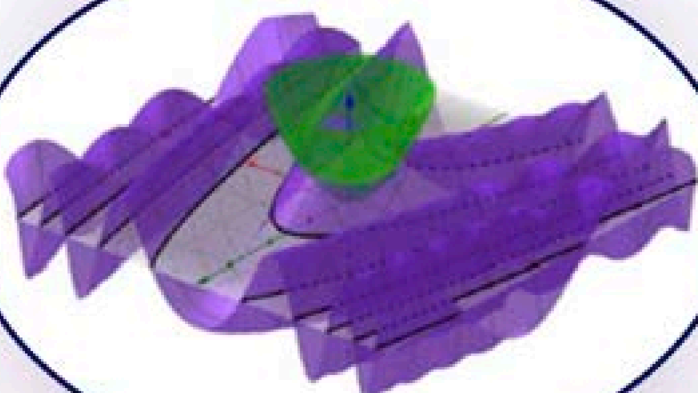
LÍMITES DE FUNCIONES REALES

para estudiantes de ciéncias e ingenierías



Juan Percy Mamani Cutipa

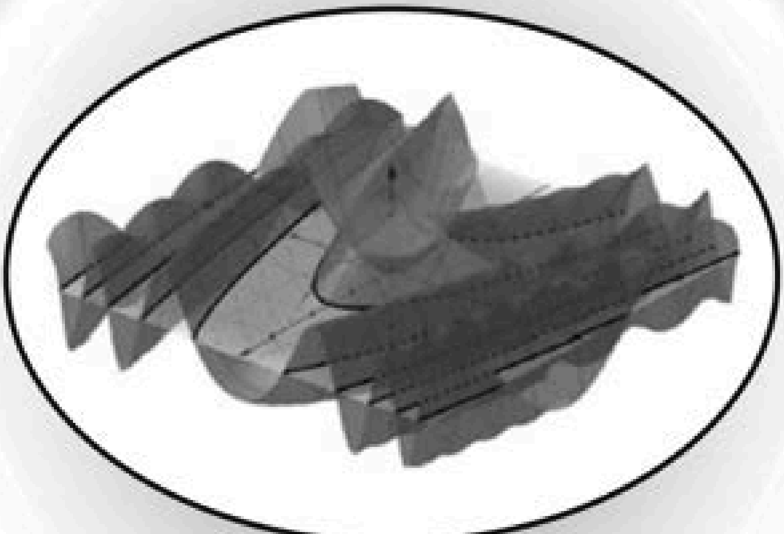
Osmar Cuentas Toledo

Atena Editora

Ano 2022

LÍMITES DE FUNCIONES REALES

para estudiantes de ciéncias e ingenierías



Juan Percy Mamani Cutipa

Osmar Cuentas Toledo

Atena Editora

Ano 2022

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Bruno Oliveira
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Límites de funciones reales para estudiantes de ciéncias e ingenierías

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Yaiddy Paola Martinez
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores

Autores: Juan Percy Mamani Cutipa
Osmar Cuentas Toledo

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C988 Cutipa, Juan Percy Mamani
Límites de funciones reales para estudiantes de ciéncias e ingenierías / Juan Percy Mamani Cutipa, Osmar Cuentas Toledo. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2022.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-0437-8
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.378221208

1. Ciências exatas - Estudo e ensino. I. Cutipa, Juan Percy Mamani. II. Toledo, Osmar Cuentas. III. Título.

CDD 507

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2022

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao conteúdo publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que o texto publicado está completamente isento de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação dos manuscritos publicados, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. Todos os e-book são *open access, desta forma* não os comercializa em seu site, sites parceiros, plataformas de *e-commerce,* ou qualquer outro meio virtual ou físico, portanto, está isenta de repasses de direitos autorais aos autores; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como nenhum outro dado dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

PRESENTACIÓN

El presente texto sobre Límites de una Función Real de una variable real nace como la necesidad de implementar una metodología didáctica basada en un desarrollo de forma explicativa y de proceso, de tal forma que permita ayudar al estudiante analizar, comprender y practicar los principios de los límites que representa en las funciones reales; además, se quiere mostrar que la teoría sobre límites de una función real no presenta complejidad, cuando se cuenta con conocimientos conceptuales básicos y del algebra. Seguidamente, para demostrar su utilidad, presentamos la continuidad de una función real que es uno de los temas posterior a los límites. Los límites son la base para comprender los temas desarrollados en el Cálculo Diferencial e Integral, estudiado con gran énfasis por los estudiantes de ciencias e ingenierías.

Los Autores

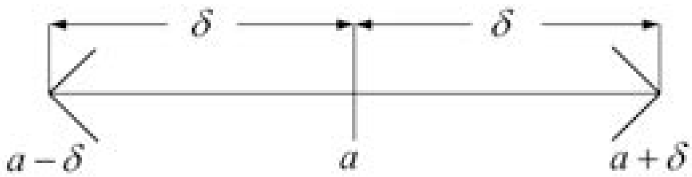
SUMÁRIO

1 . LIMITES DE FUNCIONES REALES

El Cálculo Diferencial trata de los cambios infinitesimales o infinitésimos (de cantidades infinitamente pequeñas: “casi, próximo a cero, o convergente a cero”) de las variables independientes y dependientes de una función. Los cambios a que se hace referencia son explicados matemáticamente utilizando los conceptos de límite i continuidad, pero al final de ello se encuentra una nota que para efectos de cálculo se tiene que entender ciertas ideas para que nuestros procesos sean más fáciles.

1.1 Vecindad de un punto

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, se llama vecindad abierta o bola abierta de centro a y radio $\delta>0$ y se denota con $B(a,\delta)$, al intervalo $\langle \alpha-\delta, \alpha+\delta \rangle$, esto es, $B(\alpha,\delta)=\langle \alpha-\delta, \alpha+\delta \rangle$, como se muestra la figura:



Se entiende por vecindad a un intervalo tan pequeño (infinitesimal), de modo que a lo más contiene un punto y esta al lado de otro punto.

Propiedades:

1. $B(a,\delta)=\{x \in \mathbb{R} / |x-a|<\delta\}$

2. La intersección de dos vecindades de $\alpha[B(\alpha,\delta_1)$y $B(\alpha,\delta_2)]$ es una vecindad de $\alpha[B(\alpha,\delta)]$, esto es, $B(\alpha,\delta)= B(\alpha,\delta_1) \cap B(\alpha,\delta_2)$, donde $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

1.2 Limite de una función

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ una función y α un punto que no necesariamente pertenece a D_f pero que toda vecindad de α contiene puntos de D_f; se dice que el límite de $f(x)$ es L, cuando L tiende hacia α, y se escribe:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L\ ,$$

cuando:

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / \forall x \in D_f, x \neq a \ y \ a-\delta<x<a+\delta$$
$$\Rightarrow L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$$

En términos de valor absoluto

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in D_f, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$

Usando vecindades esta definición es equivalente a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in B(a,\delta) \cap D_f\ , x \neq a$$
$$\Rightarrow f(x) \in B(L,\varepsilon)$$

NOTA: El concepto de límite plantea que, para cualesquier valor x que se aproxime al valor de α(eso es, x tiende a α, x→α) en la recta del eje real X, sucede los mismo en el eje Y, de modo que se encontrara un valor L, como resultado de la aproximación de cualquier valor y=ƒ(x); es decir, cuando x llegue a ser o asumir el valor de α, entonces tendrá un valor L, que se encuentra en la recta real Y.

1. Demostrar que si: n→∞, el límite de la sucesión

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots \frac{1}{n^2} \ldots$$

es igual a cero ¿Para qué valores de n se cumple la desigualdad $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ (siendo ε un número positivo arbitrario)?

Para

a) ε=0.1

b) ε=0.01

c) ε=0.001

Solución:

Por definición tenemos que si:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$
$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$\Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

luego,

a) Para ε=0.1

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow n > 3.1622$$
$$n \geq 4$$

b) Para ε=0.01

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow n > 10$$

c) Para ε=0.001

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow n > 31.6227$$

2. Demostrar que el límite de la sucesión $x_n = \frac{n}{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ ...)$ cuando n→∞ es igual a 1 ¿Para qué valores de n>*N* se cumple la desigualdad $|x_n - 1| < \varepsilon$ (siendo ε un número positivo arbitrario)?. Hallar *N* para:

a) ε=0.1

b) ε=0.01

c) ε=0.001

Solución:

Si $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$, entonces por definición de límite $|x_n - 1| < \varepsilon$ luego remplazando:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |n+1| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N$$

luego,

a) Para ε=0.1

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N \Rightarrow N = 9$$

b) Para ε=0.01

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N \Rightarrow N = 99$$

c) Para ε=0.001

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N \Rightarrow N = 999$$

3. Demostrar que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

Solución:

Por definición de límite:

$$\begin{aligned} &|x^2-4|<\varepsilon \\ \Rightarrow\ &|x-2||x+2|<\varepsilon \\ \Rightarrow\ &Sea\ |x-2|<\delta=1 \end{aligned}$$

Por desigualdades

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ -1<x-2<1 \\ &\Rightarrow\ \ 3<x+2<5 \\ &\Rightarrow\ \ 5|x-2|<\varepsilon \\ &\Rightarrow\ \ |x-2|<\frac{\varepsilon}{5} \end{aligned}$$

Luego,

a) Para ε=0.1

$$|n-2|<0.02$$

b) Para ε=0.01

$$|n-2|<0.002$$

c) Para ε=0.001

$$|n-2|<0.0002$$

l.q.q.d.

1.3 Propiedades de los límites

Antes de dar las propiedades de los límites, tenemos que tener presente algunas de las propiedades de los números reales.

Proposición 1.3.1: $x\in\mathbb{R}, x\geq 0\ tal\ que\ x<\varepsilon\ \ para\ todo\ \varepsilon>0,\ entonces\ x=0$

Teorema 1.3.1: (UNICIDAD DEL LÍMITE) El límite de una función, cuando existe, es único, es decir, si

$$\lim_{x\to a} f(x)=L_1\ \ y\ \ \lim_{x\to a} f(x)=L_2\ \Rightarrow\ L_1=L_2$$

Teorema 1.3.2: (CONSERVACION DEL SIGNO) Si $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$, existe una vecindad B(α,δ), tal que: ƒ(x) y L tienen el mismo signo ∀ x є B(α,δ),x≠α

Teorema 1.3.3: Si $\lim_{x\to a} f(x)=L$, existe una vecindad B(α,δ) y un número M>0, tal que: $|f(x)<M,\ \forall x\in B(a,\delta)|$ con $x\neq a$.

Teorema 1.3.4: Si f y g son dos funciones tales que:

a) $f(x) \leq g(x), \forall x \in B(a,r)$ con $x \neq a$

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \;\; y \;\; \lim\limits_{x \to a} g(x) = M$

Entonces L≤M, es decir $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$

Teorema 1.3.5: (TEOREMA DE SANDWICH) Sean f(x), g(x) y h(x) funciones tales que

a) $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in B(a,r)$ con $x \neq a$

b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \;\; y \;\; \lim\limits_{x \to a} h(x) = L$

Entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

Teorema 1.3.6: Sean f y g dos funciones tales que:

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

b) $\exists M > 0$ tal que $|g(x)| < M, \forall x \in B(a,r)$ con $x \neq a$

entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = 0$

1.4 Propiedades operacionales del límite

Teorema 1.4.1: Sean f, g funciones tales que:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \;\; y \;\; \lim\limits_{x \to a} g(x) = M$. Entonces:

i) $\lim\limits_{x \to a} c = c$, c constante.

ii) $\lim\limits_{x \to a}[c.f(x)] = c\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] = cL$, c constante.

iii) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \pm M$

iv) $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \cdot M$

v) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{1}{M}$, si $M \neq 0$

vi) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, si $M \neq 0$

Teorema 1.4.2: Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, donde L≥0 y n cualquier entero positivo ó L<0 y n cualquier entero positivo impar.

NOTA: Ahora bien, al calcular los límites en la mayoría de los ejemplos, se tiene que considerar lo siguiente:

a. ¿Qué significa x→α?, quiere decir que x debe asumir o ser reemplazado por el valor de α, es decir x→α equivale x=α, la flecha se entiende como una igualdad, porque se aproxima tanto que esta pegadita o ya es casi α (pero esta sustitución es para efectos de cálculo).

b. Cuando substituyas el valor de x, por el de α, si te resulta un valor numérico incluido el 0, ya es una respuesta y en caso de no ser así, tal vez se genere una indeterminación en la forma siguiente, es decir, $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};\infty-\infty,0.\infty,0^0,1^\infty\ y\ \infty^0$. En este caso, tienes que salvar la indeterminación.

c. ¿Qué es salvar la indeterminación? En general la indeterminación esta generada por el factor (x-α) que resulta de (x→α), es decir, la flecha de convergencia "→", ahora significa el signo menos, y lo que tienes que encontrarla utilizando procesos algebraicos (factorizaciones de aspa simple, Ruffini y otros) y siempre tiene que estar una en el numerador y otra en el denominador (como fracción), y luego lo simplificamos.

d. Una vez simplificada los factores que generan la indeterminación, no te interese que valor o términos te queden, finalmente se sustituye el valor de x por el de α, y tendrás un resultado. ¡¡¡Practícalo!!!

1.5 Calculo de límites

1. Calcular: $\lim_{x\to 2} f(x)$ donde $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & si\ x\neq 2\\ 5 & , si\ x=2\end{cases}$

Solución:

Aplicando diferencia de cuadrados:

$$x^2-2^2=(x-2)(x+2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

eliminando (x-2) y llevando al límite (significa reemplazar el valor de x por 2) se tendrá:

$$\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

2. Calcular: $\lim_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^6-1}$

Solución:

Desarrollando los factores (x^5-1) *y* (x^6-1)en:

$$(x^5-1)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$(x^6-1)=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^5-1)}{(x^6-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}=\frac{5}{6}$$

3. Calcular: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^7 - a^7}{x^3 - a^3}$

Solución:

Desarrollando los factores (x^7-α^7) y (x^3-α^3) en:

$$(x^7 - a^7) = (x - a)\left(x^6 + x^5a + x^4a^2 + x^3a^3 + x^2a^4 + xa^5 + a^6\right)$$
$$(x^3 - a^3) = (x - a)\left(x^2 + xa + a^2\right)$$

Multiplicando por su conjugada de las raíces tanto al numerador, como al denominador se tendrá

$$\lim_{x \to a} \frac{x^7 - a^7}{x^3 - a^3} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^6 + x^5a + x^4a^2 + x^3a^3 + x^2a^4 + xa^5 + a^6)}{(x-a)(x^2 + ax + a^2)} =$$

$$= \frac{a^6 + a^6 + a^6 + a^6 + a^6 + a^6 + a^6}{a^2 + a^2 + a^2} = \qquad = \frac{7a^6}{3a^2} = \frac{7}{3}a^4$$

4. Calcular: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$

Solución:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6}\right)}{\left(x^2 - 4x + 3\right)\left(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6}\right)} =$$

ahora, por la diferencia de cuadrados

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 2x + 6) - (x^2 + 2x - 6)}{(x-3)(x-1)\left(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-4(x-3)}{(x-3)(x-1)\left(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2 - 2x + 6} + \sqrt{x^2 + 2x - 6}\right)} =$$

$$= \frac{-4}{(3-1)\left(\sqrt{3^2-2(3)+6}+\sqrt{3^2+2(3)-6}\right)} =$$

$$= \frac{-4}{(2)\left(\sqrt{9-6+6}+\sqrt{9+6-6}\right)} = \frac{-4}{(2)(3+3)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

5. Calcular: $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+4}{(x-8)^2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+4}{(x-8)^2} = \lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-4\left(\sqrt[3]{x}\right)+4}{(x-8)^2} = \lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)^2}{(x-8)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)^2\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)^2}{(x-8)^2\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)^2} = = \lim_{x\to 8}\frac{(x-8)^2}{(x-8)^2\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)^2} = \frac{1}{(4+4+4)^2} = \frac{1}{144}$$

6. Calcular: $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

Solución:

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} =$$

Sacando el mínimo común múltiplo (mcm) de los radicales 2 y 3 se tiene: m.c.m. (2,3)=6; luego este valor pasa a ser el exponente de la nueva variable “*y*”, es decir:

$$x = y^6 \quad \textit{además si } x \to 64 \Rightarrow y \to 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y^6} = y^{6/2} = y^3$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y^6} = y^{6/3} = y^2$$

Luego:

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{y\to 2}\frac{(y^3-8)}{(y^2-4)} =$$

$$= \lim_{y\to 2}\frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)} = \lim_{y\to 2}\frac{(y^2+2y+4)}{(y+2)} = = \frac{(2^2+2(2)+4)}{(2+2)} = \frac{12}{4} = 3$$

7. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

Solución:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} =$$

Sacando el mínimo común múltiplo (mcm) de los radicales 3 y 4 se tiene: m.c.m. (3,4)=12; luego este valor pasa a ser el exponente de la nueva variable "*y*", es decir:

$$x = y^{12} \quad \textit{además si } x \to 1 \Rightarrow y \to 1$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y^{12}} = y^{12/3} = y^4$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{y^{12}} = y^{12/4} = y^3$$

luego:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim_{y \to 1} \frac{y^4-1}{y^3-1} = \lim_{y \to 1} \frac{(y-1)(y^3+y^2+y+1)}{(y-1)(y^2+y+1)} =$$

$$= \frac{1+1+1+1}{1+1+1} = \frac{4}{3}$$

8. Calcular: $\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8}$

Solución:

$$\lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2}{x-8} = \lim_{x \to 8} \frac{\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}-2\right)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2\right)}{(x-8)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{\left(\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}\right)^2-2^2\right)}{(x-8)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{\left(2+\sqrt[3]{x}-4\right)}{(x-8)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)}{(x-8)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{(x-8)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)} =$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)}{(x-8)\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}+2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt[3]{8}}+2\right)\left(\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{2+2}+2\right)(4+2(2)+4)}=\frac{1}{(4)(4+4+4)}=\frac{1}{4(12)}=\frac{1}{48}$$

9. Calcular: $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{5x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-3x+2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{5x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-3x+2}=$$

Aumentando y quitando 2 en el numerador, además de factorizar el denominador se tiene:

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{5x+3}-2-\sqrt{3x+1}+2}{-\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}}_{A}-\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{5x+3}-2}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}}_{B}=$$

Ahora hallando por separado

Parte A:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+1-4)}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\frac{3\left(\sqrt{1}+1\right)}{\left(3\sqrt{1}+2\right)\left(\sqrt{3(1)+1}+2\right)}=$$

$$=\frac{3(2)}{(3+2)\left(\sqrt{4}+2\right)}=\frac{3(2)}{(5)(4)}=\frac{3}{(5)(2)}=\frac{3}{10}$$

Parte B:

$$B=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{5x+3}-2\right)\left(\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right)}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(5x+3-8)}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5(x-1)}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{5\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt[3]{(5x+3)^2}+2\sqrt[3]{5x+3}+4\right)}=$$

$$=\frac{5\left(\sqrt{1}+1\right)}{\left(3\sqrt{1}+2\right)\left(\sqrt[3]{(5(1)+3)^2}+2\sqrt[3]{5(1)+3}+4\right)}=$$

$$=\frac{5(2)}{(3+2)\left(\sqrt[3]{(8)^2}+2\sqrt[3]{8}+4\right)}=\frac{5(2)}{(5)(4+4+4)}=\frac{1}{6}$$

De las partes A y B, se tiene:

$$\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}}_{A}-\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{5x+3}-2}{\left(3\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}}_{B}==\frac{18-10}{60}=\frac{2}{15}$$

