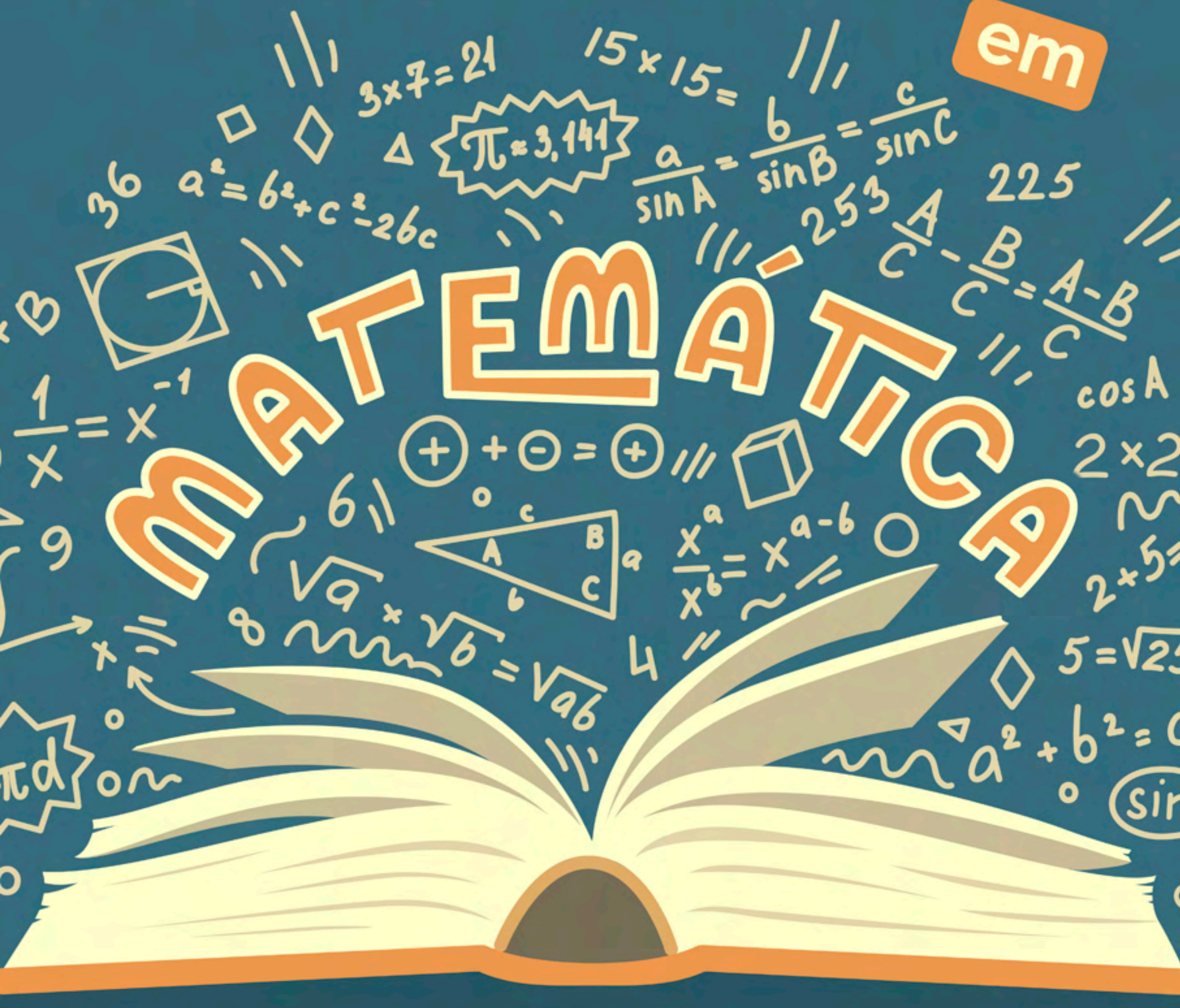
Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

PESQUISAS DE VANGUARDA em MATEMÁTICA e suas aplicações



2

Atena Editora
Ano 2021

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

PESQUISAS DE VANGUARDA em MATEMÁTICA e suas aplicações 2

Atena
Editora
Ano 2021

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Gabriel Motomu Teshima
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2021

Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações 2

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Yaiddy Paola Martinez
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: Os autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P474 Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5983-773-1
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.731220601

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Atena Editora
Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, é que contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a Educação no Brasil acaba, muitas vezes, sendo uma reprodutora de Desigualdades.

O contexto social, político e cultural, como evidenciaram Silva, Nery e Nogueira (2020), tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático (SILVA; OLIVEIRA, 2020).

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático, como assevera D’Ambrósio (1993), e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o volume 2 do livro “***Pesquisas de Vanguarda em Matemática e suas Aplicações***” nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática e do pesquisador em Matemática aplicada sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores da

Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

DáMBROSIO, Beatriz S. Formação de Professores de Matemática Para o Século XXI: O Grande Desafio. **Pro-Posições**. v. 4. n. 1 [10]. 1993.

SILVA, A. J. N. DA; NERY, ÉRICA S. S.; NOGUEIRA, C. A. Formação, tecnologia e inclusão: o professor que ensina matemática no “novo normal”. **Plurais Revista Multidisciplinar**, v. 5, n. 2, p. 97-118, 18 ago. 2020.

SILVA, A. J. N. da; OLIVEIRA, C. M. de. A pesquisa na formação do professor de matemática. **Revista Internacional de Formação de Professores**, [S. l.], v. 5, p. e020015, 2020. Disponível em: https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/rifp/article/view/41. Acesso em: 18 maio. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

PESQUISAS EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DA EVOLUÇÃO DO ENSINO DE MATEMÁTICA EM ALGUMAS INSTITUIÇÕES ESCOLARES DO BRASIL

Data de aceite: 01/12/2021

Edivânia Graciela Neves Lima
Mestranda do Programa de Pós Graduação em Educação- PPGE. UFMT- Universidade Federal de Mato Grosso
Cuiabá, MT-, Brasil
http://orcid.org/0000-0003-3305-3283

Gladys Denise Wielewski
UFMT- Universidade Federal de Mato Grosso. Pró-reitoria de Ensino e Graduação, Departamento de Matemática
Cuiabá, MT – Brasil
https://orcid.org/0000-0002-2473-2957

RESUMO: É apresentado neste artigo uma investigação que busca analisar produções realizadas no Brasil entre os de 2008 a 2020 que teve como objeto de estudo a História da Educação Matemática com foco nas Instituições Escolares. Cuja questão é: O que as pesquisas brasileiras sobre a história da educação matemática desenvolvidas envolvendo instituições escolares revelam a partir das fontes encontradas? O objetivo foi verificar como pesquisadores em nível acadêmico construíram a história de algumas instituições escolares tendo como suporte documentos e narrativas docentes. Sua abordagem metodológica foi a pesquisa qualitativa bibliográfica e documental, tendo como método a leitura dos resumos e resultados dos trabalhos pesquisados em bases de dados: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, Biblioteca Digital Brasileira, Google Acadêmico e Bibliotecas Virtuais de Universidades Brasileiras. Na análise dos trabalhos percebe-se que a finalidade foi de investigar os estudos, os vestígios históricos e as práticas docentes no cotidiano escolar.

PALAVRAS-CHAVE: Práticas Docentes – Ensino da Matemática em Instituições Escolares – Testemunhos de Professores- História da Educação Matemática.

RESEARCH IN THE HISTORY OF MATHEMATICS EDUCATION: AN ANALYSIS OF THE EVOLUTION OF MATHEMATICS TEACHING IN SOME SCHOOL INSTITUTIONS IN BRAZIL

ABSTRACT: This article presents an investigation that seeks to analyze productions carried out in Brazil between 2008 and 2020 that had as its object of study the History of Mathematics Education with a focus on School Institutions. Whose question is: What do Brazilian research on the history of mathematics education developed involving school institutions reveal from the sources found? The objective was to verify how researchers at the academic level constructed the history of some school institutions supported by documents and teaching narratives. Its methodological approach was a qualitative bibliographic and documentary research, with the method of reading the abstracts and results of the researched works in databases: Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel, Brazilian Digital Library, Academic Google and Virtual Libraries of Brazilian Universities. In the analysis of the works, it is clear that the purpose was to investigate the studies, historical traces

and teaching practices in everyday school life.
KEYWORDS: Teaching Practices – Teaching Mathematics in School Institutions – Testimonies from Teachers – History of Mathematics Education.

INVESTIGACIÓN EN LA HISTORIA DE LA EDUCACIÓN EN MATEMÁTICAS: UN ANÁLISIS DE LA EVOLUCIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN ALGUNAS INSTITUCIONES ESCOLARES DE BRASIL

RESUMEN: Este artículo presenta una investigación que busca analizar producciones realizadas en Brasil entre 2008 y 2020 que tuvieron como objeto de estudio la Historia de la Educación Matemática con enfoque en Instituciones Escolares. La pregunta de quién es: ¿Qué revelan las investigaciones brasileñas sobre la historia de la educación matemática desarrolladas con instituciones escolares a partir de las fuentes encontradas? El objetivo fue verificar cómo los investigadores a nivel académico construyeron la historia de algunas instituciones escolares sustentada en documentos y narrativas didácticas. Su enfoque metodológico fue una investigación bibliográfica y documental cualitativa, con el método de lectura de los resúmenes y resultados de los trabajos investigados en bases de datos: Coordinación para el Perfeccionamiento del Personal de Educación Superior, Biblioteca Digital Brasileña, Google Académico y Bibliotecas Virtuales de Universidades Brasileñas. En el análisis de las obras, queda claro que el propósito era indagar en los estudios, huellas históricas y prácticas docentes en la vida escolar cotidiana.
PALABRAS CLAVE: Prácticas docentes - Enseñanza de las matemáticas en las instituciones escolares - Testimonios de los docentes - Historia de la educación matemática.

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa tem como objetivo verificar como pesquisadores em nível cadêmico construíram a história de algumas instituições escolares tendo como suporte documentos e narrativas docentes e com isso trazer uma reflexão acerca de produções científicas que abordam o tema "História da Educação Matemática com abordagem em Instituições Escolares. Dessa maneira, tratamos de reunir autores que discorrem sobre seu contexto e, assim, investigar como se deram os processos de ensino aprendizagem entre os anos de 2008 a 2020 e quais foram mais relevantes no processo de ensino da matemática ao longo deste periodo.

Para realizar esse estudo foram utilizadas as seguintes palavras chaves: História da Educação Matemática com abordagem nas Instituições de Ensino. Para a execução da consulta, foram utilizado os seguintes bancos virtuais: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações-BDTD, Google Acadêmico, além de Bibliotecas Virtuais de Universidades brasileiras.

Optou-se por pesquisar nas categorias teses e dissertações, com publicações em português com recorte temporal no período de 2008 a 2020, que justifica-se pelo fato de que os trabalhos analisados descrevem Historias de Instituições Escolares entre os periodos de 1885 a 1990.

Que por meio desses foi possível refletir e analizar como se deu o sistema de ensino, as práticas de sala de aula, as mudanças do sistema de ensino e outras informações que podem ser de grande valia para o nosso presente. O critério para seleção das pesquisas foi a leitura dos títulos e dos resumos dos trabalhos encontrados, os quais faziam relação com o objeto da pesquisa.

PESQUISAS QUE TRATAM DA HISTÓRIA DO ENSINO DA MATEMÁTICA EM INSTITUIÇÕES ESCOLARES

Na intenção de construir um mapeamento sobre estudos acadêmicos que viessem a colaborar com o tema aqui pesquisado, realizou-se um levantamento bibliográfico de teses e dissertações que pudessem a sanar dúvidas em relação às nossas práticas de ensino e o nosso trabalho enquanto pesquisadores educacionais. Foram encontrados trabalhos por diversos Estados do Brasil. Dos 14 trabalhos encontrados, 5 estão localizados no Mato Grosso, 1 no Estado Mato Grosso do Sul, 3 no Estado de São Paulo, 2 no Estado do Rio de Janeiro, 02 no Estado do Paraná e 1 no Estado do Maranhão. Dessa forma por esta estimativa, percebe-se o número baixo de pesquisadores que se dedicam as pesquisas sobre a temática dada, nos programas de pós-graduação entre os anos de 2008 a 2020.

Nº	Ano	Titulo	Autor(a)	Titulo
01	2008	T	DALCIN, Andreia	Cotidiano e Práticas Salesianas no Ensino de mátematica entre 1885 – 1929 Colégio Liceu Coração de Jesus de São Paulo: Construindo uma História /Andréia Dalcin. Campinas, SP.
02	2009	D	BENTO, Regina Thaíse ferreira	Alguns Aspectos sobre a prática Docente na Década de 1970: O Ensino Colegial e a Disciplina de Matemática.
03	2010	D	MARQUES, Odacir Elias Vieira	Primórdios do Ensino de Matemática no Município de Sinop-MT: Memórias de alguns professores que lecionaram a disciplina de matemática na década de 1970.
04	2010	D	ROCHA, Marcelo Pereira	O Ensino Secundário no Sul do Estado de Mato Grosso no contexto das reformas Educacionais: O Ginásio Osvaldo Cruz (1927-1949).
05	2011	T	OTONE, Maryneusa Cordeiro	Uma história da Constituição da Matemática do Colégio no Cotidiano Escolar.
06	2012	D	MOURA, Elmha Coelho Martins	O Ensino de Matemática na escola Industrial de Cuiabá/ MT no Período de 1942 a 1968.
07	2013	D	SANTOS, Reginaldo Jose dos	História da Educação Matemática no Estado de Mato Grosso Movimento da Matemática Moderna no Município de Juara no período de 1970 a 1990, a partir da Escola Estadual Oscar Soares.
08	2014	D	COSTA, Letícia Maria Ferreira	O Movimento Da Matemática Moderna- o caso do Colégio de São bento do Rio de Janeiro.

09	2014	D	STANISZEWSK, Rosane Souza	Uma Investigação sobre o Ensino da matemática nas Escolas Polonesas em São Mateus do Sul, Paraná.
10	2014	D	VARELA, Sandra Maria Banak	Aspectos Históricos sobre a Formação e a Atuação de Professores de Matemática no Município de Cascavel- PR.
11	2017	T	SOARES, Waléria de Jesus Barbosa	Uma História da Matemática Escolar na Cidade de São Luís do Século XIX: Livros, autores e Instituições.
12	2018	D	GAMA, Marta Maria	O Ensino de Geometria e a Formação de professores primários: Percursos Historiográficos em Mato Grosso (1960- 1980).
13	2020	D	MORAES, Violeta Cristina Soares.	História do Colégio Anchieta do Maranhão da Cidade de Pinheiro (1970-1973).
14	2020	D	BRESCOVIT, Luiz Eduardo	Ao Cadernos de Planejamento e o Ensino de Matemática na Escola Primária Paraense na Década de 1980.

Quadro 1- Identificação dos trabalhos que fazem parte da pesquisa em História da Educação Matemática que focam nas instituições escolares, defendidos no período de 2008 à 2020.

Fonte: A pesquisadora (2020).

A primeira apresentação é da Tese de Doutorado de Dalcin (2008). O objetivo desta pesquisa é investigar o ensino de matemática por meio de estudo de práticas e do cotidiano da Escola Salesiana Liceu Coração de Jesus em São Paulo, entre 1885 e 1929. O trabalho busca construir com uma história tendo presente os pressupostos teóricos de Michel de Certeau, André Chervel, Dominique Juliá e outros autores da história cultural, da Educação e da Educação Matemática no Brasil, e é sem dúvida uma história dentre as possíveis, ou seja um exercício de reflexão e ou escrita sobre um passado não vivido, cuja investigação permite que possa reconstruir elementos importantes para a compreensão do desenvolvimento do ensino de matemática no Brasil.

O segundo trabalho foi a Dissertação de Mestrado de Bento (2009). Tem como objetivo investigar a prática docente no ensino Colegial durante o movimento de reformulação do ensino de matemática, que ocorreu no Brasil entre os anos de 1960 e 1970, conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM). Para chegar aos objetivos almejados utilizou- se para as pesquisa as legislações vigentes na época, um caderno de aluno, que frequentou o primeiro ano colegial no ano de 1970 e entrevistas com duas pessoas, uma com a dona do caderno e outra com a professora que ministrou aulas de matemática para esta aluna.

O terceiro trabalho pesquisado foi a Dissertação de Mestrado de Marques (2010). O ano pesquisado foi em 1972, na primeira escola de Sinop. Essa escola foi regulamentada em 1976 com o nome de “Nilza de Oliveira Pipino, seu objetivo foi o de registrar e compreender o contexto do ensino de matemática no período da colonização, na perspectiva de alguns professores que lecionaram a disciplina de matemática nos anos finais do Ensino Fundamental na década de 1970. A metodologia teve como aporte a História Oral, sendo uma ferramenta para reconstrução histórica da experiência em sala de aula destes professores.

O quarto trabalho pesquisado foi a dissertação de Mestrado de Rocha (2010). O objetivo geral foi de analisar o processo de implantação do ensino secundário, via Ginásio Osvaldo Cruz, no período de 1927 a 1949, em Campo Grande, Capital de Mato Grosso do Sul, e os objetivos específicos: a) identificar as razões da presença do setor privado no oferecimento do ensino secundário em Campo Grande; b) verificar como ocorreu o processo de equiparação, ou seja, o reconhecimento oficial do Ginásio Osvaldo Cruz, no âmbito das reformas educacionais nacionais do período; c) investigar o processo de organização escolar e o papel social desempenhado pelo Ginásio Osvaldo Cruz, como instituição particular de ensino secundário, em Campo Grande. O estudo tem como base fundamental as fontes documentais constituídas por leis, regulamentos, decretos, mensagens presidenciais enviadas à Assembleia Legislativa do Estado de Mato Grosso, relatórios dos intendentes de Campo Grande e apresentado pelo diretor do Ginásio levantadas em arquivos públicos e particulares, atas da Câmara Municipal de Campo Grande e jornais da época.

O quinto trabalho a ser analisado é a Tese de Doutorado de Otone (2011). Esta pesquisa tem por finalidade investigar um período da História da Educação Matemática no Brasil entre às décadas de 1930 a 1950, período que define a matemática escolar a ser ensinada no nível colegial, atual Ensino Médio. Sua investigação teve como aportes da história cultural, particularmente as contribuições da história das disciplinas escolares. Utilizou, ainda, a legislação educacional e cita como fontes da pesquisa os documentos escolares, tais como: diários de classe, livro de Atas de Professores, provas, as mudanças propostas para o ensino da Matemática do Colégio, por meio da Reforma Francisco Campos e da Reforma Capanema. Essa pesquisa busca dar uma contribuição à História da Educação Matemática no Brasil.

O sexto trabalho analisado foi de Moura (2012). Trata-se de uma Dissertação de Mestrado. O objetivo foi o de investigar o desenvolvimento do Ensino de Matemática na Escola Industrial de Cuiabá/MT(EIC), no período de 1942 a 1968. Sua principal finalidade era de formar artesãos. Considerando os contextos políticos, sociais e econômicos que influenciaram a organização dessa modalidade de ensino, utilizou-se diferentes fontes para a pesquisa como as impressas, orais e imagéticas, com o intuito de compreender a estrutura curricular e descrever os possíveis conteúdos ministrados no ensino de matemática e de desenho e a relação dessas práticas de oficinas da Escola Industrial de Cuiabá.

O sétimo trabalhado é de autoria de Santos (2013) e se refere a uma Dissertação de Mestrado, trazendo como pano de fundo as singularidades do processo de colonização da Cidade de Juara localizada na parte Norte de Estado de Mato Grosso, nos períodos de 1970 a 1980. Sua proposta é de investigar as práticas pedagógicas presentes no ensino de matemática que eram desenvolvidas na Escola Estadual Oscar Soares no período em Estudo. Essas análises foram construídas a partir de várias fontes escritas sendo elas:

provas, diários de classe, atas de resultados finais, livros, termo de visitas de inspeção, fotografias e entrevistas; documentos da e sobre a escola como: portarias e decretos, grades curriculares, programas de ensino e livros didáticos que permearam as práticas dos professores de matemática. Como fonte orais os sujeitos selecionados para os depoimentos: professores que ministraram aulas de matemática, diretores, funcionários e ex-alunos, totalizando dezoito entrevistados, que de algum modo, estiveram presentes na constituição histórica da educação, bem como na trajetória do ensino de matemática nessa escola.

No oitavo trabalho analisou-se a Dissertação de Mestrado de Costa (2014). Sua proposta foi estudar a utilização do método de ensino de matemática de Georges Papy no Colégio de São Bento do Rio de Janeiro a partir da década de 1970, no momento em que acontecia a reforma no ensino de matemática conhecido como Movimento da Matemática Moderna. A pesquisa serve-se de fontes primárias, de acervo escolar que data do início da utilização do Método Papy no referido colégio, depoimentos de ex-alunos e ex-professores, de artigos de jornais que contêm entrevistas concedidas por Dom Ireneu que foi um monge beneditino do mosteiro de São Bento no Rio de Janeiro, professor e coordenador de Matemática do Colégio de São Bento.

Dessa forma Dom Irineu teria analisado as especificidades deste caso, suas razões, as vantagens, quais dificuldades e consequências, e quais os descontentamentos com os materiais de matemática produzido e disponível no país naquela época.

Analisa também quais as apreciação pelos ideais pedagógicos, suas metodologias, as finalidades e condução do ensino de matemática propostos por Georges Papy como principais causas seguir seus manuais, que foi apontada pelo monge professor Dom Ireneu Penna como mentor e realizador desta experiência.

O nono trabalho é de autoria de Staniszewski (2014). É uma Dissertação de Mestrado. Seu objetivo principal foi o de investigar os vestígios históricos da educação, e em particular o da Matemática na cidade de São Mateus do Sul, no período entre a chegada dos imigrantes poloneses ao Brasil, no final do Século XIX, até o momento da nacionalização do ensino, em 1938, quando Getúlio Vargas proibiu as escolas étnicas no Brasil. Assim, foi realizado um levantamento de questões relativas à chegada e à colonização destes imigrantes ao Brasil, principalmente com destaque às atas e dados dos primeiros professores dessas instituições e a aspectos relativos à Matemática retirados se um caderno de 1944. Dessa forma analisou- se documentos escritos e coletados, e quatro depoimentos orais como pressupostos metodológicos usar- se- à História Oral.

Por meio da memória dos depoentes, que as peças foram sendo unidas em um grande quebra-cabeça, trazendo à luz informações importantíssimas de como era o ensino da disciplina naquela época. Desse modo a pesquisa veio a contribuir com subsídios que tornaram possível compor um cenário geral da Educação e da Cultura polonesas nesta região, sendo inserida no contexto mais amplo da História da Educação Matemática

Brasileira.

O décimo trabalho trata-se de uma dissertação de Mestrado de autoria de Varela (2014). Sua função foi delinear os aspectos históricos da formação e atuação de professores de Matemática em Cascavel (PR), entre as décadas de 1950 e 1980. Sua metodologia se baseou na História Oral que buscou por meio dos depoimentos conhecer a trajetória de formação e atuação de professores de Matemática que lecionaram nesse período. Além das fontes orais incorpora-se à pesquisa documentos escritos e imagens a respeito do desenvolvimento da região de Cascavel articulada ao contexto Estadual e Nacional do período de estudo.

O décimo primeiro trabalho que foi analisado é a Tese de Doutorado de Soares (2017). A pesquisa teve por finalidade investigar a Matemática Escolar da Cidade de São Luís- São Paulo, durante o século XIX. A metodologia e de cunho qualitativa com abordagem e revisão documental. Os documentos foram retirados de fontes primárias do século XIX, da capital da província do Maranhão, de São Luís, do Rio de Janeiro e de Portugal, sendo eles: livros, jornais, revistas, cartas, leis, regulamentos, falas dos presidentes das Província do Maranhão e documentos de universidades. Desse modo a pesquisa busca contribuir com a escrita de um novo capítulo da História da Educação do Brasil, ao descrever sobre a matemática Escolar na cidade de São Luís oitocentista.

O décimo segundo trabalho é de autoria de Gama (2018). Trata-se de uma Dissertação de Mestrado. A investigação está inserida no campo da História da Educação Matemática, com o objetivo de investigar a presença da Geometria na formação de professores primários do Instituto Santa Marta em Barra do Garças-MT, nos anos de 1960 à 1980, ao qual justifica- se pelas publicações das Coletânea e a criação da Escola Normal do Instituto. No intuito de responder ao problema da pesquisa que seria eles: Como a geometria estava presente na formação de professores normalistas? Como os autores de livros didáticos elaboravam as sequencias didáticas para o ensino da geometria? A serviço de quais interesses a geometria estava presente na formação de normalistas? Como a geometria era ensinada? Quais os conteúdos de geometria eram trabalhados? Desse modo foi necessário inventariar fontes históricas ligadas ao cotidiano escolar do período estudado, delimitar os arquivos públicos e escolares, analisar as coletâneas de livros didáticos em especial os de geometria que foi circulado nas escolas públicas de Mato Grosso, e a entrevista com os protagonistas da época que estudaram ou ministraram aulas no ensino primário do Instituto Santa Marta.

O décimo terceiro trabalho foi o de Moraes (2020). Trata-se de uma Dissertação de Mestrado. Tem for finalidade tecer uma narrativa histórica do Colégio Anchieta do Maranhão, em Pinheiro/MA, entre os anos de 1970 a 1973. Sua metodologia foi baseada na História Oral, sendo complementada pela análise documental e histórica, sendo analisadas atas, regimentos, autorização para funcionamento, manual do aluno, fontes jornalísticas, fotografias, entrevistas realizadas com sujeitos que atuaram na Instituição, dentre outros documentos. Dessa forma foi possível identificar evidências da História do Colégio a que foi constituída e representada nos seus diferentes contextos, experiências, espaços e tempo que marcaram as culturas escolares da Instituição pesquisada.

O décimo quarto trabalho pesquisado foi o de Brescovit (2020). É intitulado como uma Dissertação de Mestrado, é vinculada a Linha de Pesquisa de Ensino de Matemática, Ciência Naturais e suas Tecnologias do Programa de Pós- Graduação Strictu Sensu em Ensino da Universidade de Cuiabá/ UNIC em associação ampla com o Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Estado de Mato Grosso/IFMT. Seu objetivo foi o de investigar o ensino de Matemática a partir dos cadernos de planos de aulas utilizados por uma professora que ministrava aulas na 4ª série, na escola primária Paranaense, a senhora Donida Ferreira Tomasini que inciou sua trajetória na cidade de Barracão- PR, e posteriormente investir e dedicou sua vida profissional na carreira de docência na cidade de Guaraniaçu- PR . Sua abordagem metodológica foi desenvolvida na vertente histórico-cultural e fundamentada nos autores que discutem os conceitos inerentes ao objeto da pesquisa.

Dessa maneira as fontes foram constituídas com os documentos oficiais e escolares, os manuais dos professores, as fotografias, as apostilas e certificados de cursos, os depoimentos dos protagonistas (ex-professoras e ex-alunas) que contribuíram para a construção das narrativa e assim teceram a História do Ensino da Matemática de outros tempos.

Esses estudos tem como base fundamental as fontes documentais escolares constituídas por leis, regulamentos, decretos, diários de classe, livro de Atas de Professores, provas, termo de visitas de inspeção, fotografias, documentos sobre a escola como: portarias e decretos, grades curriculares, programas de ensino, livros didáticos que permearam as práticas dos professores de matemática, artigos de jornais, livros, revistas, cartas, leis, regulamentos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com a análise dos trabalhos, percebe-se que a finalidade de todos foi de investigar os estudos, os vestígios históricos, as práticas docentes no cotidiano escolar, assim como a presença da Geometria na formação de professores relacionados ao Ensino da Educação Matemática, utilizando para esse estudo as legislações vigentes na época, em cadernos de alunos, por meio de entrevistas com alunos e professores, dessa forma, servindo como uma importante ferramenta para a reconstrução histórica da experiência em sala de aula destes professores.

Dessa maneira em concomitância com a disciplina de matemática a disciplina desenho servia de mediação dos conteúdos que viabilizavam as etapas de elaboração e construção dos objetos, dos conhecimentos de medição, de conservação, de verificação e de representação geométrica, assim o ensino da matemática veio a contribuir de forma significativa na formação de trabalhadores(as) para as indústrias brasileiras de todo o pais, trazendo consigo os conhecimentos necessários para a elaboração e confecção de produtos industriais.

Salienta-se que o MMM foi um movimento internacional que reformulou o ensino da matemática no século XX, vindo para suprir os anseios dos matemáticos, e até mesmo da sociedade em geral, no quesito de mudanças nos conteúdos e projetos curriculares, pois por meio dele foi possível atender a novos conhecimentos científicos e tecnológicos que estavam surgindo na sociedade.

Assim conclui- se que o ensino profissionalizante surgiu como forma de disciplina social e dessa forma para desenvolver indivíduos na indústria, ou melhor como profissionais artesãos, que por sua vez seria o caminho que levaria o Brasil ao âmbito de nação civilizada.

REFERÊNCIAS

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da Teoria **à** Prática. 22. ed. Campinas São Paulo: Papirus, 2011.

_______. Para uma discussão sobre essa proposta de um novo trivium**. Educação**: Nas Lições do Passado, as Perspectivas para o Futuro, Estudos Leopoldenses-Série Educação, vol. 2, n° 2, Janeiro/ Junho 1998; pp.7-16.

______. A era da Consciência, ed. Fundação, Petrópolis, São Paulo, 1997.

BETTEGA, Maria H. S. **Educação Continuada na Era Digital**, 2 ed. São Paulo: Cortez, 2010.

BENTO, Regina thaíse ferreira. **Alguns Aspectos sobre a prática** Docente **na Decada de 1970:** O Ensino Colegial e a Disciplina de Matemática. - 2009.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Modelagem matemática no ensino. São Paulo, SP: Contexto, 2014.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Filosofia da Educação Matemática: por quê? In **Bolema**. Rio Claro (SP), Ano 22, nº 32, 2009, p. 229-240.

BURAK, D. As Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática e a Modelagem Matemática. In: **PERSPECTIVA**, Publicação da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das missões. Erechim RS, v. 29, n° 107, setembro de 2005, p. 153 – 161.

_____ . **Modelagem Matemática:** ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

_____. **Modelagem matemática**: uma alternativa para o ensino de matemática na 5ª **série.** 1987. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1987.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Mec. **Secretaria de Educação fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF,1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BENTO, Regina Thaíse Ferreira. **Alguns Aspectos sobre a prática Docente na Decada de 1970:** O Ensino Colegial e a Disciplina **de Matemática. –** 2009.

BRESCOVIT, Luiz Eduardo. **Ao Cadernos de Planejamento e o Ensino de Matemática na Escola Primaria Paraense na Década de 1980.** 2020.

COSTA, Letícia Maria Ferreira. **O Movimento Da Matemática Moderna- o caso do Colégio de São bento do Rio de Janeiro**. 2014.

DALCIN, Andreia- **Cotidiano e Práticas Salesianas no Ensino de Matemática entre 1885- 1929- Colégio Liceu Coração de Jesus de São Paulo**: Construindo uma História/Andréia DAlcin. - Campinas, SP. 2008.

ECHEVERRÍA, M. P.; POZZO J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, J. I. (Org.). A Solução de problemas. Porto Alegre: Artes Medicas, 1998. Disponivél em: https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=3309. Acesso em: 10 de Maio de 2021.

FRANCO, M. A. R. S. **Práticas pedagógicas de ensinar-aprender**: por entre resistências e resignações. Educação e Pesquisa, v. 41, n. 3, p. 601-614, 2015.

FREITAS, Sirley Leite; MIGUEL José Carlos**. Metodologias Utilizadas para o Ensino da Matemática em uma Escola do Município de Cacoal- Rondônia:** Um Estudo Analítico, disponível em: https://sigeve.ead.unesp.br/index.php/submission/downloadFileProceedings/1887, acesso em 19/05/2021.

GAMA, Marta Maria. O Ensino de Geometria e a Formação de professores primários: Percursos Historiográficos em Mato Grosso (1960- 1980). **2018**

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. - São Paulo: Atlas, 2008.

GOMES, Maria Laura Magalhães. **História da Educação Matemática:** a propósito da edição temática do BOLEMA Boletim de Educação Matemática, vol. 23, núm. 35, 2010, pp. vii-xxvii Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil.

MARQUES, Odacir Elias Vieira. Primórdios do Ensino de Matemática no Município de Sinop-MT: Memórias de alguns professores que lecionaram a disciplina de matemática na década de 1970. – 2010.

MOURA, Elmha Coelho Martins. **O Ensino de Matemática na escola Industrial de Cuiabá/MT no Período de 1942 a 1968**. 2012.

MORAES, Violeta Cristina Soares. História do Colégio Anchieta do Maranhão da Cidade de Pinheiro (1970-1973) / Violeta Cristina Soares Moraes. – 2020. 154 f.

OLIVEIRA, Guilherme Saramago de. **Metodologia do Ensino de Matemática:** fundamentos teóricos e práticos/ - Uberlândia, MG: FUCAMP, 2020. 154 p. : il.

PEREIRA, P. M. **A prática do professor de Matemática dos anos iniciais**: da formaçõa inicial ao cotidiano da ação educativa. 2014. (Apresentação de Trabalho/Comunicação).

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H.. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 3. Ed. Belo Horizonte: Autentica, 2013

ROCHA, Marcelo Pereira. **O Ensino Secundário no Sul do Estado de Mato Grosso no contexto das reformas Educacionais:** O Ginásio Osvaldo Cruz (1927-1949). 2010.

STANISZEWSK, Rosane Souza. **Uma Investigação sobre o Ensino da matemática nas Escolas Polonesas em São Mateus do Sul, Paraná.** 2014.

SANTOS, V. de M**. A matemática escolar, o aluno e o professor:** paradoxos aparentes e polarizações em discussão. Cadernos CEDES — Unicamp, Campinas, v. 28, p. 13-28, 2008b.

SMOLE, K. C. S.; CÂNDIDO, P. T.; STANCANELLI, R. **Matemática e literatura infantil**. 2. Ed. Belo Horizonte: Lê, 1997.

SMOLE, Kátia S. ; DINIZ, Maria I. **Ler escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender. Porto Alegre: Artmed Editora,2001.

OTONE, Maryneusa Cordeiro. **Uma história da Constituição da Matemática do Colégio no Cotidiano Escolar**. 2011.

SOARES, Waléria de Jesus Barbosa. Uma História da Matemática Escola na Cidade de São Luís do Século XIX: Livros, autores e Instituições**. - 2017.**

SANTOS, Reginaldo José dos. **História da Educação Matemática no Estado de Mato Grosso Movimento da Matemática Moderna no Município de Juara no período de 1970 a 1990, a partir da Escola Estadual Oscar Soares.** 2013.

VARELA, Sandra Maria Banak. **Aspectos Históricos sobre a Formação e a Atuação de Professores de Matemática no Município de Cascavel- PR.** 2014.

VIEIRA, G. A.; ZAIDAN, S. **Sobre o conceito de prática pedagógica e o professor de matemática**. Revista Paidéia. Universidade FUMEC. Belo Horizonte, ano 10 n. 14 p. 33-54/2013. Disponível em: http://www.fumec.br/revistas/paideia/article/view/2375/1 431. Acesso em: 10 out. 2020.

CAPÍTULO 2

ASSESSMENT BELIEFS AND PRACTICES IN PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS EDUCATION IN BRAZIL

Data de aceite: 01/12/2021
Data de submissão: 01/09/2021

Jutta Cornelia Reuwsaat Justo
Universidade Luterana do Brasil
Canoas, RS - Brasil
http://orcid.org/0000-0001-5110-1571

Ednei Luís Becher
Instituto Federal do Rio Grande do Sul
Campus Osório – Brasil
https://orcid.org/0000-0001-8770-2424

Marja van den Heuvel-Panhuizen
Utrecht University
Utrecht – The Netherlands
NORD University
Bodø - Norway
https://orcid.org/0000-0002-3985-7576

Michiel Veldhuis
iPabo University of Applied Science
Amsterdam – The Netherlands
Utrecht University
Utrecht – The Netherlands
https://orcid.org/0000-0001-5940-039X

ABSTRACT: To gain further knowledge about how Brazilian primary school teachers perform and conceive assessment in mathematics education, we carried out an updated review of research literature on assessment in Brazil. Our scope on assessment was broad and included both large-scale assessment and classroom assessment. The research question was: *What does recent research reveal about Brazilian primary school mathematics assessment practices and teachers' beliefs?* The review covered publications between 2010 and 2017 in proceedings of Brazilian scientific conferences and the national database of PhD theses and master dissertations. The influence of large-scale assessments changes in the school curriculum, such as adding content or emphasizing certain content. Teachers feel controlled and evaluated by external assessments. When comparing assessment practices with assessment beliefs, we can see a mismatch between what is done and what Brazilian primary schoolteachers think. The teachers mostly believe classroom assessment is a process that occurs in many moments in the classroom and uses different instruments. Nevertheless, the most used practice is testing students at the end of a school period. The recommendations of the researchers point to teachers' in-service education. We understand that the mathematics assessment practices in Brazil still maintain some distance from what is understood by formative assessment.

KEYWORDS: Classroom assessment; Large-scale assessment; Brazilian research; Mathematics education; Primary school.

CRENÇAS E PRÁTICAS DE AVALIAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS NO BRASIL

RESUMO: Para obter mais conhecimento sobre as crenças e práticas de avaliação em educação matemática de professores dos anos iniciais no Brasil, realizamos uma revisão atualizada da literatura de pesquisa sobre avaliação no Brasil.

O escopo de avaliação foi amplo e incluiu avaliação em larga escala e avaliação em sala de aula. A questão de pesquisa foi: O que pesquisas recentes revelam sobre as práticas de avaliação em matemática e as crenças dos professores nos anos iniciais no Brasil? A revisão abrangeu publicações entre 2010 e 2017 em anais de congressos e no catálogo de teses e dissertações da Capes. Avaliações em larga escala influenciam mudanças no currículo, tais como adicionar ou enfatizar conteúdos específicos. Os professores sentem-se controlados pelos resultados dessas avaliações. Ao comparar as práticas com as crenças de avaliação, podemos ver um descompasso entre o que é feito e o que pensam os professores. Os professores dos anos iniciais acreditam que a avaliação em sala de aula é um processo que ocorre em muitos momentos e usa diferentes instrumentos. No entanto, a prática mais utilizada é testar os alunos no final do período escolar. As recomendações apontam para a formação continuada. Entendemos que as práticas de avaliação matemática no Brasil ainda mantêm alguma distância daquilo que é entendido por avaliação formativa.
PALAVRAS-CHAVE: Avaliação em sala de aula; Avaliação em larga escala; Brasil; Educação matemática; Anos iniciais.

1 I INTRODUCTION

In the last half of the 20th century, educational reforms have taken place in many countries worldwide. Most of these educational reforms also advocated an assessment reform (BERRY, 2011) in the view that assessment is an ongoing process interconnected with teaching and learning (e.g., SHEPARD, 2000; SUURTAMM; KOCH; ARDEN, 2010; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1996). This means that assessment "is a complex, all-encompassing process that fulfils a central role in instruction" (VELDHUIS; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2014, p. 3). However, not all studies that investigated the implementation of this approach to assessment came to positive findings. Berry (2011) concluded that only limited changes in assessment practices were found following such reforms, as shown by the continuing emphasis on grading students and little focus on supporting their learning.

Also in Brazil, reform in education and assessment took place. In the 1990s, the National Curriculum Parameters (Parâmetros Curriculares Nacionais – (hereafter PCN; MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 1997) was meant to provide schools and systems with indications for elaborating their curriculum. The document emphasized that there should also be more attention to classroom assessment in addition to large-scale assessment. This assessment was understood as "a part of the process of teaching and learning" (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 1997, p. 20). However, it is still not entirely clear whether and how this broad interpretation of assessment in which large-scale and classroom assessments are both deemed significant has found its way into primary school classrooms in Brazil.

Costa (2013) conducted a literature review addressing assessment in primary school mathematics education. The reviewer found the publications in databases, including papers presented at scientific conferences in Brazil, master's dissertations, and PhD theses appeared between 2000 and 2012. Costa (2013) concluded that in the Brazilian research on mathematics assessment in primary school, there is a strong focus on large-scale assessment and that classroom assessment is a missing topic.

For large-scale assessment, since 1990, Brazil had the National Basic Education Assessment System (SAEB), which currently contains the following examinations: National Assessment of Basic Education (Aneb), the National Assessment of School Performance (Anresc), known as Prova Brasil, and the Assessment National Literacy (ANA). In addition, Brazil uses large-scale assessments for monitoring education and identifying factors that may interfere with student performance. The National Institute for Educational Studies and Research (hereafter INEP) elaborates examinations and monitoring assessments. The INEP also elaborated a large-scale assessment test as a didactic tool. The main objective of this test is to provide information to teachers, managers and teaching networks of the level of literacy of students in the second year of schooling at two moments, namely at the beginning and the end of the school year. In addition, Provinha Brasil can be applied and corrected by the class teacher so that the teacher has immediate access to the results obtained by students.

In the current study, we wanted to gain further knowledge about how Brazilian primary school teachers perform and conceive assessment in mathematics education. For this, we carried out a new updated review of research literature on assessment in Brazil. Our scope in this research on assessment was broad and included both large-scale external assessment and classroom assessment for which the teacher is responsible. Our leading research question was: What does recent research reveal about Brazilian primary school mathematics assessment practices and teachers' beliefs?

2 | METHOD

To investigate what recent research reveals about Brazilian primary school mathematics assessment practices and teachers' beliefs, we built on Costa's (2013) study and continued where she ended her literature review. This means that our review covered publications on assessment that were published between 2010 and 2017. First, we examined the proceedings of Brazilian scientific conferences on mathematics education and assessment. We started with the proceedings of two conferences that the Brazilian Society of Mathematical Education governs: the International Seminar of Research in Mathematics Education[1]and the National Meeting of Mathematics Education[2]. Then, we examined the proceedings of two independent educational research conferences: the National Meeting of the National Association of Post-Graduate Research in Education[3] and the National

1 http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/sipem
2 http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem
3 http://www.anped.org.br/reunioes-cientificas/nacional

Congress of Educational Assessment[4]. Finally, we searched for relevant publications in the national database of PhD theses and master dissertations[5]. All the queries that were carried out consisted of the keywords “Assessment”, “Mathematics”, and “Primary School” in the title, the keywords, and the abstract.

In the next step, we read the titles and abstracts that resulted from all these searches. Based on this reading, we found 54 publications, consisting of 34 papers from conference proceedings and 20 dissertations and theses. As a further step, we read the full texts to identify those publications that addressed the assessment practice or the teachers’ beliefs on assessment. We excluded publications addressing document analyses, teacher training, textbook analyses, and sociological analysis related to assessment.

Teachers’ assessment beliefs		The focus of the publications		
		Assessment practices	Both	
Type of assessment	Large-scale assessment	Blengini (2015)* Matos (2012)* Martins (2012)* Oliveira (2012)*		
	Classroom assessment	Silva (2014)* Zanon (2011)*	Borralho e Lucena (2015)** Mandarino (2012)**	Costa (2013)* Barbosa (2013)** Côrtes e Muniz (2016)**

* Master’s dissertation.

** Conference paper.

Table 1. Publications on assessment in primary school mathematics education in Brazil published between 2010 and 2017.

In the end, the search for and selection of relevant publications resulted in 11 publications to be included in the review (see Table 1), including four publications on large-scale assessment and seven on classroom assessment. The publications on large-scale assessment all deal with teachers’ beliefs, while the publications on classroom assessment either address teachers’ beliefs or the assessment practice or both.

To determine what research has revealed about assessment practice and teachers’ beliefs on assessment, we summarized each of the selected publications taking the type of assessment as a starting point. Then we analyzed the papers by focus, assessment practice, and teachers’ beliefs on assessment, in two sections of findings related to large-scale assessment or classroom assessment.

4 http://wwwp.fc.unesp.br/#!/conave
5 http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/

3 I RESULTS AND DISCUSSION

3.1 Findings related to large-scale assessment

Four studies focused on teachers' opinions and beliefs about the results and usefulness of large-scale assessments. Matos (2012) investigated by administering a questionnaire by 17 primary school teachers' ideas about student results on the Prova Brasil in the northeastern of Brazil. Most teachers appeared not to understand this assessment's results and opposed a test only focusing on problem-solving like Prova Brasil. For the teachers, problem-solving was just one of the many methodologies they use in their classes. It also became clear that the teachers were not familiar with the standards used to elaborate the Prova Brasil.

In Oliveira's (2012) study, teachers' ideas about using Provinha Brasil's results were further investigated by five teacher interviews conducted individually. She investigated how the teachers analyzed their students' understanding based on their answers to the items that involved Statistics and their suggestions for activities to overcome difficulties. The teachers considered the test items a curriculum, stating that they work more on the content presented. They had difficulties interpreting the results of the Provinha Brasil test. According to the author, teachers have to be better prepared for using the results of this test to avoid misinterpretations. Furthermore, because many teachers wrongfully attributed students' mistakes to misconceptions, it is necessary to complement their mathematical training.

Through interviews, Martins (2015) investigated teachers' opinions about different large-scale assessments, namely the Prova Brasil, Provinha Brasil, and Saresp, the external evaluation used in São Paulo State. The publication of the results of this large-scale assessment bothered teachers as it leads to comparisons between schools. Additionally, the teachers considered it unfair that the state guided its educational policies by this external assessment. They were also quite divided on the usefulness of the assessment results.

Finally, Blengini (2015) interviewed primary school teachers, focusing on their beliefs about the importance of large-scale assessments for the quality of education. The teachers did not favour such external evaluations because they believed them to be a form of control, interfering with their curriculum content choices. It was clear that the assessment model used was more of a measurement instrument than an assessment tool to guide schools in overcoming the students' difficulties.

These four studies highlight that the teachers are not convinced about the usefulness of large-scale assessments. They appeared to consider external assessment as State intervention in school and doubted the effectiveness of this type of evaluation. Moreover, the studies showed that many teachers could not understand the assessment results and relate the standards of the tests to the school curriculum. Therefore, the researchers concluded that it is necessary to improve teacher education and offer opportunities for professional development.

3.2 Findings related to classroom assessment

Seven studies focused on teachers' classroom assessment beliefs and practices. In a questionnaire study, Mandarino (2012) investigated how often teachers whose classes participated in the Prova Brasil adopted a particular correction style in their assessment practice. The type of correction that teachers favoured distinguished into four groups: individual correction, collective correction, collective correction with attention to students' difficulties, or the focus on the correct response provided by the teacher. In the first group, teachers individually corrected student activities by checking students' notebooks or collecting individual activities to be corrected over time. Teachers from the second group made the collective correction of activities on the board, and the students fix by themselves in their notebooks. In the third group, the predominant correction was collective and happened on the blackboard by the teachers through discussing problems in which students have difficulties. At times, students were also called upon to present their answers on the blackboard. The teachers in the fourth group most often did the written correction on the blackboard, asking the answers to the students. These teachers did not make individualized corrections of student activities or even the correction of notebooks. The author raised the concern that students should develop self-confidence in their mathematics knowledge from the earliest years of schooling and have the autonomy to create and test hypotheses. They must be allowed to solve a problem and validate their responses. Also, several other factors, such as the types of activities proposed, the used textbook, and what the teachers do while students solve tasks, should be considered when interpreting the correction style a teacher adopts.

Costa (2013) investigated the assessment practices of 5th-grade primary school teachers by providing a questionnaire to nineteen teachers and interviewing and observing two teachers. Teachers assessed students' learning mostly with paper-and-pencil tests. They also observed students' activities in an informal and unsystematic way. Some teachers pointed out that they evaluated their teaching daily by doing and redoing their practices. They considered classroom assessment part of the more democratic teaching practices that were generally not carried out systematically and occurred spontaneously. One teacher pleaded for teaching mathematics mechanically, which was considered necessary to prepare students for large-scale assessments. Practising similar problems in class was like preparing students for the external test. This teacher explained that such a routine-marked procedure, as in large-scale assessments, becomes more accessible when practised frequently. The author's comment to what she found in her study is that teachers could mobilize many important classroom activities as assessment moments, such as homework and other production of written records by students (texts in games and group activities). According to the author, these activities can provide the teacher with evidence about the development of students' knowledge. She concluded that it is necessary to improve mathematics assessment and that continuous education should build on teachers' current assessment practices, possibly leading to reflection on and systematic appropriation of new teaching guidelines.

Borralho and Lucena (2015) investigated the relations between teaching and assessment practices, as well as the improvement of students' learning by classroom observations and interviews with teachers in Portugal and Brazil. In both countries, teachers did not use so much formative assessment in their teaching. The assessment was not deliberately, systematically, or consciously present in the teachers' teaching. Teachers' use of assessment was sporadic and not focused. They did not use assessment to plan and replan their practices and generally not used to improve students' learning. The instruments used were summative tests and complemented by opinions of activities carried out in the classroom. The most used was to classifying and grading students at the end of the school period.

Using a questionnaire with open-ended questions, Barbosa (2013) investigated the beliefs on assessment in mathematics and the assessment instruments used by nine primary school teachers of a public school in Southeast Brazil. Most of them considered assessment helpful in diagnosing students' learning and used day-to-day activities, such as participation in class and the use of concrete material, to assess their students' learning. Other teachers, who believed assessment to measure student knowledge, used more formal assessment activities, such as bimonthly tests. Four teachers thought that students' mistakes are a way of guiding further instruction. Five teachers saw errors as a help for making students aware of their achievement and their need for improvement.

Côrtes and Muniz (2016) analyzed two teachers' mathematics assessment practices as observed in their classroom and their assessment beliefs as expressed in a semi-structured interview, group meetings, and observations. The only formal assessment instruments that both teachers used were bimonthly written tests. The questions in these tests were reproductions of tasks already taught in the classroom. Also, from the observations, it seemed that assessment mainly was to measure student learning. Teachers used a linear approach to the taught and used tests to assess this process at the end. The authors believed that one of the necessary actions is to transform the schools' pedagogical coordinators responsible for the in-service education and consolidation of teachers' collective work. Furthermore, they emphasized that it is necessary to further detailed assessment by promoting the interaction between students, discussing different processes and solution strategies, and offering metacognitive hints. Finally, they advocated that teaching and learning mathematics will have more meaning for students by mobilizing students' knowledge, creating chances, being free to make mistakes, thinking about errors, and creating the necessary experiences.

Zanon (2011) used questionnaires and group meetings to understand primary school teachers' knowledge, beliefs, and conceptions about mathematics and its assessment. Participants were 23 teachers who worked in rural schools in the east of Brazil. They believed that assessment should happen in a procedural way, that it is an instrument to verify student learning, and that it is necessary despite being permeated by negative feelings and effects. The teachers had difficulties and doubts about the specific content of mathematics. The author also noted that they had a traditional view of mathematics assessment and had negative feelings about mathematics assessments. To assess their students, most participants mentioned using classroom games, individual tests, and mechanical math activities in the classroom and by homework, supplemented by individual observation of the students' work. The author advised that it is necessary to teach with understanding and provide continuous education about practical assessment problems and the metacognitive processes of teaching, learning, and assessment in mathematics.

Silva (2014) investigated how assessment contributed to mathematics teaching in a primary school in the South of Brazil. Assessment activities were used by planning and implementing a school trip with 5th-grade students. As assessment instruments, the teacher used the students' competence in data collection and the clarity of organizing the data. The students had to present the data collection results through graphs and a small explanatory text in a newspaper format. The study revealed that the teacher's conceptions of assessment were broad and permeated the entire teaching and learning processes. Silva (2014) stated that when the teachers take the role of teacher-researchers, they may be teaching supported by knowledge gained through the constant assessment of their instructional practice and student learning. She concluded that ongoing assessment, providing the teachers with more insight into student learning, was considered fundamental to improving the quality of teaching and, consequently, teacher and student learning.

When comparing assessment practices with assessment beliefs, we can see a mismatch between what is done and what Brazilian primary schoolteachers think. The teachers mostly believe classroom assessment is a process that occurs in many moments in the classroom and uses different instruments. Nevertheless, the most used practice is testing students at the end of a school period. Considering the recommendations of the researchers, they mainly point to teachers' in-service education. In addition, the PCN affirm that some of the problems related to mathematics teaching are associated with the process of teacher education, concerning both initial and in-service training (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 1997).

The researchers justify the need to improve mathematics teachers' training in the initial years of elementary school for different reasons, like the following. Teachers did not understand the results generated by large-scale assessments and cannot distinguish between the school curriculum and test's reference standards; teachers attributed students' mistakes to misconceptions about some content.

In addition, the researchers recommend that teacher training should: clarify the assessment structure, methodology and objectives, which makes the process of understanding and using the results easier; identify the relationships between different contents and skills present in the large-scale assessment items; discuss how to use the results of large-scale assessments as an element of their planning to promote assessment to learning; discuss, plan and carry out activities involving teach math skills; complement teachers' training about mathematical knowledge; reflect on the practice developed by teachers; introduce new teaching guidelines.

4 I CONCLUSION

Even if not approved by teachers, large-scale assessments influence changes in the school curriculum, such as adding or emphasizing certain content. As found in the surveys, teachers feel controlled and evaluated by external assessments. As a result, they instruct students to these tests and use items like a guide to the curriculum. From the results of the researches, we understand that the mathematics assessment practices in Brazil still maintain some distance from what is understood by formative assessment. There is still a lot to do and research so that formative assessment practices reach the Brazilian classrooms. Despite the mostly teachers beliefs that assessment is a process to improve teaching and learning, the mathematics assessment practices carried out in Brazilian primary schools do not yet favour assessment to learning but are mainly used to determine students' classification at the end of school periods.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel – CAPES/Brazil (http://www.capes.br) for the scholarship to Jutta Cornelia Reuwsaat Justo (Postdoctoral Research/ Process nº 88881.120678/2016-01) and Ednei Luís Becher (Sandwich Doctoral Program/ Process nº 88881.133333/2016-01). We also thank the Lutheran University of Brazil (ULBRA) and Utrecht University (UU) for our studies in the Netherlands.

REFERENCES

BARBOSA, J. K. Concepções de avaliação em Matemática de professores de uma escola pública do Vale do Ribeira/SP. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**. Sbem: Curitiba, 2013.

BERRY, R. Assessment reforms around the world. In R. Berry, & B. Adamson (Eds.), **Assessment reform in education** (pp. 89-102). Netherlands: Springer, 2011.

BLENGINI, G. D. Trabalho docente e qualidade da educação. **Dissertação** (Mestrado). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, São Paulo, 2015.

BORRALHO, A.; LUCENA, I. Avaliação e Ensino na Educação Básica em Portugal e no Brasil. **Anais do VI SIPEM**, Pirenópolis, Goiás, 2015.

CÔRTES, S.; MUNIZ, C. A. Considerações sobre a organização e o desenvolvimento curricular pelo professor e sua relação com o processo de ensino e aprendizagem de Matemática nos anos iniciais. In: **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Sbem: São Paulo, 2016.

COSTA, A. F. G. Práticas avaliativas em Matemática de professores do Ensino Fundamental. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, São Paulo, 2013.

MANDARINO, M. C. F. Práticas de correção da produção de alunos em fase de alfabetização. In: **Anais do V SIPEM**. Sbem: Petrópolis, Rio de Janeiro, 2012.

MARTINS, P. P. U. Políticas públicas de avaliação na perspectiva docente. **Dissertação** (Mestrado). Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, São Paulo, 2015.

MATOS, A. M. S. Prova Brasil: concepções dos professores... **Dissertação** (Mestrado). Universidade Federal de Sergipe. Aracaju, Sergipe, 2012.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília, Brasil: MEC/SEF, 1997.

OLIVEIRA, P. N. A provinha Brasil de matemática e o conhecimento estatístico. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, Pernambuco, 2012.

OLIVEIRA, P. R. G. Alfabetização matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. **Dissertação** (Mestrado), Faculdade de Educação da Baixada Fluminense, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2014.

SHEPARD, L. A. The role of assessment in a learning culture. **Educational Researcher**, 29(7), 4–14, 2000.

SILVA, D. S. G. avaliação do movimento de ensinar e aprender matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, Rio Grande do Sul. 118 p, 2014.

SUURTAMM, C.; KOCH, M.; ARDEN, A. Teachers' assessment practices in mathematics. **Assessment in Education: Principles, Policy & Practice**, 17(4), pp. 399-417, 2010.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht, the Netherlands: CD Beta Press, 1996.

VELDHUIS, M.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Primary School Teachers' Assessment Profiles in Mathematics Education. **PLoS ONE***,* 9(1): e86817, 2014.

ZANON, T. X. D. Formação continuada de professores que ensinam Matemática. **Dissertação** (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, Espírito Santo, 2011.

CAPÍTULO 3

REPRESENTAÇÕES SOCIAIS DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DE DUAS ESCOLAS PÚBLICAS DA CIDADE DE PARAÍSO DO TOCANTINS SOBRE O USO DO GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DE ENSINO

Data de aceite: 01/12/2021

Elismar Dias Batista
Professor do Instituto Federal do Tocantins– IFTO. Graduado em Matemática pelo IFTO - Campus Paraiso do Tocantins

Willian Isao Tokura
Professor da Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul– UEMS. Graduado em Matemática pela UFGD - Campus Dourados

Jeidy Johana Jimenez Ruiz
Professora da Universidade Federal do Oeste da Bahia– UFOB. Dr em Matemática pela UFG

Priscila Marques Kai
Instituto de Informática-Universidade Federal de Goiás. Msc em Informática pela UFG

RESUMO: Neste trabalho fez-se uma abordagem sobre a utilização do computador como recurso metodológico para o ensino da matemática, investigando-se as representações sociais dos professores sobre o uso do software matemático Geogebra no ensino da matemática. Para a apreensão das representações sociais foram entrevistados uma amostra de dezesseis professores de Matemática. Trabalhou-se exclusivamente com o software Geogebra na aplicação de um minicurso com duração de quatro horas, direcionado para professores de duas escolas estaduais da rede pública da cidade de Paraíso do Tocantins – TO. Diante da coleta de dados dos professores entrevistados, observou-se que não é comum a utilização de softwares matemáticos em sala de aula, pois de acordo com as pesquisas somente 4(quatro) de 16(dezesseis) professores entrevistados utilizam algum software em sala de aula, e somente quatro professores conhecem algum software matemático. Portando, a grande maioria dos professores não utilizam as ferramentas computacionais (softwares) por não terem conhecimentos técnicos necessários para essa utilização.

PALAVRAS - CHAVE: Software, Geogebra, ferramenta, computador, professores.

