_2 = 4$

Calcule para (a) e (b):

i) *a velocidade média da partícula* $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ *durante o intervalo de tempo desde $t=t_1$ até $t=t_2$.*

ii) *a velocidade instantânea da partícula quando $t=t_1$.*

Exercício 5.2

Calcule o coeficiente angular m da reta tangente de cada uma das funções indicadas:

$a)\ f(x) = 2x - x^2 \text{, } no\ ponto(1,1)$

$b)\ f(x) = x^2 - 4x \text{, } no\ ponto(3,-3)$

$c)\ f(x) = 3 - 2x - x^2 \text{, } no\ ponto(0,3)$

$$d)\ f(x) = \sqrt{x+1}\ , no\ ponto (3,2)$$

$$e)\ f(x) = \frac{3}{x+2}\ , no\ ponto (1,1)$$

Exercício 5.3

Um triângulo equilátero feito em uma folha de metal é expandido pois foi aquecido. Sua área A é dada por A= $(\sqrt{3/4})x^2$ *centímetros quadrados, onde x é o comprimento do lado em centímetros. Calcule a taxa de variação instantânea de A em relação a x no instante em que x=10 centímetros.*

Exercício 5.4

A pressão P de um gás depende do seu volume V de acordo com a lei de Boyle, $P = \frac{C}{V}$, *onde C é uma constante. Suponha que C= 2000, que P é medida em quilos por centímetro quadrado e que V é medido em centímetros cúbicos. Calcule:*

a) A taxa de variação média de P em relação a V quando V aumenta de 100 centímetros cúbicos para 125 centímetros cúbicos.

b) A taxa de variação instantânea de P em relação a V no instante em que V = 100 centímetros cúbicos.

2 I DIFERENCIAÇÃO

Mas, quando uma função pode ser derivada? Para responder a esta questão, precisamos recorrer a uma definição de diferenciabilidade, além de alguns critérios de classificação para distinguir entre funções que são, ou não, diferenciáveis.

2.1 Definição de Diferenciabilidade

Seja uma função *f: X → R* tal que *f = y(x)*. Podemos dizer que f é *derivável* em x_0 ou é diferenciável em x_0 se o limite dado por,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \mathbf{(5.7)}$$

existir nas condições vistas na unidade anterior.

Isto é, os limites laterais existem e são iguais na vizinhança do ponto x_0.

A partir de agora, reescreveremos esse limite utilizando a notação $\frac{dy}{dx}$ ou $\frac{df}{dx}$, as quais são chamadas de notação de Leibniz. Se fizermos, posteriormente, as relações a seguir:

$$x = x_0 + h \; ou \; h = x - x_0$$

Teremos, como consequência, que:

$$h \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$$

Deste modo,

$$f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad \textbf{(5.8)}$$

As principais implicações da definição dada por 5.8, seguem abaixo:

1. $\frac{df}{dx}$ *é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P = (x_0, f (x_0)).*

2. $\frac{df}{dx}$ é a taxa de variação instantânea de f em relação a x calculada em x_0.

3. *f é derivável em um intervalo aberto X =]a, b[se f' (x) existir para todo x ϵ X.*

4. *f é derivável em um intervalo fechado X = [a, b] se f for derivável no intervalo aberto]a, b[e, também se as derivadas laterais*

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \; e \; f'(b^-) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

existirem.

Exemplo 5.5

Calcular a derivada de y= $\sqrt{x+1}$ *para x que pertence ao intervalo]0, +∞[.*

Solução:

Deve-se calcular pela definição 5.8 dada acima o seguinte limite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1})}{h\,(\sqrt{x+1+h} - \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1+h} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

Portanto, f'(x) = $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$*, no intervalo]0, +∞[.*

Exemplo 5.6

Calcule a derivada de y=2 |x|*, no ponto 0.*

Solução:

Novamente, pela definição 5.8, temos que:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2|x| - 0}{x}$$

$$Para\ x \to 0^+, temos\ x > 0\ e\ |x\,| = x.$$

Então,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{x} = 2$$

$$Para\ x \to 0^-, temos\ x < \ 0\ e\ |x\,| = -x.$$

Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{2|x|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x}{x} = -2$$

Como temos valores diferentes para os limites laterais $\lim_{x \to 0} \frac{2|x|}{x}$ *não existe e portanto, não existe f' (x) no ponto 0.*

> ***Importante***
>
> *Podemos dizer que f é derivável em x_0 se, e só se, as derivadas laterais existem e são iguais nesses pontos.*

3 I A DERIVADA SEGUNDA *f''* DE UMA FUNÇÃO

Viu-se nos exemplos anteriores que a derivada *f' (x)* é também uma função, desse modo podemos calcular sua derivada seguindo os mesmos passos. Esse procedimento é conhecido na literatura matemática como *extração da derivada segunda de uma função.* Para isso, considera-se a seguinte definição.

3.1 Extração da derivada segunda de uma função

Seja uma função derivada f'. Sua derivada segunda é dada por:

$$f''(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}, \qquad \textbf{(5.9)}$$

Desde que exista o limite, de acordo com o que estudamos na unidade 3. Para sua representação, usamos as notações dadas por f '',$\frac{df^2}{dx^2}$, y'', ÿ, d²f.

> *E vale a analogia para as derivadas de ordem três, quatro e assim sucessivamente.*

Vamos para alguns exemplos, de modo a iluminarmos nosso pensamento.

Exemplo 5.7

Calcule agora a derivada segunda de y= $\sqrt{x+1}$*, para x no intervalo]0, +∞[.*

Solução:

Sabemos que y'(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$*., ∀x є]0, +∞[. Assim, pela definição devemos calcular o seguinte limite,*

$$y''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{y'(x+h) - y'(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1+h}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{h}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1+h}}{(\sqrt{x+1+h})(\sqrt{x+1})}}{h}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1+h}}{h\sqrt{x+1+h}\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1+h}\right).\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1+h}\right)}{h\left(\sqrt{x+1+h}\sqrt{x+1}\right).\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1+h}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\left(\sqrt{x+1+h}\sqrt{x+1}\right).\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1+h}\right)}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{-1}{\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}} = \frac{-1}{4\sqrt{(x+1)^3}} = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}$$

Portanto, y"(x)= $\frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}$.

$$\frac{1}{4} \frac{-1}{\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}} = \frac{-1}{4\sqrt{(x+1)^3}} = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}$$

Podemos, também, relacionar a diferenciabilidade com a ideia de continuidade vista anteriormente. Para isso, iremos recorrer a mais um teorema matemático.

Teorema 5.1: *Seja f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0.*

Aqui, para efeitos de entendimento do que se apresentou com teorema 5.1, cabe-nos uma breve demonstração.

Demonstração do teorema 5.1:

Suponha que f *derivável* em x_0. Então existe uma

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Como $x-x_0 \neq 0$, vem:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} . \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0). 0 = 0,$$

Ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Logo, *f* é contínua em x_0.

Importante
A volta do teorema não vale, ou seja, se a função é contínua ela não é diferenciável, basta observar a função **|x|** *por exemplo, que é contínua, mas não diferenciável.*

Exercício 5.5

Calcule as derivadas das funções a seguir diretamente pela definição:

$a)\ x^2 + 4x$ $\quad$ $b)\ 2x^3 - 4x$ $\quad$ $c)\ \frac{2}{x}$

$d)\ \frac{3}{x-1}$ $\quad$ $e)\sqrt{x-1}$ $\quad$ $f)\ \frac{2}{x+1}$

4 | TÉCNICAS PARA CÁLCULO DE DERIVADAS

O cálculo da derivada de *f (x)* pela definição 5.8 apresentada pode se tornar bastante complicado e, além disso, tomar muito tempo.

Para otimizarmos esse processo, veremos nessa seção algumas propriedades e técnicas que simplificam o processo e, bem como nos fornecerão outras ferramentas para trabalhar, além daquela que já conhecemos que é o limite. As provas de alguns resultados serão omitidas, mas estão disponíveis nas referências elencadas ao final deste material.

Técnica 1: Função afim

Seja uma função *f* definida por: *f(x) = ax + b*, então *f' (x) = a.*

Demonstração:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - ax + b}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{ax + ah + b - ax + b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \to 0} a = a$$

Caso de f ser a função constante, então *f' (x) = 0.*

Técnica 2: Função polinomial

Seja *f* definida por $f(x)=x^n$, então $f'^{(x)}=nx^{n-1}$.

Demonstração:

Vamos primeiro estudar o caso em que $n > 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Pelo Teorema Binomial, obtemos:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \tfrac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n$$

Então:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1} = nx^{n-1}$$

Se $n < 0$, então $n = -k$ com $k > 0$. Assim,

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{-k} - x^{-k}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^k - (x+h)^k}{hx^k(x+h)^k} = -\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} . \lim_{h\to 0} \frac{1}{x^k(x+h)^k}$$

$$= -kx^{k-1}\frac{1}{x^{2k}}$$

Ou seja,

$$f(x) = -kx^{-k-1} = nx^{n-1}$$

Note que se tivermos *n= 0, f (x) = 0,* pois essa função é a função constante. As duas técnicas anunciadas anteriormente nos servirão para obter derivadas das funções, sem nos preocuparmos com o cálculo via definição 5.8.

5 I PROPRIEDADES PARA DERIVAÇÃO

Para duas funções f e *g,* que sejam diferenciáveis e c uma constante, valem os seguintes resultados:

Resultado 1: *Multiplicação por constante*

$$(cf)' = cf';$$

Resultado 2: *Soma*

$$(f+g)' = f' + g';$$

Resultado 3: *Subtração*

$$(f-g)' = f' - g'$$

Resultado 4: *Regra do Produto*

$$(f.g)'f'g + fg';$$

Resultado 5: *Regra do quociente*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, desde\ que\ g\ calculada\ no\ ponto\ seja \neq 0$$

Vamos para alguns exemplos utilizando as técnicas e os resultados acimas explicitados.

Exemplo 5.8

Calcular a derivada de $f(x)=6x^4+3x^3-7x^2-1$.

Solução:

Usando o resultado para funções do tipo x^n*, ficamos com:*

$$f'(x) = 24x^3 + 9x^2 - 14x$$

Exemplo 5.9

Calcule a derivada de $f(x)=x(x^2+x-4)$

Solução:

Usando a Regra do Produto, fazemos:

$$f'(x) = 1(x^2 + x - 4) + x(2x + 1) = 3x^2 + 2x - 4$$

Exemplo 5.10

Determine a derivada de $f(x)=\frac{2x-5}{x+3}$.

Solução:

Usando a Regra do Quociente, calculamos:

$$f'^{(x)} = \frac{x(x+3) - (2x-5)1}{(x-3)^2} = \frac{x^2 + 3x - 2x - 5}{(x-3)^2} = \frac{x^2 + x - 5}{(x-3)^2}$$

Derivadas recorrentes:

1. $(e^x)' = e^x$
2. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
3. $(sen\, x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -senx$

Exercício 5.6

Diferencie cada uma das funções aplicando as Propriedades:

$a) f(x) = x^5 + 3x^3 + 1$ $\quad$ $b) f(x) = \frac{x^{10}}{2} + \frac{x^5}{5} + 6$

$c) f(x) = x^8 - 2x^7 + 3x + 1$ $\quad$ $d) f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x}$

$e) f(x) = \frac{5}{x^5} - \frac{25}{x}$ $\quad$ $f) f(x) = 3x^{-2} - 7x^{-1} + 6$

$g) f(x) = \frac{2}{5x} - \frac{\sqrt{2}}{3x^2}$ $\quad$ $h) f(x) = x^2(3x^3 - 1)$

$i)\ f(x) = (x^2 + 3x)(x^3 - 9x)$ $\quad$ $j)\ f(x) = (2x - 1)(4x^2 + 7)$

Exercício 5.7

Calcule f' (2) em cada caso:

$a)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1$ $\quad$ $b)\ f(x) = \frac{1}{x^3} - 1cf(x)$

$= (x^2 + 1)(1 - x)$

$d)\ f(x) = \left(\frac{1}{x} + 2\right)\left(\frac{3}{x} - 1\right)$ $\quad$ $e)\ f(x) = \frac{1}{x^2 + 2} ff(x) = \left(\frac{2x^2}{x + 7}\right)$

Exercício 5.8

Sejam f e g funções diferenciáveis para o número 1e seja f (1) =1, f' (1) =2, g (1) = ½ e g'(1)= -3. Use as regras de diferenciação para calcular:

$a)\ (f + g)'(1)$ $\quad$ $b)\ (f - g)'(1)$ $\quad$ $c)\ (2f + 3g)'(1)$

$d)\ (fg)'^{(1)}$ $\quad$ $e)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(1)$ $\quad$ $f)\ \left(\frac{g}{f}\right)'(1)$

6 I A REGRA DA CADEIA

As técnicas que aprendemos na seção anterior não podem ser aplicadas diretamente quando estivermos lidando com funções compostas do tipo $\sqrt[4]{x^2 - 2x + 5}$. Nesta expressão, identificamos a composição entre a função raiz quarta e uma função polinomial. Para solucionar esse problema temos que determinar a derivada de *(f ∘ g) (x)* (f composta com *g*) e isso se faz por meio da *regra da cadeia*, definida a seguir:

Definição:

Sejam f: X → e g: Y → R funções diferenciáveis, então g ∘ f é também diferenciável em X e vale:

$$(gof)'(x) = g'\big(f(x)\big)f(x) \qquad \textbf{(5.10)}$$

Neste caso, podemos fazer uma substituição de variáveis da seguinte forma: se *y = g (u)* e *u = f (x),* a fórmula acima se torna:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad \textbf{(5.11)}$$

A expressão 5.11 é a forma mais conhecida da regra da cadeia. Vejamos alguns exemplos de sua aplicação.