10. Calcular: $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a},\ \ a>0$

Solución:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}\right)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{ax^{n-2}}+\sqrt[n]{a^2x^{n-3}}+\ldots+\sqrt[n]{a^{n-2}x}+\sqrt[n]{a^{n-1}}\right)}{(x-a)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{ax^{n-2}}+\sqrt[n]{a^2x^{n-3}}+\ldots+\sqrt[n]{a^{n-2}x}+\sqrt[n]{a^{n-1}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(x-a)\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{ax^{n-2}}+\sqrt[n]{a^2x^{n-3}}+\ldots+\sqrt[n]{a^{n-2}x}+\sqrt[n]{a^{n-1}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{ax^{n-2}}+\sqrt[n]{a^2x^{n-3}}+\ldots+\sqrt[n]{a^{n-2}x}+\sqrt[n]{a^{n-1}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a.a^{n-2}}+\sqrt[n]{a^2a^{n-3}}+\ldots+\sqrt[n]{a^{n-2}a}+\sqrt[n]{a^{n-1}}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\underbrace{\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-1}}+\ldots+\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-1}}\right)}_{n-\text{términos}}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

11. Calcular: $\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{1-\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{1-\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left(2-\sqrt{x-1}\right).A.B}{\left(1-\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}\right).B.A}=$$

Donde:

$$A=\left(2+\sqrt{x-1}\right)$$

$$B=\left(1+\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{x-1}\right)}+\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2}\right)$$

Además, aplicando las conjugadas y simplificando, se tiene:

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left[4-(x-1)\right].B}{\left[1-\left(3-\sqrt{x-1}\right)\right].A}=\lim_{x\to 5}\frac{(5-x).B}{\left(1-3+\sqrt{x-1}\right).A}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-(x-5).B}{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{-(x-5).B}{(x-1-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)\left(1+\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{x-1}\right)}+\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2}\right)}{(x-5)}==-\frac{1+1+1}{1}=-3$$

12. Calcular: $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+7}-\sqrt{8}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+7}-\sqrt{8}}==\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x+7}-2\right)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{8}\right)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+7-8)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{8}\right)}{(x+7-8)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}=\frac{\left(\sqrt{1+7}+\sqrt{8}\right)}{\left(\sqrt[3]{(1+7)^2}+2\sqrt[3]{1+7}+4\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{8}+\sqrt{8}\right)}{(4+4+4)}=\frac{2\sqrt{8}}{12}=\frac{4\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

13. Calcular: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+27}-3\right)\left(\sqrt[3]{(x+27)^2}+\sqrt[3]{x+27}.(3)+9\right)\left(\sqrt[4]{x+16}+2\right)}{\left(\sqrt[4]{x+16}-2\right)\left(\sqrt[4]{x+16}+2\right)\left(\sqrt[3]{(x+27)^2}+\sqrt[3]{x+27}.(3)+9\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+27-27)\left(\sqrt[4]{x+16}+2\right)}{\left(\sqrt{x+16}-4\right)\left(\sqrt[3]{(x+27)^2}+\sqrt[3]{x+27}.(3)+9\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x)\left(\sqrt[4]{x+16}+2\right)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x+16}-4\right)\left(\sqrt{x+16}+4\right)\left(\sqrt[3]{(x+27)^2}+\sqrt[3]{x+27}.(3)+9\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x)\left(\sqrt[4]{x+16}+2\right)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}{(x+16-16)\left(\sqrt[3]{(x+27)^2}+\sqrt[3]{x+27}.(3)+9\right)}==\lim_{x\to 0}\frac{(x)\left(\sqrt[4]{x+16}+2\right)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}{(x)\left(\sqrt[3]{(x+27)^2}+\sqrt[3]{x+27}.(3)+9\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{0+16}+2\right)\left(\sqrt{0+16}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{(0+27)^2}+\sqrt[3]{0+27}.(3)+9\right)}=\frac{(2+2)(4+4)}{(9+9+9)}=\frac{32}{27}$$

14. Calcular: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{8-x}}{3x-2\sqrt{15-3x}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x}-\sqrt{8-x}}{3x-2\sqrt{15-3x}}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{8-x}\right)\left(3x+2\sqrt{15-3x}\right)}{\left(3x-2\sqrt{15-3x}\right)\left(3x+2\sqrt{15-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{8-x}\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{8-x}\right)\left(3x+2\sqrt{15-3x}\right)}{\left(9x^2-4(15-3x)\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{8-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-(8-x))\left(3x+2\sqrt{15-3x}\right)}{\left(9x^2-4(15-3x)\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{8-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-8+x)\left(3x+2\sqrt{15-3x}\right)}{\left(9x^2-60+12x\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{8-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)\left(3x+2\sqrt{15-3x}\right)}{3\left(3x^2+4x-20\right)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{8-x}\right)}=$$

En términos de factores

$$\left(3x^2+4x-20\right)=(3x+10)(x-2)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)\left(3x+2\sqrt{15-3x}\right)}{3(3x+10)(x-2)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{8-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4\left(3x+2\sqrt{15-3x}\right)}{3(3x+10)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{8-x}\right)}=\frac{4\left(3(2)+2\sqrt{15-3(2)}\right)}{3(3(2)+10)\left(\sqrt{3(2)}+\sqrt{8-2}\right)}=$$

$$=\frac{4\left(6+2\sqrt{9}\right)}{3(6+10)\left(\sqrt{6}+\sqrt{6}\right)}=\frac{4(6+6)}{3(16)\left(2\sqrt{6}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$$

15. Calcular: $\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$

Solución:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(4+h)^2+4}-\frac{1}{4^2+4}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{16+8h+h^2+4}-\frac{1}{16+4}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{20-(16+8h+h^2+4)}{(16+8h+h^2+4)(20)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{20-16-8h-h^2-4}{(20+8h+h^2)(20)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h(8+h)}{(20)h(20+8h+h^2)}=\lim_{h\to 0}\frac{-(8+h)}{(20)(20+8h+h^2)}=$$

$$=\frac{-(8+0)}{(20)(20+8(0)+0^2)}=\frac{-8}{(20)(20)}=-\frac{1}{50}$$

16. Calcular: $\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$, $f(1-2x)=8x^2$

Solución:

Sea $f(1\text{-}2x)=8x^2$, además:

$$1-2x=(x')$$
$$-2x=(x')-1$$
$$x=\frac{1-(x')}{2}$$

Que representa a la nueva variable x:

$$\Rightarrow f(x)=8\left(\frac{1-x}{2}\right)^2$$
$$f(x)=\frac{8(1-2x+x^2)}{4}=2(1-2x+x^2)$$

Por tanto:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\left[1-2(-1+h)+(-1+h)^2\right]-2\left[1-2(-1)+(-1)^2\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\left[1+2-2h+1-2h+h^2\right]-2\left[1+2+1\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\left[4-4h+h^2\right]-2\left[4\right]}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{8-8h+2h^2-8}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-8h+2h^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-8+2h}{1}=-8$$

17. Calcular: $\lim_{a\to b}\frac{\sqrt{x^2+2ax+a^2}+\sqrt[3]{x^3+(a-b)/3}-2x-b}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x+b}}$

Solución:

$$\lim_{a\to b}\frac{\sqrt{x^2+2ax+a^2}+\sqrt[3]{x^3+(a-b)/3}-2x-b}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x+b}}=$$

$$=\lim_{a\to b}\frac{\sqrt{(x+a)^2}-2x-b+\sqrt[3]{x^3+(a-b)/3}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x+b}}=$$

$$=\lim_{a\to b}\frac{a-x-b+\sqrt[3]{x^3+(a-b)/3}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x+b}}=$$

$$=\lim_{a\to b}\frac{(a-b)+\sqrt[3]{x^3+(a-b)/3}-x}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x+b}}=$$

$$=\lim_{a\to b}\frac{(a-b)}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x+b}}+\lim_{a\to b}\frac{\sqrt[3]{x^3+(a-b)/3}-x}{\sqrt{a+x}-\sqrt{x+b}}=$$

$$=\lim_{a\to b}\frac{(a-b)\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)}{\left(\sqrt{a+x}-\sqrt{x+b}\right)\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)}$$

$$+\lim_{a\to b}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+(a-b)/3}-x\right)\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)}{\left(\sqrt{a+x}-\sqrt{x+b}\right)\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)}=$$

$$=\lim_{a\to b}\frac{(a-b)\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)}{(a+x-(x+b))}$$

$$+\lim_{a\to b}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+(a-b)/3}-x\right)\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)}{(a+x-(x+b))}=$$

$$=\lim_{a\to b}\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)$$

$$+\lim_{a\to b}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+(a-b)/3}-x\right)P\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)}{(a+x-(x+b))P}=$$

Donde $P=\left(\sqrt[3]{\left(x^3+\frac{a-b}{3}\right)^2}+x\sqrt[3]{\left(x^3+\frac{a-b}{3}\right)}+x^2\right)$ que es la conjugada de la raíz cúbica, luego:

$$=\lim_{a\to b}\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)$$

$$+\lim_{a\to b}\frac{\left(x^3+(a-b)/3-x^3\right)\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)}{(a-b)P}=$$

$$=\lim_{a\to b}\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)+\lim_{a\to b}\frac{(a-b)\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)}{3(a-b)P}=$$

$$=\lim_{a\to b}\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)$$

$$+\lim_{a\to b}\frac{\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{x+b}\right)}{3\left(\sqrt[3]{\left(x^3+\frac{a-b}{3}\right)^2}+x\sqrt[3]{\left(x^3+\frac{a-b}{3}\right)}+x^2\right)}=$$

$$=\left(\sqrt{b+x}+\sqrt{x+b}\right)$$

$$+\frac{\left(\sqrt{b+x}+\sqrt{x+b}\right)}{3\left(\sqrt[3]{\left(x^3+\frac{b-b}{3}\right)^2}+x\sqrt[3]{\left(x^3+\frac{b-b}{3}\right)}+x^2\right)}=$$

$$=\left(2\sqrt{b+x}\right)+\frac{\left(2\sqrt{b+x}\right)}{3\left(\sqrt[3]{\left(x^3\right)^2}+x\sqrt[3]{\left(x^3\right)}+x^2\right)}=$$

$$=\left(2\sqrt{b+x}\right)+\frac{\left(2\sqrt{b+x}\right)}{3\left(x^2+x^2+x^2\right)}=$$

$$=\left(2\sqrt{b+x}\right)+\frac{2\sqrt{b+x}}{9x^2}=\frac{2\sqrt{b+x}\left(1+9x^2\right)}{9x^2}$$

18. Calcular: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+\sqrt[3]{x-2}-4}{\sqrt[3]{4-x\sqrt{3x-2}}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4+\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{4-x\sqrt{3x-2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)+\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{4-x\sqrt{3x-2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^3}(x+2)+\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{4-x\sqrt{3x-2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)}\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}(x+2)+1\right)}{\sqrt[3]{4-x\sqrt{3x-2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{(x-2)}{4-x\sqrt{3x-2}}}.\lim_{x\to 2}\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}(x+2)+1\right)=$$

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{4-x\sqrt{3x-2}}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(4+x\sqrt{3x-2}\right)}{\left(4-x\sqrt{3x-2}\right)\left(4+x\sqrt{3x-2}\right)}}=$$

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(4+x\sqrt{3x-2}\right)}{\left(16-x^2(3x-2)\right)}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(4+x\sqrt{3x-2}\right)}{\left(16-2x^2-3x^3\right)}}=$$

Factorizando el denominador de la raíz cúbica por Ruffini:

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(4+x\sqrt{3x-2}\right)}{-(x-2)\left(3x^2+4x+8\right)}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\frac{\left(4+x\sqrt{3x-2}\right)}{-\left(3x^2+4x+8\right)}}=$$

$$=\sqrt[3]{-\lim_{x\to 2}\frac{4+x\sqrt{3x-2}}{3x^2+4x+8}}=-\sqrt[3]{\frac{4+2\sqrt{3(2)-2}}{3(2)^2+4(2)+8}}=-\sqrt[3]{\frac{4+2(2)}{12+8+8}}=$$

$$=-\sqrt[3]{\frac{8}{28}}=-\sqrt[3]{\frac{2}{7}}=-\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{7}}$$

19. Calcular: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3x}-3}$

Solución:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{9x}-3}{\sqrt{3x}-3}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt[3]{9x}-3\right)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}+\sqrt[3]{9x}.3+9\right)\left(\sqrt{3x}+3\right)}{\left(\sqrt{3x}-3\right)\left(\sqrt{3x}+3\right)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}+\sqrt[3]{9x}.3+9\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(9x-27)\left(\sqrt{3x}+3\right)}{(3x-9)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}+\sqrt[3]{9x}.3+9\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\overset{3}{\cancel{9}}(x-3)\left(\sqrt{3x}+3\right)}{\underset{1}{\cancel{3}}(x-3)\left(\sqrt[3]{(9x)^2}+\sqrt[3]{9x}.3+9\right)}=$$

$$=\frac{3(3+3)}{(9+9+9)}=\frac{\cancel{3}\left(\overset{2}{\cancel{6}}\right)}{\cancel{3}\left(\underset{3}{\cancel{9}}\right)}=\frac{2}{3}$$

20. Calcular: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+\sqrt[3]{x-3}-9}{\sqrt[3]{9-x\sqrt{4x-3}}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+\sqrt[3]{x-3}-9}{\sqrt[3]{9-x\sqrt{4x-3}}}=$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\left(x^2 - 9\right) + \sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[3]{9 - x\sqrt{4x-3}}} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3) + \sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[3]{9 - x\sqrt{4x-3}}} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt[3]{(x-3)}\right)^3 (x+3) + \sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[3]{9 - x\sqrt{4x-3}}} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt[3]{x-3}\left(\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^2 (x+3) + 1\right)}{\sqrt[3]{9 - x\sqrt{4x-3}}} =$$

$$= \left(\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{\frac{(x-3)}{\left(9 - x\sqrt{4x-3}\right)}} \right) . \left\{ \lim_{x \to 3} \left[\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^2 (x+3) + 1 \right] \right\} =$$

$$= \left(\lim_{x \to 3} \sqrt[3]{\frac{(x-3)\left(9 + x\sqrt{4x-3}\right)}{\left[81 - x^2 (4x-3)\right]}} \right) .(1) =$$

$$= \lim_{x \to 3} \sqrt[3]{\frac{(x-3)\left(9 + x\sqrt{4x-3}\right)}{\left(81 - 4x^3 + 3x^2\right)}} = \lim_{x \to 3} \sqrt[3]{\frac{(x-3)\left(9 + x\sqrt{4x-3}\right)}{-\left(4x^3 - 3x^2 - 81\right)}} =$$

por Ruffini

$$4x^3 - 3x^2 - 81 = 4x^3 - 3x^2 + 0x - 81$$

	4	-3	0	-81
3		12	27	81
	4	9	27	0

$$\Rightarrow 4x^3 - 3x^2 - 81 = (x-3)\left(4x^2 + 9x + 27\right)$$

Luego:

$$=\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{\frac{(x-3)\left(9+x\sqrt{4x-3}\right)}{-(x-3)\left(4x^2+9x+27\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{\frac{9+x\sqrt{4x-3}}{-\left(4x^2+9x+27\right)}}=\sqrt[3]{\frac{9+3(3)}{-(36+27+27)}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{18}{-(90)}}=-\sqrt[3]{\frac{6}{30}}=-\sqrt[3]{\frac{2}{10}}=-\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$$

21. Calcular: $\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{2x-3}}{2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1-\sqrt{2x-3}}{2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(1-\sqrt{2x-3}\right)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}{\left(2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}\right)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left[1-(2x-3)\right]}{\left(2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}\right)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(1-2x+3)\left(4+2\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}+\sqrt[3]{\left(9-\sqrt{2x-3}\right)^2}\right)}{\left(8-9+\sqrt{2x-3}\right)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)\left(4+2\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}+\sqrt[3]{\left(9-\sqrt{2x-3}\right)^2}\right)}{\left(\sqrt{2x-3}-1\right)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)\Delta.\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}{2(x-2)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}=$$

Donde:

$$\Delta=\left(4+2\sqrt[3]{9-\sqrt{2x-3}}+\sqrt[3]{\left(9-\sqrt{2x-3}\right)^2}\right)$$

luego,

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2).\Delta.\left(\sqrt{2x-3}+1\right)}{2(x-2)\left(1+\sqrt{2x-3}\right)}=$$

$$=\frac{-\left[(4+2(2))+4\right](\cancel{2})}{\cancel{2}}=-12$$

22. Calcular: $\lim_{x\to 1}\frac{|x^3-1|}{|x-1|+|x-1|^2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x^3-1|}{|x-1|+|x-1|^2}=\lim_{x\to 1}\frac{|(x-1)(x^2+x+1)|}{|x-1|(1+|x-1|)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1||x^2+x+1|}{|x-1|(1+|x-1|)}=\lim_{x\to 1}\frac{|x^2+x+1|}{(1+|x-1|)}=\frac{|1^2+1+1|}{(1+|1-1|)}=3$$

23. Calcular: $\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\sqrt[m]{x-1}-1}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)\left(\frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\sqrt[m]{x-1}-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right).\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\sqrt[m]{x-1}-1}=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)}{\left(3-\sqrt{x^2+5}\right)}}_{A}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[4]{x-1}-1\right)}{\left(\sqrt[m]{x-1}-1\right)}}_{B}=$$

Desarrollando por partes el producto de límites:

Parte A:

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{\left(3-\sqrt{x^2+5}\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{\left[9-\left(x^2+5\right)\right]} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(4-x^2\right)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}{\left(9-x^2-5\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(3+\sqrt{x^2+5}\right) = \left(3+\sqrt{2^2+5}\right) = (3+3) = 6$$

Parte B:

$$B = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt[n]{x-1}-1\right)}{\left(\sqrt[m]{x-1}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-1-1)\left(\sqrt[m]{(x-1)^{m-1}}+\sqrt[m]{(x-1)^{m-2}}+\sqrt[m]{(x-1)^{m-3}}+\ldots+1\right)}{(x-1-1)\left(\sqrt[n]{(x-1)^{n-1}}+\sqrt[n]{(x-1)^{n-2}}+\sqrt[n]{(x-1)^{n-3}}+\ldots+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt[m]{(x-1)^{m-1}}+\sqrt[m]{(x-1)^{m-2}}+\sqrt[m]{(x-1)^{m-3}}+\ldots+1\right)}{\left(\sqrt[n]{(x-1)^{n-1}}+\sqrt[n]{(x-1)^{n-2}}+\sqrt[n]{(x-1)^{n-3}}+\ldots+1\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt[m]{(1)^{m-1}}+\sqrt[m]{(1)^{m-2}}+\sqrt[m]{(1)^{m-3}}+\ldots+1\right)}{\left(\sqrt[n]{(1)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1)^{n-2}}+\sqrt[n]{(1)^{n-3}}+\ldots+1\right)} =$$

$$= \frac{\overbrace{\left(\sqrt[m]{(1)^{m-1}}+\sqrt[m]{(1)^{m-2}}+\sqrt[m]{(1)^{m-3}}+\ldots+1\right)}^{\text{m-ésimos 1}}}{\underbrace{\left(\sqrt[n]{(1)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1)^{n-2}}+\sqrt[n]{(1)^{n-3}}+\ldots+1\right)}_{\text{n-ésimos 1}}} = \frac{m}{n}$$

Por último multiplicando A y B:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right)\left(\frac{\sqrt[n]{x-1}-1}{\sqrt[m]{x-1}-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left(\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\right).\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt[n]{x-1}-1}{\sqrt[m]{x-1}-1}\right) = A.B = 6.\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{6m}{n}$$

24. Calcular: $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{1-x}+\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{-(x-1)}}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{-(x-1)}{x^2-3x+2}}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}}=$$

factorizando por aspa simple,

$$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$

$$\begin{array}{ccc} x & & -2 \\ & \times & \\ x & & -1 \end{array}$$

luego,

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{-(x-1)}{(x-2)(x-1)}}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{-1}{(x-2)}}+\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\sqrt[3]{(x-2)}}+\lim_{x\to 1}\frac{(x+3-4)}{\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\sqrt[3]{(x-2)}}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^3}}{\sqrt[3]{(x-2)(x-1)}\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\sqrt[3]{(x-2)}}+\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^3}{(x-2)(x-1)}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\sqrt[3]{(x-2)}}+\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x-2)}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt[3]{(1-2)}}+\sqrt[3]{\frac{(1-1)^2}{(1-2)}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{1+3}+2\right)}=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt[3]{-1}}+\sqrt[3]{\frac{(0)^2}{(-1)}}\cdot\frac{1}{(2+2)}=\frac{-1}{-1}+0\cdot\frac{1}{4}=1+0=1$$