ABSTRACT: In this work, an approach was made about the use of the computer as a methodological resource for the teaching of mathematics, investigating the social representations of teachers about the use of the Geogebra mathematical software in the teaching of mathematics. For the apprehension of social representations, a sample of sixteen Mathematics teachers were interviewed. We worked exclusively with the Geogebra software in the application of a mini-course lasting four hours, aimed at teachers from two public schools in the city of Paraíso do Tocantins – TO. In view of the collection of data from the interviewed teachers, it was observed that it is not common to use mathematical software in the classroom, as according to the surveys only 4 (four) of 16 (sixteen) interviewed teachers use some software in the classroom. class, and only four teachers know any math software. Therefore, the vast majority of teachers do not use computational tools (software) because they do not have the necessary technical knowledge for this use.

KEYWORDS: Software, Geogebra, tool, computer, teachers.

1 I INTRODUÇÃO

O desenvolvimento tecnológico tem feito com que a escola pública brasileira enfrente uma nova realidade. O governo brasileiro tem feito diversos investimentos na área da informática com o intuito de proporcionar uma melhoria na educação. Entretanto, nem todos os educadores estão preparados para receber e trabalhar essas novas tecnologias, ainda há receio por parte deles de que ocorra uma mudança no contexto educacional com a presença cada vez maior da tecnologia dentro da sala de aula. Diante da relevância do tema e com o objetivo de comprovar os benefícios da tecnologia no processo ensino-aprendizagem, sobretudo para a democratização do acesso às tecnologias da Informação, desenvolveu-se o presente trabalho sobre as representações sociais dos professores de matemática de duas escolas públicas do município de Paraíso do Tocantins quanto a utilização do Geogebra como ferramenta de ensino.

Inicialmente, será feita uma abordagem sobre o uso das novas tecnologias na educação e as políticas públicas para isenção dessas tecnologias, também sobre a utilização do software Geogebra (objeto principal do nosso estudo) como ferramenta de ensino da matemática, a relação professores versus softwares educacionais e qualificação desses profissionais para utilização adequada das tecnologias. Para tanto, servirão de referencial teórico informações obtidas nos sítios oficiais do governo, bem como conceitos e lições de estudiosos e pesquisadores da área.

Em seguida, será apresentada a metodologia empregada no desenvolvimento do trabalho. Por fim, serão expostos os resultados e discussão da pesquisa realizada.

2 I O USO DAS NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

As novas tecnologias da informação e comunicação (NTIC) estão sendo cada vez mais utilizadas e integradas no ambiente escolar, assim novos desafios pedagógicos surgem para os professores. Neste contexto, essas tecnologias incrementam os métodos de ensino tradicionais utilizados pelo educador.

Existem dois aspectos que devem ser bastante analisados na inserção das novas tecnologias da informação e comunicação na educação, o primeiro é que o conhecimento técnico e o conhecimento pedagógico não podem andar separados. O outro aspecto é em relação ao uso correto da tecnologia para determinada atividade pedagógica, ou seja, isso vai depender de quais objetivos o professor pretende alcançar com determinada atividade. Desse modo, o melhor é quando os conhecimentos técnicos e pedagógicos se desenvolvem simultaneamente (VALENTE, 2002).

2.1 Políticas públicas para a inserção da tecnologia na educação

É importante destacar que as escolas públicas de vários estados brasileiros vêm se equipando cada vez mais com novas tecnologias com o objetivo de propiciar uma melhor prática pedagógica. O principal incentivador dessa atualização é o próprio Governo Federal que executa projetos como o do Programa um Computador por Aluno (PROUCA) e Programa Nacional de Tecnologia Educacional (PROINFO), instituídos pelo Decreto Nº 7.243, de 26 de Julho de 2010.

O PROUCA foi implantado durante o ano de 2007. Inicialmente foram selecionadas cinco escolas públicas de cinco estados brasileiros para servir de experimento para o programa educacional, as cidades escolhidas foram: São Paulo SP, Porto Alegre – RS, Palmas - TO, Piraí – RJ e Brasília – DF. E em janeiro de 2010 foram disponibilizados 150.000 mil laptops educacionais, e aproximadamente 300 escolas de estados e municípios brasileiros foram beneficiadas com a "UCA TOTAL" que é uma implementação do (PROUCA). O governo federal tem ampliado projetos educacionais que buscam inserir a tecnologia no contexto escolar das escolas públicas e executado no âmbito do Ministério da Educação, a exemplo criou o Programa Nacional de Tecnologia Educacional (PROINFO). A respeito desse programa, Brasil (2012) esclarece:

> O PROINFO, inicialmente denominado de Programa Nacional de Informática na Educação, foi criado pelo Ministério da Educação, através da portaria nº 522 em 09/04/1997, com a finalidade de promover o uso da tecnologia como ferramenta de enriquecimento pedagógico no ensino público fundamental e médio. O funcionamento do PROINFO se dá de forma descentralizada, existindo em cada unidade da Federação uma Coordenação Estadual, e os Núcleos de Tecnologia Educacional (NTE), dotados de infraestrutura de informática e comunicação que reúnem educadores e especialistas em tecnologia de hardware e software. A partir de 12 de dezembro de 2007, mediante a criação do decreto n° 6.300, o PROINFO passou a ser Programa Nacional de Tecnologia Educacional, tendo como principal objetivo promover o uso pedagógico das tecnologias de informação e comunicação nas redes públicas de educação básica.

De acordo com o decreto Nº 6.300, de 12 de dezembro de 2007, são objetivos do PROINFO:

> I - Promover o uso pedagógico das tecnologias de informação e comunicação nas escolas de educação básica das redes públicas de ensino urbanas e rurais;
>
> II - Fomentar a melhoria do processo de ensino e aprendizagem com o uso das tecnologias de informação e comunicação;
>
> III - Promover a capacitação dos agentes educacionais envolvidos nas ações do Programa;
>
> IV - Contribuir com a inclusão digital por meio da ampliação do acesso a computadores, da conexão à rede mundial de computadores e de outras tecnologias digitais, beneficiando a comunidade escolar e a população

próxima às escolas;

V - Contribuir para a preparação dos jovens e adultos para o mercado de trabalho por meio do uso das tecnologias de informação e comunicação; e: VI- fomentar a produção nacional de conteúdos digitais educacionais.

2.2 O software Geogebra como ferramenta de ensino da matemática

Segundo Hohenwarter e Judith Preiner (2007) o Geogebra é um software de matemática dinâmica (DMS) para o ensino e aprendizagem da matemática e foi desenvolvido por Markus Hohenwarter no período de 2001 a 2002 em uma parte de sua tese de mestrado em educação matemática e ciência da computação na universidade de Salzburg, localizada na Áustria. Posteriormente, o Geogebra ganhou vários prêmios internacionais.

O software Geogebra é um software livre multiplataforma, baixado gratuitamente no site http://www.Geogebra.org/cms/pt_BR/.

Esse software tem uma interface gráfica de fácil identificação e possui quatro aspectos principais, a janela de álgebra, a janela de gráficos, as barras de ferramentais e as barras de menus. Como pode ser visto abaixo.

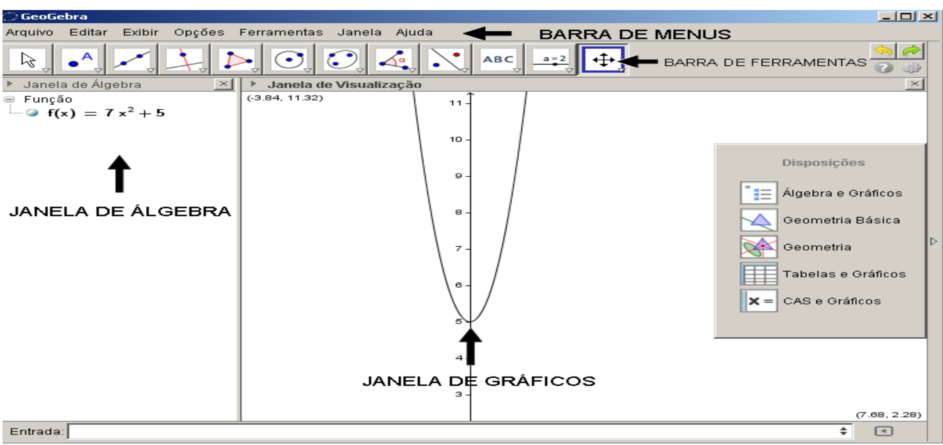


Figura 1: Interface gráfica do Geogebra.

Hohenwarter e Judith Preiner (2007, p. 235) descrevem a ideia básica do software:

> A ideia básica do Geogebra é fornecer duas representações de cada objeto matemático em sua janela de álgebra e janela de gráficos. Se você alterar um objeto em uma dessas janelas, sua representação no outro será imediatamente atualizada.

O ensino da matemática “tradicional” utiliza métodos que os alunos não podem visualizar. Recentemente, o ensino tem sido direcionado para a utilização das tecnologias e por isso o Geogebra é visto como uma ferramenta que pode auxiliar na compreensão do conteúdo matemático, uma vez que o software tem a capacidade de trabalhar com variáveis vinculadas a números, vetores e pontos.

É de fundamental importância que os professores escolham softwares com potências pedagógicas em função dos objetivos a serem atingidos (BRASIL, 1997).

Dentre os recursos tecnológicos, com ênfase no trabalho com geometria, destacam-se os softwares de geometria dinâmica. Nestes é utilizada uma nova abordagem ao aprendizado geométrico por meio dos softwares de Geometria Dinâmica e Tradicional (GDI), pois, com estes softwares, os alunos terão uma aplicação prática de problemas e criação de objetos geométricos.

2.3 Professores versus softwares educacionais

Quando se discute inserção de computadores na escola, poucos acreditam que as novas tecnologias vão substituir os professores. Apesar disso tal mito ainda se faz presente e explica-se pela falta de conhecimento sobre o assunto.

As novas tecnologias computacionais possuem ferramentas com potencialidades incríveis que se adéquam perfeitamente a educação (TEIXEIRA e BRANDÃO, 2003).

Ainda sobre o assunto, Teixeira e Brandão (2003, p.1) explicam:

> A utilização do computador em Educação só faz sentido na medida em que os professores o conceberem como uma ferramenta de auxílio as suas atividades didático pedagógicas, como instrumento de planejamento e realização de projetos interdisciplinares, como elemento que motiva e ao mesmo tempo desafia o surgimento de novas práticas pedagógicas, tornando o processo ensino-aprendizagem uma atividade inovadora, dinâmica, participativa e interativa.

2.3.1 Qualificação dos professores para utilização adequada das tecnologias

A qualificação adequada dos professores pode favorecer diretamente o uso da tecnologia na educação, pois as novas tecnologias disponíveis no ambiente escolar devem ser utilizadas de forma responsável, oferecendo as verdadeiras potencialidades pedagógicas que essas ferramentas proporcionam.

O professor deve buscar sempre a atualização e inovação no desempenho de suas funções como educador.

Nesse sentido, é brilhante a lição de Libâneo (2004, p.227):

> O termo formação continuada vem acompanhado de outro, a formação inicial. A formação inicial refere-se ao ensino de conhecimentos teóricos e práticos destinados à formação profissional, completados por estágios. A formação continuada é o prolongamento da formação inicial, visando o aperfeiçoamento profissional teórico e prático no próprio contexto de trabalho e o desenvolvimento de uma cultura geral mais ampla, para além do exercício profissional.

Entretanto, a resistência às novas ferramentas tecnológicas por parte de alguns professores é um fator que merece ser considerado. Tal resistência decorre do medo, desconhecimento dos objetivos destas ferramentas ou por dificuldade na utilização de novas tecnologias da informação e comunicação.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs:

> A discussão sobre a incorporação das novas tecnologias na prática de sala de aula é muitas vezes acompanhada pela crença de que elas podem substituir os professores em muitas circunstâncias. Existe o medo da máquina, como se ela tivesse vida própria (Brasil, MEC, 2002, p. 75).

3 | METODOLOGIA

As investigações foram feitas no ambiente do Colégio de Tempo Integral Trajano Coelho Neto e da Escola Estadual São José Operário, na cidade de Paraíso do Tocantins – TO. Os participantes da pesquisa foram os professores da disciplina de matemática de Ensino Fundamental e Médio.

A teoria das representações sociais foi usada como suporte teórico - metodológico seguindo os princípios de Moscovici (1978), e Jodelet (2001), por se entender que as práticas pedagógicas têm um caráter simbólico, significante, construtivo, autônomo e criativo.

As entrevistas foram feitas por meio de questionários para posterior análise. A análise de conteúdo viabilizou a interpretação do material coletado, tanto das respostas explícitas como implícitas. E os dados quantitativos foram analisados estatisticamente.

Adquiriram-se as representações sociais com a devida aceitação dos participantes da pesquisa e o meio de captação dessas representações foi a aplicação de um questionário fechado a dezesseis docentes de ensino, sendo, oito de ensino fundamental e oito de ensino médio, do Colégio de Tempo Integral Trajano Coelho Neto e Escola Estadual São José Operário, respectivamente, na cidade de Paraíso do Tocantins – TO.

Esses questionários geram dados quantitativos e, segundo Minayo (2002), os dados qualitativos e os quantitativos se complementam.

A aplicação destes questionários aconteceu em dois momentos. O primeiro deles, antes da aplicação do minicurso, o qual buscou conhecer concepções dos professores em relação à inserção dessas novas ferramentas na educação, o conhecimento e utilização dos mesmos em relação à tecnologia computacional. Já no segundo momento foi aplicado um questionário pós minicurso, a fim de averiguar a potencialidade do software.

Na pesquisa foram utilizados dois instrumentos de coleta de dados. Por meio deles os professores responderam o questionário com suas opiniões e fizeram também uma avaliação acerca do Geogebra.

Foram aplicados dois questionários aos professores. O primeiro deles referiu-se ao estado social desses profissionais, foram feitas perguntas relativas ao tempo de serviço, titulação, condições de trabalho e idade.

O segundo questionário se baseia na concepção dos professores em relação à utilização da tecnologia na educação e do uso do software Geogebra como ferramenta de ensino.

4 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram realizadas duas entrevistas, um minicurso e uma avaliação do software Geogebra com dezesseis professores: oito professores da Escola Estadual de Tempo Integral Trajano Coelho Neto, número esse que representa 100% dos professores efetivos da disciplina de matemática da instituição de ensino e oito professores do Colégio Estadual São José Operário, que representa 66,66% dos professores efetivos da disciplina de matemática da instituição.

Em relação à titulação dos professores, todos eles são graduados, porém a maioria já com vasta experiência na educação.

4.1 As representações sociais encontradas

Nesta etapa da pesquisa coletou-se as representações sociais dos professores sobre a utilização de tecnologias computacionais no ensino da matemática.

De acordo com os relatos dos professores, todos acham interessante a inserção da tecnologia na educação matemática.

> É de muita importância, desde que possa contribuir de maneira satisfatória no ensino e aprendizagem, e não seja apenas usada como instrumento de passa tempo e diversão dos alunos. [...]. (Professor, masculino, efetivo, graduado, faixa etária de 30 a 40 anos, tempo de serviço de 10 anos).

Outro professor relata a importância da utilização da tecnologia no ensino da matemática para formação de conceitos.

> [...] Acho relevante, pois contribui positivamente para o ensino da matemática, faz com que os alunos compreendam melhor o conceito matemático, através de aplicações práticas. (Professora, feminino, efetivo, graduada, faixa etária de 30 a 40 anos, tempo de serviço de 5 anos).

Quando se fala em motivar o professor para utilizar novas tecnologias no ensino da matemática, observou-se que houve divergências em relação às políticas públicas motivacionais. Parte dos entrevistados acham que o professor é motivado por meio de recursos que chegam até as escolas e também pelo fato de terem recebido um notebook.

> Sim o professor é motivado, chegam muitos recursos à escola, temos internet e o governo motivando através de doação de notebooks aos professores. [...]. (Professora, efetivo, graduado, faixa etária de 35 a 45 anos, tempo de serviço de 21 anos).

Enquanto que outro professor relata que não há motivação para o uso das tecnologias.

> Não há motivação, porque os livros não trazem problemas, exemplos para a utilização destes novos recursos tecnológicos, e com isso o professor não utiliza por não ter conhecimento adequado. (Professora feminino, efetivo, graduada, faixa etária de 30 a 40 anos, tempo de serviço de 5 anos).

Assim levando-se para o contexto das representações dos professores, eles divergem em relação ao incentivo do Governo. Dessa forma, destaca-se a seguinte questão, não depende somente do recurso tecnológico, mas de uma capacitação profissional de qualidade, ou seja, uma formação continuada para que a utilização dessas novas ferramentas educacionais seja feita de forma satisfatória ao aprendizado dos alunos.

> [...] "A escola possui os recursos, temos os equipamentos, mas não tem programas instalados." (Professora, feminino, efetivo, graduada, faixa etária de 40 a 50 anos, tempo de serviço de 23 anos).

A capacitação do educador, por meio do aprimoramento em técnicas computacionais, parece ser uma boa solução.

Na área da informática educativa é preciso estruturar projetos que viabilizem a prática da utilização do computador no processo de ensino- aprendizagem, incorporando-o como um instrumento de mediação da relação professor-aluno.

Quando se discute se o Geogebra surge com uma ferramenta que pode auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos. Segue a posição de uma das docentes entrevistadas:

> Com certeza, pois o Geogebra permite em temo real a construção de figuras geométricas, bem como a manipulação de dados, vinculados entre álgebra e geometria. (Professora, feminino, efetivo, graduada, faixa etária de 30 a 40 anos, tempo de serviço de 5 anos).

4.2 As representações encontradas no questionário de avaliação do Geogebra

Nesta etapa da pesquisa foram coletadas, por meio de questionário, as representações sociais dos professores quanto à instalação, execução e usabilidade do software.

4.3 Avaliação do software Geogebra

Pressupõe-se que as dificuldades encontradas pelos professores foram em relação aos requisitos que o Geogebra necessita para funcionar, no caso o software Java instalado.

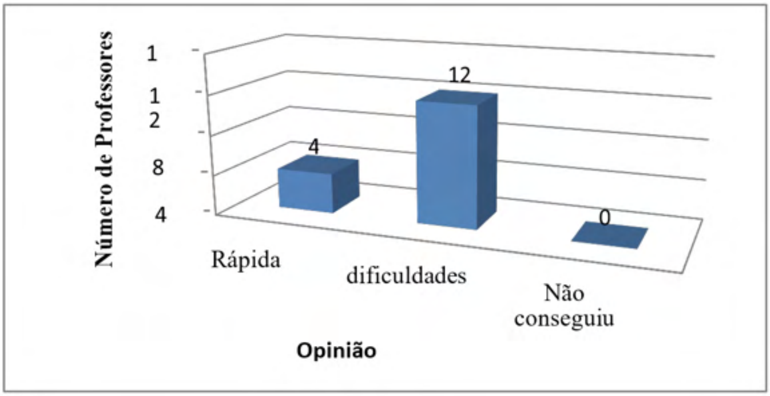


Figura 2: Com relação à instalação do Geogebra.

Observou-se pelos dados coletados em relação à opinião dos professores quanto a execução do software Geogebra que as dificuldades encontradas por alguns deles foram justamente pela falta de prática computacional, o que ocasiona pouca coordenação motora na utilização do mouse, habilidade fundamental para as construções geométricas.

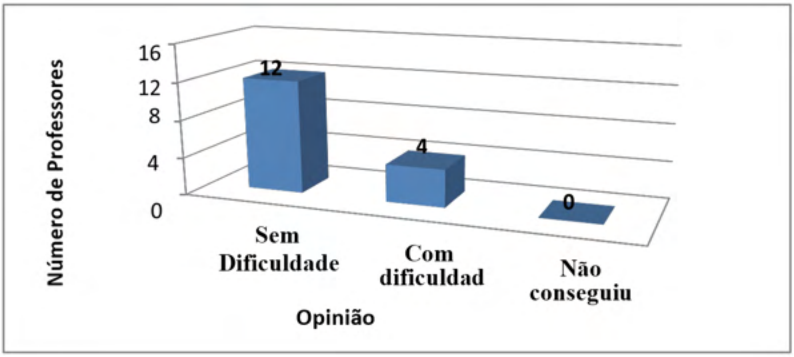


Figura 3: Com relação execução do Geogebra.

Analisando-se os dados em relação ao conhecimento dos professores sobre o Geogebra, fica explícito que a maioria dos entrevistados (cerca de 75%) tinha pouco conhecimento sobre ele. Uma possível explicação seria o fato de livros didáticos não possuírem recursos necessários para o uso.

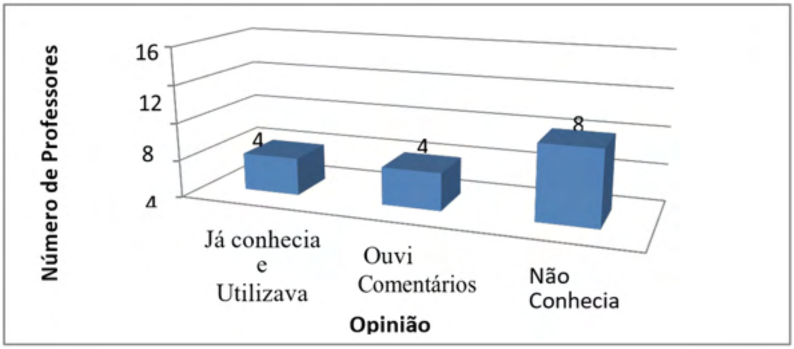


Figura 4: Conhecimento sobre o Geogebra.

Colheram-se dados para análise das concepções dos professores sobre os botões de ferramentas do Geogebra e, de acordo com a **figura 5**, 75% dos professores relataram que as ferramentas requerem atenção e orientação pelo fato do software ter variáveis vinculadas a números, vetores e pontos.

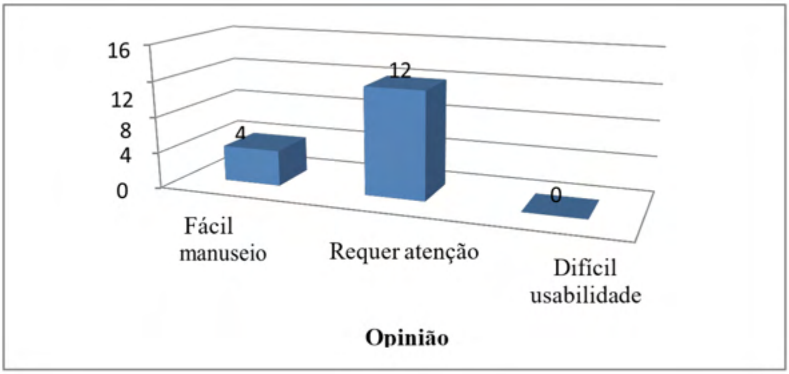


Figura 5: Análise dos professores em relação aos botões de ferramentas.

De acordo com **figura 6,** quanto aos dados da utilização de softwares matemáticos em sala de aula pelos professores entrevistados, observa-se que poucos deles utilizam estes tipos de ferramentas.

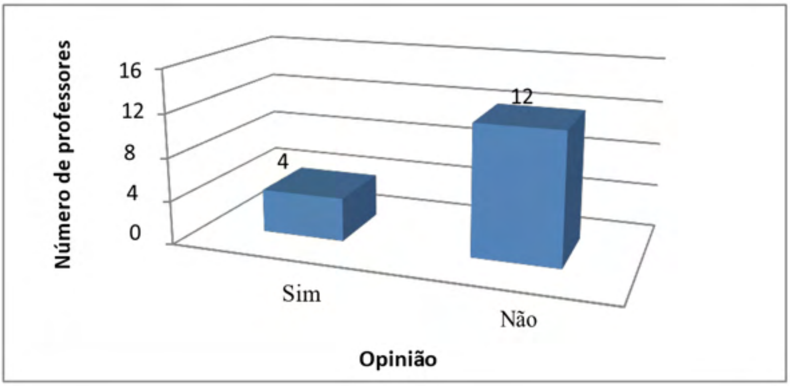


Figura 6: Professores que utilizam algum software em sala de aula.

5 I CONCLUSÃO

Escolheu-se a utilização do software Geogebra como objeto de estudo no minicurso com o propósito de aproximar os professores dessas ferramentas computacionais (softwares), discutindo-se as possibilidades de ensinar matemática com o uso dessas tecnologias. Assim, o computador deve ser visto como importante ferramenta metodológica para a construção do conhecimento de forma satisfatória pelo discente.

A aplicação do minicurso, embora tenha envolvido um número pequeno de professores, teve resultados expressivos e gerou uma motivação para que os educadores usem o software Geogebra no ensino da matemática, visto que somente o professor pode ser o mediador no processo de ensino e aprendizagem dos alunos e as ferramentas computacionais somente auxiliam o docente nesse processo.

Ficou evidenciado que o governo brasileiro tem feito diversos investimentos em recursos na área da informática com o intuito de proporcionar melhorias na educação. Entretanto, a grande maioria dos professores não utilizam as ferramentas computacionais (softwares) por não terem os conhecimentos técnicos necessários. Para corrigir o problema da falta de capacitação, uma importante forma de aliar os recursos tecnológicos (computadores e softwares) com o ensino da matemática é a formação continuada dos professores para assim torná-los suficientemente qualificados para utilizar essas ferramentas e obtenção de todos os benefícios que elas são capazes de oferecer ao processo de ensino-aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Decreto Nº 6.300, de 12 de dezembro de 2007. São objetivos do PROINFO: **Presidência da República - Casa Civil. Disponível em:** <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2007/Decreto/D6300.htm> Acesso em: 01 de agosto 2015.

__________. Decreto Nº 7.243, de 26 de Julho de 2010. Regulamenta o Programa Um Computador por Aluno – PROUCA. **Presidência da República - Casa Civil. Disponível em: <**http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2010/Decreto/D7243.htm>. Acesso em:10 de agosto 2015.

__________. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação,** 2015. Disponível em:< http://www.fnde.gov.br/programas/programa-nacional-de-tecnologia-educacional-proinfo>. Acesso em: 15 de agosto 2015.

__________. **Ministério da Educação,** 2013. Disponível em:< http://www.fnde.gov.br/programas/programa-nacional-de-tecnologia-educacional-proinfo/proinfo-projeto-um-computador-por-aluno-uca>Acesso em: 16 de agosto 2015.

__________. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio 3: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

__________. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ livro03.pdf> Acesso em 10 de Agosto 2015.

__________. **Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília: MEC/SEMT, 1999.

HOHENWARTER, M., PREINER, J. **Dynamic Mathematics with Geogebra. The Journal of Online Mathematics and Its Applications**, vol. 7, março. 2007. Disponível em: <http://www.maa.org/press/periodicals/loci/joma/dynamic-mathematics-with-geogebra >. Acesso em: 10 de Agosto 2015.

JODELET, D. **Representações Sociais: um domínio em expansão**, in: JODELET, D, As representações sociais, Rio de Janeiro: EDUERJ, 2001.

LIBÂNEO, José Carlos. Organização e gestão da escola: teoria e prática. 5 ed. Revista e ampliada. Goiânia: Editora Alternativa, 2004.

MINAYO, M. C. S. (Org.). **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. 20. ed. Petrópolis:Vozes, 2002.

MOSCOVICI, S. **A representação social da Psicanálise**, Rio de Janeiro: Zahar, 1978..

TEIXEIRA, A. C. e BRANDÃO, E. R. **Software Educacional: O difícil começo**. Rio Grande do Sul. Fev. 2003. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/renote/article/%20 download/13629/7699>. Acesso em: 21 de Agosto 2015.

VALENTE, J. A. **Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador / O papel do Computador no processo ensino-aprendizagem.** São Paulo: Casa do Psicólogo Editora, 2002, Disponível em:< http://www.eadconsultoria.com.br/matapoio/biblioteca/textos_pdf/texto17.pdf >. Acesso em: 14 de Agosto 2015.

ZULATTO, R.B.A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

CAPÍTULO 4

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES. PLAN DE ESTUDIOS 2012

Data de aceite: 01/12/2021
Data de submissão: 17/09/2021

Edith Arévalo Vázquez
Normal "Miguel F. Martínez", N.L. México

Hilda Alicia Guzmán Elizondo
Normal "Miguel F. Martínez", N.L. México

Nancy Bernardina Moya González
Normal "Miguel F. Martínez", N.L. México

RESUMEN: En México, en las instituciones formadoras de docentes se implementó el Plan de estudio 2012, con la finalidad de ofrecer una educación estratégica e integral caracterizada por la innovación, calidad y pertinencia social. En espera que los estudiantes normalistas sean partícipes activos en la práctica docente y hagan uso de sus conocimientos como elementos claves para una enseñanza efectiva, a fin de ofrecer una ayuda pedagógica más ajustada a las necesidades académicas de los alumnos que atienden durante las jornadas de práctica en las escuelas primarias. La presente investigación tiene como objetivo describir las fortalezas y debilidades que se identifican con respecto a la práctica profesional de los estudiantes de sexto semestre de las Licenciaturas en Educación Primaria de la Normal "Miguel F. Martínez"; específicamente en la enseñanza de las matemáticas. Representa un estudio cualitativo y de corte descriptivo. Los instrumentos para la recogida de datos fueron cuestionarios a estudiantes, videograbaciones de clases y producciones de los alumnos de educación básica. El estudio nos ha permitido conocer el estado actual sobre la enseñanza que los normalistas realizan, en torno a los contenidos matemáticos escolares del grado que atienden.

PALABRAS CLAVE: Enseñanza, formación docente, matemáticas, práctica profesional.

THE TEACHING OF MATHEMATICS IN TEACHER TRAINING. CURRICULUM 2012

ABSTRACT: In Mexico, the 2012 curriculum was implemented in teacher training college, with the aim of offering a strategic and comprehensive education characterized by innovation, quality and social relevance. It is hoped that teacher training college students, will be active participants in teaching practice and make use of their knowledge as key elements for effective teaching, in order to offer pedagogical help more adjusted to the academic needs of the students they attend during the practice days in elementary schools. This research aims to describe the strengths and weaknesses that are identified with respect to the professional practice of the students of the sixth semester of the Bachelor's Degrees in Elementary Education of the Normal "Miguel F. Martínez"; specifically in the teaching of mathematics. It represents a qualitative and descriptive study. The instruments for data collection were student questionnaires, video recordings of classes and productions of basic education students. The study has allowed us to know the current state of teaching that Teacher training college students carry out, around the

school mathematical contents of the degree they attend.
KEYWORDS: Teaching, teacher training, mathematics, professional practice.

O ENSINO DE MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES. CURRÍCULO 2012

RESUMO: No México, o Plano de currículo de 2012 foi implementado em instituições de formação de professores, com o objetivo de oferecer uma educação estratégica e abrangente caracterizada pela inovação, qualidade e relevância social. Espera-se que os alunos normalistas sejam participantes ativos na prática docente e façam uso de seus conhecimentos como elementos-chave para o ensino efetivo, a fim de oferecer ajuda pedagógica mais ajustada às necessidades acadêmicas dos alunos que frequentam durante os dias de prática nas escolas primárias. Esta pesquisa tem como objetivo descrever os pontos fortes e fracos identificados com relação à prática profissional dos alunos do sexto semestre do Bacharelado em Educação Básica do Normal «Miguel F. Martínez»; especificamente no ensino da matemática. Representa um estudo qualitativo e descritivo. Os instrumentos para coleta de dados foram questionários estudantis, gravações de vídeo de aulas e produções de alunos da educação básica. O estudo nos permitiu conhecer o estado atual de ensino que os alunos realizam, em torno do conteúdo matemático escolar do diploma que frequentam.
PALAVRAS-CHAVE: Ensino, formação de professores, matemática, prática profissional.

1 I INTRODUCCIÓN

En México, las escuelas normales han cumplido con la trascendental tarea de formar a los docentes que trabajarán en la Educación Básica (EB), en el país. En el 2012 en este tipo de instituciones se puso en marcha una nueva reforma curricular, atendiendo a la imperiosa necesidad de incrementar los niveles de calidad y equidad de la educación; asumiendo el reto de formar docentes capaces de responder a las demandas, así como a los requerimientos que plantea la EB, sobre todo, en los niveles de educación preescolar y primaria.

Particularmente, el Plan de estudio para la Licenciatura en Educación Primaria (LEP), se sustenta en las tendencias de las diversas perspectivas teórico-metodológicas de las disciplinas que son objeto de enseñanza en la EB. Así como de aquéllas que explican el proceso educativo, de las que atienden a la naturaleza y desarrollo de las prácticas pedagógicas actuales y las emergentes que surgen ante los nuevos requerimientos y problemas que el maestro enfrenta (SEP, 2012a). Acciones que son resultado de los múltiples cambios en los contextos actuales y que impactan de manera notable, en el servicio educativo que se ofrece.

El Plan de estudios 2012 retoma los enfoques didáctico-pedagógicos de corte constructivista. A través del tratamiento de los cursos que forman parte de la malla curricular, se espera que los futuros docentes se apropien de métodos de enseñanza, estrategias didácticas, formas de evaluación, uso de las TIC; que desarrollen su capacidad para crear ambientes de aprendizaje que respondan a las finalidades y propósitos de la educación básica, y a las necesidades de aprendizaje de los alumnos, del contexto social y su diversidad (SEP, 2012a). Asimismo, con la implementación de este plan de estudios, se aspira a contribuir a la formación de docentes de educación básica que utilicen argumentos científicos, pedagógicos, metodológicos, técnicos e instrumentales para entender y hacer frente a las complejas exigencias que la docencia plantea.

Desde el primer semestre y conforme a las Jornadas de observación y práctica que se establecen desde los documentos normativos, los estudiantes normalistas se incorporan a las aulas de las escuelas primarias con la intención de realizar actividades propias de observación, ayudantía y primeros encuentros con el tratamiento de contenidos matemáticos. Hecho que les posibilita significativamente, contrastar los conocimientos adquiridos durante los cuatro cursos trabajados en la escuela normal con los contenidos de los programas de estudio de la educación primaria; así como observar el tratamiento que dan los maestros titulares de los grupos de EB, a los contenidos matemáticos.

Específicamente en el trayecto formativo *Preparación para la enseñanza y el aprendizaje*, los estudiantes tienen la posibilidad de capacitarse a través de cursos en los que profundizan en el estudio de la asignatura de Matemáticas. Los cursos para la LEP son *Aritmética: su enseñanza y aprendizaje; Álgebra: su enseñanza y aprendizaje; Geometría: su enseñanza y aprendizaje;* y *Procesamiento de información estadística* (SEP, 2012a). El propósito de estos cursos es proporcionar herramientas para el desempeño profesional del futuro docente con respecto al manejo de contenidos matemáticos y al análisis de los múltiples usos que tienen las matemáticas en los contextos educativo, científico, social y económico.

A la vez se pretende, que los estudiantes normalistas desarrollen competencias que les permitan diseñar y aplicar estrategias didácticas eficientes para que los alumnos que atiendan en las escuelas primarias, se apropien de las nociones, conceptos y procedimientos que favorezcan la asignación de significados a los contenidos matemáticos, y aprendan a usarlos con propiedad y fluidez en la solución de problemas que se les presenten.

En este sentido, y con la intención de hacer una valoración sobre las experiencias docentes que los estudiantes han vivenciado hasta el momento, en la Escuela Normal "Miguel F. Martínez" se inició el presente estudio cuyo objetivo fue analizar las fortalezas y áreas de oportunidad que presentan los estudiantes normalistas de sexto semestre de las Licenciaturas en Educación Primaria, con respecto a su práctica profesional, específicamente en la enseñanza de las Matemáticas.

2 | METODOLOGÍA

El presente estudio es de corte cualitativo y de alcance descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista 2008). La muestra está integrada por 90 estudiantes normalistas, 72 mujeres y 28 hombres, que cursan el sexto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria (LEP) y realizaron su jornada de práctica profesional en escuelas primarias, con grupos de alumnos de quinto y sexto grados ubicadas en el estado de Nuevo León, México. Los instrumentos para la recogida de datos utilizados fueron un cuestionario a estudiantes, videograbaciones de clases recuperadas de la jornada y producciones de los alumnos de los grupos respectivos de práctica; se consideraron para el análisis fichas de trabajo, ejercicios en el cuaderno, en el libro de texto, entre otras. Para el tratamiento y análisis de la información, los datos fueron agrupados en matrices estudiante/categoría, efectuando registros descriptivos en cada una de las celdas en torno a lo focalizado en los cuestionarios y en los videos de clase.

Las categorías de análisis utilizadas fueron las siguientes: Metodología didáctica, Recursos didácticos, Formas de organización social de la clase, Participación de los alumnos en clase, Socialización de los aprendizajes, Empleo de tecnología, Uso del tiempo y Técnicas e instrumentos de evaluación. Para la estructuración y precisiones de las mismas se tomaron como referencia, diversas fuentes bibliográficas y materiales de apoyo diseñados por la Secretaría de Educación Pública (SEP) del país, y que integran el acervo que debe poseer el docente en servicio para organizar su enseñanza. Ente estos documentos normativos se destacan el Plan de Estudios (SEP, 2011), Programa de Matemáticas (SEP, 2012b), Guía para el Maestro (SEP, 2014) y Texto Desafíos matemáticos (SEP, 2013). Las categorías fueron elaboradas a partir de las propuestas y sugerencias de los autores revisados en el marco teórico de este trabajo y validadas por expertos en la materia. En el siguiente apartado se incluye cada categoría representada con una C, acompañada de un número para referir el orden de presentación.

3 I RESULTADOS

A manera de síntesis, se presentan resultados en torno a cada una de las categorías recuperados para el análisis de la información.

C1. Sobre la Metodología didáctica: Con respecto a las respuestas ofrecidas en el cuestionario, la mayoría de los estudiantes normalistas manifestaron que abordar la enseñanza de las matemáticas conforme al enfoque didáctico propuesto desde el Plan de estudios, es adecuado para desarrollar competencias en los alumnos de educación básica (SEP, 2012b). Enfatizaron la importancia de la recuperación de los conocimientos previos, sobre todo al inicio de las clases; generar nuevos conocimientos matemáticos a través del planteamiento de problemas; expresaron trabajar conforme a secuencias de situaciones problemáticas en contexto; llevar las matemáticas al aula con base al tratamiento de situaciones y experiencias cercanas y variadas para los alumnos; promover la participación de los niños en clase; socializar procesos y plantear preguntas que lleven a sus alumnos a la construcción de conocimiento matemático tal y como se recomienda desde los documentos normativos emitidos por la SEP.

Como es de concluirse, desde el decir, los estudiantes tienen claridad en los aspectos que caracterizan al enfoque didáctico actual. Reconocen que “La experiencia que vivan los alumnos al estudiar matemáticas en la escuela puede traer como consecuencias: el gusto o rechazo, la creatividad para buscar soluciones o la pasividad para escucharlas y tratar de reproducirlas” (SEP, 2011, p. 67).

Sin embargo, debemos referir que en la práctica profesional observada en los videos identificamos, aunque en un bajo porcentaje (26%), estudiantes que trabajaron bajo una forma instructiva y explicativa con características distantes a lo propuesto para el tratamiento de las matemáticas escolares. Explicaron el tema a los alumnos, trabajaron estrictamente con los ejercicios del libro de texto, limitado uso de material didáctico, pocos espacios para la participación activa de los alumnos. En este porcentaje de estudiantes, también ubicamos a aquellos que tuvieron dificultad para la implementación de sus actividades.

En algunos, se observó que durante el desarrollo y cierre de la clase utilizaron básicamente preguntas de tipo cerradas donde sus alumnos contestaban con un “sí” o “no” a lo planteado por el estudiante normalista; o bien, terminaban solo la frase que el normalista iniciaba, por ejemplo “La figura que tiene cinco lados iguales es el…”. Pese a estos casos, identificamos coincidencia en los más de los estudiantes en su *decir y hacer*; es decir, trabajaron bajo una metodología apegada a las características sugeridas desde el enfoque didáctico.

C2. Recursos didácticos: La mayoría de los estudiantes normalistas elaboró e hizo uso de material didáctico, como dibujos o carteles con imágenes. Asimismo, se observó en los videos que los alumnos utilizaron durante el inicio o desarrollo de la clase, material manipulable/concreto. Entre los manipulados se pueden citar material recortable del libro de texto; Tangram; fichas para hacer agrupamientos de unidades, decenas, centenas y millares; productos de uso diario para compra-venta; monedas y billetes; dados para trabajar contenidos de probabilidad; seriaciones; palillos y plastilina para armar figuras y cuerpos geométricos; tarjetas con fracciones, entre otros (figura 1).

Figura 1. Ejemplo de material didáctico manipulable.

En respuesta al cuestionario, la mayoría de los estudiantes manifestó que ha utilizado con los alumnos, este tipo de recursos tomando en consideración las recomendaciones didácticas expresadas desde la Guía para el Maestro de Matemáticas. Documento en el que se hace referencia a que en la mayor parte de los contenidos matemáticos se deben introducir con actividades que impliquen el uso de material concreto. Asimismo, la forma en que los alumnos utilizan dichos materiales, determina en gran medida, la posibilidad de comprender/aprender el contenido que se trabaja (Chamorro, 2004; SEP, 2014).

C3. Formas de organización social de la clase: En la presente categoría, se identificó que 67 estudiantes normalistas utilizaron variadas formas de organización para que sus alumnos llevaran a cabo las actividades planeadas. Hicieron uso de actividades de forma grupal, en las que participaron alumnos al frente con la finalidad de resolver situaciones problemáticas en el pintarrón o bien para socializar procesos de solución y resultados. También organizaron a los alumnos para trabajar de forma colaborativa o en pequeños grupos, al trabajar con juegos matemáticos o resolver algún desafío matemático (figura 2); tal como se promueven desde el enfoque didáctico de la asignatura (Arends, 2007; SEP, 2012a; SEP, 2014).

Figura 2. Organización de alumnos en pequeños grupos.

Quienes no utilizaron la forma de trabajo en equipo, manifestaron en respuesta del cuestionario que una de sus preocupaciones es perder el control de grupo, implica inversión de tiempo excesivo o bien no lograr el aprendizaje esperado en la totalidad de los alumnos del grupo. Por su parte, el trabajo individualizado también fue frecuente dentro de sus clases, las actividades para esta forma de organización, se basó en contestar fichas de trabajo, ejercicios en el cuaderno y en el libro Desafíos matemáticos. Los alumnos permanecieron sentados, los bancos organizados como ordinariamente se ubican, en filas y viendo hacia el frente del aula de clase.

C4. Participación de los alumnos en la resolución de situaciones problemáticas con sus propios recursos. En los videos observamos que el 72% de los estudiantes normalistas ofrecieron a sus alumnos, la oportunidad de resolver situaciones problemáticas con diferentes recursos o procedimientos, atendiendo las recomendaciones expresadas desde el enfoque metodológico para el tratamiento de las matemáticas, en donde se señala desde el programa de la asignatura que,

> El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de las Matemáticas, consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. (SEP, 2011b, p. 67).

Conforme a estas posibilidades de trabajo, sus alumnos estuvieron en la posibilidad de poner en juego su pensamiento matemático y así fortalecer competencias matemáticas tales como *Resolver problemas de manera autónoma*, implicándoles identificar y resolver diferentes tipos de problemas o situaciones; la intención está también puesta en que, al tratar de encontrar soluciones a las situaciones problemáticas, sean capaces de resolverlas utilizando más de un procedimiento, reconociendo cuál o cuáles son más eficaces (SEP, 2011).

Asimismo, *Manejar técnicas eficientemente,* competencia que hace referencia al uso eficiente de procedimientos y formas de representación al realizar cálculos. La intención no es que los alumnos utilicen de forma mecánica los algoritmos convencionales (suma, resta, multiplicación, división), sino que comprendan el significado y uso de los números y de las operaciones. Asimismo, es importante señalar que, "… para lograr el manejo eficiente de una técnica es necesario que los alumnos la sometan a prueba en muchos problemas distintos. Así, adquirirán confianza en ella y la podrán adaptar a nuevos problemas" (SEP, 2011, p. 71).

Algunos ejemplos de las evidencias de trabajo en los cuadernos de los alumnos, muestran formas diferentes de solución en torno a una misma problemática (figura 3).

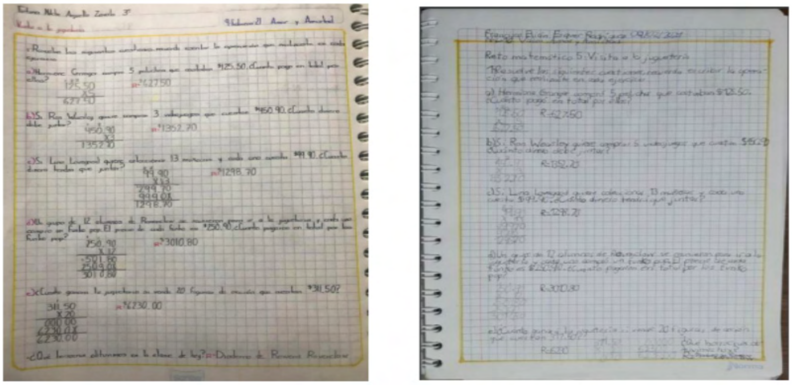


Figura 3. Producciones de los alumnos en clases de Matemáticas.

Sin embargo, en los videos también identificamos que el otro porcentaje de estudiantes normalistas que, pese a lo propuesto desde el enfoque didáctico, buscaron que sus alumnos encontraran soluciones a problemáticas planteadas solo bajo una misma forma de solución. Particularmente, haciendo uso de los algoritmos como suma, resta, multiplicación, división o bien la combinación de algunas de ellas.

Desde el decir, a través de las respuestas de los cuestionarios, los estudiantes manifestaron también la importancia del desarrollo de las cuatro competencias matemáticas que se deben favorecer en los alumnos de educación básica. Así como lo significativo que es ofrecer espacios en la clase, para que los alumnos tengan la libertad y confianza de resolver sus problemas, según sus habilidades y procesos constructivos.

C5. Socialización de los aprendizajes. Conforme a la observación en las clases, se identifica que el 52% de los estudiantes ofrecieron oportunidades para que los alumnos comunicaran a sus pares las formas de solución utilizadas o bien los resultados obtenidos, con la finalidad de construir y reconstruir procesos. En algunos casos se solicitó aleatoriamente a algunos alumnos manifestar en voz alta las soluciones, en otros casos se preguntaba quién deseaba compartir sus formas de solución y respuesta a la problemática, siendo los elegidos para socializar. En los momentos donde se identificaba algún error entre las respuestas expresadas por los alumnos, los estudiantes normalistas cuestionaban al resto de los alumnos si estaban de acuerdo o en desacuerdo, para que, entre todos valoraran los procedimientos y llegaran a la solución.

Para estos casos, los normalistas referían que tenían presente favorecer la competencia *Comunicar información matemática*, la cual implica que los alumnos tengan los espacios para expresar, representar e interpretar información matemática contenida en una situación problemática planteada (SEP, 2011). En estos escenarios, los estudiantes normalistas asumieron su rol de acompañantes en el proceso constructivo.

En el otro porcentaje, donde no se abrieron los espacios para la socialización se observó que hubo dificultad entre los alumnos para encontrar respuestas pertinentes, los normalistas terminaban en algunos casos por expresar al grupo, las soluciones de los mismos. Situación que presenta desapego conforme a lo propuesto desde el enfoque para el tratamiento de las matemáticas en la escuela primaria, en donde se expresa que "… vale la pena insistir en que los estudiantes sean quienes encuentran las soluciones… compartan sus ideas, en las que quizá habrá acuerdos y desacuerdos, pero la finalidad es que se expresen con libertad y aprendan unos de otros" (SEP, 2014, p. 79).

C6. Empleo de tecnología: Un limitado número de estudiantes (22) incorporaron el uso de tecnología en la clase, debido a que en los más de las aulas se carece de este recurso. En las aulas en las que se cuentan con computadora y proyector, los estudiantes utilizaron este recurso para proyectar videos, juegos matemáticos interactivos, ejercicios a resolver o bien para mostrar imágenes ampliadas de las páginas del libro de texto y ser contestadas en algunos casos, de forma grupal (figura 4).

Figura 4. Juegos interactivos utilizados en las clases de Matemáticas.

Bautista, Martínez e Hiracheta (2014), señalan que toda vez que se han incorporado las TIC en el ámbito educativo, los profesores deben diseñar y utilizar materiales didácticos innovadores, en los cuales incorporen recursos tecnológicos. Éstos brindan nuevas oportunidades en beneficio del entorno académico y ayudan a despertar el interés de los alumnos. Hacen que se motiven por su propio aprendizaje con ayuda de las actividades que se les presenten; ya que el aprendizaje significativo se logra cuando se involucran y trabajan con herramientas conocidas por ellos. Algunos de los beneficios que se obtienen al utilizar material didáctico en el aula están motivar a los alumnos, favorecer la adquisición de nuevos conocimientos y apoyar la evaluación y el reforzamiento del aprendizaje.

Sin duda, el abastecimiento tecnológico en los salones de clase en las escuelas de educación básica, sigue representando un área de oportunidad en las instalaciones educativas en nuestra entidad y del país en general. Asimismo, y pese a que la mayoría de los estudiantes refirieron desde su respuesta en cuestionario que el uso de la tecnología es importante, necesaria para favorecer la enseñanza y motivar el aprendizaje de los alumnos, se debe señalar que solamente ocho estudiantes por iniciativa propia, incorporaron este recurso a sus clases trasladando su equipo personal al aula.

C7. Uso del tiempo: Para el 42% de los normalistas, el tiempo efectivo de clase (según respuestas del cuestionario) representa una debilidad, manifestando tener dificultades para su administración durante el desarrollo de las actividades en clase. Ante este hecho, Razo y Cabrero (2015) refieren que se debe considerar que la relevancia del tiempo escolar no se encuentra en su dimensión cronológica, sino en su potencial como medio para generar oportunidades de aprendizaje en los alumnos de un grupo de cualquier nivel educativo.

Al respecto, algunos refirieron dedicar mucho tiempo a una misma actividad, limitando el tiempo para la realización del resto de la clase. Otros, manifestaron que daban más tiempo del debido a los alumnos para que resolvieran algún ejercicio. Unos más expresaron que llevar a la práctica cierto juego matemático, siempre les implicaba invertir más del tiempo necesario porque no querían interrumpir la actividad, ni limitar a los alumnos. Decisiones que reconocieron, les llevaban a realizar ajustes a sus planificaciones; y en algunos de los casos, reducir considerablemente el número de actividades que habían planeado. Hechos que se pudieron corroborar en las observaciones de clase realizadas a través de los videos; lo que nos permite afirmar que, como lo señalan Antúnez, Imbernón, Parcerisa y Zabala (2000) "Programar la enseñanza se convierte en un proceso de investigación y no una formalización rígida" (p. 107).

Por su parte, el resto de los estudiantes se sintieron fortalecidos y confiados en relación al uso del tiempo. Trabajaron acode a la organización de sus actividades y tiempos. En pocos casos, tuvieron que fusionar u omitir a lo sumo dos actividades para no tener dificultades con la administración de los tiempos designados para la clase de Matemáticas. Debemos referir que la cantidad de alumnos que posea un grupo, constituye también un factor determinante para el control del tiempo. La cantidad de alumnos de los grupos observados osciló entre 16 y 42 alumnos.

C8. Técnicas e instrumentos de evaluación: Otro de los componentes importante en el proceso educativo es la recolección de información sobre el estado de los saberes de los alumnos, la cual debe proporcionar al profesor elementos para la toma de decisiones en pro de la mejora de la calidad de su enseñanza y en consecuencia, de los aprendizajes de los alumnos. Asimismo, las producciones de los éstos últimos, deben dar cuenta tanto de los resultados derivados de las estrategias de enseñanza empleadas, así como de lo que aprendieron y de las dificultades a las que se enfrentaron.

Desde el decir, a los estudiantes les queda claro su papel como evaluadores del proceso, ya que la conceptualizan como se refiere desde el documento titulado Las Estrategias y los Instrumentos de Evaluación desde el Enfoque Formativo (SEP, 2012c), el proceso que posibilita obtener, sistematizar e interpretar información para facilitar la toma de decisiones con respecto a los aprendizajes de los alumnos. Sin embargo, para este caso, la evaluación de los aprendizajes también es considerada por la mayoría de los estudiantes (56) como un área de oportunidad. Expresan tener dificultad desde la elección de las herramientas de evaluación más adecuadas que les permitan valorar los aprendizajes matemáticos esperados; hasta la elaboración de los mismos. Consideran que son limitados los tipos de instrumentos que utilizan, remitiéndose básicamente al uso de listas de cotejo y escalas estimativas. Manifiestan que, con respecto al uso de rúbricas, se les dificulta determinar y delimitar los indicadores más ajustados para valorar los aprendizajes de sus alumnos; razón por la que son poco utilizadas.

Otros más consideraron el uso de fichas de trabajo como instrumentos para valorar los logros de sus alumnos. En este tipo de instrumentos, los alumnos resolvieron ejercicios como descomposición de cantidades, encontrar áreas y volúmenes, solución de problemas de porcentaje, algoritmos para la suma y la resta; y en pocos casos, problemas de aplicación; en concreto, se identificaron ejecuciones rígidas en torno a acciones mecánicas.

Un instrumento más lo constituyeron los cuadernos de Matemáticas como referentes de evaluación, sin contar con un instrumento para su valoración. En ellos se efectuaron mecanizaciones, comparación de cantidades, trazo de figuras y cuerpos geométricos, series numéricas, copiado de ejercicios que se realizaron colectivamente, entre otros. Los más de los estudiantes hicieron énfasis sobre la formalidad de la presentación de las producciones, requiriendo que sus alumnos registraran la fecha, el valor del mes, nombre de la actividad y el ejercicio a resolver. En algunos casos, la cantidad de alumnos generó una revisión acelerada de los mismos, debido a que se efectuó en tiempos de la clase.

El Libro de texto fue otro recurso utilizado recurrentemente para trabajar de forma grupal. En los menos de los casos (10), los estudiantes dieron lectura a la introducción al tema, a las instrucciones y las situaciones planteadas en cada actividad, solicitando posteriormente a los alumnos, contestar la respuesta para que el resto de los compañeros registrara en el espacio correspondiente. En estas clases, se dejó de lado la recomendación que se hace desde el Libro para el Maestro de Matemáticas (SEP, 2013), donde se recomienda que para que los alumnos puedan comprender y resolver las lecciones del libro, será necesario que previamente se trabaje en actividades donde se haga uso de material concreto preferentemente.

4 I CONCLUSIONES

El estudio ha permitido conocer el estado actual sobre la enseñanza que los estudiantes normalistas realizaron en torno a los contenidos matemáticos escolares del grado que atendieron. Se identifican en los estudiantes fortalezas como el conocimiento y atención que prestan a los aspectos que caracterizan a la metodología didáctica para la enseñanza de las matemáticas, sugerida desde el Plan de estudios de educación básica.

Asimismo, el uso variado de recursos didácticos también se considera como una fortaleza a destacar, ya que se pudo corroborar que los estudiantes dedicaron especial atención a su diseño, he hicieron un uso adecuado de los mismos con la intención de favorecer la construcción de conceptos matemáticos.

Las formas de organización de la clase, viene a representar otra de las fortalezas, ya que en buena medida hicieron un uso variado en torno al trabajo grupal, colaborativo e individual; sin embargo, se puede valorar como una categoría en la que hace falta que la totalidad de los estudiantes favorezcan el trabajo colaborativo, con la finalidad de que se posibilite la construcción social del conocimiento matemático. Una más la constituyó la participación de los alumnos en la resolución de situaciones problemáticas con sus propios recursos, ya que los normalistas consideraron importante que sus alumnos tuvieran una participación activa al resolver problemas conforme a sus habilidades matemáticas desarrolladas.

Para menos de la mitad de la muestra, el uso del tiempo representa un reto a vencer, su experiencia al momento todavía no les alcanza para tomar decisiones que les posibiliten optimizar los tiempos de clase; al respecto, será necesario trabajar desde los cursos en la institución, técnicas efectivas que puedan llevar a la práctica durante sus jornadas. El uso de la tecnología fue limitado entre los estudiantes, se requiere que desde *su hacer* busquen la forma de incorporar este recurso al aula, ya que desde *su decir* reconocen la importancia de la misma como forma de favorecer aprendizajes en sus alumnos, en tiempos actuales. Por su parte, la evaluación de los aprendizajes, también viene a formar parte de una de las debilidades de los futuros maestros, requiriendo desde la institución buscar los mecanismos necesarios para atender y fortalecer este importante rubro en el proceso formativo que reciben los estudiantes.

Se cierra este apartado destacando lo importante y necesario que es trabajar las matemáticas con apego a los fundamentos pedagógicos y metodológicos propuestos desde el plan de estudio vigente; hecho que garantizará sin duda, mejores resultados en el nivel educativo con el que se trabaje. Las experiencias que vivan los futuros maestros al estudiar y trabajar las matemáticas en las escuelas primarias les traerá en consecuencia el gusto, la creatividad para encontrar soluciones, la búsqueda de explicaciones y en consecuencia, la toma de las mejores decisiones que impactarán sin duda alguna en los aprendizajes y la actitud de sus alumnos, hacia las matemáticas escolares.

REFERENCIAS

Airasian, P. (2002). *La evaluación en el salón de clases*. México: Mc Graw Hill Interamericana Editores.

Antúnez, S., Imbernón, F., Carmen, L., Parcerisa, A., Zabala, A. (2000). ***Del Proyecto Educativo a la Programación en el Aula.*** España: Graó. ISBN: 84-7827-055-8. 13ª Edición.

Arends, R. (2007). ***Aprender a enseñar***. Séptima Edición. México: Mc Graw Hill.

Bautista, M., Martínez, A., Hiracheta, R. (2014). El uso de material didáctico y las tecnologías de información y comunicación (TIC's) para mejorar el alcance académico. **Ciencia y tecnología.** 1(14), 183-194. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), México. https://doi.org/10.18682/cyt.v1i14.217

Chamorro, M. C. (Coord.) (2004). ***Didáctica de las Matemáticas para Primaria***. Madrid: Pearson Educación.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2008). ***Metodología de la Investigación***. Chile: McGraw-Hill.

Razo, A. y Cabrero, I. (2015). ***Uso y organización del tiempo en aulas de educación media superior.*** México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2011**). *Plan de Estudios 2011. Acuerdo por el que se establece la Articulación de la Educación Básica***. Subsecretaría de Educación Básica. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2012a). **Plan de Estudios de la Licenciatura en Educación Primaria.** http://www.dgespe.sep.gob.mx/reforma_curricular/planes/lepri/plan_de_estudios/ Consultado 8/01/2017.