Exemplo 5.11

Calcule a derivada de $\sqrt[4]{x^2 - 2x + 5}$.

Solução:

Note que, $y=u^{\frac{1}{4}}$ *onde* $u=x^2-2x+5$*, onde usando a Regra da Cadeia temos:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{4}u^{\frac{1}{4}-1}.2x - 2 = \frac{1}{4}u^{\frac{-3}{4}}.2x - 2 = \frac{1}{4u^{\frac{3}{4}}}2x - 2$$

Logo, $y'(x) = \frac{2x-2}{4\sqrt[4]{(x^2-2x+5)}^3}$

Exemplo 5.12

Calcular a derivada de $y=x^2\,|\,x^2-4\,|$ *.*

Solução:

Reescrevemos o módulo como:

$$|x^2 - 4| = \sqrt{(x^2 - 4)^2}$$

e y fica:

$$y = x^2\sqrt{(x^2 - 4)^2}$$

Agora, usando a regra do produto e da cadeia ficamos com:

$$y' = 2x\sqrt{(x^2-4)^2} + x^2\,\frac{2(x^2-4)2x}{2\sqrt{(x^2-4)^2}}$$

$$= 2x|x^2-4| + \frac{2x^3(x^2-4)}{|x^2-4|}$$

$$= \frac{2x(x^2-4)(x^4-3x^2-4)}{|x^2-4|}$$

Exercício 5.9

Usando a regra da cadeia e a substituição proposta:

$a)\ y = \sqrt{u}, u = x^2 + x + 1 \quad , \quad calcule\,\frac{dy}{dx}$

$b)\ y = u^{-5}, u = x^4 + 1, \quad calcule\,\frac{dy}{dx}$

Exercício 5.10

Calcule cada uma das derivadas com auxílio da regra da cadeia.

$a)\ f(x) = (5-2x)^{10}$ $\qquad b)\ f(x) = \frac{1}{(4x+1)^5}$ $\qquad c)\ f(x) = (x^3+2)^{15}$

$d) f(x) = (x^5 - 2x^2 + x + 1)^{-7}$ $\qquad e)\ f(x) = (3x^2+7)^2(5-3x)^3$

$f) f(x) = \left(3x + \frac{1}{x}\right)^2 (6x-1)^5$ $\qquad g)\ f(x) = (7x+3)^{-2}(2x+1)^4$

$h)\ f(x) = \left(\frac{x^2+x}{1-2x}\right)^4$ $\qquad i)\ f(x) = \left(\frac{3x+1}{x^2}\right)^3$

7 I CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DE FUNÇÕES

Vimos, anteriormente, as definições de taxa de variação de funções e determinação das retas tangentes. Neste sentido, acabamos por reconhecer que se trata de um mesmo problema: o cálculo de derivadas, mais especificamente, o cálculo da primeira derivada.

Agora, passamos a investigar o sinal dessa derivada, o qual indica se a função cresce ou decresce em um determinado ponto para, posteriormente, estabelecermos o significado da segunda derivada que será muito importante para as aplicações que estudaremos mais adiante.

7.1 Análise do sinal da derivada primeira

No que diz respeito ao sinal da derivada de uma função, temos que:

- ***Crescimento:*** derivada tem sinal ***POSITIVO***, significa que a função ***CRESCE*** no ponto;
- ***Decrescimento:*** derivada tem sinal ***NEGATIVO,*** significa que a função ***DECRESCE*** no ponto;
- ***Derivada é 0:*** derivada ***NULA***, significa que a função não ***CRESCE*** e nem ***DECRESCE*** no ponto.

Vejamos alguns exemplos sobre o estudo dos sinais das derivadas.

Exemplo 5.13

A função $y=-x^3+4x$ cresce ou decresce em $x_1=1$? E em $x_2=3$?

Solução:

Vamos derivar y:

$$y' = -3x^2 + 4\,,$$

agora vamos substituir $x_1=1$ em y',

$$y'(1) = -3.1^2 + 4 = 1$$

Como 1 é positivo, a função cresce em $x_1=1$.

Agora substituindo $x_2=3$ em y', temos:

$$y'(3) = -3.3^2 + 4 = -23$$

Sendo esse número negativo, concluímos que a função decresce em $x_2=3$.

Exemplo 5.14

Verifique se a mesma função $y=-x^3+4x$ cresce ou decresce para x no intervalo [0,3].

Solução:

Conhecemos a derivada da função, $y'=-3x^2+4$. Atribuímos então valores inteiros para x entre 0 e 5, e podemos ter uma ideia de como varia o sinal da derivada.

x	$y = -x^3 + 4x$	$y' = -3x^2 + 4$
0	$-0^3+4.0 = 0$	$-3.0^2 + 4 = 4$
1	$-1^3+4.1 = 3$	$-3.1^2 + 4 = 1$
2	$-2^3+4.2 = 0$	$-3.2^2 + 4 = -8$
3	$-3^3+4.3 = -15$	$-3.3^2 + 4 = -23$

*Note que a função cresce para valores de x menores do que 2 e decresce para **x** a partir de 2.*

Exemplo 5.15

Seja f a função $\frac{1}{2}x^4$*-*$2x^2$*+11, determine o(s) ponto(s) em que f não cresce e nem decresce.*

Solução:

Primeiro vamos derivar f:

$$f' = 2x^3 - 4x$$

Se a função não cresce e nem decresce, então a derivada nesse ponto deve ser zero.

Fazemos então:

$$f' = 2x^3 - 4x = 0$$

$$x(2x^2 - 4) = comsoluçõesx = 0e2x^2 = 4, x^2 = 2ex = \pm\sqrt{2}$$

Os valores onde a f' se anula são:

$$x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{2}ex_3 = +\sqrt{2}$$

nesses pontos a função não cresce nem decresce.

8 | PONTOS CRÍTICOS DE FUNÇÕES

Para se ter uma precisão mais aguçada na avaliação do comportamento de funções contínuas, precisamos conhecer seus *pontos críticos*, ou seja, aqueles pontos em que a função estudada apresenta mudança de comportamento (cresce ou decresce em seu gráfico).

Os pontos críticos podem ser dos seguintes tipos: **máximos e mínimos locais,** que são *pontos críticos extremos* e os **pontos críticos de inflexão**, isto é, aqueles em que podemos notar a mudança de comportamento da função.

Importante

Falar em comportamento de uma função é o mesmo que estudar seu sinal.

Vamos estudar, agora, os pontos de máximo e mínimo das derivadas.

Máximo Local

Se a função cresce até um certo ponto, diz-se que P, e depois ele passa a decrescer, diz-se que P é um ponto crítico de máximo local.

Mínimo Local

Se a função decresce até um certo ponto P, e depois ele passa a crescer, diz-se que P é um ponto crítico de mínimo local.

Pode-se representar os pontos de máximo e mínimo conforme a figura 28 abaixo.

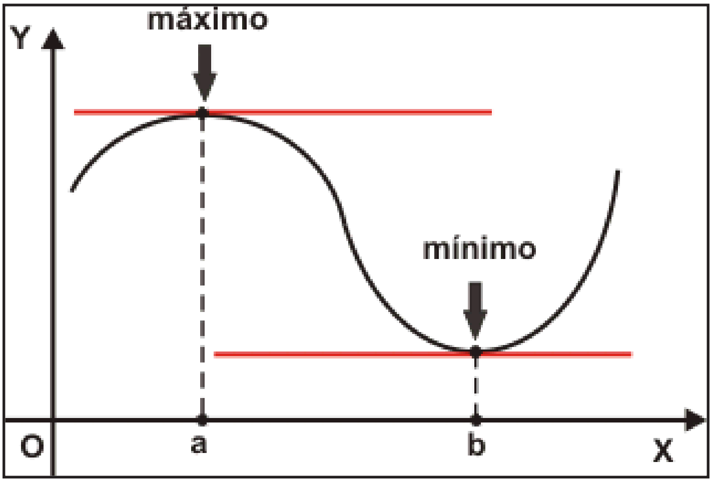


Figura 28: máximo e mínimo de uma função. Fonte: autoria.

Ponto de Inflexão

Se a concavidade (sinal) da função muda de sentido, antes e depois de um ponto P, então esse ponto P é dito um **ponto de inflexão**. Observe na figura a seguir onde a função é crescente ou decrescente, sempre antes e depois do ponto de inflexão.

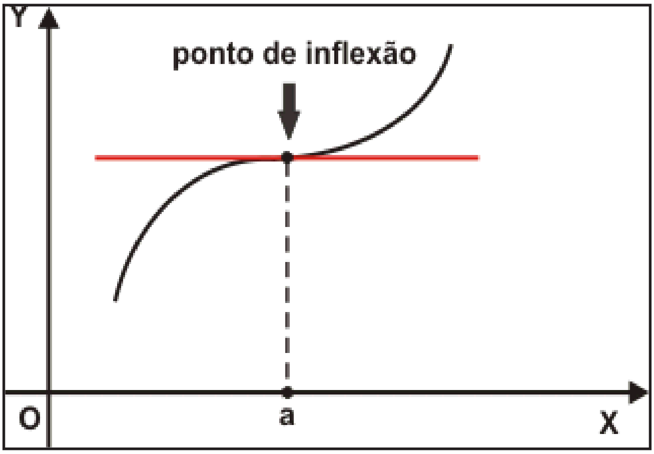


Figura 29: ponto de inflexão de uma função. Fonte: autoria.

Para verificar onde se encontram os extremos locais utiliza-se a derivada da função, observe a localização dos pontos críticos, Máximos e Mínimos e note que nestes pontos a função não cresce e nem decresce, sendo a derivada nula em tais pontos.

Seria interessante reunir todas as informações que temos até aqui da seguinte forma:

1. Nos pontos críticos derivada se anula, ou seja, $y'=0$. A solução de $y'=0$ nos dá os valores de x_p do ponto $P=(x_p, y_p)$, que são as coordenadas do ponto onde a função não cresce nem decresce.

2. Derivada positiva para $x<x_p$ e negativa para $x>x_p$ significa que P ponto é de MÁXIMO.

3. Derivada negativa para $x<x_p$ e positiva para $x<x_p$ significa que P é ponto de MÍNIMO.

Portanto, temos algumas características que devemos nos atentar para estudar os pontos críticos (máximo, mínimo e inflexão) de uma derivada. Para que tantas informações? Utilizaremos todos estes aspectos para construirmos os gráficos destas funções derivadas.