25. Calcular: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{\sqrt[18]{x+1}+\sqrt[24]{x+1}-2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-3\sqrt[6]{x+1}+2}{\sqrt[18]{x+1}+\sqrt[25]{x+1}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+1}-1-3\sqrt[6]{x+1}+3}{\sqrt[18]{x+1}-1+\sqrt[25]{x+1}-1}=$$

Dividiendo entre "*x*" al numerador, como al denominador y asociando,

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt[5]{x+1}-1}{x}-\dfrac{3\left(\sqrt[6]{x+1}-1\right)}{x}}{\dfrac{\sqrt[18]{x+1}-1}{x}+\dfrac{\sqrt[25]{x+1}-1}{x}}=$$

multiplicando las conjugadas para:

$$\left(\sqrt[5]{x+1}-1\right) es \left(\sqrt[5]{(x+1)^4}+\sqrt[5]{(x+1)^3}+\sqrt[5]{(x+1)^2}+...+1\right)$$

$$\left(\sqrt[6]{x+1}-1\right) es \left(\sqrt[6]{(x+1)^5}+\sqrt[6]{(x+1)^4}+\sqrt[6]{(x+1)^3}+...+1\right)$$

$$\left(\sqrt[18]{x+1}-1\right) es \left(\sqrt[18]{(x+1)^{17}}+\sqrt[18]{(x+1)^{16}}+\sqrt[18]{(x+1)^{15}}+...+1\right)$$

$$\left(\sqrt[25]{x+1}-1\right) es \left(\sqrt[25]{(x+1)^{24}}+\sqrt[25]{(x+1)^{24}}+\sqrt[25]{(x+1)^{23}}+...+1\right)$$

talque,

$$\left(\sqrt[5]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[5]{(x+1)^4}+\sqrt[5]{(x+1)^3}+...+1\right)=(x+1-1)=x$$

$$\left(\sqrt[6]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[6]{(x+1)^5}+\sqrt[6]{(x+1)^4}+...+1\right)=(x+1-1)=x$$

Haciendo

$$\left(\sqrt[18]{x+1}-1\right) es \left(\sqrt[18]{(x+1)^{17}}+\sqrt[18]{(x+1)^{16}}+...+1\right)=(x+1-1)=x$$

$$\left(\sqrt[25]{x+1}-1\right) es \left(\sqrt[25]{(x+1)^{24}}+\sqrt[25]{(x+1)^{24}}+...+1\right)=(x+1-1)=x$$

$$A=\left(\sqrt[5]{(x+1)^4}+\sqrt[5]{(x+1)^3}+...+1\right)$$

$$B=\left(\sqrt[6]{(x+1)^5}+\sqrt[6]{(x+1)^4}+...+1\right)$$

$$C=\left(\sqrt[18]{(x+1)^{17}}+\sqrt[18]{(x+1)^{16}}+\ldots+1\right)$$

$$D=\left(\sqrt[25]{(x+1)^{24}}+\sqrt[25]{(x+1)^{24}}+\ldots+1\right)$$

entonces,

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\left(\sqrt[5]{x+1}-1\right).A}{x.A}-\dfrac{3\left(\sqrt[6]{x+1}-1\right).B}{x.B}}{\dfrac{\left(\sqrt[18]{x+1}-1\right).C}{x.C}+\dfrac{\left(\sqrt[25]{x+1}-1\right).D}{x.D}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}.A}-\dfrac{3(\cancel{x})}{\cancel{x}.B}}{\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}.C}+\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}.D}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{A}-\dfrac{3}{B}}{\dfrac{1}{C}+\dfrac{1}{D}}=$$

luego, llevando al límite $x\to 0$

$$A=\left(\sqrt[5]{(0+1)^{4}}+\sqrt[5]{(0+1)^{3}}+\ldots+1\right)=5$$

$$B=\left(\sqrt[6]{(0+1)^{5}}+\sqrt[6]{(0+1)^{4}}+\ldots+1\right)=6$$

$$C=\left(\sqrt[18]{(0+1)^{17}}+\sqrt[18]{(0+1)^{16}}+\ldots+1\right)=18$$

$$D=\left(\sqrt[25]{(0+1)^{24}}+\sqrt[25]{(0+1)^{24}}+\ldots+1\right)=25$$

$$=\frac{\dfrac{1}{5}-\dfrac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}}{\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{25}}=\frac{\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{25}}=\frac{\dfrac{2-5}{(\cancel{5})(\cancel{2})}}{\dfrac{25+18}{(\underset{5}{25})(\underset{9}{18})}}=\frac{\dfrac{-3}{1}}{\dfrac{43}{(5)(9)}}=-\frac{135}{43}$$

26. Calcular: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3}+3\sqrt{x}-3x-1}{x+3\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^2}-1}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^3}+3\sqrt{x}-3x-1}{x+3\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^2}-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-3\left(\sqrt{x}\right)^2+3\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+3\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3\left(\sqrt{x+1}\right)^3\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)^3}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)^3\left(\sqrt{x+1}\right)^3}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^3\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)^3}{(x-1)^3\left(\sqrt{x}+1\right)^3}=\frac{(1+1+1)^3}{(1+1)^3}=\frac{(3)^3}{(2)^3}=\frac{27}{8}$$

27. Si $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x+2)}{\sqrt{-2x}-2}=8$ y $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x+2)}{x^2-4}=3$

Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución:

Si $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x+2)}{\sqrt{-2x}-2}=8$, luego:

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x+2)}{\left(\sqrt{-2x}-2\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}f(x+2)}{\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt{-2x}-2\right)}=8$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to -2}f(x+2)=8\lim_{x\to -2}\left(\sqrt{-2x}-2\right)$$

Si $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{g(x+2)}{x^2-4}=3$, luego:

$$\lim_{x\to -2}\frac{g(x+2)}{\left(x^2-4\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}g(x+2)}{\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-4\right)}=3$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to -2}g(x+2)=3\lim_{x\to -2}\left(x^2-4\right)$$

Se sabe que si el nuevo *x*= *x* +2 ⇒x-2=*x*, así que

x→-2⇒x+2→0

además,

$$\lim_{x\to -2}f(x+2)=8\lim_{x\to -2}\left(\sqrt{-2x}-2\right)=\lim_{x\to 0}f(x)$$

$$\lim_{x\to -2}g(x+2)=3\lim_{x\to -2}\left(x^2-4\right)=\lim_{x\to 0}g(x)$$

luego,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}f(x)}{\lim\limits_{x\to 0}g(x)}=\frac{8\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt{-2x}-2\right)}{3\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-4\right)}=$$

$$=\frac{8}{3}\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{-2x}-2\right)}{\left(x^2-4\right)}=\frac{8}{3}\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{-2x}-2\right)\left(\sqrt{-2x}+2\right)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{-2x}+2\right)}=$$

$$=\frac{8}{3}\lim_{x\to -2}\frac{(-2x-4)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{-2x}+2\right)}=$$

$$=\frac{8}{3}\lim_{x\to -2}\frac{-2(x+2)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{-2x}+2\right)}=$$

$$=\frac{8}{3}\lim_{x\to -2}\frac{-2}{(x-2)\left(\sqrt{-2x}+2\right)}=\frac{8}{3}\cdot\frac{-2}{(-2-2)\left(\sqrt{-2(-2)}+2\right)}=$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\frac{-\overset{1}{\cancel{2}}}{(-\underset{2}{\cancel{4}})(2+2)}=\frac{\cancel{8}}{3(\cancel{2})(\cancel{4})}=\frac{1}{3}$$

28. Si: $f(x)=x-2$ y $g(x+1)=x^2-x$ calcular

$$\lim_{x\to 2}\frac{(f\circ g)(x+1)}{(g\circ f)(x+2)}$$

Solución:

$$(f\circ g)(x+1)=f\left[g(x+1)\right]=x-2$$
$$=g(x+1)-2$$
$$=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

como $g(x+1)=x^2-x=x(x-1)$,

entonces $g(x)=(x-1)(x-2)$

$$\Rightarrow g(x)=(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$$

luego,

$$(g\circ f)(x+2)=g\left[f(x+2)\right]=x^2-3x+2$$
$$=\left[f(x+2)\right]^2-3\left[f(x+2)\right]+2,$$

$si\ f(x+2)=x,\Rightarrow$

$$(g\circ f)(x+2)=x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$

entonces,

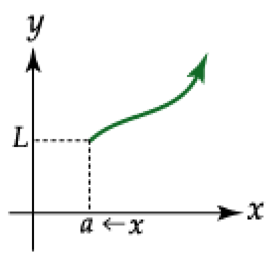
$$\lim_{x\to 2}\frac{(f\circ g)(x+1)}{(g\circ f)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)}=\frac{3}{1}=3$$

1.6 Limites laterales o unilaterales

Cuando se resuelve $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, el problema se reduce a encontrar el número L, al cual se aproximan los valores de ƒ(x) cuando x tiende hacia α, tanto para valores menores que α(por la izquierda de α), como para valores mayores que α (por la derecha de α).

1.6.1 Límite por la derecha

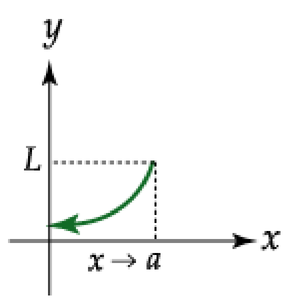
Se dice que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ si y solo si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si b$0<x-\alpha<\delta$ entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$, L es el límite por la derecha de ƒ(x) en α.



Se tiene que indicar, no hay valor absoluto alrededor de x-α, puesto que x-α es mayor que cero, puesto que x>α.

1.6.2 Límite por la izquierda

Se dice que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=M$ si y solo si para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $0<\alpha-x<\delta$ entonces $|f(x)-M|<\varepsilon$, M es el límite por la izquierda de ƒ(x) en α.



Sea ƒ(x) una función definida en un intervalo $I\subset\mathbb{R}$ tal que $\alpha\epsilon I$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} f(x) = M$ entonces $L=M$.

Teorema 1.6.1: Sea f una función definida en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $a \in I$ $\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, que indica el límite de una función existe si y solo si existen los límites laterales y estos son iguales.

1.7 Calculo de límites laterales

Hallar el límite indicado si existe de:

1. Si: $f(x) = \frac{x + |1-x|}{x^2+1}$, hallar

i. $\lim_{x \to 0} f(x)$

ii. $\lim_{x \to 1} f(x)$

Solución:

i. Para que el límite exista se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \to 0} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Definiendo la función valor absoluto,

$$|1-x| = \begin{cases} -x \quad , si\ 1-x \geq 0 \\ -(1-x), si\ 1-x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x\ ,\ si\ x \leq 1 \\ -(1-x), si\ x > 1 \end{cases}$$

de la definición de valor absoluto, se puede determinar que el límite se encuentra dentro de 1-x, si x ≤1, es donde se encuentra incluido el cero.

a) Para los valores mayores o superiores a "0"

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x+1-x}{x^2+1} = \frac{1}{1} = 1$$

b) Para los valores menores o inferiores a "0"

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x+1-x}{x^2+1} = \frac{1}{1} = 1$$

Por consiguiente, de a). y b). $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ existe

ii. De igual forma que la primer parte debe cumplir: $\lim_{x \to 1} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

pero, aquí cambia las cosas, porque el punto de tendencia, aproximación o convergencia es "1", y no se encuentra en un solo dominio, como se puede apreciar:

$$|1-x| = \begin{cases} -x \quad , si\, 1-x \geq 0 \\ -(1-x), si\, 1-x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x \;,\; si\; x \leq 1 \\ -(1-x), si\; x > 1 \end{cases}$$

a) Para valores mayores a "1", será de la forma -(1-x), *porque x*>1

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-(1-x)}{x^2+1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1+x}{x^2+1} == \lim_{x \to 1^+} \frac{2x-1}{x^2+1} = \frac{2(1)-1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$

b) Para valores menores a "1", será de la forma 1-x, *porque x*≤1

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{x^2+1} = \frac{1}{2}$$

Por consiguiente, de a). y b). $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$ existe

2. Si: $f(x) = \begin{cases} x^2 \quad , si\; x \leq 2 \\ 8-2x, \; si\; x > 2 \end{cases}$ $\quad hallar \; \lim_{x \to 2} f(x)$

Solución:

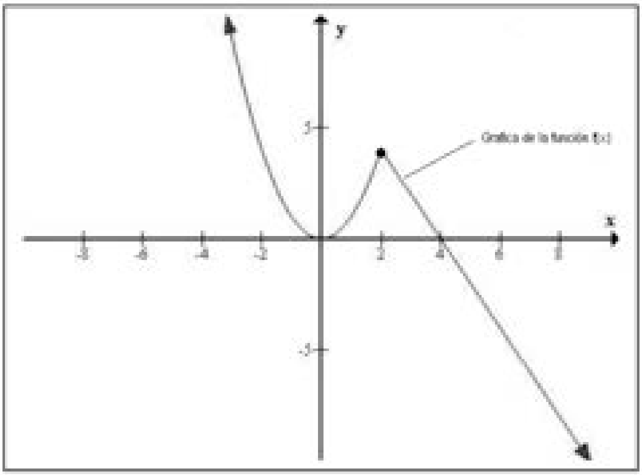
a) Considerando los valores superiores a 2(x>2), corresponde el límite

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 8-2x = 8-2(2) = 4$$

b) Considerando los valores inferiores a 2(x<2), corresponde el límite

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = (2)^2 = 4$$

Por consiguiente, de a). y b). $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ existe.



3. Si: $f(x)=\begin{cases}3+x^2 & , si\ x<-2\\ 0 & , si\ x=-2\\ 11-x^2 & , si\ x>-2\end{cases}$ $\quad hallar\ \lim\limits_{x\to -2} f(x)$

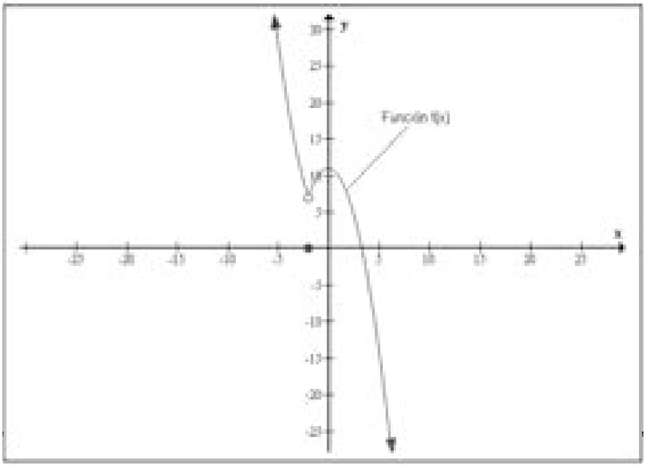
Solución:

Haciendo de forma más directa:

a) $\lim\limits_{x\to -2^+} 11-x^2 = 11-(-2)^2 = 7$

b) $\lim\limits_{x\to -2^-} 3+x^2 = 3+(-2)^2 = 7$

Por consiguiente, de a). y b). $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 7$ existe.



4. Si: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3} & , si\ x<3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+2} & , si\ x\geq 3 \end{cases}$ $\quad hallar\ \lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Solución:

De igual forma de forma directa:

a. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+3}=\dfrac{\sqrt{3+1}-1}{3+3}=\dfrac{1}{6}$

b. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3}=$

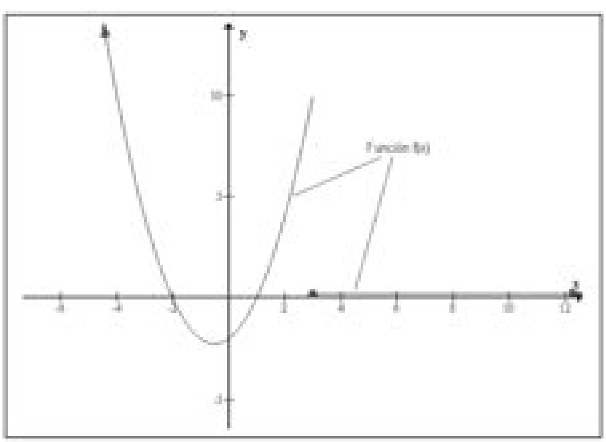
factorizando el numerador

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-1)(x^2-x-6)}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-1)(x-3)(x+2)}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to 3^-}(x-1)(x+2)=(3-1)(3+2)=10$$

Por consiguiente, de a). y b). como son diferentes $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\nexists$ no existe



5. Si: $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{1-\sqrt{x-4}} & , si\ x\geq 5\\ \dfrac{x^2-12x+35}{x-5} & , si\ x<5\end{cases}$ $\quad hallar\ \lim\limits_{x\to 5} g(x)$

Solución:

a. $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{(x-5)\left(1+\sqrt{x-4}\right)}{\left(1-\sqrt{x-4}\right)\left(1+\sqrt{x-4}\right)}=$

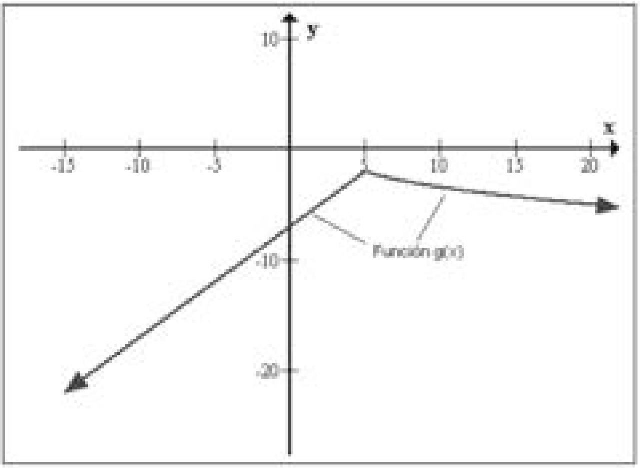
$=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{(x-5)\left(1+\sqrt{x-4}\right)}{\left(1^2-(x-4)\right)}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{(x-5)\left(1+\sqrt{x-4}\right)}{-(x-5)}=$

$=\lim\limits_{x\to 5^+}-\left(1+\sqrt{x-4}\right)=-\left(1+\sqrt{5-4}\right)=-2$

b. $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{x^2-12x+35}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{(x-5)(x-7)}{x-5}=$

$=\lim\limits_{x\to 5^-}(x-7)=5-7=-2$

Por consiguiente, de a). y b). como son iguales $\lim\limits_{x\to 5} g(x)=-2$ existe



6. Si: $h(x)=\begin{cases}6x-x^2 & , x<2\\ 6 & , x=2\\ 2x^2-x-3 & , x>2\end{cases}$ $\quad hallar\ \lim\limits_{x\to 2} h(x)$

Solución:

a) $\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x^2 - x - 3 = 3$

b) $\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} 6x - x^2 = 3$

Por consiguiente, de a). y b). como son iguales $\lim_{x\to 2} h(x) = 3$ existe

7. Si: $h(x) = \begin{cases} 1-x^2 & , x \leq 1 \\ 1 & , 1 < x \leq 2 \\ |x-3| & , x > 2 \end{cases}$ $hallar$ $\lim_{x\to 1} h(x)$ y $\lim_{x\to 2} h(x)$

Solución:

i. Determinando cuando x→1

a) $\lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$

b) $\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 - x^2 = 1 - (1)^2 = 0$

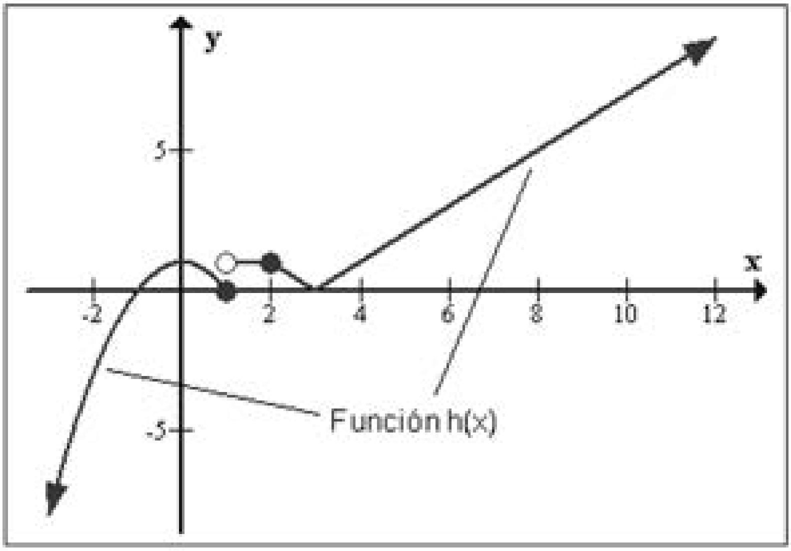
Por consiguiente, de a). y b). como son diferentes $\lim_{x\to 1} h(x)$ $\nexists$ no existe

ii. Determinando cuando x→2

a) $\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+} |x-3| = |2-3| = |-1| = 1$

b) $\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} 1 = 1$

Por consiguiente, de a). y b). como son iguales $\lim_{x\to 2} h(x) = 1$ existe.