Secretaría de Educación Pública. (2012b). ***Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro*. Educación Básica. Primaria. Quinto grado**. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2012c). ***Las Estrategias y los Instrumentos de Evaluación desde el Enfoque Formativo***. Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC). México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2013). ***Desafíos Matemáticos. Libro para el alumno*. Sexto grado**. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2014). ***Desafíos Matemáticos. Guía para el maestro.*** Sexto grados. México: SEP.

CAPÍTULO 5

CONSTRUINDO O CONCEITO E OPERACIONALIZANDO FRAÇÕES COM MATERIAIS CONCRETOS – VERSÃO COMPLETA

Data de aceite: 01/12/2021
Data de submissão: 18/11/2021

Givaldo da Silva Costa
Recife - PE
http://lattes.cnpq.br/0349471818838189

RESUMO: Em pleno Século XXI, grande parte dos estudantes brasileiros, nos mais diversos níveis de escolaridade, sentem dificuldades em assimilar o ensino-aprendizagem envolvendo números racionais, em especial as frações. Na hipótese de que um dos principais motivos está na restrita exploração, no ambiente escolar, da aplicação de apenas um dos seus significados conceituais: a ideia de repartição e deixando em segundo plano o de medição, bem como na falta da prática cotidiana do uso de materiais concretos manipulativos, este capítulo, tem como prioridade construir o conceito de frações à luz dos seus principais significados, buscando uma explicação na origem epistemológica da sua palavra, associando à nomenclatura dos seus termos e fazendo um paralelo entre razão e fração, tendo como suporte a utilização de um kit fracionário, confeccionado com materiais simples. Procura entrar nos bastidores das quatro operações fundamentais dos números fracionários com uma linguagem clara e objetiva, compatível com o nível de escolaridade do Ensino Fundamental, fazendo com que as abstrações contidas em nossas regras, convenções e propriedades matemáticas sejam demonstradas e/ou justificadas, contribuindo para que a Matemática seja significativa.

PALAVRAS-CHAVE: Conceito, significado, instrumentalização, aprendizado.

BUILDING THE CONCEPT AND OPERATING FRACTIONS WITH CONCRETE MATERIALS - FULL VERSION

ABSTRACT: In the middle of the 21st century, most Brazilian students, at the most diverse levels of education, find it difficult to assimilate teaching and learning involving rational numbers, especially fractions. In the hypothesis that one of the main reasons is the restricted exploration, in the school environment, of the application of only one of its conceptual meanings: the idea of sharing and leaving the measurement in the background, as well as the lack of daily practice of using concrete manipulative materials, this chapter has as priority to build the concept of fractions in the light of its main meanings, searching for an explanation in the epistemological origin of its word, associating it to the nomenclature of its terms and making a parallel between reason and fraction, having as support the use of a fractional kit, made with simple materials. It seeks to go behind the scenes of the four fundamental operations of fractional numbers with a clear and objective language, compatible with the level of education of elementary school, making the abstractions contained in our rules, conventions and mathematical properties to be demonstrated and / or justified, contributing for mathematics to be meaningful.

KEYWORDS: Concept, meaning, instrumentalization, learning.

INTRODUÇÃO

Segundo registros históricos encontrados no Papiro de Rhind, há cerca de 2.500 a.C., os geômetras do faraó egípcio realizavam marcação de terras para a população que ficavam às margens do rio Nilo, comprovando que, naquela época, as frações já eram praticadas com habilidade. Entretanto, atualmente, grande parte dos estudantes brasileiros, nos mais diversos níveis de escolaridade, principalmente no Ensino Fundamental, sentem dificuldades em praticar as operações e resolver situações-problema com números racionais fracionários.

Os materiais concretos, em sala de aula, vêm sendo utilizado a mais tempo do que muitos imaginam como nos mostra Nacarato (2005): *"O uso de materiais manipuláveis no ensino foi destacado por Pestalozzi, no século XIX, ao defender que a educação deveria começar pela percepção de objetos concretos, com a realização de ações concretas e experimentações. No Brasil o discurso em defesa da utilização de recursos didáticos nas aulas de Matemática surgiu na década de 1920".* Sendo assim, praticamente cem anos depois, na hipótese de que uma das principais dificuldades do ensino aprendizagem atual está na falta da prática cotidiana do uso de materiais concretos manipuláveis, urge uma prioridade pedagógica em fazer uso da instrumentalização adequada, uma vez que há constatação de que os conceitos fracionários são apresentados de forma incompleta, contribuindo para que este importante conteúdo tenha um alto índice de rejeição na classe estudantil.

É fácil perceber que professores dos anos iniciais do ensino fundamental, têm mais assiduidade no uso de materiais manipuláveis, devido à formação recebida no Curso do Normal Médio e/ou no Curso de Pedagogia, porém à medida que o nível de escolaridade aumenta, por motivos não totalmente esclarecidos, esses materiais vão escasseando em nossas salas de aula. Todavia, o fato é que justamente esta fatia de professores que mais utiliza materiais manipuláveis são as que têm menor intimidade com a disciplina de Matemática, diferentemente dos professores dos anos finais, que tem graduação específica na área, porém, muitos deles se distanciam da prática manipulativa de materiais em seu cotidiano escolar.

Atualmente professores e estudantes têm várias ferramentas digitais que estimulam a construir adequadamente os conceitos curriculares, porém poucos sabem fazer uso adequado deles. Assim, oportunidades de participação em eventos presenciais são sempre bem-vindas, principalmente na modalidade de minicursos e oficinas pelo seu caráter teórico prático, proporcionam manipulação de materiais concretos, integrando o saber com o saber fazer.

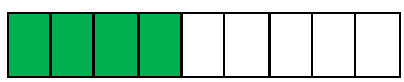
CAMINHOS METODOLÓGICOS

Como ponto de partida para iniciar discussões em torno do tema proposto nas Formações Continuadas de Professores, que acontecem no próprio ambiente escolar dentro das aulas-atividade, alguns questionamentos foram instrumentos de uma enquete aplicada com 40 professores da rede estadual de ensino, de diferentes cidades e escolas que lecionam nos anos finais do ensino fundamental, participantes do Projeto Ação de Fortalecimento da Aprendizagem, organizada pela Secretaria de Educação de Pernambuco, ao longo do biênio 2017/2018 que tem como foco as denominadas escolas prioritárias. São definidas como escolas prioritárias aquelas que têm baixo desempenho no SAEPE (Sistema de Avaliação do Estado de Pernambuco). Vejamos, então:

a) Colocando SIM ou NÃO, identifique quais figuras abaixo que representam frações. Em caso afirmativo, determine o seu valor fracionário:

Resp.: _____ Resp.: ______ Resp.: ______ Resp.: ______

b) Sabendo que uma das representações gráficas da fração 4/9 é a apresentada abaixo, como seria a representação gráfica da fração 9/4?



c) Como você define ou conceitua frações próprias e frações impróprias? Por que recebem esses nomes específicos?

d) Tomando como referência uma representação gráfica de 1/4, por que alguns estudantes a interpretam numericamente como fração 1/3?

e) Qual a linguagem correta que devemos usar ao comparar as frações 3/4 e 2/3: "Quantas vezes 3/4 estão contidas em 2/3" ou "Quantas vezes 3/4 contém 2/3"?

f) Por que, ao adicionar ou subtrair frações com denominadores diferentes, extraímos o MMC para dividir pelo denominador e o resultado multiplicar pelo numerador?

g) Por que na multiplicação de frações, multiplicamos os seus numeradores e os seus denominadores entre si?

h) Por que, na divisão de frações, repetimos o primeiro termo e multiplicamos pelo inverso do segundo termo?

Apenas para servir de parâmetro com outras enquetes semelhantes que possam ter sido realizadas por outras instituições e entrevistados, vejamos abaixo uma visão geral das respostas obtidas, mesmo porque – apesar de sermos um imenso país continental – mas, a realidade educacional não difere muito de uma região para outra, no quesito dificuldades de aprendizagem dos números racionais fracionários.

Com relação às quatro figuras (A, B, C, D) apresentadas nos questionamentos o resultado final mostrou que 100% dos entrevistados afirmaram que a figura A é *"com certeza"* uma fração. Na figura B, a "certeza" já não era tão firme, pois apesar da figura estar dividida em partes iguais, a parte tomada (pintada) fugiu das representações comumente aplicadas, dividindo as opiniões, porém 50% confirmaram que ela representa 1/16 "pela lógica". Com relação à figura C, as opiniões mostraram que 80% sabem determinar também "pela lógica", que ela representa 1/6, embora também afirmassem que não representa fração, *"porque o inteiro não está dividido em partes iguais"*; e quanto à figura D, todos afirmaram categoricamente que não representa frações, pois o inteiro "*está dividido de forma estranha e irregular*", bem como não souberam determinar o seu exato valor fracionário, mesmo assim, alguns fizeram estimativa visual de ser 50% do inteiro.

Quando solicitados para representar graficamente à fração imprópria 9/4, a visão inicial de 60% dos entrevistados é de que *"é impossível construir uma figura em que o inteiro seja dividido em 4 partes, e dela destacar 9 partes",* numa alusão ao procedimento de representar graficamente as frações próprias. Chamou a atenção o fato de que 70% dos professores identificaram as frações próprias e impróprias ainda pela comparação de seus termos numerador e denominador, fazendo uso da memorização pela localização dos seus termos, entretanto, nenhum dos entrevistados soube responder sobre a origem das suas nomenclaturas. Quanto à distinção entre fração e razão, quando apresentada a representação gráfica de 1/4, todos os professores afirmaram que a resposta apresentada por alguns alunos como a fração 1/3 é errada, porém a maioria não conseguiu detectar o motivo do erro, pois apenas 40% têm discernimento de que essa resposta equivocada leva à outra relação comparativa: a razão.

No tocante à adição e subtração 80% deles sabem que a aplicação do processo Mínimo Múltiplo Comum na adição e subtração de frações com denominadores diferentes, está relacionada com as suas frações equivalentes. Do total de entrevistados, 90% deles não compreendem o porquê na multiplicação de frações, devemos multiplicar os termos dos numeradores e denominadores entre si. Assim como todos não souberam o porquê na divisão devemos repetir o primeiro termo e multiplicar pelo inverso do segundo, confirmando apenas que assim procede porque a "*regra está no livro*" ou então porque "é *sempre assim que um professor faz em sala de aula*".

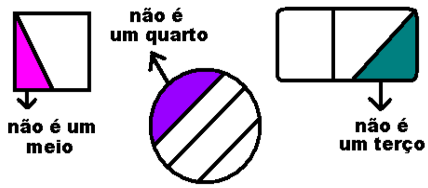
BUSCANDO RESPOSTAS

Logo após a aplicação das abordagens iniciais de frações (definição, leitura, nomenclatura dos termos, representação numérica e gráfica, tipos de frações, comparações, e outros itens importantes), finalmente as operações são apresentadas com suas regras técnicas da adição, subtração, multiplicação e divisão, geralmente sem sentido para os estudantes. Elas são memorizadas apenas para encontrar respostas das operações com frações que foram solicitadas pelo professor, mas não compreendem os procedimentos matemáticos inseridos no desenvolvimento operacional, nem tão pouco, sabem justificar a resposta encontrada. Isto nos lembra D'Ambrósio (1991) quando afirma: *"... há algo errado com a Matemática que estamos ensinando. O conteúdo que estamos tentando passar adiante através dos sistemas escolares é obsoleto, desinteressante e inútil".*

Podemos observar na afirmação acima que a crítica não está direcionada à importância dos conteúdos curriculares trabalhados nas escolas, mas à forma metodológica mecânica como eles estão sendo transmitidos, assim como à falta de contextualização com a realidade fora dos muros escolares, fazendo com que aquilo não tenha significado, estimulando assim o desinteresse dos estudantes, É preciso repensar as práticas pedagógicas para definir o ponto de partida e o ponto de chegada de cada conteúdo que, especificamente na Matemática, desafia os alunos com suas inevitáveis abstrações inseridos nas regras e propriedades. Nesse contexto, os materiais concretos manipuláveis surgem como um forte aliado no ensino aprendizagem.

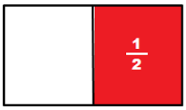
Na busca de respostas para os questionamentos acima aplicados, tivemos como aliado pedagógico *O Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa* (2009), onde aponta que a palavra *fração* vem do latim "*fractione*" que quer dizer "*dividir*, *quebrar*, *rasgar*", também lá encontramos: "*porção*, *parte de um todo"* e mais adiante ele finaliza: "*Na Aritmética: número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais; número fracionário".* Notamos que nos registros acima apresentados, não há uma atitude precipitada em mostrar fração apenas como parte de uma divisão em fatias iguais, como acontece no ambiente escolar, gerando um conceito incompleto dos números fracionários, não havendo preocupação de também mostrar a fração como uma parte qualquer do inteiro.

Alguns especialistas educacionais apontam que a postura de alguns professores em apresentar a fração apenas como o inteiro dividido em partes iguais deve-se ao fato de que para realizar as suas operações fundamentais essa repartição igualitária é imprescindível para que possamos adicionar, subtrair, multiplicar e dividir as partes fracionárias. Levando-nos a averiguar que o motivo é simplesmente de caráter *operacional*, e não *conceitual*. Logo, o conceito de fração pode, inicialmente, ser resumida simplesmente como *"parte do inteiro"*; sendo em seguida, aplicado com o sentido aritmético, visando às operações que vem adiante. Mesmo porque essa precipitação de apresentá-las em partes igualitárias entra em choque com atividades do cotidiano. Imaginemos a seguinte situação: se alguém derruba um vaso de louça, ao se quebrar ele ficará em vários pedaços (cacos), provavelmente de tamanhos diferentes, e nem por isso, cada um desses cacos, deixará de ser uma parte fracionária do vaso. Outras situações como objetos cortados e repartidos aleatoriamente, como as figuras geométricas abaixo, apesar de não estar divididas em partes iguais, mas não dúvida de que a parte tomada de cada uma delas é fração porque representa uma parte do inteiro.



Fonte: Imagem disponível em www.google.com.br / figuras fracionárias, acesso em 05 nov. 2020.

Ao longo do tempo, ao construir o conceito de fração, a prática pedagógica escolar priorizou bastante o significado de "repartição" como significado conceitual, relegando ao segundo plano, o de "medição*"*. Entretanto, numa forma de equilibrar as ideias, propõe-se que sejam mostrados mais de um significado, direcionando o pensamento não apenas à *quantidade de partes iguais em que o inteiro foi dividido* (repartição*)*, mas sim também à *da parte tomada, quantas vezes ela cabe no inteiro* (medição*).* Mesmo porque, segundo Lopes (2008): "é unanimidade entre os estudiosos matemáticos, que *[...] não é possível isolar cada uma das ideias envolvidas com as frações e suas interpretações"*. Reforçado por Romanatto (1999), quando diz categoricamente: *"o número racional deve ser entendido como uma teia de relações nas quais noções, princípios e procedimentos matemáticos distintos são construídos ou adquiridos por meio de diferentes contextos".*



Para distinguirmos a ideia de repartição e medição, tomemos como exemplo a fração 1/2. Como a ideia de repartição enfatiza em saber a quantidade de partes em que o inteiro é dividido e quantas delas são tomadas, então significa que o inteiro foi dividido em duas partes iguais e foi tomada uma parte. Por outro lado, tomando a fração como ideia de medição, enfatizamos em saber a quantidade de vezes que a parte tomada cabe integralmente no inteiro, então significa que a parte tomada cabe integralmente duas vezes no inteiro.

Também devemos destacar o significado da nomenclatura que damos quando classificamos os tipos de frações. Poucos param para pensar o porquê das denominações "frações próprias" e "frações impróprias". Vejamos, no sentido geral, própria é aquilo que é *pertinente, caracterí*stica*, peculiar*. Imprópria é aquilo que é *inadequada, não é justa*, *inconveniente, d*eixando a impressão de que, do ponto de vista histórico, inicialmente as frações impróprias não foram bem aceitas no mundo acadêmico em épocas remotas, tal como aconteceu com os números negativos, que inicialmente foram chamados de *números* *absurdos*. Ainda hoje, a fração própria recebe muito mais destaque do que a fração imprópria, sobretudo no tocante à sua representação gráfica.

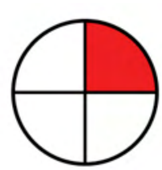
Este procedimento traz dificuldades quanto à falta de conhecimento da representação gráfica das frações impróprias. Por exemplo, se pedirmos para representar graficamente a fração 9/4, os estudantes sentirão dificuldades, porém, ao transformar 9/4 em 2 ¼ a representação gráfica fica compreensível, quando as associamos com o processo da Extração do Inteiro, que é muito conhecido dos professores e estudantes, porém raramente essa associação é mostrada em sala de aula,

9/4 = 2 ¼

Fonte: Imagem disponível em www.google.com.br / figuras fracionárias, acesso em 17 jun. 2018.

Por outro lado, infelizmente, ainda é predominante a linguagem de que *"fração própria é aquela em que o numerador é menor do que o denominador"* (que leva apenas à memorização da localização dos termos fracionários), ao invés de *"fração própria é aquela que representa uma quantidade menor que um inteiro"* (que leva à compreensão pela comparação de uma parte com o todo). Situação similar ocorre com as frações impróprias. Sabemos que há uma grande vontade, por parte dos professores, em procurar uma linguagem mais acessível que façam com que os estudantes entendam com mais facilidade aquilo que se quer explicar, porém devemos ter a clareza de que nem sempre a linguagem mais fácil de transmitir algo é mais completa e consegue traduzir o conceito com exatidão, dificultando a compreensão do estudante quando o conteúdo for aprofundado mais adiante. Além disso, é importante enfatizar a compreensão em detrimento da memorização.

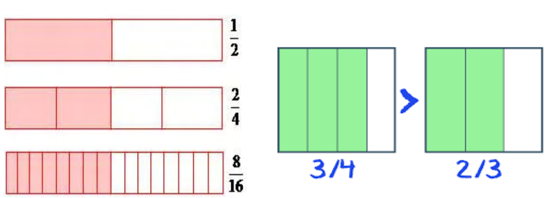
Quando cruzamos o conceito de fração e razão, percebemos que a etimologia latina da palavra razão vem de *ratio*, que possui a ideia de *divisão*. Vemos, portanto, que há uma ligação muito forte entre fração e razão, a ponto de quando solicitamos aos estudantes que representem numericamente um gráfico fracionário surgem pontos de interpretações visuais diferentes de uma mesma figura. Tomemos como exemplo a representação gráfica:



Neste exemplo, erroneamente, é bastante comum alguns estudantes a representarem numericamente como fração 1/3 (pois das quatro partes em que o inteiro foi dividido, uma parte está tomada e as outras três partes não estão), aplicando assim a leitura de “um está para três”. Outros a representam corretamente como fração 1/4 (pois o inteiro foi dividido em quatro partes iguais e que foi tomada uma parte), aplicando assim a leitura de “um quarto”. Dessa forma, podemos perceber que alguns a interpretam como *relação parte-parte,* e outros, como *relação parte-todo*. Na primeira relação está sendo aplicada a ideia de razão, e na segunda, a de fração. Cabe ao professor identificar e mostrar as devidas diferenças entre elas, apontando as suas peculiaridades e aplicações, porém, a distância dessas relações na sequência de conteúdos livrescos dificulta essa comparação, pois, geralmente, enquanto a fração é estudada a partir dos anos iniciais do ensino fundamental, a razão só aparece nos anos finais,

A linguagem utilizada pelo professor em sala de aula é um fator determinante para que haja o ensino aprendizagem devendo, portanto, ser clara e objetiva. O processo de comparação de frações possui papel de relevância, exigindo um pouco de cuidado quanto ao uso da linguagem “*contém”* (relação de inclusão que compara uma quantidade maior à outra menor) e “*está contido”* (relação de inclusão que compara uma quantidade menor à outra maior). Nunca utilizar a linguagem da relação de pertinência na comparação de frações. Voltando a um dos questionamentos iniciais, que linguagem usar na comparação entre 3/4 e 2/3, então temos que 3/4 contém 2/3.

Quando exposto no quadro as seguintes perguntas: *“Qual a maior fração 3/4 ou 2/3?” e “As frações 1/2, 2/4 e 8/16 são frações equivalentes?”* Para muitos alunos confirmarem que uma fração é maior ou menor que outra, fazem uso do procedimento de transformar as frações em denominadores iguais e assim encontrar as suas respectivas frações equivalentes, porém só se sentem definitivamente seguros da resposta quando são representadas graficamente. De fato, ao compararmos frações, os materiais concretos manipuláveis tornam-se um valioso instrumento pedagógico, pois a percepção visual não deixa dúvidas quanto à comparação entre as unidades fracionárias; situação oposta quando há apenas uso de registros numéricos, principalmente quando são abordadas frações com denominadores diferentes.

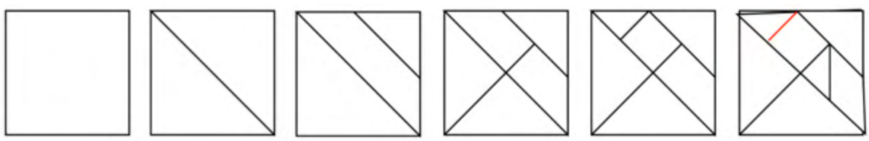


Fonte: Imagens disponíveis em www.google.com.br / figuras fracionárias, acesso em 11 set. 2020.

AMPLIANDO O CAMPO CONCEITUAL DE FRAÇÕES

Vale relembrar o que diz Lins e Silva (2008) no tocante ao trabalharmos frações em situações de medições: *“Relacionar frações com medidas é importante porque ajuda as crianças a perceberem frações como um número e não apenas como um símbolo que junta dois números (isso é muito comum) e para relacionar com medidas é muito importante destacar as frações unitárias, porque elas funcionam, neste caso, como um sistema de unidades de medida”.*

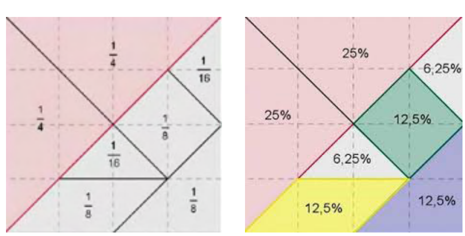
Como atividade prática para trabalharmos as frações em situações de medição a construção do Tangram, jogo chinês com sete peças bastante conhecido como quebra-cabeça geométrico para formar figuras, sempre é indicado também para estimular a criatividade e o raciocínio lógico. Feito a partir da decomposição de um quadrado, torna-se um bom material para trabalharmos frações, também com a ideia de repartição.



Utilizando as figuras geométricas encontradas (dois triângulos grandes, um triângulo médio, dois triângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo), identificar quais pares de peças representam figuras congruentes, semelhantes e equivalentes. Entre as respostas, as mais encontradas são:

- Figuras congruentes (par de triângulos grandes / par de triângulos pequenos)
- Figuras semelhantes (um triângulo grande, o médio e um pequeno)
- Figuras equivalentes (o quadrado e o paralelogramo)

Durante a confecção do Tangram, à medida que os segmentos de retas são traçados, as figuras geométricas vão sofrendo transformações e, a cada passo, temos oportunidade de determinar o valor fracionário. Abaixo temos as sete peças do jogo já definidas com seus valores em forma fracionária e em forma percentual:



Fonte: Imagens disponíveis em www.google.com.br / figuras fracionárias, acesso em 20 fev. 2021.

Como os dois triângulos grandes, juntos, equivalem à 1/2 do inteiro, então fica fácil observar que apenas um deles equivale à quarta parte do inteiro, logo vale 1/4.

Com o mesmo raciocínio, percebe-se que o triângulo médio equivale à metade de um dos triângulos grandes, logo vale 1/8 do inteiro. Por sua vez um dos triângulos pequenos equivale à metade do triângulo médio, logo vale 1/16 do inteiro. Para definir o valor do quadrado, basta observar que, se um dos triângulos pequenos equivale à sua metade, então ele vale o dobro de 1/16 que é 1/8 do inteiro. Mesmo procedimento para definir o valor fracionário do paralelogramo.

Pela justaposição ou sobreposição de peças, podem-se calcular valores em forma fracionária ou em forma percentual, por exemplo:

- Um triângulo grande mais o paralelogramo (1/4 + 1/8 ou 25% + 12,5%)
- Um triângulo grande mais o triângulo médio menos um triângulo pequeno (1/4 + 1/8 – 1/16 ou 25% + 12,5% - 6,25%)

É importante também relembrar a decomposição dos termos de um número fracionário. O pleno domínio desse procedimento irá ajudar bastante nas operações fundamentais ao utilizarmos os materiais manipuláveis.

Exemplo	Representação Decomposta
3/8	3 X 1/8 (três vezes a unidade fracionária de 1/8)
2/5	2 X 1/5 (duas vezes a unidade fracionária de 1/5)
7/4 = 1 ¾	1 + 3 X 1/4 (um inteiro mais três vezes a unidade fracionária de 1/4)

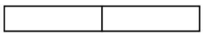
CONSTRUINDO O KIT FRACIONÁRIO

Diante de tantos tipos de materiais para sua confecção, tais como: barras, discos, cordas, réplicas representativas de bolos, pizzas, tabletes de chocolate, confeccionados com emborrachados, madeira, acrílico, etc., pode-se optar em utilizar cartolinas ou papel guache, devido ao seu baixo custo financeiro, fazendo com que os kits sejam reproduzidos em quantidades suficientes para a sua aplicação em sala de aula com formação de equipes, pois um trabalho coletivo pode ser interessante nesse momento.

Importante ressaltar que no estudo de frações é preciso delimitar a *Representação do Inteiro*. Caso não haja esse referencial, haverá um campo de imaginação muito diversificado do inteiro interpretado/imaginado de acordo com a leitura de cada um. Em nossas atividades, o inteiro é representado graficamente por uma figura geométrica retangular, formando grupos a partir de unidades fracionárias de 1/2, 1/3 e 1/5. Convém lembrar que nada impede que outras unidades fracionárias possam ser inseridas, ampliando o Quadro de Equivalência.

A escolha das medidas da representação do inteiro, em centímetros, que irá servir de referência para construção das demais bandejas, é um detalhe que deve ser levado em consideração, pois sabemos que – por exemplo – ao representarmos a figura de 1/2 o inteiro será dividido igualmente em duas partes; ao representarmos 1/3 o inteiro será dividido igualmente em três partes, e assim por diante. E como temos em nosso kit fracionário representações de 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/8, 1/10, 1/12 e 1/20, então o ideal é pensar em uma medida da largura da figura que facilite a divisão exata pelos denominadores dessas frações. Um dos recursos é aplicar o Mínimo Múltiplo Comum (MMC), no que daria 120 cm, que também poderia ser reduzido para 60 cm.

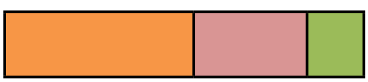
Dentre as representações fracionárias do kit acima, tomemos como referência 1/2. Devemos construir duas bandejas: uma em papel guache cor branca e outra em papel cartolina colorida para ser recortada. No exemplo dado, uma unidade fracionária da bandeja colorida recortada deve ser colocada em uma unidade fracionária da bandeja branca, formando então a representação gráfica de 1/2. Assim:

Bandeja branca representando o inteiro em papel guache: 

Bandeja colorida em papel cartolina a ser recortada: 

Unidade fracionária recortada sobreposta no inteiro: 

A escolha das cores das unidades fracionárias também é um elemento importante, Não é interessante que o kit completo seja de uma mesma cor. Há quem prefira selecionar as cores por grupo; outros preferem cores sortidas nos próprios grupos. O uso de cores diferentes torna-se um atrativo à parte quando comparamos as frações equivalentes e, principalmente, quando entramos na prática das operações. Antes de entrar nas operações fundamentais, propõe-se uma atividade interessante: Formar o inteiro utilizando as unidades fracionárias recortadas, quando justapostas entre si. Primeiramente, permitindo a repetição de peças e, em seguida, solicitar a formação do inteiro sem repetição de peças. Depois, aplicar atividades como: De quantas maneiras diferentes podemos formar o inteiro, utilizando as unidades fracionárias 1/2, 1/3 e 1/6? Quais são elas?



Respostas encontradas: 1/2 + 1/3 + 1/6 1/3 + 1/2 + 1/6 1/6 + 1/2 + 1/3

1/2 + 1/6 + 1/3 1/3 + 1/6 + 1/2 1/6 + 1/3 + 1/2

Pode-se solicitar a formação do inteiro com outras unidades do kit fracionário e suas respectivas combinações, explorando o tema de forma gradativa indo do método aleatório à combinação sistemática, conforme o nível de escolaridade dos alunos.

OPERACIONALIZANDO COM MATERIAIS MANIPULATIVOS

Na adição, quando os denominadores das frações iniciais forem diferentes, a operação é realizada com as frações equivalentes de denominadores comuns, encontradas pelo processo do MMC ou pela determinação dos conjuntos de equivalência. Na subtração, o processo é similar ao da operação da adição, porém no manuseio dos materiais, manipulamos apenas os valores da primeira parcela (minuendo), e com ela, operacionalizamos os valores da segunda parcela (subtraendo).

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO
1/2 + 1/3 Encontrando as frações equivalentes e operacionalizando: 1/2 + 1/3 = 3/6 + 2/6 = 5/6 Conferindo resultado: Sobrepondo a representação gráfica de 1/2 + 1/3 sobre a de 5/6 verificamos que elas são equivalentes.
5/8 – 1/4 Encontrando as frações equivalentes e operacionalizando: 5/8 - 1/4 = 5/8 - 2/8 = 3/8 Conferindo resultado: Sobrepondo a representação gráfica de 5/8 - 1/4 sobre a de 3/8 verificamos que elas são equivalentes.
1/3 + 3/4 – 1/2 Encontrando as frações equivalentes e operacionalizando: 1/3 + 3/4 – 1/2 = 4/12 + 9/12 – 6/12 = 7/12 Conferindo resultado: Sobrepondo a representação gráfica de 1/3 + 3/4 - 1/2 sobre a de 7/12 verificamos que elas são equivalentes.

Na multiplicação, durante a leitura operacional substituir o sinal da multiplicação (x) pela preposição “de”, indicando que iremos procurar uma parte de algo. Caso a primeira fração seja maior do que a segunda, pode-se aplicar a propriedade comutativa, se assim ficar mais fácil a compreensão. Tomando como referência o denominador da primeira fração, aplicar a pergunta-chave que caracteriza a fração com o significado de medição, questionando *quantas vezes uma quantidade cabe em outra.*

MULTIPLICAÇÃO
2/5 X 1/8 Observação: Como no exemplo a primeira fração é maior do que a segunda, fica mais fácil inverter os termos para responder a pergunta-chave, logo: 2/5 X 1/8 = 1/8 X 2/5 Pergunta-chave: Que unidade fracionária colocada *oito vezes* vai cobrir 2/5? Operacionalizando: 1/8 X 2/5 ou 1/8 de 2/5 = 1/20 Conferindo resultado: A figura de 2/5 contém oito vezes a figura de 1/20
1/4 X 2/3 X 1/2 Observação: Como no exemplo temos sequência de duas operações multiplicativas, convém resolver a primeira, e com o produto encontrado, resolver a segunda. Pergunta-chave: Que unidade fracionária colocada *quatro vezes* vai cobrir 2/3? Que unidade fracionária colocada *duas vezes* vai cobrir 1/6? Operacionalizando: (1/4 de 2/3) de 1/2 = 1/6 de 1/2 ou 1/2 de 1/6 = 1/12 Conferindo resultado: A figura 2/3 contém quatro vezes a figura de 1/6, por sua vez, a figura de 1/6 contém duas vezes a figura de 1/12.

Na divisão também aplicar a pergunta-chave que caracteriza a fração com o significado de medição, questionando *quantas vezes uma quantidade cabe em outra*. A pergunta pode ser feita do dividendo para o divisor ou também do divisor para o dividendo. Para justificarmos a inversão do segundo termo da divisão, comparamos a figura de 1 inteiro com o divisor da operação, sobrepondo as peças.

DIVISÃO
1/6 : 1/4 Pergunta-chave: Quantas vezes 1/6 estão contidas em 1/4 ou quantas vezes 1/4 contém 1/6? Justificando a inversão: Sobrepondo a figura de 1 inteiro na de 1/4, ela contém 4 vezes. Operacionalizando: 1/6 : 1/4 = 1/6 X 4 = 4/6 = 2/3 Conferindo resultado: Sobrepondo a figura de 1/6 na de 1/4, ela está contida 2/3 de vez.
3/5 : 1/2 Pergunta-chave: Quantas vezes 3/5 contêm 1/2 ou quantas vezes 1/2 está contido em 3/5? Justificando a inversão: Sobrepondo a figura de 1 inteiro na de 1/2, ela contém 2 vezes. Operacionalizando: 3/5 : 1/2 = 3/5 X 2 = 6/5 = 1 1/5 Conferindo resultado: Sobrepondo a figura de 3/5 na de 1/2, ela contém 1 1/5 de vez, ou seja, cabe uma unidade fracionária de 1/2 e mais um quinto de 1/2 (Observação: 1/5 de 1/2 = 1/10).
2 : 2/3 Pergunta-chave: Quantas vezes 2 inteiros contêm 2/3 ou quantas vezes 2/3 estão contidos em 2 inteiros? Justificando a inversão: Sobrepondo a figura de 1 inteiro na de 2/3, ela contém 3/2 de vez ou 1 ½ de vez (ou seja, cabe 2/3 e mais metade de 2/3 (Observação: metade de 2/3 é 1/3). Operacionalizando: 2 : 2/3 = 2 X 3/2 = 6/2 = 3 Conferindo resultado: Sobrepondo as figuras que formam 2 inteiros na de 2/3, elas contêm 3 vezes.
3/4 : 3 Pergunta chave: Quantas vezes 3/4 está contido em 3 inteiros ou quantas vezes 3 inteiros contém 3/4? Justificando a inversão: Sobrepondo a figura de 1 inteiro nas figuras que formam 3 inteiros, ela está contida 1/3 de vez. Operacionalizando: 3/4 : 3 = 3/4 X 1/3 = 3/12 = 1/4 Conferindo: Sobrepondo a figura de 3/4 na de 3 inteiros, ela está contida 1/4 de vez.

Em exemplo que contenha várias operações, aplicar os procedimentos básicos acima enfatizados em cada uma delas, obedecendo às regras das expressões numéricas, quanto à aplicação da ordem das operações e símbolos das expressões.

EXPRESSÃO
2/3 : (3/5 – 1/2) Encontrando as frações equivalentes da operação constante nos parênteses e operacionalizando: 3/5 – 1/2 = 6/10 – 5/10 = 1/10 Formando a divisão entre a fração inicial e o resultado encontrado vem: 2/3 : 1/10 Pergunta-chave: Quantas vezes 2/3 contêm 1/10 ou quantas vezes 1/10 está contido em 2/3? Justificando a inversão: Sobrepondo a figura de 1 inteiro na de 1/10, ela contém 10 vezes Operacionalizando: 2/3 : 1/10 = 2/3 X 10 = 20/3 = 6 2/3 Conferindo: sobrepondo a figura de 2/3 na de 1/10, ela contém 6 vezes a unidade fracionária de 1/10 mais 2/3 de 1/10 (Observação: 2/3 de 1/10 = 1/15).
(3/5 – 1/2) X (1 + 3/2) Encontrando as frações equivalentes das operações constantes nos parênteses e operacionalizando, temos: 3/5 – 1/2 = 6/10 – 5/10 = 1/10 1 + 3/2 = 2/2 + 3/2 = 5/2 Efetuando a terceira operação (multiplicação) com os resultados encontrados: 1/10 X 5/2 = 5/20 = 1/4 Pergunta-chave: Que unidade fracionária colocada *dez vezes* vai cobrir 5/2? Conferindo resultado: A figura de 5/2, ou seja, a figura de 2 ½ (dois inteiros e meio) contém dez vezes a figura de 1/4.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelas respostas obtidas na enquete com os professores, podemos notar claramente que há uma predominância em nossas salas de aula, mostrando o significado de fração apenas como *"a divisão do inteiro em partes iguais",* colocando-os muitas vezes em contradição quando aponta que uma determinada representação gráfica não é uma fração, mas ao mesmo tempo, dá-se um valor fracionário "pela lógica", que na verdade, mesmo sem o saber, estão aplicando o significado de medição, que não está tendo a merecida atenção em sala de aula. Faz-se também necessário uma mudança de olhar sobre a aplicação da definição ao classificar frações próprias e impróprias. Melhor caminho seria pela comparação com o inteiro, pois é importante enfatizar a compreensão em detrimento da memorização da localização de termos.

Em relação à adição e subtração, os entrevistados são cientes que a aplicação do MMC (Mínimo Múltiplo Comum) na adição e subtração de frações com denominadores diferentes, está relacionada com as suas frações equivalentes, porém nenhum deles faz a verificação dessa importante equivalência utilizando materiais concretos, mas apenas através de registros numéricos no quadro, deixando assim de usar um recurso manipulativo que poderia, pela justaposição ou sobreposição de peças, comprovar o que está sendo registrado numericamente no quadro, facilitando a compreensão.

Todos os professores entrevistados compreendem o fato de que ao multiplicarmos uma fração por outra, o resultado pode ser menor ou maior que a fração inicial, porém reconhecem que a maioria dos estudantes vê a multiplicação como algo que leva à ideia de sempre aumentar, como acontece com os números naturais, o que dificulta um pouco o seu entendimento inicial. Logo, devemos chamar a atenção que quando efetuamos uma multiplicação entre dois ou mais números fracionários, estamos procurando uma fração de outra fração, cuja abordagem fica mais visível quando substituímos o sinal da multiplicação (x) pela preposição “de”. Essa situação fica mais explícita na percentualidade (%), ao calcular a taxa percentual de determinada quantidade. Exemplo: Calcular 5% de 60, que leva ao registro de 5/100 X 60.

Dos 40 professores consultados sobre o porquê na divisão repetirmos o primeiro termo e multiplicarmos pelo inverso do segundo, nenhum soube justificar o procedimento. Um caminho para mostrarmos a inversão do segundo termo da divisão é sobrepor a figura de 1 inteiro na figura que representa o divisor e, assim saberemos quantas vezes ele contém ou está contido no divisor, o que corresponde exatamente ao termo fracionário invertido no divisor. Ao final de todas as etapas da Formação Continuada de Professores sempre solicitamos uma avaliação oral dos participantes, e obtemos respostas positivas como: *“A partir de hoje não tenho como deixar de ver as frações de uma forma diferente, a qual estava acostumada”; “Mudei totalmente o olhar que tinha sobre frações, já não me consigo ver trabalhando frações apenas escrevendo no quadro branco”; “Realmente precisamos dar um significado às regras matemáticas que usamos, principalmente às aplicadas nas operações com frações”.*

Importante enfatizar que este estudo baseado no resultado de uma amostragem é proporcionar uma reflexão sobre como os números fracionários estão sendo trabalhados em nossas salas de aula, uma vez que, podemos perceber facilmente a rejeição de grande parte dos nossos estudantes tem com o estudo das frações, talvez como consequência da forma metodológica mecânica como estão sendo transmitidos, fazendo com que estimule o desinteresse dos estudantes. Devemos, também, reforçar que a transposição didática bem planejada é, entre outros, um fator que influi decisivamente nos objetivos e/ou metas que o professor quer alcançar, aliada a uma linguagem clara e simples, compatível com o nível de escolaridade da clientela.

Destacamos que o uso de materiais concretos naturalmente impõe a aplicação de situações reais e significativas, principalmente nos exemplos iniciais, devido às suas limitações demonstrativas. Com a aplicação de valores maiores, os materiais concretos, aos poucos, vão saindo de cena, dando lugar apenas aos registros numéricos, porém ao chegar nessa fase da aprendizagem, já há compreensão das abstrações. Outro ponto a ser esclarecido é que apenas o uso desses materiais em sala de aula não significa que o ensino-aprendizagem acontecerá em “um estalar de dedos”, como confirma Nacarato, (2005): *“Nenhum material didático – manipulável ou de outra natureza – constitui a salvação para a melhoria do ensino de matemática. Sua eficácia ou não dependerá da forma como o mesmo for utilizado”.*

Naturalmente, o estudo aqui apresentado, não exige que seja aplicado fielmente da forma exposta, as modificações e/ou adaptações ficam por conta de cada professor. Assim, como confirmação do título que recebe o presente estudo e por ser a Matemática considerada uma disciplina abstrata, faz-se necessário, sim, o uso de materiais concretos para demonstrar as suas regras, convenções, propriedades e fórmulas, contribuindo para que a Matemática se torne prazerosa, dinâmica e instrumental, deixando para trás a imagem negativa de ser uma disciplina rígida, chata e de difícil compreensão.

Para finalizar, tomemos uma passagem dos Parâmetros Curriculares de Pernambuco (2012), que nos incentiva a ser professor pesquisador, quando cita: *"... apesar da importância do livro didático no currículo escolar é fundamental que o professor não renuncie ao seu papel de sujeito que constrói a prática pedagógica, juntamente com os estudantes".* Assim vemos que o livro didático é o nosso principal referencial pedagógico, mas nem sempre ele pode trazer todas as informações que queremos, buscando o complemento em outras fontes impressas ou digitais. Procuremos estimular os professores e despertar os alunos à habilidade natural de ser um eterno pesquisador, mesmo porque as definições, conceitos, estratégias de ensino, formas de aprender se modificam e se transformam com o passar do tempo, pois tudo está em constante evolução, tal como a sociedade em que vivemos.

REFERÊNCIAS

D'AMBROSIO, U. **Matemática, ensino e educação: uma proposta global. Temas & Debates.** São Paulo – SP, v.4, n.3, p.1-15, 1991.

FERREIRA, A. B. H., **Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa** – 4ª edição, Editora Positivo, Curitiba – PR, p. 931, 2009.

COSTA, G.S., Capítulo do E-book **Universo dos Segmentos Envolvidos com a Educação Matemática.** Tema: Construindo o Conceito e Operacionalizando Frações com Materiais Concretos. Atena Editora, Ponta Grossa – PR, cap.8, p. 71-81, 2019.

COSTA, G.S., Capitulo do E-book **Conhecimentos Ligados às Tecnologias nas Ciências Exatas.** Tema: Construindo o Conceito e Operacionalizando Frações com Materiais Concretos – Versão Completa. Brazilian Journals Editora, São José dos Pinhais – PR, cap. 13, p. 191-210, 2021.

LINS, R. C., SILVA, H., **Pró-Letramento** (Matemática). Brasília – DF. Ministério da Educação e Cultura, fascículo 4, p. 10-12, 2008.

LOPES, A. J. **O Que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender Sobre Frações, Quando Tentamos Lhes Ensinar Frações.** Bolema, Rio Claro – SP, v. 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

NACARATO, A. M. **Eu Trabalho Primeiro o Concreto.** Revista de Educação Matemática, São Paulo - SP, v. 9, n. 9-10, p. 1-6, 2005, SBEM – SP.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação de. **Parâmetros para a Educação Básica de Pernambuco. Parâmetros Curriculares de Matemática – Ensino Fundamental e Médio**, Recife – PE, p.51, 2012, CAEd.

ROMANATTO, M. C. **Número Racional: Uma Teia de Relações.** Zetetiké, Campinas – SP, v. 7, n. 12, p. 37-49, jul/dez, 1999.

CAPÍTULO 6

O VOLUME DO PARALELEPÍPEDO: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA BASEADA NAS UARC'S

Data de aceite: 01/12/2021

Leandro Pantoja da Costa
Discente de Licenciatura Plena em Matemática, ofertado pelaUniversidade do Estado do Pará-UEPA

RESUMO: Este trabalho tem como objetivo a apresentação de uma sequência didática construída a partir da ideia de UARC – *unidade articulável de reconstrução conceitual*. Esta sequência é dirigida ao ensino-aprendizagem de Volume do Paralelepípedo, sugerida para os alunos do 7° ano do ensino fundamental, no entanto, podendo ser aplicada a qualquer aluno do nível fundamental ou médio. Neste, também foram investigados trabalhos que apontam as dificuldades dos alunos em geometria espacial; autores que falam a respeito das sequencias didáticas; e estudos matemáticos que envolvem *Volume do Paralelepípedo*. Por se tratar de uma pesquisa em andamento, seus resultados serão discutidos somente após a aplicação da mesma.
PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática; Sequência didática; Volume do Paralelepípedo.

ABSTRACT: This work aims to present a didactic sequence built from the idea of UARC – articulable unit of conceptual reconstruction. This sequence is aimed at teaching-learning the Volume of Cobblestone, suggested for students in the 7th year of elementary school, however, it can be applied to any student in elementary or high school. In this, works that point out the difficulties of students in spatial geometry were also investigated; authors who talk about didactic sequences; and mathematical studies involving Volume of the Parallelepiped. As this is an ongoing research, its results will only be discussed after its application.
KEYWORDS: Mathematics Education; Following teaching; Volume of the parallelepiped.

1 | INTRODUÇÃO

Os professores de matemática sabem que existem diferentes sequelas no ensino de matemática, pois, há uma variedade de artifícios negativos que tornam a disciplina Matemática menos atrativa aos estudantes. Fato, este acontece quando os próprios alunos a estereotipam, inferindo como algo de difícil compreensão, ou sendo necessário ter inteligência acima do 'comum' para haver entendimento, daí surge a fama, daqueles que simpatizam com a disciplina, de serem denominados de incomuns, diferentes.

Tal carga de negatividade, muitas vezes se origina quando o professor se prende ao livro didático e/ou mantem a mesma pedagogia retrograda, desse modo, limitando-se a um ensino que tende a ser enfadonho. Com isso, o fator determinante para essa má fama da disciplina, surge quando, o aluno não compreende o que lhe é ensinado, e carrega esses déficits para as séries subsequentes, criando, assim, a rejeição pela Matemática.

Pois, para D' Ambrósio (1989, apud Fetzer, 2009) a prática educacional tem consequências diretas na relação do aluno com aprendizagem matemática, na sua percepção sobre as aulas e sobre a compreensão dos conhecimentos matemáticos.

Neste sentido, dependendo do método que a matemática é ensinada, os estudantes podem ter outra visão da disciplina. Por isso, é fundamental o educador deixar a matemática mais atrativa, ter autonomia para eleger os atributos que farão o aluno ter uma melhor aprendizagem, principalmente com abordagens que tornem o conhecimento matemático 'palpável', onde o aluno possa perceber que ele é parte integrante do processo, e não um mero ouvinte.

O professor deve ser um agente que contribui para o aperfeiçoamento da aprendizagem do aluno, visualizando as dificuldades existentes em sala de aula e criando artifícios que facilitem e fomentem o ensino-aprendizagem. Por isso, é valido a criação de sequências didáticas, que reconstruam o conhecimento existente no aluno, que por vezes está 'fragmentado'. Até mesmo, aos alunos que ainda desconhecem determinados assuntos. Machado (2002, apud Fetzer, 2009) nos diz que, a metodologia do docente é o ponto-chave para a transformação do saber científico em saber a ensinar, sendo que este "trata-se de um saber ligado a uma forma didática que serve para apresentar o saber ao aluno"

Desse modo, o ensino por meio de sequências tem objetivos didáticos, assim, é possível propor abordagens alternativas que conduzam o aluno ao conhecimento, mediante a provocação de um conflito cognitivo que promova a atividade mental. Portanto, o educador deve ser o principal provocador deste novo processo, objetivando e tendo disposição em realizar o processo de ensino-aprendizagem.

2 | REVISÃO DE ESTUDO

2.1 Pesquisas sobre as dificuldades dos alunos em Geometria Espacial

Diante do exposto, uma breve análise de alguns estudos que apontam as suas dificuldades em Geometria Espacial será apresentada, os quais apresentam os erros mais comuns dos alunos quanto às definições e às relações envolvendo esse conteúdo.

Costa, Bermejo & Moraes (2009) realizaram um estudo com os alunos do 4º ano (nível técnico) do Ensino Médio, em uma escola federal da rede pública e no 3º ano de uma escola da rede particular, ambas da cidade de Belém–Pa. Nesta pesquisa, foram propostos dois questionários, um para os professores e outro para os alunos, contendo cada 8 questões, sendo cinco de cunho matemático e três, didático-metodológico. As questões aplicadas aos alunos tiveram como objetivos: verificar se os alunos sabiam identificar os elementos de um sólido, as formas geométricas, e associação das nomenclaturas às figuras e aos sólidos geométricos. Como também, verificar a aplicação das fórmulas (volume, área total, área lateral, diagonal) relacionada aos sólidos em cada problema.

Costa, Bermejo & Moraes (2009) relatam que as principais dificuldades encontradas foram quanto: à linguagem, representação do sólido e seus elementos, o uso de fórmulas e relação entre sólidos. Os alunos quando questionados a respeito de aplicações da Geometria Espacial no cotidiano – principalmente envolvendo cálculo de volume - não conseguiram encontrar utilidade no conteúdo. Ainda, a maioria dos alunos consultados alegaram ter dificuldades em utilizar (e lembrar) as fórmulas, e também em reconhecer os sólidos. Os alunos, também apresentaram a má utilização das fórmulas, bem como, a não identificação dos entes geométricos, e quando os sólidos foram identificados e representados, houveram associações incorretas com as formulas, tão pouco estabeleceram relações entre dois sólidos.

Verona & Lopes (2009) realizaram um estudo com os alunos do 2° ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Professor Agostinho Pereira, na cidade de Pato Branco - PR, com o objetivo em despertar no aluno o interesse pelo conhecimento geométrico e, desenvolver e melhorar habilidades matemáticas relacionadas a situações do dia-a-dia, neste trabalho foi utilizada a experimentação como uma metodologia diferenciada para o ensino-aprendizagem de Geometria no Ensino Médio. As estratégias de ação incluíram o uso de laboratório, vídeos, instrumentos de medida e materiais manipuláveis. Esta metodologia teve as seguintes etapas durante o processo: Introdução a Geometria, Exibição de vídeo, Leitura de imagens e contextualização, Atividades de classe, Atividades de laboratório, Resolução de Problemas e Revisão.

Conforme Verona & Lopes (2009), os alunos reconheceram alguns sólidos pela sua aparência física, mas apresentam dificuldades em conceituá-los e nomeá-los. Algumas formas foram chamadas de dado, bloco, caixa, bola. Identificou-se, na etapa de introdução a geometria, que os alunos não conheciam os conceitos básicos da Geometria Espacial, como retas e planos paralelos, no entanto apresentavam alguma noção de profundidade. Na etapa atividade de classe, pôde-se verificar que os alunos realmente não têm uma visão geral do poliedro, não conseguem identificar as variáveis da formulação, além de apresentarem dificuldades em interpretar as informações dos problemas.

2.2 Volume do Paralelepípedo

Para dá suporte a sequência didática, foram necessárias revisões de estudos sobre o: Volume, em específico, nosso objeto de aprendizagem, o volume do paralelepípedo retângulo. Para tal utilizou-se as produções de Alves (2014) e Machado (2013) com o livro: *Fundamentos da Geometria Espacial, UFMG*.

Antes de iniciarmos a caracterizar dedutivamente o Volume do paralelepípedo retângulo, faremos um apanhado da origem deste sólido e de sua categoria mais ampla.

Partiremos do princípio de **lugares geométricos**[1], *onde este,* é *o conjunto de pontos de um mesmo plano, que possuem a mesma propriedade, no caso da geometria espacial serão conjuntos de plano de retas. Diante disso, originam-se os Poliedros, entre eles estão* *o cubo, os paralelogramos, as pirâmide e prismas.*

Desse modo, iniciaremos nosso estudo com um caso geral. Onde, um *prisma* é o poliedro construído da seguinte maneira (conforme as figuras 2.1 e 2.2):

(a) tome dois planos α e β paralelos entre si;

(b) em um dos planos, por exemplo α, tome uma região poligonal R;

(c) tome uma reta l secante aos planos que não passe pelos pontos de R;

(d) para cada ponto $P \in$ R tome a reta l_P que passa pelo ponto e é paralela a l; cada reta l_P encontra β em um ponto P'.

(e) Então a união de todos os segmentos $\overline{PP'}$ é chamada de *prisma*.

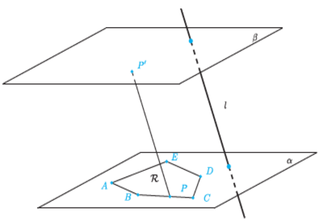


Figura 2.1.

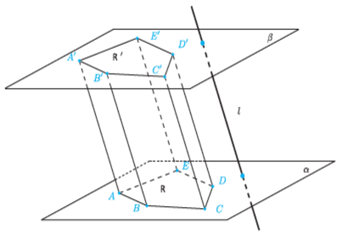


Figura 2.2.

Observemos que o conjunto dos pontos P' em β compõem uma região poligonal R' congruente a R.

Os *vértices* de um prisma são os vértices das regiões poligonais R e R'. As suas *arestas* são:

(i) os segmentos paralelos a l que ligam os respectivos vértices de R e R'; e

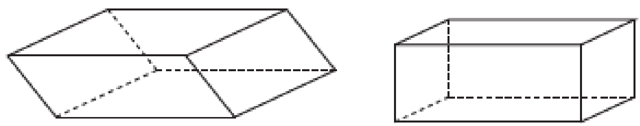
(ii) os lados das regiões R e R'.

As suas *faces* são as regiões poligonais determinadas pelos seus vértices consecutivos. Geralmente as faces R e R' são chamadas de *bases* do prisma, e as outras de *faces laterais*.

As bases são categorizadas muitas vezes como *base inferior*, ou simplesmente *base*, e *base superior*, designação que depende do nosso ponto de vista. No nosso exemplo R é a base, ou base inferior, e R' a base superior do prisma. As arestas das faces que não são comuns com as bases são chamadas de *arestas laterais*. A reta l é comumente denominada *reta-diretriz* do prisma.

Assim, um exemplo particular de prismas são os paralelepípedos, estes sendo poliedros análogos aos paralelogramos. A condição para um prisma ser um paralelepípedo é que sua base seja um paralelogramo. Um paralelogramo é chamado reto quando as mesmas condições de um prisma reto forem satisfeitas, ou seja, quando as arestas laterais forem perpendiculares ao plano da base.

Uma situação mais particular ainda, surge quando a base de um paralelepípedo é um retângulo e ele é um prisma reto. Nestas condições, o chamamos de *paralelepípedo retângulo*, figura 2.3b.



(a) (b)

Figura 2.3.

Outro caso particular de um paralelepípedo retângulo, é quando suas faces e bases forem quadrados, este recebe o nome de *Cubo*.

Diante disso, muitas denominações são atribuídas ao nosso objeto de estudo, entre elas estão: Paralelepípedo retângulo, Bloco retangular, Ortoedro. *Este sólido é delimitado por seis retângulos, cada um representando uma face do bloco. Essas faces constituem três pares, onde, em cada par as faces são idênticas e paralelas entre si. Os lados dos retângulos são chamados de arestas do bloco e qualquer uma das faces pode funcionar como base do sólido.*

Agora com caráter dedutivo, nosso *bloco retangular* fica bem delimitado quando conhecemos suas medidas de comprimento, largura e altura (x, y, z). Nesse sentido, retomemos o cubo, agora, verificando o seu volume, consideremos que suas arestas têm comprimento x, assim seu volume será x^3.

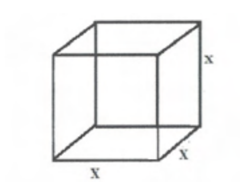


Figura 2.4.

Para tal utilizamos com referência o livro “Áreas e Volumes: Fundamentos da Matemática Elementar”, do professor Elon Lages, citado por Alves (2014). Assim, temos que:

Teorema 2.1 Se a medida da aresta de um cubo C é um número real positivo x, então o volume do cubo será x^3.

Com intuito de demostrar tal resultado utilizaremos 3 casos, entres eles onde o comprimento (x) é um número inteiro e positivo, racional e irracional.

1° caso: A medida x da aresta do cubo C é um número inteiro positivo, conforme a figura seguinte.

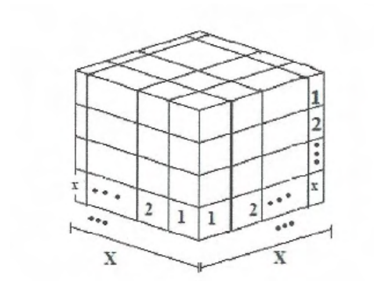


Figura 2.5.

Neste caso podemos decompor o cubo considerado em x³ cubos unitários justapostos. Dessa forma, o volume de C será x³.

2° caso: A medida x da aresta do cubo C é um número racional, não inteiro.

Se a medida x da aresta de C for um número da forma x = $\frac{1}{k}$, com $k \in Z_+^*$, tomemos um cubo unitário e dividamos cada uma de suas arestas em um mesmo número inteiro k de partes iguais(ver figura seguinte) cada aresta fica formada por k partes do tamanho $\frac{1}{k}$.

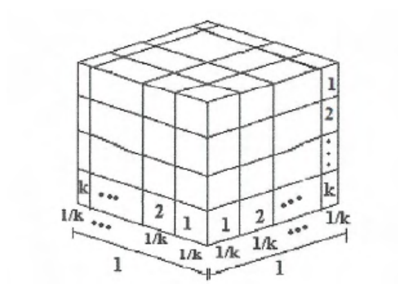


Figura 2.6.

Dessa forma, decompomos o cubo unitário em k³ cubos justapostos, cada um com aresta de $\frac{1}{k}$. Como de acordo com o axioma (iv) deste capítulo, assumimos que o volume do cubo unitário é 1, segue que o volume de cada cubo de aresta x = $\frac{1}{k}$ será igual a $\frac{1}{k}$, ou seja,

$$1 = V(1, 1, 1) = \sum_{i=1}^{k^3} V\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = k^3 . V\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right).$$

Logo,

$$V\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k^3} = \left(\frac{1}{k}\right)^3 = (\,x\,)^3 = x^3.$$

Consideremos o caso geral, em que a medida x da aresta de C é um número da forma $x = \frac{m}{k}$, com m, $k \in Z_+^*$. Agora, vamos dividir cada aresta de C em um mesmo número m de partes iguais, onde cada divisão tenha um tamanho $\frac{1}{k}$, como mostra a figura a seguir.