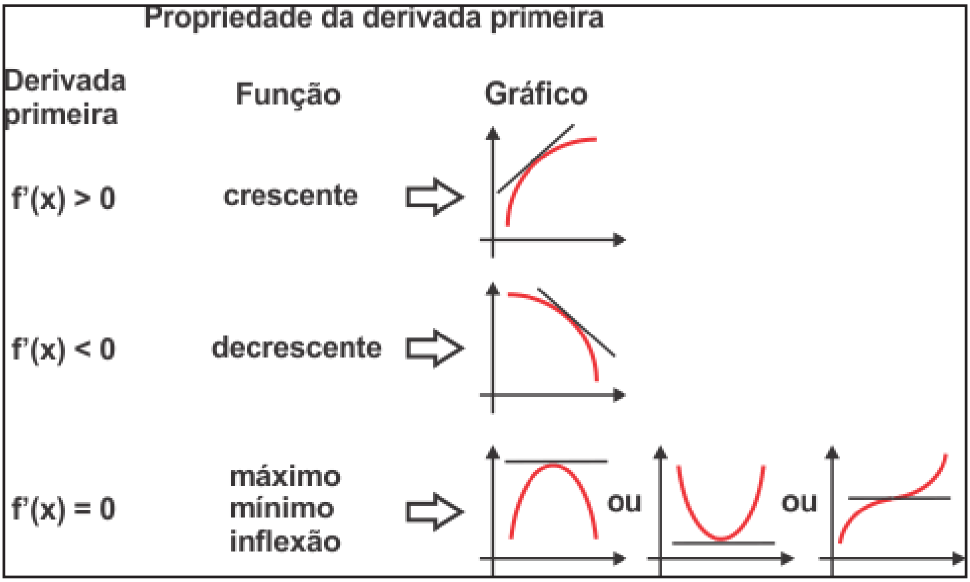


Figura 30: gráfico resumo dos pontos críticos. Fonte: autoria.

Exemplo 5.16

Determine o ponto crítico da função y=x^2-2x+2 e classifique em ponto de Mínimo ou Máximo.

Solução:

A derivada da função é

$$y' = 2x - 2$$

Para classificar os extremos precisamos igualar a derivada a zero e determinar os pontos críticos.

$$y' = 2x - 2 = 0$$

$$2x = 2, x = 1$$

Substituindo esse valor de x na função original, encontramos o valor da coordenada y do ponto crítico:

$$y = 1^2 - 2.1 + 2 = 1$$

E então o ponto P=(1,1) é ponto crítico dessa função. Vamos verificar agora se esse ponto é de máximo ou de mínimo analisando o sinal da derivada antes e depois de x=1.

Vamos testar o sinal de y' para alguns valores de x próximos a 1 podendo ser *maiores ou menores do que ele (parecido com o que fizemos no processo de limite, você se lembra?).*

y' calculada em x=0,5 fornece: y'(0,5)= 2.0,5 -2 = -1

enquanto

y' calculada em 0,75 fica: y'(0,75) = 2.0,75- 2 = -0,5

Agora para valores maiores que 1:

y'(1,5) = 2.1,5 -2 = 1 e y'(2) = 2.2- 2 =2

Note que y'(0,5) e y'(0,75) são negativas enquanto que y'(1,5) e y'(2) são positivas, de acordo com as definições de extremos que estudamos, se antes do ponto x=1 a derivada era negativa e a partir dele se torna positiva temos nessa situação um ponto de mínimo.

Exemplo 5.17

Faça a mesma análise do exemplo acima agora para a função:

$$y = {}^{1}/_{3}\, x^3 - 5x^2 + 9x - 1$$

Solução:

A derivada da função dada é:

$$y' = x^2 - 10x + 9$$

igualando essa derivada a zero vem:

$$y' = x^2 - 10x + 9 = 0$$

equação de segundo grau com raízes $x_1=9$ e $x_2=1$.

*Substituindo esses dois valores em y temos: y_1=-82y e y_2=10/3y, essa função apresenta dois pontos críticos **P1= (9, -82)** e **P2= (1, 10/3)**. Cabe agora a análise de valores maiores e menores do que x_1 e x_2, fazendo x_1=(8, 8,5, 9,5 ,10) e x_2= (0,5, 075 ,1,5, 2).*

Observe os resultados da tabela abaixo:

x_{c1}	y'	x_{c2}	y'
8	-7	0,5	4,25
8,5	-3,75	0,75	2,56
9,5	4,25	1,5	3,75
10	9	2	-7

Vemos então que P1 é um ponto de mínimo e P2 é um ponto de máximo.

9 | TESTE DA DERIVADA SEGUNDA E CONCAVIDADE

O teste da primeira derivada nos informa sobre o crescimento ou decrescimento de uma função, já com a derivada segunda seremos capazes de avaliar a concavidade da função. Como identificamos a concavidade? Basta-nos olhar para o sinal da segunda derivada, respeitando o seguinte:

Caso $y''(x) > 0$, concavidade voltada para cima.

Caso $y''(x) < 0$, concavidade voltada para baixo.

A figura 31 abaixo dá-nos uma representação gráfica da concavidade das derivadas e a relação com seu sinal.

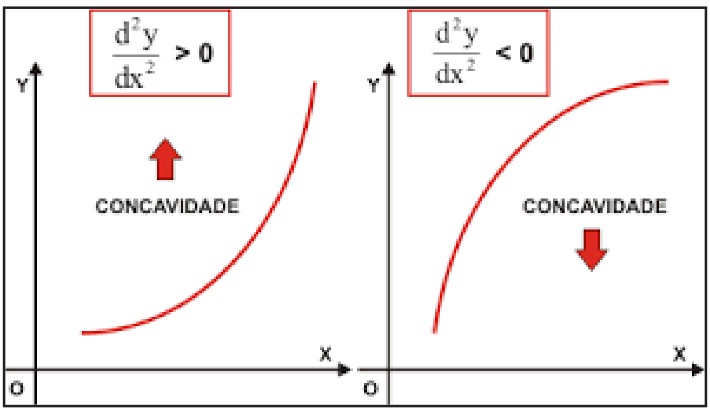


Figura 31: Concavidade e sinal da segunda derivada. Fonte: autoria.

Exemplo 5.18

Calcule a derivada de segunda ordem de $y = 3x^2-2x+4$ e analise a concavidade da função.

Solução:

A derivada primeira é:

$$y' = 6x - 2$$

E a derivada segunda é:

$$y'' = 6$$

A segunda derivada é positiva para qualquer valor de x (função constante), concluímos que a função tem concavidade para cima para qualquer x.

Exemplo 5.19

Calcule a derivada segunda de $y=-4x^6+1$ e analise a concavidade da função.

Solução:

Derivada primeira: $y'=-24x^5$

Derivada segunda: $y''=-120x^4$

Aqui temos y'' sempre negativa para todo x pois temos potência par nessa expressão (potência 4).

Exemplo 5.20

Calcule a derivada segunda de $y=2x^3$ analisando a concavidade.

Solução:

Derivada primeira: $y'=6x^2$

Derivada segunda: $y''=12x$

Então y'' será positiva quando **x** for positivo e negativa quando x for negativo, e a concavidade estará para cima no primeiro caso e para baixo no segundo.

Regra do Ponto de inflexão

Um ponto $P = (x_p, y_p)$ é de inflexão se e só se:

i) $y''(x_p) = 0$

ii) os sinais da derivada segunda para valores menores e maiores do que x_p, devem ser opostos.

Exemplo 5.21

Determine o ponto de inflexão $y=x^3+3x^2$

Solução:

Calculando a primeira e segunda derivadas vem:

$$y' = 3x^2 + 6x$$

E,

$$y'' = 6x + 6$$

De acordo com a regra acima, no ponto de inflexão temos:

$y''=0 =6x +6$, resolvendo para x, encontramos $x=-1$.

Usando esse x na função original ($y=x^3+2x^2$), obtemos: $y=(-1)^3+3=2$

Assim, o ponto P= (-1,2) é candidato a ponto de inflexão, para determinar se ele efetivamente é vamos aplicar a condição (ii) avaliando o sinal de y'' a partir da atribuição de valores para x que sejam menores e maiores do que x = -1.

Por exemplo: x= -2 e x=0

$y''(-2) = 6(-2) +6 = -6$, $y''(0)= 6(0) +6 =6$

Como de fato temos y''(-2) e y''(0) tem sinais opostos podemos afirmar que em x = -1 a função tem um ponto de inflexão.

Figura 32: gráficos da derivada segunda.

Fonte: autoria.

Exercício 5.11

Para as funções a seguir determine os pontos críticos e use o teste da primeira derivada para ver quando cada um desses pontos críticos corresponde a um mínimo ou máximo local, ou nenhum deles.

$a)\ f(x) = 7 + 12x - 2x^2$ $b)\ f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

$c)\ f(x) = x^4 - 4x$ $d)\ f(x) = 2x^{1/2} - x$ $e)\ f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

Exercício 5.12

Determine os pontos críticos da função dada e use o teste da segunda derivada em cada um desses pontos críticos.

$a)\ f(x) = x^2 - 5x + 4$ $b) f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x$

$c)\ f(x) = (x-1)^{8/3} + (x-1)^2$ $d)\ f(x) = x^2 + 5x^{-2}$

Exercício 5.13

Determine os extremos absolutos (se houver) para as funções dadas nos intervalos:

$a)\ f(x) - 2x\ em\ [-1,2]$

$b)\ f(x) = (x+1)^2\ em\ [-2, 1]$

$c)\ f(x) = \sqrt{4 - x^2}\ \ em\ [-2,2]$

$$d)\ f(x) = \begin{cases} x+2, se\ \ x < 1 \\ x^2 - 3x + 5, se\ \ x \geq 1 \end{cases}, em\ [-6,5]$$

$$e)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, se\ \ x \neq -1 \\ 1, se\ \ x = -1 \end{cases}, em\ [-2,3]$$

$f)\ f(x) = (x+2)^{2/3}\ \ em\ [-4,3]$

10 I APLICAÇÕES DA DERIVADA

Tendo estudado vários aspectos do cálculo de derivadas, vamos agora verificar algumas de suas aplicações, particularmente, no campo da economia. Se *f* é uma função que descreve uma quantidade em economia, o adjetivo marginal é utilizado para se referir à derivada *f'*. Seja ***x*** o número de unidades de um produto, os economistas costumam usar as funções **C, c, R** e **P** que já são nossas conhecidas da unidade 3. Porém, vamos relembrar suas formas e significados:

Função custo: *C (x) = custo de produção de x unidades*

Função custo médio: *c (x) =* $\frac{C(x)}{x}$ *= custo médio de produção de uma unidade*

Função receita*: R (x) = receita proveniente da venda de x unidades*

Função lucro*: P (x) = R (x) -C (x), lucro da venda de x unidades*

As taxas de variação das funções acima são chamadas funções marginais, então temos C', c', R' e P' representando custo, custo médio, receita e lucro marginais. A função custo marginal será definida logo abaixo como problema de motivação, onde podemos encarar todas as funções marginais (derivadas) do mesmo modo e utilizar as técnicas aprendidas para calcular as quantidades de interesse.

10.1 Determinação do custo marginal

O custo marginal descreve a variação de uma quantidade em relação a uma outra quantidade. A função custo total para produzir e comercializar as x primeiras unidades de um produto no mercado é dada por *y = C (x)* que tem uma das formas já aprendidas na unidade 3. Podemos, então, definir:

$$\Delta y = C(x + \Delta x) - C(x)$$

como sendo o acréscimo no custo de produção quando esta aumenta de um $\Delta x \neq 0$. Baseados nisso, construímos o gráfico (função custo total com variação Δx):

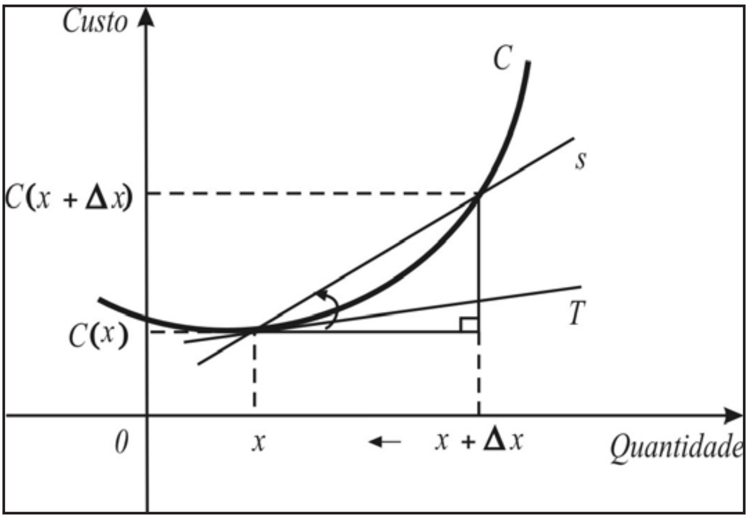


Figura 33: gráfico da função custo. Fonte: autoria.