En los siguientes ejercicios hallar el límite indicado, si existe caso contrario justificar su respuesta:

8. Hallar: $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{\sqrt[36]{x-1}-\sqrt[9]{x-1}}{3x^2-3+\sqrt[36]{x-1}}\right)\left(\dfrac{x^{3/2}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt[36]{x-1}-\sqrt[9]{x-1}}{3x^2-3+\sqrt[36]{x-1}}\right)\left(\frac{x^{3/2}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}\right)=$$

Realizando el cambio de variable, previamente el mínimo común de los radicales (2,9,36) es:

mcm{2,9,36}=36

además, este valor (36), pasa a ser el exponente de la nueva variable "y" $x-1=y^{36}$ además $x=y^{36}+1$, entonces,

$$\sqrt[36]{x-1}=\sqrt[36]{y^{36}}=y^{36/36}=y$$
$$\sqrt[9]{x-1}=\sqrt[9]{y^{36}}=y^{36/9}=y^4$$
$$\sqrt{x-1}=\sqrt{y^{36}}=y^{36/2}=y^{18}$$

asi, si $x\to 1^+$ entonces $x-1^+\to 0^+$, es decir $y\to 0^+$

Luego:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt[36]{x-1}-\sqrt[9]{x-1}}{3\left(x^2-1\right)+\sqrt[36]{x-1}}\right)\left(\frac{x^{3/2}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\sqrt[36]{x-1}-\sqrt[9]{x-1}}{3(x-1)(x+1)+\sqrt[36]{x-1}}\right)\left(\frac{x^{3/2}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{y-y^4}{3y^{36}\left(y^{36}+2\right)+y}\right)\left(\frac{\sqrt{\left(y^{36}+1\right)^3}-1+y^{18}}{y^{18}\sqrt{y^{36}+2}}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{y-y^4}{3y^{36}\left(y^{36}+2\right)+y}\right)\left(\frac{\sqrt{\left(y^{36}+1\right)^3}-1+y^{18}}{y^{18}\sqrt{y^{36}+2}}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\cancel{y}(1-y^3)}{\cancel{y}\left(3y^{35}\left(y^{36}+2\right)+1\right)}\right)\left(\frac{\sqrt{\left(y^{36}+1\right)^3}-1}{y^{18}\sqrt{y^{36}+2}}+\frac{y^{18}}{y^{18}\sqrt{y^{36}+2}}\right)=$$

Multiplicando por su conjugada, al numerador del segundo producto del límite, se tendrá la siguiente relación:

$$=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{(1-y^3)}{\left(3y^{35}\left(y^{36}+2\right)+1\right)}\right)$$

$$\left(\frac{y^{36}}{y^{18}\left(\sqrt{y^{36}+1}\right)\left(\sqrt{\left(y^{36}+1\right)^2}+\sqrt{\left(y^{36}+1\right)}+2\right)}+\frac{1}{\sqrt{y^{36}+2}}\right)=$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{(1-y^3)}{\left(3y^{35}\left(y^{36}+2\right)+1\right)}\right)$$

$$\left(\frac{y^{36}}{y^{18}\left(\sqrt{y^{36}+1}\right)\left(\sqrt{\left(y^{36}+1\right)^2}+\sqrt{\left(y^{36}+1\right)}+2\right)}+\frac{1}{\sqrt{y^{36}+2}}\right)=$$

Llevando al límite:

$$=\left(\frac{(1-0^{3})}{\left(3(0)^{35}\left(0^{36}+2\right)+1\right)}\right)$$

$$\left(\frac{0^{2}}{\left(\sqrt{0^{36}+1}\right)\left(\sqrt{\left(0^{36}+1\right)^{2}}+\sqrt{\left(0^{36}+1\right)}+2\right)}+\frac{1}{\sqrt{0^{36}+2}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{(0+1)}\right)\left(\frac{0^{2}}{(1)(1+1+2)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{1}\right)\left(0+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

9. Hallar: $\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^{2}-1}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1^{+}}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}=\lim_{x\to 1^{+}}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1^{+}}\left(\frac{(x-1)\left(\sqrt{x-1}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}\right)}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

10. Hallar: $\lim\limits_{x\to 5/3}\sqrt{|x|+[\![3x]\!]+4}$

Solución:

$$\lim_{x\to 5/3}\sqrt{|x|+[\![3x]\!]+4}=$$

Determinando los dominios de las funciones

$$|x|=\begin{cases} x\ , \ si\ x\geq 0 \\ -x\ , \ si\ x<0\end{cases},$$

$[\![x]\!]=n\,,n\leq x<n+1$, para nuestro caso especial cuando,

$$y=[\![3x]\!]=n\,,n\leq 3x<n+1$$

$$y=[\![3x]\!]=n\,,\frac{n}{3}\leq x<\frac{n+1}{3}$$

Apoyado de esta última relación:

$$[\![3x]\!]=\begin{cases}\vdots\\ 3,1\le x<\frac{4}{3}\\ 4,\frac{4}{3}\le x<\frac{5}{3}\\ 5,\frac{5}{3}\le x<\frac{6}{3}\\ 6,\frac{6}{3}\le x<\frac{7}{3}\\ \vdots\end{cases}$$

Determinando cuando $x\to\left(\frac{5}{3}\right)$, superiormente e inferiormente:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}^+}\sqrt{|x|+[\![3x]\!]+4}=\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}^+}\sqrt{x+5+4}=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}^+}\sqrt{x+9}=\sqrt{\frac{5}{3}+9}=\sqrt{\frac{32}{3}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}^-}\sqrt{|x|+[\![3x]\!]+4}=\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}^-}\sqrt{x+4+4}=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}^-}\sqrt{x+8}=\sqrt{\frac{5}{3}+8}=\sqrt{\frac{29}{3}}$

Por consiguiente, de a). y b. como son diferentes $\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}}\sqrt{|x|+[\![3x]\!]+4}$ $\nexists$ (no existe).

11. Hallar: $\lim\limits_{x\to5/2}\sqrt{|x|+[\![3x]\!]+4}$

Solución:

$\lim\limits_{x\to5/2}\sqrt{|x|+[\![3x]\!]+4}=$

Dados: $|x|=\begin{cases}x\ ,\ si\,x\ge0\\ -x\ ,\ si\,x<0\end{cases}$,

$[\![x]\!]=n, n\le x\le n+1$

$y=[\![3x]\!]=n,\frac{n}{3}\le x<\frac{n+1}{3}$

Del problema anterior:

$$[\![3x]\!] = \begin{cases} \vdots \\ 5, & \frac{5}{3} \leq x < 2 \\ 6, & 2 \leq x < \frac{7}{3} \\ \vdots \end{cases}$$

Los valores para (5/2) se encuentra en $2 \leq x < \frac{7}{3} = 2.333$

a) $\lim_{x \to \frac{5}{2}^+} \sqrt{|x| + [\![3x]\!] + 4} = \lim_{x \to \frac{5}{2}^+} \sqrt{x + 6 + 4} =$

$= \lim_{x \to \frac{5}{2}^+} \sqrt{\frac{5}{2} + 10} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

b) $\lim_{x \to \frac{5}{2}^-} \sqrt{|x| + [\![3x]\!] + 4} = \lim_{x \to \frac{5}{2}^-} \sqrt{x + 6 + 4} =$

$= \lim_{x \to \frac{5}{2}^-} \sqrt{\frac{5}{2} + 10} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

Por consiguiente, de a). y b). como son iguales $\lim_{x \to 5/2} \sqrt{|x| + [\![3x]\!] + 4} = \frac{5}{\sqrt{2}}$ existe

12. Hallar: $\lim_{x \to 0} \sqrt{[\![9 + x^2]\!]}$

Solución:

Si: $[\![x]\!]=n, n \leq x < n+1$, para nuestro caso especial cuando tiende a "0" las convergencias por la derecha e izquierda, será:

$$\begin{aligned} &si\ x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow 9 + x^2 > 9 \\ &según\ definido\ mayor\ entero \quad \Rightarrow 9 \leq 9 + x^2 < 10 \\ &si\ x < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow 1 > x^2 > 0 \\ &según\ definido\ mayor\ entero \quad \Rightarrow 9 \leq x^2 + 9 < 10 \end{aligned}$$

además:

$[\![9+x^2]\!]=9$

luego:

a) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{[\![9 + x^2]\!]} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{9} = 3$

b) $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{[\![9 + x^2]\!]} = \lim_{x \to 0^-} \sqrt{9} = 3$

Por consiguiente; de a). y b). como son iguales $\lim_{x\to 0}\sqrt{[\![9+x^2]\!]}=3$ existe.

13. Hallar: $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+3x-3}{|x-1|}$

Solución:

De acuerdo a la definición de valor absoluto:

$$|x-1|=\begin{cases} x-1\ ,\ si\ x-1\geq 0 \\ -(x-1),\ si\ x-1<0 \end{cases} \Rightarrow\ |x-1|=\begin{cases} x-1\ ,\ si\ x\geq 1 \\ -x+1,\ si\ x<1 \end{cases}$$

determinando cuando x→1 (x converge a 1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+3x-3}{|x-1|}=$$

a) $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-x^2+3x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+3)}{x-1}=4$

b) $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-x^2+3x-3}{-x+1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+3)}{-(x-1)}=-4$

Por consiguiente, de a). y b). como son diferentes $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+3x-3}{|x-1|}\ \nexists$ (no existe).

14. Hallar: $\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^3-x^2+3x-3}{x-1}\right|$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^3-x^2+3x-3}{x-1}\right|=\lim_{x\to 1}\left|\frac{(x-1)(x^2+3)}{x-1}\right|=\lim_{x\to 1}|x^2+3|=$$

De acuerdo a la definición de valor absoluto:

$$|x^2+3|=\begin{cases} x^2+3\quad ,\ si\ x^2+3\geq 0 \\ -(x^2+3),\ si\ x^2+3<0 \end{cases},$$

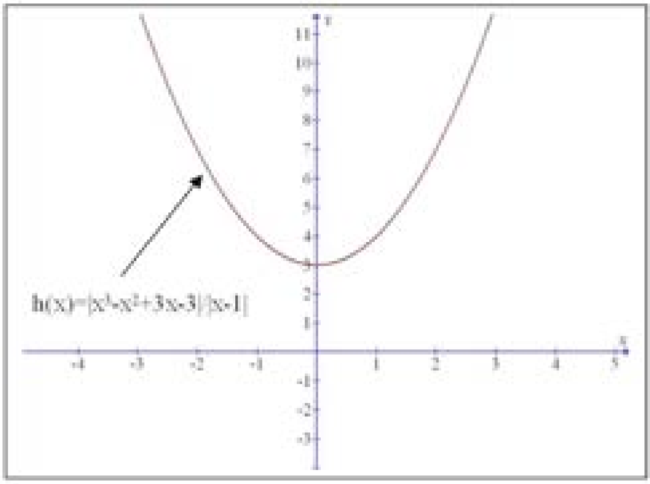
$$\Rightarrow\quad |x^2+3|=\begin{cases} x^2+3\ \ ,\ si\ x^2\geq -3 \\ -(x^2+3),\ si\ x^2<-3 \end{cases}$$

Determinando, cuando x→1 (x converge a 1), que se encuentra en el primer intervalo, por tanto:

a) $\lim_{x\to 1^+}\left|\frac{x^3-x^2+3x-3}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+3)}{x-1} = 4$

b) $\lim_{x\to 1^-}\left|\frac{x^3-x^2+3x-3}{x-1}\right| = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x^2+3)}{-(x-1)} = 4$

Por consiguiente, de a). y b). como son iguales $\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^3-x^2+3x-3}{x-1}\right| = 4$ (existe).



15. Hallar: $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{|x-2|}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{|x-2|} =$$

$$|x-2|=\begin{cases} x-2\ , si\ x\geq 2 \\ -(x-2),\ si\ x<2 \end{cases},$$

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x^2-4)}{(x-2)}=0$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{-(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x^2-4)}{-(x-2)}=0$

Por consiguiente; de a). y b). como son iguales

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{|x-2|}=0$ existe.

16. Hallar: $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-}\dfrac{2[\![x^2+1]\!]+|x+2|-2}{[\![3x+2]\!]}$

Solución:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-}\frac{2[\![x^2+1]\!]+|x+2|-2}{[\![3x+2]\!]}=$$

De acuerdo a la definición de valor absoluto:

$$|x+2|=\begin{cases} x+2 \quad ,\ si\ x+2\geq 0 \\ -(x+2),\ si\ x+2<0 \end{cases},$$

$$\Rightarrow\quad |x+2|=\begin{cases} x+2 \quad ,\ si\ x\geq -2 \\ -(x+2),\ si\ x<-2 \end{cases}$$

Y de los mayores enteros

$$[\![x^2+1]\!]=\begin{cases} \quad\vdots \\ 3\ \ ,3\leq x^2+1<4 \\ 2\ \ ,2\leq x^2+1<3 \end{cases}=\begin{cases} \quad\vdots \\ 3\ \ ,2\leq x^2<3 \\ 2\ \ ,1\leq x^2<2 \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} \quad\vdots \\ 3\ \ ,\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3} \\ 2\ \ ,\ \ 1\leq x<\sqrt{2} \end{cases}$$

$$[\![3x+2]\!]=\begin{cases}\vdots \\ 7 \ ,7\leq 3x+2<8 \\ 6 \ ,6\leq 3x+2<7\end{cases}=\begin{cases}\vdots \\ 7 \ ,5\leq 3x<6 \\ 6 \ ,4\leq 3x<5\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\vdots \\ 7 \ ,\dfrac{5}{3}\leq x<2 \\ 6 \ ,\dfrac{4}{3}\leq x<\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

determinando cuando x→$\sqrt{2}$ por la izquierda (x converge a $\sqrt{2}$)

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-}\frac{2[\![x^2+1]\!]+|x+2|-2}{[\![3x+2]\!]}=\lim_{x\to\sqrt{2}^-}\frac{2(2)+(x+2)-2}{6}=$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{2}^-}\frac{4+x}{6}=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$$

17. Hallar: $\lim_{x\to\sqrt{2}^+}\left[x^2-Sgn\left(\left|x^2-1\right|-1\right)\right]$

Solución:

Definiendo previamente

$$Sgn\left(\left|x^2-1\right|-1\right)=\begin{cases}-1 \ , si\left|x^2-1\right|-1<0\to\left|x^2-1\right|<1 \\ 0 \ , si\left|x^2-1\right|-1=0\to\left|x^2-1\right|=1 \\ 1 \ , si \left|x^2-1\right|-1>0\to\left|x^2-1\right|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 \ , si-1<x^2-1<1 \\ 0 \ , si\, x^2-1=1 \\ 1 \ , si \left(x^2-1>1\right)\vee\left(x^2-1<-1\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 \ , si\ 0<x^2<2 \\ 0 \ , si\, x^2=2 \\ 1 \ , si \left(x^2>2\right)\vee\left(x^2<0\right)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-1 \ , si\ 0<x^2<2 \\ 0 \ , si\, x^2=2 \\ 1 \ , si \left(x^2>2\right)\vee\left(x^2<0\right)\end{cases}$$

$$
=\begin{cases} -1 & , si\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 0 & , si\ x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} \\ 1 & , si\ \left(x > \sqrt{2}\right) \vee \left(x < -\sqrt{2}\right) \end{cases}
$$

Ahora en el límite está en la tercera condición (1):

$$
\lim_{x \to \sqrt{2}^{+}} \left[x^2 - Sgn\left(\left|x^2 - 1\right| - 1\right) \right] =
$$

$$
= \lim_{x \to \sqrt{2}^{+}} \left[x^2 - 1 \right] = \left[\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1 \right] = 1
$$

18. Hallar: $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}^{-}} \left[x^4 - Sgn\left(\left|x^2 - 1\right| - 1\right) \right]$

Solución:

De acuerdo a la definición de función signo:

$$
Sgn\left(\left|x^2 - 1\right| - 1\right) = \begin{cases} -1 & , si\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 0 & , si\ x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} \\ 1 & , si\ \left(x > \sqrt{2}\right) \vee \left(x < -\sqrt{2}\right) \end{cases}
$$

determinando cuando x→$\sqrt{2}$ por la izquierda.

$$
\lim_{x \to \sqrt{2}^{-}} \left[x^4 - Sgn\left(\left|x^2 - 1\right| - 1\right) \right] =
$$

$$
= \lim_{x \to \sqrt{2}^{-}} \left[x^4 - 1 \right] = \left(\sqrt{2}\right)^4 - (1) = 3
$$

19. Hallar: $\lim\limits_{x \to 0} \left[3x + Sgn\left(\left|x^2 - 1\right| - 1\right) \right]$

Solución:

De acuerdo a la definición de función signo:

$$
Sgn\left(\left|x^2 - 1\right| - 1\right) = \begin{cases} -1 & , si\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 0 & , si\ x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} \\ 1 & , si\ \left(x > \sqrt{2}\right) \vee \left(x < -\sqrt{2}\right) \end{cases}
$$

Luego,

a) $\lim_{x\to 0^+}\left[3x+Sgn\left(\left|x^2-1\right|-1\right)\right]=\lim_{x\to 0^+}(3x-1)=-1$

b) $\lim_{x\to 0^-}\left[3x+Sgn\left(\left|x^2-1\right|-1\right)\right]=\lim_{x\to 0^-}(3x-1)=-1$

Por consiguiente; de a). y b). como son iguales $\lim_{x\to 0}\left[3x+Sgn\left(\left|x^2-1\right|-1\right)\right]=-1$ existe.