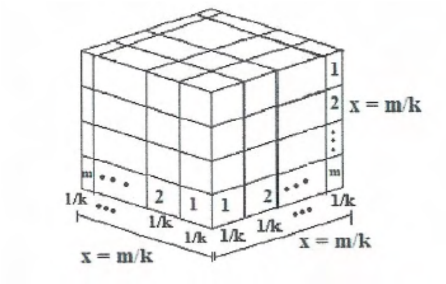


Figura 2.7.

Dessa forma, C fica decomposto em m^3 cubos justapostos, todos de aresta $\frac{1}{k}$. Se, cada cubo com aresta medindo $\frac{1}{k}$, tem volume $\frac{1}{k^3}$. Temos que, pelo axioma (ii):

$$V(x, x, x) = V\left(\frac{m}{k}, \frac{m}{k}, \frac{m}{k}\right) = \underbrace{\frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^3} + \ldots + \frac{1}{k^3}}_{m^3 \text{ vezes}} = \sum_{i=1}^{m^3} \frac{1}{k^3} = \frac{m^3}{k^3} = \left(\frac{m}{k}\right)^3 = (\,x\,)^3 = x^3$$

3° Caso: A aresta do cubo C tem por medida um número irracional x

Neste caso, utilizaremos um raciocínio indireto e mostrar que o volume do cubo de aresta x, irracional, ainda será dado por x^3.

Inicialmente mostraremos que, para todo $a < x^3$, então o volume do cubo dado é tal que $a <$ V (x, x, x,). Em seguida mostraremos que, qualquer que seja b de tal forma que $b > x^3$, então $b >$ V (x, x, x). Concluiremos, a partir daí, que:

$$V(x, x, x) = x^3$$

De fato, seja a um número de tal modo que $a < x^3$ e consideremos um número racional r, próximo de x, tal que $\sqrt{x} < r < x$, ou seja,

$$a > r^3 > x^3 \qquad (2.1)$$

Desse modo, o cubo C de aresta igual a x contém um cubo (r, r, r) cuja aresta tem por medida o número racional r. Já vimos anteriormente que, onde r é um número racional, que V (r, r, r) = r^3. Segue do axioma (iii) que:

$$V(r, r, r) < V(x, x, x) \qquad (2.2)$$

Assim, de (2.1) e (2.2), concluímos que:

$$a > r^3 > V(x, x, x).$$

De modo análogo ao feito anteriormente, também podemos mostrar que se $x^3 < b$, então V (x, x, x) $< b$. Assim, concluímos que, se um cubo C tem aresta medindo um número irracional x, seu volume será dado por x^3.

Diante disso, podemos investigar um caso mais geral, agora, dado um paralelepípedo retângulo (x, y, z) com x, y e z ϵ R_+, queremos mostrar que:

$$V(x, y, z) = x \,.\, y \,.\, z$$

Assim, se faz necessário utilizarmos o teorema fundamental da proporcionalidade

Teorema 2.2 Seja $f : R_+ \rightarrow R_+$ uma função com as seguintes propriedades:

f é uma função crescente, isto é, para todo x_1, x_2 R_+, $x_1 < x_2$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$;

$f(n \,.\, x) = n \,.\, f(x)$, para todo $n \,\epsilon\, N$ e todo $x \,\epsilon\, R_+$.

Então,

$$f(c \,.\, x) = c \,.\, f(x),$$

para todo $c \,\epsilon\, R_+$ e todo $x \,\epsilon\, R_+$.

Demonstração: Inicialmente mostraremos que o teorema é valido para qualquer numero racional. De fato, de (ii), dado um número racional $r = \frac{m}{n}$, com m e $n \,\epsilon\, N$ e $x \,\epsilon\, R_+$, vale

$$n \,.\, f(r \,.\, x) = f(n \,.\, r \,.\, x) = f(m \,.\, x) = m \,.\, f(x).$$

e assim,

$$f(r \,.\, x) = \frac{m}{n} \,.\, f(x) = r \,.\, f(x). \qquad (2.3)$$

Agora, por contradição, suponha que o Teorema seja falso para algum c > 0, irracional, isto é, que $f(c \,.\, x) \neq c \,.\, f(x)$, para algum $x \,\epsilon\, R_+$. Dessa forma teremos:

$$f(c \,.\, x) < c \,.\, f(x) \qquad (2.4)$$

ou,

$$f(c \,.\, x) > c \,.\, f(x) \qquad (2.5)$$

Sem perda de generalidade, suponha que (2.4) seja verificada. Como $f(x) > 0$, dividindo ambos os membros dessa igualdade (2.4) por $f(x)$, temos que:

$$\frac{f(c \,.\, x)}{f(x)} < c.$$

Considere um número r verificando

$$\frac{f(c \,.\, x)}{f(x)} < r < c \qquad (2.6)$$

Logo,

$$f(c \,.\, x) < r \,.\, f(x) < c \,.\, f(x).$$

Donde, segue-se de (2.3) que

$$f(c \,.\, x) < f(r \,.\, x) < c \,.\, f(x).$$

No entanto, uma vez que $r < c$, temos de (i) que

$$f(r \,.\, x) < f(c \,.\, x).$$

contradizendo (2.6).

Teorema 2.3 Sendo *a*, *b* e *c* as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$V(a, b, c) = a \,.\, b \,.\, c$$

Demonstração: Sabendo que V(*a, b, c*) representa o volume de um paralelepípedo retângulo S. com arestas medindo *a, b,* e *c*, afirmamos que V(*a, b, c*) é uma função crescente. De fato, sejam S e S' blocos retangulares cujas arestas medem *a, b, c* e *a', b, c*, respectivamente, com $a < a'$. Logo, S S', implicando, pelo axioma (iii) deste capítulo, que

$$V(a, b, c) < V(a' \,.\, b \,.\, c)$$

De forma análoga, mostramos que V é uma função crescente tango em relação á largura *b* quanto a altura *c* do paralelepípedo considerado.

Agora, observemos que, para todo $n \in$ N, um bloco retangular (n . *a, b, c*) pode ser decomposto em *n* blocos retangulares, todos com arestas *a, b* e *c*. Dessa forma,

$$V(n \,.\, a, b, c) = n \,.\, V(a, b, c).$$

Analogamente, para todo $n \in$ N, qualquer bloco retangular (*a, n . b, c*), (*a, b, n . c*) pode ser decomposto em *n* blocos retangulares, todos com arestas *a, b* e *c*. Daí, segue que:

$$V(a, n \,.\, b, c) = n \,.\, V(a, b, c) \text{ e } V(a, b, n \,.\, c) = n \,.\, V(a, b, c).$$

Utilizando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade (2.2), temos:

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= V(a \,.\, 1, b, c) = a \,.\, V(1, b, c) = a \,.\, V(1, b \,.\, 1, c) \\ &= a \,.\, b \,.\, V(1, 1, c) = a \,.\, b \,.\, V(1, 1, c \,.\, 1) \\ &= a \,.\, b \,.\, c \,.\, V(1, 1, 1). \end{aligned}$$

Segue o axioma (iv) desta seção, que

$$V(a, b, c) = a \,.\, b \,.\, c.$$

Em qualquer caso, sendo *a, b* e *c* as dimensões de um paralelepípedo retângulo, o volume deste sólido será dado pelo produto destas dimensões.

2.3 Sequência didática para o Ensino de Matemática

A Didática da Matemática estuda as atividades didáticas que tem como objetivo o ensino naquilo que tem de específico dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise. (BROUSSEAU, 1996 *apud* POMMER, 2008).

Com aspecto mais amplo, Zabala (1999), citado por Sanches Neto (2002), nos mostra aspectos fundamentais para uma sequência didática.

> A sequência considera a importância das intenções educacionais na definição dos conteúdos de aprendizagem e o papel das atividades que são propostas. Alguns critérios para análise das sequências reportam que os conteúdos de aprendizagem agem explicitando as intenções educativas, podendo abranger as dimensões: conceituais; procedimentais; conceituais e procedimentais; ou conceituais, procedimentais e atitudinais. (ZABALA, 1999, apud SANCHES NETO et al., 2002).

A partir das ideias, sobre sequência, expostas por Zabala (1999), Sanches Neto (2002) levanta alguns questionamentos que são relevantes para o desenvolvimento positivo das sequências de atividades, indicados a seguir:

i - Permitem determinar os conhecimentos prévios?;

ii - Os conteúdos são propostos de forma significativa e funcional?;

iii - Podem ser feitas inferências adequando ao nível de desenvolvimento de cada aluno?;

iv - Representam um desafio alcançável?;

v - Provocam um conflito cognitivo e promovem a atividade mental?;

vi - São motivadoras em relação à aprendizagem dos novos conteúdos?;

vii - Estimulam a autoestima e o autoconceito?;

viii - Ajudam o aluno a adquirir habilidades relacionadas com o *aprender a aprender*, sendo cada vez mais autônomo em suas aprendizagens?

Ainda sobre sequência didática, para Kobashigawa (et al., 2008 *apud* Leal, 2011) é um conjunto de atividades, estratégias e intervenções planejadas etapa por etapa pelo docente para que o entendimento do conteúdo ou tema proposto seja alcançado pelos discentes.

Desse modo, tendo como principal objetivo o ensino-aprendizagem dos alunos, a sequência didática se faz essencial na pratica do educador, pois, deste, é requerido o domínio do assunto/tema a ser abordado por tal sequência. Para Leal (2011), mediante da sequência didática, o docente que tenha fragilidade em algum conhecimento pode ter a oportunidade de adquiri-lo enquanto se prepara para lecionar tal tema. Diante disso, o docente que planeja desenvolver uma sequência didática é condicionado a buscar os fatores epistemológicos dos conteúdos, contribuindo positivamente à própria prática docente.

Cabral (2017) mostra que a sequência didática em matemática, deve objetivar o ensino de conteúdos curriculares da disciplina, em níveis fundamental e médio. Também, nos diz que, é uma tarefa árdua, entretanto, o docente deve propor aos alunos um ensino bem articulado, que valorize, sobretudo, a reconstrução de conceitos em um ambiente de reflexão.

Pois, “o desafio dos professores é criar uma sequência didática que leve o aluno à aprendizagem de determinados conceitos na resolução de cálculos, garantindo a construção do pensamento lógico-matemático. ” (PERETTI, 2011). Com isso, o professor assume função essencial para apresentar, caracterizar, aperfeiçoar e verificar, mediante a sequência didática, o ensino-aprendizagem do aluno.

3 | SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Utilizou-se nesta sequência o modelo de UARC's, conforme Cabral (2017). Foram eleitos objetos circunscritos, estes essenciais, ao tema: volume do paralelepípedo, estes foram: *Polígonos* (Retângulo e quadrado), *Figuras planas* (Área e Perímetro), *Tipos de sólidos* (Reconhecimento de figuras tridimensionais), *Nomenclatura* (Altura, Comprimento e Largura) e *Unidades de Medidas* (Conversão).

Desse modo, esta sequência didática objetiva:

Introduzir ao aluno do 7º Ano - Ensino fundamental - o conceito de volume do Paralelepípedo Retângulo (Ortoedro). Tendo como objetivos específicos: o ensino-aprendizagem do cálculo do volume do paralelepípedo retângulo; e também, a identificação espacial do Paralelepípedo e do cubo.

[I_i – CP] Atividade 01 – Reconhecendo os conceitos

Objetivo: Esta atividade é um resgate de conhecimento, visa que o aluno reconheça o Lado e a diagonal de um polígono convexo regular, abaixo estão destacados os quadrados.

Escreva abaixo qual o nome da figura e qual característica está destacada (vê linha mais escura).

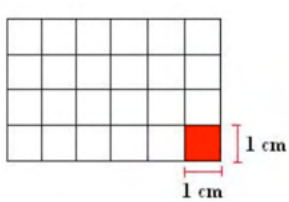
R: ____________________

R: ____________________

[I_e – CP] Atividade 02 – Reconhecendo os polígonos

O objetivo desta atividade é fazer o aluno verificar a área de um polígono convexo regular, mediante a visualização na malha quadriculada, onde esta malha apresenta quadrados unitários. Onde cada quadrado unitário está representando uma unidade de área.

Observe a figura a seguir e responda os seguintes questionamentos

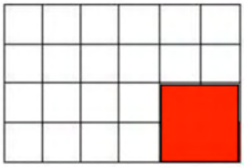


Em quantas partes menores a figura ao lado está dividida?
R:____

Que polígono está destacado?
R:____

Quanto mede cada lado deste polígono?
R: ____

Observe as figuras a seguir, considerando o lado de cada figura menor equivalente a 1 cm, responda as questões



Que polígono está destacado?

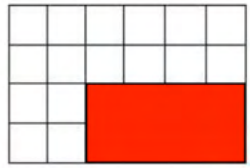
R: ____________________

Quanto mede cada lado deste polígono?

R: ____________________

O polígono destacado contém quantas partes menores?

R: ____________________



Que polígono está destacado?

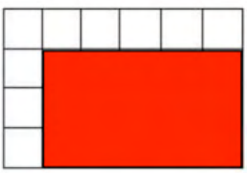
R: ____________________

Quanto mede cada lado deste polígono?

R: ____________________

O polígono destacado contém quantas partes menores?

R: ____________________



Que polígono está destacado?

R: ____________________

Quanto mede cada lado deste polígono?

R: ____________________

O polígono destacado contém quantas partes menores?

R: ____________________

[I_e – CP] Atividade 03 - Retomando o conceito de área

O objetivo deste tópico é verificar se o aluno sabe que operação efetuar para realizar o cálculo da área de um polígono.

A partir dos polígonos destacados nas malhas quadriculadas, figuras 2.2, 2.3 e 2.4.

1. Que relação matemática podemos utilizar para calcular a quantidade de partes menores (quadrados unitários) em cada polígono?

R: ____

[I_e – CP] Atividade 04 – Calculando Área e Perímetro

Objetivo: Verificar se o aluno sabe efetuar os cálculos de perímetro e área do quadrado e do retângulo. ***Obs.: O aluno também poderá calcular a diagonal, no entanto, iremos desconsiderar, nesse esse estudo, caso aconteça.***

1. O que é possível calcular com o valor apresentado no polígono abaixo?

R: _______________ e _________.

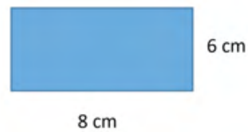
Calcule-as informando a unidade!

R: ___________________________

R: ___________________________

2. O que é possível calcular com os valores apresentados no polígono abaixo?

R: _______________ e _________.



Calcule-as informando a unidade!

R: ___________________________

R: ___________________________

Após o aluno ter feito as investigações solicitadas em relação aos polígonos regulares (quadrado e retângulo) as características da Área serão formalizadas.

[I_f] Conceito de Área e Perímetro

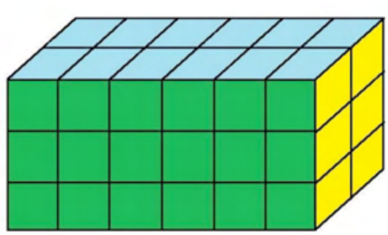
Assim, observamos que a Área de um objeto é o território que este ocupa no espaço, uma superfície. Já o Perímetro é apenas o Contorno desta superfície.

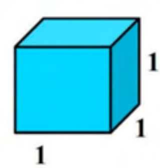
[Ie – CP] Atividade 05 – Percebendo o Volume

O objetivo desta atividade é que após as investigações solicitadas, o aluno seja capaz de perceber as dimensões do sólido, verificando os lados, realizando comparações, para este perceber a ideia de volume. Utilizaremos o cubo unitário sendo uma unidade do volume.

As investigações serão feitas a partir da figura (sólido) menor, relacionando com a figura (sólido) maior.

Observe as figuras a seguir e responda os questionamentos:





Parte menor

A sólido **menor** é composto por quantos lados? Esses lados são iguais ou diferentes?

R: ____

A sólido **maior** é composto por quantos lados? Esses lados são iguais ou diferentes?

R: ____

Quantos lados iguais entre si o sólido **menor** apresenta?

R: ____

Quantos lados iguais entre si o sólido **maior** apresenta?

R: ____

Cada lado do sólido **maior** apresenta quantas partes menores?

R: ____

Em quantas partes menores o **sólido maior** está dividido?

R: ____

Observe as figuras a seguir e responda as seguintes perguntas

Consideremos cada parte menor sendo equivalente a uma unidade de espaço.

Quantos lados iguais entre si o sólido acima apresenta?
R: ______________________________
Cada lado deste sólido apresenta quantas partes menores?
R: ______________________________
Em quantas partes menores o sólido acima está dividido?
R: ______________________________

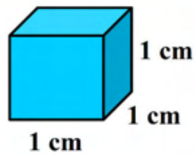
Quantos lados iguais entre si o sólido acima apresenta?
R: ______________________________
Cada lado deste sólido apresenta quantas partes menores?
R: ______________________________
Em quantas partes menores o sólido acima está dividido?
R: ______________________________

Quantos lados iguais entre si o sólido acima apresenta?
R: ______________________________
Cada lado deste sólido apresenta quantas partes menores?
R: ______________________________
Em quantas partes menores o sólido acima está dividido?
R: ______________________________

Quantos lados iguais entre si o sólido acima apresenta?
R: ______________________________
Cada lado deste sólido apresenta quantas partes menores?
R: ______________________________
Em quantas partes menores o sólido acima está dividido?
R: ______________________________

[I_f] Cubo unitário

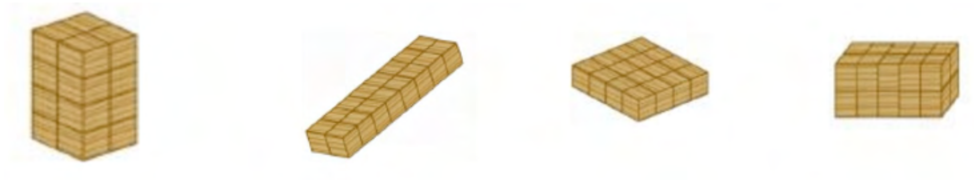
As partes menores que nos referimos estão relacionadas ao: Cubo unitário. Neste cubo a aresta mede uma unidade de comprimento. A partir da definição do cubo unitário será destacada a relação envolvendo altura, comprimento e largura deste sólido, concluindo que seu volume equivale a uma unidade de volume.



[IA$_r$] Atividade 06 – Cubo Unitário

O objetivo desta atividade é que após as investigações solicitadas, o aluno seja capaz de perceber que o volume do sólido regular pode ser quantificado mediante as quantidades de cubos unitários presentes nos sólidos.

Quantos Cubos unitários cada sólido apresenta?



R: ___________ R: ___________ R: _____________ R: ______________

[I$_r$] Atividade 07 – Cubo Unitário

O objetivo desta atividade é fazer o aluno refletir a respeito da relação volume *x* cubo unitário.

Se um cubo unitário é equivalente a uma unidade de volume, o sólido que apresentar 10 cubos unitários tem qual medida de volume?

R:____

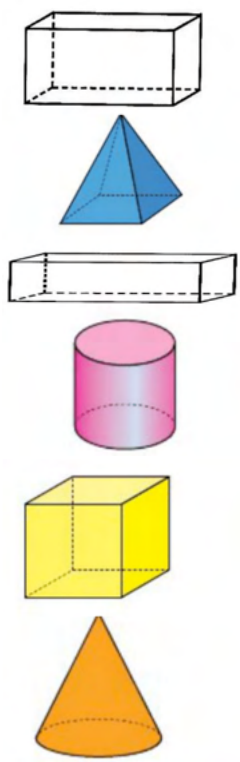
[I$_f$] Volume de um Sólido

Volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada. Para calcularmos essa quantidade devemos compará-lo com uma unidade, tendo-as em m, cm, dm, mm entre outras. Desse modo, o resultado dessa comparação será um número que nos fornecerá a medida do volume.

[I$_e$ – CP] Atividade 08 – Identificando o Paralelepípedo Retângulo

O objetivo desta atividade é investigar se o aluno percebe as diferenças dos sólidos geométricos, neste caso queremos que o aluno identifique a composição de um paralelepípedo, composto por polígonos, entre eles retângulos e/ou quadrados, apresentando lados opostos iguais entre si.

Identifique a quantidade de lados dos sólidos abaixo e verifique quantos são iguais entre si.



R:______________________________

R:______________________________

R:______________________________

R:______________________________

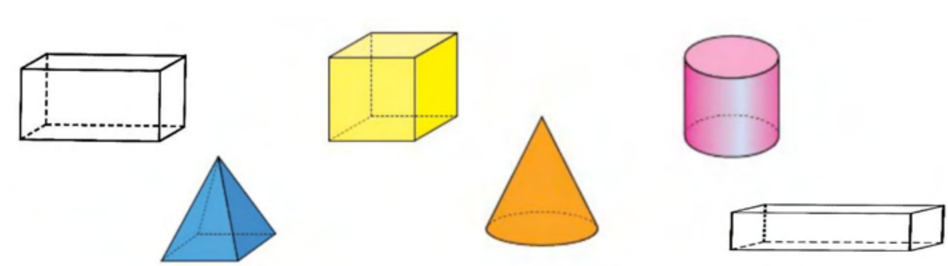
R:______________________________

R:______________________________

[I_r – CP] Atividade 09 – Sólidos regulares

O objetivo desta atividade é que após as investigações solicitadas, o aluno seja capaz de perceber os sólidos regulares em específico algumas características do Paralelepípedo.

Preenchendo com cubos unitários os sólidos abaixo.



O que é possível perceber em relação aos sólidos?

a - Todos os sólidos ficarão completados com cubos unitários?

b - Os sólidos que ficaram completados apresentam algo em comum? Se sim, descreva.

[I_e – CP] Atividade 10 - Investigando o Paralelepípedo retângulo

O objetivo desta investigação é fazer o aluno identificar as características que determinam um paralelepípedo.

Complete os espaços utilizando os sólidos da atividade 09

- Os sólidos que têm a maior quantidade de lados possuem em comum o número de _____________.
- Focaremos nestes sólidos com maior quantidade de lados
- Estes lados são iguais? R: __________________
- Os lados iguais são opostos? R: __________________
- Estes lados são paralelos entre si? R: __________________

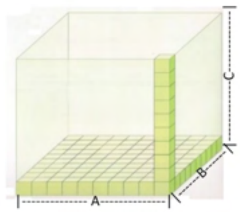
[I_f] Definição de Paralelepípedo

Assim, um paralelepípedo é definido como um sólido limitado por seis paralelogramos. Estes paralelogramos são dois a dois paralelos, congruentes e opostos.

[I_e – CP] Atividade 11 - Encontrando o Volume de um paralelepípedo

O objetivo deste tópico é que após as investigações solicitadas, o aluno perceba a relação multiplicativa existente para se determinar o volume.

Observe a figura abaixo, complete quando for necessário e responda os questionamentos seguintes.



- O Sólido tem ________ unitários.
- Qual o valor de A, B e C ?

R: ____

- O que as letras A, B e C estão informando?

R: ____

- Quantos cubos unitários a figura nos mostra?

R: ____

- Quantos cubos unitários faltam para preenchermos a figura por completo?

R: ____

- É possível dispormos de alguma operação matemática para encontramos o total de cubos unitário?

R: ____

- Quando a figura está totalmente preenchida, o total de cubos unitários desta figura corresponde a medida do ________________.

- É possível utilizarmos o tamanho de A, B e C para encontrarmos o volume do sólido? Se possível, como?

R: ____

[I_f] Definição do Volume do bloco retangular

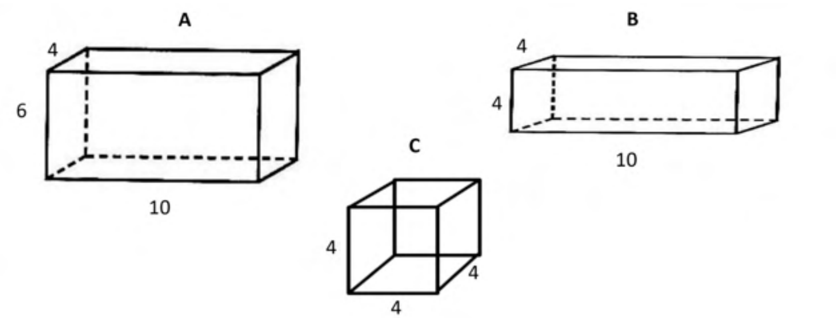
Seja B um bloco retangular (paralelepípedo retângulo) cuja largura, comprimento e altura são respectivamente a, b e c, o volume do bloco será: V= α .b .c

[I_e] Atividade 12 – Encontrando o volume do Paralelepípedo Retângulo

O objetivo desta atividade é que após as investigações solicitadas, o aluno conseguirá identificar e verificar o volume dos paralelepípedos.

Complete a frase!

Abaixo, estão identificados os _________________________ A e B e C,



No sólido A, qual o número que expressa sua porção no espaço?

R: ____

No sólido B, qual o número que expressa sua porção no espaço?

R: ____

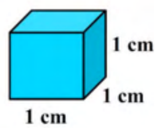
No sólido C, qual o número que expressa sua porção no espaço?

R: ____

[IA_r] Medida do volume

Esta secção objetiva fazer o aluno calcular o volume e perceber suas unidades de medida, entre elas estão o cm^3 e o dm^3.

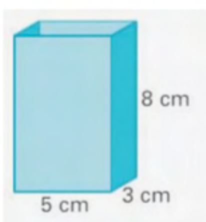
Calcule o volume dos paralelepípedos expressando sua unidade de volume correspondente. Observe o exemplo.



Altura x Comprimento x Largura =

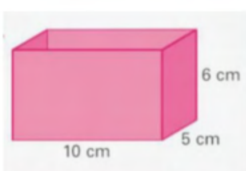
1 cm x 1 cm x 1 cm =

1 cm³.



R:________________________________

R:________________________________



R:________________________________

4 I CONSIDERAÇÕES

O objetivo deste trabalho era criar uma sequência didática sobre Volume do paralelepípedo. Para tal foram revisadas algumas literaturas que falam a respeito das dificuldades dos alunos em relação a Geometria espacial. Foram estudados, também, trabalhos que conceituam e caracterizam a sequência didática com caráter interdisciplinar e em especifico para a matemática. Outro fator fundamental para a criação destas atividades foram as revisões criteriosas dos conceitos, das características e dedução matemática do tema. Mediantes os conteúdos, foi possível eleger um trajeto para conduzir o aluno pelo objeto de aprendizagem.

Não é tarefa fácil, a criação de atividades que auxiliem e contribuam no processo de ensino-aprendizagem. Pois, requer do educador tempo e paciência, desse modo, é uma iniciativa particular de grande valor para a educação. No processo de ensino-aprendizagem, sequências de atividades são bastante válidas, principalmente quando comparamos, com outros ‘educadores’ que utilizam modelos de ensino defasados, deixando as aulas de matemática cansativas e complexas.

Portanto, o professor de matemática deve ter uma *sensibilidade educativa*, para verificar as necessidades particulares de cada aluno, mediante a sequência didática, onde é possível oportunizar o aprendizado a todos. Havendo, assim, uma construção e possível reconstrução dos conceitos, no cognitivo do aluno. De tal modo, que o estudante participa do processo, e deixa de ser apenas ouvinte.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. F. F. Estudo sobre o conceito de volume. 2014. 34 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande.

CABRAL, Natanael Freitas. Sequências Didáticas: estruturas e elaboração. Belém: SBEM-PA. 2017.

COSTA, A. C.; BERMEJO, A. P. B.; MORAES, M. S.F. Análise do ensino de geometria espacial. In: X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2009, Ijuí – RS. Anais, 2009.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. Pequeno Dicionário da Língua Portuguesa. 26.ª impressão. Rio de Janeiro, 1993.

FETZER, F.; BRANDALISE, M. A. T. Processo de ensino-aprendizagem de matemática: O que dizem os alunos? UEPG. Ponta Grossa, 2009.

LEAL, Crstianni Antunes. Sequencia didática: Brincando em sala de aula – uso de jogos cooperativos no ensino de ciências (2011). Disponível em: <http://www.ifrj.edu.br/webfm_send/5416.> Acesso em: 26 nov. 2017.

MACHADO, P. A. F. Fundamentos de geometria espacial. Belo Horizonte: Editora CAED – UFMG. 2013.

PERETTI, Lisiane; TONIN DA COSTA, Gisele Maria. Sequência didática na matemática. Revista de educação do ideau, v. 8, n. 17, 2013, p. 1 – 15.

POMMER, Wagner Marcelo. Brousseau e a ideia de situação didática. (2008). Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf.> Acesso em: 27 nov. 2017.

SANCHES NETO, L.; DARIDO, S. C.; FERREIRA, L. A.; GALVÃO, Z.; PONTES, G. H.; RAMOS, G. N. S.; RANGEL, I. C. A.; RODRIGUES, L. H.; SILVA, E. V. M. Resenha do livro “A prática educativa”, de Antoni ZABALA, Revista Brasileira de Ciências do Esporte, Campinas, v.23, n.2, p.195-205, 2002.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. “O que são polígonos convexos e regulares?”. *Brasil Escola*. Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-sao-poligonos-convexos-regulares.htm>. Acesso em: 01 out. 2017.

VERONA, V. A.; LOPES M. R. M. Geometria espacial numa perspectiva contextualizada. In: X Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2009, Guarapuava – PR. Anais, 2009.

CAPÍTULO 7

A LUDICIDADE E O ENSINAR MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO: O QUE REVELAM ALGUMAS PRODUÇÕES ESCRITAS?

Data de aceite: 01/12/2021

José Duilson Filho
Universidade do Estado da Bahia, Campus VII

Américo Junior Nunes da Silva
Universidade do Estado da Bahia, Campus VII

RESUMO: O presente trabalho foi elaborado com o propósito de investigar como são abordados os temas sobre a Ludicidade no Ensino e na Aprendizagem da Matemática e como os autores de 22 Comunicações Científicas publicadas nas 3 últimas edições do Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, concebem lúdico, jogos, ludicidade e brincadeiras, bem como quais são suas contribuições para o ensino dessa disciplina e os reflexos para a sala de aula do Ensino Médio. A pesquisa em questão foi desenvolvida por meio do mapeamento das publicações do ENEM dos anos de 2013, 2016 e 2019 que discorreram sobre o tema em questão. Para construir o trabalho nos ancoramos em uma perspectiva quali-qualitativa, em uma pesquisa do tipo bibliográfica. Durante a análise dos dados, observou-se que as comunicações selecionadas abordaram o caráter potencialmente lúdico dos jogos apontando suas contribuições para as aulas de Matemática, para o Ensino Médio; deixando claro que para que a aprendizagem ocorra, tanto o aluno quanto o professor precisam assumir papéis nesse contexto.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática; Jogos; Ludicidade; ENEM; Ensino Médio.

PLAYING AND TEACHING MATHEMATICS IN HIGH SCHOOL: WHAT DO YOU REVEAL ANY WRITTEN PRODUCTIONS?

ABSTRACT: The present work was elaborated with the purpose of investigating how the themes about the Playfulness in the Teaching and Learning of Mathematics are approached and how the authors of 22 Scientific Communications published in the last 3 editions of the National Meeting of Mathematics Education - ENEM, define ludic, games, playfulness and games, as well as what are their contributions to the teaching of this discipline and the consequences for the high school classroom. The research in question was developed through the mapping of ENEM publications from the years 2013, 2016 and 2019 that addressed the topic in question. To build the work, we anchored in a quali-qualitative perspective, in a documental type research. During data analysis, it was observed that the selected communications addressed the potentially playful character of games, pointing out their contributions to Mathematics classes, to High School; making it clear that for learning to occur, both the student and the teacher need to assume roles in this context.

KEYWORDS: Mathematics; Games; playfulness; ENEM; High school.

INTRODUÇÃO

A Matemática enquanto ciência, desde Pitágoras até a atualidade, é reconhecidamente importante para a evolução humana. No entanto, seu domínio não é tão simples quanto sua existência (TROBIAS e TROBIAS, 2016). Para que esse domínio aconteça, portanto, é necessário que se estabeleçam relações que permitam aproximações aos objetos de conhecimento, de forma natural.

É comum observarmos, e para isso usamos a nossa experiência profissional como base, que muitos estudantes apresentam aversão a este componente curricular, que na maioria das vezes é ensinada de modo desconecto das inúmeras realidades cotidianas. Ao aluno, muitas vezes, cabe um papel passivo, enquanto ouvinte e sem participação efetiva no processo de aprendizagem, restando-lhe registrar o que foi exposto na lousa e resolver listas de exercícios com base em exemplos apresentados, das quais em sua grande maioria fundamenta-se na memorização de regras.

Para Trobias e Trobias (2016) a dificuldade de entender os objetos matemáticos começa quando os alunos não são questionados e, muitas vezes, não são incentivados pelos professores. Para grande parte dos estudantes falar em Matemática é algo desagradável, pois não conseguem associar os conteúdos a algo "palpável" ou visível em seu cotidiano. Aos educadores matemáticos, como corrobora Silva (2013), cabe desconstruir essa imagem e permitir o prazer à descoberta no movimento de matematizar.

Muitas vezes, quando o conhecimento matemático é ensinado de forma tradicional e mecânica, supervalorizando a memorização e não significando os conceitos e nem construindo um movimento de percepção da relaçãodo conteúdo ensinado com as diversas situações cotidianas, o aluno não é estimulado no prazer da descoberta e deixa de ser construtor do seu conhecimento, constituindo-se enquanto um depósito de informação e conteúdo. O saber e o agir fazem parte dos processos de ensino e aprendizagem. Desse modo, utilizar estratégias adequadas e que despertem o interesse por meio de atividades menos tradicionais e potencialmente lúdicas, pode facilitar a aprendizagem de conceitos matemáticos cabendo ao professor intermediar e criar uma abordagem contextualizada e consequentemente mais reflexiva, estimulando a consciência e interligando o conhecimento teórico ao cotidiano.

Sabendo disso, quando vivenciada de forma correta, tanto no nível quanto na abordagem do conteúdo, a ludicidade pode possibilitar ao aluno prazer, criatividade e interesse durante o processo de aprendizagem. O lúdico apresenta-se como uma estratégia de ensino capaz de relacionar a realidade do aluno à sala de aula, proporcionando o desenvolvimento de habilidades, desenvolvidas durante o jogo, como a lógica e a descoberta de táticas/caminhos para resoluções de problemas [que também surgem do movimento do jogar]. Entender que no vivenciar de práticas potencialmente lúdicas há o movimento de matematizar é aceitar que todos possuem capacidade e meios para visualizar a matemática e expressa-la de diferentes formas, deixando a memorização e mecânica para trás e dando significado aos processos matemáticos durante o ensino e a aprendizagem.

Nesse contexto, surgiu a necessidade de comunicar e trocar experiências sobre a educação matemática nos eventos científicos; cabendo notoriedade ao Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), promovido e incentivado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). A SBEM, segundo o seu site oficial[1], tem uma relação direta com o ENEM, pois o seu surgimento se deu de dois encontros nos anos de 1987 e 1988 por grupos de pesquisadores, professores e estudantes do Brasil que se encontravam angustiados com questões referentes à Educação Matemática.

Esses encontros aos quais nos referimos anteriormente, ainda segundo o site da SBEM, ocorreram nas cidades de São Paulo/SP e Maringá/PR respectivamente. No encontro de Maringá/PR no ano de 1988, se formou a Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, ficando estipulados os próximos Encontros Nacionais de Educação Matemática, a cada dois anos até o ano de 1995, e a partir daí, a realização dos próximos eventos aconteceriam trienalmente, a saber: 1998, 2001, 2004, 2007, 2010, 2013, 2016 e 2019.

Para este trabalho de pesquisa nos ateremos às três últimas edições, sendo elas as de 2013, 2016 e 2019, procurando entender a seguinte questão de pesquisa: *Como os trabalhos publicados nas 3 últimas edições do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) abordam a ludicidade e o seu trabalho no Ensino Médio?*

Investigaremos assim, como são abordados os temas sobre a Ludicidade no Ensino e Aprendizagem da Matemática e analisaremos como esses autores definem lúdico, jogos, ludicidade, brincadeiras e quais suas contribuições para o ensino de matemática neste segmento de ensino. Tudo isso, com o objetivo de compreender as concepções de ludicidade, presentes nos trabalhos publicados nas 3 últimas edições do ENEM, e como acontece a sua inserção na prática docente e os reflexos para a sala de aula do Ensino Médio.

O artigo, permitindo-se ser mais bem compreendido, foi dividido em quatro seções. São elas: i) Introdução, onde falamos de forma geral sobre a temática de pesquisa; ii) Percurso Metodológico, onde apresentamos a pesquisa e os percursos de produção e análise de dados; iii) A análise dos dados, onde quantificamos os trabalhos mapeados e, partindo dos trabalhos selecionados e de outros que são referência para a temática de pesquisa, aprofundamos alguns conceitos importantes para este texto; iv) por fim teceremos algumas considerações de fim de texto.

PERCURSO METODOLÓGICO

Para obtermos as informações numéricas apresentadas neste trabalho, utilizamos da pesquisa quantitativa para apresentar dados sobre os artigos selecionados. De acordo com, Richardson (1999), a pesquisa quantitativa acontece quando tem por característica o uso da quantificação, tanto na pesquisa de dados quanto no estudo das investigações. Porém, para compor o trabalho usamos também de uma perspectiva Qualitativa, que segundo

1 Home (sbembrasil.org.br);

Silva et al. (2018), caracteriza-se na compreensão e aprofundamento do conhecimento sobre o assunto a ser abordado, tendo como objeto o entendimento dos integrantes diante do contexto relacionado com a realidade, a partir de suas experimentações, práticas e análise.

Para o percurso bibliográfico identificamos os estudos que tratavam sobre o tema, o que se caracterizou como mapeamento dos trabalhos realizados. Para Ramos (2016), Pesquisa Bibliográfica e mapeamento são metodologias complementares que tem como base a exploração de pesquisas já realizadas em determinadas áreas, já que o mapeamento permite uma visão geral do que se procura. Segundo Gil (2008) a Pesquisa Bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Neste Artigo, de uma forma particular, faremos um levantamento de literaturas já produzidas e publicadas nas 3 últimas edições do ENEM sobre a Ludicidade no Ensino da Matemática, em particular para o Ensino Médio.

Para a realização da pesquisa, para a seleção dos artigos que comporiam o nosso estudo, buscamos todas as Comunicações Científicas (CC) das três Edições do ENEM no site da (SBEM), dos anos de 2013, 2016 e 2019. Escolhemos apenas as CC, por se tratarem de resultados de pesquisas concluídas e, em muitas das vezes, resultado de investigações realizadas por professores ao olharem para a própria prática. Para identificar os artigos, usamos as palavras-chave “Lúdico”, “Jogos”, “Ludicidade”, “Jogar”, “Brincar” e “Brincadeira”.

A priori, a partir das palavras-chave que evidenciamos anteriormente, olhamos para os títulos de todas as Comunicações Científicas publicadas nas 3 últimas edições do ENEM e selecionamos aqueles que tivesses algumas das palavras. Após a identificação, fizemos as leituras dos resumos dos textos, para que assim fossem selecionados os artigos inerentes ao tema. Após selecionarmos estes artigos, fizemos a leitura do texto completo e fichamos pontos relevantes de cada um deles, para assim então realizarmos a análise dos dados, orientados pela nossa problemática e pelo que aqui foi objetivado.

> No campo das Ciências Sociais, o termo pesquisa qualitativa assumiu diferentes significados, como o de compreender diversas técnicas interpretativas que objetiva descrever e decodificar os componentes de um sistema complexo de significados. Pretende traduzir e expressar o sentido dos fenômenos do mundo social; trata-se de reduzir a distância entre o pesquisador e o pesquisado, entre as teorias e os dados, entre o contexto e a ação (MAANEN,1979, p. 52).

A análise dos dados assume-se enquanto qualitativa, partindo das ideias apresentadas no excerto anterior, se deu através das informações obtidas nas pesquisas durante a Revisão Bibliográfica, com uma abordagem qualitativa e interpretativa, levando em consideração os dados dispostos e análise dos resultados obtidos por cada trabalho, concluindo assim que atenderíamos melhor aos objetivos da pesquisa.

ANÁLISE DOS DADOS PRODUZIDOS

Mapeando as Comunicações Científicas das 3 últimas edições do ENEM: as primeiras impressões

Partindo das etapas que elencamos na seção anterior, localizamos no XI ENEM/ Curitiba/PR - 2013, 23 trabalhos de Comunicação Científica que apresentaram relação com o lúdico; desses 23, 04 são direcionados especificamente ao lúdico no Ensino Médio.

Em relação ao XII ENEM/ São Paulo - 2016, localizamos 30 trabalhos de Comunicação Científica que têm relação com o lúdico; desses 30 trabalhos, 05 são direcionados especificamente ao lúdico no Ensino Médio.

Por fim, analisamos o XIII ENEM/Cuiabá/MT – 2018, e identificamos 58 trabalhos de Comunicação Científica que têm relação com o lúdico; dentre estes 58 trabalhos, verificamos que 13 são direcionados especificamente ao lúdico no Ensino Médio.

Como mostra em resumo, o quadro abaixo:

Edições	Relação com o lúdico	Lúdico no Ensino Médio
XI ENEM - 2013	23	04
XII ENEM - 2016	30	05
XIII ENEM - 2018	58	13
Total	111	22

Quadro 01: Produções mapeadas nas 3 últimas edições do ENEM.

Fonte: Arquivo pessoal dos pesquisadores.

Apresentamos abaixo a lista dos 22 artigos identificados nas três últimas edições do ENEM e que têm relação com o lúdico no Ensino Médio.

EDIÇÃO	TÍTULO	AUTOR(ES)
XI ENEM	EUCLIDEAN: O JOGO DA COMBINATÓRIA	Helder França Floret
	JOGOS NUMA PERSPECTIVA EDUCATIVA: UMA FERRAMENTA PEDAGÓGICA NO PROCESSO DE ENSINAR E APRENDER NAS AULAS DE MATEMÁTICA	Rúbia Juliana Gomes Fernandes Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro Guataçara Santos Junior
	POTENCIALIDADES DO JOGO CIVILIZATION V: PARA UMA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA COM ENFOQUE CTS1	Adriane Eleutério Souza Pedro Lealdino
	TORRE DE HANÓI: O JOGO COMO RECURSO METODOLÓGICO NAS AULAS DE MATEMÁTICA	Adriane Eleutério Souza

XII ENEM	INTRODUÇÃO A APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE POR MEIO DO USO DE JOGO DIGITAL EDUCATIVO	Patricia Aparecida Boletini Ismar Frango Silveira Orientador
	JOGO BANCO DAS FUNÇÕES: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O PROCESSO DE CONCEITUALIZAÇÃO DE FUNÇÕES NA EDUCAÇÃO BÁSICA	Victor Louis Rosa de Souza Evanilson Landim Alves Lucila Batista Dantas Pereira
	JOGOS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM OLHAR DAS PESQUISAS ACADÊMICAS BRASILEIRAS PARA O ENSINO MÉDIO.	Andressa Nishihara
	JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA: EFICIÊNCIA E APLICABILIDADE DO JOGO TRANSAÇÕES FINANCEIRAS	Thiago Feitosa Alves Nyegirton Barreiros dos Santos Costa Lucília Batista Dantas
	JOGOS NO ENSINO DE PROBABILIDADE E ANÁLISE COMBINATÓRIA: RELATO DE UMA PROPOSTA METODOLÓGICA NO ENSINO MÉDIO	Tawana Telles Batista Santos Lilian Gleisia Alves dos Santos
XIII ENEM	OS JOGOS DE BLOCOS DE MONTAR, A GRAMÁTICA DA FORMA E AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: CRIANDO CENÁRIOS LÚDICOS PARA ENSINO-APRENDIZAGEM NO ENSINO MÉDIO	Frederico Braida Rodolfo Eduardo Vertuan Rodrigo Manoel Dias Andrade
	UTILIZAÇÃO DO JOGO UNO DAS POTÊNCIAS COMO POSSIBILITADOR DE APRENDIZAGEM PARA ESTUDANTES DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO.	Uanderson Jurandir da Silva Lucília Batista Dantas Pereira Joás Mariano da Silva Júnior
	O JOGO DO DOMINÓ COM A FORMA E FÓRMULA DA ÀREA DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS	Katiani Pereira Samuel Squinalli Casanova
	UTILIZAÇÃO DO JOGO UNO COMO MÉTODO ALTERNATIVO DE ENSINO DE GEOMETRIA	Renato Leandro Lima de Oliveira Elimara Barros Gumercindo Mendes Gisela Maria da Fonseca Pinto
	CONSTRUÇÃO DE JOGOS COMO FERRAMENTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA APLICADA AO ENSINO TÉCNICO EM FLORESTAS	Érica Patrícia Navarro Andreza Mendonça Iran Abreu Mendes
	USO DO JOGO QUADRADO MÁGICO NO ENSINO E NA APREDIZAGEM DA PROGRESSÃO ARITMÉTICA E DA MATRIZ NO ENSINO MÉDIO	Antônio Luiz Sampaio Sandra Maria Chaves
	USO DOS JOGOS NA COMPREENSÃO DOS CONCEITOS DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA	Lucas Benjamin Barbosa Souza Tatiane Alexandra Tito de Araújo Alves Jeane do Socorro Costa da Silva
	PRAZER DA MATEMÁTICA E ENSINO HÍBRIDO: MÁGICAS, JOGOS, BRINCADEIRAS, DESAFIOS E COLABORAÇÃO	Leo Akio Yokoyama Amanda Francez Viegas Serra Bárbara Thees Ferreira Fabio Menezes da Silva

	O USO DO JOGO CAMPO MATEMÁTICO COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO DAS OPERAÇÕES MATEMÁTICAS	Anne Gleisse Pimentel Carneiro Costa Ariany Dias e Dias Elizeu Cantão de Jesus Calandrini Neto Tatiara de Nazaré Costa Martins
	O JOGO LUDO PARA ENSINAR ESTATÍSTICA NO ENSINO MÉDIO	Helenice Lopes Barbosa Hugo Silva Chacon Emanuel Gomes Lourenço
	O USO DO JOGO DOS PRISMAS NO PROCESSO DE ENSINO – APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS COM DEFICIÊNCIA INTELECTUAL	Geslsiane Rodrigues Ferreira Cleibianne Rodrigues dos Santos Kêite Ferreira Roberto Barcelos Souza
	DESENHOS DO SONAS LUSONAS E JOGOS AFRICANOS – A ÁFRICA NAS AULAS DE MATEMÁTICA	Maristel do Nascimento
	“QUEM SOU” - UMA INTERVENÇÃO LÚDICA EDUCACIONAL	Rosana de Andrade Araújo Pinto Eduardo Fernandes Bueno

Quadro 02: Artigos identificados nas 3 últimas edições do ENEM e que tratam da ludicidade no Ensino Médio.

Fonte: Arquivo pessoal dos pesquisadores.

Após a realização da leitura das comunicações científicas acima listadas, notamos que todas elas abordam o uso de jogos nas aulas de Matemática como algo possível de acontecer no Ensino Médio, contrariando a ideia errônea que muitos possuem, como evidenciou Silva (2013), de que o lúdico é algo específico do público infantil. Das 22 comunicações, 03 apresentam o uso de jogos eletrônicos ou computacional e 19 trazem o uso dos jogos manipuláveis de regras e/ou de estratégias.

Quanto ao público alvo a quem se destina cada trabalho, observamos que 03 estão voltados para a vivência em turmas de 1º Ano, 05 para turmas de 2º Ano (01 destes trabalhos traz o uso de jogos para alunos com Deficiência Intelectual inseridos na turma regular, abordando uma perspectiva inclusiva); 02 para turmas de 3º Ano; 01 aplica-se tanto ao 1º quanto ao 3º Ano; 03 dos trabalhos destinam-se ao público de cursos técnicos e 08 para a formação de professores que atuam nessa modalidade.

Em relação aos Objetos do Conhecimento abordados nas comunicações selecionadas, identificamos que 01 está voltada à Educação Matemática Crítica, onde os autores fundamentados em Skovsmose (2007) tratam do ensino de Matemática de maneira crítica e reflexiva, ou seja, uma abordagem que leva o aluno a refletir sobre a responsabilidade social que existe entre Ciências e Tecnologia. Os autores dessa comunicação científica acreditam que a “Educação Matemática Crítica surge com o objetivo de transcender a ideia de entender a matemática como uma ciência isolada e reconhecer a importância de relacioná-la com questões mais amplas”. (SOUZA e FILHO, 2013, p. 05). Assim, a abordagem que os autores apresentam constitui-se na apresentação do jogo computacional *Civilization V* numa perspectiva interdisciplinar com as áreas de História e Geografia, estabelecendo uma formação crítico-reflexiva do ensino de Matemática num contexto descrito pelo jogo.

Nesse ínterim, identificamos que 05 trabalhos abordam o ensino de Probabilidade e Estatística; 01 trabalho discorre sobre Educação Financeira (juros simples e composto); 05 deles abordam a unidade temática de Geometria; 02 apresentam o ensino de Potenciações; 06 trazem o ensino de Funções, Progressões e Matrizes e 02 abordam o uso dos jogos de modo geral, não apresentando um conteúdo específico, mas ressaltando as potencialidades dessa metodologia em sala de aula nas turmas de Ensino Médio.

De modo geral, a maioria das comunicações defende o uso dos jogos de forma estruturada e bem planejada nas aulas de Matemática, bem como podemos observar o que discorreram Souza, Alves e Pereira (2016):

> Nesses termos, os jogos, convenientemente planejados, apresentam-se como recursos pedagógicos eficazes para a construção do ensino-aprendizagem, fazendo com que os estudantes gostem de estudar matemática. Porém, é preciso considerar que não é o jogo ou a atividade em si que irá assegurar a aprendizagem de conceitos matemáticos, mas sim, os desdobramentos, questionamentos e as estratégias utilizadas pelo professor a partir de um determinado jogo. O jogo é um suporte, assim como o livro didático, o quadro branco, dentre outros, que, quando bem utilizados auxiliam e potencializam a aprendizagem de conceitos matemáticos. (SOUZA; ALVES; PEREIRA, 2016, p. 04-05).

Dessa forma, observamos que o levar jogo para a sala de aula pressupõe da necessidade de um bom planejamento e conhecimento de quais estratégias utilizarem para que os objetivos traçados sejam alcançados, assim como apontam Alves, Costa e Pereira (2016, p. 02) ao afirmarem que “é necessário que o professor tenha em mente quais os objetivos que pretende alcançar com a aplicação do mesmo”. Esse pensamento é intensificado por Moura (1992) ao dizer que:

> O jogo como objeto, como ferramenta do ensino, da mesma forma que o conteúdo, carece de uma intencionalidade. Ele, tal qual o conteúdo, é parte do projeto pedagógico do professor. Ao utilizar o jogo como objeto pedagógico, o professor já tem eleita (ou deveria ter) uma concepção de como se dá o conhecimento. (MOURA, 1992, p. 47).

As comunicações trazem também um panorama histórico sobre como a Matemática é vista e como tem sido ensinada ao longo dos anos de tradicional, evidenciando o grande enfoque a uma perspectiva para a memorização e reprodução de exercícios. Apresentam as contribuições do uso dos jogos e definem seu caráter lúdico de modo a suprir carências nas aulas de Matemática, especialmente no Ensino Médio, em que esse recurso tem sido pouco vivenciado. Conforme Floret (2013), ao desenvolver o jogo eletrônico *Euclidean*, visando suprir algumas carências notadas por ele ao analisar mais de cem jogos eletrônicos, elencou 7 potencialidades que o seu jogo (*Euclidean*) apresenta a fim de preencher as lacunas no uso desse tipo de jogos no ensino de Matemática. São elas:

> 1) envolver o aluno, fazendo com que se sinta atraído e interesse em jogar; 2) promover a construção do conhecimento pelo aluno, evitando repetições de técnicas matemáticas que não compreende; 3) construir os procedimentos para resolução de problemas junto aos alunos, auxiliando na compreensão das estratégias; 4) colaborar para que o conhecimento se consolide de forma natural, junto ao desenvolvimento do jogo; 5) estimular a dúvida, ajudando o aluno a entender que precisa de novas ferramentas matemáticas, antes de apresentá-las; 6) oferecer os recursos necessários para que o estudante tente construir a nova ferramenta por iniciativa própria; 7) evitar repetições enfadonhas. (FLORET, 2013, p. 08).

De acordo com Fernandes, Pinheiro e Junior (2013, p. 09) “os jogos utilizados nos ambientes escolares podem se tornar ferramentas pedagógicas perpassando pela reflexão, ação e efetivação dos objetivos educacionais”. Elas ainda afirmam que a “utilização do lúdico em sala de aula, pode configurar-se como uma estratégia que vem ao encontro da formação integral dos alunos e suas necessidades educativas” (FERNANDES, PINHEIRO e JUNIOR, 2013, p. 09). Assim, as autoras compreendem que o uso dos jogos orientados sob uma prática didática significativa é capaz de articular o processo de apropriação e construção do conhecimento matemático.

Destarte, Souza e Filho (2013) contribui dizendo que ao inserir o jogo como um recurso metodológico em sala de aula, há a possibilidadede do aluno analisar e criar estratégias para resolver problemas, aproximando-o do pensamento abstrato. Além disso, Nishihara (2016) contribui dizendo que:

> Os jogos influenciam fortemente no desenvolvimento da agilidade, da concentração e do raciocínio. Contribuem para um desenvolvimento intelectual, pois para jogar é preciso pensar, tomar “decisões”, criar, inventar, aprender a arriscar e experimentar. Dependendo da maneira com que os jogos são aplicados, podem ajudar também no comportamento em grupo, nas relações pessoais e na ajuda coletiva. (NISHIHARA, 2016, p. 03).

O papel do professor e do aluno nesse cenário, também ganhou destaque nas comunicações aqui analisadas. Para alguns dos autores, professor e aluno possuem papel fundamental no ambiente educativo para que a aprendizagem ocorra. Em relação à postura do professor, destacamos o que apontou Oliveira, Mendes e Pinto (2019) fundamentados em Silva e Kodma (2004) ao dizer que

> A utilização de jogos para o ensino requer uma mudança de postura por parte do professor em relação ao que é o ensino tradicional matemático. Quer dizer que o professor muda sua atuação de educador para gestor, observador e incentivador da aprendizagem pelo processo de construção do conhecimento dos alunos. (OLIVEIRA, MENDES e PINTO, 2019, p. 03).

Dessa maneira, Santos e Santos (2016) deixam explícito que ao ensinar matemática utilizando jogos, na busca de novas metodologias a fim de sanar as dificuldades apresentadas por alguns alunos em relação aos conteúdos matemáticos, é necessário que haja mudança de postura por parte do professor. Para tanto, como afirma Souza e Filho (2013, p. 02) "o papel do professor é o de promover um ambiente que estimule o aluno a atitudes críticas e criativas, autonomia e independência nas suas ações, de modo que os problemas propostos possam ser discutidos e resultem em respostas construídas coletivamente".

Quanto à postura dos alunos, destacamos o que Souza, Alves e Pereira (2106) trazem e o que discorrem os Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco, ressaltando que a experiência com jogos matemáticos propicia o aspecto interativo e que "os estudantes não ficam na posição de meros observadores, tomando os conhecimentos de novos fatos, mais se transformam em elementos ativos, na tentativa de ganhar a partida ou na busca de um caminho para a solução do problema posto a sua frente" (PERNAMBUCO, 2012, p.37). Além do mais Grando (2004, p. 18) contribui afirmando que "o jogo propicia um ambiente favorável ao interesse do aluno, não apenas pelos objetos, mas também pelo desafio das regras impostas por uma situação imaginária que, por sua vez, pode ser considerada como um meio ao desenvolvimento do pensamento abstrato". Assim sendo, Nishihara (2016) assevera que:

> Os jogos estimulam o aluno, motivam, despertam a curiosidade, proporcionando uma forma de aprender mais prazerosa, de maneira lúdica e mais próxima da realidade e dos prazeres da criança, propiciando assim resultados diferentes de uma aprendizagem sob "pressão" e no modelo tradicional. Além disso, os jogos influenciam fortemente no desenvolvimento da agilidade, da concentração e do raciocínio. Contribuem para um desenvolvimento intelectual, pois para jogar é preciso pensar, tomar "decisões", criar, inventar, aprender a arriscar e experimentar. (NISHIHARA, 2016, p. 03).

De modo geral, observamos que as comunicações científicas apresentam os cenários pedagógicos favoráveis a ação de construção do conhecimento por parte dos estudantes com o uso de jogos, pois como dito anteriormente, o aluno também desempenha um papel no decorrer das vivências em sala, agindo ativamente na busca de soluções para os desafios apresentados a ele.

Ampliando o olhar acerca do que revelam os trabalhos mapeados

Podemos observar, partindo dos textos mapeados, que o ensinar Matemática ainda é denunciado por muitos dos autores como algo que acontece de forma tradicional, ocasionando para os alunos certo bloqueio no que tange ao estabelecimento de relação do que está sendo ensinado com a sua realidade diária. Navarro, Mendonça e Mendes (2019) destacam que esta disciplina está associada a uma ciência rigorosa e abstrata, e esta associação é reforçada por práticas pedagógicas sem conexão com a realidade fortalecendo a ideia de que sua acessibilidade não é para todos.

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) homologada em 2017 pelo Conselho Nacional de Educação, sobre o ensino de Matemática no Ensino Médio, apresenta como uma das 5 competências específicas o seguinte objetivo:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, **empregando estratégias e recursos**, como **observação de padrões**, **experimentações** e **diferentes tecnologias**, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2020, p. 531).

Dessa forma, partindo do posto anteriormente, entendemos que o saber e o agir fazem parte do processo de ensino e aprendizagem, sendo assim, utilizar estratégias adequadas e que despertem o interesse por meio de atividades menos tradicionais e potencialmente lúdicas, facilitam o gosto pela aprendizagem e a aquisição de habilidades voltadas à construção e/ou reconstrução de conceitos matemáticos. Na mão do que apresentamos anteriormente Souza (2013) evidencia que

> A escola tem por função dar a formação adequada ao aluno, capacitando-o para saber relacionar as informações e os conhecimentos na resolução de situações-problema, tornando-o um cidadão crítico. No entanto não se têm obtido por meio do ensino tradicional uma forma de desenvolver nos alunos a autonomia, a capacidade de reflexão crítica e a criatividade para aplicar os conhecimentos adquiridos. (SOUZA, 2013, p. 01).

E para que isso que falamos anteriormente aconteça, é preciso observar o que dizem Fernandes, Pinheiro e Junior (2013) as quais compreendem como essencial o uso de estratégias metodológicas distintas tanto as já vivenciadas, como o quadro negro e o giz, como as nem tanto utilizadas como jogos, resolução de problemas, ambientes interativos computacionais entre outras, tornando possível assim, que os estudantes realizem inferências sobre situações cotidianas com o conhecimento matemático aprendido em sala de aula.