Então, o valor de custo médio c no custo total por unidade, que varia de *x* a *x + Δx*, é definido por:

$$c(x) = \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

O *custo marginal de produção* define-se por:

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Isto porque em cenários econômicos reais, x é muito grande e, consequentemente, $\Delta x = 1$ é muito pequeno quando comparado com x, por isso, o *custo marginal (ou real)* é considerado por muito economistas como *o custo de produzir uma unidade a mais do que uma determinada quantidade x*, é mesmo que escrever:

$$C'(x) \approx C(x + 1) - C(x)$$

Para tornar essas definições mais próximas do nosso entendimento, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 5.22

Suponhamos que o custo total de produção das x primeiras unidades de um produto é dada pela função:

$$y = 4x^2 - 2x + 50$$

(a) Qual a fórmula para o custo marginal por unidade?

(b) Qual o custo marginal para as primeiras 50 unidades?

(c) E qual o custo real de produção da 51ª unidade?

Solução:

(a) Sabemos que

$$\Delta y = C(x + \Delta x) - C(x) = 4(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 50 - 4x^2 + 2x - 50$$

temos que

$$C' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8x\Delta x + 4\Delta x^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = 8x + 4\Delta x - 2$$

e,

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} 8x + 4\Delta x - 2 = 8x - 2$$

(b) Para 50 unidades produzidas

$$x = 50\text{ , } logo\ C' = 8(50) - 2 = R\$398/unidade$$

(c) A partir da 51ª unidade o custo real de produção é

$$C'(51) = C(50 + 1) - C(50) = 10404 - 52 - 10000 + 50 = 402$$

Logo, C' (51) = R$402,00

Exemplo 5.23

Uma fábrica de relógios tem uma despesa fixa mensal de R$10.000,00, um custo de produção de R$8,00 por unidade, e um preço de venda de R$20,00 por unidade.

(a) determine C (x), c(x), R(x) e P(x),

(b) encontre as funções em (a) se x=1500,

(c) quantas unidades devem ser vendidas para manter o equilíbrio?

Solução:

(a) O custo de fabricação para x unidades é 8x, mas há uma despesa fixa de R$10.000,00, assim o custo toral mensal de fabricação de x unidades é

$$C(x) = 8x + 10.000$$

Função custo médio: c(x) $= \frac{C(x)}{x} = \frac{8x+10000}{x}$

Função Receita: R(x)= 20x

Função Lucro: P(x) = R(x) – C(x) = 20x – 8x -10.000 = 12x - 10.000

(b) Substituindo x= 1500 nas funções do item (a) temos:

C(1500)= 8(1500) + 10.000 = 22.000

c(1500)$= \frac{8(1500)+10000}{1500} = \frac{220}{15} = \frac{44}{3} \approx R\$14.67$

R(1500) = 20(1500) =30.000

P(1500) = 30.000 – 22.000 = 8.000

(c) O ponto de equilíbrio é definido como valor de x para o qual tem-se lucro 0

P(x) = 0 = 12x -10.000 à x = 833 , este é número mínimo de unidades que a empresa deve produzir para manter o equilíbrio.

Exemplo 5.24

Uma empresa estima o custo semanal de produção de x unidades de um móvel colonial como sendo dado por C (x) = x^3-3x^2-80x+500, cada unidade é vendida por 2800 reais. Qual a produção que maximiza o lucro? Qual o lucro máximo semanal possível?

Solução:

A receita obtida pela venda de x unidades é: R (x) = 2800x

O lucro é dado então por: P (x) = 2800x – (x^3-3x^2-80x+500)

Isto é, P (x) = -x^3+3x^2+2880x-500

Para encontrar o lucro máximo, calculamos a primeira derivada:

P' (x) = - 3x^2+6x+2880=-3(X^2-2X-960)

Resolvemos agora para os pontos críticos:

-3(X^2-2X-960) = 0, x = 32 ou x = -30, a quantidade x representa o número de unidades, como uma quantidade negativa não faz sentido, ficamos apenas com a solução positiva x = 32 que é a produção semanal que maximiza o lucro.

Queremos que essa produção seja a de máximo lucro semanal, usamos então a derivada segunda de P:

P'' (x) = -6x + 6, ou seja,

P'' (32) =-6(32) +6 = -16 < 0

O teste da derivada segunda nos informa que o lucro é de fato máximo se forem *fabricados e vendidos 32 móveis por semana. Desse modo, temos:*

P (32) = $-32^3+3.32^2+2880(32)-500=61.964$*, como lucro máximo semanal.*

Exercício 5.14

O custo total C da produção de certa encomenda é dado pela equação $C=900-240X+4X^2$*, onde x é o número de unidades produzidas.*

a) Encontre o custo marginal quando 40 unidades são produzidas.

b) Determine x quando o custo total é mínimo.

Exercício 5.15

Um fabricante produz x toneladas de uma nova liga metálica. O lucro P em reais obtido pela produção é expresso pela equação $P=12.000x-30x^2$*. Quantas toneladas devem ser produzidas para maximizar o lucro total?*

Exercício 5.16

Um fabricante de enfeites para árvore de Natal sabe que o custo total C em reais para fazer x milhares de enfeites de um certo tipo é dado por $C=600+60x$ *e que a venda corresponde a um rendimento R em reais dado por* $R=300x-4x^2$*.Ache o número de enfeites (em milhares) que maximizarão o lucro do fabricante.*

Exercício 5.17

Um departamento de matemática observou que uma secretária trabalhará aproximadamente 30 horas por semana. Entretanto, se outras secretárias forem empregadas, o resultado de sua de sua contratação é uma redução no número efetivo de horas por semana por secretária de $30\frac{(x-1)^2}{33}$ *horas, onde x é o número total de secretárias empregadas. Quantas secretárias devem ser empregadas para produzir o máximo de trabalho?*

Exercício 5.18

Uma centena de animais pertencendo a uma espécie em perigo foram colocados em uma reserva de proteção. Depois de t anos a população p desses animais na reserva é dada por: $p = 100\frac{t^2-5t+25}{t^2+25}$*. Após quantos anos a população é maxima?*

Exercícios complementares da unidade

1. Calculando f'(x), para $f(x)=12x^3-4$*, obtemos:*

a) $4x^2$

b) $12x - 4$

c) $36x^2$

d) 0

2. *O valor de f'(x) para f(x)=* $\frac{1}{x}$ *é:*

a) - $\frac{1}{x^2}$

b) $\frac{1}{x^2}$

c) -1

d) 0

3. Seja a equação horária de uma partícula dada por $s(t)=50-5t^2$*. A expressão que representa a velocidade dessa partícula é dada por:*

a) 50t-5

b) 20-5t

c) -10t

d) -5t

4. Considerando o exercício 3, qual seria a velocidade da partícula no instante t = 3 s?

a) 10 m/s

b) -10 m/s

c) 30 m/s

d) – 30 m/s

5. Dada a equação da trajetória para um automóvel $s(t)=-20+4t^2$*. Qual sua velocidade em t = 2 s?*

a) – 12 m/s

b) 10 m/s

c) 16 m/s

d) 20 m/s

Respostas dos exercícios desta unidade

Exercício 5.1

a) 30 m/s , 24 m/s   b) 8 m/s , 7 m/s

Exercício 5.2

a) 0   b) 2   c) 2   d) $\frac{1}{4}$ e) $-\frac{1}{3}$

Exercício 5.3

$5\sqrt{3}\,\frac{cm^2}{cm}$ *de contorno*

Exercício 5.4

a) $-0{,}16\,\frac{d}{cm^2}/cm^3$ b) $-0{,}2\,\frac{d}{cm^2}/cm^3$

Exercício 5.5

a) $2x+4$ b) $6x^2-4$ c) $\frac{-2}{x^2}$ d) $\frac{-3}{(x-1)^2}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ f) $\frac{-2}{(x+1)^2}$

Exercício 5.6

a) $5x^4-9x^2$ b) $5x^9+x^4$ c) $8x^7-14x^6+3$ d) $\frac{-6}{x^3}-\frac{4}{x^2}$
e) $\frac{25}{x^6}+\frac{25}{x^2}$ f) $-6x^{-3}+7x^2$ g) $\frac{-2}{5x^2}+\frac{2\sqrt{2}}{3x^3}$ h) $15x^4-2x$
i) $3x^4+12x^3-27x^2-54x$ j) $24x^2-8x+14$

Exercício 5.7

a) 4   b) $\frac{-3}{16}$ c) -9   d) -2   e) $\frac{-1}{18}$ f) $\frac{64}{81}$

Exercício 5.8

a) -1   b) 5   c) -5   d) -2   e) 16   f) -4

Exercício 5.9

a) $\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ b) $\frac{-20x^3}{(x^4+1)^6}$

Exercício 5.10

a) $-20(5-2x)^9$ b) $\frac{-20}{(4x+1)^6}$ c) $45x^2(x^3+2)^{14}$ d) $-7\ (5x^4 - 4x + 1)(x^5 - 2x^2 + x + 1)$ e) $(3x^2+7)(5-3x)^2(-63x^2+60x-63)$ f) $\left(3+\frac{1}{x}\right)(6x-1)^4\ (126x - 6 + \frac{18}{x} + \frac{2}{x^2})$ g) $\frac{(28x+38)(2x-1)^3}{(7x+3)^3}$ h) $\frac{4(x^2-1)^3}{(1-2x)^5}(1 + 2x - 2x^2)$ i) $\frac{-3(3x+1)^2(3x+2)}{x^2}$

Exercício 5.11

a) Ponto crítico em 3

b) pontos críticos em -1/3 e 1, máximo local em -1/3 e mínimo local em 1.

c) ponto crítico em 1, mínimo local em 1

d) ponto crítico em 1, máximo local em 1

e) ponto crítico em 1, máximo local em 1

Exercício 5.12

a) Ponto crítico em 5/2, segunda derivada em 5/2 = 2, logo máximo local.

b) Pontos críticos em $-1\pm\sqrt{2}$ $f''(-1-\sqrt{2})=-6\sqrt{2}<0$, logo é máximo local, com $f''(-1+\sqrt{2})=6\sqrt{2}>0$, logo é mínimo local.

c) Ponto crítico em 1, com $f''(1)=2>0$, mínimo local em 1.

d) Pontos críticos em $\pm\sqrt[4]{5}, f''\left(\pm\sqrt[4]{5}\right) = 8 > 0$, mínimos locais em $\pm\sqrt[4]{5}$.

Exercício 5.13

a) Máximo global de 2 em -1, mínimo global de 4 em 2.

b) Máximo global de 4 em 1, mínimo global de 0 em 1.

c) Máximo global de 2 em 0, mínimo global de 0 em -2 e 2.

d) Máximo global de 15 em 5, mínimo global de -4 em 6.

e) Sem máximo ou mínimo global.

f) Máximo global de em 3, mínimo global de 0 em 2.

Exercício 5.14

a)80 b) x = 30

Exercício 5.15

2200 toneladas

Exercício 5.16

3.30

Exercício 5.17

4.4

Exercício 5.18

5 anos

Exercícios complementares da unidade

1. C 2. A 3. C 4. D 5. C

CAPÍTULO 6

INTEGRAIS E INTEGRAÇÃO: PRIMEIRO CONTATO

Objetivos de aprendizagem

Revisar algumas noções de limites e derivadas, para depois aplicarmos à definição de integral. Além disso, iremos estudar algumas técnicas de integração e primitivação, para depois aplicarmos a algumas situações práticas.