20. Hallar: $\lim_{x\to -\sqrt{2}}\left[x^2+5+Sgn\left(\left|x^2-1\right|-1\right)\right]$

Solución:

Del problema 17

$$Sgn\left(\left|x^2-1\right|-1\right)=\begin{cases}-1 & , si\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\\ 0 & , si\ x=-\sqrt{2}\vee x=\sqrt{2}\\ 1 & , si\ \left(x>\sqrt{2}\right)\vee\left(x<-\sqrt{2}\right)\end{cases}$$

a) $\lim_{x\to -\sqrt{2}^+}\left[x^2+5-1\right]=\left[\left(-\sqrt{2}\right)^2+5-1\right]=6$

b) $\lim_{x\to -\sqrt{2}^-}\left[x^2+5+1\right]=\left[\left(-\sqrt{2}\right)^2+5+1\right]=8$

Por consiguiente; de a. y b. por ser diferentes

$$\lim_{x\to -\sqrt{2}}\left[x^2+5+Sgn\left(\left|x^2-1\right|-1\right)\right]=\nexists$$

21. Hallar: $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]}{\left[\!\left[2x\right]\!\right]+10}$

Solución:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]}{\left[\!\left[2x\right]\!\right]+10}=$$

De acuerdo a la definición de la función mayor entero:

$$\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]=\begin{cases}\vdots \\ 2 \quad ,2\le \dfrac{x}{3}<3 \\ 1 \quad ,1\le \dfrac{x}{3}<2\end{cases}=\begin{cases}\vdots \\ 2 \quad ,6\le x<9 \\ 1 \quad ,3\le x<6\end{cases} \quad ,$$

$$[\![2x]\!]=\begin{cases}\vdots \\ 12 \quad ,12\le 2x<13 \\ 11 \quad ,11\le 2x<12\end{cases}=\begin{cases}\vdots \\ 12 \quad ,6\le x<\dfrac{13}{2} \\ 11 \quad ,\dfrac{11}{2}\le x<6\end{cases}$$

Determinando, cuando x→6 (x converge a 6), por la derecha e izquierda:

a) $$\lim_{x\to 6^+}\frac{x^2-\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]}{[\![2x]\!]+10}=\lim_{x\to 6^+}\frac{x^2-2}{12+10}=\frac{34}{22}=\frac{17}{11}$$

b) $$\lim_{x\to 6^-}\frac{x^2-\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]}{[\![2x]\!]+10}=\lim_{x\to 6^-}\frac{x^2-1}{11+10}=\frac{35}{21}=\frac{5}{3}$$

Por consiguiente, de a). y b). como son diferentes $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]}{[\![2x]\!]+10} \quad \nexists$ (no existe).

22. Hallar: $\lim\limits_{x\to \frac{1}{6}}\dfrac{12-\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]}{[\![3x]\!]-10}$

Solución:

$$\lim_{x\to \frac{1}{6}}\frac{12-\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]}{[\![3x]\!]-10}=$$

De acuerdo a la definición de la función mayor entero:

$$\left[\!\left[\frac{x}{3}\right]\!\right]=\begin{cases}\vdots \\ 1 \quad ,1\le \dfrac{x}{3}<2 \\ 0 \quad ,0\le \dfrac{x}{3}<1\end{cases}=\begin{cases}\vdots \\ 1 \quad ,3\le x<6 \\ 0 \quad ,0\le x<3\end{cases} \quad ,$$

1/6 se encuentra en este intervalo

$$[\![3x]\!]=\begin{cases}\vdots \\ 1 \quad ,1\le 3x<2 \\ 0 \quad ,0\le 3x<1\end{cases}=\begin{cases}\vdots \\ 1 \quad ,\dfrac{1}{3}\le x<\dfrac{2}{3} \\ 0 \quad ,0\le x<\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

1/6 se encuentra en este intervalo

Determinando, cuando $x\to\frac{1}{6}$ (x converge a 1/6), por la derecha e izquierda:

a) $$\lim_{x\to\frac{1}{6}^+}\frac{12-[\![\frac{x}{3}]\!]}{[\![3x]\!]-10}=\lim_{x\to\frac{1}{6}^+}\frac{12-0}{0-10}=\frac{12}{-10}=-\frac{6}{5}$$

b) $$\lim_{x\to\frac{1}{6}^-}\frac{12-[\![\frac{x}{3}]\!]}{[\![3x]\!]-10}=\lim_{x\to\frac{1}{6}^-}\frac{12-0}{0-10}=\frac{12}{-10}=-\frac{6}{5}$$

Por consiguiente, de a). y b). como son iguales $\lim_{x\to\frac{1}{6}}\frac{12-[\![\frac{x}{3}]\!]}{[\![3x]\!]-10}=-\frac{6}{5}$ (existe).

23. Hallar: $\lim_{x\to1^-}\frac{5\sqrt[5]{x-2}+3\sqrt[3]{2-x}+2\sqrt{2x-1}+6x^2-6}{x^2-x}$

Solución:

$$\lim_{x\to1^-}\frac{5\sqrt[5]{x-2}+3\sqrt[3]{2-x}+2\sqrt{2x-1}+6x^2-6}{x^2-x}=$$

Aumentando 5 y quitando 5, y asociando términos:

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{5\sqrt[5]{x-2}+5+3\sqrt[3]{2-x}-3+2\sqrt{2x-1}-2+6x^2-6}{x^2-x}=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{5\left(\sqrt[5]{x-2}+1\right)+3\left(\sqrt[3]{2-x}-1\right)+2\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+6\left(x^2-1\right)}{x(x-1)}=$$

distribuyendo límites:

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{5\left(\sqrt[5]{x-2}+1\right)}{x(x-1)}+\lim_{x\to1^-}\frac{3\left(\sqrt[3]{2-x}-1\right)}{x(x-1)}$$
$$+\lim_{x\to1^-}\frac{2\left(\sqrt{2x-1}-1\right)}{x(x-1)}+\lim_{x\to1^-}\frac{6\left(x^2-1\right)}{x(x-1)}=$$

propiedad de límite por una constante

$$= \underbrace{5\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt[5]{x-2}+1\right)}{x(x-1)}}_{A} + \underbrace{3\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt[3]{2-x}-1\right)}{x(x-1)}}_{B}$$
$$+\underbrace{2\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)}{x(x-1)}}_{C} + \underbrace{6\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(x^2-1\right)}{x(x-1)}}_{D} = \quad \ldots. (1)$$

resolviendo por separado A, B, C, D:

i) Parte A:

$$A = 5\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt[5]{x-2}+1\right)}{x(x-1)}$$

multiplicando por su conjugada, utilizando la siguiente propiedad algebraica:

$$(a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) = (a^5 + b^5).$$

$$A = 5\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt[5]{x-2}+1\right).\Delta}{x(x-1).\Delta}$$

Donde

$$\Delta = \left(\sqrt[5]{(x-2)^4} - \sqrt[5]{(x-2)^3} + \sqrt[5]{(x-2)^2} - \sqrt[5]{(x-2)} + 1\right)$$

entonces,

$$A = 5\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt[5]{x-2}+1\right).\Delta}{x(x-1).\Delta}$$

$$A = 5\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-2+1)}{x(x-1).\Delta} = 5.\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)}{x(x-1).\Delta} =$$

salvando la indeterminación

$$A = 5\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x\left(\sqrt[5]{(x-2)^4} - \sqrt[5]{(x-2)^3} + \sqrt[5]{(x-2)^2} - \sqrt[5]{(x-2)} + 1\right)}$$

llevando al límite

$$A = 5\frac{1}{(1-(-1)+1-(-1)+1)} = \frac{5}{5} = 1$$

ii) Parte B:

$$B = 3\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt[3]{2-x}\,-1\right)}{x(x-1)}$$

Multiplicando por su conjugada, utilizando:

$$(a+b)(a^2+ab+b^2)=(a^3-b^3):$$

$$B = 3\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt[3]{2-x}\,-1\right)\left(\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{2-x}+1\right)}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{2-x}+1\right)}=$$

$$B = 3\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt[3]{(2-x)^3}\,-1\right)}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{2-x}+1\right)}=$$

$$B = 3\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{2-x}+1\right)}$$

salvando la indeterminación, cancelando términos semejantes

$$B = 3\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x(x-1)\left(\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{2-x}+1\right)}=$$

$$B = 3\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{x\left(\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{2-x}+1\right)}$$

llevando al límite:

$$B = 3\frac{-1}{(1+1+1)}=-1$$

iii) Parte C:

$$C = 2\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)}{x(x-1)}$$

multiplicando por su conjugada como los casos anteriores:

$$C = 2\lim_{x\to 1^-} \frac{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{x(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} = 2\lim_{x\to 1^-} \frac{\left(\sqrt{(2x-1)^2}-1\right)}{x(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$$

$$C = 2\lim_{x\to 1^-} \frac{(2x-2)}{x(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} = 2\lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{x(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$$

$$C = 2\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x\left(\sqrt{2x-1}+1\right)} = 2\frac{2}{\left(\sqrt{2(1)-1}+1\right)} = 2\frac{2}{(1+1)} = 2$$

iv) Parte D:

$$D = 6\lim_{x\to 1^-} \frac{\left(x^2-1\right)}{x(x-1)} = 6\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} =$$

$$D = 6\lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)}{x} = 6\frac{(1+1)}{1} = 12$$

Remplazando en la ecuación (1), tendremos el siguiente resultado:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{5\sqrt[3]{x-2}+3\sqrt[3]{2-x}+2\sqrt{2x-1}+6x^2-6}{x^2-x} =$$

$$= 1+(-1)+2+12 = 14$$

24. Hallar: $\lim_{x\to -1^-} \frac{5\sqrt[5]{x+2}-4\sqrt[4]{-1-2x}+3\sqrt{2+x}-2\sqrt{-1-2x}+5x+3}{x^2-x}$

Solución:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{5\sqrt[5]{x+2}-4\sqrt[4]{-1-2x}+3\sqrt{2+x}-2\sqrt{-1-2x}+5x+3}{x^2-x} =$$

$$= \lim_{x\to -1^-}\left(\frac{5\sqrt[5]{x+2}-5+5}{x^2+x} - \frac{4\sqrt[4]{-1-2x}-4+4}{x^2+x} + \frac{3\sqrt{2+x}-3+3}{x^2+x} - \frac{2\sqrt{-1-2x}-2+2}{x^2+x} + \frac{5x+3}{x^2+x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to -1^-}\left(\frac{5\left(\sqrt[5]{x+2}-1\right)}{x^2+x} + \frac{5}{x^2+x} - \frac{4\left(\sqrt[4]{-1-2x}-1\right)}{x^2+x} - \frac{4}{x^2+x} + \frac{3\left(\sqrt{2+x}-1\right)}{x^2+x} + \frac{3}{x^2+x} - \frac{2\left(\sqrt{-1-2x}-1\right)}{x^2+x} - \frac{2}{x^2+x} + \frac{5x+3}{x^2+x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{5\left(\sqrt[5]{x+2}-1\right)}{x(x+1)} - \frac{4\left(\sqrt[4]{-1-2x}-1\right)}{x(x+1)} + \frac{3\left(\sqrt{2+x}-1\right)}{x(x+1)}$$

$$- \frac{2\left(\sqrt{-1-2x}-1\right)}{x(x+1)} + \frac{5x+3+5-4+3-2}{x(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{5(x+2-1)}{x(x+1)\left(\sqrt[5]{(x+2)^4}+\sqrt[5]{(x+2)^3}+\ldots+1\right)}$$

$$- \frac{4(-1-2x-1)}{x(x+1)\left(\sqrt[4]{(-1-2x)^3}+\sqrt[4]{(-1-2x)^2}+\ldots+1\right)}$$

$$+ \frac{3(2+x-1)}{x(x+1)\left(\sqrt{2+x}+1\right)} - \frac{2(-1-2x-1)}{x(x+1)\left(\sqrt{-1-2x}+1\right)} + \frac{5x+5}{x(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{5(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt[5]{(x+2)^4}+\sqrt[5]{(x+2)^3}+\ldots+1\right)}$$

$$- \frac{4(-2)(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt[4]{(-1-2x)^3}+\sqrt[4]{(-1-2x)^2}+\ldots+1\right)}$$

$$+ \frac{3(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt{2+x}+1\right)} - \frac{2(-2)(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt{-1-2x}+1\right)} + \frac{5(x+1)}{x(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1^-} \frac{5}{x\left(\sqrt[5]{(x+2)^4}+\sqrt[5]{(x+2)^3}+\ldots+1\right)}$$

$$- \frac{(-8)}{x\left(\sqrt[4]{(-1-2x)^3}+\sqrt[4]{(-1-2x)^2}+\ldots+1\right)}$$

$$+ \frac{3}{x\left(\sqrt{2+x}+1\right)} - \frac{(-4)}{x\left(\sqrt{-1-2x}+1\right)} + \frac{5}{x} =$$

$$= \frac{5}{(-1)(5)} - \frac{(-8)}{(-1)(4)} + \frac{3}{(-1)(2)} - \frac{(-4)}{(-1)(2)} + \frac{5}{(-1)} =$$

$$= -3 - \frac{7}{2} - 5 = \frac{-6-7-10}{2} = -\frac{23}{2}$$

25. Hallar: $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x}-3x}{(x-1)^2}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x}-3x}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1\right)+\left(\sqrt{x^3}-3x+\sqrt[3]{x}-1\right)}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{(x-1)^2}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{(x-1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)^2}+\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{(x-1)^2\left(\sqrt{x}+1\right)^3}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)^2}+\frac{(x-1)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}=\frac{1}{9}+0=\frac{1}{9}$$

26. Hallar: $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sqrt{-9x}+\sqrt[3]{x}-2}{x+1}$

Solución:

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{-9x}+\sqrt[3]{x}-2}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{-9x}-3+\sqrt[3]{x}+1}{(x+1)}=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{\sqrt{-9x}-3}{(x+1)}+\frac{\sqrt[3]{x}+1}{(x+1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{(-9x-9)}{(x+1)\left(\sqrt{-9x}-3\right)}+\frac{(x+1)}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}\right)=$$

$$=-\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}+\frac{1}{1}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{7}{6}$$

27. Hallar: $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{\sqrt{\dfrac{\boxed{x^3}}{3}-\dfrac{3[\![x]\!]}{2}+\sqrt{3-x}}}{\sqrt{9\,Sgn(x-1)-x^2}}$

Solución:

Previamente, definiendo la funciones. Para valor absoluto

$$\left|x^3\right|=\begin{cases} x^3 & ,si \quad x^3 \geq 0 \\ -x^3 & ,si \quad x^3 < 0 \end{cases}$$

$$\left|x^3\right|=x^3 \ (para \ x \to 3 \ por \ la \ izquierda)$$

ahora, para la función mayor entero,

$$x<3 \Rightarrow 2 \leq x < 3 \Rightarrow [\![x]\!]=2$$

así mismo, para la función signo,

$$Sgn(x-1)=\begin{cases} -1, si & x-1<0 \\ 0 \ , si & x-1=0 \\ 1 \ , si & x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1, si & x<1 \\ 0 \ , si & x=1 \\ 1 \ , si & x>1 \end{cases}$$

Luego,

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{3}}-\frac{3(\cancel{2})}{\cancel{2}}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{9(1)-x^2}}=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{3}}-3+\sqrt{3-x}}{\sqrt{9-x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{3}}-3}{\sqrt{9-x^2}}+\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9-x^2}}==\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to 3^-}\frac{\left(\sqrt{x^3}-3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x^3}+3\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{x^3}+3\sqrt{3}\right)}+\lim_{x\to 3^-}\sqrt{\frac{3-x}{9-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to 3^-}\frac{\left(x^3-3^3\right)\left(\sqrt{9-x^2}\right)}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{9-x^2}\right)\left(\sqrt{x^3}+3\sqrt{3}\right)}+\lim_{x\to 3^-}\sqrt{\frac{3-x}{3^2-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to 3^-}\frac{\left(x^3-3^3\right)\left(\sqrt{9-x^2}\right)}{\left(9-x^2\right)\left(\sqrt{x^3}+3\sqrt{3}\right)}+\lim_{x\to 3^-}\sqrt{\frac{3-x}{(3-x)(3+x)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{9-x^2}\right)}{-(x-3)(x+3)\left(\sqrt{x^3}+3\sqrt{3}\right)}+\sqrt{\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{(3+x)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to 3^-}\frac{\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{9-x^2}\right)}{-(x+3)\left(\sqrt{x^3}+3\sqrt{3}\right)}+\sqrt{\frac{1}{(3+3)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\left(3^2+3(3)+9\right)\left(\sqrt{9-3^2}\right)}{-(3+3)\left(\sqrt{3^3}+3\sqrt{3}\right)}+\sqrt{\frac{1}{(3+3)}}=0+\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

1.8 Límites al infinito

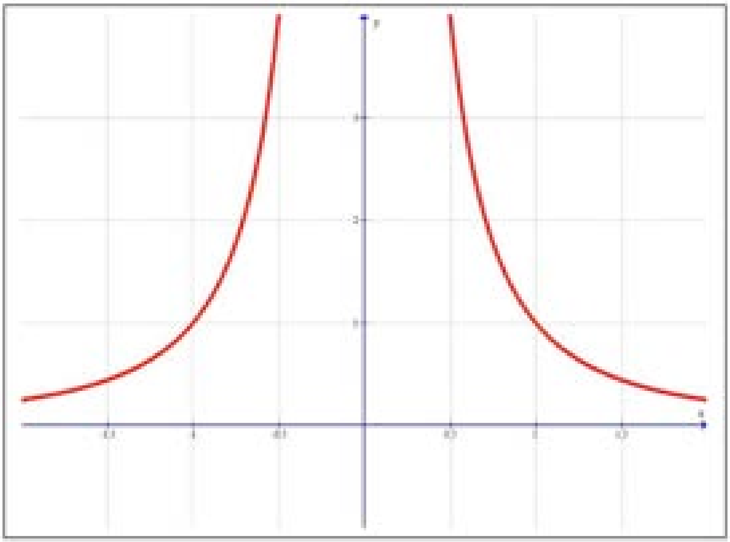
En matemáticas el símbolo ∞ se lee infinito y se refiere concretamente a una posición dentro de la recta de los números reales, no representa ningún número real.

Si una variable independiente x está creciendo indefinidamente a través de valores positivos, se escribe $x \to +\infty$ (que se lee: x tiende a mas infinito), y si decrece a través de los valores negativos se denota como $x \to -\infty$ (que se lee: x tiende a menos infinito).

Similarmente, cuando una función $f(x)$ crece indefinidamente y toma valores positivos cada vez mayores, se escribe $f(x) \to +\infty$, y si decrece tomando valores negativos escribimos $f(x) \to -\infty$.