Compreendendo que é preciso criar uma abordagem mais contextualizada e mais reflexiva, a fim de estimular a consciência sobre a Matemática e o mundo, o presente trabalho analisou como as comunicações científicas das três últimas edições do ENEM abordaram a utilização de jogos nas aulas de Matemática no Ensino Médio como recurso metodológico de aprendizagem.

Jogo e ludicidade: o que conceituam os artigos mapeados.

Segundo a definição do dicionário Aurélio Buarque de Holanda o lúdico se refere a jogos, brinquedos e divertimento: atividade lúdica das crianças[...]. Segundo Almeida (2008), o lúdico origina-se do latim, "*Ludus*", e significa jogo. Kishimoto (2011) diz que definir jogo não é simples, isso devido às diferentes interpretações atribuídas e que diante dos diversos tipos de dispositivos lúdicos, existem vários tipos de entendimento e divergências devido a necessidade e singularidade de cada pessoa diante delas; como também, cada tipo de dispositivo potencialmente lúdico é vivenciado para determinada função, concluindo que a definição de jogo, por exemplo, é adotada e inserida a uma conjuntura social que a definirá conforme suas características.

Das 22 comunicações científicas mapeadas, identificamos poucas delas trouxeram a definição de jogo e/ou de ludicidade. Uma delas, a saber: Nishihara (2016, p. 02) expõe que “Jogo é um termo do latim “*jocus*” que significa gracejo, brincadeira, divertimento. O jogo é uma atividade física ou intelectual que integra um sistema de regras e define um indivíduo (ou um grupo) vencedor e outro perdedor”. A autora ainda traz o que Huizinga (2007) define como jogo:

> Uma atividade “voluntária” exercida dentro de certos e determinados limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias dotado de um fim em si mesmo, acompanhado de um sentimento de tensão e alegria e de uma consciência de ser diferente de vida cotidiana. (HUIZINGA, 2007, p.33).

Para Nishihara (2016, p. 02) “os jogos podem ser utilizados para fins educacionais para transmitir o sentido de respeito às regras e a mensagem de que numa disputa entre adversários haverá sempre um que perde e outro que ganha”.

É importante destacar que muitas das outras comunicações não apresentaram o conceito daquilo que se entende por “jogo”, porém indicarem as contribuições relevantes dos jogos para o ensino de Matemática. Nesta vertente, Barbosa, Chacon e Lourenço (2019, p. 04) identificaram algumas dessas contribuições, tais como: “perceber as dificuldades enfrentadas pelos alunos no aprendizado da Matemática”, “estimular o estudo pela disciplina”, “adquirir confiança para tentar resolver um problema”, “compreender que independente de vitória ou derrota é importante participar de uma atividade coletiva e o resultado final é apenas um complemento”.

Com o decorrer dos anos, reconheceu-se os jogos como de potencial lúdico e um fator importante, tendo grande influência no desenvolvimento humano no que diz respeito aos aspectos físicos, mentais e comportamentais, interferindo assim, na sua dinâmica e passando a ser considerado enquanto essencial de desenvolvimento. No contexto de sala aula, Grando (2004) afirma que:

> [...] a brincadeira e o jogo desempenham funções psicossociais, afetivas e intelectuais básicas no processo de desenvolvimento do aluno. O jogo apresenta-se como uma atividade dinâmica que vem satisfazer uma necessidade do aluno, dentre outras de movimento e ação. [...] o jogo propicia um ambiente favorável ao interesse do aluno, não apenas pelos objetos, mas também pelo desafio das regras impostas por uma situação imaginária que, por sua vez, pode ser considerada como um meio ao desenvolvimento do pensamento abstrato. (GRANDO, 2004, p. 18).

Para Silva et al. (2019 apud, MOURA, 2006), o jogo nas aulas de Matemática traz uma linguagem mais simples e dinâmica onde aos poucos é agregado aos conceitos formais; ou seja, o caráter lúdico do jogo torna possível a construção de soluções formulando relações com situações-problemas no cotidiano.

Segundo Barbosa et al. (2019 apud CABRAL, 2006) o jogo passa a ser instrumento de ensino quando provoca o aluno e muda a sua forma de aprendizagem a partir do momento que na lógica do jogo está presente a matemática. O jogo, através de sua linguagem dinâmica, ainda segundo os autores anteriormente evidenciados, proporcionará ao aluno que desenvolva habilidades durante resoluções de problemas e crie estratégias e ações para obter metas analisando a eficiência no processo e suas conclusões.

Ainda segundo Barbosa et al. (2019 apud RITA, 2013, p.12) "o jogo pode ser favorável ao aluno, pois desenvolve nele a capacidade de refletir sobre conceitos matemáticos, criar hipóteses, testá-las e avaliá-las com autonomia e cooperação".

Dessa forma, podemos observar os aspectos que justificam a incorporação dos jogos na sala de aula, segundo o que dizem Groenwald e Timm (2002, p. 1), "neste sentido, verificamos que há três aspectos que por si só justificam a incorporação do jogo nas aulas. São estes: o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais".

A natureza lúdica dos jogos é descrita por Souza (2013) da seguinte maneira:

> O jogo assume caráter lúdico por sua natureza desafiadora, trazendo movimento, barulho e certa alegria para o espaço no qual normalmente entram apenas o livro, o caderno e o lápis. A ideia de ludicidade nessa proposta é de um trabalho que estimule a aprendizagem, desenvolvendo habilidades matemáticas por parte dos alunos. (SOUZA, 2013, p. 04).

Assim, entendemos que a utilização de jogos no ensino de Matemática constitui-se um recurso pedagógico importante para a construção do conhecimento, tornando o processo interessante e até divertido, modificando a rotina da sala de aula e motivando os alunos.

No que diz respeito à classificação dos jogos, Silva, Pereira e Júnior (2019) trazem as definições apresentadas por Smole et al. (2008), em que afirma que os jogos matemáticos podem ser classificados como **jogos de estratégias**: (dama, xadrez, nim, etc.) que têm como finalidade encontrar as jogadas que promovam a vitória e os **jogos de conhecimento**: são aqueles que estão relacionados a um, ou mais tópicos habitualmente estudados em Matemática. Ainda segundo Smole et al. (2008) os jogos de conhecimento são recursos de ensino que podem promover uma aprendizagem mais rica, mais participativa e problematizadora, além de servir para que os alunos construam, adquiram e aprofundam de modo desafiador os conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos em Matemática no Ensino Médio.

É interessante destacar, que os artigos apontaram que o uso de metodologias potencialmente lúdicas tem sido pouco aplicado nesse segmento da Educação Básica. Oliveira, Mendes e Pinto (2019) afirmam que os jogos já são bastante trabalhados no Ensino Fundamental, sobretudo na educação infantil, porém são pouco vivenciados no Ensino Médio e, quando os encontramos, às vezes, não atendem ao que se é requisitado atualmente. Corroborando com o que apontam Silva, Pereira e Júnior (2019) embasados em Smole et al. (2008) ao afirmar que o Ensino Médio é a fase escolar que menos utiliza jogos nas aulas de Matemática, pois há uma crença de que os jogos constituem apenas como um elemento de diversão ou uma atividade de descanso e, com isso, alunos desse nível de escolaridade (Ensino Médio) não poderiam “perder tempo” em uma disciplina tão séria como a Matemática.

A visão a que nos referimos anteriormente, por exemplo, começa a ser mudada com constantes estudos e vivências em sala de aula e modificando os ambientes escolares podendo perpassar pela reflexão, ação e efetivação dos objetivos educacionais. Por outro lado, Lara (2005) salienta que o jogo em sala de aula não é uma estratégia para acabar com a crise encontrada no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, mas sim um meio pelo qual facilite esse processo, propiciando um ambiente curioso e interessante para o estudante.

Prática docente e reflexos em sala de aula

Pensar novas metodologias e suas efetivas vivências está intimamente atrelado ao papel do professor, pois este se configura como fator primordial na condução das atividades potencialmente lúdicas, desde o planejar até a vivência em sala de aula, tornando-se assim um mediador das situações planejadas e das que eventualmente ocorrerem durante o processo, a fim de alcançar o objetivo principal que é a construção do conhecimento por parte dos estudantes.

Nesse sentido, analisamos como as comunicações aqui destacadas discorreram sobre a postura do professor ao fazer uso dos jogos em sala de aula. Alves, Pereira e Souza (2016) compreendem que ao recorrer ao jogo, o professor precisa ter consciência de que para o aluno, a função desse recurso é inicialmente o seu caráter lúdico, no que tange a construção de prazer e aproximação a Matemática. Porém, para o professor o jogo tem um papel didático, capaz de integrar o interesse dos estudantes e os seus próprios interesses. Por isso, há a necessidade do planejamento cuidadoso no sentido de oferecer as condições adequadas de aprendizagem, sem deixar de lado a abordagem dos conceitos, neste caso, os matemáticos. Segundo os autores acima citados, “quando planejado adequadamente, o jogo possibilita a exposição natural de potencialidades e dificuldades dos estudantes em relação aos conceitos matemáticos envolvidos na atividade”. (SOUZA; ALVES; PEREIRA, 2016, p. 02)

Observamos que muitos autores abordaram em suas obras a autora Grando (2000) e sobre os aspectos pedagógicos do uso de jogos nas aulas de Matemática destacam que

> O jogo, em seu aspecto pedagógico, se apresenta produtivo ao professor que busca nele um aspecto instrumentador e, portanto, facilitador na aprendizagem de estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação, e também produtivo ao aluno, que desenvolveria sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las (investigação matemática), com autonomia e cooperação (GRANDO,2000, p.28).

Dessa forma, percebemos a importância do planejamento e da consciência que o professor necessita ter quanto aos objetivos que pretende alcançar com a vivência dos jogos, pois o uso dessa ferramenta requer uma intencionalidade. Não se configura o "brincar/jogar" por si só, mas ao alcance dos objetivos antes traçados quanto à construçãodo conhecimento. Nesse cenário, a postura do professor é indispensável, pois como dizem Silva, Pereira e Júnior (2019).

> [...] Ele cria ou "dispara" situações iniciais, capazes de estimular a criatividade dos alunos, organiza contraexemplos que levem à reflexão e promove questionamentos que possibilitem novas descobertas. Assim, o professor estabelece os desafios e deve ser o líder da situação, saber gerenciar o que acontece, tornando o meio o mais favorável possível, desencadeando reflexões e descobertas. (SILVA, PEREIRA e JÚNIOR, 2019, p. 04-05).

Outro aspecto a ser observado no ambiente em que o jogo está inserido, é a postura do estudante. Segundo Costa et. al (2019, p. 07) o "ato de jogar estimula o aluno a buscar sempre o seu melhor, utilizando a competitividade como motor impulsionador para utilizar os recursos matemáticos na perspectiva de um jogo". Souza (2013) corrobora dizendo que

> Ao trabalhar com o jogo, os erros são revistos de forma natural na ação das jogadas, sem deixar marcas negativas, oportunizando novas tentativas que estimulam a verificação e a descoberta do erro, replanejando jogadas que propiciam a aquisição de novas ideias e novos conhecimentos. Ao permitir que aluno corrija seus erros revendo suas respostas, o jogo possibilita a ele a descoberta de em que falhou ou teve sucesso e por que isso ocorreu. Essa consciência permite ao aluno compreender o próprio processo de aprendizagemdesenvolvendo a autonomia para continuar aprendendo. (SOUZA; 2013, p. 05).

Portanto, ao jogar, o estudante é estimulado a aprender, pois no intuito de vencer, ele acaba sendo impulsionado a analisar suas jogadas a fim de evitar o mínimo possível de erros. Com isso, ele constrói seu conhecimento ao levantar hipótese e avaliá-las compreendendo de forma natural os conceitos matemáticos.

Por fim, destacamos o que os autores das 22 comunicações científicas mapeadas concluíram ao finalizarem suas pesquisas. Todos eles afirmaram ter atingido o objetivo investigativo inicial do trabalho, afirmando que as práticas pedagógicas por meio de jogos, ou outros dispositivos lúdicos voltados ao ensino de Matemática, podem contribuir consideravelmente para o ensino e a aprendizagem de princípios e conhecimentos matemáticos. Silva, Pereira e Júnior (2019) recomendam a utilização de jogos matemáticos no Ensino Médio, pois para eles esse nível de ensino ainda apresenta carência com relação ao uso de novas metodologias de ensino. Indo na mão do que concluiu Nishihara (2016, p. 09) ao assegurar que "apesar de todas as potencialidades que os jogos oferecem inclusive para o ensino de matemática no Ensino Médio, ainda é possível notar uma resistência por parte de alguns professores em adotar tal metodologia".

Nesse sentido, sendo o professor o agente transformador da aprendizagem, Santos e Santos (2016, p. 08) apontam que “é necessário que haja, principalmente uma mudança na forma de educar, uma mudança que desperte no aluno o interesse e a motivação em aprender a Matemática, para que ele possa, assim, despertar o gosto pela mesma”; deixando evidente com isso a necessidade do planejamento das ações e da organização sistemática daquilo que será abordado em sala de aula com vista a atender às necessidades individuais e coletivas.

Contudo, algumas comunicações apontaram novas pesquisas na busca por metodologias inovadoras as quais possam “transformar as aulas de Matemática em ações que levem o aluno a transformar o presente para um futuro melhor” como afirmaram Sampaio e Chaves (2019, p.08).

CONSIDERAÇÃOES FINAIS

A pesquisa, ora apresentada, buscou compreender as concepções de ludicidade presentes nos trabalhos publicados nas 3 últimas edições do ENEM. Embora a grande maioria dessas comunicações científicas não tenha definido o “lúdico” ou os seus diferentes dispositivos, como o “jogo”, por exemplo, todas abordaram sobre a sua importância no uso dos jogos em salas de aulas para o ensino de Matemática, especificamente para o Ensino Médio; uma vez que, se tratando do ensino de Matemática, o uso de novas ferramentas e novas metodologias se faz necessárias e a utilização dos jogos nas salas de aulas vem se mostrando eficaz, como mostraram os estudos, alcançando o nosso objetivo inicial.

Nesse ínterim, é preciso atentar para a postura do professor ao assumir o papel de gestor, observador, orientador e incentivador da aprendizagem. Assim, ao lançar mão dos jogos para contribuir na construção do conhecimento do aluno e no processo do fazer matemática, o professor deve ter um bom planejamento a fim de alcançar seus objetivos, compreendendo as potencialidades e desafios dessa metodologia, sendo um gerenciador das situações apresentadas e na condução dos caminhos para que os alunos assimilem os conceitos estudados.

Foi possível concluir também que há ainda certa resistência de professores do Ensino Médio quando ao uso de dispositivos potencialmente lúdicos, por acharem que a faixa etária dos alunos não cabe o uso desse tipo de metodologia. Porém já vimos que o uso de jogos contribui de forma significativa por seu caráter desafiador e dinâmico para a aprendizagem dos alunos e que o jogo é algo que faz parte do ser humano, independente de sua idade.

Dessa forma, fica como sugestão de pesquisas futuras o desenvolvimento e vivência de jogos em turmas de Ensino Médio a fim de experimentar a verificar a sua eficácia, no que tange as questões envoltas a aprendizagem dos alunos por meio dos processos de desenvolvimento de estratégia, análise dos resultados com abordagem matemática e seus conceitos a partir do uso do lúdico. Portanto, finalizamos com o que diz Kishimoto (1997) afirmando que: “todo jogo é educativo em sua essência”. (apud GRANDO, 1995, p.66).

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Anne. **Ludicidade como instrumento pedagógico**. 2009. Disponível em:<http://www.cdof.com.br/recrea22.htm>. Acesso em: 05 de junho 2020.

ALVES, Thiago Feitosa; COSTA, Nyegirton Barreiros dos santos; PEREIRA, Lucília Batista Dantas. **Jogos no ensino da matemática financeira: Efici**ência e aplicabilidade do jogo Transações F**inanceiras**. 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/8358_4297_ID.pdf>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

BARBOSA, Helenice Lopes; CHACON, Hugo Silva; LOURENÇO, Emanuel Gomes. **O jogo Ludo para ensinar estatística no Ensino M**édio. 2019. Disponível em:<https://sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/3487/1055>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2020. Disponível em:<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 12 de outubro de 2021.

COSTA, Anne Gleisse Pimentel Carneiro. et. al. **O uso do jogo Campo Matemático como estratégia de ensino das operações matemáticas**. 2019.Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/1720/1014>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

FERNANDES, Rúbia Juliana Gomes; PINHEIRO, Nilcéia Aparecida Maciel; JUNIOR, Guataçara Santos. **Jogos numa perspectiva educativa: uma ferramenta pedagógica no processo de ensinar e aprender nas aulas de matemática.** 2013. Disponível em:**<**http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/817_333_ID.pdf>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Dicionário da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1980.

FLORET, Helder França. **Euclidean: O jogo da combinatória.** 2013. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1711_1281_ID.pdf> Acesso em: 12 de outubro 2021.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GRANDO, Regina Célia. O jogo e a matemática no contexto da sala de aula. São Paulo, SP: Paulus, 2004.

GROENWALD, C. L. O; TIMM, U. T. **Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula**. 2002. Disponível em:<https://www.somatematica.com.br/artigos/a1/> Acesso em: 20 de outubro 2021.

HUIZINGA, Johan. **Homo ludens: o jogo como elemento da cultura.** 5edição. São Paulo: Perspectiva, 2007.

KISHIMOTO, T. M. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. (Org). 2ª ed. São Paulo: Cortez, 1997

KISHIMOTO, Tizuco,M.(Org.).**Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 14 ed. São Paulo:Cortez,2011.

LARA, I. C. M. **Jogando como uma estratégia de ensino de 5ª a 8ª série**. In: ENCONTRO IBEROAMERICANODE COLETIVOS ESCOLARES E REDES DE PROFESSORES QUE FAZEMINVESTIGAÇÃO NA SUA ESCOLA, 4., Lajeado – RS. Anais eletrônico, 2005.

MAANEN, J. V. **Reclaiming qualitative methods for organizational research**: a preface. In:*Administrative Science Quaterly*, V.24, n.4, december, p.520-526, 1979.

MOURA, M. O. de.**O Jogo e a Construção do Conhecimento Matemático**. São Paulo, 1992. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf>Acesso em 17 de maio 2021.

NAVARRO, Érica Patrícia; MENDONÇA, Andreza; MENDES, Iran Abreu. **Construção de jogos como ferramenta de ensino e aprendizagem de matemática aplicada ao Ensino Técnico em Florestas**. 2019. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/2087/969>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

NISHIHARA, Andressa. **Jogos na educação matemática: Um olhar das pesquisas acadêmicas brasileiras para o Ensino M**édio**.** 2016. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5741_3942_ID.pdf>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

OLIVEIRA, Renato Leandro Lima de; MENDES, Elimara Barros Gumercindo; PINTO, Gisela Maria da Fonseca. **Utilização do jogo Uno como método alternativo de ensino de geometria**. 2019. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/2374/958>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife: SEE, 2012.

RAMOS, Pedro Henrique Conilh de Beyssac. **Suporte ao mapeamento sistemático: Um apoio à pesquisa bibliográfica**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas e Computação) – COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, p. 141.2016. Disponível em: <https://www.cos.ufrj.br/uploadfile/publicacao/2619.pdf>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

RICHARDSON, R. J. **Pesquisa social: métodos e técnicas**. São Paulo: Atlas, 1999.

SAMPAIO, Antônio Luiz; CHAVES, Sandra Maria. **Uso do jogo Quadrado Mágico no ensino e na aprendizagem da progressão aritmética e da matriz no Ensino Médio.**2019. Disponível em:**<**https://sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/1333/975>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

SANTOS, Tawana Telles Batista; SANTOS, Lilian Gleisia Alves dos. **Jogos no ensino de Probabilidade e Análise Combinatória: Relato de uma proposta metodológica no ensino médio**. 2016.Disponível em:<http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/8281_4154_ID.pdf>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

SILVA, Américo Junior Nunes.**Formação lúdica do futuro professor de matemática por meio do laboratório de ensino.** Dissertação de mestrado. Brasília, 2013. Disponível em:<https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/16611/1/2014_AmericoJuniorNunesdaSilva.pdf. Acesso em: 21 de novembro de 2021.

SILVA, Aparecida Francisco da; KODAMA, HeliaMatiko Yano. **Jogos no ensino de matemática**. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFBA, 2004.

SILVA, Raimunda Magalhães da. et al. **Estudos Qualitativos: Enfoques Teóricos e técnicas de Coletas de Informações.**Orgs. Sobral: Edições UVA, 2018. Disponível em:<https://portais.univasf.edu.br/medicina-pa/pesquisa/producao-cientifica/experiencias-qualitativas-ebook>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

SILVA, Uanderson Jurandir da; PEREIRA, Lucília Batista Dantas; JÚNIOR, Joás Mariano da Silva. **Utilização do jogo Uno das Potências como possibilitador de aprendizagem para estudantes do 2º ano do Ensino Médio**. 2019. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/eventos/index.php/enem/2019/paper/view/3504/836>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

SKOVSMOSE, O. **Educação crítica**: incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo: Cortez, 2007.

SMOLE, K. S. et al. **Cadernos do Mathema: jogos de matemática de 1º a 3º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

SOUZA , Adriane Eleutério. **Torre de Hanói: O jogo como recurso metodológico nas aulas de Matemática**. 2013. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1529_1752_ID.pdf>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

SOUZA, Adriane Eleutério; FILHO, Lealdino. **Potencialidades do jogo Civilization V: Para uma educação matemática crítica com enfoque cts1.** 2013.Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1529_523_ID.pdf>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

SOUZA, Victor Louis Rosa de; ALVES, Evanilson Landim; PEREIRA**, Dantas. Jogo Banco das Funções: Uma proposta didática para o processo de conceitualização de funções na educação básica**. 2016. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/8006_3950_ID.pdf>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

TROBIA, Isabelle Alves; TROBIA, José. **Jogos matemáticos: Uma tendência metodológica para ensino e aprendizagem de Matemática**. 2016. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4743_2260_ID.pdf>. Acesso em: 12 de outubro 2021.

CAPÍTULO 8

DISCALCULIA DO DESENVOLVIMENTO: CARACTERÍSTICAS, AVALIAÇÃO E INTERVENÇÃO

Data de aceite: 01/12/2021

Talita Neves Silva
Bolsista do Programa de pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Roberta D'Angela Menduni-Bortoloti
Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e coordenadora do Grupo Práticas Colaborativas em Matemática PRACOMAT-Discalculia

Isabel Cristina Lara Machado
Professora do Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemática e da Faculdade de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul e coordenadora do Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Discalculia e o Grupo de Estudos e Pesquisas sobre Etnomatemática

RESUMO: Este estudo aborda a Discalculia do Desenvolvimento (DD), em particular, é uma deficiência relacionada a uma dificuldade persistente, mutável e espectral em adquirir habilidades para aprendizagem matemática, adequadas à idade e não justificado por aspectos sócio-econômicos, didáticos e transtorno do desenvolvimento intelectual**.** O objetivo desta pesquisa é compreender os referenciais bibliográficos que subsidiam as pesquisas sobre a DD relacionados às habilidades envolvidas nos processos de avaliação e intervenção. Para isso, será realizado uma busca nos bancos de dados: Networked Digital Library of Theses and Dissertations (NDLTD) e Biblioteca Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), utilizando-se as palavras-chave: "Development Dyscalculia" OR "Dyscalculia" e "discalculia do desenvolvimento" OU "discalculia". Tem como método quantitativo de pesquisa, a Revisão Bibliográfica do tipo Revisão Sistemática de Literatura (RSL). A pergunta diretriz é: De que modo os referenciais bibliográficos utilizados em pesquisas nacionais e internacionais sobre a DD abordam as habilidades envolvidas nos processos de avaliação e intervenção? Para a análise de dados, utiliza-se o método Análise Textual Discursiva (ATD).

PALAVRAS-CHAVE: Discalculia do Desenvolvimento; Princípios Teóricos; Educação Matemática.

ABSTRACT: This study addresses Developmental Dyscalculia (DD), in particular, it is a disability related to a persistent, changeable and spectral difficulty in acquiring age-appropriate mathematical learning skills and not justified by socioeconomic, didactic and developmental disorders. intellectual. The objective of this research is to understand the bibliographic references that support research on DD related to the skills involved in the assessment and intervention processes. For this, a search will be carried out in the following databases: Networked Digital Library of Theses and Dissertations (NDLTD) and Brazilian Library of Theses and Dissertations (BDTD), using the keywords: "Development Dyscalculia" OR "Dyscalculia"

and “developmental dyscalculia” OR “dyscalculia”. Its quantitative research method is the Bibliographic Review of the Systematic Literature Review (RSL) type. The guiding question is: How do the bibliographic references used in national and international research on DD address the skills involved in the assessment and intervention processes? For data analysis, the Discursive Textual Analysis (ATD) method is used.
KEYWORDS: Developmental Dyscalculia; Theoretical Principles; Mathematics Education.

1 I INTRODUÇÃO

As nomenclaturas utilizadas no campo educacional e acadêmico para a Discalculia do Desenvolvimento não são consensuais. Este estudo inicia-se com a apresentação da terminologia pelos manuais, utilizados mundialmente e que servem como modelo de classificação para o diagnóstico da DD, destacam-se: Classificação Internacional de Doenças (CID-11), proposto pela Organização Mundial da Saúde (OMS, 2019) e o Manual Diagnóstico e Estatístico dos Transtornos Mentais, proposto pela Associação Psiquiátrica Americana (APA, 2013).

O CID 11 (OMS, 2019), diferencia-se a palavra Discalculia e Discalculia do Desenvolvimento. A discalculia, é considerada como uma dificuldade em habilidade de cálculo matemático não associada ao desenvolvimento, sendo adquirida e o manual utiliza-se o seguinte código: MB4B.5. Enquanto, a discalculia do desenvolvimento, é definida como uma deficiência em matemática, sendo persistente e associada ao aprendizado de habilidades da matemática e aritmética, apresentando o seguinte código de classificação no manual: 6A03.2.

O DSM-V (APA, 2013), utiliza-se como nota de rodapé a terminologia discalculia, como nomenclatura genérica. Considera-se a discalculia como um transtorno específico da aprendizagem com prejuízo na matemática e utiliza o seguinte código no manual: 315.1.

A DD consiste em um transtorno de aprendizagem de natureza persistente e espectral (devido a sua heterogeneidade cognitiva) e influenciada por uma interação de fatores intrínsecos (genéticos; emocionais; precursores cognitivos e linguísticos), relacionados a habilidade matemática e não-matemática que não são explicados por uma didática inadequada, um transtorno do desenvolvimento intelectual e deficiências sensoriais (não corrigidas), comprometimento neurológico e transtorno mental.

A aprendizagem da Matemática e a DD revelam-se como um estudo heterogêneo, pois diferentes fatores encontram-se associados (KAUFMANN et al., 2003). Nesse sentido, as características subjacentes da DD perpassam por uma rede heterogênea de fatores, sejam eles: biológicos (SHALEV, 2007); socioeconômicos (SANTOS et al., 2016); linguísticos (GEARY, 2000); emocionais e comportamentais (AUERBACH; GROSS-TSUR; MANOR; SHALEV, 2008; LIEBERT; MORRIS, 1967); ambientais (DELLATOLAS et al., 2000); pedagógicos (NEVES; BORUCHOVITCH, 2004), por exemplo.

No Brasil, a DD é pesquisada partir de diferentes áreas, dentre elas destacam-se: Medicina (BASTOS et al., 2016); Fonoaudiologia (DIAS; PEREIRA; BORSEL,2011); Psicologia (NASCIMENTO, 2019; RIBEIRO, 2013); Educação (BERNARDI, 2006; VILLAR, 2017); Educação Matemática (AVILA, 2017; PIMENTEL, 2015); Neurociências (JÚLIO-COSTA, 2018); e, Design (CEZAROTTO, 2016). Nesses estudos, diferentes terminologias são adotados. Contudo, percebe-se que não é apenas uma questão de escolha para os termos e sim, de posicionamentos advindos de perspectivas e constructos teóricos que orientam concepções de pesquisadores e formas de discutirem a temática

Nesse sentido, traçou-se como objetivo geral da pesquisa em andamento: “Compreender os referenciais bibliográficos que subsidiam as pesquisas sobre a DD relacionados às habilidades envolvidas nos processos de avaliação e intervenção”. No intento de responder ao seguinte problema de pesquisa: “De que modo os referencias bibliográficos utilizados em pesquisas nacionais e internacionais sobre a DD abordam as habilidades envolvidas no processo de avaliação e intervenção?”. Para isso, delineou-se os seguintes objetivos específicos:

1. Reconhecer de que modo pesquisas nacionais e internacionais definem discalculia do desenvolvimento;
2. Categorizar habilidades envolvidas no processo de avaliação da DD;
3. Categorizar habilidades envolvidas no processo de intervenção da DD;
4. Apresentar as implicações dos referenciais bibliográficos sobre DD, avaliação e intervenção utilizados nas produções selecionadas em suas abordagens sobre habilidades.

Nesse contexto, a apresentação das habilidades envolvidas nos processos de avaliação e intervenção da DD, nos seus respectivos referenciais bibliográficos poderá ser uma contribuição para o Ensino. As evidências das possíveis habilidades envolvidas, poderá ser uma das estratégias de Ensino para o professor construir planos de intervenção específicos para os escolares que apresentam a DD.

2 | DISCALCULIA DO DESENVOLVIMENTO

De acordo com Bastos et al. (2016) não há estudos sobre a prevalência da DD com adolescentes brasileiros, mas 7,8% das crianças brasileiras apresentam DD e para a APA (2013) a prevalência da DD em crianças em idade escolar são de 15%. A DD é caracterizada pela seguinte demanda: a) dificuldade no processamento de números e quantidade - a conexão entre números e quantidades, a relação entre números e quantidades e dificuldade na contagem; b) dificuldades com operações aritméticas básicas e com outras tarefas matemáticas – regras de computação não são entendidas, déficit na recuperação de fatos aritméticos, falta de transição da computação para as estratégias da contagem, as dificuldades agravam com o aumento da complexidade. É importante frisar, que a contagem nos dedos só está relacionada com a DD, desde que exista variedade, persistência e frequência. (HABERSTROH; SCHULTE-KÖRNE, 2019). O quadro abaixo apresenta possíveis características da DD.

Discalculia do Desenvolvimento			
Classificação	**Leve**-Dificuldade em um ou dois domínios acadêmicos. Permite o escolar ser capaz de compensar ou funcionar bem.	**Moderada**-Dificuldade em um ou mais domínios acadêmicos. Improvável que o escolar se torne proficiente.	**Grave** - Dificuldade em vários domínios acadêmicos. Improvável que o escolar aprenda as habilidades sem um ensino individualizado
Etiologia	Multifatorial (genéticos; epigenéticos- interação dos genes com fenótipo; cognitivos; sociais; e culturais)		
Déficts cognitivos	Memória de trabalho; habilidades visuoespaciais; atenção; consciência fonológica; senso numérico.		
Comorbidades	Transtorno de Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH); Dislexia; Epilepsia; Síndrome de Turner; Internos ao espectro de desordens (Ansiedade Matemática; Ansiedade de Teste; Fobia Escolar; Transtornos afetivos; Depressão Maior); Externos ao espectro de desordens (Comportamento agressivo; Transtorno de Conduta Social; Comportamento de quebra regras e Transtorno Opositor Desafiador)		
Critérios de exclusão	Ensino inadequado; deficiência auditiva; deficiência intelectual; deficiência visual; transtornos neurológicos (epilepsia, paralisia cerebral, entre outros) ou doença anterior; síndromes genéticas e outros fatores atribuídos ao baixo peso ao nascer e parto prematuro; oportunidades inadequadas de aprendizado (pobreza, relações familiares, transtorno de aprendizagem na família); interrupção prolongada da escola.		
Diferenciação	• Discalculia verbal, practognóstica, léxica, ortográfica, ideognóstica e operacional. (KOSC, 1974) • Discalculia Isolada - Défict principal: conceito de quantidade e número (regiões parietais, incluindo IPS) (KAUFMANN; VON ASTER, 2012); • Discalculia com Transtorno Associado- Comorbididades com dislexia: classificação de grafema / fome (regiões parietais, incluindo girus angulares) com TDAH: funções executivas (regiões pré-frontais) (KAUFMANN; VON ASTER, 2012); • Problemas associados, por exemplo, ansiedade matemática. (KAUFMANN; VON ASTER, 2012); • Discalculia Primário (déficits no funcionamento numérico em níveis comportamentais, cognitivos, neuropsicólogico e neuronal) e discalculia secundária (déficits numéricos causados por déficit não numérico, como o TDAH. (KAUFMANN et al., 2013; SANTOS, 2017).		

Quadro1: Características da DD.

Fonte: Elaborado pela primeira autora a partir de Kosc, (1974), APA, (2013), Kaufmann; Aster (2012); Butterworfh (2005), Kaufmann et al., (2013), Haberstroh; Schulte-Körne, (2019), Santos (2017); Kaufmann et al. (2013).

2.1 Avaliação da DD

Infelizmente, programas baseados em evidências e validados cientificamente para a identificação de crianças que apresentam DD e dificuldade matemática são poucos. Faz-se necessário no processo de avaliação a inclusão de testes de inteligência e memória de trabalho, bem como instrumentos avaliativos padronizados sobre habilidades matemáticas específicas (GEARY, 2012).

Segundo Haberstroh; Schulte-Körne, (2019) o diagnóstico na perspectiva dos autores ou a identificação da DD é indicado nos casos em que a criança ou o adulto apresente um desempenho abaixo da média no teste de desempenho matemático, médio em leitura e escrita e baseia-se nas seguintes informações: história individual e psicossocial (dificuldades pré-escolares com os conceitos de número e quantidade); resultados de testes psicológicos (avaliação da inteligência); neurocognitivos (memória de trabalho, processamento visuoespacial, consciência fonêmica, atenção); avaliação clínica (exame neurológico, teste de visão e audição).

A avaliação da DD deve acontecer por uma equipe multidisciplinar (em decorrência de comorbidades, por exemplo) e é necessário que os educadores conheçam o que é a DD para realizar uma inclusão satisfatória (AVILA et al., 2020). Contudo, no Brasil não existe até o momento nenhum instrumento específico para o diagnóstico da DD, testes padronizados de alta qualidade ou programas de aprendizagem iniciados em crianças e adolescentes a partir da quinta série e para adultos. Possíveis instrumentos avaliativos podem ser utilizados para um processo de avaliação da DD, a partir da realidade brasileira, após ser eliminado a suspeita de deficiências sensororias (não corrigida) por profissionais responsáveis, para uma compreensão relacionada ao desenvolvimento destacam-se os seguintes instrumentos:

1.**Anamnese:** A anamnese é uma entrevista clínica utilizada para investigar o histórico de vida do público-alvo, relacionado ao desenvolvimento. Considera os aspectos associados a aprendizagem, emocional, sóciocultural, pedagógico, familiar, econômico e biológico.

2.Developmental Neuropsychological Assessment/Avaliação Neuropsicólogica do Desenvolvimento **(NEPSI II)-** (Autor: Marit Korkman, Ursula Kirk e Sally Kemp, 2019. Trad.: Argollo; Shayer; Durán; Silva, (2020), é um instrumento neuropsicólogico que avalia o desenvolvimento de 3 a 16 anos as seguintes habilidades: sensório-motor, linguagem, processamento visuoespacial, memória e aprendizagem, atenção/ funções executivas e percepção social. A indicação deste instrumento para a avaliação da DD, é que poderá oferecer uma avaliação de diferentes habilidades que interferem na aprendizagem matemática.

3.Escala Wescheler Abreviada de Inteligência - **WASI** (Autor: David Wechsler. Trad.: Clarissa Marceli Trentini, Denise Balem Yates, Vanessa Stumpf Heck, 2014). A escala de inteligência é utilizada para avaliar o rendimento intelectual de 6 a 89 anos. O rendimento sendo inferior a 70, é sugerido uma avaliação abrangente para o Transtorno do Desenvolvimento Intelectual, este transtorno é excludente para o diagnóstico da DD;

Quanto aos instrumentos relacionados a habilidade matemática, destacam-se os seguintes:

1.Teste Neuropsicólogico infantil - adaptado de Manga e Ramos (1991), seu objetivo é identificar possíveis deficiências na construção do número e operações aritméticas. Esse instrumento contribui para avaliar habilidades matemáticas, como a construção do número influencia na aprendizagem da aritmética, poderá analisar se o escolar apresenta esta dificuldade;

2.Teste Piloto de Matemática (PIMENTEL, 2015), avalia as habilidades matemáticas a partir das categorias definidas por Kosc (1974);

3.Teste Transcodificação Numérica (MOURA ET AL., 2013), avalia a representa numérica e escrita dos números em crianças, adolescente e adulto.

4.Tarefa de Comparação de Magnitude Simbólica (COSTA ET AL., 2011), investiga o senso numérico;

5.Teste de Conhecimento Numérico (OKAMOTO; CASE, 1996) adaptado por Corso (2008), avalia a contagem, operações e cálculo;

Ao que diz respeito aos aspectos emocionais, comportamentais, pedagógicos e sociais, podem ser utilizados os seguintes instrumentos:

1.Inventário de Atitudes Ante As Matemáticas - IAM (FEIO, 2008), tem como objetivo avaliar a motivação associada à atitude ou de atribuição causal realizada frente a matemática e pode ser aplicado em criança, adolescente e adulto;

2.Escala de Ansiedade Matemática – EAM, aplicado em criança (Carmo, 2008) e Questionário de Ansiedade Matemática- QAM, aplicado em adolescente e adulto (Wood et al., 2012; Haase et al., 2012);

3.Questionário de Auto-estima e auto-imagem (adaptado Stobäus, 1983), avalia a auto-estima e auto-imagem em crianças e adolescentes;

4.Escala para avaliação do Status Econômico. (Associação Brasileira de Empresa de Pesquisa, 2018-ABEP) – Seu objetivo é estimar o consumo das pessoas, classificando a condição econômica;

5.Entrevista com professores- O objetivo da entrevista é compreender o processo de formação do professor com o ensino da matemática, estratégias pedagógicas utilizadas e as observações sobre o escolar;

6.Escala de Stress Infantil- ESI (LUCARELLI; LIPP, 2005), o seu objetivo é avaliar o stress infantil (reações físicas, psicológicas, psicofisiológicas e depressivas) na faixa etária entre 6 a 14 anos.

Intervenção à DD

A intervenção da DD envolve uma participação multidimensional com psicólogos, neuropsicólogos, professor de matemática, pedagogo, fonoaudiólogo, pediatras, neuropediatra e outros, quando fizer necessário. De acordo com Kaufmann (et al., 2003) é indicado que as intervenções sejam personalizadas e que valorize em particular habilidades e dificuldades cognitivas, propondo intervenções nas competências numéricas básicas, conhecimento conceitual e processual e recuperação de fatos aritméticos. Para Butterworth, Varma e Laurillard (2011), os jogos manipuláveis e materiais didáticos (como Cuisenaire hastes, trilhas numéricas e cartas de baralho) tem sido utilizados por professores com alunos com necessidades educativas. No Brasil, a pesquisa de mestrado de Silva (2019), intitulada “Dificuldades e potencialidades de um estudante do 5° ano com discalculia: Neurociências, materiais didáticos e provas piagetianas”, utilizou-se da escala cuisenaire e provas piagetinas, foi contributivo para o escolar com o transtorno de aprendizagem.

Para tanto, as intervenções na DD abrangem vários recursos possíveis de desenvolvimento na aprendizagem matemática. Para a aprendizagem específica (conteúdos matemáticos), destacam-se os jogos manipuláveis, tecnologias digitais, materiais didáticos, metodologias de ensino e uma intervenção delineada por um programa interventivo que se baseia em um conjunto de informações possíveis de serem modificadas.

3 I PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos metodológicos utilizados para realização desta pesquisa. Assim, pontua como tipo de pesquisa, a bibliográfica e utiliza o método Revisão Sistemática de Literatura (RSL), proposto por Pickering e Bryrne (2013), especificando 15 etapas para a construção da pesquisa, a partir dos seguintes bancos: Biblioteca Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e Networked Didital Library of Theses and Dissertations (NDLTD). Enquanto a análise dos resultados será desenvolvida, de acordo a Análise Textual Discursiva (ATD), postulada por Moraes e Galiazzi (2016).

Natureza	***Abordagem***	***Objetivos***	***Procedimento***
Básica- Sem aplicação prática	***Qualitativa-*** Busca atribuir significados	***Exploratória-*** Busca conhecer mais sobre o assunto	***Pesquisa bibliográfica*** – A partir de material já publicado (BDTD e NDLTD)
			Estudo analítico- análise conduzida com base em parâmetros específicos e bem definidos (Pickering e Bryrne, 2013)

Quadro 2: Visão geral da pesquisa.

4 I CONSIDERAÇÕES

Desse modo, os estudos sobre a DD não têm sido integrada nas diferentes áreas (DOWKER, 2017) e esta proposta de pesquisa é uma tentativa de compreender as pesquisas realizadas com um olhar para os seus referenciais bibliográficos. Ao corroborar com Kranz Healy (2011), faz-se necessário entender a interdependência entre os fatores individuais, sociais e culturais no desenvolvimento do sujeito e das práticas matemáticas, nesta perspectiva este estudo irá tentar apresentar as diferentes habilidades envolvidas no processo de aprendizagem dos escolares que apresentam DD, contribuindo para intervenções tanto pedagógicas quanto clínicas.

REFERÊNCIAS

AMERICAN PSYCHIATRIC ASSOCIATION (2013). **Manual diagnóstico e estatístico de transtornos mentais**, DSM-V (5ª ed.). Arlington.

AVILA, L. A. B.; LARA, I. C. M.; LIMA, V. M. R. **Intervenções psicopedagógicas e Discalculia do Desenvolvimento: uma Revisão Sistemática da Literatura.** Revista Educação Especial, v. 32, 2019-Publicação Contínua. http://dx.doi.org/10.5902/1984686X372223.

AVILA, L. A. B. Avaliação e Intervenções Psicopedagógicas em Crianças com índicios de Discalculia. 28/03/2017 279 f. Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Instituição de Ensino: PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL, Porto Alegre Biblioteca Depositária: PUCRS

AVILA, L. A. LARA, I. C. M. **A transcodificação numérica em crianças com indícios de discalculia do desenvolvimento.** Alexandria: R. Educ. Ci. Tec., Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. ISSN 1982-5153DOI: https://doi.org/10.5007/1982-5153.2020v13n1p29.

BERNARDI, J. Discalculia. O que é? Como intervir? Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

AUERBACH G. J; GROSS-TSUR V.; ORLY MANOR,O. **Emotional and Behavioral Characteristics Over a Six-Year Period in Youths With Persistent and Nonpersistent Dyscalculia.** First Published June 1, 2008 Research Article Find in PubMedhttps://doi.org/10.1177/0022219408315637

BUTTERWORTH, B.; VARMA, S.; LAURILLARD, D**. Dyscalculia: from brain to education.** Science. 2011;332:1049–1053

BASTOS, J. A., CECATO, A. M. T., MARTINS, M. R. I., GRECCA, K. R. R., &

PIERINI, R. (2016). **The prevalence of developmental dyscalculia in Brazilian public school system.** Arquivos de neuro-psiquiatria, 74(3), 201-206.

BRUANDET, M.; MOLKO, N.; COHEN, L.; DEHAENE, S**. Uma caracterização cognitiva da discalculia na síndrome de Turner.** Neuropsychologia. 2004; 42 : 288– 298. doi: 10.1016 / j.neuropsychologia.2003.08.007.

BROWN K. A.; PARIKH S.; PATEL, R. D. **Understanding basic concepts of developmental diagnosis in children**. Transl Pediatr. 2020 Feb; 9(Suppl 1): S9–S22. doi: 10.21037/tp.2019.11.04

DELLATOLAS, G.; VON ASTER, M.; BRAGA, L.W.; MEIER, M.; DELOCHE, G. (2000). **Number processing and mental calculation in school children aged 7 to 10 years: A transcultural comparison**. *European Child and Adolescent Psychiatry*, *9*(2), 102-110.

ELIEZ, S.; BLASEY, C. M.; MENON, V.; BRANCO, C.D.; SCHMITT, J.E.; REISS A. **Estudo funcional da imagem cerebral das habilidades de raciocínio matemático na síndrome velocardiofacial** (del22q11.2) Genet Med. 2001; 3 : 49–55. Behav Brain

Funct . 2006; 2: 20.Publicado online em 30 de maio de 2006. doi: 10.1186 / 1744-9081-2- 20.

FUCHS, L. S.; SHARON, V. S. **Responsiveness-to-Intervention: A Decade Later**. Published in final edited form as: J Learn Disabil. 2012 May; 45(3): 195– 203.doi: 10.1177/0022219412442150

FUCHS, L. S.; FUCHS, D.; COMPTON, D. L. **The early prevention of mathematics difficulty: Its power and limitations**. Journal of Learning Disabilities. 2012;45:257– 269. [Published online 2012 Apr 6. doi: 10.1177/0022219412442167.

KAUFMANN, L.; VON ASTER, M. **The diagnosis and management of dyscalculia**. Dtsch Arztebl Int. 2012;109:767–778.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2007

GEARY, D.C. **Fom infancy to adulthood: the development of numerical abilities**. Europe Child & Adolescent Psychiatry, Columbia, v. 1, n. 9, p.11-16, jan. 2000.

HAASE,V,G.; MOURA, R.; PINHEIRO-CHAGAS P.; WOOD; G. M**. Discalculia e dislexia: semelhança epidemiológica e diversidade de mecanismos neurocognitivos.** (2011) In book: Dislexia: novos temas, novas perspectivas, Publisher: Rio de Janeiro: Wak, Editors: L. M. Alves, R. Mousinho, S. A Cappelini, pp.257-282

HABERSTROH, S.; SCHULTE-KÖRNE, G. **The Diagnosis and Treatment of Dyscalculia.** Dtsch Arztebl Int. 2019 Feb; 116(7): 107–114. Published online 2019 Feb 15. Doi: 10.3238/arztebl.2019.0107.

IUCULANO, T. et al. **Cognitive tutoring induces widespread neuroplasticity and remediates brain function in children with mathematical learning disabilities.** Nature communications, v. 6, p. 8453, 2015.

LANDERL, K.; BEVAN, A.; BUTTERWORTH, B**. Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8-9-year-old students**. Cognition. 2004 Sep;93(2):99- 125.doi: 10.1016/j. cognition.2003.11.004.

LIEBERT, R. M.; MORRIS, L. W. (1967). **Cognitive and emotional components of test anxiety: A distinction and some initial data.** Psychological Reports, 20, 975-978. doi:10.2466/pr0.1967.20.3.975.

MENDUNI-BORTOLOTI R. D'A.; PEIXOTO J. L. B.; SILVA, T.N..**Discalculia do Desenvolvimento: uma proposta de rastreio no campo educacional**. n. 76 (2020): Boletim Gepem 76 - Inclusão e Educação Matemática.

MOLL, K.; KUNZE, S.; NEUHOFF, N.; BRUDER, J.; SCHULTE-KÖRNE, G**. Specific learning disorder: prevalence and gender differences**. PLoS One. 2014;9:1–8 KRINZINGER, H.; KAUFMANN, L. **Rechenangst und Rechenleistung.** Sprache, Stimme, Gehör. 2006;30:160–164.

KOSC, L. **Developmental dyscalculia**. **Journal of Learning Disabilities,** v. 7, n. 1, p. 164- 177, 1974.

KRANZ, C. R.;HEALY, L. **Pesquisas sobre discalculia no Brasil: uma reflexão a partir da perspectiva histórico-cultural. REMATEC. Revista de Matemática, Ensino e Cultura** (UFRN), v. 13, p. 58-81, 2013.

MINAYO, M. C. S. (org.). **Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade**. 18 ed. Petrópolis: Vozes, 2001

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C.**Análise Textual Discursiva**. 2. Ed. Ver. – Ijuí: Ed. Unijuí, 2011.

ORGANIZAÇÃO MUNDIAL DA SAÚDE. **Classificação Internacional de Doenças e problemas relacionados à Saúde (CID**.11): descrições clínicas e diretrizes diagnósticas.2019.

PICKERING, C.; BYRNE, J. **The benefits of publishing systematic quantitative literature reviews for PhD candidates and other early career researchers**. Higher Education Research and Development, v. 33, n. 3, 534-548, 2013. December 2013 DOI: 10.1080/07294360.2013.841651

PARSONS, S.; BYNNER, J. **Does numeracy matter more?** London: NRDC, 2005. RIVERA, S. M.; MENON, V.; BRANCO, C.D.; GLASER. B; REISS, A.L. **A ativação cerebral funcional durante o processamento aritmético em mulheres com síndrome do X Frágil é útil para expressão da proteína FMR1**. Hum Brain Mapp. 2002; 16 : 206- 218. doi: 10.1002 / hbm.10048.

SKAGERLUNDK.;TRÄFFU.NumberProcessingandHeterogeneity**of** Developmental Dyscalculia: Subtypes With Different Cognitive Profiles and Deficits. . Jan-Feb 2016;49(1):36-50. doi: 10.1177/0022219414522707. Epub 2014 Mar 5.

THIELE, A. L.; LARA, I. M. **A formação Continuada e suas Implicações na Compreensão da Discalculia.** Revista Signos, 2017.

SHALEV, R. S. (2007). **Prevalence of developmental dyscalculia**. In D. B. Berch & M. M. Mazzocco (Eds.), Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities (p. 49–60). Paul H. Brookes Publishing.

SHALEV, R. S.; VON ASTER, M. G. (2008). **Identification, classification, and prevalence of developmental dyscalculia. Encyclopedia of Language and Literacy Development** (pp. 1-9). London, ON: Canadian Language and Literacy Research Network. Retirado em 05/12/2008, de http:// www.literacyencyclopedia.ca/pdfs/ topic.php?topId=253.

SANTOS, F. H. et al**. Cognição Numérica: Contribuições à Pesquisa Clínica**. In: PRADO, P. S. T. do, CARMO, J. dos S. (Org.). Diálogos sobre ensino-aprendizagem da matemática. Abordagens pedagógica e neuropsicológica. São Paulo. Cultura Acadêmica. 2016. P.63-91

WILSON, A. J. et al. **Principles underlying the design of "the number race", an adaptive computer game for remediaton of dyscalculia**. Behavioral and Brain Functions,2 (1), 19, 2006.

WAN, C. Y; SCHAULG, G. **Music Marking as a Tool for Promoting Brain Plasticitty acrossthe Life Span.** The Neuroscientist,v. 16, n.5, p.566-577, 2010.

CAPÍTULO 9

ESTUDO QUANTITATIVO DO DESEMPENHO DISCENTE ATRAVÉS DO PROJETO PRÉ-CALOURO E NIVELAMENTO DA ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA EST/UEA

Data de aceite: 01/12/2021
Data de submissão: 28/10/2021

Elainne Ladislau Ferreira Pereira
Universidade do Estado do Amazonas - UEA, Ciclo básico de Engenharia - EST
Manaus - Amazonas
https://orcid.org/0000-0002-6738-4593

RESUMO: Este projeto visa, através de estudo quantitativo, identificar o nível do desempenho discente através de projetos de desenvolvimento proporcionados e fomentados pela Universidade do Estado do Amazonas. Muitos dos discentes dos cursos de Engenharia têm certas dificuldades que ao longo do tempo faz aumentar a evasão e se obter um alto índice de reprovações nas disciplinas que demandam cálculo, a saber, nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear e Física. Diante das deficiências advindas do ensino médio, tal projeto recepciona os ingressantes com o curso de nivelamento contemplando assuntos como: Conjuntos numéricos, Números Reais e Operações Elementares, Equações e Inequações, Funções de uma variável real, Noções de Trigonometria e Tópicos de Física Básica. A análise foi feita através de um recorte contendo 39 testes escolhidos aleatoriamente, com recursos básicos da Estatísticas com o objetivo de verificar quais as principais deficiências que nossos ingressantes chegam até a Universidade. Os testes foram feitos com nível crescente de dificuldades, com questões diretas e dissertativas. Além disso, houve um ‘’acompanhamento’’ das turmas das Engenharias por professores que fazem parte do projeto, a fim de inspecionar o desempenho e indicação de orientações individuais através de agendamento ou mesmo de indicação aos projetos de monitoria das disciplinas em curso e, ao final, mesmo aos que apresentavam um bom desempenho nas resoluções feitas em sala e pelo menos 75% de frequência na disciplina e que não conseguiram alcançar a média, o professor os indicava a fazer o chamado PROVÃO, o qual era uma prova com questões objetivas a cerca de todo o conteúdo ministrado em sala de aula e feito pela equipe técnica de docentes do projeto, e àqueles que alcançassem 60% de acertos teria sua devida aprovação. Tais medidas só puderam ser avaliadas por estarem sendo assistidos por professores orientadores do Projeto.

PALAVRAS-CHAVE: Desempenho discente; Matemática; Projetos Extra-curriculares.

QUANTITATIVE STUDY OF STUDENT PERFORMANCE THROUGH THE PRE-COURSE AND GRADING PROJECT AT THE EST/UEA HIGHER SCHOOL OF TECHNOLOGY

ABSTRACT: This project aims, through a quantitative study, to identify the level of student performance through development projects provided and promoted by the University of the State of Amazonas. Many of the students in Engineering courses have certain difficulties that, over time, increase evasion and achieve a high rate of failure in subjects that require calculus, namely, in the subjects of Differential and Integral

Calculus, Linear Algebra and Physics. Given the deficiencies arising from high school, this project welcomes freshmen with the leveling course covering subjects such as: Numerical Sets, Real Numbers and Elementary Operations, Equations and Inequations, Functions of a Real Variable, Notions of Trigonometry and Topics in Basic Physics. The analysis was made through a cut containing 39 tests chosen randomly, with basic resources of Statistics in order to verify which are the main deficiencies that our freshmen arrive at the University. The tests were made with an increasing level of difficulty, with direct and essay questions. In addition, there was a ''follow-up'' of the Engineering classes by professors who are part of the project, in order to inspect the performance and indication of individual orientations through scheduling or even indication to the monitoring projects of the subjects in progress and, at the end, even those who had a good performance in the resolutions made in class and at least 75% attendance in the discipline and who failed to reach the average, the teacher indicated them to take the so-called PROVÃO, which was a test with objective questions about all the content taught in the classroom and made by the project's technical team of teachers, and those who reached 60% of correct answers would have its due approval. Such measures could only be evaluated because they were being assisted by the Project's guiding professors.
KEYWORDS: Student performance; Math; Extra-curricular projects.

1 I INTRODUÇÃO

Este trabalho foi realizado entre os anos de 2018 a 2020 com os alunos ingressantes em cada respectivo ano e contou com uma equipe técnica de docentes de Matemática e Física do Ciclo Básico do Cursos de Engenharias e Tecnologias da Escola Superior de Tecnologia - EST, a saber, Mecânica, Civil, Elétrica, Eletrônica, Controle e Automação, Meteorologia e Licenciatura em Computação. O curso de nivelamento foi amplamente divulgado nos canais de mídia do site e outros meios de comunicação e a inscrição feita por meio de formulários Google, com perguntas sobre qual tipo de Escola frequentou, renda familiar e curso escolhido a fim de detectar qual o público a ser atendido. Após as formações de ensalamento com até 25 alunos, foi determinado os turnos e professores responsáveis por ministrar o conteúdo programático do Nivelamento: Conjuntos numéricos, Números Reais e Operações Elementares, Equações e Inequações, Funções de uma variável real e Noções de Trigonometria, com aulas expositivas presenciais, resolução de listas de exercícios e aplicação de testes de verificação e Avaliação Diagnóstica. Tais conteúdos foram selecionados devido à uma vivência de dificuldades que os calouros chegam, tais deficiências causam o grande número de reprovações nas disciplinas iniciais e provocam as desistências dos Cursos escolhidos. Os testes foram feitos com nível crescente de dificuldades e com questões diretas e outras com necessidade de resolução mais elaborada. Além disso, houve um ''acompanhamento'' das turmas das Engenharias por professores que fazem parte do projeto, a fim de inspecionar o desempenho e indicação de orientações individuais através de agendamento ou mesmo de indicação aos projetos de monitoria das disciplinas em curso e, ao final, mesmo aos que apresentavam um bom desempenho nas resoluções feitas em sala e com pelo menos 75% de frequência na disciplina e que não conseguiram alcançar a média, o professor os indicavam a fazer o chamado PROVÃO, o qual era uma prova com questões objetivas a cerca de todo o conteúdo ministrado em sala de aula e feito pela equipe técnica de docentes do projeto, e àqueles que alcançassem 60% de acertos teria sua devida aprovação. Claramente tais medidas só puderam ser avaliadas por estarem sendo assistidas por professores orientadores do Projeto. Assim o objetivo central deste trabalho foi de verificar de que forma os projetos como os de Nivelamento e Pré-calouro ajudam a diminuir a evasão nos cursos de Engenharia e Tecnologia da EST e também avaliar quais os principais assuntos básicos os ingressantes têm mais dificuldade.

2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O que esperamos da Educação desde o Ensino Fundamental é que os alunos possam compreender o mundo em que vivem e que façam parte de uma sociedade, e em relação à Matemática, entendemos que o aprendiz possa saber fazer as quatro operações básicas que são Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão, e mais as operações de potência e radiciação. Porém quando chega na parte da operacionalização das expressões numéricas, começa-se um trabalho que muitas das vezes não se consegue passar as etapas corretas e causam problemas que perpassam o estudo dos ingressantes à Universidade. A matemática é regida por regras e na execução de cálculos temos que ter essa sequência de passos como numa receita para fazer bolos. Um problema que aparentemente passa desapercebido no Ensino Fundamental, se arrasta para o Ensino Médio e que comumente temos vivenciado os alunos sofrerem com esta etapa mal solucionada.

Neste sentido para (Castejon, M.;Rosa, R., 2017) a maior preocupação da maioria dos professores restringe-se a cumprir o programa, deixando lacunas no ensino-aprendizagem e é consenso que a disciplina Matemática é difícil e complexa tanto para se aprender quanto se ensinar.

Em (Miguel, 2015) constatou-se que nas séries iniciais as crianças geralmente gostam da matemática, porém esta afinidade vai declinando ao longo dos anos, passando muitas vezes a aversão.