Nos capítulos anteriores, aprendemos sobre os conjuntos numéricos, funções e seus gráficos, além de processos aplicados de derivação. Dando segmento ao curso, nesta unidade trataremos da operação de integração, definição e suas técnicas, bem como o chamado *Teorema Fundamental do Cálculo*. A importância da integração reside no fato de que se trata do processo inverso de derivação.

1 I PRIMITIVAS

Como visto no capítulo 5, com uma função polinomial chegou-se, por meio de uma operação matemática a uma outra função, a qual chama-se *derivada*. Neste sentido, quando se realiza o processo de derivação é primordial estudar a taxa de variação da função dada.

Neste momento, será desenvolvido o processo inverso, ou seja, dada a derivada encontra-se a função que a originou, aquela chamada de primitiva. Assim, uma função *F (x)* é chamada de ***primitiva*** de *f (x)* em um certo intervalo I, se para todo x nesse intervalo tivermos:

$$F'(x) = f(x) \quad \textbf{(6.1)}$$

Portanto, encontrando uma função que satisfaça a definição dada por (6.1) teremos uma primitiva desta função.

Exemplo 6.1

Seja a função $F(x)=\frac{x^4}{4}$, *dizemos que é uma primitiva para* $f(x)=x^3$, *pois*

$$F'(x) = \frac{4x^3}{4} = x^3 = f(x).$$

Exemplo 6.2

As funções G(x)=$\frac{x^4}{4}$+4 e H(x)=$\frac{x^4}{4}$-35 são primitivas de f(x)=x^3, pois

G'(x) = H'(x) = f(x)

Exemplo 6.3

A função F(x)=$\frac{e^{-2x}}{-2}$ é uma primitiva da função f(x)=e^{-2x}, pois

$$F'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{-2} = e^{-2x} = f(x)$$

Exemplo 6.4

A função F(x)=$\sqrt[3]{x}$ =$x^{\frac{1}{3}}$ é uma primitiva de f(x)=$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, pois

$$F'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = f(x).$$

Exemplo 6.5

Na unidade anterior falamos de algumas derivadas especiais, uma delas, (sen x)' = cos x. Sendo assim, podemos afirmar que F(x) = sen x é uma primitiva de f(x) = cos x em que toda primitiva de f(x) é da forma:

G(x) = sen x + k, onde k é uma constante

De outro modo, temos

*G(x) = sen x +10, H(x) = sen x – 50, J(x) = sen x + **π** ,*

São todas primitivas de f(x) = cos x, pois G'(x) =H'(x) = J'(x) = f(x).

Exemplo 6.6

Encontre a primitiva de f(x)=$2x^4$-$3x^2$+1 que satisfaça a condição F(1) = 4.

Solução: Pela definição de primitiva devemos ter F'(x) = f(x) . Então,

$$F(x) = 2\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^3}{3} + 1x + k$$

Pois

$$F'(x) = f(x) = 2.5\frac{x^4}{5} - 3.3\frac{x^2}{3} + 1.1 + 0 = 2x^4 - 3x^2 + 1$$

Voltando à primitiva $F(x) = 2\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^3}{3} + 1x + k$, esta deve satisfazer a condição F(1) = 4, vamos usá-la para calcular a constante k. Substituindo x = 1 em F(x) e igualando a 4 vem:

$$F(1) = \frac{2x^5}{5} - 3x^3 + 1 + k = 4 \rightarrow \frac{2\,.\,1^5}{5} - 3.1^3 + 1 + k = 4 \rightarrow k = \frac{28}{5}$$

Portanto, $F(x)=\frac{2x^5}{5}-3x^3+1+\frac{28}{5}$ *é uma primitiva de F(x)=2x⁴-3x²+1 que em particular satisfaz à condição dada.*

Exemplo 6.7

Determine uma primitiva da função $f(x)=e^{4x}+\sqrt{x}$ *, que satisfaz à condição F(0)=1.*

Solução:

De acordo com a definição sabemos que F'(x) = f (x), assim:

$$F(x)=\frac{e^{4x}}{4}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+k,\ pois:$$

$$F'(x)=\left(\frac{e^{4x}}{4}\right)'+\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)'+0=f(x)$$

Vamos então substituir x = 0 em F(x) e igualar a 1:

$$F(0)=\frac{e^{4.0}}{4}+\frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}}+k=1\rightarrow k=\frac{3}{4}$$

Logo, a primitiva que satisfaz a condição pedida é:

$$F(x)=\frac{e^{4x}}{4}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}$$

2 I INTEGRAL INDEFINIDA

Na seção anterior começamos a estabelecer relações entre a derivada e sua primitiva, vamos agora conectar esses conceitos com a noção de integral. Assim, consideremos a função F (x) primitiva da função f (x), *à expressão* F (x) + C chamamos de ***integral indefinida*** *de f* (*x*) e denotamos por:

$$\int \boldsymbol{f(x)dx=F(x)+C} \qquad \textbf{(6.2)}$$

Onde na equação dada pela (6.2) lê-se a integral de *f(x)* com relação a **x**. É importante enfatizar que a denotação acima é apenas uma simbologia, chamada na literatura de integral de *Riemann*.

O desenvolvimento do cálculo integral iniciou-se, ainda, na antiguidade, quando os gregos dividiram uma área desconhecida em pequenos retângulos para facilitar a soma e a descoberta aproximada da área.

Obviamente que muitas foram as alterações até se chegar na definição acima dada pela (6.2), mas por ora basta-nos saber o que significa uma integral e seu uso. Neste sentido, vamos expressar seus símbolos e significados, onde:

∫ é o sinal de integração;

***f (x)** é o integrando;*

***dx** é o diferencial que caracteriza a variável de integração*

***C** é a constante de integração.*

Cabe ressaltar, também, que a expressão acima é chamada de *integral indefinida* em virtude de ainda não termos determinado em qual intervalo a função está sendo integrada.

Quando soubermos qual o intervalo que estamos determinando a soma (integral) trocaremos o nome *indefinida* por *definida* e a constante C não será mais necessária em nossas contas.

Agora, veremos algumas propriedades importantes que decorrem da definição (6.2):

(i) $\int f(x)\, dx = F(x) + C \quad F'(x) = f(x)$

(ii) *$\int f(x)\, dx$, é uma família de funções, ou o conjunto de todas as primitivas da função que está sendo integrada.*

(iii) $\frac{d}{dx}(\int f(x)\, dx) = \frac{d}{dx}(F(x) + k) = \frac{d}{dx}\big(F(x)\big) = f'(x)$

Exemplo 6.8

Veja alguns exemplos que são consequências diretas de (i) a (iii):

$$1. \frac{d}{dx}(sen\ x) = \cos x\ , então \int cosx\ dx = senx + c$$

$$2. \frac{d}{dx}x^5 = 5x^4, então \int 5x^4\ dx = x^5 + c$$

$$3. \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, então \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = \sqrt{x} + c$$

$$4. \frac{d}{dx}(\frac{7}{8}x^{\frac{8}{7}}) = x^{\frac{1}{7}}, então \int x^{\frac{1}{7}}\ dx = \frac{7}{8}x^{\frac{8}{7}} + c$$

Note que, dos exemplos 6.8 citada acima, podemos chegar numa forma geral da primitiva, nos dada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + k \rightarrow \frac{d}{dx}(\int f(x)dx = f'(x) \quad (6.3)$$

Na expressão dada por (6.3) notamos uma clara relação entre as integrais e derivadas. Tal relação ser-nos-á importante durante os próximos cálculos e aplicações.

3 I PROPRIEDADES DA INTEGRAL INDEFINIDA

Vimos, até aqui, as definições de integral indefinida e as principais consequências matemáticas que dela decorrem. No entanto, precisamos aumentar nosso arsenal matemático para utilizarmos nos cálculos que estão por vir. Nesse sentido, lançaremos mão das propriedades da integral indefinida. Assim, sejam *f* e *g* duas funções reais e k uma constante, neste caso valem as seguintes propriedades:

$$\textbf{a)}\ \int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$\textbf{b)}\ \int (f(x)\ + g(x))dx = \int f(x)dx + \ \int g(x)dx$$

Usaremos as propriedades acima elencadas, como já dito, para desenvolver integrais ao longo do cálculo, mas como é um processo um tanto quanto cansativo, em muitos casos, podemos utilizar integrais que já estão tabeladas, tais como as mencionadas na figura 23 abaixo.

1) $\int a\ dx = ax$
2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1 \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln\lvert x\rvert + C$
3) $\int e^x\, dx = e^x + C$
4) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a}\ (a > 0, a \neq 1)$
5) $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$
6) $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$
7) $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
8) $\int \operatorname{cotg} x\, dx = \ln\lvert\operatorname{sen} x\rvert + C$
9) $\int \sec x\, dx = \ln\lvert\sec x + \operatorname{tg} x\rvert + C$
10) $\int \operatorname{cossec} x\, dx = \ln\lvert\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x\rvert + C$
11) $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$

Figura 34: tabela de integrais. Fonte: autoria.

Tabelas como estas estão e/ou mais completas estão disponíveis ao final de grande parte dos livros de Cálculo Diferencial e Integral, ao final deste material, deixamos alguns nos quais poderão consultar outros tipos de integrais.

Exemplo 6.9

Seja a integral dada por $\int 7x^4\,dx$, encontre sua primitiva.

Solução: Pelas propriedades apresentadas anteriormente e, também, a tabela de integrais acima temos que:

$$\int 7x^4\,dx = 7.\int x^4 dx = 7\,\frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{7}{5}x^5 + C$$

Exemplo 6.10

Encontre a primitiva de $\int 2e^x + \frac{1}{3x^2}\,dx.$

Solução:

Procedendo como no exemplo anterior:

$$\int 2e^x + \frac{1}{3x^2}\,dx = \int 2e^x dx + \int \frac{1}{3x^2}\,dx$$

$$= 2e^x + \frac{1}{3}\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \ 2e^x - \frac{1}{3x} + C$$

Quando temos duas funções no integrando, podemos considerar uma única constante de integração C.

Exemplo 6.11

Encontre a primitiva de $\int 4e^x + sen\,x + \frac{2}{x^3}\,dx.$

Solução:

Façamos então

$$\int 4e^x dx + \int senx\,dx \int \frac{2}{x^3}\,dx = 4\,e^x - cosx - \frac{1}{x^2} + C$$

Exemplo 6.12

Uma empresa de próteses tem custo fixo de R$5.000,00 e seu custo marginal é dado pela função $C^{`(X)}$=0,02x^2+0,10x+5*. Determine a função custo total.*

Solução:

Conforme definimos no capítulo anterior, o custo marginal é a derivada da função custo total então para encontrá-la devemos integrar C'(x)

$$C(x) = \int 0{,}02x^2 + 0{,}10x + 5\, dx = 0{,}02\frac{x^3}{3} + 0{,}10\frac{x^3}{3} + 5x + k$$

Como sabemos que a empresa tem um custo fixo de R$ 5.000,00 em x = 0 este é o valor de k. A função custo total se escreve então:

$$C(x) = 0{,}02\frac{x^3}{3} + 0{,}10\frac{x^3}{3} + 5x + 5000.$$

Muitos são os exemplos que podemos enumerar acerca dos processos de primitivação de integrais. Agora, vamos exercitar um pouco?

Exercício 6.1

Determine a primitiva das seguintes funções:

$a)\ f(x) = 5x^2 + 7x + 2$ $\quad b)\ f(x) = x^{\frac{-5}{4}}$ $\quad c)\ f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

$d)\ f(x) = \frac{1}{x-1}$ $\quad e)\ f(x) = e^{4x}$ $\quad f)\ f(x) = 3x^4$

$g) f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad h)\ f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ $\quad i) f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

Exercício 6.2

Encontre a primitiva da função f (x) que satisfaça a condição dada:

$$a)\ f(x) = x^{\frac{-2}{3}} + x\ \ tal\ que\ F(1) = \frac{1}{2}$$

$$b)\ x\sqrt[3]{x} + \ e^x\ \ tal\ que\ F(0) = 2$$

$$c) f(x) = \cos x - sen\ x\ \ tal\ que\ F(0) = 0$$

Exercício 6.3

Calcule as seguintes integrais:

$$a)\ \int \frac{x^{-1/3} + 2}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$$

$$b) \int \frac{1}{x^3}\, dx$$

$$c) \int (4-x-x^2)dx$$

$$d) \int \frac{3}{4} \cos x \, dx$$

$$e) \int 2x + e^x \, dx$$

4 I INTEGRAL DEFINIDA

Em cálculo existem dois problemas fundamentais: encontrar a inclinação da curva num ponto dado e determinar a área sob uma curva. O primeiro problema consiste no cálculo de derivadas como visto no capítulo anterior, desta forma é possível perceber que determinar a área sob uma curva é o mesmo que calcular a integral em pontos definidos.