Un claro ejemplo de este tratamiento podemos apreciar de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$, para valores de x positivos muy grandes. Si tomamos x cada vez mayor, $f(x)$ esta cada vez más cerca de 0, pero nunca tomará el valor de cero. Si x es suficientemente grande podemos conseguir que $f(x)$ se acerque a 0 tanto como queramos. Decimos que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, como se muestra en la siguiente figura.

x	$f(x)$
100	1×10^{-4}
1 000	1×10^{-6}
10 000	1×10^{-8}
100 000	1×10^{-10}
1 000 000	1×10^{-12}



Definición 1.8.1. Sea f:⟨α+∞⟩→ℝ, una función y L є ℝ, se dice que L es el límite de f(x) cuando x tiende a +∞, y se escribe: $L=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, sí y sólo sí, dado $\varepsilon>0, \exists N>0$, tal que si $x>N \Rightarrow |\,f(x) - L\,| < \varepsilon$

Definición 1.8.2. Sea g:⟨-∞,α⟩→ℝ, una función y L є ℝ, se dice que L es el límite de g(x) cuando x tiende a -∞, y se escribe: $L=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, sí y sólo sí, dado $\varepsilon>0, \exists M>0$, tal que si $x<-M \Rightarrow |\,g(x)-L\,| < \varepsilon$

Proposición 1.8.1. Si n es un entero positivo cualquiera, entonces

i) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

ii) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Proposición 1.8.2. Sean f y g funciones definidas en ⟨α+∞⟩ y ⟨b+∞⟩, respectivamente. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = M$, entonces:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} [c\, f(x)] = c \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)] = cL$, c es una constante.

ii) $$\lim_{x\to+\infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim_{x\to+\infty} g(x) = L \pm M$$

iii) $$\lim_{x\to+\infty} [f(x).g(x)] = \lim_{x\to+\infty} f(x) \,.\, \lim_{x\to+\infty} g(x) = L \,.\, M$$

iv) $$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)} = \frac{L}{M} \quad \text{, si } M \neq 0$$

1.9 Calculo de límites al infinito

1. Hallar: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+2x^2-5}{x+2-8x^3}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3+2x^2-5}{x+2-8x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{4x^3+2x^2-5}{x^3}}{\dfrac{x+2-8x^3}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}-8} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

2. Hallar: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+\sqrt[3]{x}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1+\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}}=2$$

3. Hallar: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-2}{2x+1}\div\frac{x^2-4x}{x-3}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-2}{2x+1}\div\frac{x^2-4x}{x-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(3x^2-2)}{(2x+1)}\cdot\frac{(x-3)}{(x^2-4x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{(3x^2-2)(x-3)}{x^3}}{\frac{(2x+1)(x^2-4x)}{x^3}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{(3x^2-2)}{x^2}\frac{(x-3)}{x}}{\frac{(2x+1)}{x}\frac{(x^2-4x)}{x^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(3-\frac{2}{x^2}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}\right)=\frac{3}{2}$$

4. Hallar: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{8x-4}{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)}}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{8x-4}{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{\frac{8x-4}{x}}{\frac{(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}+2)}{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{8-\frac{4}{x}}{\frac{(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\frac{(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}}}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{8-\frac{4}{x}}{\frac{(3-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\frac{(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}}}}=$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{8-\frac{4}{x}}{\left(\frac{3}{\sqrt{x}}-1\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}} = \sqrt{\frac{8}{(-1)(1)}} = -2$$

5. Hallar: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+3}}}}{\sqrt{x+3}}$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+3}}}}{\sqrt{x+3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+3}}}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+3}}}{x}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+3}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x+3}}{x^2}}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x+3}{x^4}}}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}}}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}} = \frac{1}{1} = 1$$

6. Hallar: $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right) = = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-5x+6-x^2}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-5x+6}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-5x+6}+x}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-5+\frac{6}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{x^2}}+\frac{x}{x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-5+\frac{6}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2}}+1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-5+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1}\right) = \frac{-5}{2} = -\frac{5}{2}$$

7. Hallar: $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{2x}}-\sqrt{x-\sqrt{2x}}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{2x}}-\sqrt{x-\sqrt{2x}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{2x}}-\sqrt{x-\sqrt{2x}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\left(x+\sqrt{2x}\right)}^2-\sqrt{\left(x-\sqrt{2x}\right)}^2\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+\sqrt{2x}-x+\sqrt{2x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2\sqrt{2x}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{2x}}+\sqrt{x-\sqrt{2x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x+\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x-\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2\sqrt{\frac{2x}{x}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{2x}}{x}}+\sqrt{\frac{x-\sqrt{2x}}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2x}}{x}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{2x}}{x}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{2x}{x^2}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{2x}{x^2}}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{x}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{2}{x}}}\right)} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)} = \sqrt{2}$$

8. Hallar: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)\left(x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}\right)}{\left(x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^3+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^3}\right)}{\left(x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^3+\left(1-x^3\right)\right)}{\left(x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^3+1-x^3\right)}{\left(x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\left(x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{x\sqrt[3]{1-x^3}}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1 - \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{\sqrt[3]{x^3}} + \frac{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}}{\sqrt[3]{x^6}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{x^3}} + \sqrt[3]{\frac{\left(1-x^3\right)^2}{x^6}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} + \sqrt[3]{\frac{\left(1-x^3\right)^2}{\left(x^3\right)^2}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} + \sqrt[3]{\left(\frac{1-x^3}{x^3}\right)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} - 1} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3} - 1\right)^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

9. Hallar: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$

Solución:

Sabiendo que la suma de los n-términos es:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n-1)}{2}$$

Luego:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)}{2n^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{n}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n}-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$$

10. Hallar: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$

Solución:

Sabiendo que la suma de los n-términos cuadráticos es:

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Luego:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6}\frac{n}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6}\frac{n}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

11. Hallar el mayor valor de c de modo que $\lim_{x\to+\infty}\frac{cx^{c-1}+2x^c}{\sqrt{3x^2+1}}$ sea finito y calcular el límite.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{cx^c}{x}+2x^c}{\sqrt{3x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^c\left(\frac{c}{x}+2\right)}{\sqrt{3x^2+1}}$$

Para llevar al límite se debe tratar de obtener la relación $\frac{1}{x}$ que será cero cuando $x\to\infty$, luego:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^c\left(\frac{c}{x}+2\right)}{\sqrt{3x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^c}{x}\left(\frac{c}{x}+2\right)}{\frac{\sqrt{3x^2+1}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^c}{x}\left(\frac{c}{x}+2\right)}{\frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^c}{x}\left(\frac{c}{x}+2\right)}{\sqrt{\frac{3x^2+1}{x^2}}}$$

De donde dentro del límite se tiene la relación $\frac{x^c}{x}$, entonces, si asumimos que $c=2\Rightarrow\frac{x^2}{x}=x$, es decir para los valores c≥2, se tendría una indeterminación, por lo que lo conveniente es que c=1, así se tendrá:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{cx^{c-1}+2x^c}{\sqrt{3x^2+1}}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^1}{x}\left(\frac{1}{x}+2\right)}{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

12. Hallar $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+1}+\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt[4]{x^6+6x^5+2}-\sqrt[5]{x^7+x+1}}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3-2x^2+1}+\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt[4]{x^6+6x^5+2}-\sqrt[5]{x^7+x+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^3-2x^2+1}+\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt{x^3}}}{\frac{\sqrt[4]{x^6+6x^5+2}-\sqrt[5]{x^7+x+1}}{\sqrt{x^3}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^3-2x^2+1}}{\sqrt{x^3}}+\frac{\sqrt[3]{x^4+1}}{\sqrt{x^3}}}{\frac{\sqrt[4]{x^6+6x^5+2}}{\sqrt{x^3}}-\frac{\sqrt[5]{x^7+x+1}}{\sqrt{x^3}}}=(*)$$

luego:

$$\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}=x^{\frac{3\times 3}{2\times 3}}=x^{\frac{9}{6}}=\sqrt[6]{x^9}\quad \text{para } \sqrt[3]{x^4+1}=\sqrt[6]{\left(x^4+1\right)^2}$$

$$\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}=x^{\frac{3\times 2}{2\times 2}}=x^{\frac{6}{4}}=\sqrt[4]{x^6}\quad \text{para } \sqrt[4]{x^6+6x^5+2}$$

$$\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}=x^{\frac{3\times 5}{2\times 5}}=x^{\frac{15}{10}}=\sqrt[10]{x^{15}}\quad \text{para } \sqrt[5]{x^7+x+1}=\sqrt[10]{\left(x^7+x+1\right)^2}$$

Por tanto

$$(*)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+1}}{\sqrt{x^3}}+\dfrac{\sqrt[6]{\left(x^4+1\right)^2}}{\sqrt[6]{x^9}}}{\dfrac{\sqrt[4]{x^6+6x^5+2}}{\sqrt[4]{x^6}}-\dfrac{\sqrt[10]{\left(x^7+x+1\right)^2}}{\sqrt[10]{x^{15}}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^3}}+\sqrt[6]{\dfrac{\left(x^4+1\right)^2}{x^9}}}{\sqrt[4]{\dfrac{x^6+6x^5+2}{x^6}}-\sqrt[10]{\dfrac{\left(x^7+x+1\right)^2}{x^{15}}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt[6]{\dfrac{x^8+2x^4+1}{x^9}}}{\sqrt[4]{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^6}}-\sqrt[10]{\dfrac{x^{14}+x^2+1+2x^8+2x^7+2x}{x^{15}}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt[6]{\dfrac{x^8+2x^4+1}{x^9}}}{\sqrt[4]{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^6}}-\sqrt[10]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^{13}}+\dfrac{1}{x^{15}}+\dfrac{2}{x^7}+\dfrac{2}{x^8}+\dfrac{2}{x^{14}}}}=$$

$$=\frac{1}{1}=1$$

13. Hallar $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+5}$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+5}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+5}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+5}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+5}\right)}=$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2 - \left(\sqrt{x^2+5}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+5}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2+x\right)-\left(x^2+5\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+5}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-x^2-5}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+5}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x-5}{\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+5}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{x-5}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+5}}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\dfrac{5}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}+\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\dfrac{5}{x}}{\sqrt{\dfrac{x^2+x}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{x^2+5}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\dfrac{5}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{5}{x^2}}} = \frac{1}{2}$$

14. Hallar $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{27x^4 + \sqrt[3]{x^2}}} - \sqrt[3]{x^2} \right)$

Solución:

Utilizando la conjugada cubica directamente se tiene la siguiente relación:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{27x^4 + \sqrt[3]{x^2}}} - \sqrt[3]{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{27x^4 + \sqrt[3]{x^2}}}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3}{\Delta} =$$

donde:

$$\Delta = \left(\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{27x^4 + \sqrt[3]{x^2}}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{27x^4 + \sqrt[3]{x^2}}}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + \sqrt[3]{27x^4 + \sqrt[3]{x^2}} - x^2}{\Delta} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{27x^4 + \sqrt[3]{x^2}}}{\Delta} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{27x^4 + \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^4}}}{\dfrac{\Delta}{\sqrt[3]{x^4}}} \ldots (*)$$

Previamente:

$$\frac{\Delta}{\sqrt[3]{x^4}} = \sqrt[3]{\frac{\left(x^2 + \sqrt[3]{27x^4 + \sqrt[3]{x^2}}\right)^2}{x^4}} +$$

$$+ \left(\sqrt[3]{\frac{x^2 + \sqrt[3]{27x^4 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^2}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2}}\right) + \left(\sqrt[3]{\frac{x^4}{x^4}}\right)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\left(x^2 + \sqrt[3]{27x^4 + \sqrt[3]{x^2}}\right)^2}{\left(x^2\right)^2}} +$$

$$+ \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{27x^4 + \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^6}}}\right)\left(\sqrt[3]{1}\right) + \left(\sqrt[3]{1}\right)$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+\sqrt[3]{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}\right)^2} +$$

$$+\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\frac{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}{x^6}}}\right)(1)+(1)$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{\sqrt[3]{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^6}}\right)^2} + \left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\frac{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}{x^6}}}\right)+1$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+\sqrt[3]{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}\right)^2} +$$

$$+\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\frac{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}{x^6}}}\right)(1)+(1)$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{x^2}+\frac{\sqrt[3]{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^6}}\right)^2} + \left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\frac{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}{x^6}}}\right)+1$$

$$= \sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{\frac{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}{x^6}}\right)^2} + \left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\frac{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}{x^6}}}\right)+1$$

$$= \sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{\frac{27x^4}{x^6}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^{18}}}}\right)^2} + \left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\frac{27x^4}{x^6}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^{18}}}}}\right)+1$$

$$= \sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{\frac{27}{x^2}+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^{18}}}}\right)^2} + \left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\frac{27}{x^2}+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^{18}}}}}\right)+1$$

$$= \sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{\frac{27}{x^2}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^{16}}}}\right)^2} + \left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\frac{27}{x^2}+\sqrt[3]{\frac{1}{x^{16}}}}}\right)+1$$

reemplazando, en (*)

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{27x^4+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x^4}}}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{27}{x^2}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^{16}}}}\right)^2}+\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\dfrac{27}{x^2}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^{16}}}}}\right)+1}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[3]{27+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^{12}}}}}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{27}{x^2}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^{16}}}}\right)^2}+\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\dfrac{27}{x^2}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^{16}}}}}\right)+1}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[3]{27+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^{10}}}}}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{\dfrac{27}{x^2}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^{16}}}}\right)^2}+\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\dfrac{27}{x^2}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^{16}}}}}\right)+1}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{27+0}}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{0+\sqrt[3]{0}}\right)^2}+\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{0+\sqrt[3]{0}}}\right)+1}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{(1)^2}+\left(\sqrt[3]{1}\right)+1} = \frac{3}{3} = 1$$

15. Hallar $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}+\sqrt[5]{x^4-x^5+1}\right)$

Solución:

Adicionando y sustraendo una variable X, y resolviendo por separado los límites:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}-x\right)+\left(\sqrt[5]{x^4-x^5+1}+x\right)=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}-x\right)}_{A}+\underbrace{\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt[5]{x^4-x^5+1}+x\right)}_{B}=(*)$$

Resolviendo la primera parte, multiplicando con su conjugada cúbica:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)^3-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)^2+x\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)+x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{-x^2+1}{x^2}}{\dfrac{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)^2+x\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)+x^2}{x^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+\dfrac{1}{x^2}}{\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x^2+1}}{x}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x^2+1}}{x}\right)+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+\dfrac{1}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^3-x^2+1}{x^3}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{\dfrac{x^3-x^2+1}{x^3}}\right)+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1+\dfrac{1}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}\right)^2+\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}\right)+1}\right)=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}$$

Resolviendo ahora la segunda parte, multiplicando con su conjugada de quinto orden:

$$B=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt[5]{x^4-x^5+1}\right)^5+x^5}{\left(\sqrt[5]{x^4-x^5+1}\right)^4-\left(\sqrt[5]{x^4-x^5+1}\right)^3x+\left(\sqrt[5]{x^4-x^5+1}\right)^2x^2-\left(\sqrt[5]{x^4-x^5+1}\right)x^3+x^4}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x^4-x^5+1+x^5}{x^4}}{\dfrac{\left(\sqrt[5]{x^4-x^5+1}\right)^4-\left(\sqrt[5]{x^4-x^5+1}\right)^3x+\left(\sqrt[5]{x^4-x^5+1}\right)^2x^2-\left(\sqrt[5]{x^4-x^5+1}\right)x^3+x^4}{x^4}}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^4}}{\left(\dfrac{\sqrt[5]{x^4-x^5+1}}{x}\right)^4 - \left(\dfrac{\sqrt[5]{x^4-x^5+1}}{x}\right)^3 \dfrac{x}{x} + \left(\dfrac{\sqrt[5]{x^4-x^5+1}}{x}\right)^2 \dfrac{x^2}{x^2} - \left(\dfrac{\sqrt[5]{x^4-x^5+1}}{x}\right)\dfrac{x^3}{x^3} + \dfrac{x^4}{x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^4}}{\left(\dfrac{\sqrt[5]{x^4-x^5+1}}{\sqrt[5]{x^5}}\right)^4 - \left(\dfrac{\sqrt[5]{x^4-x^5+1}}{\sqrt[5]{x^5}}\right)^3 + \left(\dfrac{\sqrt[5]{x^4-x^5+1}}{\sqrt[5]{x^5}}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt[5]{x^4-x^5+1}}{\sqrt[5]{x^5}}\right) + 1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^4}}{\left(\sqrt[5]{\dfrac{x^4-x^5+1}{x^5}}\right)^4 - \left(\sqrt[5]{\dfrac{x^4-x^5+1}{x^5}}\right)^3 + \left(\sqrt[5]{\dfrac{x^4-x^5+1}{x^5}}\right)^2 - \left(\sqrt[5]{\dfrac{x^4-x^5+1}{x^5}}\right) + 1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^4}}{\left(\sqrt[5]{\dfrac{1}{x}-1+\dfrac{1}{x^5}}\right)^4 - \left(\sqrt[5]{\dfrac{1}{x}-1+\dfrac{1}{x^5}}\right)^3 + \left(\sqrt[5]{\dfrac{1}{x}-1+\dfrac{1}{x^5}}\right)^2 - \left(\sqrt[5]{\dfrac{1}{x}-1+\dfrac{1}{x^5}}\right) + 1} =$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[5]{-1}\right)^4 - \left(\sqrt[5]{-1}\right)^3 + \left(\sqrt[5]{-1}\right)^2 - \left(\sqrt[5]{-1}\right) + 1} = \frac{1}{5}$$

Finalmente operando las parte A y B:

$$(*) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2+1}-x\right)}_{A} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^4-x^5+1}+x\right)}_{B} =$$

$$= -\frac{1}{3}+\frac{1}{5} = \frac{-5+3}{15} = -\frac{2}{15}$$

16. Hallar $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x(x+a)}-x}{x-\sqrt[3]{x^3+x^2+5\left[\!\left[\dfrac{1}{x}\right]\!\right]}}$

Solución:

Antes determinaremos la función mayor entero, para obtener el límite en relación a los valores de x:

Cuando x→+∞ la función mayor entero estará definida por: $\left[\!\left[\dfrac{1}{x}\right]\!\right] = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x(x+a)}-x}{x-\sqrt[3]{x^3+x^2}} =$$

Multiplicando por su conjugada se tendrá la siguiente relación:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{x(x+a)}\right)^2-x^2\right)\left(x^2+x\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2\right)}{\left(x^3-\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^3\right)\left(\left(\sqrt{x(x+a)}\right)+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x(x+a)-x^2\right)\left(x^2+x\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2\right)}{\left(x^3-x^3-x^2\right)\left(\left(\sqrt{x(x+a)}\right)+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{(ax)\left(x^2+x\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2\right)}{x^3}}{\dfrac{(-x^2)\left(\left(\sqrt{x(x+a)}\right)+x\right)}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{(ax)}{x}\dfrac{\left(x^2+x\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)+\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2\right)}{x^2}}{\dfrac{(-x^2)}{x^2}\dfrac{\left(\left(\sqrt{x(x+a)}\right)+x\right)}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\left(1+\dfrac{x\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)}{x^2}+\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x}\right)^2\right)}{(-1)\left(\dfrac{\left(\sqrt{x(x+a)}\right)}{x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a\left(1+\dfrac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)}{\sqrt[3]{x^3}}+\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}\right)^2\right)}{(-1)\left(\dfrac{\left(\sqrt{x(x+a)}\right)}{\sqrt{x^2}}+1\right)}=$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{a\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2\right)}{(-1)\left(\sqrt{\frac{x}{x}\left(1+\frac{a}{x}\right)}+1\right)} = \frac{3a}{-2} = -\frac{3}{2}a$$

17. Hallar $\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}\right)$

Solución:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}\right) = \lim_{x \to -\infty}\frac{\frac{4x^3-2x^2-5}{x^3}}{\frac{8x^3+x+2}{x^3}} = \lim_{x \to -\infty}\frac{4-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}}{8+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}} = = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

18. Hallar $\lim_{x \to +\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\frac{\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5}}{\frac{x^5+5}{x^5}} = \lim_{x \to +\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)^3\left(3-\frac{2}{x}\right)^2}{1+\frac{5}{x^5}} =$$

$$= \frac{(8)(9)}{1} = 72$$

19. Hallar $\lim_{x \to +\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

Solución:

$$\lim_{x \to +\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{x^{50}}}{\dfrac{(2x+1)^{50}}{x^{50}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=$$

$$=\frac{2^{20}(3)^{30}}{2^{50}}=\frac{3^{30}}{2^{30}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

20. Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^4+1}}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^4+1}}=\frac{\dfrac{2x^2-3x+4}{x2}}{\dfrac{\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^4}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}}=2$$

21. Hallar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}}{\dfrac{10+x\sqrt{x}}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{10}{x^2}+1\dfrac{\sqrt{x}}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{10}{x^2}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}=\frac{1}{0}=+\infty$$

22. Hallar $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}}{\dfrac{x+1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}{1+\dfrac{1}{x}}=$$

$$=\frac{0}{1}=0$$

23. Hallar $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}} = \frac{1}{1} = 1$$

24. Hallar $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+a}-\sqrt{x}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+a}-\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}+a-\cancel{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{a}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x+a}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{0^2}{x}}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1} = \frac{0}{\sqrt{1}+1} = \frac{0}{2} = 0$$

25. Hallar $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^2+1-x^2\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\frac{x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

26. Hallar $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x-x^3-1}{\sqrt[3]{\left(x^3+x\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x^3+x\right)\left(x^3+1\right)}+\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x-1}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{x^3+x}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{x^3+x}{x^3}\right)\left(\frac{x^3+1}{x^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{x^3+1}{x^3}\right)^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2}}=$$

$$=\frac{0-0}{\sqrt[3]{(1-0)^2}+\sqrt[3]{(1+0)(1+0)}+\sqrt[3]{(1+0)^2}}=$$

$$=\frac{0}{\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}}=\frac{0}{3}=0$$

27. Hallar $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{\left(x^3-2x+1\right)^2}{\left(2x^2+x-1\right)^3}}$

Solución:

$$= \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\dfrac{\left(x^3-2x+1\right)^2}{x^6}}{\dfrac{\left(2x^2+x-1\right)^3}{x^6}}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\left(\dfrac{x^3-2x+1}{x^3}\right)^2}{\left(\dfrac{2x^2+x-1}{x^2}\right)^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{\left(1-\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)^2}{\left(2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)^3}} = \sqrt{\frac{(1-0+0)^2}{(2+0-0)^3}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}$$

28. Hallar $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x}{x}}+\dfrac{\left[(x)^{1/3}\right]^{3/2}}{\left(x^{1/2}\right)^{3/2}}+\dfrac{x^{1/4}}{\left(x^{1/2}\right)^{2/2}}}{\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^3}}+\sqrt[4]{\dfrac{x}{x^2}}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}+\sqrt[4]{\dfrac{1}{x}}}{\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}} = \frac{1+0+0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

29. Hallar $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right) = \text{n}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)-\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+3x^2-x^3}{\left(\sqrt[3]{\left(x^3+3x^2\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2\right)}-\frac{x^2-2x-x^2}{\sqrt{x^2-2x}+x}=$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+1\right)}+\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=$$

$$= \frac{3}{1+1+1}+\frac{2}{1+1}=\frac{3}{3}+\frac{2}{2}=1+1=2$$

1.10 Límites infinitos

En esta presente sección se considerara, límites que cuando se acerca a un valor real $x \to \alpha$ se pueda encontrar un número tan grande como se quiera ∞.