É comum ouvirmos em sala de aula dos ingressantes de Cursos de Engenharia e Tecnologia as perguntas: Pra quê é necessário saber fazer essas contas se hoje em dia temos calculadoras e super computadores que fazem isso automaticamente? Ou qual a aplicação da Matemática dentro dos Cursos de Engenharias e Tecnologias?

Quando falamos em era digital, parece que estamos excluindo um mundo analógico. E, enquanto estamos adentrando os espaços de técnicas numéricas, a constituição de um novo espaço não implica na eliminação dos espaços previamente existentes. E, quando falamos de educação, esta era concedida a poucos e nos perguntamos como é possível elevar o nível de ensino se as gerações anteriores não tiveram acesso a esses saberes?

(Castejon, M.;Rosa, R., 2017).

O grande da questão é que para alcançarmos grandes feitos precisamos de uma matemática mais rebuscada como por exemplo na Engenharia Eletrônica com o uso de Equações Diferenciais Ordinárias para a resolução de Problemas envolvendo Circuitos Digitais, ou na Engenharia Civil que necessita de mecanismos mais simples da Matemática como por exemplo, no Cálculo Estrutural, saber calcular a quantidade de tijolos para se construir uma parede ou colocar cerâmica num determinado espaço até de Otimização para verificar a flexão de uma viga ou laje. Ou seja, a matemática está presente em todas as Engenharias que vai desde a matemática básica, a qual precisa das 4 operações fundamentais até o uso de Transformadas de Laplace, Transformadas de Fourier, Diagonalização de Operadores entre outras ferramentas pertinentes à Matemática e comumente utilizada.

3 | PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho foi realizado na Universidade do Estado do Amazonas, na Escola Superior de Tecnologia com as turmas ingressantes das Engenharias da Escola Superior de Tecnologia e contou aulas presenciais com conteúdos ministrados de: Conjuntos numéricos, Números Reais e Operações Elementares, Equações e Inequações, Funções de uma variável real, Noções de Trigonometria e Tópicos de Física Básica, onde tanto no início houve uma aplicação de testes de verificação para se examinar as deficiências em cada assunto e ao final com a aplicação de Avaliação Diagnóstica identificando o grau de assimilação do conteúdo ministrado no Curso de Nivelamento. Além de preenchimentos de Formulários Google para a avaliação do nível de escolaridade e sob quais as condições de instrução conseguiram ingressar na Universidade. Após a criteriosa análise dos dados (que foi apenas de uma amostra contendo 39 questionários e em períodos distintos) provenientes do número de acertos de questões pode-se avaliar estatisticamente e fazer a análise quantitativa. Além disso, as turmas foram acompanhadas por um professor participante do projeto até o final das disciplinas iniciais na Engenharia que demandam cálculos, a saber: Cálculo 1 e Álgebra Linear 1, fazendo com que se pudesse ter a indicação de alunos que conseguiam acompanhar as aulas e resoluções de exercícios, mas que na hora de fazer a avaliação proposta tinham dificuldade de terminar as questões solicitadas e, assim serem submetidos a um chamado Provão, que fora elaborada pela equipe técnica docente do projeto com questões objetivas, contemplando todo o conteúdo ministrado em sala de aula. Tendo propiciado a estes mais uma chance de ser aprovado nas disciplinas cursadas no 1º Período.

4 | DESENVOLVIMENTO

No início das aulas de nivelamento realizado em 2018 para 2019 foi proposto o teste de verificação contendo 39 questões dispostas no Quadro 1.

Teste de Verificação		
Questões	Conteúdo Solicitado	Operacionalização
1 a 5	Operações envolvendo Potenciação com números inteiros e fracionários	Cálculo
6 a 8	Simplificação de expressões envolvendo radiciação e potência	Cálculo
9 a 11	Fatoração de polinômios	Cálculo
12 a 15	Simplificação de expressões envolvendo divisão de polinômios	Cálculo
16 a 25	Axiomas, Propriedades e Teoremas válidos na Álgebra	Verdadeiro/ Falso
26 a 30	Operações com Funções e Imagens	Cálculo
31 a 34	Zeros de Funções do 1º e 2º graus	Cálculo
35 a 38	Domínio de Funções	Cálculo
39	Interpretação de texto; Igualdade de Funções	Cálculo

Quadro 1. Identificação dos conteúdos exigidos no Teste de Verificação.

Fonte: Autor.

Destaca-se, dentre as que os alunos mais se propuseram a fazer foram as questões de 1 a 5 que envolvem potências de números inteiros ou fracionários com expoentes positivos ou negativos. Dos 39 alunos que se dispuseram realizar o teste apenas 41,03% acertaram todas e apresentando seus devidos cálculos, 10,26% não conseguiram acertar ou mesmo nem se desafiaram a executar os cálculos e 48,72% conseguiram resolver pelo menos 1 questão dentre as solicitadas. Em relação aos erros cometidos foi a falta de atenção aos sinais negativos do expoente e outros erros envolvendo propriedades de potência de mesma base.

Desde o Ensino Fundamental os alunos apresentam muita dificuldade em resolver potências com números inteiros e fracionários. As questões de 1 a 3 serão exemplificadas a seguir

$$(-2)^6 = 2^6 = 64 \tag{1}$$

$$-2^6 = -64 \tag{2}$$

$$2^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{64} \tag{3}$$

Temos na Equação (1) uma potência, cuja a base é negativa com expoente negativo, levando a um resultado positivo. Já na Equação (2) temos uma sentença, onde o expoente está para a base 2 e o sinal de menos é da sentença, o que resulta num resultado negativo. E por fim, na Equação (3) temos uma potência cuja base é positiva e com expoente negativo, o que nos dá um resultado positivo fracionário. Com base nessa estimativa podemos desenhar uma noção particular de que muito dos nossos discentes hoje trazem essa dificuldade decorrente do Ensino Fundamental.

Cabe ressaltar que o teste não era obrigatório e caso o aluno não se sentisse à vontade poderia entregar em branco e sem se identificar.

Outro tópico recorrente de dúvidas foi envolvendo fatoração de polinômios, muito utilizado para o cálculo de limites de funções, um dos conteúdos principais de Cálculo Diferencial e Integral, que são as questões de 12 a 15 contidas no Quadro 1. Neste quesito tivemos um percentual alto de 84,62% que não conseguiram efetuar a fatoração dos polinômios de 2º grau, nem utilizando os produtos notáveis e nem tão pouco utilizando a fatoração de Girard, a saber:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{com } a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Lembremos que na Equação (4), as raízes do polinômio do 2º grau são descritas por x_1 e x_2, a serem descobertas pela utilização da Fórmula de Báskara. E apenas 15,38% conseguiram efetuar pelo menos um dos itens solicitados. Dentre as questões propostas neste quesito, podemos destacar a efetuação da simplificação de:

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2} \quad (5)$$

Na equação (5) temos dois polinômios de 2º graus, com o polinômio do numerador, onde as raízes são $x_1 = -1$ e $x_2 = -2$ e portanto sua fatoração é dada por $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ e o polinômio do denominador, com raízes $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$ e logo sua fatoração descrita por $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. Assim:

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+2}{x-2} \quad (6)$$

Uma vez que os coeficientes a=1 obtemos a fração irredutível acima.

Outro quesito solicitado no Teste relaciona conceitos sobre Função, o qual é de extrema relevância no ensino da matemática como um todo. Tal assunto permeia a modelagem como um todo e sem o entendimento da formação da tripla realizada por conjuntos não vazios que fazem o papel de Domínio da Função e Contra-Domínio, e da Lei de Associação, bem como dos conjuntos Imagem e Gráficos, os conceitos vistos em Cálculo Diferencial e na Álgebra Linear ficam sem nexo. Só pra exemplificar, a primeira parte do Curso de Cálculo é a parte de Limites, onde são ensinados mecanismos do Cálculo de Limite a fim de saber o comportamento completo da função no infinito, se existem assíntotas, descontinuidades, pontos de máximo e de mínimo e consequentemente no uso dos problemas de otimização, onde são vistas a parte da aplicação em problemas relacionados com a Engenharia e Tecnologia. Deste modo, a questão 35 letra b) que exibe a função quadrática dada por $g(x)=-2x^2+5x$ e pede para calcular a imagem de $x=-\frac{1}{2}$. Podemos perceber que o cálculo da imagem nada mais significa substituir o valor de x dado na Lei da função g. Obtendo:

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5.\left(-\frac{1}{2}\right) = -2.\frac{1}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3 \quad (7)$$

que recai em uma expressão numérica envolvendo potências com base negativa, e, soma de frações.

5 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Numa tentativa de analisarmos a compreensão dos conteúdos ministrados no curso de Nivelamento, ao final das aulas foi novamente propostos aos alunos participantes uma Avaliação Diagnóstica (Quadro 2) contendo 10 questões.

Avaliação Diagnóstica		
Questões	Conteúdo Solicitado	Estilo
1	Identificação de sinais	Objetiva
2	Simplificação Algébrica	Verdadeiro/Falso
3	Expressão Numérica	Objetiva
4	Equação do 2º Grau	Objetiva
5	Equação do 1º Grau	Objetiva
6	Identificação da Equação da Reta	Objetiva
7	Comparação entre Áreas de Figuras Geométricas	Objetiva
8	Quociente entre Polinômios	Objetiva
9	Expressão Numérica	Dissertativa
10	Resolução envolvendo domínio, imagem, zeros da função através da Análise de Gráfico	Dissertativa

Quadro 2. Identificação de conteúdos exigidos na Avaliação Diagnóstica.

Fonte: Autor.

Dentre as questões solicitadas podemos destacar a questão 9 envolvendo uma expressão numérica, com potências cujas bases são números racionais:

$$\frac{\left(\frac{-3}{4}\right)^{-2}+\left(\frac{3^{-1}}{4}\right)}{\left[1+\left(-\frac{4}{3}\right)^{-1}\right]} \tag{8}$$

e que no teste houve um percentual razoável de erros.

Após efetuar as operações de potência e divisão de frações, temos:

$$\frac{\left(\frac{-4}{3}\right)^{2}+\left(\frac{\frac{1}{3}}{4}\right)}{\left[1+\left(-\frac{3}{4}\right)^{1}\right]} = \frac{\frac{16}{9}+\frac{1}{12}}{\left[1-\frac{3}{4}\right]} = \frac{\frac{64+3}{36}}{\frac{1}{4}} = \frac{67}{36}.4 = \frac{67}{9} \tag{9}$$

Apenas 28,21% conseguiram resolver a expressão, ou seja 71,79% não conseguiram e indicando que não sabiam nem começar a resolver a expressão. Mesmo não tendo o melhor dos índices de aproveitamento, conseguimos alcançar uma boa representatividade e de acordo com o detalhamento do desenvolvimento, podemos notar um avanço.

6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com apenas uma amostra de duas turmas de nivelamento 2020, com um total de

39 alunos participantes pode-se analisar o percentual de acertos definidos em faixas para melhor expressar o nível de aprendizagem dos mesmos (Figura 1), através da Avaliação Diagnóstica (Quadro 2).

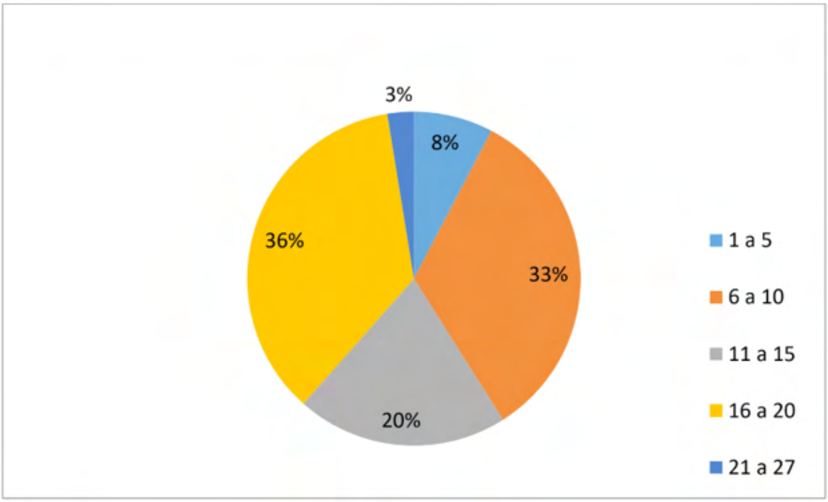


Figura 1. Percentual de acertos - Avaliação Diagnóstica.

Fonte: Autor.

Tomando como base o Teste feito no início, considerando que o aluno fazia o teste de forma voluntária e sem obrigatoriedade de responder, notou-se que dos que fizeram a pontuação entre 16 a 20, 36% conseguiram realizar as expressões numéricas, simplificações algébricas e resolução de equações do 2º grau. E com uma análise geral, todos conseguiram identificar ao menos os símbolos matemáticos na 1ª questão. Isto só indica que tais projetos aumentam o engajamento dos ingressantes em resolver e saber resolver de forma correta as expressões mais simples.

Mesmo com a propostas desse curso de nivelamento existente para a busca de um público mais proativo e capaz de resolver problemas ensinados desde a Educação básica, vemos que temos um vasto campo a ser explorado na tentativa de minimizar essas lacunas do saber. Segundo (Dias, A. A. S, 2017) um dos grandes responsáveis por isto é o programa de aprovação automática, que leva o aluno para a série seguinte com deficiências que certamente acarretará no seu desinteresse, principalmente pela falta dos pré-requisitos necessários a aprendizagem de novos conteúdos. E em seu discurso torna presente a percepção sobre a deficiência do processo ensino-aprendizagem de Matemática na Educação Básica quando alunos do Ensino Médio não conseguem resolver problemas simples de proporcionalidade envolvendo situações do cotidiano, que podem ser solucionados com a aplicação de regra de três ou resolução de expressões numéricas ou algébricas.

Uma das respostas ao levar as estatísticas para os ingressantes participantes do projeto de Nivelamento é de que pelo menos 40% estavam longe das salas de aulas e que o projeto beneficiou e fez relembrar conceitos primários já esquecidos, o restante só enfatizaram que estavam tentando buscar melhorias na aprendizagem de matemática e que iriam verificar se iriam continuar o curso de graduação em Engenharia.

Numa tentativa ampla de estreitar a aproximação entre aluno e professor, o Projeto Pré-Calouro teve a preocupação de atender individualmente os ingressantes interessados, possibilitando auxiliá-lo da melhor maneira.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Escola Superior de Tecnologia e também a Universidade do Estado do Amazonas por tornar possível o ensino, mesmo com o Estado do Amazonas ter uma geografia tão peculiar, atendendo mais de 57 municípios. Vale ressaltar que o ser Humano é extremamente capaz de se adaptar ao meio e trazendo experiências que serão incorporadas ao ensino em todas as suas modalidades e ampliando o universo de aprendizagem por meios de projetos extra-curriculares proporcionadas à comunidade discente.

REFERÊNCIAS

Castejon M., Rosa, R. **Olhares sobre o ensino da matemática: educação Básica**. Uberaba – MG: IFTM, 2017.

DANTE, L. R. **Matemática : Contexto & Aplicações**. São Paulo. Editora Ática, 2000.

https://www.youtube.com/watch?v=5DwNOifRsMI&list=PLUqdA2394pHChFVHtb1tCfdf_Ho2TLKcq&index=1.

MIGUEL, J. C. **O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teóricometodológicas**. Núcleos de Ensino: Artigos dos Projetos realizados em 2003. p.375-394, 2005. Disponível em: . Acesso em 15 set 2015.

CAPÍTULO 10

ANÁLISE PRELIMINAR DA DINÂMICA DO VÍRUS HBV POR MEIO DE DERIVADAS FRACIONÁRIAS

Data de aceite: 01/12/2021

Lislaine Cristina Cardoso
UEMS - Naviraí

Fernando Luiz Pio dos Santos
Instituto de Biociências, UNESP - Botucatu

Rubens Figueiredo Camargo
Depto. de Ciências, Unesp - Bauru

RESUMO: Esse artigo apresenta apresenta um modelo matemático para hepatite B. A formulação do modelo é feita por meio da derivada de Caputo. A soluçao analítica é encontrada, sob certas condições e entao tal solução é comparada com dados reais. A partir de simulações numéricas nota-se que os diferentes valores da ordem da derivada permitem comportamentos distintos da soluçao, sobretudo no tempo de convergência para o estado de equilíbrio. Os resultados apontaram que a curva que melhor se ajusta aos dados reais é advinda da ordem não inteira da derivada.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem fracionária, Derivada de Caputo, Hepatite B.

1 I INTRODUÇÃO

A hepatite B é uma doença transmitida pelo vírus HBV, que infecta as células do fígado. A transmissão pode ocorrer por meio de relações sexuais e transmissão sanguínea. Entre os principais sintomas estão febre, fadiga, perda de apetite, náuseas, urina escura, dor nas articulações, icterícia, entre outros [7, 20].

A história das hepatites virais remonta vários milênios. Manuscritos da literatura chinesa, com mais de cinco mil anos, faziam referência a icterícia na população. Alguns escritos de Hipocrates (400 a.C.) mostraram indícios de que a icterícia seria de origem infecciosa e decorrente de problemas no fígado. O acúmulo de líquido no abdómen (ascite) seria proveniente de alguma doença crônica nesse mesmo órgão [7].

Ao longo da história vários outros fatos são relacionados a casos de hepatites, principalmente em locais com grande massa populacional. Durante a segunda guerra mundial, estudos revelaram casos de hepatite aguda, entre indivíduos que passaram por transfusão sanguínea. Documentos apontam que em 1942, uma epidemia de hepatite afetou 28.585 militares americanos, ocasionando 62 óbitos [3].

A infecção pelo vírus HBV é um fator que impacta diretamente a saúde pública no mundo todo. A perda de qualidade de vida dos pacientes, bem como os gastos em tratamentos requerem esforços para desenvolver medidas eficazes de prevenção e controle. Conforme o Sistema de Informação de Agravos de Notificação (Sinan), entre os anos de 1999 a 2020, foram notificados 689.933 casos confirmados de hepatites virais no Brasil. Destes, 254.389 (36, 9%) correspondem a casos de hepatite B, dos quais 139.323 (54, 8%) ocorreram entre homens. Segundo faixa etária, do total de casos acumulados, a maioria concentra-se entre indivíduos de 25 a 44 anos (49,0% dos casos). Em 2020, o maior percentual de casos notificados ocorreu entre as pessoas de 60 anos ou mais (16,3%). A mesma estimativa aponta que a região Sudeste concentra o maior número de infectados pelo vírus da hepatite B, com 34.52% do total, seguida das regiões Sul (31,8%), Norte (14,7%), Nordeste (10,3%) e Centro-Oeste (9,0%) [1].

O número de óbitos é um fator alarmante. A OMS estima que em 2015 ocorreram mais de 1 milhão de mortes no mundo. No Brasil, de 2000 a 2019, foram identificados pelo Sistema de Informação de Mortalidade (SIM), 78.642 óbitos associados às hepatites virais dos tipos A, B, C e D. Desses, 21.3% foram associados à hepatite B [1].

A despeito das mortes que provoca e enquanto a cura da hepatite B ainda não é uma realidade, as pequisas clínicas atuais têm buscado novas ferramentas e mecanismos que ajudem a compreender a dinâmica da evolução viral ao longo do tempo. Nesse contexto, tem-se intensificado as pesquisas multidisciplinares na área de epidemiologia, com intuito de obter novas ferramentas que auxiliem na compreensão de fenômenos ligados a dinâmica da doença. Tais pesquisas são são constituídas por modelos matemáticos que visam estimar a atual população infectada pelo vírus, a progressão da doença nos pacientes e os custos associados a diferentes cenários dessa patologia.

Do ponto de vista da construção desses modelos, destaca-se o cálculo de ordem não inteira, tradicionalmente chamado de Cálculo Fracionario (CF). O cálculo de ordem arbitrária, lida com derivadas e integrais de ordens não inteiras. Embora pareça ser uma teoria antiga, pois remonta ao século XVII , os avanços ainda são recentes. Nas últimas quatro décadas houve um aumento significativo em pesquisas relacionadas a aplicações do CF, em diversas áreas, desde a física até a medicina [10, 12, 18, 19, 20].

O cálculo de ordem não inteira têm ganhado relevância. Inúmeros es- tudos, nas mais diversas áreas do conhecimento, têm obtido importantes resultados e generalizacões na modelagem de fenômenos reais por meio do CF [8, 15, 17]. Alguns fenômenos físicos, que até então não eram bem explicados quando modelados por sistemas de ordem inteira, tem mostrado que a modelagem com derivadas fracionárias descreve melhor a solução [9]. Estudos de modelos em HIV, feitos por [21], mostraram que sistemas de ordens arbitrárias são mais apropriados para descrever a dinâmica real da doença, pois a solução do modelo de ordem fracionária se ajusta melhor aos dados reais de pacientes.

Nesse contexto, o objetivo desse trabalho foi apresentar a modelagem da hepatite B de ordem não inteira e fazer uma comparação das soluções com dados reais, com o intuito de verificar se a curva que melhor se ajusta aos dados reais é advinda da ordem não inteira da derivada.

2 | CÁLCULO FRACIONÁRIO

Nessa seção apresentamos os conceitos fundamentais da teoria de cálculo fracionário. Inicialmente será feita a formalização da integral fracionária segundo Riemann-Liouville (RL). Em seguida, a partir das ideias de integral fracionária de RL, serão apresentadas as definições de derivada fracionária segundo RL e derivada fracionária segundo Caputo. Ambas as definições necessitam da integral fracionária para a formulação da derivada. Por esse motivo é necessário definir a integral fracionária e, depois, a derivada fracionária. O operador integral de RL é definido como segue:

Definição 1.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que $Re(\alpha) > 0$. O operador integral de Riemann-Liouville de ordem α de $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, denotado por $I^\alpha f(t)$, é definido como*[1]

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

no qual o símbolo $*$ denota a convolução de Laplace, $\phi_\alpha(t)$ a função Gel'fand-Shilov, definida para $\alpha \notin \mathbb{Z}-$, como $\phi_\alpha(t) =$ $\begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & se\ t \geq 0 \\ 0 & se\ t < 0 \end{cases}$ $e\ \Gamma(\alpha)$ função Gama definida como $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.

Definimos $I^0 f(t) = f(t)$.

A definição da derivada fracionária segundo Riemann-Liouville (RL) está baseada no fato da derivação ser a operação inversa da integração e na lei dos expoentes. Tal definição estabelece que a DF é a derivada de ordem inteira de uma determinada integral de ordem fracionária.

Definição 1.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável, $\alpha \in \mathbb{C}$ com $Re(\alpha) \geq 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ e $n - 1 < Re(\alpha) \leq n$, $t > \alpha$. A derivada de Riemann-Liouville de ordem α da função $f(t)$ é dada por*

$$D^\alpha_{RL} f(t) = D^n[I^{n-\alpha} f(t)]. \tag{2}$$

A partir da equação (2), podemos analisar dois casos particulares, com relação ao parâmetro associado a ordem da derivada:

1. Se $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$ (caso inteiro), recupera-se a derivada de ordem inteira[2], ou seja

$$D^\alpha_{RL} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t),$$

pois $I^0 f(t) = f(t)$ e $\frac{d^n}{dt^n}$ é a e-nésima derivada usual de $f(t)$.

2. Se $\alpha = 0$ recupera-se a própria função, ou seja, $D^0_{RL} f(t) = f(t)$.

A DF segundo Caputo é similar à DF segundo RL. Porém, ela é obtida invertendo a ordem de integração fracionária com a ordem de derivação.

Essa inversão na ordem dos operadores de integração nas derivadas de Caputo

1 A partir da Definição (1.1), tem-se $I^\alpha t^\beta = t^{\beta+\alpha}\Gamma(\beta + 1)/\Gamma(\beta + \alpha + 1)$. O caso polinomial é recuperado se $\alpha, \beta \in N$.
2 Ambas as notações D^n e $\frac{d^n}{dt^n}$, indicam a e-nésima derivada usal de uma função.

e RL gera consequências significativas, tanto no resultado da derivada de algumas funções, quanto no contexto das aplicações em fenômenos físicos. O operador de Caputo é utilizado quando queremos analisar uma EDF cujas condições iniciais ou de contorno, são fisicamente interpretáveis, em termos das derivadas de ordens inteiras. Isso torna a derivada de Caputo mais conveniente para a modelagem de sistemas dinâmicos.

Definição 1.3 *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável,* $\alpha \in \mathbb{C}$ *com* $Re(\alpha) > 0$ *e* n *um número natural, tal que,* $n - 1 < Re(\alpha) \leq n$*. O operador derivada de ordem* α *no sentido de Caputo é efinido como*

$$D^{\alpha} f(t) = I^{n-\alpha} D^{n} f(t) = \phi_{n-\alpha} * D^{n} f(t). \tag{3}$$

A partir da equação (3), decorre dois casos particulares com relação ao parâmetro associado a ordem da derivada:

1. Se $\alpha = n$, $n \in \mathbb{N}$ (caso inteiro), recupera-se a derivada usual, isto é

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t),$$

em que $\frac{d^n}{dt^n}$ é a n-ésima derivada de $f(t)$.

2. Se $\alpha = 0$, recupera-se a própria função, ou seja, $D^0 f(t) = f(t)$.

3 | MODELO MATEMÁTICO

O processo de modelagem matemática consiste, essencialmente, em ex- pressar por meio de equações uma determinada situação de interesse. Cada vez mais é crescente o número de modelos utilizados na descrição de fenômenos biológicos. A partir do estudo das soluções de tais modelos, é possível fazer previsões acerca do futuro da população em estudo.

Em doenças virais, como a AIDS e a hepatite, há inúmeros modelos que descrevem a interação entre as populações de células e vírus livres [8, 9, 11]. O primeiro modelo usado para descrever a dinâmica da hepatite B foi proposto por [14]. Tal modelo foi formulado por meio de equações diferenciais ordinárias e é derivado do diagrama da Figura 1 seguinte.

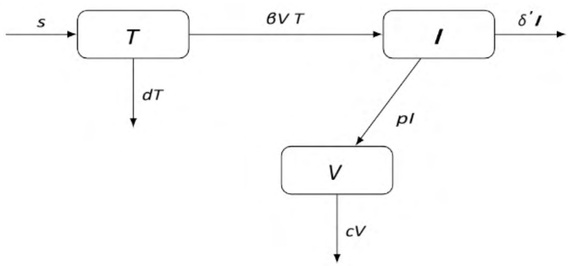


Figura 1: Dinâmica da infecção pelo vírus HBV.

Esse modelo considera três varíaveis de estado no tempo t: as células não infectadas, *T (t)*, as células infectadas, *I(t)*, e vírus livres *V (t)*. As células não infectadas, ou seja, células suscetíveis à infeção são produzidas a uma taxa constante *s* e morrem a uma taxa *d*. Essas células tornam-se infectadas pela taxa β, que é proporcional à concentração de células não infectadas e à concentração de vírus. Células infectadas são produzidas a uma taxa β e são eliminadas pela taxa constante de morte δ'. Essa taxa de morte deve ser diferente da taxa de morte de células não infectadas, ou seja, $d = \delta'$ devido a carga viral ou ao efeito imune. Depois da infecção, a taxa de produção de vírus é *p* por células infectada e os vírus são liberados a uma taxa *c*.

Nos últimos anos, diversas drogas têm sido usadas no tratamento da hepatite B. A eficácia de cada uma delas apresenta resultados varíaveis. O principal objetivo no tratamento da infecção crônica pelo vírus HBV é o de suprimir a replicação viral antes que ocorram danos irreversíveis no fígado [7, 11].

Nesse contexto, torna-se necessário incorporar ao modelo proposto por [14], parâmetros que indiquem a presença de terapia contra a doença, uma vez que tal modelo considera que a taxa de morte de células infectadas, dado pelo parâmetro δ', ocorre devido somente ao efeito da resposta imune. Esse modelo não considera fatores externos que levam a essa taxa de morte de células infectadas, como a ação de antivirais.

O tratamento com algum fármaco inibe o processo de transcrição reversa, necessário para a formação de novos vírus. Isso significa que, sob a ação de alguma droga, a produção de novos vírus, *p*, é decrescente. A eficácia da droga será dada pelo parâmetro ϵ, $0 \leq \epsilon \leq 1$, no qual $\epsilon = 0$ significa que a terapia não possui efeito em bloquear novas infecções e $\epsilon = 1$ indica que a droga bloqueia totalmente a produção viral. Assim, a taxa de produção de novos vírus sob a acão de terapia é proporcional à produção de novos vírus, ou seja, $(1 - \epsilon)p$.

Alguns estudos apontam que, na presença de inibidores de transcrição reversa, a maioria das células não infectadas permanecen intactas. Isso ocorre devido à formação de cccDNA (do inglês, *circular covalently closed DNA*) que protege as células saudáveis de tornarem-se infectadas. Assim, para incorporar o efeito da droga em bloquear novas infecções, foi introdu- zido o parâmetro η. Sob a acão de terapia, a taxa de infecção de células é proporcional à taxa de contágio celular, ou seja, $(1 - \eta)\beta$.

De posse das considerações acima, a versão fracionária para o modelo de hepatite B pode ser escrita como

$$\left\{ \begin{array}{lcc} D^\alpha T(t) & = & s - dT(t) - (1-\eta)\beta V(t)T(t) + \rho I(t) \\ D^\alpha I(t) & = & (1-\eta)\beta V(t)T(t) - \delta' I(t) - \rho I(t) \\ D^\alpha V(t) & = & (1-\epsilon)pI(t) - cV(t), \end{array} \right. \tag{4}$$

em que D^α representa a derivada de Caputo de ordem α, $0 < \alpha \leq 1$. A análise de estabilidade desse modelo, pode ser vista em [3, 4].

4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

No sistema (4) considere que o tratamento bloqueia novas infecções, ou seja, $\eta = 1$, e a eficácia em bloquear a produção viral é $\epsilon = 1$. Dessa forma, a equação que envolve a carga viral pode ser resolvida isoladamente. O problema de valor inicial de ordem fracionária

$$\begin{cases} D^\alpha T(t) &= s - dT(t) - (1-\eta)\beta V(t)T(t) + \rho I(t) \\ D^\alpha I(t) &= (1-\eta)\beta V(t)T(t) - \delta' I(t) - \rho I(t) \\ D^\alpha V(t) &= (1-\epsilon)pI(t) - cV(t), \end{cases} \tag{4}$$

Aplicando a transformada de Laplace [2], obtém-se

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}[D^\alpha V(t)] &= \mathfrak{L}[-cV(t)], \\ s^\alpha \mathfrak{L}[V(t)] - s^{\alpha-1}V_0 &= -c\mathfrak{L}[V(t)], \\ \mathfrak{L}V(t) &= \frac{s^{\alpha-1}V_0}{s^\alpha + c}. \end{aligned}$$

Daí

$$V(t) = V_0 E_\alpha(-ct^\alpha),$$

em que c é uma constante positiva e representa a taxa de liberação de vírus, V_0 é carga viral no tempo $t = 0$ e $E_\alpha(.)$ é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro [2].

Para realizar as simulações foram utilizados os métodos numéricos NSFD [13] e Runge Kutta, para os modelos de ordem fracionária e de ordem inteira (SI), respectivamente. Para analisar a infuência do expoente fra- cionário no comportamento da solução foram utilizados diversos valores para α. Os dados são provenientes de um estudo realizado em dois hospi- tais de Hong Kong, com 15 pacientes portadores crônicos do vírus HBV. Na semana 0 (semana inicial do estudo) foi analisada a concentração viral de cada um, então cada indivíduo recebeu dosagens iguais de Lamivudine (150mg/d). Durante 100 dias os pesquisadores acompanharam e mediram a carga viral de cada paciente. No início do tratamento as cargas virais foram $V_1(0) = 1,\ 1 \times 10^4$ cópias/ml e $V_2(0) = 1,\ 2 \times 10^3$ cópias/ml [11, 3]. Os parâmetros num éricos utilizados foram $h = 0,\ 001$, $t = 200$ dias.

A solução numérica para o modelo (5) é apresentada na figura, junta- mente com os dados, referentes a carga viral de dois pacientes, denotados por P_1 e P_2.

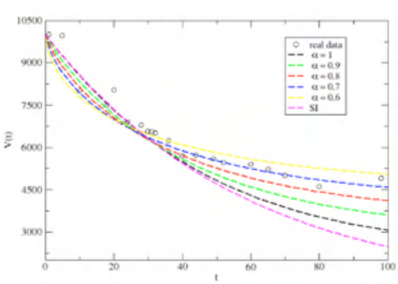


Figura 2: Paciente P_1

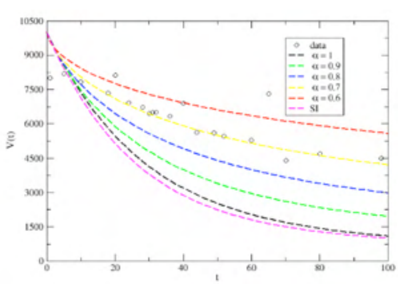


Figura 3: Paciente P_2

Para o paciente P_1, podemos observar que a partir da segunda semana de tratamento ocorre um decaímento exponencial na carga viral. Esse fato corresponde a resposta inicial ao tratamento, uma vez que é alta a concentração de vírus na circulação sanguínea, assim as células de defesa agem rapidamente para combater tais vírus. Com o passar das semanas, nota-se que a carga viral diminui de forma mais lenta até tornar-se estável.

Para o paciente P_2, podemos observar que na segunda semana de tratamento a carga viral é maior do que na semana 0. Isso se dá pela resistência do vírus contra a medicação. Nesses casos é indicado o tratamento com mais de uma droga, Lamivudine e Interferon, por exemplo. Podemos notar também que a carga viral demora um tempo maior para se estabilizar. Em ambos os casos, nota-se que a curva que melhor se ajusta aos dados reais é de ordem não inteira $\alpha = 0, 7$.

5 I CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta a modelagem matemática, por meio de derivadas de ordem não inteira para a hepatite B. A partir de simulações numéricas nota-se que os diferentes valores da ordem da derivada permitem comportamentos distintos da solução, sobretudo no tempo de convergência para o estado de equilíbrio. Os resultados apontaram que a curva que melhor se ajusta aos dados reais é advinda da ordem não inteira da derivada. Esse resultado é relevante, pois indica que a modelagem de fenômenos biológicos pode ser feita, não somente por meio de equações diferenciais ordinarias, mas usando técnicas advindas do cálculo de ordem não inteira. Nesse contexto, a união da medicina e da modelagem matemática pode contribuir significativamente para o entendimento dos fatores que envolvem a progressão do vírus HBV e elucidar os mecanismos chaves destes processos, e assim ser o suporte ideal para que num futuro próximo, possam ser traçadas estratégias de erradicação da doença e quem sabe, descrever outra história.

As continuações naturais deste trabalho são vastas, podem ser feitas tanto a partir da abordagem de novos modelos utilizando a mesma metodologia, quanto na incorporação de novos fatores no modelo apresentado.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao grupo de pesquisa *CF @FC* pelas importantes discussões.

REFERÊNCIAS

[1] O. M. Saúde. Hepatites Virais https: // www. gov. br/ saude/ pt-br/ media/ pdf/ 2021/ julho/ 26/ boletim-epidemiologico-de-hepatite-2021. pdf Acesso 09/2021. 1–80, 2021.

[2] R. F. Camargo e E. C. de Oliveira. *Cálculo fracionário*, Editora Li- vraria da Física, São Paulo, Brasil, 2015.

[3] L. C. Cardoso Um modelo matemático para hepatite B por meio da derivada fracionária de Caputo, Tese de doutorado, Programa de Pos graduação em Biometria, UNESP, Botucatu, 2019.

[4] L. C. Cardoso, F. L. P. dos Santos, R. F. Camargo. Analysis of fractional-order models to Hepatitis B. *Computational and Applied Mathematics*, v. 04, p. 1–17, 2018.

[5] L. C. Cardoso, F. L. Pio dos Santos and R. F. Camargo. Um modelo matemático para Hepatite B de ordem fracionária. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, v. 06, n. 1, 2018.

[6] K. Diethelm. The analysis of fractional differential equations. *Lecture Notes in Mathematics*, 2004.

[7] M. S. Ferreira. Diagnóstico e tratamento da Hepatite B. *Revista da Sociedade Brasileira de Medicina Tropical*,v. 33, 389–400, 2000.

[8] M. Farman, A. Ahmad, A. S. Umer, A. Hafeez. A mathematical analy- sis and modelling of hepatitis B model with non integer time fractional derivative. *Communications in Mathematics and Applications*, v. 10, 571–584, 2019.

[9] J. E. Forde, S. M. Ciupe, A. C. Arias and S. Lenhart. Optimal control of drug therapy in a Hepatitis B model. *Applied Sciences*, v. 6, 1–18, 2016.

[10] H. Kheiri, M. Jafari. Stability analysis of a fractional order model for the HIV/AIDS epidemic in a patchy environment. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 346, 323–339,2019.

[11] S. R. Lewin, R. M. Ribeiro, T. Walters and G. K. Lau. Analysis of Hepatitis B viral load decline under potent therapy: complex decay profiles observed. *Hepatology*, v. 34, 1012–1019, 2001.

[12] C. Maji, D. Mukherjee, D. Kesh. Study of a fractional-order model of chronic wasting disease. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1–14, 2020.

[13] R. Mickens, A. Smith. Finite-difference models of ordinary differen- tial equations: influence of denominator functions. *Journal Franklin Institute,* v. 327, 143–149, 1990.

[14] M. Nowak, S. Bonhoeffer, A. Hill, R. Boehme, H. C. Thomas, H. McDade. *Viral dynamics in Hepatitis B virus infection*. Proc Natl Acad Sci. v. 93, 4398–4402, 1996.

[15] M. D. Ortigueira, J. A. T. Machado, *What is a fractional derivative?*Journal of Computational Physics, v. 293, 4–13, 2015.

[16] I. Podlubny. Geometric and physical interpretation of fractional inte- gration and fractional differentiation. *Fract. Calc. App. Anal.* , v. 5(4), 367–386, 2002.

[17] M. S. Salman, A. M. Yousef. On a fractional-order model for HBV infection with cure of infected cells. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 1–7, 2017.

[18] R. Shi, T. Lu, C. Wang. Dynamic analysis of a fractional-order model for hepatitis B virus with Holling II functional response. *Complexity*, 2019.

[19] S. Ullah, M. A. Khan. A fractional order HBV model with hospitali- zation. *Discrete and continuos systems*, v. 13, 957–974, 2020.

[20] S. Ullah, M. A. Khan, M. Farooq. A new fractional model for the dynamics of the hepatitis B virus using the Caputo-Fabrizio derivative. *The European Physical Journal Plus*, v. 133, 2018 .

[21] S. Zibaei, M. Nanjoo. A nonstandard finite difference scheme for sol- ving fractional-order model of HIV-1 infection of CD4+ T-cells. *Iranian Journal of Mathematical Chemistry*, v. 6, n. 2, 169–184, 2015.

CAPÍTULO 11

METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: O USO DA PLATAFORMA MENTIMETER NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ESTATÍSTICOS

Data de aceite: 01/12/2021
Data de submissão: 13/09/2021

Anderson Dias da Silva
Escola Eduardo Coelho
Petrolina – Pernambuco
http://lattes.cnpq.br/1046759460593803

Geriane Pereira da Silva
Escola Estadual NM-09
Petrolina – Pernambuco
http://lattes.cnpq.br/7218736357575736

Joás Mariano da Silva Júnior
Universidade Federal do Vale do São Francisco, UNIVASF
Juazeiro - Bahia
http://lattes.cnpq.br/4943004063285347

Carla Saturnina Ramos de Moura
UPE- Universidade de Pernambuco
Petrolina – Pernambuco
http://lattes.cnpq.br/2202813637204730

Lucília Batista Dantas Pereira
UPE- Universidade de Pernambuco
Petrolina – Pernambuco
http://lattes.cnpq.br/7751208084431086

RESUMO: No contexto pandêmico o qual a educação foi bruscamente inserida, tornou-se necessário a busca por formações e adaptação aos recursos digitais como metodologias de ensino, visto que as aulas presenciais foram transferidas para espaços virtuais. Desse modo, este trabalho é resultante de uma Oficina de extensão para professores, intitulada: Elaboração de atividades de Matemática utilizando Tecnologias Digitais. Nesta perspectiva, por meio da atividade elaborada, desenvolveu-se esse estudo, de caráter qualitativo, no qual teve como objetivo analisar contribuições da Plataforma *Mentimeter* para a revisão de Medidas de Tendência Central com estudantes de 9º ano, de uma Escola da Rede Pública de Ensino de Petrolina. Em linhas gerais, verificou-se que a Plataforma *Mentimeter* favorece a aprendizagem, visto que dentre outras contribuições, pôde-se destacar: o acompanhamento em tempo real das respostas; a aprendizagem por meio da exposição das respostas dadas pelos alunos; o esforço do aluno para responder imediatamente os problemas que lhe são propostos; maior dinamismo e interatividade nas aulas síncronas.
PALAVRAS-CHAVE: Tecnologias digitais; Matemática; *Mentimeter*; Ensino; Educação Matemática.

ACTIVE METHODOLOGIES IN MATHEMATICS TEACHING: THE USE OF THE MENTIMETER PLATFORM IN LEARNING STATISTICAL CONCEPTS

ABSTRACT: In the pandemic context in which education was abruptly inserted, it became necessary to search for training and adaptation to digital resources as teaching methodologies, as classroom classes were transferred to virtual spaces. Thus, this work is the result of an extension workshop for teachers, entitled: Elaboration of Mathematics activities using Digital Technologies. In this perspective, through the elaborated activity, this study was developed,

of a qualitative nature, which aimed to analyze the contributions of the Mentimeter Platform for the review of Central Trend Measures with 9th grade students from a Public School of Petrolina teaching. In general terms, it was found that the Mentimeter Platform favors learning, as, among other contributions, the following could be highlighted: real-time monitoring of responses; learning through the exposure of the answers given by the students; the student's effort to respond immediately to the problems proposed; greater dynamism and interactivity in synchronous classes.
KEYWORDS: Digital technologies; Math; Mentimeter; Teaching; Mathematics Education.

1 I INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como tema as tecnologias digitais no processo de ensino-aprendizagem, que podem ser utilizadas no contexto atual de aulas remotas, devido à pandemia do COVID-19. Uma vez que, com a suspensão das aulas presenciais, os professores tiveram que se reinventar e buscar novas estratégias de ensino, o que, de acordo com Moreira, Henrique e Barros (2020, p. 352) aconteceu "transferindo e transpondo metodologias e práticas pedagógicas típicas dos territórios físicos de aprendizagem, naquilo que tem sido designado por ensino remoto de emergência".

Nesse sentido, as plataformas de ensino que utilizam da *Internet* têm ganhado cada vez mais destaque durante as aulas remotas, pois se por um lado, essas ferramentas facilitam o trabalho do professor, por outro, dinamizam e deixam mais atrativas as aulas no ambiente virtual. De acordo com Mattos, Moraes e Guimarães (2010, p. 234) "uma das novidades mais relevantes é que esse novo veículo de comunicação é cada vez mais utilizado para ensinar e a aprender a distância. Com o seu uso e difusão de aplicativos, surgem diversos e inéditos problemas a se tratar".

Nesta perspectiva, construiu-se a seguinte questão que norteou esse estudo: quais as contribuições da Plataforma *Mentimeter* para a revisão de Medidas de Tendência Central com estudantes de 9º ano? Visando responder essa pergunta, tem-se como objetivo, analisar contribuições da Plataforma *Mentimeter* para a revisão de Medidas de Tendência Central com estudantes de 9º ano de uma Escola da Rede Pública de Ensino de Petrolina.

2 I O USO DE TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Dentre as tendências em educação Matemática, destaca-se neste trabalho, o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) no ensino e aprendizagem de Matemática, no qual utilizam-se recursos tecnológicos para facilitar a compreensão dos conteúdos matemáticos, pois, de acordo com Flemming, Luz e Mello (2005), em virtude de que a tecnologia, mais precisamente o computador, está presente comumente no cotidiano do estudante, os mesmos já estão acostumados com tal recurso, logo, promove a ligação do que acontece tanto dentro como fora de sala de aula, melhorando assim, a relação entre o professor e o aluno. Desta forma, justifica-se o emprego dos recursos tecnológicos.

Oliveira (2015) aponta que as tecnologias têm um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem para os educandos, em virtude de que as TDICs tornam-os agentes ativos deste processo, eles deixam de ser meros receptores passivos para serem protagonistas do próprio aprendizado, por outro lado, o professor tornando-se mediador e facilitador deste conhecimento. Consolidando essas ideias, Santos e Mafra (2020, p. 82) ressalvam que dentre as vantagens de se utilizar as TDICs no ensino e aprendizagem de Matemática, elas

> podem ser instrumentos bastante úteis para se ensinar matemática, por serem inovadoras, atrativas, lúdicas e interativas, despertando o interesse do aluno e sendo para o professor uma forma diferente de atuação no processo de construção do conhecimento.

Por outro lado, Zulatto (2002) salienta que o uso da tecnologia não se restringe apenas em utilizar recursos tecnológicos ao invés de pincel e lousa, como ocorre comumente nas escolas, e que esta medida é utilizada por professores que não estão preparados para o uso das ferramentas.

Logo, Do Prado Moraes (2016) reforça que para haver essa inserção desta tendência, é necessário um projeto pedagógico que estimule o uso TDICs no ambiente escolar, para que, a partir disso, o professor reveja as suas práticas docentes e incremente suas metodologias de ensino.

Corroborando com as ideias Do Prado Moraes (2016), Richit (2005) acrescenta que são atribuições da escola a inserção destes recursos, para preparar tanto os docentes bem como os estudantes a esta nova realidade digital, tornando-os preparados para esta sociedade.

Mediante a isto, a sociedade escolar não deve achar que estas mudanças serão rápidas, pois segundo Zulatto (2002), é um processo lento e requer bastante comprometimento para implementar tais mudanças, e devem ser abraçadas pelos professores, coordenadores, gestores, pais e alunos. Desta forma, surgem as metodologias ativas como implemento desta tecnologia dentro da escola.

3 | METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Pode-se definir as metodologias ativas como técnicas de ensino, cuja finalidade é promover o aluno como protagonista do processo de ensino e aprendizagem. Nesse aspecto, essas estratégias consideram os saberes, experiências e opiniões do estudante, possibilitando ao mesmo participar ativamente das situações de promoção ao conhecimento (ALTINO FILHO, NUNES e FERREIRA, 2020).

Nessa mesma linha de raciocínio, Passos (2016, p.15) destaca que a proposta das metodologias ativas é de “sistematizar o ensino de conteúdos e desenvolver habilidades focando a participação ativa do discente nas atividades propostas pelo professor”. Vale salientar, que nesse processo, o professor tem o papel de mediar e organizar as atividades a serem desenvolvidas, de modo a incentivar a autonomia, a criatividade, o trabalho em equipe e a resolução de problemas (ALTINO FILHO, NUNES e FERREIRA, 2020; PASSOS, 2016).

No que tange ao ensino da Matemática, as Metodologias Ativas se apresentam como importantes alternativas de aprendizagem, pois de acordo com Lubachewski e Cerutti (2020, p. 3), essas estratégias representam "o fazer matemático de maneira, reflexiva, construtiva e autônoma, além de atribuírem dois conceitos sistemáticos para um bom andamento das aulas sendo elas a teoria e prática".

Corroborando com esse pensamento, Souza (2020, p. 39) acrescenta como benefícios da utilização das Metodologias ativas na construção do conhecimento matemático, "a maior motivação e interesse do aluno, o desenvolvimento de atitudes positivas sobre sua capacidade, [...] melhor comunicação, maior responsabilidade do aluno, otimização do tempo e dinamismo durante as aulas".

Por outro lado, ao se referir ao mundo digital e conectado, ainda mais enfatizado em tempos de Pandemia, Moran (2018, p.46) aponta que as "metodologias ativas se expressam através de modelos de ensino híbridos, *blended*, com muitas possíveis combinações". Tomando-se por base, a abordagem bastante relevante e evidente do ensino híbrido, que será apresentado de forma resumida essa estratégia de ensino que contempla as aulas síncronas e assíncronas.

Conforme sugere o próprio nome, as aulas síncronas ocorrem de forma sincronizada, isto é, os estudantes e professores se encontram em tempo real em um mesmo espaço (físico ou *on-line*), para que assim, possam comunicar-se entre si. Por outro lado, as aulas assíncronas ocorrem de forma oposta, ou seja, não sincronizada, pois não é necessário a presença simultânea dos participantes, nem no espaço, nem no tempo, para que haja a comunicação entre os participantes. (MORAN, 2018).

Em linhas gerais, percebe-se que o atual contexto da Pandemia vivenciado pela humanidade, tornou necessária a adesão das metodologias ativas no ensino, bem como a aplicação de atividades síncronas e assíncronas, por meio de Ambientes Virtuais de Aprendizagem, como possibilitadoras e potencializadoras da aprendizagem.

4 | METODOLOGIA

4.1 Tipo de pesquisa

A presente pesquisa tem caráter qualitativo, que segundo Godoy (1995, p.21)

> um fenômeno pode ser melhor compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte, devendo ser analisado numa perspectiva integrada. Para tanto, o pesquisador vai a campo buscando "captar" o fenômeno em estudo a partir da perspectiva das pessoas nele envolvidas, considerando todos os pontos

de vista relevantes.

Devido à impossibilidade de ter encontros presenciais, o trabalho se desenvolveu de modo síncrono, que segundo Pantoni e Cruz (2015) a definem como uma interação entre professor e aluno por meio de vídeos chamadas de forma *on-line*, possuindo uma interatividade semelhante ao um encontro presencial, só que remoto.

4.2 Campo e sujeitos da pesquisa

Esta atividade foi desenvolvida com 18 alunos, de uma turma do 9º ano, de uma Escola da Rede Pública de Ensino de Petrolina.

4.3 Procedimentos

A plataforma utilizada na elaboração de atividades de Matemática no contexto de aulas remotas foi *Mentimeter*.

Inicialmente, o professor da turma realizou uma revisão envolvendo medidas de tendência central. Em seguida, apresentou brevemente a proposta da Plataforma *Mentimeter*. Posteriormente, disponibilizou os dois links, contendo no total 4 questões, 1 (uma) sobre cada conceito. Após a resolução dos alunos, corrigiu-se as questões juntamente com os mesmos.

Por fim, foi proposto duas questões, uma em forma de *ranking* e uma em forma de nuvem de palavras, nas quais os estudantes expressaram suas ideias e/ou opiniões em consonância com os conceitos abordados na aula. Ao fim, foi solicitado uma devolutiva dos estudantes a respeito de suas impressões sobre a atividade, esse retorno se deu por meio de um questionário realizado no *Google* formulários.

5 | ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1 Análise dos dados obtidos durante a aplicação

1ª Etapa- Revisão sobre Medidas de Tendência Central: Moda, Média, Mediana e Média Ponderada.

Nessa etapa, foi ministrada uma aula pontuando as Medidas de Tendência Central (média aritmética, mediana, moda e média ponderada), descrevendo o conceito de cada uma dessas medidas e na sequência, resolvendo um exercício de fixação, conforme pode ser visto nas Figura 1.

Embora fosse uma revisão, alguns alunos ainda tinham dúvidas sobre o conteúdo, mas ao longo da aula, elas foram sendo solucionadas. Vale salientar que, nessa aula foram utilizados alguns recursos tecnológicos, como mesa digitalizadora, *slides* e a plataforma do *Google Meet*. Evidenciado assim, a importância da utilização desses recursos, assim como pontuado anteriormente por Flemming, Luz e Mello (2005), Oliveira (2015), Do Prado Moraes (2016) e Richit (2005) fazem parte da nova realidade vivida no período de aulas remotas.

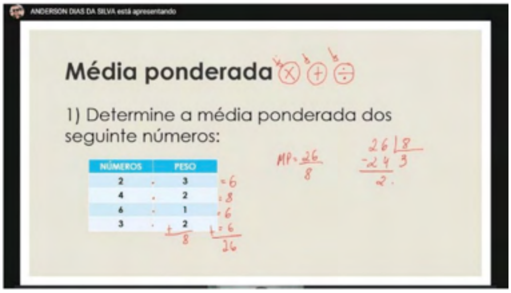


Figura 1 - Resolução de uma questão.

Fonte: Dados da pesquisa.

2ª Etapa- Resolução das questões pelos alunos

Nessa etapa, durante a mesma aula, os alunos foram direcionados a uma atividade previamente preparada no *Mentimete*r, conforme mostrado na Figura 2. Com um total de quatro questões, cada uma contendo uma medida de tendência central diferente. À medida que os alunos iriam respondendo as questões, automaticamente os gráficos com essas respostas eram atualizados para os professores. Posteriormente, esses gráficos com as respostas foram expostos para os alunos, para então ser discutidas as resoluções na próxima etapa.

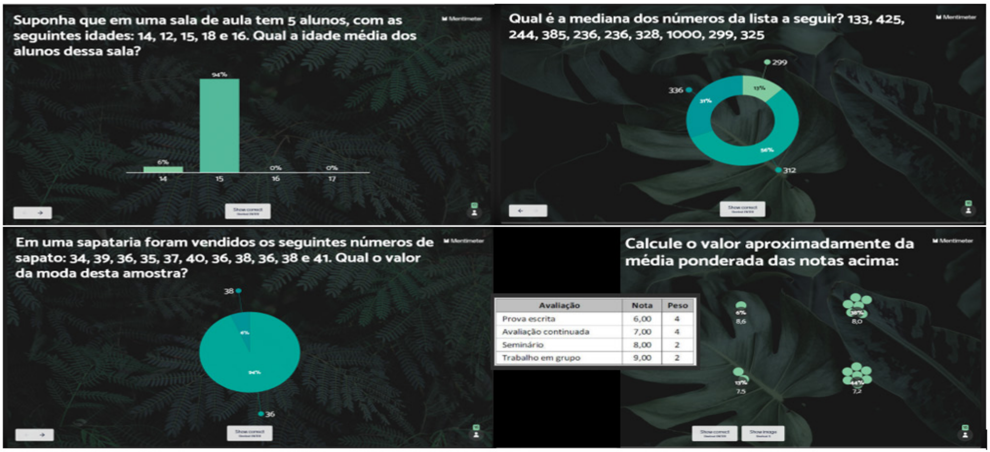


Figura 2 - Questões apresentadas no *Mentimeter*.

Fonte: Dados da pesquisa.

3ª Etapa- Correção das questões pelo professor, juntamente com os alunos.

Nessa etapa, foi realizada a correção da atividade descrita na segunda etapa, ocasião em que os alunos puderam acompanhar a correção apresentada pelo professor (ver Figura 3) e também ficaram à vontade para expor a sua própria resolução. Destacando a participação ativa do aluno, pontuada por Passos (2016), e que ficou evidente durante todo o processo da aula.

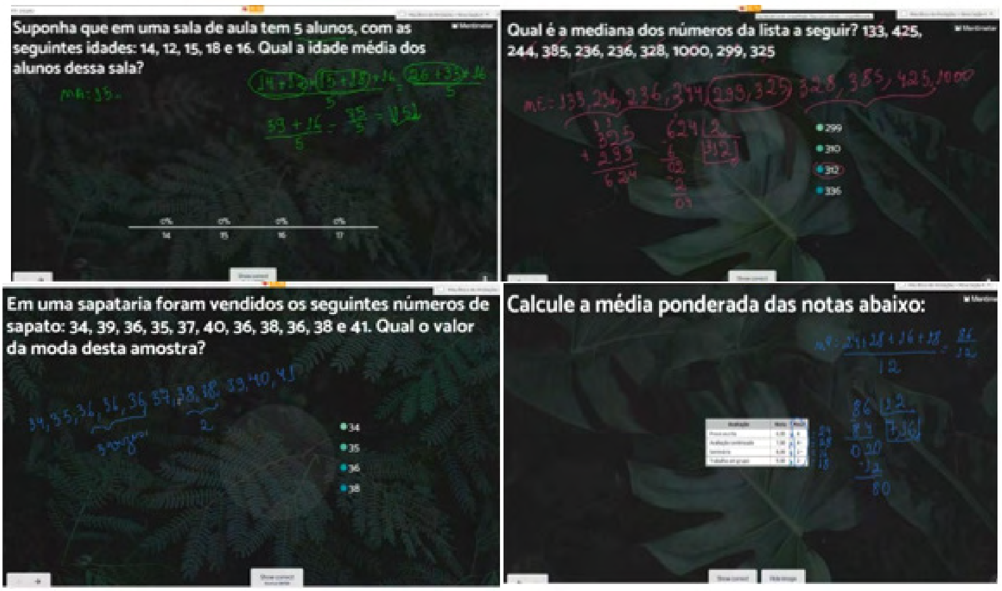


Figura 3 - Correção da atividade.

Fonte: Dados da pesquisa.

4ª Etapa- Resolução e exposição das respostas obtidas nas questões qualitativas em forma de *ranking* e nuvem de palavras, respectivamente.

Nessa etapa, os alunos foram orientados a responder duas questões no *Mentimeter*. Na primeira questão, cada aluno classificou dentre as medidas de tendência central apresentadas fazendo um *ranking*, em que a primeira colocada seria a medida mais fácil de aprender e a última, a mais difícil (ver Figura 4). Mais uma vez, fica evidente o direcionamento a uma metodologia ativa, permitindo sempre a participação do aluno durante todo o processo. Nesse sentido, é possível perceber que a Moda foi a medida elencada como a mais fácil e a Média Ponderada a mais difícil.

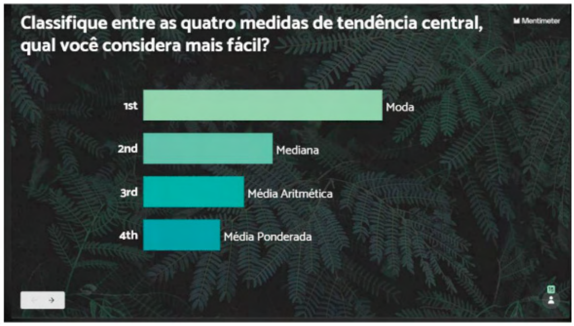


Figura 4 - *Ranking* com a classificação das Medidas de Tendência Central usando a plataforma *Mentimeter.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Na segunda questão, os alunos responderam em três palavras o que significa a Matemática para eles, e assim, foi possível montar uma nuvem de palavras com as respostas obtidas (ver figura 5), em que as palavras que apareceram com mais destaque numa fonte maior seriam as mais citadas pelos alunos.