4.1 Área sob uma curva

Como dito anteriormente, o cálculo da integral está relacionado à área abaixo da curva traçada. Neste sentido, vamos definir uma função positiva em um intervalo e descrever o que ocorre em uma região R contida no gráfico da função *f (x)* num certo intervalo [a,b].

Assim, observe a figura 35:

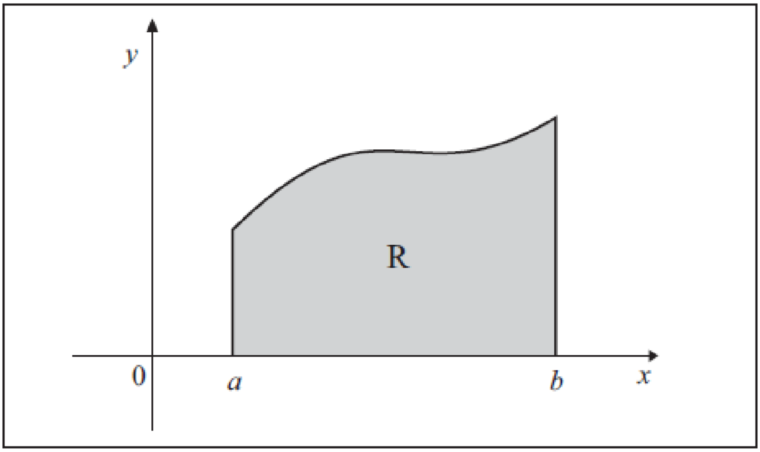


Figura 35: área abaixo da curva. Fonte: autoria.

Relembrando alguns conceitos de Matemática básica, a área destacada na figura anterior compreende a região R do gráfico e, deste modo, pode-se aproximá-la por meio de figuras geométricas conhecidas, como triângulos, retângulos, quadrados e assim por diante. Basicamente, pode-se atribuir a este procedimento uma fórmula geral dada por Área = base x altura, adequando-a ao polígono em questão.

Assim, para calcular a área de uma figura plana qualquer se realiza a aproximação dessa figura por meio de polígonos e métodos de geometria elementar, ou seja, inscrever polígonos pequenos dentro da figura e somar suas áreas.

Formalmente, esse procedimento consiste em desenhar uma partição P no intervalo [a,b], ou seja, dividir esse intervalo em n partes menores ou n subintervalos de forma a obter-se:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$$

os quais são escolhidos de modo arbitrário. Então pode-se representar o intervalo como:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \dots < x_n = b$$

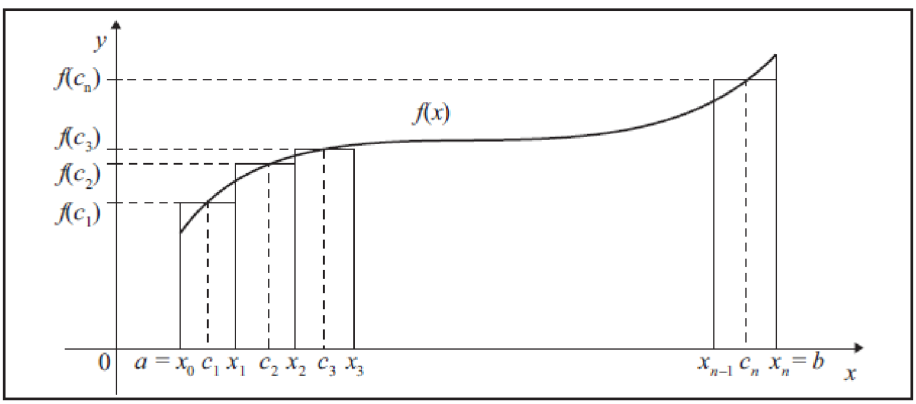


Figura 36: Aproximação da área por meio de partição. Fonte: autoria.

O comprimento do k-***ésimo*** subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, por exemplo, é dado por:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

A ideia, então, é construirmos ao longo da figura retângulos cuja base meça x_k-x_{k-1} e a altura seja $f(c_k)$ onde c_k é um ponto no intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Da figura acima, temos então:

$\Delta x_1 = x_2 - x_1$, base do primeiro retângulo

$\Delta x_2 = x_3 - x_2$, base do segundo retângulo

...

E, seguindo nesta lógica, teremos:

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, base do k-ésimo retângulo

$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$, base do n-ésimo retângulo

Assim, com relação às alturas dos retângulos, temos:

$f(c_1)$, altura do primeiro retângulo

$f(c_2)$, altura do segundo retângulo, e assim sucessivamente até,

$f(c_k)$, altura do k-ésimo retângulo, que continua até

$f(c_n)$, altura do n-ésimo retângulo

Portanto a área de cada retângulo fica:

$\Delta x_1 \text{ x } f(c_1)$, área do primeiro retângulo

$\Delta x_2 \text{ x } f(c_2)$, área do segundo retângulo, ...;

$\Delta x_k \text{ x } f(c_k)$, área do k-ésimo retângulo, ...;

$\Delta x_n \text{ x } f(c_n)$, área do n-ésimo retângulo.

Quanto mais retângulos tivermos, melhor fica a aproximação da área que queremos calcular. Deste modo, a soma das áreas dos n retângulos S_n é escrita, matematicamente, por:

$$S_n = f(c_1) \text{ x } \Delta x_1 + f(c_2) \text{ x } \Delta x_2 + \ldots + f(c_n) \text{ x } \Delta x_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f(c_k) \text{ x } \Delta x_k$$

O símbolo acima representa um somatório e é chamado de ***Soma de Riemann*** de *f* para uma partição P, quando n cresce espera-se que essa soma se aproxime da área sob a curva de *f (x).* A área pode então ser definida como:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} f(c_k) \text{ x } \Delta x_k \ ,$$

Caso esse limite exista, de acordo com o que estudamos na unidade 4 deste material. Deste modo, esta área ficará determinada.

*O **termo k-ésimo** se refere a um número qualquer entre o e n, para não dizermos décimo, centésimo ou outro qualquer deixamos a forma geral k-ésimo.*

***Nota Biográfica:** Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) foi um matemático alemão responsável, entre outros avanços em matemática, por sistematizar as aproximações de integrais por somas. Mas ele não foi o único, o matemático francês Henri Léon Lebesgue (1875-1941) propôs uma generalização ao processo de integração.*

4.2 Estudando a integral definida

A chamada *integral definida* está ligada ao limite que acabamos de definir, matematicamente podemos defini-la do seguinte modo. Se *f (x)* é uma função definida no intervalo fechado [a,b] e se P é uma partição qualquer de [a,b], a integral de *f(x)* no intervalo [a,b] , dada por $\int \boldsymbol{f}\mathbf{(x)dx}$ é dada por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(c_k) \times \Delta x_k \quad (6.4)$$

Na definição 6.4 dada acima, temos os seguintes significados:

- *f(x)* é chamado integrando.
- *a* e *b* são os limites inferior e superior de integração respectivamente.
- Se $\int f(x)dx$ existe no intervalo considerado ela é dita *integrável* nesse intervalo.

É importante ressaltar que a integral não significa, necessariamente, a área total da figura dada, ela pode representar volume, quantidade de indivíduos de uma população, a equação horária de movimento entre outros.

O que define sua área, aproximada, é o processo de soma que utilizamos para se chegar ao limite. Sua formulação geral permite intervalos negativos e outras situações como destacaremos a seguir:

- Se $a > b$, então:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- Se $a = b$, então:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Adentramos num ponto do nosso estudo que precisaremos, num primeiro momento, recorrer a uma ferramenta muito importante na matemática, os chamados teoremas.

Um teorema, na matemática, equivale a uma regra que é obtida a partir de um conjunto de consequências matemáticas que o demonstram. Assim, utilizamos os teoremas, grosso modo, para calcularmos o que estamos interessados. Deste modo, temos:

> ***Teorema 6.1:*** *Se a função f(x) é* ***contínua*** *no intervalo [a,b] então ela é* ***integrável*** *nesse intervalo.*

5 | PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

De acordo com o estudado acima, apresentamos nesta seção as principais características das integrais definidas, dito propriedades. Como já dito, sua importância reside quando estivermos calculando integrais.

P1- *Seja f(x) integrável em [a,b] e k uma constante qualquer, então*

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad (6.5)$$

P2*- Sejam as funções f(x) e g(x) integráveis no intervalo [a,b] , então f(x)±g(x) também é integrável nesse intervalo, ou seja,*

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\, dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \qquad (6.6)$$

P3- *Se a < c < b e a função f(x) é integrável em [a,c] e [a,b] também é em [a,b] e temos:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (6.7)$$

P4- *Se a função f(x) só é integrável para f(x) ≥ 0 para qualquer x em [a,b] , então:*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \qquad (6.8)$$

P5- *Se as funções f (x) e g (x) são integráveis no intervalo [a,b] e f(x) ≥ g(x) para qualquer x em [a,b] , temos:*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \qquad (6.9)$$

P6- *Seja f (x) integrável no intervalo [a,b] , então | f(x) | também é integrável nesse intervalo:*

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)dx| \qquad (6.10)$$

Calcular a integral por Soma de Riemann pode ser, muitas vezes, trabalhoso. Por este motivo, vamos lançar mão de um teorema-chave do Cálculo Diferencial e Integral. O chamado *Teorema Fundamental do Cálculo*.

Teorema 6.2 (Teorema Fundamental do Cálculo): Se a função *f (x)* é integrável num intervalo [a,b] e temos *F(x)* , função de *f(x)* nesse intervalo , então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(b) \qquad (6.11)$$

Este teorema é importante, pois pode-se utilizar a diferença entre os valores da primitiva de uma função *f (x)* nos extremos como sendo o valor da integral dessa função no intervalo considerado, fato este que facilita, e muito, nossos cálculos!

Exemplo 6.13

Calcule a integral dada por $\int_0^2 3x$.

Solução:

A primitiva é F(x)=3$\frac{x^2}{2}$*, e pelo Teorema 6.2 (TFC) temos:*

$$\int_0^2 3x = F(2) - F(0) = 3\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = 6$$

Exemplo 6.14

Calcule a integral dada por $\int_1^3 x^3 + 4$.

Solução:

Temos as primitivas F(x)=$\frac{x^4}{4}$ *e G(x)=4x, pelo TFC a integral fica:*

$$\int_1^3 x^3 + 4 = F(3) - F(1) + \{\, G(3) - G(1)\} = \frac{26}{4} + 8 = \frac{58}{4}$$

Exemplo 6.15

Calcule a seguinte integral $\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Solução:

Dos exemplos anteriores sabemos que a primitiva é F(x)=√x, vamos usar o TFC para calcular essa integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x})|_1^2 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1$$

Repare na notação F(x)$|_a^b$, ela é equivalente a F(b)-F(a).

Exemplo 6.16

Calcule a integral $\int_0^2$ f(x) dx da função quando:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 2x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Solução:

Podemos usar a propriedade P3 da integral definida e calcular as integrais nos intervalos [0,1] e [1,2] de acordo com as expressões dadas para a função f (x) em cada um desses intervalos:

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 2x\,dx = \frac{x^3}{3}|_0^1 + 2.\frac{x^2}{2}|_1^2$$

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

Exemplo 6.17

Para produzir x unidades de um aparelho celular uma indústria calculou a função custo como sendo C(x)=$\frac{100}{\sqrt{x}}$ *, quando x ≤ 500. Determine o custo para produzir os 100 primeiros aparelhos.*

Solução:

Para produção desse número de aparelhos, o custo total é expresso por:

$$C(x) = C(1) + C(2) + \cdots + C(100)$$

Mas, agora sabemos usar o Teorema fundamental do Cálculo para somas como essas, assim:

$$C = \int_0^{100} C(x)dx = \int_0^{100} \frac{100}{\sqrt{x}}dx$$

$$= 100\int_0^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 100\int_0^{100} \frac{1}{x^{1/2}}dx = 100\int_0^{100} x^{-1/2}dx$$

$$= 100\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}|_0^{100} = 200.\sqrt{100} = 2000$$

Portanto o custo de produção de 100 aparelhos é R$2.000,00.