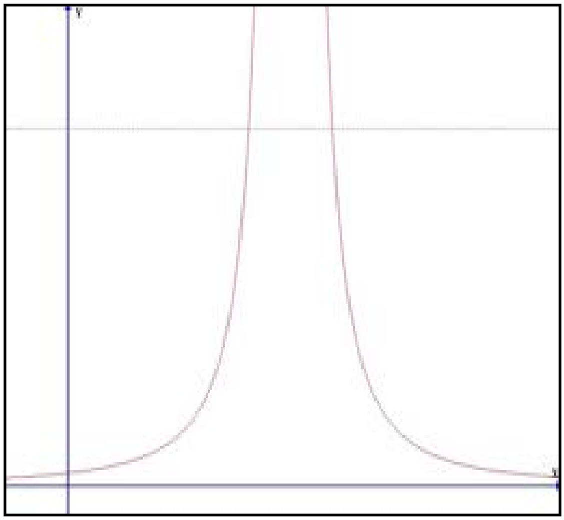
Definición 1.10.1

Límite de $f(x)$ es $+\infty$, cuando x tiende al punto α, y se escribe:

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, implica que $\forall N>0$, existe $\delta>0$ tal que $0<|x-\alpha|<\delta$, entonces $f(x)>N$.

Quiere decir, si para cualquier numero positivo N (tan grande como se quiera), podemos encontrar un número δ tal que, para todos los x dentro del entorno reducido de $|x-\alpha|<\delta$ de radio δ se cumple que $f(x)>N$.

Expresado de otra manera: si cualquier número positivo N que se considere existe un entorno reducido $|x-\alpha|<\delta$ donde la función vale más que N, quiere decir que $f(x)$ puede hacerse mayor que cualquier número con tal de que x, se acerque lo suficiente a α. Por eso se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a α es $+\infty$.

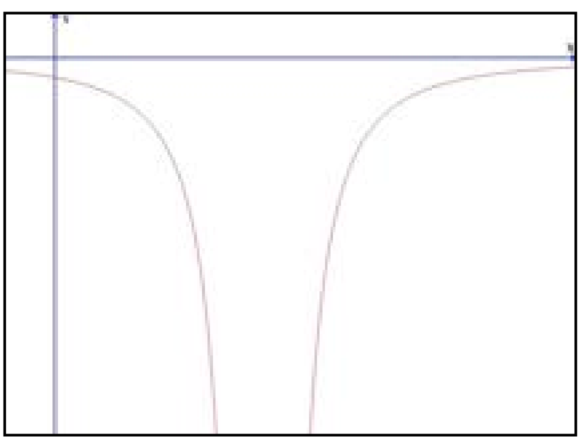


Definición 1.10.2.

Límite de ƒ(x) es -∞, cuando x tiende al punto α, y se escribe:

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, implica que ∀*N*>0, existe δ>0 tal que 0< | x-α | <δ, entonces ƒ(x)<-*N*.

Quiere decir, si para cualquier numero positivo *N* (tan grande como se quiera), podemos encontrar un número δ tal que, para todos los x dentro del entorno reducido de | x-α | < δ de radio δ se cumple que ƒ(x)<-*N*.



Proposición 1.10.1. Si n es cualquier número entero positivo, entonces

i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$, si n es par

iii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$, si n es impar

Definición 1.10.3. Sea f una función cuyo dominio es un conjunto A. En el conjunto A, los dos primeros casos i) y ii), contiene un intervalo de ⟨α,+∞⟩; y en los casos ii) y iv) contiene a un intervalo de la forma ⟨-∞,α⟩; con estas condiciones establecidas se puede definir las siguientes relaciones:

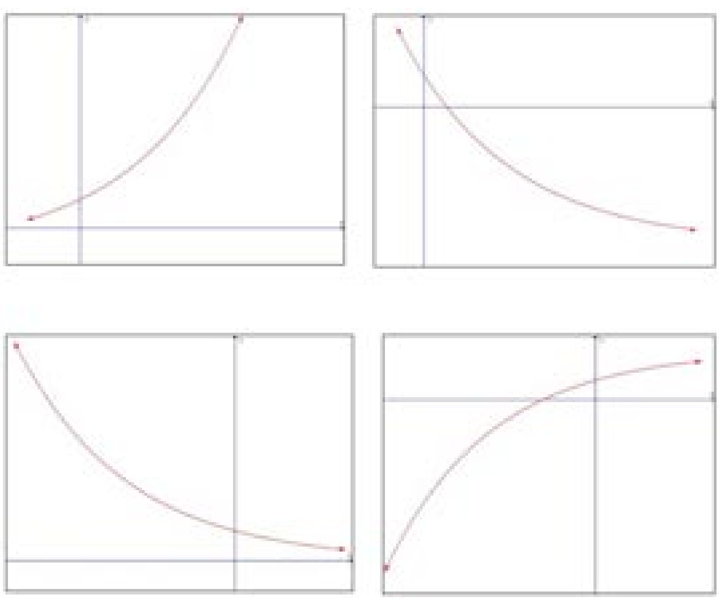
i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall N \gg 0, \exists M > 0 / x > M \Rightarrow f(x) > N$

ii) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall N \gg 0, \exists M > 0 / x > M \Rightarrow f(x) < -N$

iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall N \gg 0, \exists M > 0 / x < -M \Rightarrow f(x) > N$

iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall N \gg 0, \exists M > 0 / x < -M \Rightarrow f(x) < -N$

Las correspondientes gráficas de las relaciones anteriores, se encuentran consiguientemente:



Proposición 1.10.2: Sea α un número real y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, $c \neq 0$, entonces se cumple:

i) $Si: c > 0 \;\; y \;\; f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

ii) $Si: c > 0 \;\; y \;\; f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

iii) $Si \; c < 0 \;\; y \;\; f(x) \to 0$ a través de valores positivos de $f(x)$, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

iv) $Si \; c < 0 \;\; y \;\; f(x) \to 0$ a través de valores negativos de $f(x)$, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

La proposición anterior se puede resumir de la siguiente manera:

i) $$\frac{c}{0^+} = \begin{cases} +\infty \; , \; si \;\; c > 0 \\ -\infty \; , \; si \;\; c < 0 \end{cases}$$

ii) $$\frac{c}{0^-} = \begin{cases} -\infty \; , \; si \;\; c > 0 \\ +\infty \; , \; si \;\; c < 0 \end{cases}$$

Las propiedades de límites entre funciones también se cumplen con los límites infinitos como se puede ver a continuación.

Proposición 1.10.3. Sean f(x)y g(x) dos funciones tales que se cumple:

i) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ entonces:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) + g(x) \right] = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x).g(x) \right] = +\infty$$

ii) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L, L > 0$ y $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ entonces:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) + g(x) \right] = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x).g(x) \right] = \pm\infty$$

iii) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L, L < 0$ y $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ entonces:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) + g(x) \right] = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x).g(x) \right] = \mp\infty$$

iv) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty$ entonces:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x).g(x) \right] = -\infty$$

v) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L, L \neq 0$ y $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$, entonces:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = 0$$

La proposición anterior se puede resumir de la siguiente manera; considerando una constante c arbitraria.

i) $c + (+\infty) = +\infty$

ii) $c + (-\infty) = -\infty$

iii) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

iv) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

v) $(+\infty)(+\infty) = +\infty$

vi) $(-\infty)(-\infty) = +\infty$

vii) $(+\infty)(-\infty) = -\infty$

viii) $\dfrac{c}{\pm\infty} = 0$

ix) $(-\infty)^n = \begin{cases} +\infty \text{ , si } n \text{ es par positivo} \\ -\infty \text{ , si } n \text{ es impar positivo} \end{cases}$

x) $c\,(+\infty) = \begin{cases} +\infty \text{ , si } c > 0 \\ -\infty \text{ , si } c < 0 \end{cases}$

xi) $c(-\infty)=\begin{cases}-\infty\ , \text{ si } c>0\\+\infty\ , \text{ si } c<0\end{cases}$

1.11 Calculo de límites infinito

1. Hallar: $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+2}{x^2-4}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

2. Hallar: $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$

Solución:

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}=\lim_{x\to 4^-}\frac{\sqrt{16-x^2}\sqrt{16-x^2}}{(x-4)\sqrt{16-x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 4^-}\frac{16-x^2}{(x-4)\sqrt{16-x^2}}=\lim_{x\to 4^-}\frac{-\left(x^2-16\right)}{(x-4)\sqrt{16-x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to 4^-}\frac{-(x-4)(x+4)}{(x-4)\sqrt{16-x^2}}=\lim_{x\to 4^-}\frac{-(x+4)}{\sqrt{16-x^2}}=$$

$$=\frac{-\left(4^-+4\right)}{\sqrt{16-16^-}}=\frac{-8^-}{0^+}=-\infty$$

3. Hallar: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-4}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left|\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}-\frac{3}{x^2-4}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left|\frac{x+2-3}{x^2-4}\right|=\lim_{x\to 2}\left|\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}\right|=\infty$$

Por qué utilizando límites laterales, tal como:

i) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)=\left(\frac{1}{0^-}-\frac{3}{0^-}\right)=(-\infty)-(-\infty)=-\infty$$

$$\begin{array}{l} x<2 \\ x-2<0 \\ \Rightarrow x \to 2^- \end{array}$$

ii) $$\lim_{x \to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x^2-4}\right)=\left(\frac{1}{0^+}-\frac{3}{0^+}\right)=(+\infty)-(+\infty)=+\infty \quad \begin{array}{l} x>2 \\ x-2>0 \\ \Rightarrow x \to 2^+ \end{array}$$

Luego de i) y ii) se tendrá:

$$\lim_{x \to 2}\left(\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}\right)=\infty$$

4. Hallar: $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{3x^3+2x^2-1}{2x^2-3x+5}\right)$

Solución:

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{\frac{3x^3+2x^2-1}{x^2}}{\frac{2x^2-3x+5}{x^2}}\right)=\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{\frac{3x^3}{x^2}+\frac{2x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}\right)=$$

$$=\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{3x+2-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)=\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{3x+2-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}\right)=$$

$$=\frac{3(-\infty)+2}{2}=\frac{-\infty+2}{2}=\frac{-\infty}{2}=-\infty$$

5. Hallar: $\lim\limits_{x \to 20^+}\left(\dfrac{5x^3+1}{20x^3-8000x}\right)$

Solución:

$$\lim_{x \to 20^+}\left(\frac{5x^3+1}{20x\left(x^2-400\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x \to 20^+}\left(\frac{5x^3+1}{20x(x-20)(x+20)}\right)=$$

$$\begin{array}{l} x>20 \\ x-20>0 \\ \Rightarrow x \to 20^+ \end{array}$$

$$=\left(\frac{5(8000)+1}{20(20)(0^+)(40)}\right)=\frac{40001}{0^+}=+\infty$$

6. Hallar: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{6/5}}{x^{1/7}+x^{4/7}}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{6/5}}{x^{1/7}+x^{4/7}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x^{6/5}}{x^{4/7}}}{\frac{x^{1/7}+x^{4/7}}{x^{4/7}}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{6/5-4/7}}{\frac{x^{1/7}}{x^{4/7}}+\frac{x^{4/7}}{x^{4/7}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[35]{x^{22}}}{\sqrt[7]{\frac{1}{x^3}}+1}\right)=\left(\frac{\sqrt[35]{(+\infty)^{22}}}{\sqrt[7]{0}+1}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt[35]{+\infty}}{1}=\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

7. Hallar: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^{7/6}+x^{1/3}}{5x^{4/3}+x^{1/4}}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6x^{7/6}+x^{1/3}}{5x^{4/3}+x^{1/4}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{6x^{7/6}+x^{1/3}}{x^{7/6}}}{\frac{5x^{4/3}+x^{1/4}}{x^{7/6}}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6+\frac{x^{1/3}}{x^{7/6}}}{\frac{5x^{4/3}}{x^{7/6}}+\frac{x^{1/4}}{x^{7/6}}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{6+\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}}{5\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt[12]{x^{11}}}}\right)=$$

$$=\frac{6+\frac{1}{+\infty}}{5\sqrt[6]{+\infty}+\frac{1}{+\infty}}=\frac{6}{(+\infty)+0}=0$$

8. Hallar: $\lim_{h\to0}\left(\frac{\sqrt{h^2+2h+4}+\sqrt[3]{h^3+3h^2+3h-8}+6h}{h\sqrt{h+1}-h}\right)$

Solución:

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{\sqrt{h^2+2h+4}+\sqrt[3]{h^3+3h^2+3h-8}+6h}{h\sqrt{h+1}-h}\right)=$$

$$=\lim_{h \to 0}\left(\frac{\sqrt{h^2+2h+4}}{h\left(\sqrt{h+1}-1\right)}\right)+\lim_{h \to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{h^3+3h^2+3h-8}}{h\left(\sqrt{h+1}-1\right)}\right)$$

$$+\lim_{h \to 0}\left(\frac{6h}{h\left(\sqrt{h+1}-1\right)}\right)=$$

$$=\underbrace{\lim_{h \to 0}\left(\frac{\sqrt{h^2+2h+4}}{h\left(\sqrt{h+1}-1\right)}\right)}_{A}+\underbrace{\lim_{h \to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{h^3+3h^2+3h-8}}{h\left(\sqrt{h+1}-1\right)}\right)}_{B}$$

$$+\underbrace{\lim_{h \to 0}\left(\frac{6}{\sqrt{h+1}-1}\right)}_{C}=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{\sqrt{4}}{0\left(\sqrt{0+1}-1\right)}\right)}_{A}+\underbrace{\left(\frac{\sqrt[3]{0-8}}{0\left(\sqrt{0+1}-1\right)}\right)}_{B}+\underbrace{\left(\frac{6}{\sqrt{0+1}-1}\right)}_{C}=$$

$$=\underbrace{\left(\frac{2}{0}\right)}_{A}+\underbrace{\left(\frac{-2}{0}\right)}_{B}+\underbrace{\left(\frac{6}{0}\right)}_{C}=\underset{A}{\infty}+\underset{B}{\infty}+\underset{C}{\infty}=\infty$$

9. Hallar: $\lim_{x \to 2}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+1}\right)$

Solución:

Para resolver el problema, se debe de probar que:

i) $\lim_{x \to 2^-}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+1}\right)$

ii) $\lim_{x \to 2^+}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+1}\right)$

a) Primeramente resolviendo la parte i)

$$\lim_{x \to 2^-}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+1}\right)=\lim_{x \to 2^-}\left(\frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{x^2+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{(2-2^-)(2+2^-)}}{(2^-)^2+1}\right)=\frac{0^+}{5}=0^+$$

$$x<2$$
$$-x>-2$$
$$2-x>0$$
$$\Rightarrow 2-x\to 0^+$$

Cuando la aproximación a dos es por la izquierda.

b) Ahora resolviendo la parte ii)

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{\sqrt{(2-x)(2+x)}}{x^2+1}\right)=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{(2-2^+)(2+2^+)}}{(2^+)^2+1}\right)=\frac{0^-}{5}=0^-$$

$$x<2$$
$$-x>-2$$
$$2-x>0$$
$$\Rightarrow 2-x\to 0^-$$

Cuando la aproximación a dos es por la derecha.

c) De las partes a) y b) podemos concluir:

Si $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+1}\right)=0^+\neq 0^-=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+1}\right)$

entonces,

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+1}\right)\ \nexists$$

10. Hallar: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{3x+4x^2-x^3}+x}{x^2+5x-1}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{3x+4x^2-x^3}+x}{x^2+5x-1}\right)=$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\dfrac{\sqrt{3x + 4x^2 - x^3} + x}{x^2}}{\dfrac{x^2 + 5x - 1}{x^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\sqrt{\dfrac{3x + 4x^2 - x^3}{x^4}} + \dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{5x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\sqrt{\dfrac{3x}{x^4} + \dfrac{4x^2}{x^4} - \dfrac{x^3}{x^4}} + \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{x^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\sqrt{\dfrac{3}{x^3} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}} + \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{x^2}} \right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{0 + 0 - 0} + 0}{1 + 0 - 0} \right) = \frac{0}{1} = \nexists$$

2 . CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Una idea sencilla de una función continua en un punto es aquella que no "da saltos" o que "sea interrumpida", es decir aquella que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.

Matemáticamente la definición de función continua es un poco más compleja, y dice así:

Definición

Una función $f(x)$ es continua en un punto x=α si:

Dado $\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ \delta > 0\ \ /\ \forall\ x, \left|x-a\right| < \delta\ \ \Rightarrow \left|f(x)-f(a)\right| < \varepsilon$,

ó

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ \delta > 0\ \ /\ \forall\ x,\ a-\delta < x < a+\delta$$
$$\Rightarrow\ f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon$$

Dicho de otra forma, si nos acercamos al punto α, entonces las imágenes se acercan a la imagen de α, $f(α)$

Si $f(x)$ no es continua en x=α se dice que $f(x)$ es discontinua en α o que tiene una discontinuidad en x= α.

2.1 Definicion función continua

Se dice que $f(x)$ es continua en x= α si:

i) $\text{Existe}\ \ f(a)$

ii) $\text{Existe}\ \ \lim_{x\to a} f(x)$

iii) $\text{Existe}\ \ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

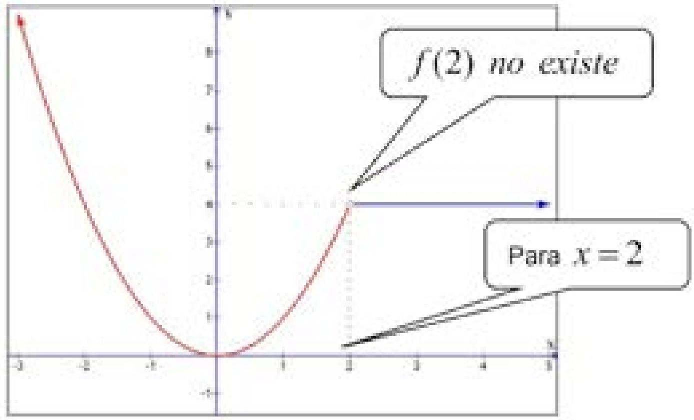
Por otro lado si por lo menos una de las tres condiciones no se cumple para x=α, se dice que la función $f(x)$ es discontinua en α.