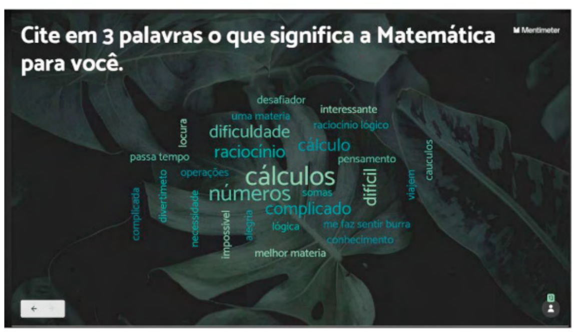


Figura 5- Nuvem de palavras com o significado de Matemática para os alunos, usando a plataforma *Mentimeter.*

Fonte: Dados da pesquisa.

Por meio das nuvens de palavras fornecida pela plataforma, constata-se que as palavras com maior evidência são cálculos, números, difícil e complicado, o que mostra que para esses estudantes a matemática ainda é vista como uma disciplina que envolve muitos cálculos e de difícil compreensão. Isso leva a sugerir que tais impressões podem influenciar na aprendizagem de conceitos matemáticos.

5ª Etapa- Feedback dos alunos por meio do questionário realizado de forma *on-line* no *Google* Formulários.

Nessa última etapa, os alunos foram convidados a responder uma pergunta no *Google* Formulários. Na figura 6, estão descritas algumas respostas relativas as impressões dos estudantes acerca da aula que participaram. No geral, eles gostaram bastante da aula, descreveram que conseguiram revisar o assunto, que foi uma aula muito boa e ainda que gostaram da interação com novos professores.

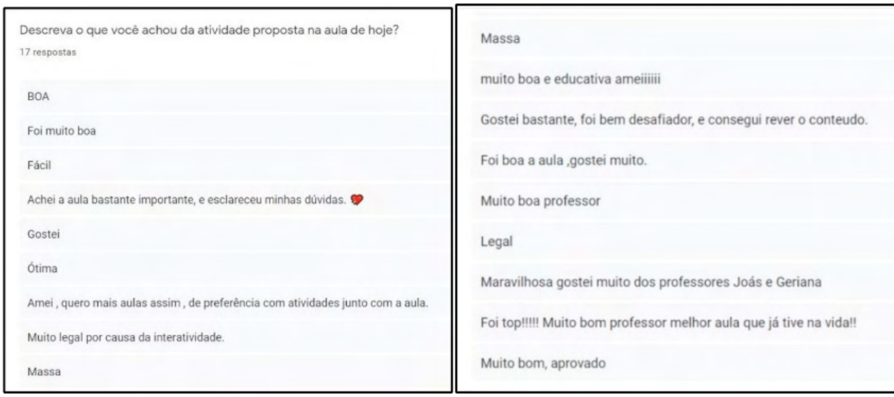


Figura 6- Respostas dos estudantes sobre a aula.

Fonte: Dados da pesquisa.

5.2 Potencialidades e dificuldades do uso da plataforma mentimeter observadas durante a atividade

A plataforma *Mentimeter* possibilita a exploração de diferentes tipos de perguntas, obtendo uma variedade bastante satisfatória de dados, seja na forma de *ranking*, nuvens de palavras, múltipla escolha, gráficos, etc.

Outra potencialidade a ser destacada é o acompanhamento em tempo real das respostas que podem ser utilizadas na correção, bem como, permite ao professor realizar a exposição das respostas apresentadas pelos alunos imediatamente após a resolução delas. Vale destacar ainda, a interatividade, o dinamismo e a curiosidade que esse recurso tecnológico permite agregar nas aulas de matemática.

Considerou-se como pontos negativos nesta atividade, a inviabilização de se identificar o aluno; o limite de dois *slides* por *link*, visto que foi utilizada a versão gratuita da plataforma; e a impossibilidade de baixar os resultados no formato *Excel*, sendo possível apenas em PDF.

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tomando-se por base o desenvolvimento dessa pesquisa, bem como, os relatos e a análise dos resultados obtidos, pôde-se concluir que o objetivo desse estudo foi alcançado, visto que foi possível revisar as medidas de tendência central de forma dinâmica e interativa, despertando o interesse e a curiosidade dos alunos, levando-os a participar efetivamente de todas as etapas da atividade vivenciada.

Nessa atividade, ainda pôde-se elencar contribuições da Plataforma *Mentimeter* tanto na perspectiva do educando quanto na do educador. Para o professor, a plataforma é uma aliada que permite explorar diferentes tipos de perguntas; favorece o acompanhamento em tempo real das respostas; potencializa a aprendizagem por meio da exposição das respostas dadas pelos alunos; agrega dinamismo e interatividade às aulas síncronas.

Por outro lado, para o aluno, essa metodologia se apresenta como algo diferenciado, pois além de exigir um esforço para responder imediatamente os problemas que lhe são propostos; é uma ferramenta dinâmica, atraente, que o estimula a participar e interagir no ambiente de aula remota. Por fim, tem-se como sugestão para os próximos trabalhos, a utilização do *Mentimeter* abordando outros conteúdos de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALTINO FILHO, Humberto Vinício; NUNES, Célia Maria Fernandes; FERREIRA, Ana Cristina. METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA: O QUE DIZEM AS PESQUISAS?. **Pensar Acadêmico**, v. 18, n. 1, p. 172-184, 2020.

DO PRADO MORAES, César Augusto. Narrativas de experiências de discentes a partir do processo da utilização de tecnologias digitais de informação e comunicação no ensino de matemática do ensino fundamental. IN: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA, 20., 2016. **Anais** [...]. Curitiba-PR, 2016.

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; MELLO, Ana Cláudia Collaço de. **Tendências em educação Matemática. 2ª edição.** Universidade do sul de Santa Catarina. Palhoça. UnisulVirtual, 2005.

GODOY, Arilda Schmidt. **Pesquisa qualitativa:** tipos fundamentais. Revista de Administração de empresas, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

LUBACHEWSKI, Gesseca Camara; CERUTTI, Elisabete. Tecnologias digitais: uma metodologia ativa no processo ensino-aprendizagem. In: VIII JORNADA NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,2020, Universidade de Passo Fundo. **Anais** [...]. Passo Fundo: UPF, 2020.

MALTEMPI, Marcus Vinicius. **Educação matemática e tecnologias digitais:** reflexões sobre prática e formação docente/Mathematics education and digital technologies: Reflexions about the practice in teacher education. Acta Scientiae, v. 10, n. 1, p. 59-67, 2008.

MATTOS, Francisco Roberto Pinto; MORAES, Thiago Guimarães; GUIMARÂES, Luiz Carlos. Tecnologias de informação na comunicação de objetos matemáticos. JAHN, Ana Paula; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. In: **Tecnologias e Educação Matemática:** ensino, aprendizagem e formação de professores. Recife: SBEM, 2010.

MORAN, José. **Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda**. Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, p. 35-76, 2018.

MOREIRA, J. António; HENRIQUES, Susana; BARROS, Daniela Melaré Vieira. Transitando de um ensino remoto emergencial para uma educação digital em rede, em tempos de pandemia. **Dialogia**, p. 351-364, 2020.

OLIVEIRA, Cláudio de. **TIC'S na educação:** a utilização das tecnologias da informação e comunicação na aprendizagem do aluno. Pedagogia em ação, v. 7, n. 1, 2015.

PANTONI, Rodrigo Palucci; CRUZ, Nelly Kazan Sancho. Aprendizagem Colaborativa no EAD sob a Perspectiva do Uso de Ferramentas Síncronas e Assíncronas. In: **v. 1 (2015): I Congresso de Educação Profissional e Tecnológica do IFSP**. 2015.

PASSOS, Pedro Paulo Sena. **Metodologias Ativas e Tecnologia:** uma proposta de aula sobre tópicos contextualizados de Função Quadrática com o auxílio do programa Socrative. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

RICHIT, Adriana. **Projetos em geometria analítica usando software de geometria dinâmica:** repensando a formação inicial docente em matemática. 2005.

SANTOS, Gilson Pedroso; MAFRA, José Ricardo Souza. **O ensino de matemática por atividades: uma interface entre recursos tecnológicos e o pensamento computacional.** REMATEC, v. 15, n. 35, p. 79-99, 2020.

SOUSA, Igor Gabriel Santos. **O ensino de Estatística e a BNCC: um estudo a partir das contribuições das metodologias ativas.** 2020. 71 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba, 2020.

ZULATTO, Rúbia Barcelos Amaral. **Professores de Matemática que Utilizam Softwares de Geometria Dinâmica:** suas características e perspectivas. 2002.

CAPÍTULO 12

MODELO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE RESTAURAÇÃO DE SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA ELÉTRICA

Data de aceite: 01/12/2021
Data de submissão: 03/09/2021

Guilherme Florindo Afonso
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – FEIS/Unesp
Ilha Solteira, SP

Antonio Marcos Cossi
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – FEIS/Unesp
Ilha Solteira, SP
http://lattes.cnpq.br/0899728893178335

RESUMO: Neste trabalho é apresentado um modelo matemático e a técnica de solução BVNS (*Basic Variable Neighborhood Search*) para resolver o problema de restauração de sistemas de distribuição de energia elétrica. O modelo matemático consiste em minimizar as seções do sistema que ficariam sem energia após o seu restabelecimento, sujeito às restrições técnicas, físicas e operacionais do sistema de distribuição. Trata-se de um problema de programação não linear inteiro misto (PNLIM) em que as propostas de solução são obtidas através do algoritmo BVNS. A estrutura de vizinhança do algoritmo BVNS é baseada na técnica Representação Nó-Profundidade (RNP). A melhor solução é aquela que tiver o maior número de seções restauradas, obedecendo as restrições do problema.

PALAVRAS-CHAVE: Restauração, busca em vizinhança variável, sistemas de distribuição.

MODEL TO SOLVE PROBLEMS OF RESTORATION OF ELECTRIC POWER DISTRIBUTION SYSTEMS

ABSTRACT: This work presents a mathematical model and the BVNS (*Basic Variable Neighborhood Search*) solution technique to solve the problem of restoration of electric power distribution systems. The mathematical model consists of minimizing the sections of the system that would be without power after its restoration, subject to the technical, physical and operational restrictions of the distribution system. It is a mixed integer nonlinear programming problem (MINLP) in which the solution proposals are obtained through the BVNS algorithm. The neighborhood structure of the BVNS algorithm is based on the Node-Depth Representation technique. The best solution is the one with the highest number of restored sections, obeying the constraints of the problem.

KEYWORDS: Restoration, basic variable neighborhood search, distribution systems.

1 I INTRODUÇÃO

O problema de restauração de sistemas de distribuição de energia elétrica (PRSDEE) consiste em restabelecer o sistema reenergizando regiões da rede que ficaram sem energia elétrica devido a interrupções permanentes na rede. Devido a essas interrupções, para manter a qualidade do fornecimento de energia para os consumidores e consequentemente não descumprir as metas referentes aos índices de qualidade estabelecidos pelos órgãos reguladores, as concessionárias de energia vêm investindo no estudo de modelos e técnicas para o desenvolvimento de ferramentas capazes de minimizar os custos desnecessários e melhorar os índices de qualidade dos serviços prestados aos consumidores. Este fato justifica os investimentos por parte das empresas, já que o descumprimento dessas metas acarretaria multas para a concessionária de energia.

Neste trabalho, o PRSDEE consiste em restabelecer o sistema através de uma topologia de rede que restaure o maior número possível de seções após a interrupção no fornecimento de energia elétrica. O objetivo é tentar minimizar a quantidade de seções da rede de distribuição que ficariam sem energia após o estado restaurativo. Trata-se de um problema de programação não linear inteiro misto (PNLIM), em que cada proposta de solução topológica da rede é obtida através do algoritmo BVNS (*Basic Variable Neighborhood Search*), que significa Busca Básica em Vizinhança Variável (HANSEN, 2001). A estrutura de vizinhança do BVNS é baseada na técnica RNP (Representação Nó-Profundidade) através de uma quantidade de podas na rede (SANTOS, 2007), alterando assim sua estrutura. Além disso, o procedimento de busca local utilizado pelo algoritmo para promover a mudança na estrutura de vizinhança consiste em aplicar podas nas seções afetadas pelas faltas utilizando um dos operadores da RNP.

O objetivo do modelo proposto utilizando o algoritmo BVNS é recompor a rede de distribuição através de alterações topológicas de forma a restabelecer a maior quantidade possível de consumidores que foram afetados pela falha e que ficaram sem energia. Assim, o problema da reconfiguração de redes de distribuição aparece como uma questão a ser resolvida nos diversos problemas de restauração de redes. Trata-se de um problema de otimização combinatória não linear e complexo, em que as regras adotadas pelas concessionárias podem não ser eficientes. Neste caso, justificam-se os estudos e desenvolvimentos de modelos e técnicas de solução aplicadas na resolução deste tipo de problema.

Para validar o modelo proposto, apresentam-se resultados de testes feitos em um sistema de distribuição proveniente da literatura (PÁDUA, 2015). Trata-se de um sistema de distribuição de média tensão e de médio porte contendo 54 seções de carga e 3 subestações.

2 | MODELO UTILIZANDO ALGORITMO BVNS

No PRSDEE a função objetivo, equação (1), procura minimizar a quantidade de cargas (S_a) das seções i do sistema que ficariam sem energia no caso de uma interrupção permanente (defeito na rede), em relação ao total de cargas do sistema (St), mais a quantidade mínima de chaveamentos (CHe), através da abertura e fechamento de chaves j do sistema, em relação a quantidade máxima possível de chaveamentos (CHt). A variável

X_i indica se a seção pertence (X_i = 1) ou não (X_i = 0) ao sistema.

A formulação matemática é descrita a seguir.

$$Min \quad fo \tag{1}$$

$$fo = \frac{\sum_{i=1}^{NS} Sa_i * X_i}{St} + \frac{\sum_{i=1}^{NLch} * CHe_i}{CHt} \; (\%) \tag{2}$$

As restrições do problema são formadas por um conjunto de equações e inequações que representam: balanço de potência (leis de *kirchhoff*), queda de tensão nas seções da rede, capacidade de operação dos cabos, capacidade de operação das subestações e a radicalidade do sistema.

No PRSDEE as possibilidades de soluções são geradas através de alterações topológicas utilizando a técnica conhecida como Representação Nó-profundidade (RNP), que utiliza os operadores PAO e CAO para promover tais alterações (SANTOS, 2007). Os operadores PAO e CAO trabalham transferindo partes da rede de um alimentador para outro alimentador através da abertura e fechamento de chaves de manobras. Assim, um vizinho de uma configuração corrente se diferencia devido ao estado das chaves de manobras. O Operador PAO faz operações mais simples na rede abrindo e fechando chaves adjacentes e o operado CAO faz operações mais bruscas na rede abrindo e fechando chaves que não são adjacentes. Em ambas as operações o sistema deve-se manter radial.

Para encontrar as possíveis soluções através da metaheurística BVNS, desenvolveu-se a seguinte estrutura: (i) a configuração inicial do BVNS é gerada através de uma heurística que consiste em religar as seções desenergizadas (exceto a seção da falta) através de seções vizinhas energizadas, de forma aleatória, mesmo que a solução obtida constitua uma solução não factível; (ii) a estrutura de vizinhança do algoritmo BVNS é baseada na quantidade de manobras feitas pelos operadores da RNP, PAO e CAO, entre alimentadores que possuem seções afetadas pela falta e seus vizinhos, e assim sucessivamente, da seguinte forma: Vizinhança N_1: realiza 1 poda no sistema entre alimentadores; Vizinhança N_2: realiza 2 podas no sistema entre alimentadores; Vizinhança N_k: realiza *k* podas no sistema entre alimentadores; (iii) o procedimento de busca local do BVNS é feito através do operador PAO; (iv) cada solução é avaliada através de uma função de adaptação composta pela função objetivo mais um termo de penalização das soluções que violarem as restrições; (v) o critério de parada consiste em analisar a quantidade de iterações em que a solução não melhora. Neste caso, se após um determinado número de iterações a solução não melhorar, o processo é considerado convergido.

O algoritmo BVNS é descrito da seguinte maneira (HANSEN, 2001):

1. Definição do conjunto de estruturas de vizinhança $N_k(x)$;
2. Definição da quantidade máxima (k_{max}) de estruturas de vizinhança;
3. Encontrar solução inicial x_0;

4. Fazer $x \leftarrow x_0$;

5. Enquanto não for satisfeito o critério de parada,

    (a) Fazer $k \leftarrow 1$ (Estrutura de vizinhança N_1);

    (b) Enquanto $k \leq k_{max}$:

        i. Gerar aleatoriamente $x' \in N_k(x)$ através dos operadores PAO e CAO;

        ii. Aplicar busca local, tendo x' como solução inicial, através do operador PAO e encontrar o vizinho x'';

        iii. Se $f(x'') < f(x)$,

            A. Então $x \leftarrow x''$ e $k \leftarrow 1$;

            B. Senão $k = k + 1$ (Muda a estrutura de vizinhança);

        iv. Fim se;

    (c) Fim enquanto;

6. Fim enquanto;

3 | RESULTADOS

O algoritmo BVNS implementado para a solução do modelo proposto de restauração de sistemas de distribuição, foi testado em um sistema de 54 seções (PÁDUA, 2015). Nos testes considerou-se que todas as linhas do sistema possuem algum tipo de dispositivo de seccionamento. Os testes foram feitos em um computador Intel Core i7 de 3,10GHz e com 8GB de memória RAM.

De acordo com a falta na seção 3, as seções 4, 5, 6, 7, 8, 26,27 e 28 ficaram sem energia. Como solução, o algoritmo BVNS não conseguiu restaurar apenas as seções 5 e 26. Para a falta na seção 43, as seções 13, 31 e 37 ficaram desenergizadas. Para este caso, o algoritmo BVNS conseguiu restaurar todas as seções que ficaram desenergizadas. Do total de cargas que ficaram desenergizadas pelas faltas nas seções 3 e 43, 25,48 (%) não foram restauradas, e do total de chaveamentos (18 chaveamentos possíveis) para o restabelecimento das seções desenergizadas, foram utilizados 33 (%) (6 chaveamentos), obtendo assim uma fo = 58,48 (%). O tempo de simulação foi de 2,1 segundos.

4 | CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma ferramenta para restauração de sistemas de distribuição após a ocorrência de faltas permanentes na rede, utilizando a metaheurística *Basic Variable Neighborhood Search* como técnica de solução, cuja estrutura de vizinhança e sistema de codificação são baseados na técnica Representação Nó-Profundidade. De acordo com os resultados dos testes, o algoritmo foi capaz de restaurar um conjunto de seções desenergizadas devido às faltas de forma otimizada, exceto as seções da falta, obedecendo a critérios técnicos e operacionais da rede. Ressalta-se que a ferramenta pode ser utilizada pelas concessionárias de energia elétrica na obtenção de resultados satisfatórios para a restauração do sistema elétrico através do remanejamento adequado de cargas, que por algum motivo (defeito ou desligamento programado) ficariam desligadas, para seções energizadas da rede.

REFERÊNCIAS

HANSEN, P.; MLADENOV, N. **Variable neighborhood search: principles and applications**. European Journal of Operational Research, v. 130, p. 449-467, 2001.

PÁDUA, S. G. B.; COSSI, A. M.; MANTOVANI, J. R. S. **Planning of Medium-Voltage Electric Power Distribution Systems through a Scatter Search Algorithm**. IEEE Latin America Transactions, v. 13, n. 8, p. 2637-2645, 2015.

SANTOS, A. C.; DELBEM, A. C. B.; BRETAS, N. **Representação nó-profundidade para algoritmos evolutivos aplicados a minimização de perdas resistivas em sistemas de distribuição**. Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - VIII SBAI, 2007.

CAPÍTULO 13

ESTILOS DE APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS A NIVEL LICENCIATURA DE INGENIERÍA EN PUEBLA

Data de aceite: 01/12/2021
Data de submissão: 22/09/2021

Carlos David Zapata y Sánchez
Docente independiente en la actualidad
Ha sido docente de Matemáticas y Métodos Numéricos en la UDLAP, en la Ibero Puebla, en la UPAEP y en la U. Anáhuac de Puebla, México
ORCID 0000-0003-2915-5068

María Guadalupe López Molina
Académica de tiempo completo en el Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Ibero Puebla, México
ORCID 0000-0003-2915-5068

RESUMEN: Entre los objetivos del estudio está el caracterizar los estilos de aprendizaje de los alumnos de métodos numéricos en las escuelas de ingeniería en Puebla. Hasta el momento se ha aplicado el Inventario de estilos de aprendizaje propuesto por Felder y Soloman a un grupo piloto de diferentes carreras de Ingeniería en diversas Instituciones en Puebla. Estos resultados serán útiles para proponer estrategias constructivas de aprendizaje que complementen los estilos de aprendizaje. La materia de Métodos Numéricos se utiliza debido a que es una materia que integra conocimientos de Matemáticas (Cálculo, Álgebra y Ecuaciones) con destrezas de programación.
PALABRAS CLAVE*:* Estilos de aprendizaje, métodos numéricos, educación en ingeniería.

LEARNING STYLES OF NUMERICAL METHODS STUDENTS AT UNDERGRADUATE LEVEL IN ENGINEERING IN PUEBLA

ABSTRACT: Among the objectives of the study is to characterize the learning styles of numerical methods students in engineering schools in Puebla. So far, the Learning Styles Inventory proposed by Felder and Soloman has been applied to a pilot group of different Engineering careers in various Institutions in Puebla. These results will be useful to propose constructive learning strategies that complement the learning styles. The subject of Numerical Methods is used since it is a subject that integrates knowledge of Mathematics (Calculus, Algebra and Equations) with programming skills.
KEYWORDS: Learning Styles, Numerical Methods, Engineering Education.

INTRODUCCIÓN

La ingeniería es la profesión en la que el conocimiento de las ciencias matemáticas y naturales adquirido mediante el estudio, la experiencia y la práctica, se aplica con buen juicio a fin de desarrollar las formas en que se pueden utilizar de manera económica, los materiales y las fuerzas de la naturaleza en beneficio de la humanidad, como refiere Wright (Wright, 2002).

[…] El Ingeniero … es un profesional con conocimientos, habilidades y valores, que le permiten poner al servicio de la humanidad y en particular de la sociedad … el desarrollo de la ciencia y la tecnología, con racionalidad económica, adecuado uso de los recursos humanos y materiales, minimizando el consumo de naturaleza, el deterioro del medio ambiente y preservando los principios éticos de su sociedad […] (Perdomo, 2005)

El CACEI (Consejo de Acreditación de la enseñanza de la Ingeniería, AC.) (CACEI, 2018) en México define en su documento denominado Marco de Referencia 2018, publicado y en vigencia a partir del 15 de febrero del 2019, los "atributos del egresado" a considerar por las escuelas de ingeniería en sus planes de estudio.

Para cumplir con estos perfiles y algunos de los atributos mencionados, los planes de estudio o mapas curriculares de una buena parte de las escuelas de ingeniería a nivel licenciatura, tanto en el país como en el resto del mundo, incluyen la materia de Métodos Numéricos (Análisis Numérico, Computación Científica, Ingeniería Matemática, Métodos Computacionales Numéricos, y otros nombres diversos) dentro del área formativa de la matemática en ingeniería.

Esta materia se puede conceptualizar como la disciplina ocupada de describir, analizar y crear algoritmos numéricos que permitan resolver problemas matemáticos, en los que estén involucradas cantidades numéricas, con una precisión determinada para la solución de problemas reales.

Para mejorar las habilidades de pensamiento creativo y de solución de problemas en los alumnos de ingeniería, a las escuelas les corresponde buscar el mejoramiento de la calidad de la enseñanza; lo que requiere la comprensión de los estilos de aprendizaje de los alumnos y en consecuencia diseñar los métodos o estrategias de enseñanza que se adecuen a estos estilos. Entendiendo por aprendizaje, según la RAE: la adquisición de una conducta duradera mediante la práctica.

En este trabajo se busca entender primeramente los estilos de aprendizaje de los alumnos, analizándolos como individuos (y su circunstancia) para adecuar los estilos de enseñanza, particularmente en el área de las matemáticas y los Métodos Numéricos. Posteriormente se buscará facilitar las condiciones para que el alumno construya conocimiento nuevo a partir de conocimiento previo, retos y estímulos intelectuales. Si el aprendizaje es significativo, los alumnos desarrollarán la capacidad de resolver problemas con base en la experiencia adquirida en la solución de problemas lo más cercanos posible a la realidad.

Según Keefe (Keefe, 1979), los estilos de aprendizaje son los comportamientos cognitivos, afectivos y psicológicos que actúan como indicadores estables de la forma como los alumnos perciben, responden e interactúan con los ambientes de aprendizaje. El concepto de estilos de aprendizaje ha sido aplicado a una variedad de atributos y diferencias de los alumnos.

Algunos alumnos se sienten cómodos con enfoques teóricos y abstracciones, otros prefieren los hechos y los fenómenos observables, hay quienes se sienten como en casa con el aprendizaje activo mientras que unos más prefieren la introspección y el análisis reflexivo. Unos solicitan las presentaciones visuales mientras que otros se desempeñan bien con explicaciones verbales.

Un estilo de aprendizaje no es superior ni preferible que otro, son sencillamente diferentes; con fortalezas y debilidades diferentes. El reto de la enseñanza es equipar a los alumnos con las habilidades asociadas a cada categoría de estilo de aprendizaje, independientemente de las preferencias de los aprendices, ya que en el ejercicio de la profesión se va a requerir que estas habilidades funcionen efectivamente.

Alonso et al (Alonso, Gallego, & Honey, 2005), definen los estilos de aprendizaje como "los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos que sirven como indicadores relativamente estables, de cómo los alumnos perciben interacciones y responden a sus ambientes de aprendizaje".

Pero encontramos diferentes acepciones de este concepto:

- Un EA está basado en ciertas características biológicas, fisiológicas, emocionales, psicológicas, y sociológicas.
- Un EA controla la forma como un alumno capta, procesa, almacena, recuerda, comprende y utiliza la información.
- Un EA es una combinación que un alumno tiene de formas de pensar, de relacionarse con otros y herramientas o experiencias de aprendizaje.
- Los EA son virtudes, habilidades e inclinaciones de una persona para el aprendizaje.
- Un EA finalmente, es la forma distinta en que cada quien percibe el universo.

Aunque, por lo general utilizamos un cierto conjunto de estrategias según lo que deseamos aprender, desarrollamos algunas preferencias que van cambiando de acuerdo con la edad, la motivación, la tarea a realizar y el conocimiento previo; esto hace que los estilos de aprendizaje no constituyen categorías o escalas cerradas. Los alumnos van aprendiendo o descubriendo cuáles son los rasgos que mejor perfilan su estilo de aprendizaje y lo pueden evolucionar para obtener mejores resultados.

Si un 75% de los docentes somos secuenciales y analíticos para la presentación de nuestras lecciones, un 30% de nuestros alumnos tienen un estilo de aprendizaje del tipo reflexivo que coincide con este estilo de enseñanza, pero los restantes no aprenden así.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO

Estudiamos el modelo de estilos de aprendizaje que Felder menciona en la literatura de educación en ingeniería (Centro de recursos para el aprendizaje y la investigación, 2010).

Modelo de Felder-Silverman (Felder & Silverman, 1988)

Para establecer las categorías de este modelo. Felder plantea el siguiente análisis:

1. ¿Qué tipo de información prefieren percibir los alumnos?

Sensitiva (vistas, sonidos, sensaciones físicas) o

Intuitiva (memorias, pensamientos, reflexiones.

2. ¿Qué tipo de información sensitiva perciben con mayor efectividad?

Visual (Diagramas, figuras, diagramas de flujo, demostraciones) o

Verbal (explicaciones orales o escritas)

3. ¿Cómo prefieren los alumnos procesar la información?

Activo (involucrándose en una actividad física o discusión)

Reflexivo (vía la introspección) Coincide con los Tipos 2 y 3 de Kolb y la escala introvertido-extrovertido del modelo MBTI.

4. ¿Cómo progresan los alumnos hacia la comprensión?

Secuencial (en una progresión lógica lineal o pasos incrementales

Global (saltos de visión global comprendiendo el material y relacionando con aprendizajes previos para buscar soluciones innovativas)

En función de estas preguntas Felder y Soloman (Felder & Brent, 2005) desarrollaron un instrumento para evaluar las preferencias de los alumnos de ingeniería dentro de estas cuatro escalas: el Índice de Estilos de Aprendizaje (ILS).

El ILS de Felder consta de 44 preguntas con respuestas de opción múltiple a) o b). No hay respuestas incorrectas y deben responderse todas las preguntas (ver cuestionario en Apéndice A).

Se ha piloteado el instrumento ILS a varios grupos de distintas carreras de ingeniería en diferentes instituciones en Puebla con los siguientes resultados preliminares.

1. 30 personas respondieron el cuestionario
2. 32% Femenino; 68% Masculino
3. 40% cursan el 6o. semestre de su carrera
4. El promedio de las edades es de 21 años

La distribución por universidades se muestra en el siguiente cuadro:

Universidades		
BUAP	13%	4
Otra.	7%	2
U. Ibero Puebla	30%	9
UDLAP	13%	4
UMAD	3%	1
UPAEP	33%	10

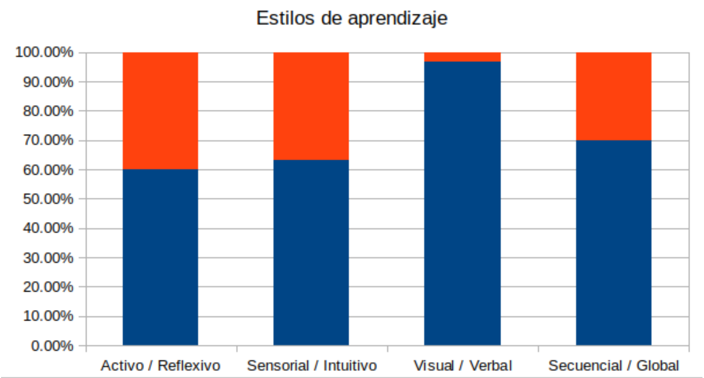
La distribución por carreras se muestra en el siguiente cuadro:

Carreras		
Ing. Mecánica	7%	2
Ing. Diseño Automotriz	3%	1
Ing. Electrónica	7%	2
Ing. Industrial	13%	4
Ing. Mecatrónica	10%	3
Ing. Química	37%	11
Ing. Sistemas Automotrices	3%	1
Sistemas Computacionales	20%	6

Una vez realizados los perfiles de cada alumno, mostramos un resumen de los resultados en el siguiente cuadro:

	Activo	Sensorial		Visual	Secuencial
a	**60%**	**63%**	a	**97%**	**70%**
	Reflexivo	*Intuitivo*		*Verbal*	*Global*
b	40%	37%	b	3%	30%

Si representamos estos resultados gráficamente, podemos ver que los alumnos de las escuelas de ingeniería en Puebla muestran un perfil de estilos de aprendizaje como: *activos*, *sensoriales*, (muy) *visuales* y *secuenciales*.



COMENTARIOS FINALES

Sería aquí el espacio para añadir los comentarios finales, que casi siempre incluyen un resumen de los resultados, las conclusiones, y las recomendaciones que hacen los autores para seguir el trabajo. Esta sección puede tener subsecciones.

Resumen de resultados

En este trabajo se estudiaron los estilos de aprendizaje, enfocando el interés en los alumnos de escuelas de ingeniería en Puebla. Los resultados de la investigación incluyen un análisis de las respuestas del cuestionario denominado ILS (Index of Learning Styles) de Richard Felder y Barbara Soloman.

Conclusiones

Los resultados demuestran que los alumnos de las escuelas de ingeniería en Puebla muestran un perfil de estilos de aprendizaje como: *activos*, *sensoriales*, (muy) *visuales* y *secuenciales*. Estos son apenas resultados preliminares, ya que se busca analizar una población mayor dentro de este contexto.

Recomendaciones

Este es un punto de partida para proponer estrategias de aprendizaje que complementen los estilos de aprendizaje. Nos acercaremos a el aprendizaje basado en problemas, buscando que los alumnos incorporen técnicas y métodos numéricos. Esto les dará un panorama de lo que significa trabajar en problemas reales.

REFERENCIAS

Alonso, Gallego y Honey: **Los Estilos de Aprendizaje, Procedimientos de diagnóstico y Mejora**. Universidad de Deusto, Instituto de Ciencias de la Educación. Ediciones Mensajero, 7ª. Edición, 2005

CACEI: http://www.cacei.org/docs/marco_ing_2018.pdf

Felder, R. M., & Brent, R. (2005). **Understanding Student differences. Engineer Education**, 57-72.

Felder, R. M., & Silverman, L. (1988). **Learning and teaching styles in engineering education**. Obtenido de Engineering Education, 78(7), 674-681: http://www4.ncsu.edu/unity/lockers/users/f/felder/public/Papers/LS-1988.pdf

Keefe, J. (1979). **Learning Style: An Overview**. En J. Keefe, Student Learning Styles: Diagnosing and Prescribing Programs. Reston, VA: National Association of Secondary Schools Principals.

Perdomo, D. (Sep-dic de 2005). **ALGUNAS CONSIDERACIONES EN LA FORMACIÓN DE LOS INGENIEROS PARA EL 2do DECENIO DEL 3er MILENIO**, Consultada por internet el 12 de jun de 2012, de www.redalyc.org: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=225118188001

APÉNDICE

Cuestionario utilizado en la investigación

Inventario de Estilos de Aprendizaje (tomado del Modelo de Felder y Silverman)

1. Entiendo mejor algo

a) si lo practico.

b) si pienso en ello.

2. Me considero

a) realista.

b) innovador.

3. Cuando pienso acerca de lo que hice ayer, es más probable que lo haga sobre la base de

a) una imagen.

b) palabras.

4. Tengo tendencia a

a) entender los detalles de un tema pero no ver claramente su estructura completa.

b) entender la estructura completa pero no ver claramente los detalles.

5. Cuando estoy aprendiendo algo nuevo, me ayuda

a) hablar de ello.

b) pensar en ello.

6. Si yo fuera profesor, yo preferiría dar un curso

a) que trate sobre hechos y situaciones reales de la vida.

b) que trate con ideas y teorías.

7. Prefiero obtener información nueva de

a) imágenes, diagramas, gráficas o mapas.

b) instrucciones escritas o información verbal.

8. Una vez que entiendo

a) todas las partes, entiendo el total.

b) el total de algo, entiendo como encajan sus partes.

9. En un grupo de estudio que trabaja con un material difícil, es más probable que

a) participe y contribuya con ideas.

b) no participe y solo escuche.

10. Es más fácil para mí

a) aprender hechos.

b) aprender conceptos.

11. En un libro con muchas imágenes y gráficas es más probable que

a) revise cuidadosamente las imágenes y las gráficas.

b) me concentre en el texto escrito.

12. Cuando resuelvo problemas de matemáticas

a) generalmente trabajo sobre las soluciones con un paso a la vez.

b) frecuentemente sé cuales son las soluciones, pero luego tengo dificultad para imaginarme los pasos para llegar a ellas.

13. En las clases a las que he asistido

a) he llegado a saber como son muchos de los estudiantes.

b) raramente he llegado a saber como son muchos estudiantes.

14. Cuando leo temas que no son de ficción, prefiero

a) algo que me enseñe nuevos hechos o me diga como hacer algo.

b) algo que me dé nuevas ideas en que pensar.

15. Me gustan los maestros

a) que utilizan muchos esquemas en el pizarrón.

b) que toman mucho tiempo para explicar.

16. Cuando estoy analizando un cuento o una novela

a) pienso en los incidentes y trato de acomodarlos para configurar los temas.

b) me doy cuenta de cuáles son los temas cuando termino de leer y luego tengo que regresar y encontrar los incidentes que los demuestran.

17. Cuando comienzo a resolver un problema de tarea, es más probable que

a) comience a trabajar en su solución inmediatamente.

b) primero trate de entender completamente el problema.

18. Prefiero la idea de

a) certeza.

b) teoría.

19. Recuerdo mejor

a) lo que veo.

b) lo que oigo.

20. Es más importante para mí que un profesor

a) exponga el material en pasos secuenciales claros.

b) me dé un panorama general y relacione el material con otros temas.

21. Prefiero estudiar

a) en un grupo de estudio.

b) solo.

22. Me considero

a) cuidadoso en los detalles de mi trabajo.

b) creativo en la forma en la que hago mi trabajo.

23. Cuando alguien me da direcciones de nuevos lugares, prefiero

a) un mapa.

b) instrucciones escritas.

24. Aprendo

a) a un paso constante. Si estudio con ahínco consigo lo que deseo.

b) en inicios y pausas. Me llego a confundir y súbitamente lo entiendo.

25. Prefiero primero

a) hacer algo y ver que sucede.

b) pensar como voy a hacer algo.

26. Cuando leo por diversión, me gustan los escritores que

a) dicen claramente lo que desean dar a entender.

b) dicen las cosas en forma creativa e interesante.

27. Cuando veo un esquema o bosquejo en clase, es más probable que recuerde

a) la imagen.

b) lo que el profesor dijo acerca de ella.

28. Cuando me enfrento a un cuerpo de información

a) me concentro en los detalles y pierdo de vista el total de la misma.

b) trato de entender el todo antes de ir a los detalles.

29. Recuerdo más fácilmente

a) algo que he hecho.

b) algo en lo que he pensado mucho.

30. Cuando tengo que hacer un trabajo, prefiero

a) dominar una forma de hacerlo.

b) intentar nuevas formas de hacerlo.

31. Cuando alguien me enseña datos, prefiero

a) gráficas.

b) resúmenes con texto.

32. Cuando escribo un trabajo, es más probable que

a) lo haga (piense o escriba) desde el principio y avance.

b) lo haga (piense o escriba) en diferentes partes y luego las ordene.

33. Cuando tengo que trabajar en un proyecto de grupo, primero quiero

a) realizar una “tormenta de ideas” donde cada uno contribuye con ideas.

b) realizar la “tormenta de ideas” en forma personal y luego juntarme con el grupo para comparar las ideas.

34. Considero que es mejor elogio llamar a alguien

a) sensible.

b) imaginativo.

35. Cuando conozco gente en una fiesta, es más probable que recuerde

a) cómo es su apariencia.

b) lo que dicen de sí mismos.

36. Cuando estoy aprendiendo un tema, prefiero

a) mantenerme concentrado en ese tema, aprendiendo lo más que pueda de él.

b) hacer conexiones entre ese tema y temas relacionados.

37. Me considero

a) abierto.

b) reservado.

38. Prefiero cursos que dan más importancia a

a) material concreto (hechos, datos).

b) material abstracto (conceptos, teorías).

39. Para divertirme, prefiero

a) ver televisión.

b) leer un libro.

40. Algunos profesores inician sus clases haciendo un bosquejo de lo que enseñarán. Esos bosquejos son

a) algo útiles para mí.

b) muy útiles para mí.

41. La idea de hacer una tarea en grupo con una sola calificación para todos

a) me parece bien.

b) no me parece bien.

42. Cuando hago grandes cálculos

a) tiendo a repetir todos mis pasos y revisar cuidadosamente mi trabajo.

b) me cansa hacer su revisión y tengo que esforzarme para hacerlo.

43. Tiendo a recordar lugares en los que he estado

a) fácilmente y con bastante exactitud.

b) con dificultad y sin mucho detalle.

44. Cuando resuelvo problemas en grupo, es más probable que yo

a) piense en los pasos para la solución de los problemas.

b) piense en las posibles consecuencias o aplicaciones de la solución en un amplio rango de campos.

CAPÍTULO 14

ANÁLISIS COGNITIVO DE ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO

Data de aceite: 01/12/2021
Data de submissão: 06/09/2021

Leopoldo Zúñiga-Silva
Tecnológico de Monterrey, Escuela de Ingeniería y Ciencias
San Luis Potosí – México
https://orcid.org/0000-0001-7982-718X

RESUMEN: La presente investigación contribuye al conocimiento de los aspectos cognitivos relacionados al aprendizaje de las matemáticas. Se describe un estudio de carácter cualitativo realizado sobre el funcionamiento cognitivo de un grupo de estudiantes de ingeniería, cuando abordan la resolución de un problema de cálculo de dos variables. Se presentan los referentes teóricos y el análisis de la forma en que se manifiestan las funciones cognitivas puestas en juego en el acto mental de la solución del problema. Los resultados muestran cómo el funcionamiento cognitivo afecta la forma en que los alumnos comprenden e interpretan los elementos conceptuales en cada fase del proceso de solución.
PALABRAS CLAVE: Cálculo, cognición, resolución de problemas, aprendizaje.

COGNITIVE ANALYSIS OF ENGINEERING STUDENTS IN A MATHEMATICAL PROBLEM SOLUTION

ABSTRACT: This research contributes to the knowledge of the cognitive aspects related to the learning of mathematics. A qualitative study carried out on the cognitive functioning of a group of engineering students is described, when they address the resolution of a calculus with two variables problem. The theoretical referents and the analysis of the way in which the cognitive functions put into play are manifested in the mental act of solving the problem are presented. The results show how cognitive functioning affects the way students understand and interpret the conceptual elements in each phase of the solution process.
KEYWORDS: Calculus, cognition, problem solving, learning.

1 I INTRODUCCIÓN

En este trabajo se estudian los elementos cognitivos del aprendizaje cuando éste ocurre en escenarios con base en la resolución de problemas matemáticos vinculados al área de ingeniería. Existe evidencia en diversos reportes de investigación (GARCÍA, 2013; CAMARENA, 2009; MENDIBLE Y ORTÍZ, 2007) y en las creencias de profesores, de que en este tipo de escenarios se propicia un mejor aprendizaje. Por ejemplo, Ríos (2002, p. 1) señala:

> Creo que un recurso importante (entre otros) en la enseñanza-aprendizaje de este tipo de cursos (matemáticas) es … el análisis y la solución de un problema real en donde es necesaria la

aplicación de métodos matemáticos. Tiene la ventaja de que los estudiantes se involucran en problemas relacionados con su área de estudio, viven en carne propia las dificultades de este tipo de tareas y les deja la sensación de que lo que están estudiando es útil.

Sin embargo, aún y cuando se puede propiciar motivación para aprender con el empleo de situaciones problema vinculados al área de interés de los alumnos, tanto el nivel de conocimientos previos, como la forma en que piensan y asimilan en sus estructuras mentales los nuevos conocimientos, afectan el nivel de comprensión y aprendizaje obtenido.

Es importante entonces atender la situación y estudiar lo que sucede a nivel de funciones y procesos mentales respecto al aprendizaje, porque finalmente, aunque intervienen factores como hábitos, creencias, costumbres y otros factores sociales y culturales (y que, por su importancia, por supuesto, no pueden ser ignorados), éste sucede como resultado de procesos y operaciones mentales internas que dependen de un funcionamiento cognitivo individual.

En este contexto, el objetivo de esta investigación fue analizar el funcionamiento cognitivo de estudiantes universitarios al enfrentarlos el proceso de resolución de un problema matemático en cálculo de dos variables.

2 | MARCO TEÓRICO

Es importante señalar que en el ámbito de la educación matemática (o matemática educativa, como se le conoce en México), se han realizado diversas investigaciones en relación a los procesos cognitivos involucrados en procesos de aprendizaje de las matemáticas (RADFORD Y MÉLANIE, 2009; MARTÍNEZ Y ARGIBAY, 2007; RODRÍGUEZ, 2005; WOMACK Y WILLIAMS, 1998). Sin embargo, tales investigaciones se enfocan en la reflexión teórica desde las neurociencias, o en el estudio de elementos cognitivos propios del conocimiento matemático, como lo son las imágenes y las definiciones conceptuales, los obstáculos de carácter epistemológico, y las operaciones mentales (análisis, síntesis, analogías, etc.) involucradas en algunos actos de aprendizaje. Sin embargo, prácticamente no se ha realizado investigación sobre las *funciones cognitivas* que subyacen a las operaciones mentales.

Es muy importante considerar esta situación porque en esos trabajos, sobre todo los que se realizan con estudiantes universitarios, se da por hecho que el funcionamiento cognitivo de los alumnos es acorde con la supuesta madurez mental que deberían tener en función de su edad.

De esta forma, atendiendo el propósito fundamental de lograr un análisis detallado del funcionamiento cognitivo de un grupo de estudiantes, esta investigación se llevó a cabo con base en el esbozo teórico implementado en un trabajo anterior propio (ZÚÑIGA, 2007), en el cual se describen las características de cada fase en el procesamiento de la información sobre las funciones cognitivas que aparecen en el acto mental de aprendizaje implicado en la resolución de un problema (ver Anexos).

Este referente teórico, a su vez, se basó en la teoría de funciones cognitivas de Reuven Feuerstein (1977). En esta teoría se sostiene que las funciones cognitivas son consideradas como los prerrequisitos básicos de la inteligencia. Son las funciones que subyacen a las operaciones mentales, sirven para la interiorización de la información y permiten la autorregulación del organismo. La interiorización es el pilar básico del aprendizaje y de la adaptación y, por tanto, de la inteligencia.

En palabras del propio autor de la teoría, "las funciones cognitivas como actividades del sistema nervioso explican, en parte, la capacidad del individuo para servirse de la experiencia previa en su adaptación a nuevas situaciones" (FEUERSTEIN, 1979). Esta observación es muy importante dado que en este trabajo se asume que los estudiantes construyen su propio aprendizaje en función del conocimiento previo que poseen.

Este marco teórico permitió la realización de un análisis detallado de lo que sucede a nivel cognitivo respecto a la forma en que se manifiestan las funciones cognitivas de los estudiantes cuando resuelven un problema matemático. Se describe a continuación cómo se desarrolló la actividad didáctica involucrada en este estudio, y el análisis de resultados correspondiente.

3 | DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

La investigación se llevó a cabo mediante una actividad en el aula, con un grupo de 16 estudiantes con edades entre 19 y 21 años, de un curso de cálculo de dos variables para estudiantes de ingeniería, en una institución de educación superior privada de México.

La experiencia se realizó en un escenario de enseñanza común en el sistema habitual, esto es, mediante clases típicas donde el profesor asume el papel de guía, expone los temas que considera convenientes, y propone ejercicios y problemas a resolver a los estudiantes.

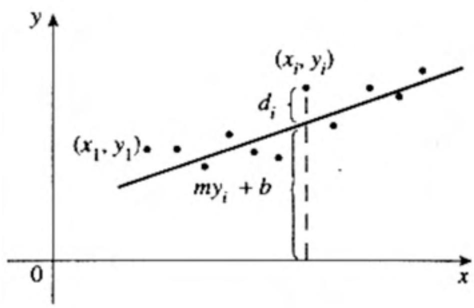
El problema tratado fue el siguiente:

Suponga que un científico tiene razones para creer que dos cantidades, x y y se relacionan en forma lineal; es decir y = mx + b, cuando menos de manera aproximada para algunos valores de m y de b. El científico lleva a cabo un experimento y recopila datos en la forma de los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2),\ldots(x_n, y_n)$*, y los grafica. Los puntos no se encuentran exactamente en una recta, así que el científico desea determinar las constantes m y b de modo que la recta, y = mx + b, se "parezca" a los puntos tanto como sea posible (véase la figura). Sea* $d_i = y_i - (mx_i + b)$ *la desviación vertical del punto (x, y) con respecto a la recta. El método de los **mínimos cuadrados** determina a m y a b, de modo que minimiza* $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ *que es la suma de los cuadrados de dichas desviaciones. Muestre que, de acuerdo con este método, la recta que más se "parece" se obtiene cuando:*

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Por lo tanto, la recta se determina resolviendo estas dos ecuaciones con las dos incógnitas m y b.



La experiencia se realizó de la siguiente forma: primero se presentó el problema a los estudiantes, distribuidos en cuatro equipos de cuatro integrantes, y en seguida, en una sesión de 40 minutos, se les pidió que realizaran lo que se indica en él.

El análisis de datos se realizó atendiendo las características particulares del problema planteado, y de acuerdo con un mapa cognitivo que considera elementos de contenido, modalidad, operaciones, fases, nivel de complejidad, nivel de abstracción, y nivel de eficiencia (ver Anexos).

Se observaron dificultades para comprender lo que se plantea en el enunciado. A pesar de que los alumnos están familiarizados con la simbología que se usa, se manifestaron conflictos en la comprensión. Estos conflictos van desde dudas sobre lo necesario para minimizar la sumatoria, y que se reflejan, por ejemplo, en preguntas como *"¿lo que debemos hacer es derivar?"*, hasta otros conflictos más profundos, tales como el que en alguno de los equipos, no se entendió la explicación que se da sobre el método de mínimos cuadrados, ni lo que se pide realizar.

La función de *percepción clara* se ve afectada en los estudiantes debido a la aparición de estimulación novedosa en el enunciado del problema, por ejemplo, con el término "mínimos cuadrados"; también al nivel de complejidad, que el estudiante percibe en la simbología empleada, e incluso, a la amplitud del texto, lo que repercute en un conocimiento impreciso de los datos de la información. Esta situación está estrechamente relacionada con la pobre *exploración sistemática* observada. La *impulsividad* aparece en forma notable, por ejemplo, cuando los estudiantes advierten que se debe derivar, intentan hacerlo aún antes de tener claro cuál es la función a tratar y las variables involucradas, al grado de que en dos de los equipos de trabajo comienzan a derivar parcialmente respecto a x_i y y_i, cuando las variables independientes en el problema son *m* y *b*.

Es importante señalar que estas funciones cognitivas se ven afectadas también en forma considerable por otros dos aspectos relevantes: la *falta de motivación* y la consecuente *falta de atención* al abordar el problema. Aquí, es importante considerar que, en el aspecto motivacional, intervienen directamente *sesgos de pensamiento* como los determinados por la creencia (o al menos duda permanente) de que las matemáticas no les son útiles en su futuro ámbito profesional. Es decir, intervienen de manera decisiva factores de carácter sociocultural. Muchos estudiantes realizan actividades que el profesor les solicita (como resolver un problema) sólo por la motivación de obtener una nota, de acreditar un curso. Cuando se enfrentan a un problema, predomina una actitud esquiva, tratan de evitar abordar el problema lo más que les es posible. Por ejemplo, durante la sesión en cuestión, al momento de iniciar la lectura del enunciado del problema, un alumno pregunta "*¿Y esto para qué nos puede servir a nosotros?... aquí dice que le interesa a un científico...no es para un ingeniero*".

Es evidente que estos problemas en la fase de entrada no son consecuencia de factores asociados al desarrollo cognitivo de los alumnos, sino a "vicios" de pensamiento adquiridos a lo largo de su vida escolar. Situación que concuerda con lo señalado por Vergnaud (1990), cuando habla de su teoría de los campos conceptuales, aplicada en sus inicios a niños y adolescentes, en el sentido de que los elementos teóricos que la estructuran se refieren también a los procesos de aprendizaje del adulto, pero que estos últimos suceden "bajo restricciones que son más del orden de los hábitos y de sesgos de pensamiento adquiridos, que relativos al desarrollo del aparato psíquico", y que a la vez, se puede soportar en las ideas de Piaget sobre las etapas de desarrollo intelectual, considerando que este trabajo se realiza con estudiantes de 19-21 años de edad.

Por otro lado, se observa que los alumnos tienen dificultades también con la función de *organización de la información*, aunque se puede decir que éstas no se deben a una incapacidad para realizarla, sino, más bien, a la incertidumbre que aparece en ellos como producto de las situaciones ya mencionadas, así como a las características de la recuperación de información en la memoria a largo plazo respecto al prototipo que tienen los estudiantes de lo que es una función de dos variables (y cuáles son las variables) y a la noción de sumatoria. Por ejemplo, en dos de los equipos, en forma explícita, aparecen inquietudes en torno a esta última: de su conocimiento previo, lo que recuperan y predomina es el significado sobre los símbolos: asocian el símbolo $\sum$ a las series numéricas infinitas, lo cual implica el uso de la función cognitiva de *conducta comparativa*, perdiendo de vista la información en el enunciado del problema y en consecuencia, la necesidad o conveniencia del uso de este símbolo en el planteamiento. Aparecen comentarios como *"sólo debemos* *derivar la serie, ¿no?”*, y *“¿cómo se deriva una serie?... ha... eso lo vimos en Mate II* (aludiendo al curso previo de cálculo integral en una variable y series numéricas infinitas)”.

En la fase de elaboración, como consecuencia de los conflictos observados en la parte inicial, se ven afectadas las funciones de *percepción y definición del problema, selección de información relevante, interiorización y representación mental, y la clasificación cognitiva.*

Las funciones de *percepción y definición del problema*, y la de *selección de información relevante,* están directamente relacionadas a las de *percepción clara* y *exploración sistemática,* y afectadas por ellas en términos de las observaciones indicadas anteriormente.

Respecto a la *interiorización y representación mental*, se puede inferir su afectación en algunas acciones de los estudiantes, por ejemplo, cuando perciben que la función involucrada es de dos variables independientes, pero les causa conflicto el que no aparezca en forma explícita la variable dependiente. Alguien comentó que “*la función no tiene nombre*”. Además, aparecen dudas respecto a si la sumatoria es o no una función y, en consecuencia, susceptible de diferenciación o no. Esto provoca que al momento de derivar no usen una simbología apropiada, por ejemplo, no indican qué cosa van a derivar, sólo escriben el resultado.

La *clasificación cognitiva* es una función que a su vez depende de otras funciones, entre ellas las de percepción clara, uso de distintas fuentes de información, conducta comparativa y distinción de información relevante, todas ellas afectadas desde la fase de entrada. Pero, además, se presentan dificultades en ella debido a que los alumnos tienen deficiencias conceptuales respecto a las nociones previas necesarias, tales como sumatoria, función de dos variables, derivada parcial, valor mínimo de una función de dos variables, etc.

Finalmente, en la fase de salida, sólo se observaron conflictos en la función de *comunicación explícita* y en la de *precisión y exactitud de la respuesta*. Algunos estudiantes llegan a las ecuaciones indicadas, pero no escriben la respuesta en forma explícita. Es decir, de acuerdo a la teoría, presentan una *comunicación egocéntrica*: no consideran necesario mayor explicación sobre la solución, suponen que cualquier otra persona que vea su trabajo, lo comprende bien.

4 I CONCLUSIONES

Es muy importante mencionar que los conflictos observados en la experiencia, no son producto de incapacidades atribuibles a factores propios del desarrollo cognitivo, ni a un estado de disfunción permanente, sino al efecto de las disfunciones locales que aparecieron en actos mentales específicos y que fueron provocadas principalmente por la forma en que se abordó y desarrolló la experiencia de aprendizaje. Es decir, tales disfunciones se observaron como consecuencia de la exposición de los estudiantes al escenario común de enseñanza utilizado, lo cual provocó que se manifestaran sesgos de pensamiento adquiridos en ellos a lo largo de su historia escolar, como la idea de que los conocimientos matemáticos que aprenden no les serán de utilidad, y que el saber matemáticas se reduce a la aplicación de fórmulas o al uso de procedimientos y métodos.

La teoría utilizada, desde la perspectiva de esta investigación, implica la consideración de que la *madurez mental* no garantiza la eficiencia de las funciones cognitivas en un acto mental de aprendizaje. Sobre todo, cuando ese acto mental es afectado por el sistema de creencias, costumbres, hábitos de estudio y otros factores socioculturales respecto al conocimiento que se aborda; en este caso, el conocimiento matemático.

Si bien se logró realizar el análisis propuesto de las funciones cognitivas involucradas en el proceso de resolución del problema matemático en el ámbito de la ingeniería, quedan pendientes de investigación algunos aspectos que se desprenden de los resultados de este trabajo, entre ellos: (1) profundizar en el análisis de las relaciones entre el funcionamiento mental operativo (respecto a los esquemas matemáticos ya establecidos en la memoria y los nuevos conocimientos) y las funciones cognitivas subyacentes, considerando que este trabajo constituye en realidad una primera aproximación a ese análisis; (2) investigar sobre las funciones cognitivas que no emergieron en esta experiencia y que podrían aparecer en la resolución de problemas que involucran otros contenidos matemáticos del cálculo u otros escenarios didácticos; y (3), realizar estudios de reproducibilidad de la experiencia en contexto. Por ejemplo, implementando el diseño didáctico utilizado en este trabajo, con otros estudiantes, con otros profesores, y de otras instituciones educativas.

REFERENCIAS

CAMARENA, P. La matemática en el contexto de las ciencias. **Innovación Educativa***,* 9, 15-25. 2009.

FEUERSTEIN, R. (1977). Mediated Learning Experience: A theoretical basis for cognitive human modificability during adolescence. In Mittler P., (ed.), **Research to practice in mental functions**, 2, Baltimore, University Park Press. 1977.

FEUERSTEIN, R. **The Dynamic Assessment of Retarded Performes: The Learning Potential Assessment Device, Theory, Instruments and Techniques**. Baltimore, University Park Press. 1979.

GARCÍA, J. A. La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. **Revista Educación**. 37 (1), 29-42. 2013.

MARTÍNEZ, J., ARGIBAY, P. El aprendizaje de las matemáticas y el cerebro. **Ciencia Hoy**. 17 (99), 46-51. 2007.

MENDIBLE, A., ORTIZ, J. Modelización matemática en la formación de ingenieros. La importancia del contexto. **Enseñanza de la Matemática***,* 12 (16), Número extraordinario, 133-150. 2007.

RADFORD, L. Y MÉLANIE, A. Cerebro, cognición y matemáticas. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, 12 (2), 215-250. 2009.

RIOS, J. G. Los proyectos en los cursos de estadística. **La integral**, Órgano Informativo y de Divulgación del Departamento de Matemáticas, DECIC, 1(6), ITESM Monterrey. 2002.

RODRÍGUEZ, I. La resolución de problemas y el pensamiento matemático divergente. **Revista Ciencias**, 2 (14), 72-97. 2005.

VERGNAUD, G. La teoría de los campos conceptuales. **Recherches en Didáctique des Mathématiques**, CNRS y Université René Descartes, 10 (2), 133-170. (Traducción al español por Juan D. Godino). 1990.

WOMACK, D. & WILLIAMS, J. Intuitive counting strategies of 5- to 6-year-old children within a transformational arithmetic framework. **Proceedings of the International Group for Psychology of Mathematics Education**, Eds. Alwyn Oliver & Karen Newstead, Stellenbosch, SA, University of Stellenbosch, 4, 185-192. 1998.

ZUÑIGA, L. El cálculo en carreras de ingeniería : un estudio cognitivo. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**,10 (1), 145-175. 2007.