Exemplo 6.18

Uma companhia explora um lençol freático extraindo um volume de 3000 litros por mês, estima-se que o processo possa durar até 20 anos (240 meses) e que o preço por litro daqui a t meses é dado pela função f(t)=0,01t²+5t+3000. Calcule a receita gerada pela companhia ao longo dos 240 meses.

Solução:

Do mesmo modo que fizemos no exemplo anterior, a soma que nos dá a receita ao longo dos 240 meses é expressa por:

$$R(x) = 3000.R(1) + 3000.R(2) + \cdots + 3000.R(240)$$

Vamos agora calcular a Receita pelo TFC:

$$R = 3000.\int_0^{240} 0{,}01t^2 \ + 5t + 3000$$

$$= 3000.\{0{,}01\frac{t^3}{3} + 5\frac{t^2}{2} + 3000.x\}|_0^{240}$$

$$= 3000\ (414.000 + 144.000 + 720.000) = 3.834.000.000$$

Portanto, a receita da companhia ao longo de 20 anos será R$ 8.384.000.000,00.

Exercício 6.4

Calcule aas integrais a seguir usando o Teorema Fundamental do Cálculo:

$$a)\ \int_{-5}^{4}(7+\pi)dx$$

$$b)\ \int_{0.5}^{0.75}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\,)\,dx$$

$$c) \int_{1}^{3} 5x\, dx$$

$$d) \int_{-2}^{3} (3x^2 - 2x + 1)\, dx$$

$$\text{e)} \int_{3/2}^{5/3} (2x-3)(3x+2)dx$$

$$\text{f)} \int_{0}^{4} f(x)dx, onde\ f(x) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 4x, & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

Exercício 6.5

A Heron Motors construiu uma linha de montagem para seu novo carro a vapor e espera produzi-los numa razão de 30√t automóveis por semana, no final de t semanas. Quantos automóveis eles esperam produzir durante as primeiras 36 semanas de produção?

Exercício 6.6

Um fábrica está despejando poluentes em um lago à taxa de $\frac{t^{2/3}}{600}$ *toneladas por semana, onde t é o tempo, em semanas, desde que a fábrica iniciou suas operações. Após 10 anos de operação, qual a quantidade de poluente despejada no lago pela fábrica?*

6 | TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Assim como vimos no caso das derivadas, também o cálculo de integrais possui técnicas que nos auxiliam a reconhecer e manipular as funções de modo a conseguir calcular o seu valor de uma forma mais ágil. A seguir, veremos duas das principais formas de resolver integrais: a *integração por substituição* e a *integração por partes*.

6.1 Integral por Substituição

Veremos agora como realizar o cálculo de integrais *por substituição* ou *mudança de variável.* Suponha duas funções *f (x)* e *g (x)* que se apresentam na forma *f (g (x)),* onde queremos calcular uma integral que esteja na forma:

$$\int f(g(x)).\, g'(x)dx$$

Temos então,

$$\int f(g(x)).\, g'(x)dx = F(g(x) + C \qquad (6.12)$$

Vamos utilizar a mudança de variável fazendo:

$$u = g(x) \rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \rightarrow du = g'(x)dx$$

e, substituindo essa última igualdade em (6.12) temos:

$$\int f(g(x)).\, g'(x)dx = \int f(u)d(u) = F(u) + C$$

Vejamos, abaixo, alguns exemplos utilizando a técnica de integração por substituição.

Exemplo 6.19

Calcule a integral $\int(x^2+3)^5\ 2x\ dx$.

Solução:

Vamos identificar as funções no integrando, fazendo $x^2+3=u$ *e, então temos:*

$$\frac{du}{dx} = 2x + 0\ e\ du = 2x\ dx\ .$$

Reescrevendo a integral:

$$\int f(u)d(u) = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C$$

Retomando a variável x:

$$\frac{u^6}{6} + C = \frac{(x^2+3)^6}{6} + C$$

Logo,

$$\int(x^2+3)^5\ 2x\ dx = \frac{(x^2+3)^6}{6} + C.$$

Exemplo 6.20

Calcular $\int \frac{3x^2}{11+x^3}$.

Solução:

Vamos fazer a mudança de variável $u=11+x^3$ *então, temos:*

$$\frac{du}{dx} = 0 + 3x^2$$

onde,

$$du = 3x^2dx$$

e a integral fica:

$$\int \frac{3x^2}{11+x^3} = \int \frac{du}{u} = ln|u| + C$$

$$= ln|u| + C = ln|11 + x^3| + C.$$

Exemplo 6.21

Calcule a integral $\int x\sqrt{x-1}\,dx$

Solução:

Façamos a mudança de variável $u = \sqrt{x-1}$*, agora vamos fazer*

$$u^2 = x - 1 \ e \ x = u^2 - 1 \ com \ dx = 2u\,du$$

A integral fica:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (u^2+1).u.(2u\,du) = 2\int (u^4+u^2)\,du$$

$$= 2\left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3}\right) + C = \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^5}{5} + \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3} + C$$

Portanto, $\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^5}{5} + \frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^3}{3} + C.$

Exercício 6.7

Calcule as integrais:

$a)\ \int e^{5x}\,dx$ $\qquad$ $b)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}}\,dx$

$c)\ \int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ $\qquad$ $d)\ \int \frac{4}{(7-5x)^3}\,dx$

$e)\ \int \frac{1}{x^2}\,dx$ $\qquad$ $f)\ \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$

$g)\ \int_1^4 \frac{ln\ t^5}{t}dt$ $\qquad$ $h)\ \int_0^3 \frac{x}{x^2+1}\,dx$

7 I INTEGRAÇÃO POR PARTES

Existem algumas integrais em que a substituição não é possível, por exemplo ∫xe^{x}dx, para casos como esses vamos estudar a integração por partes. Sejam as funções f *(x)* e a *g (x)* definidas num intervalo [a,b], desse modo podemos escrever:

$$u = f(x) \; e \; v = g(x)$$

Vale a regra operacional do produto, então:

$$(uv)' = u'v + uv',$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima:

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx - \int_a^b uv'dx$$

$$uv = \int_a^b u'vdx - \int_a^b uv'dx$$

$$\int_a^b u'vdx = uv\,|_a^b - \int_a^b uv'dx$$

Para a integral indefinida temos:

$$\int udv = uv - \int vdu \quad (6.13)$$

A fórmula dada por (6.13) é conhecida como *integração por partes*, onde devemos separar o integrando eu uma parte que chamamos de *u,* a outra a ser chamada de *dv* que acompanha dx. Alguns cuidados devem ser tomados ao escolher *u* e *dv*, a saber:

- O *dv* escolhido deve ser facilmente integrável;
- *∫ vdu* deve ser mais fácil de integrar do que *∫udv*

Vejamos, alguns exemplos.

Exemplo 6. 21

Calcule a integral dada por $\int xe^x dx$.

Solução:

Sejam u = x e $dv=e^x dx$*, temos du=dx e* $v=e^x$.

Com a aplicação da fórmula ∫udv=uv - ∫ vdu, ficamos com:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C$$

Exemplo 6.22

Calcule a integral de ∫ln x dx.

Solução:

Fazemos u=lnx e dv = dx, com du = $\frac{1}{x}$*dx e v = x.*

Aplicando a fórmula ∫ udv = uv - ∫ vdu vem:

$$\int lnx\, dx = xlnx - \int x\frac{1}{x}dx$$

$$= xlnx - x + C$$

Exemplo 6.23

Calcule a integral ∫xln x dx.

Solução:

Escolhemos u=lnx e dv=xdx, com du=$\frac{1}{x}$*dx e v =* $\frac{1}{2}x^2$.

Portanto,

$$\int xln\, x\, dx = \frac{1}{2}x^2lnx - \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2lnx - \frac{1}{2}\int x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2lnx - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2}x^2lnx - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Exemplo 6.24

Calcule a integral de ∫e^x sen x dx.

Solução:

Vamos fazer u=e^x e dv=sen x dx, com du=e^xdx e v=-cos x.

A integral fica: ∫e^xsen x dx=-e^xcosx + ∫cosx e^xdx (6.14),

temos que fazer novamente o procedimento de integração por partes.

Escolhemos:

$$z = e^x, e\ dw = cos\, x\ \ dx, com\ dz = e^x dx\ e\ w = senx\ .$$

Agora temos: $\int cosx\, e^x dx = e^x senx - \int senx\, e^x dx$ *(6.15), substituindo (6.15) em (6.14), resulta em:*

$$\int e^x sen\, x\, dx = -e^x cosx + e^x senx - \int senx\, e^x dx = \frac{1}{2}e^x(senx - cosx) + C$$

Exercício 6.8

Calcule as integrais a seguir usando a integração por partes:

$$a) \int e^x (x+1)^2 \, dx \qquad\qquad b) \int x^2 \ln x \, dx$$

$$c) \int \sqrt{x} \ln x \, dx \qquad\qquad d) \int sen^2 x \, dx$$

$$e) \int \frac{lnx}{x} dx \qquad\qquad f) \int x \, e^{-x} \, dx$$

8 | INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

Ao definir a integral, caracterizamo-la como um limite que existia em um intervalo fechado, em particular, aquele exibido via *Teorema 6.1,* o qual diz que se uma função é contínua em um intervalo fechado ela é integrável nesse intervalo.

Porém, pode acontecer de a função não estar definida em um dos extremos, ainda assim podemos encontrar um intervalo aberto em que o limite existe e, consequentemente, também a integral.

A seguir, vamos analisar casos em que podemos obter esses limites. As integrais que são definidas desse modo são chamadas de integrais impróprias.

Para iniciarmos, vamos analisar alguns casos.

Caso 1: *Seja f definida no intervalo (a,b] , se existe $\int_t^b$ f(x)dx para todo t ϵ(a,b), a integral é escrita por:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx \ \ , para \ a < t < b$$

caso o limite exista, pelo contrário a integral não existe ou, como comumente encontramos na literatura, dizemos que não converge.

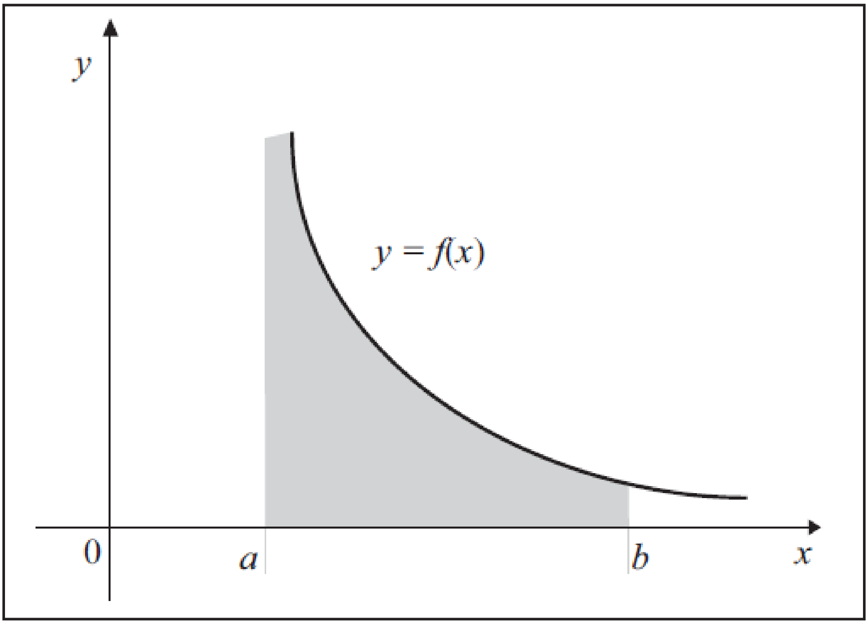


Figura 37: Aproximação da área por meio de partição. Fonte: autoria.