Gráficamente podemos representar las relaciones anteriores, mediante los siguientes casos.

a) Para i) donde la imagen debe existir:

Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , si\ x < 2 \\ 4 & , si\ x \geq 2 \end{cases}$

Gráficamente se puede representar:

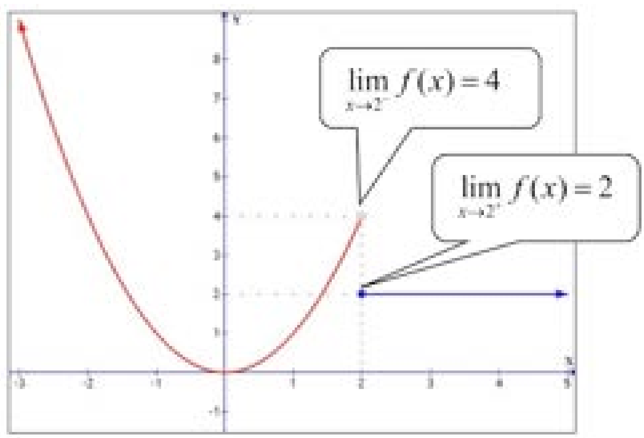


Como se puede apreciar la función $f(x)$ es discontinua por que en x=2 la imagen $f(2)$ no existe; es decir que la primera condición de continuidad no cumple.

b) Para ii) donde el límite debe existir:

Sea la función: $f(x)=\begin{cases} x^2 & , si\ x<2 \\ 2 & , si\ x\geq 2 \end{cases}$

Gráficamente se puede representar:



Para determinar que el límite existe, se debe calcular usando los límites laterales, gráficamente podemos ver que:

- Límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$$

- Límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2 = 2$$

como los límites anteriores son diferentes, es decir:

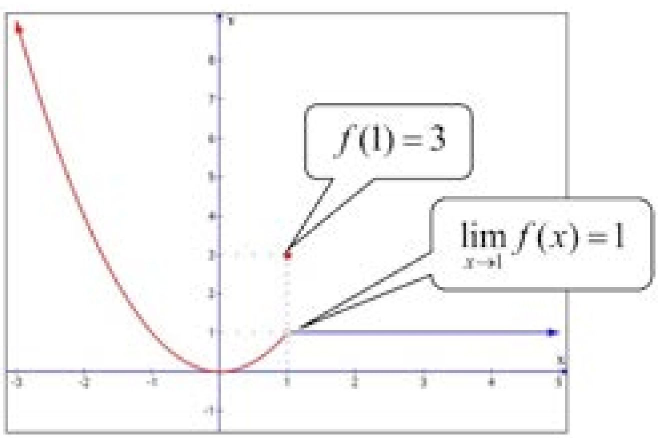
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 \neq 2 = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

Podemos afirmar luego, no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$. Por tanto la función no es continua en x=2.

c) Para iii) donde el límite no existe:

Sea la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , si\ x < 2 \\ 3 & , si\ x = 2 \\ 2 & , si\ x > 2 \end{cases}$

Gráficamente se puede representar:



Primero utilizando los límites laterales podemos determinar que el límite existe, puesto que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

Por otro lado, la imagen de x=1 es $f(1)=3$

Pero, la función es discontinua, porque en x=1 no coincide la imagen con el límite, es decir:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \neq 3 = f(1)$$

2.2 Calculo de continuidad

1. Dada la función.

$$f(x) = \begin{cases} 5x-3 & , \; si \;\; x \neq 1 \\ 1 & , \; si \;\; x = 1 \end{cases}$$

Determinar si la función es continua en el punto x=1.

Solución:

Realizando el cálculo de continuidad, utilizando las tres condiciones:

i) Determinando la imagen:

De la definición de la función: si x=1 cumple $f(1)1$

ii) Determinando el límite:

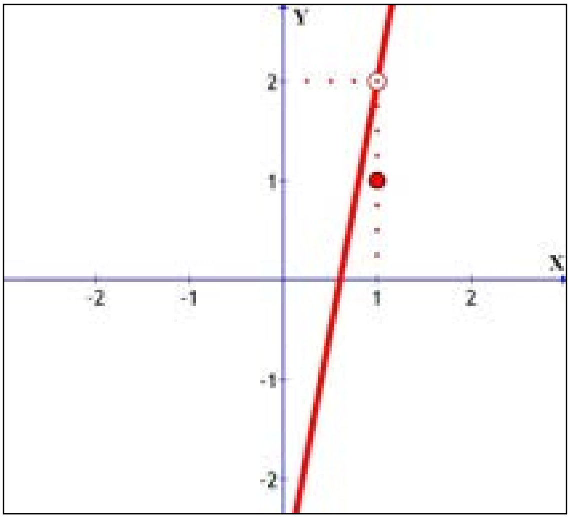
Para averiguar si el $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe, se debe hacer el cálculo usando los límites laterales, pero en este caso como no hay aproximaciones por la derecha o por la izquierda, se tiene directamente:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 5x-3 = 5(1)-3 = 2$$

iii) Determinado si el límite es igual a la imagen:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq 1 = f(1)$$

Por tanto como no cumple la condición iii), se indica que la función no es continua en x=1.



2. Dada la función.

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2 & , si \;\; x<1\\ 1 & , si \;\; x=1\\ 1-|x| & , si \;\; x>1\end{cases}$$

Determinar si la función es continua en el punto x=1

Solución:

Realizando el cálculo de continuidad, utilizando las tres condiciones:

i) Determinando la imagen:

De la definición de la función: si x=1 cumple $f(1)=1$

ii) Determinando el límite:

Para averiguar si el $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe, se debe hacer el cálculo usando los límites laterales:

- $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(1-x^2)=(1-1^2)=0$
- $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(1-|x|\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(1-x\right)=\left(1-1\right)=0$

Considerando el valor positivo, por que

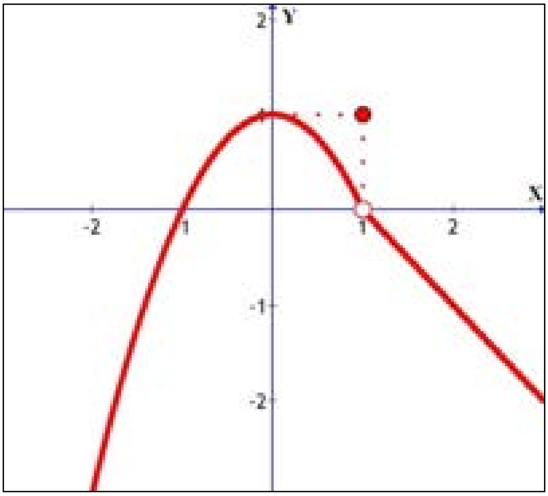
$$|x|=\begin{cases}x & , x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

Luego: $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

iii) Determinado si el límite es igual a la imagen:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$$

Por tanto como no cumple la condición iii), se indica que la función no es continua en x=1.



3. Dada la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \; si \;\; x \geq -1 \\ 1-|x| & , \; si \;\; x < -1 \end{cases}$$

Determinar si la función es continua en el punto x=-1

Solución:

Realizando el cálculo de continuidad, utilizando las tres condiciones:

i) Determinando la imagen:

De la definición de la función: si x=-1 cumple $f(-1)=(-1)^2=1$

ii) Determinando el límite:

Para averiguar si el $\lim_{x \to -1} f(x)$ existe, se debe hacer el cálculo usando los límites laterales:

- $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(1-|x|\right) = \lim_{x \to -1^-} \left(1+x\right) = \left(1+(-1)\right) = 0$

- $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(x^2\right) = (-1)^2 = 1$

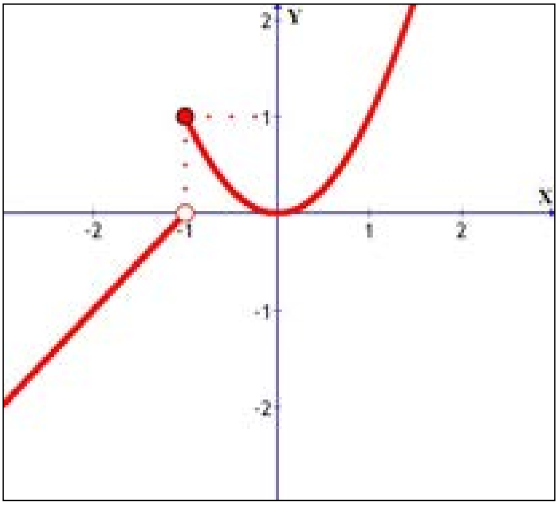
Luego: $\lim_{x \to -1} f(x)$ no existe

iii) Determinado si el límite es igual a la imagen:

$$\lim_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$$

Por tanto como no cumple la condición ii), se indica que la función no es continua en x=-1.

Gráficamente:



4. Dada la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ si \ \ x \geq -1 \\ 1-|x| & , \ si \ \ x < -1 \end{cases}$$

Determinar si la función es continua en el punto x=-1

Solución:

Realizando el cálculo de continuidad, utilizando las tres condiciones:

i) Determinando la imagen:

De la definición de la función: si x=-1 cumple $f(-1)=(-1)^2=1$

ii) Determinando el límite:

Para averiguar si el $\lim_{x \to -1} f(x)$ existe, se debe hacer el cálculo usando los límites laterales:

- $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(1 - |x|\right) = \lim_{x \to -1^-} (1 + x) = \left(1 + (-1)\right) = 0$
- $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(x^2\right) = (-1)^2 = 1$

Luego: $\lim_{x \to -1} f(x)$ no existe

iii) Determinado si el límite es igual a la imagen:

$$\lim_{x \to -1} f(x) \neq f(-1)$$

Por tanto, como no cumple la condición ii), se indica que la función no es continua en x=-1.

5. Dada la función.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 \ , & si \ -2 \leq x \leq -1 \\ 1 \ , & si \ -1 < x < 1 \\ 2-x \ , & si \ \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Determinar si la función es continua en los puntos x=-1 y x=1

Solución:

a) Realizando el cálculo de continuidad para x=-1, utilizando las tres condiciones:

i) Determinando la imagen:

De la definición de la función: si x=-1 cumple f(-1)=x+2=(-1)+2=1

ii) Determinando el límite:

Para averiguar si el $\lim_{x \to -1} f(x)$ existe, se debe hacer el cálculo usando los límites laterales:

- $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x + 2) = \left((-1) + 2\right) = 1$
- $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (1) = 1$

Luego: $\lim_{x \to -1} f(x) = 1$ existe.

iii) Determinado si el límite es igual a la imagen:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 1 = 1 = f(-1)$$

Por tanto, como cumple las tres condiciones, se indica que la función es continua en x=-1.

b) Realizando el cálculo de continuidad para x=1, utilizando las tres condiciones:

i) Determinando la imagen:

De la definición de la función: si x=1 cumple $f(1)=2-x=2-(1)=1$

ii) Determinando el límite:

Para averiguar si el $\lim_{x\to1} f(x)$ existe, se debe hacer el cálculo usando los límites laterales:

- $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(1) = 1$
- $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(2-x) = (2-1) = 1$

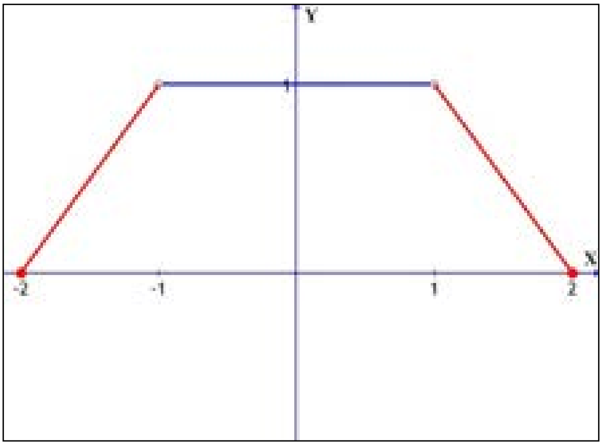
Luego: $\lim_{x\to1} f(x) = 1$ existe.

iii) Determinado si el límite es igual a la imagen:

Como $\lim_{x\to1} f(x) = 1 = 1 = f(1)$

Por tanto, como cumple las tres condiciones, se indica que la función es continua en x=1.

Gráficamente:



6. Dada la función.

$$f(x)=\begin{cases}-1 & , si \; -3<x\le 0\\ x-1 & , si \;\; 0<x<2\\ 5-x^2 & , si \;\; 2\le x\le 2\sqrt{3}\end{cases}$$

Determinar si la función es continua en los puntos x=0 y x=2

Solución:

a) Realizando el cálculo de continuidad para x=0, utilizando las tres condiciones:

i) Determinando la imagen:

De la definición de la función: si x=0 cumple $f(0)=-1$

ii) Determinando el límite:

Para averiguar si el $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, se debe hacer el cálculo usando los límites laterales:

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-1) = -1$

Luego: $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$ existe.

iii) Determinado si el límite es igual a la imagen:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -1 = -1 = f(0)$$

Por tanto, como cumple las tres condiciones, se indica que la función es continua en x=0.

b) Realizando el cálculo de continuidad para x=2, utilizando las tres condiciones:

i) Determinando la imagen:

De la definición de la función: si x=2 cumple $f(2)=5-x^2=5-(2)^2=1$

ii) Determinando el límite:

Para averiguar si el $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe, se debe hacer el cálculo usando los límites laterales:

- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x-1) = (2-1) = 1$
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (5-x^2) = (5-4) = 1$

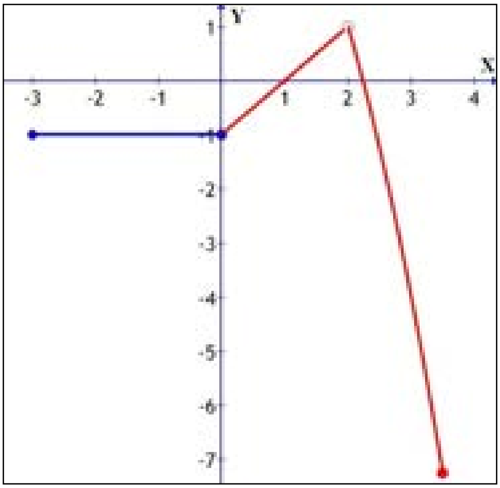
Luego: $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ existe.

iii) Determinado si el límite es igual a la imagen:

Como $\lim_{x \to 2} f(x) = 1 = 1 = f(2)$

Por tanto, como cumple las tres condiciones, se indica que la función es continua en x=2.

Gráficamente:



7. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4} & , si \;\; x\neq 4\\ L & , si \;\; x=4\end{cases}$$

Verifique si es posible determinar un número L para que la función $f(x)$ sea continua.

Solución:

Realizando el cálculo de continuidad, utilizando las tres condiciones:

i) Determinando la imagen:

De la definición de la función $f(4)=L$ debe de existir.

ii) Determinando el límite:

el $\lim_{x\to 4} f(x)$ existe, usando los límites laterales:

- $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\left(\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}\right)=$

  $=\lim_{x\to 4^-}\dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-4)}=\lim_{x\to 4^-}(x+1)=5$

- $\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\left(\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}\right)=$

  $=\lim_{x\to 4^+}\dfrac{(x-4)(x+1)}{(x-4)}=\lim_{x\to 4^+}(x+1)=5$

Luego: $\lim_{x \to 4} f(x) = 5$ existe

iii) Determinado si el límite es igual a la imagen: Verificado la última condición, para que sea continua:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$$

$$5 = L$$

Por tanto para que sea continua en x=4 debe cumplir *L*=5.

8. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & , si \;\; x > 0 \\ 1 - x^2 & , si \;\; x < 0 \\ L & , si \;\; x = 0 \end{cases}$$

Verifique si es posible determinar un número *L* para que la función *ƒ*(x) sea continua.

Solución:

Antes de realizar las condiciones de continuidad, tendremos que representar a la función valor absoluto dentro de su dominio adecuado:

Por definición:

$$|x| = \begin{cases} x \;, si \;\; x \geq 0 \\ -x \;, si \;\; x < 0 \end{cases}$$

Luego, la nueva función queda definido como:

$$f(x) = \begin{cases} x & , si \;\; x > 0 \\ 1 - x^2 & , si \;\; x < 0 \\ L & , si \;\; x = 0 \end{cases}$$

Realizando el cálculo de continuidad, utilizando las tres condiciones, para x=0:

i) Determinando la imagen:

De la definición de la función *ƒ*(0)=*L* debe de existir.

ii) Determinando el límite:

el $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, usando los límites laterales:

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(1 - x^2\right) = 1$

- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0$

Luego: $\lim_{x \to 0} f(x) \quad \nexists$

iii) Determinado si el límite es igual a la imagen: Verificado la última condición, para que sea continua:

Como $\lim_{x \to 0} f(x) \quad \nexists$ y además $f(0)=L$.

Por tanto, la función f(x); no es continua en x=0.

REFERENCIAS

[1] Louis Leithold (1998): El Cálculo (Oxford University Press - Harla) Mexico.

[2] L. D. Kudriavtsev (1983): Curso de Análisis Matemático (Editorial MIR) Moscu.

[3] George B. Thomas (2006): Calculo Tomo I: Una variable (Pearson Educación) Mexico.

[4] M. Mitacc Meza (1996): Tópicos del Cálculo (Vol I: Impoffot) Perú.

[5] Hasser La Salle (1983): Análisis Matemático (Tomo I: Trillas) Mexico.

[6] Claudio Pita Ruiz (1998): Calculo de una Variable (Prentice - Hall) Mexico.

[7] Elon Lages Lima (2004): Análisis Real (Volumen I) Brasil.

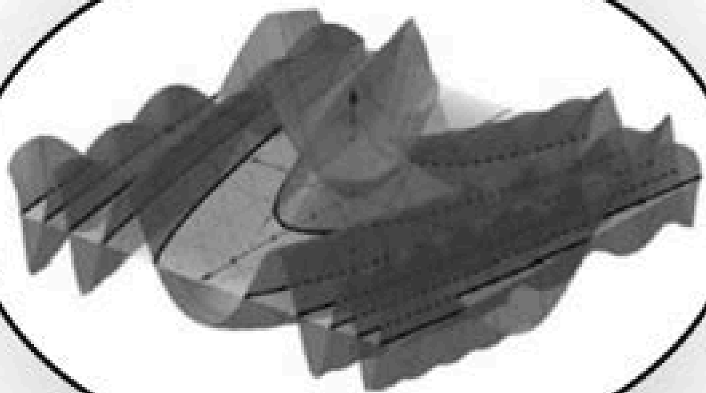
SOBRE LOS AUTORES

JUAN PERCY MAMANI CUTIPA - Universidad Nacional de Moquegua. Moquegua - Perú. https://orcid.org/0000-0002-6415-3183.

OSMAR CUENTAS TOLEDO - Universidad Nacional de Moquegua. Moquegua - Perú. https://orcid.org/0000-0003-3612-1309.

LÍMITES DE FUNCIONES REALES

para estudiantes de ciéncias e ingenierías



www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

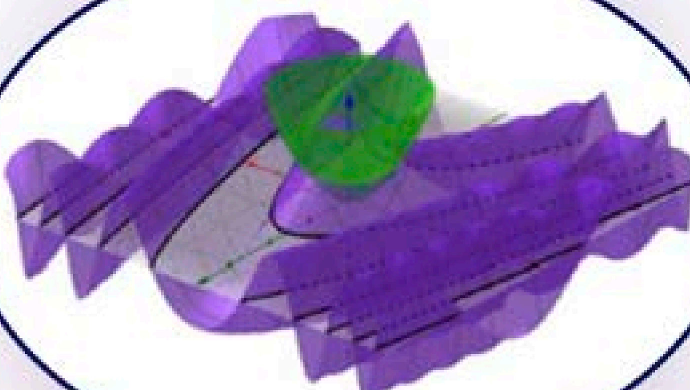
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora

Ano 2022

LÍMITES DE FUNCIONES REALES

para estudiantes de ciéncias e ingenierías



www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora

Ano 2022