Caso 2: *Seja f definida no intervalo [a,b), se existe* $\int_a^t f(x)dx$ *para todo t* $\in$*(a,b), a integral é escrita por:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx \ .para\ a < t < b$$

caso o limite exista, pelo contrário a integral não existe ou, podemos dizer que não converge.

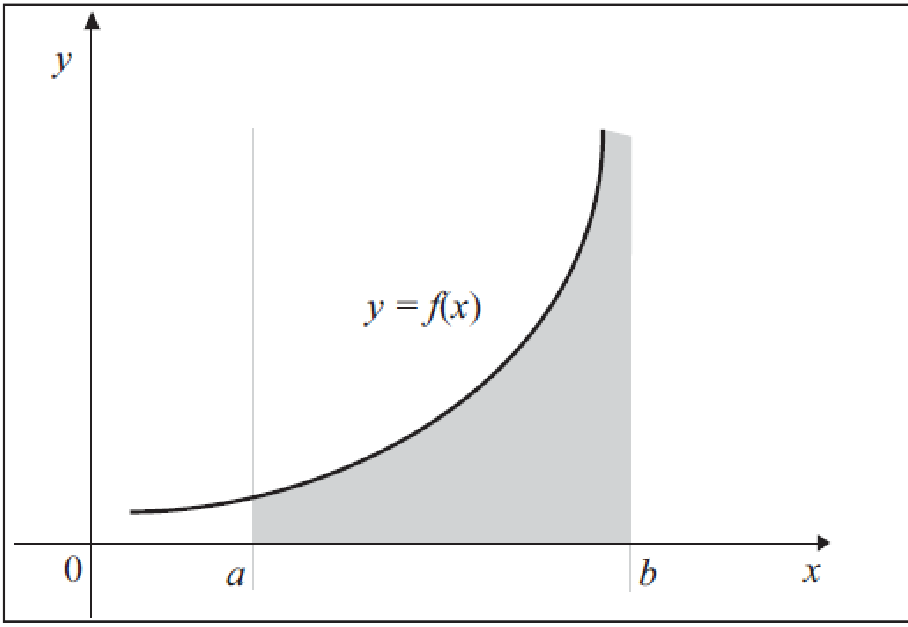


Figura 38: Aproximação da área por meio de partição. Fonte: autoria.

Caso 3: *Seja f definida em (a,b), podemos escrever :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,, se \;\; a < c < b$$

quando as integrais no 2º membro existem. Note que são as mesmas que definimos em (6.11) e (6.12).

Caso 4: *Se f está definida no intervalo [a,b] mas é descontínua em algum ponto c є (a,b) e não existe algum limite lateral na vizinhança de c, então vale:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,, se \;\; a < c < b$$

desde que as integrais no 2º membro existam. Note que são as mesmas definidas em (6.11) e (6.12).

Caso 5: *Seja f definida no intervalo (-∞, b], se* $\int_t^b$ *f(x)dx para todo t є (-∞, b), escrevemos:*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx, -\infty < t < b$$

quando existe esse limite. Se não existir dizemos que a integral não existe ou não converge.

Caso 6: *Seja f definida no intervalo [a, +∞), se* $\int_a^t f(x)dx$ *para todo t ϵ [a, ∞), escrevemos:*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_a^t f(x)dx, -\infty < t < b$$

quando existe esse limite. Se não existir dizemos que a integral não existe ou não converge.

Caso 7: *Seja f definida no intervalo (-∞, ∞), podemos escrever:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx\,, se\ -\infty < c < \infty$$

se existem as duas integrais do 2º membro que foram definidas anteriormente. Quando o limite de uma integral imprópria existe e é finito dizemos que a integral é convergente, caso contrário, dizemos que ela é divergente.

Exemplo 6.25

Calcule caso exista $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Solução:

Observe que a função f(x) = $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ não está definida em x = 1, vamos usar (2) e fazer:

$$\lim_{t\to1^-}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to1^-}\int_0^t (1-x)^{-1/2}\,dx$$

Usamos mudança de variável u=1-x⇒du=-dx pela técnica de substituição

$$\int (1-x)^{-1/2}\,dx = -\int u^{-1/2}\,du = -2u^{1/2}$$

isto é,

$$\int_0^t (1-x)^{-1/2}\,dx = -2(1-x)^{1/2}\,|_0^t$$

$$= -2\left[(1-t)^{1/2} - 1\right]$$

Portanto,

$$\lim_{t\to1^-}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{t\to1^-} -2\left[(1-t)^{1/2} - 1\right]$$

$$= -2[0-1] = 2$$

A integral converge e $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$

Exemplo 6.26

Calcule se existir $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Solução:

Note que a função f(x) = $\frac{1}{x^2}$ *não está definida no ponto x = 0. Pelo caso 1 acima, temos::*

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-1} |_t^1$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left(-1 + \frac{1}{t}\right) = \infty$$

Logo, a integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ *diverge ou não existe.*

Exemplo 6.27

Determine, se existir $\int_{-\infty}^0 e^x \ dx$.

Solução:

Façamos a seguinte,

$$\lim_{t\to -\infty} \int_t^0 e^x \ dx \ = \lim_{t\to -\infty} e^x \,|_t^o \quad ,$$

$$desde\ que\ (\text{-}\infty < t < 0).$$

Então:

$$\lim_{t\to -\infty} \int_t^0 e^x \ dx \ = \lim_{t\to -\infty} (1 - e^{t)} = 1.$$

Portanto, a integral converge e $\int_{-\infty}^0 e^x \ dx = 1.$

Exercício 6.9

Calcule, se existirem as seguintes integrais impróprias. Diga se convergem ou divergem:

$a) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \ dx$ $\qquad$ $b) \int_0^1 x \ln x \, dx$

$c) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$ $\qquad$ $d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \, dx}{x^2 + 16}$ $\qquad$ $e) \int_{-1}^{1} \frac{dy}{y^2}$

Exercícios complementares da unidade

1. Uma primitiva de $\frac{-1}{x^2}$ *é:*

a) $\frac{1}{x} + C$

b) $\frac{1}{x+1} + C$

c) $x^2 - 1 + C$

d) $-x^3 + C$

2. A função x^3-1 *dá origem a derivada:*

a) $3x^2-1$

b) $6x-1$

c) $3x^2$

d) $3x$

3. A integral da função $\frac{x^2}{3} - 2$ *é igual a:*

a) $\frac{4x^2}{3}+2+C$

b) $4x^2+\frac{2}{3}+C$

c) $4x+\frac{2x^2}{3}+C$

d) $\frac{x^3}{9}-2x+C$

4. A integral, no cálculo, representa:

a) uma soma

b) uma multiplicação

c) uma simplificação de expressão

d) um símbolo apenas

5. Quando temos um intervalo definido, sobre o qual desejamos integrar, devemos utilizar como procedimento o resultado oriundo da (o):

a) definição de continuidade de funções

b) teorema fundamental do cálculo

c) relação entre continuidade e derivadas

d) todas as anteriores

Respostas dos exercícios desta unidade

Exercício 6.1

$a)\ \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 2x + C \qquad b) - 4x^{\frac{-1}{4}} + C \quad c) - 2x^{\frac{-1}{2}} + C$

$d)\ \ln(x-1) + C \qquad e)\ \frac{e^{4x}}{4} + C \qquad f)\ 3\frac{x^5}{5} + C$

$g) \frac{15}{2}\sqrt[3]{x^2} + C \qquad h)\ 4\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + x + C \quad i)\ \frac{-1}{x} - 2lnx + x + C$

Exercício 6.2

$a) F(x) = 3x^{\frac{1}{3}} + \frac{x^2}{2} + C\ , C = -3$

$b)\ F(x) = \frac{3}{7}\ x^{\frac{7}{3}} + e^x + C\ , C = 1$

$c)\ F(x) = senx + cosx + C\ , C = -1$

Exercício 6.3

$a)\ \ln x + 6\ x^{\frac{1}{3}} + C$

$b) - \frac{1}{2x^2} + C$

$c) 4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$

$d) \frac{3}{4}\ senx + C$

$e)\ x^2 + e^x + C$

Exercício 6.4

$a)\ 63 + 9\pi$ $\quad b)\ \left(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}\right)(0.25)$ $\quad c) 20$

$d)\ 35$ $\quad e)\ \frac{41}{216}$ $\quad f)\ \frac{88}{3}$

Exercício 6.5: 4320

Exercício 6.6: 33,63 *toneladas.*

Exercício 6.7

$a)\ \frac{1}{5}e^{5x} + C$ $\quad b)\ \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \log(\sqrt[4]{x^3} + 1)\right) + C$

$c) \frac{2}{3}\ (x-2)\sqrt{x+1} + C$ $\quad$ d) $\frac{1}{5(7-5x)^2}\ + C$

$e)\ \frac{-1}{x} + C$ $\quad f)\ -\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x} + C$

$g)\ \frac{5}{2}(ln4)^2$ $\quad h)\ \sqrt{10} - 1$

Exercício 6.8

$a)\ e^x x^2 + e^x\ + C$

$b) \frac{1}{3}x^3 \ln|x| - \frac{x^3}{9} + C$

$c)\ \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{4}{9}x^{3/2} + C$

$d)\ -\frac{1}{2}\cos x\ sen\ x + \frac{x}{2} + C$

$e)\ \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + C$

$f)\ -xe^{-x} - e^{-x} + C$

Exercício 6.9

$a)\ 2 \qquad b)\ -\frac{1}{4} \qquad c)\ \frac{\pi}{2} \qquad d)\ \pi \qquad e)\ \infty$

Exercícios complementares da unidade

1. A 2. C 3. D 4. A 5. D

REFERÊNCIAS

ANTON, H. et al. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, 2014.

BROWN, J. W. **Variáveis Complexas e Aplicações**. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2015.

GOLDSTEIN, L. et al. **Matemática Aplicada: Economia, Administração e Contabilidade**. 12. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

MORGADO, A. C.; CESAR, B.; **Matemática Básica: teoria e mais de 800 questões.** 3. ed. São Paulo: Editora Campus Elsevier, 2008.

SILVA, F. C. M; ABRÃO, M. **Matemática básica para decisões administrativas**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

SILVIA, S. M.; SILVA, E. M. **Matemática para Economia, Administração e Ciências Contábeis**. Vol. 1. São Paulo: Atlas, 2008/1997.

WEBER, J. E. **Matemática para economia e administração**. 2. ed. Tradução Seiji Hariki. São Paulo: Harbra, 1986.

SOBRE O AUTOR

CARLOS MOMETTI - Graduado em Física pela Universidade Federal de São Carlos (2016) e Università Degli Studi di Roma “La Sapienza” (2014 - 2016). Mestre em Educação pela Faculdade de Educação da USP. Especialista na área de Formação de Professores que ensinam Matemática e Física. Doutorando em Ensino de Ciências pela Faculdade de Educação e Instituto de Física, ambos da Universidade de São Paulo (USP) e Concordia University (Canada). Esteve integrante do Programa de Formação de Professores (FEUSP - 2016 a 2017). Formador pedagógico da Universidade Virtual do Estado de São Paulo (UNIVESP). Integrante do Núcleo de Pesquisa em Inovação Curricular (NUPIC/2016 - atual), Decolonizing Light: Tracing and countering colonialism in physics, Canada (2020 - atual) e pesquisador integrante da Cátedra Otávio Frias Filho de Estudos em Comunicação, Democracia e Diversidade, do Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo (2021 - 2022) e da Cátedra José Bonifácio, do Centro Ibero Americano da Universidade de São Paulo. Membro ativo da Sociedade Brasileira de Física, Associação Brasileira de Pesquisa em Ensino de Ciências, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Associação Nacional dos Professores de Matemática (Brasil), Associação dos Professores de Matemática (Portugal), Sociedade Brasileira de Matemática, National Association for Research in Science Teaching (NARST), Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa (Red Cimates - América Latina) e British Educational Research Association (BERA). Atua principalmente nos seguintes temas: formação de professores que ensinam matemática, metodologia de ensino de física e matemática e decolonialidade aplicada aos estudos curriculares.

EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

CAPES

Atena
Editora
Ano 2022

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CAPES

Atena Editora

Ano 2022