ANEXOS

Definiciones de las funciones cognitivas

En la fase de entrada:

La **comprensión** implica tener una **percepción clara** tanto de los datos que se ofrecen en el enunciado, como del estado final o meta a la que se quiere llegar (los datos proporcionan una descripción completa del contexto del problema y de los parámetros bajo los cuales se debe operar).

A su vez, para el logro de la percepción clara es necesario que las funciones cognitivas de **exploración sistemática de una situación de aprendizaje** y la de **organización de la información**, aparezcan en forma eficiente.

En la fase de elaboración:

La **resolución del problema** implica la búsqueda de una vía de solución (una vía que conecte el estado inicial con el estado meta), pero antes de esta búsqueda, es necesario que el sujeto sea capaz de percibir y definir con precisión el problema, lo cual implica que su función cognitiva de **percepción y definición de un problema** aparezca en forma eficiente. Este es un momento crucial en el proceso porque constituye el enlace entre la comprensión de la situación problemática y lo que es propiamente la resolución del problema. Se pueden tener dificultades en el desarrollo de la fase de elaboración cuando no se define con precisión el problema en términos de la meta a la que se quiere llegar.

La búsqueda de una vía de solución implica la **planificación de la conducta** (una función cognitiva que está presente en todo el proceso de resolución), así como la recuperación de esquemas en la memoria a largo plazo que involucran conocimientos matemáticos, y la cual a su vez requiere de una **conducta comparativa**.

El proceso de pensamiento para el uso, adecuación o modificación de esquemas previos en la construcción de las nuevas ideas, nociones o conceptos matemáticos, involucra al menos, la capacidad de **pensamiento hipotético** y la conducta comparativa.

La construcción de conocimiento requiere para la codificación de la información correspondiente a las nuevas ideas, nociones y conceptos, de la función cognitiva de **interiorización y representación mental**, que es de hecho, una de las funciones más importantes.

En la fase de salida:

La **respuesta** ha de emitirse utilizando un lenguaje claro y preciso en función de la meta final del problema formulado, es decir, se debe observar una **comunicación explícita** de tal respuesta.

Se debe observar capacidad para pensar y expresar la respuesta correcta al problema, así como para reflexionar antes de comunicarla, es decir, debe haber precisión **y exactitud en la respuesta** y un **control** en la emisión de la misma."

Estas son las definiciones sobre las funciones cognitivas a las que se refiere este modelo teórico:

Percepción clara: conocimiento exacto y preciso de la información. La disfunción cognitiva *percepción borrosa* consiste en un proceso pobre e impreciso de los datos de la información.

Exploración sistemática de una situación de aprendizaje: es la capacidad para organizar y planificar la información. La disfunción de la exploración sistemática es la *impulsividad ante una situación de aprendizaje*, consistente en una incapacidad para tratar la información de forma sistemática y planificada.

Organización de la información: capacidad para utilizar diferentes fuentes de información a la vez.

Percepción y definición de un problema: consiste en la habilidad para delimitar *qué* pide el problema, *qué* puntos hay que acotar y *cómo* averiguarlos.

Planificación de la conducta: capacidad para prever la meta que se quiere conseguir utilizando la información adquirida previamente.

Conducta comparativa: consiste en la capacidad para realizar todo tipo de comparaciones y relacionar objetos y sucesos anticipándose a la situación. La deficiencia en la conducta comparativa consiste en la incapacidad para establecer relaciones de semejanza y diferencia entre objetos y sucesos.

Pensamiento hipotético: capacidad para establecer hipótesis y comprobarlas aceptando o rechazando la hipótesis previamente establecida.

Interiorización y representación mental: capacidad para utilizar símbolos internos de representación. La falta o deficiencia de la interiorización se manifiesta en la conducta demasiado concreta y sin generalización apropiada.

Comunicación explícita: consiste en utilizar un lenguaje claro y preciso que responda al problema formulado en la tarea. Esto supone un cierto nivel de comprensión por parte del sujeto. La disfunción es la comunicación egocéntrica.

Precisión y exactitud en las respuestas: capacidad para pensar y expresar la respuesta correcta a un problema o situación general de aprendizaje.

Control de las respuestas: consiste en la capacidad para reflexionar antes de emitir cualquier tipo de respuesta. El control y la autocorrección implican procesos metacognitivos.

Mapa cognitivo

Contenido: función de dos variables y derivadas parciales a nivel operativo.

Modalidad: verbal, simbólica y gráfica.

Operaciones: analogías, comparaciones y relaciones.

*Fase*s: en la *fase de entrada*, se requiere que el estudiante perciba que en el enunciado se describe en qué consiste la idea básica del método de mínimos cuadrados y entonces lo que se pide es sólo minimizar $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\ 2}$ para llegar a las ecuaciones propuestas. En la *fase de elaboración*, primero es necesario que los alumnos, una vez que tienen claro lo que se pide en el enunciado, sean capaces de acotar lo que se debe realizar a nivel operativo (por ejemplo, sustituir $d_i = y_i - (mx_i + b)$ en $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\ 2}$ para enseguida derivar parcialmente respecto a las variables *m* y *b*) y, en su caso, averiguar lo que sea necesario. Deben tener la capacidad de recordar sus conocimientos sobre sumatorias e identificar que en la información aparece una función de dos variables. Después, se debe recurrir a los conocimientos previos sobre la forma de determinar un mínimo y emplear la simbología adecuada en el proceso de diferenciación. Finalmente, en la *fase de salida*, los estudiantes sólo deben verificar las ecuaciones que se proponen en el propio enunciado y externarlo verbalmente.

Nivel de complejidad: medio-alto (los conocimientos y operaciones requeridos no requieren por completo de altos niveles de abstracción).

Nivel de abstracción: medio-alto (intervienen varias nociones y símbolos de matemáticas avanzadas, tanto del curso en cuestión como de otros precedentes).

Nivel de eficiencia: medio. No es un nivel alto porque es considerable el grado de automatización requerido.

CAPÍTULO 15

"BOLA AO CESTO": UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

Data de aceite: 01/12/2021

Claudia Croce Costalonga
http://lattes.cnpq.br/1618324562481238
https://orcid.org/0000-0003-4790-9556

RESUMO: Este relato tem por objetivo mostrar a experiência que aconteceu em uma sala de aula com crianças de cinco anos, da educação infantil da rede municipal da Serra. A atividade realizada faz parte de uma tarefa do curso de extensão intitulado Ensino de Matemática na Educação Infantil, ofertado pelo Ifes/Campus Vitória, onde colocamos em prática novos conhecimentos adquiridos nessa formação. Sendo assim, trabalhamos o jogo bola ao cesto, onde os principais objetivos foram estimular o raciocínio para que as crianças criassem diferentes formas de registro da pontuação, além de criar estratégias para concluir o jogo, somar os pontos e decidir qual foi a equipe vencedora. Concluímos, que mesmo que esse jogo seja relativamente fácil para a faixa etária, os estímulos para concluir a brincadeira ampliaram de forma significativa os conhecimentos e as potencialidades de todos os participantes, propiciando um aprendizado efetivo da matemática.
PALAVRAS-CHAVE: Bola ao cesto; registro; estratégias; ensino da matemática; educação infantil.

ABSTRACT: This report aims to show the experience that took place in a classroom with five-year-old children, from children's education in the municipal network of Serra. The activity performed is part of a task of the extension course entitled Teaching Mathematics in Early Childhood Education, offered by Ifes/Campus Vitória, where we put into practice new knowledge acquired in this training. Therefore, we worked on the ball-to-basket game, where the main objectives were to stimulate reasoning so that children could create different ways to record the score, in addition to creating strategies to complete the game, add up the points and decide which was the winning team. We conclude that even though this game is relatively easy for the age group, the stimuli to complete the game significantly expanded the knowledge and potential of all participants, providing an effective learning of mathematics.
KEYWORDS: Record; strategies; teaching mathematics; child education.

INTRODUÇÃO

Os professores que atuam na educação infantil, em sua maioria, sabem a importância de se trabalhar de forma lúdica, despertando o interesse das crianças em adquirir novos conhecimentos a partir das experiências vividas. O curso de extensão do ensino da matemática na educação infantil, realizado no segundo semestre de 2018 no Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes – Campus Vitória, nos levou a refletir como estamos trabalhando a matemática com essas crianças, e a importância de se ensinar levando em consideração que ocorreu um movimento histórico-cultural do homem no desenvolvimento da matemática a partir das necessidades humanas.

> Cabe ao professor organizar o ensino, tendo em vista que os conhecimentos elaborados historicamente pela a humanidade possam ser apropriados pelos indivíduos. [...] pensar em "educação humanizadora" implica considerar o trabalho como mediação necessária no processo de constituição dos sujeitos, e não apenas como fim de si mesmo (ASBAHR, RIGON, MORETTI, 2010, p. 25).

Entendemos que a matemática faz parte da vida da criança antes mesmo que ela comece a frequentar a escola, o desafio então é fazê-la se apropriar desse conhecimento construído historicamente. Moura (2007) nos diz que, para que a criança se aproprie do conhecimento historicamente acumulado é necessário a intervenção de uma pessoa adulta. Trata-se de efetivar a mediação. Então, como devemos fazer essa mediação para que o público da educação infantil se aproprie desses conhecimentos?

O Referencial Curricular Nacional para Educação Infantil, documento elaborado pelo Ministério da Educação em 1998, tem por objetivo auxiliar o professor de educação infantil no trabalho educativo diário, ele também nos fala sobre o trabalho com a matemática na educação infantil.

> (...) a instituição da Educação Infantil pode ajudar as crianças a organizarem melhor as suas informações e estratégias, bem como proporcionar condições para a aquisição de novos conhecimentos matemáticos. O trabalho com noções matemáticas na educação infantil atende, por um lado, às necessidades das próprias crianças de construírem conhecimentos que incidam nos mais variados domínios do pensamento, por outro, corresponde a uma necessidade social de instrumentalizá-las melhor para viver, participar e compreender um mundo que exige diferentes conhecimentos e habilidades. (RCNEI, 1998, p. 209)

Para colocar em prática todo esse conhecimento que nos apropriamos no curso de extensão em ensino de matemática na educação infantil, optamos por desenvolver em nossas turmas, de crianças de 5 anos, o jogo "Bola ao cesto", pois acreditamos que o lúdico aplicado de forma correta no ensino da matemática, pode favorecer muito o aprendizado. Segundo o RCNEI (1998), a aprendizagem da Matemática não se dá pela simples proposta de jogo; as brincadeiras, as atividades lúdicas e os jogos devem ser muito bem dirigidos e terem uma intencionalidade. Sendo assim, incentivando as crianças a acharem soluções e a tomar atitudes, criando diferentes estratégias, a produção de conhecimento pode ocorrer de forma mais efetiva.

> Por essas características é que se pode afirmar que o jogo propicia situações que, podendo ser comparadas a problemas, exigem soluções vivas, originais, rápidas. Nesse processo, o planejamento, a busca por melhores jogadas e a utilização de conhecimentos adquiridos anteriormente propiciam a aquisição de novas ideias, novos conhecimentos [...] (SMOLE, 1996, p. 138)

DESENVOLVIMENTO

Participaram do jogo as duas turmas do grupo V vespertino de um Centro Municipal de Educação Infantil localizado no Município da Serra, sendo que as turmas disputaram entre si e para isso criamos algumas regras. A primeira regra estabelecida foi a escolha da bola e a escolha do cesto, pois todos deveriam utilizar a mesma bola e o mesmo cesto. Realizamos uma discussão com os alunos sobre a melhor bola para a ação (Figura 1). Essa discussão foi importante, pois já iniciamos discussões acerca de tamanho e lugar ocupado no espaço, conceitos geométricos importantes.

Figura 1

Fonte: Arquivo pessoal dos autores.

A segunda regra foi à distância entre o local de arremesso e a cesta. Depois questionamos se montaríamos equipes com alguns participantes ou se todos deveriam jogar, os alunos estabeleceram que todos deveriam participar. Portanto, decidimos que cada um teria direito a dois arremessos, visto o grande número de participantes. Para isso, as crianças se organizaram e foram escrevendo os nomes no quadro. A medida que fossem jogando, registrariam sua pontuação ao lado, enfatizamos que eles poderiam registrar a pontuação da forma que achassem melhor. É importante ressaltar que automaticamente eles dividiram os times de acordo com a própria turma, não questionaram a quantidade de crianças que haviam em cada grupo, que por coincidência, nesse dia eram iguais. Entendemos que esse momento de criação e estabelecimento das regras foi muito importante, pois contribuiu para o desenvolvimento da criatividade e do raciocínio da criança tanto quanto na execução do jogo, permitindo também uma percepção de espaço e lugar.

> Os jogos têm diversas origens e culturas que são transmitidas pelos diferentes jogos e formas de jogar. Este tem função de construir e desenvolver uma convivência entre as crianças estabelecendo regras, critérios e sentidos, possibilitando assim, um convívio mais social e democracia, porque enquanto manifestação espontânea da cultura popular, os jogos tradicionais têm a função de perpetuar a cultura infantil e desenvolver formas de convivência social. (Kishimoto, 1993, p. 15)

Ao iniciar o jogo esbarraram no primeiro obstáculo que foi a escolha do cesto, que era muito leve e ao jogar a bola ele se movia, optaram por trocar por uma caixa de plástico que fosse maior (Figura 2).

Figura 2

Fonte: Arquivo pessoal dos autores.

Após testarem jogar a bola na caixa e constataram que era melhor, reiniciamos o jogo. Cada criança que ia jogando, registrava sua pontuação no quadro, ao lado do seu nome. Orientamos que eles poderiam registrar a pontuação da forma que achassem melhor, de forma unanime os alunos, das duas equipes, fizeram o registro utilizando a representação numérica. Então lançamos o segundo desafio: como faremos para somar os pontos e saber qual foi à equipe vencedora. Eles reconheciam os algarismos, tentaram começar a somar, mas logo se perderam na soma. Sempre utilizamos material concreto para trabalhar contagem e quando iniciamos o curso começamos apresentar às crianças outras formas de representar quantidades além da escrita numérica e ao observarmos a dificuldade de somar a pontuação questionamos se haveria outra possibilidade para facilitar a contagem. O aluno João logo lembrou e propôs fazer os "pauzinhos" ao lado do algarismo que representava a quantidade de cestas de cada participante da equipe dele (Figura 3). Dessa forma, João não teve dificuldades em registar às quantidades nem de somar a pontuação da equipe dele, concluindo que marcaram 14 pontos.

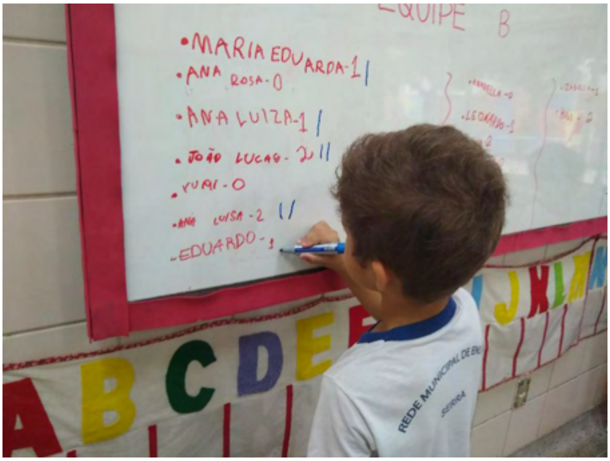


Figura 3

Fonte: Arquivo pessoal dos autores.

Então, desafiamos o outro grupo a pensar em outra forma de somar os pontos da equipe para saber quem venceu. Após refletirem e conversarem sobre diversas possibilidades que não funcionariam, Bernardo propôs realizar a contagem com palitos de picolé, esse objeto é muito utilizado por nós para trabalhar contagem. Após ter a ideia, ele pegou o pote de palitos, foi olhando para o quadro e tentando separar as quantidades, mas acabou se perdendo várias vezes, percebeu que não conseguiria separar os palitos sozinho, então com intervenção da professora, optou por entregar aos colegas a quantidade de palitos para representar a pontuação de cada um. Ao final, eles juntaram todos os palitos para contar, não satisfeito com a contagem coletiva, Bernardo colocou todos os palitos no chão e contou novamente (Figura 4).

Figura 4

Fonte: Arquivo pessoal dos autores

É importante ressaltar, que após contar os palitos de picolé e concluir que a equipe dele marcou 12 pontos, Bernardo não conseguiu representar utilizando os numerais, precisando de auxílio de um outro colega que imediatamente saiu correndo para mostrá-lo como era representado essa quantidade através dos numerais colados na parede da sala (Figura 5).

Figura 5

Fonte: Arquivo pessoal dos autores.

Questionamos quem foi à equipe vencedora e todos concluíram que foi a equipe B com 14 pontos enquanto a equipe A fez 12 pontos. Para finalizarmos a atividade lançamos o último desafio, quantos pontos a mais a equipe B fez, rapidamente vários alunos responderam que a diferença foi de 2 pontos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vale ressaltar que esse tipo de jogo é muito comum na educação infantil, mas muitas vezes tínhamos a intencionalidade apenas de jogar, marcar a pontuação individual geralmente incentivávamos a representação numérica. Após o curso, ampliamos as possibilidades de observação e aproveitamos cada momento para inserir um novo desafio, e como podemos observar com esse jogo conseguimos abrir um canal para explorar ideias referentes a números e as possibilidades de representações não só através da escrita numérica. Enquanto brincaram, incentivamos a registrar a pontuação de diferentes formas, realizar contagens, comparações de quantidades, identificar algarismos, além de perceberem noções de velocidade, força, altura, direção e sentido com que jogavam a bola para acertar o cesto, observamos como as crianças conseguem expressar com muito mais espontaneidade o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas quando estão envolvidas em jogos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. RCNEI – **Referencial Curricular Nacional da Educação Infantil** – Brasil:1998.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida (Org.) **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 3ª Ed. São Paulo: Cortez 1998.

RIGON, Algacir José; ASBAHR, Flávia da Silva Ferreira; MORETTI, Vanessa Dias. Sobre o processo de humanização. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo (Coord.). A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural. Brasília: Líber, 2010.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. **A Matemática na Educação Infantil. A teoria das inteligências múltiplas na prática escolar.** Porto Alegre, Editora Artes Médicas: 1996.

CAPÍTULO 16

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E AVALIAÇÃO PARA A APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Data de aceite: 01/12/2021
Data de submissão: 08/11/2021

Márcio Pironel
Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista – UNESP; Docente do Instituto Federal de São Paulo – IFSP
Salto – SP
https://orcid.org/0000-0002-7360-0571

Lourdes de la Rosa Onuchic
Docente Aposentada do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação ICMC/USP
São Carlos – SP
Docente Voluntária do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PPGEM da Universidade Estadual Paulista – UNESP
Rio Claro – SP
https://orcid.org/0000-0001-7713-2157

RESUMO: Este trabalho procura fazer compreender a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas - MEAAMaRP e o modo como a Avaliação pode acontecer durante sua utilização. Para alcançar esse objetivo realizamos uma profunda revisão bibliográfica sobre os temas envolvidos e apresentamos uma atividade realizada com 24 alunos de uma escola privada de Lisboa, Portugal, para a obtenção de evidências que possam sustentar nossa pesquisa.

PALAVRAS-CHAVE: Resolução de Problemas. Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. Avaliação para a Aprendizagem. Ensino.

PROBLEM SOLVING AND ASSESSMENT FOR LEARNING MATHEMATICS

ABSTRACT: This work seeks to understand the Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Assessment through Problem Solving - MEAAMaRP and how the Assessment can happen during its use. To achieve this goal, we carried out a thorough bibliographical review on the themes involved and presented an activity carried out with 24 students from a private school in Lisbon, Portugal, to obtain evidence that could support our research.

KEYWORDS: Problem Solving. Methodology of Mathematics Teaching-Learning-Assessment through Problem Solving. Assessment for Learning. Teaching.

1 | INTRODUÇÃO

O ser humano é, por própria essência, um avaliador. Desde os primórdios, a necessidade de avaliar quantidades, situações e riscos faz parte do seu cotidiano. Conforme o mundo foi se desenvolvendo, social, cultural e tecnologicamente, a avaliação foi se transformando e agregando novos objetivos e significados.

Na educação escolar a avaliação parece ter surgido com os Jesuítas, entre os anos de 1550 e 1599, quando possuía um caráter disciplinador e ordenador das condutas dos agentes envolvidos na educação (LUCKESI, 1992). As práticas de disciplina escolar perduraram no decorrer dos últimos séculos e, somente no último terço do século XX, teve uma transformação mais profunda e significativa em seus propósitos.

No início deste século, Pironel (2002) propôs a integração da avaliação aos processos de ensino e de aprendizagem e essa integração acabou incorporada pela MEAAMaRP, que adotou a palavra Ensino-Aprendizagem-Avaliação. Embora se acredite que ensino, aprendizagem e avaliação representam três processos distintos, a composição dessa palavra nos indica o objetivo de que a avaliação integrada ao ensino promove a aprendizagem e que essa forma de avaliar valide esses processos e promova, ela própria, a aprendizagem do aluno.

Este trabalho apresenta um pequeno recorte de uma pesquisa de doutoramento e tem como objetivo mostrar como a avaliação pode acontecer numa aula baseada na MEAAMaRP. Para alcançar os objetivos propostos, foi utilizada uma abordagem metodológica qualitativa do tipo participante. Nesse contexto, criamos cinco problemas geradores de aprendizagem que foram trabalhados ao longo de um trimestre letivo de um sétimo ano, numa escola privada da cidade de Lisboa, em Portugal.

Um desses problemas, abordado neste trabalho, visava ser o ponto de partida para a discussão de processos de equalização de situações-problema e para a aprendizagem de algoritmos adequados à resolução das equações obtidas. A turma de alunos foi dividida em grupos com três ou quatro estudantes, totalizando sete grupos e o registro das atividades foi recolhido pelo professor. As aulas terem sido gravadas, com uma unidade gravadora em cada grupo, além de outra que ficou em mãos da professora regente. A turma investigada possuía 27 alunos, porém, apenas 24 pais autorizaram seus filhos a participar da pesquisa, de modo que não pudemos nem gravar e nem recolher o material produzido por um dos grupos.

2 | ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

“A conexão entre resolver problemas e aprofundar a compreensão é simbiótica” (LAMBDIN, 2003, p. 3). Essa simbiose indica que a compreensão matemática pode nos levar até à resolução de um problema, puramente matemático ou do mundo real, e a recíproca é verdadeira, ou seja, a resolução de um problema pode nos levar à construção da compreensão matemática. Mais do que isso, temos diante de nós a possibilidade de que, através da proposição de um problema, é possível levar um aluno à construção de uma matemática nova para ele ou a aprofundar seus conhecimentos matemáticos sobre conteúdos anteriormente vivenciados, seja na escola ou fora dela.

O NCTM (2014) nos mostra indícios de que a eficácia do ensino de matemática está relacionada à utilização da Resolução de Problemas na sala de aula, ao argumentar que:

> O ensino eficaz de matemática envolve os alunos na resolução e na discussão de tarefas que promovem raciocínio matemático e resolução de problemas e que permitem múltiplos pontos de partida e várias estratégias de resolução (NCTM, 2014, p.17, tradução nossa).

> O ensino eficaz da matemática envolve os alunos ao fazer conexões entre representações matemáticas tanto para aprofundar a compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos quanto como ferramentas para a resolução de problemas (NCTM, 2014, p. 24, tradução nossa).

> O ensino efetivo da matemática desenvolve a fluência com os procedimentos em uma base de compreensão conceitual para que os alunos, com o tempo, se tornem habilidosos ao usar procedimentos com flexibilidade na medida em que resolvem problemas contextualizados e matemáticos (NCTM, 2014, p. 42, tradução nossa).

Além disso, o NCTM (2014) ressalta o papel tanto dos professores quanto dos alunos ao implementar práticas que promovam raciocínio e resolução de problemas, conforme mostra a Figura 1 abaixo:

<table>
<tr><th colspan="2">Implementar tarefas que promovem raciocínio e resolução de problemas
Ações do professor e do aluno</th></tr>
<tr><th>O que os professores fazem?</th><th>O que os alunos fazem?</th></tr>
<tr><td>Motivar o aprendizado dos alunos sobre a matemática através de oportunidades para explorar e resolver problemas que desenvolvam e ampliem sua compreensão matemática atual.
Selecionar tarefas que forneçam múltiplos pontos de partida através do uso de várias ferramentas e representações.
Propor regularmente tarefas que exijam um alto nível de demanda cognitiva.
Apoiar os alunos na exploração de tarefas sem assumir o pensamento dos alunos.
Incentivar os alunos a usar abordagens e estratégias variadas para entender e resolver problemas.</td><td>Perseverar na exploração e no raciocínio através de tarefas.
Responsabilizar-se pela compreensão das tarefas, recorrendo e fazendo conexões com seu entendimento prévio e com suas ideias.
Usar ferramentas e representações, conforme necessário, para apoiar seus pensamentos e a resolução de problemas.
Aceitar e esperar que seus colegas de classe usem uma variedade de abordagens de resolução e que eles discutam e justifiquem suas estratégias um para o outro.</td></tr>
</table>

Quadro 1: O papel de professores e alunos em tarefas que promovam raciocínio e resolução de problemas

Fonte: NCTM, 2014, p. 24

Segundo Lambdin (2003),

> Um problema é, por definição, uma situação que causa desequilíbrio e perplexidade. Um princípio primordial do ensino através da resolução de problemas é que os indivíduos confrontados com problemas genuínos sejam forçados a um estado de necessidade de conectar o que eles conhecem com o problema proposto. Assim, aprender através da resolução de problemas desenvolve a compreensão. As redes mentais de ideias dos alunos crescem mais complexas e mais robustas quando os alunos resolvem problemas que os obrigam a pensar profundamente e a se conectar, estender e elaborar seus conhecimentos prévios (LAMBDIN, 2003, p.7, tradução nossa).

Tais considerações são importantes para compreender as ideias da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Essa metodologia interpreta a necessidade de ir além da concepção de Polya, que ofereceu um processo heurístico para auxiliar professores, alunos e pessoas interessadas em resolver problemas.

Essa metodologia não se propõe a ensinar os alunos a resolver problemas e nem a utilizar os problemas como aplicação direta de um determinado conteúdo matemático trabalhado na sala de aula. A MEAAMaRP considera a possibilidade de que, a partir de um problema gerador, o aluno possa construir novos conhecimentos matemáticos. Sua formalização acontece no final do processo da resolução de problemas e não no início, como sugerem outras concepções pedagógicas que utilizam resolução de problemas matemáticos:

> Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p. 81)

Ensinar a partir de um problema exige que se faça a cada dia um planejamento ou uma seleção de atividades, levando em conta a compreensão dos estudantes e a necessidade de atender ao conteúdo programático (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009).

Embora se possa trabalhar metodologias de diferentes maneiras, uma vez que seus propósitos ao se iniciar o processo de ensino com a proposição de um problema gerador para, através de sua resolução, chegar-se à aprendizagem de determinado conteúdo matemático, Onuchic e Allevato (2011) propuseram o seguinte roteiro para o desenvolvimento de uma aula baseada no Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas:

> 1. Preparação do problema - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
>
> 2. Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
>
> 3. Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
>
> • Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema e se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
>
> 4. Resolução do problema - A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho

cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como coconstrutores da matemática nova que se quer criar abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos à construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5. Observar e incentivar – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

• O professor incentiva os alunos a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (estratégias) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador, acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que possam surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

6. Registro das resoluções na lousa – Representantes de cada grupo são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7. Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8. Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9. Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83-85)

Allevato e Onuchic (2014) apresentaram mais uma nova etapa para o roteiro: A proposição e resolução de novos problemas. Elas argumentaram que novos problemas, relacionados ao tema do problema gerador, permitem analisar a compreensão do conteúdo matemático trabalhado durante a aula e consolidam aprendizagens construídas em etapas anteriores, além de aprofundar e ampliar as concepções do próprio tópico matemático trabalhado, criando um novo ciclo de resolução de problemas que pode levar à aquisição de novos conhecimentos matemáticos e, por consequência, à proposição de novos problemas.

Mais importante ainda é que essa metodologia integra deliberadamente uma concepção mais atual de avaliação, que é, conforme salienta Onuchic (2013), a avaliação deve ser construída durante a resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando sua aprendizagem e reorientando as práticas em salas de aula quando for necessário.

3 | AVALIAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas exige um comprometimento do professor com algumas questões que são fundamentais para o sucesso dos estudantes e, consequentemente, da metodologia em si. É preciso disposição do professor para trabalhar em grupos e do engajamento dos alunos para resolver os problemas propostos. É necessário que haja uma composição harmônica entre professor e alunos para que, da interação entre eles, as ações de avaliação possam fluir com naturalidade e as intervenções auxiliem o estudante na construção de conhecimento matemático novo. É necessário que o professor entenda que tipos de compreensão precisa vasculhar para buscar evidências sobre como o processo de aprendizagem está ocorrendo a fim de transformar concepções errôneas ou construções equivocadas em conhecimento sólido.

Para avaliar a compreensão dos estudantes durante o processo de ensino, os professores devem coletar dados, através de observação e de discurso dos alunos que devem ser interpretados ao desenvolver uma descrição acurada de seu raciocínio. Então, usando seu conhecimento sobre o pensamento de cada estudante, os professores podem selecionar tarefas de ensino adequadas (CHAMBERS, 1993).

Mesmo tendo a percepção de que possam existir outras variáveis na resolução de um problema, após mais de uma década utilizando essa metodologia em sala de aula, Pironel (2019) defendeu a necessidade de se considerar ao menos as seguintes variáveis no desenvolvimento de uma tarefa baseada na resolução de problemas:

- A compreensão do problema: O professor precisa buscar evidências sobre a compreensão do estudante com relação ao problema ou à situação problemática. A má compreensão do enunciado pode levar, seguramente, a uma construção errada de um conceito e aumentar a dificuldade do trabalho docente.
- A separação de variáveis úteis e a escolha de ferramentas adequadas: Para resolver um problema, o aluno precisa destacar, dentre as variáveis apresentadas, aquelas que serão úteis para a resolução do problema dado. Quando o aluno ataca o problema, quando ele confecciona um plano para resolver o problema, ele precisa escolher quais ferramentas matemáticas poderão ser utilizadas para a sua resolução. É preciso definir quais serão os caminhos que serão percorridos e os algoritmos que poderão ser utilizados para chegar à sua

resolução.

- A operacionalização: Não basta conhecer as variáveis que poderão ser utilizadas e saber resolver os algoritmos necessários para alcançar os objetivos do problema. É preciso saber onde eles serão utilizados e saber usá-los com correção e eficácia. O professor precisa estar atento à operacionalização do problema e saber quando o aluno está realizando uma boa resolução. Isso porque é ela quem define, efetivamente, se o resolvedor do problema chegará ou não a uma solução plausível.

- A razoabilidade das respostas: Quando o estudante encontra uma resposta ou, ao final de cada etapa da resolução do problema, precisa avaliar se a resposta é plausível e se há razoabilidade nela, o professor tem que estar atento aos diálogos que ocorrem nos grupos de trabalho e perceber se as argumentações utilizadas por eles demonstram estar alinhadas às possíveis respostas que seriam dadas ao problema.

- O significado dos conceitos envolvidos: Durante as fases de plenária e de formalização, o professor precisa acompanhar, acuradamente, o processo de ensino com vistas à aprendizagem, para coletar evidências sobre o quanto daquele conteúdo pôde ser apreendido pelo estudante, sem riscos de construção de concepções errôneas.

Para obter informações relevantes sobre esses elementos, é preciso que os professores fiquem atentos ao movimento da aula e se utilizem de questionamentos e conversas informais pretendendo que o aluno exponha suas descobertas matemáticas, convicções, dúvidas e dificuldades. De acordo com Chambers (1993):

> Os professores podem aprender a orquestrar o discurso para obter informações que revelem o pensamento do estudante. As questões devem se concentrar nas estratégias de resolução dos alunos em vez de sua resposta. Questões como:
>
> "Como você resolveu este problema?"
>
> "Será que alguém utilizou a mesma estratégia?"
>
> "Será que alguém utilizou uma estratégia diferente?"
>
> "Alguém poderia pensar em outra estratégia?"
>
> "Tom, o que você pensa sobre a estratégia da Ellen?"
>
> são projetadas para revelar como os estudantes pensaram o problema. Evidências do pensamento estudantil também podem vir de seus trabalhos escritos e de quaisquer manipulações que acompanhem suas resoluções. Quando a evidência é inadequada, o professor pode fazer perguntas de sondagem. (CHAMBERS, 1993, p. 20-21, tradução nossa)

Van de Walle (2009) argumenta que se o professor tiver um plano sistemático para coletar informações enquanto observa e escuta os alunos, ao menos duas coisas importantes acontecem: reúne-se mais informação que poderia não ter sido percebida antes e que se tornou relevante; e dados da observação coletados de modo sistemático podem ser acrescidos a outros dados e usados para planejar aulas, fornecer retroinformação (feedback) aos alunos, administrar reuniões com pais e determinar graus de avaliação.

Quando se dispõe a utilizar a observação como instrumento de avaliação, e este é um instrumento imprescindível quando pensamos em uma aula baseada na Resolução de Problemas, é importante observar as seguintes considerações apresentadas por Fennell, Kobett e Wray (2015):

> - Concentre-se em observar a compreensão dos conteúdos e o envolvimento dos alunos com práticas matemáticas particulares, ao invés de se distrair com outros comportamentos dos alunos.
> - Lembre-se da intenção da observação. A observação deve estar intencionalmente conectada ao planejamento e à implementação da aula atual.
> - Documente, documente, documente. Mantenha um registro contínuo e a análise do que é observado informará imediatamente as decisões mais urgentes – durante a implementação da aula, ou aconselhará sobre o planejamento de curto e de longo prazo.
> - Antecipe o que pode ser observado. Conectando observações ao processo de planejamento, os professores podem monitorar o ensino, antecipar ou imaginar o que pode acontecer em uma aula e se adaptar de acordo com a necessidade. (FENNELL, KOBETT, WRAY, 2015, p.54, tradução nossa).

Pironel e Onuchic (2016) relatam uma experiência pedagógica em que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é utilizada, concentrando as análises nas ações de avaliação. No início da aula, o professor se mantém como observador da atividade, concentrando sua atenção em cada um dos grupos formados, até escolher um deles, ao qual destinará atenção mais detida, a fim de coletar as primeiras informações sobre o andamento da atividade, e organizar seu pensamento para iniciar uma inquirição aos elementos do grupo escolhido.

Essa metodologia trabalha com a formação de grupos e ressalta a importância dessa prática “pois possibilita que os alunos que apresentam mais dificuldades possam dirimir suas dúvidas com aqueles colegas que absorveram, com maior rapidez e facilidade, um determinado conceito” (PIRONEL; ONUCHIC, 2016, p. 10).

Quando o professor foca sua atenção num único grupo, ele se aproxima dele e, através de questionamentos, tenta obter informações e realiza, imediatamente, as intervenções que julgar necessárias.

O seguinte problema foi proposto por Pironel (2019) para uma turma de 7º ano da educação básica de uma escola de Lisboa, em Portugal.

Resolva o seguinte problema

Um livro custa € 1,00 mais a metade do seu preço. Qual é o preço do livro?

Figura 1: Problema 'O Preço do Livro'

Fonte: Os autores

Durante a intervenção, o professor precisa inquerir os elementos do grupo com a dupla finalidade de descobrir quais são suas dificuldades, seus possíveis erros ou concepções errôneas e/ou as possibilidades de encaminhamento da questão. Observe o diálogo que segue:

Aluno A: *Professor, posso fazer uma regra de três?*

Professor Pesquisador: *Existe proporcionalidade?*

Aluno A: *Desculpe, não percebi!*

Professor Pesquisador: *Alguém pode ajudar o Aluno A?*

Como ninguém se manifestou, o professor continuou a perguntar.

Professor Pesquisador: *Para fazer uma regra de três, você precisa ter valores proporcionais, não é?*

Aluno A: *Sim. Não dá para fazer assim.*

Aluno B: *Mas podemos usar uma função...*

Professor Pesquisador: *Como?*

Aluno B (escrevendo na folha): *y é igual a um mais a metade de x, então...*

Daí escreveu:

$y=1 + x/2$

Professor Pesquisador: *Mas o que isso quer dizer?*

Aluno B: *Que o valor do livro depende de x?*

Professor Pesquisador: *Mas o que x está a representar?*

Aluno C: *O valor do livro.*

Aluno B: *Não! O valor do livro é representado por y.*

Aluno C: *Mas o problema está a dizer que o livro custa um euro mais a metade do valor do livro, que é x por dois.*

Professor Pesquisador: *É possível que ambos estejam corretos?*

... silêncio.

Professor Pesquisador: *Discutam o problema! Não se esqueçam que estão buscando um único valor!*

Esse diálogo evidencia como o processo de avaliação pode acontecer na forma de um processo de ensino, ao mesmo tempo em que o professor procura compreender as dificuldades dos alunos. O professor busca fornecer informações para que os alunos consigam encontrar um caminho tanto para a resolução do problema quanto para a construção de um conhecimento novo ou para a correção de curso em tópicos que possam ter sido concebidos erroneamente.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por integrar o processo de avaliação aos processos de ensino e de aprendizagem, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas permite que o professor, ao intervir durante a resolução do problema, possa desafiar o aluno a desenvolver uma capacidade argumentativa ao lhe permitir declarar assertivamente a respeito dos conteúdos trabalhados no problema, bem como sobre as estratégias de resolução e apreensão do novo conteúdo matemático trabalhado, além de suscitar discussões em sala de aula sobre a matemática, previamente concebida, que fora necessária para a execução das estratégias de resolução utilizadas. Podemos concluir, portanto, que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas traz em si a prática de uma avaliação para a aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 35-52.

CHAMBERS, D. L. Integrating Assessment and Instruction. In WEBB, N. L; COXFORD, A. F. **Assessment in the Mathematics Classroom**: 1993 Yearbook. Reston: NCTM, 1993.

FENNEL, F.; KOBETT, B.; WRAY, J. A. Classroom-Based Formative Assessments: Guiding Teaching and Learning. In SUURTAMM, C. (Editora) **Assessment to Enhance Teaching and Learning**. Reston: NCTM, 2015 pp. 51-62

LAMBDIN, D. V. Benefits of Teaching through Problem Solving. In. LESTER Jr, F. K.; CHARLES, R. I. **Teaching Mathematics through Problem Solving**: Prekindergarten–Grade 6. Reston: NCTM, 2003. P. 3-14

LUCKESI, C. C. **Avaliação da Aprendizagem Escolar:** Sendas Percorridas. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica – PUC, São Paulo, 1992.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. **Principles to Action**: Ensuring Mathematical Success for All. Reston: NCTM, 2014.

ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? In. **Espaço Pedagógico**. v. 20 n. 01, Passo Fundo. jan./jun. 2013. p. 88-104

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Trabalhando volume de cilindros através da resolução de problemas. **Educação Matemática em Revista – RS**, v. 10, n. 1, p. 95-103, 2009.

ONUCHIC, L. R.; Allevato, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectiva. In **Bolema**, v. 25, n. 41 Rio Claro: 2011. p. 73-98

PIRONEL, M. **A avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem da matemática na sala de aula**. Dissertação de mestrado. Rio Claro: UNESP, 2002. 193p.

PIRONEL, M.; ONUCHIC, L. de la R. Avaliação para a Aprendizagem: Uma proposta a partir de Transformações do Conceito de Avaliação na Sala de Aula no Século XXI. In. **IV CONAVE** – Congresso Nacional de Avaliação Educacional, Bauru, 2016. Anais. Bauru: UNESP, 24 a 26 de outubro de 2016. p. 1-13

http://www2.fc.unesp.br/sgcd/#!/paginas/conave/conave-2015/anais/comunicacoes-cientificas/. Acessado em 05.06.2017.

PIRONEL, M. **Avaliação para a Aprendizagem**: A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas em Ação. Tese de Doutorado. Rio Claro: UNESP, 2019. 297p.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. Porto Alegre: ARTMED, 7ª Edição, 2009.

CAPÍTULO 17

¿QUÉ COMPETENCIAS APORTA ANÁLISIS MATEMÁTICO 2 AL GRADUADO DE INGENIERÍA?

Data de aceite: 01/12/2021

Sara Aida Alaniz
Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias
Universidad Nacional de San Luís

Gladys Carmen May
Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias
Universidad Nacional de San Luís

Marcela Natalia Baracco
Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias
Universidad Nacional de San Luís

Roberto Javier Simunovich
Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias
Universidad Nacional de San Luís

RESUMEN: Este trabajo pretende mostrar una introspección de nuestras propias prácticas docentes a modo de clarificar en qué medida aportamos al desarrollo de competencias que les sean útiles a nuestros estudiantes de Ingeniería tanto para la carrera como para su formación profesional. En su publicación "Competencias y Perfil del Ingeniero Iberoamericano, Formación de Profesores y Desarrollo Tecnológico e Innovación", de abril del 2016 la Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería (ASIBEI) dentro de su plan estratégico(2013 – 2020) establece pautas para el perfil de ingeniero y las competencias del egresado, en base a estos lineamientos se toma el QUE QUEREMOS con la intensión de avanzar en COMO LO LOGRAMOS, este trabajo pretende establecer QUE APORTAMOS hoy desde Análisis Matemático 2.

PALABRAS CLAVE: Matemática, Competencias, Estrategias de enseñanza**.**

ABSTRACT: This work aims to show an introspection of our own teaching practices in order to clarify to what extent we contribute to the development of competencies that are useful to our Engineering students both for their career and for their professional training. In its publication "Competences and Profile of the Ibero-American Engineer, Teacher Training and Technological Development and Innovation", of April 2016 the Ibero-American Association of Engineering Teaching Institutions (ASIBEI) within its strategic plan (2013 - 2020) establishes guidelines For the profile of engineer and the competencies of the graduate, based on these guidelines the WHAT WE WANT is taken with the intention of advancing in HOW WE ACHIEVE IT, this work aims to establish WHAT WE PROVIDE today from Mathematical Analysis 2.

KEYWORDS: Mathematics, Competences, Teaching strategies.

1 I INTRODUCCIÓN

Los retos de la educación superior en el mundo son adaptarse de manera vertiginosa e integral, a todos los aspectos que la sociedad marca en cuanto a tecnología, productos, consumo, servicios, equipos, etc., debido a esto, la formación universitaria actual debe tener como objetivo el desarrollo o fortalecimiento de competencias de corte personal, académico y profesional, apoyada en el empleo de las TIC y en metodologías o estrategias didácticas que así lo permiten como el aprendizaje basado en proyectos, lectura, aprendizaje basado en problemas, método o estudio de casos.

Por este motivo los docentes hemos tenido que replantearnos nuestras prácticas pedagógicas y didácticas para acompañar las diversas trayectorias de los estudiantes. Nos obligó a repensar nuestras prácticas, la única certeza que tenemos es que nunca dejamos de aprender y lo que antes era una certeza ahora es una pregunta.

Como docentes de las Carreras de Ingeniería, sabemos que Matemática es una herramienta importante, es por eso que nuestra mayor preocupación por mejorar nuestra enseñanza de modo que nos permita obtener una mejor comprensión por parte de los estudiantes de los temas desarrollados en la asignatura para una posterior aplicación, hacemos cada año un análisis de nuestras propias prácticas docentes.

Somos integrantes de un proyecto de investigación sobre la práctica docente y además trabajamos en la asignatura Análisis Matemático 2 correspondiente a segundo año de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Agropecuarias. Los estudiantes que la cursan tienen aprobada Análisis Matemático 1 y cursadas Algebra y Geometría Analítica y Física 1.

La asignatura Análisis Matemático 2 tiene un crédito horario de ocho horas semanales, repartidas en dos días con clases teórico-práctico de cuatro horas, el equipo de cátedra está integrado por tres docentes, para una totalidad de aproximadamente 120 estudiantes.

Se utiliza una plataforma educativa para subir el programa de la materia, prácticos, teorías, resultados de revisiones conceptuales y resultados de parciales.

La pandemia dificulto el normal dictado de la asignatura, se continuo de manera virtual y como principal medio de comunicación se utilizó el aula de Classroom. Las clases se dictaron a través de Google meet.

En este contexto de pandemia que propició un nuevo paradigma en la Educación, la incorporación de aulas virtuales y uso de herramientas tecnológicas en las prácticas de enseñanza fue indispensable. Constituyendo una nueva oportunidad para enriquecer las experiencias docentes tradicionales que se llevaban a cabo hasta el momento en el marco de la presencialidad. Debemos tener en cuenta además que las clases dictadas en la virtualidad no se dieron en un marco de carreras esencialmente virtuales como tal sino adaptadas a un contexto extraordinario.

Debido a que es muy extenso el programa de la asignatura, se nos dificulta desarrollar y evaluar todos los contenidos durante la cursada. Es por eso que, hemos optado por brindarles una guía de estudio teórico práctica sobre contenidos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la cual no es requisito para regularizar, pero deben estudiar previo al examen final. Las evaluaciones de dichos contenidos se realizan en dos instancias una teórica y otra práctica.

Este trabajo consiste de un análisis sobre que competencias desarrollamos en nuestros estudiantes, a través de los contenidos de Análisis Matemático 2. Nos preguntamos qué requisitos les solicitamos a los estudiantes para que aprueben la materia.

2 | MARCO TEÓRICO

Según el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI), en la actualidad es una tendencia internacional en el diseño de los planes de estudio de ingeniería el uso de las competencias como horizonte formativo. Se considera que trabajar por competencias podría dar un marco que facilite una selección y un tratamiento más ajustado y eficaces de los contenidos impartidos.

Hay consenso en cuanto que el ingeniero no solo debe "saber", sino también "saber hacer". El saber hacer no surge de adquisición del conocimiento, sino que es el resultado de la puesta en funciones de una compleja estructura de conocimientos, habilidades, destrezas, etc., que requiere ser reconocida expresamente en el proceso de aprendizaje para que la propuesta pedagógica incluya las actividades que permitan su desarrollo.

El concepto de competencia es amplio, según diferentes autores. Pero en forma generalizada se entiende por competencia el conjunto de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que se integran a las características personales como capacidades, rasgos, motivos, valores y experiencias personales.

Dichas características se expresan o enuncian como acciones que se pueden evidenciar y por lo tanto están sujetas a un proceso de validación para verificar su cumplimiento. Las competencias hacen referencia al individuo como un ser integral contemplando de este modo cuatro grandes esferas del desarrollo humano: el ser, el convivir, el saber y el hacer."

Las competencias en la educación pueden definirse como *"…competencias, genéricas y específicas, entendidas como el conjunto de conocimientos, capacidades, destrezas, aptitudes y actitudes más adecuados para alcanzar unos objetivos sociales de largo recorrido."*(Suárez Arroyo, B 2005, pp. 6).

Otra forma de entender las Competencias es movilizando el conjunto de saberes: *el saber (disponer de un conjunto de conocimientos para realizar una tarea), el saber hacer (poseer habilidades para aplicar y utilizar los conocimientos), y el saber estar o saber ser (referido a las actitudes y valores) (Delors, 1886).*

Tobón (2004) define a las competencias, como procesos complejos de desempeño con idoneidad en determinados contextos, integrando diferentes saberes (saber ser, saber hacer, saber conocer y saber convivir).

Jure, I. y Solari, A. (comp.). Cap 2. pp 25. (2006), señalan que *"Las competencias* *se definen como las complejas capacidades integradas en diversos grados que la escuela debe formar en los individuos para que puedan desempeñarse como sujetos responsables en diferentes situaciones y contextos de la vida humana, social y personal, sabiendo ver, hacer, actuar y disfrutar convenientemente, evaluando alternativas, eligiendo las estrategias adecuadas, y haciéndose cargo de las decisiones tomadas" (Cullen, 1886). Fourez G., 1887 distingue los saberes (conocimientos) de los saber-ser y saber-hacer (competencias), aun cuando toda competencia descansa sobre saberes y todo saber desemboca en posibilidades de acción.*

Las competencias son un saber hacer en contexto, es decir el conjunto de acciones que un estudiante realiza en un contexto particular y que cumple con las exigencias específicas del mismo. (Solari y Juri, *2006).*

Según Suarez y Arroyo (2005) *"Todo parece indicar que en una visión moderna de las profesiones y de la educación, la formación en competencias en su versión más trascendentes a lo largo de la vida, la experiencia en el trabajo y la madurez personal y profesional deberían ser los factores que faciliten a los titulados de hoy crecer y progresar en unas competencias profesionales cambiantes día a día y cada vez más complejas; esta es una cuestión fundamental para construir una sociedad de ciudadanos más justa dónde el bienestar sea un elemento clave en el desarrollo de la vida cotidiana"* (pp.4).

En la formación de profesionales es necesario realizar cambios metodológicos, didácticos y de actividades que promuevan la cooperación y estimulen el pensar del estudiante, en la medida que se construyen los conocimientos junto al docente, apostando por un estudiante que aprenda a aprender y emprender, con una actitud crítica y capacidad de responder y actuar ante el cambio.

Lo importante es estimular en el estudiante un sentido crítico sobre la base de un conocimiento sólido, que le motive y le capacite para implicarse activamente en su vida profesional.

Todo esto para realizar actividades y/o resolver problemas con sentido de reto, motivación flexibilidad, creatividad, comprensión y emprendimiento, dentro de una perspectiva de procesamiento metacognitivo, mejoramiento continuo y compromiso ético. (Documento Curricular CGCB)

"Nuevos paradigmas, como la sociedad del conocimiento, la globalización, las redes, y la actual economía conforman un escenario particular que requiere de nuevas formas de intercambio y de comunicación. El mundo cambió y sigue cambiando, y la sociedad actual exige más a la Universidad; no sólo exige la formación profesional (el "saber"), sino también, la dotación de competencias profesionales a sus egresados (el "saber hacer"). Esto se ve claramente y es asumido así por las universidades a partir de la Declaración de Bolonia de 1888 y la declaración de "la educación como un servicio público" de la Convención de Salamanca de 2001.

El antiguo paradigma de formación de profesionales basado en la enseñanza como simple esquema de transferencia de conocimientos que el estudiante oportunamente sabrá abstraer, articular y aplicar eficazmente, ha ido perdiendo espacio en la realidad actual. La visión actual de la sociedad propone ver al egresado universitario como un ser competente (con un conjunto de competencias), capaz de actuar con ética, responsabilidad profesional y compromiso social, considerando el impacto económico, social y ambiental de su actividad en el contexto local y global:

1. Aprender en forma continua y autónoma
2. Actuar con espíritu emprendedor

Competencias	Descriptor/es
Pensamiento analítico	• Enumera ordenadamente los elementos contenidos en un texto • Integra distintos elementos de la asignatura en su análisis.
Pensamiento sistémico	• Toma conciencia de la complejidad y afronta su análisis. • Demuestra capacida para transferir los conocimientos teóricos o del aula en situaciones prácticas. • Integra elementos de distintas asignaturas o áreas en su análisis de la realidad.
Pensamiento critico	• Recurre a diversas perspectivas, fuentes, dimensiones, etc. • Fundamenta y argumenta los juicios que emite.
Pensamiento creativo	• Usa la información pero siempre dentro de la perspectiva dada • Relaciona conceptos e ideas de manera original
Pensamiento analógico	• Relaciona ejemplos e ideas presentes en un modelo. • Recurre a la analogía para crear explicaciones y hallar soluciones.
Resolución de problemas	• Identifica lo que es y no es un problema y toma la decisión de abordarlo. • Lee y/o escucha activamente. Hace preguntas para definir el problema planteado. • Presenta diferentes opciones alternativas de solución ante un mismo problema y evalúa sus posibles riesgos y ventajas.
Pensamiento reflexivo	• Utiliza las habilidades básicas de pensamiento para la reflexión metacognitiva • Pone en práctica de forma disciplinada los enfoques, métodos y experiencias que propone el profesor.
Orientación del aprendizaje	• Pregunta para aprender y se interesa por aclarar dudas. • Aplica los contenidos aprendidos en nuevas situaciones. • Muestra iniciativa en la búsqueda de información. • Formula sus objetivos de aprendizaje repitiendo los propuestos por el profesor.
Gestión del tiempo	• Administra el tiempo
Comunicación verbal	• Interviene con amplitud cuando es interpelado. • Expone ideas fundamentadas. • Las presentaciones están estructuradas, cumpliendo con los requisitos exigidos. • Sabe responder a las preguntas que se le formulan con acierto.
Comunicación escrita	• Comunica correcta y claramente por escrito.

Tabla 1. Las competencias y los descriptores sobre los que reflexionaremos.

3 | METODOLOGÍA

Nuestro trabajo es de tipo exploratorio donde se analizan las posibles competencias que puede aportar la asignatura Análisis Matemático 2 a los futuros ingenieros.

Se analizan las siguientes competencias: del pensamiento analítico, pensamiento sistémico, pensamiento crítico, pensamiento creativo, pensamiento analógico, resolución de problemas, gestión del tiempo, orientación del aprendizaje, comunicación oral y escrita.

4 | DESARROLLO

4.1 Estrategias

Se dictan clases teóricas en las que se desarrollan los contenidos de la asignatura y se destaca el orden de importancia de cada contenido. Los recursos didácticos que se utilizan son pizarrón y PowerPoint.

Las clases prácticas se desarrollan con la activa participación de los estudiantes. Los recursos utilizados son guías de teoría y de práctico (contiene actividades rutinarias, de comprensión y situaciones problemáticas) y libros, software MatLab, etc.

Las evaluaciones parciales son en general teóricas prácticas que involucre situaciones problemáticas y actividades de comprensión. El examen final es oral y en el mismo se desarrollarán los conceptos teóricos y sus relaciones.

El programa de la asignatura define una estrategia de enseñanza y aprendizaje con la intención de que los estudiantes logren las competencias genéricas y específicas definidas para la materia. Y además, se explicitan los métodos y técnicas de enseñanza para cada contenido (exposición, estudio de documentos, estudio de casos, resolución de problemas, dinámicas de grupos, debates, presentaciones formales, etc.).

También se incluye la asignación de tiempos previstos para las actividades del estudiante, tanto dentro como fuera del aula.

4.2 Análisis de las competencias que se desarrollan

4.2.1 Competencia pensamiento analítico

Los estudiantes que cursan la asignatura Análisis Matemático 2, corresponden a segundo año de las carreras de Ingeniería, es decir, que ya tienen el hábito de estudiar. En la clase, los docentes destacan los temas importantes y se les entregan guías teórica y prácticas. Por lo tanto, *los estudiantes enumeran ordenadamente los elementos contenidos en un texto. Identifican y enumeran todos los elementos con los criterios preestablecidos por los docentes*. En los exámenes parciales y finales se visualiza el alcance de estas competencias.

Uno de los contenidos de Análisis Matemático 2 son funciones escalares y vectoriales de dos o más variables, por lo tanto, un estudiante *que aprueba la materia relaciona dos o* *más variables cuantitativas. Interpreta el significado.*

4.2.2 Competencia pensamiento sistémico

En clase práctica se seleccionan actividades para desarrollar en el aula, en algunos casos se analiza una actividad en particular para que los estudiantes tengan no sólo un "modelo" sino que mientras se da la explicación, se indaga al grupo a modo de constatar cuáles son los conocimientos previos (en caso de ser necesario, se refuerzan) y lograr que entre todos quede planteada la actividad o situación problemática.

En clases de consulta, generalmente, los estudiantes preguntan sobre aquellas actividades que no fueron desarrolladas en clase. Puede observarse que algunos estudiantes logran resolverlas en forma individual. Durante estas consultas es donde tenemos una idea acabada de cuán capaces son de resolver una situación problemática y en qué medida pueden relacionar conceptos.

Teniendo en cuenta la disciplina a la que pertenece la asignatura, para comprender los contenidos que se enseñan, el estudiante debe tener claro los conceptos previos. Esto se evalúa tanto en revisiones conceptuales, parciales y en el examen final de la asignatura. Para aprobar el estudiante debe:

- Establece relaciones entre contenidos desarrollados en la materia Ejemplo: Integral de Línea y de Superficie y los de geometría de una curva alabeada. También los contenidos de la asignatura y los aprobados en Análisis Matemático 1 y Algebra y Geometría Analítica. Ejemplo: el concepto de deriva de una variable y derivada parcial, integral simple y las integrales dobles y triples. Para comprender los dominios de integración en el cálculo de integrales dobles y triples es necesario tener en claro las gráficas y ecuaciones de las cónicas y superficies cuádricas.
- Integrar distintos conceptos de la asignatura en su análisis*. Ejemplo: Para* analizar e interpretar los conceptos desarrollados en Integral de línea y de superficie debe relacionar las características de los campos vectoriales, integrales dobles y triples.
- *Realiza aplicaciones prácticas de los contenidos, lo que demuestra capacidad para transferir los conocimientos teóricos.*
- *Descubre la complejidad sin bloquearse, aunque manifieste inquietud o incomodidad. Toma conciencia de la complejidad y afronta su análisis.*
- *Recurre a diversas perspectivas, fuentes, para analizar situaciones problemáticas que involucra conceptos físicos.*

Estos indicadores pueden observarse en la corrección de parciales y en clases teniendo en cuenta las preguntas previas al resolver actividades en el aula, la manera en que relacionan o no conceptos previos.

4.2.3 Competencia pensamiento critico

Teniendo en cuenta las posibilidades de la materia, en particular relación docente-estudiantes, a partir del año 2013 se decidió incorporar como metodología de aprendizaje activo un sistema de autoevaluación permanente por parte de los estudiantes. Esta metodología, denominada por los estudiantes "parcialito", consiste de tres actividades teóricas o prácticas. En la evaluación parcial se proponen actividades, cada una consta de dos ítems, el haber aprobado los parcialitos le permite al estudiante optar en cada actividad resolver sola una de las dos opciones solicitadas. En caso contrario, resuelve toda la evaluación. Cabe aclarar que se toman dos evaluaciones parciales, con dos de sus respectivas recuperaciones. Para mejorar el rendimiento de nuestros estudiantes decidimos tomar "parcialitos" en todas las clases, con un repaso previo a la evaluación sobre los temas involucrados. [2,8,9]

Con los "parcialitos" se pretende motivar a los estudiantes a un estudio diario y constante, con la intención de modificar la conducta incorporada por la mayoría de estudiar solo en los días previos a un parcial. Además, posibilita la retroalimentación necesaria en el mecanismo de enseñanza y aprendizaje.

Con la periodicidad de los "parcialitos" se pretende facilitar la asimilación y el desarrollo progresivo de los contenidos de la asignatura y de las competencias que debe alcanzarse, así como habituar al estudiante a la evaluación. De esta manera, la evaluación se convierte en continua y el docente puede hacer un mejor seguimiento del proceso de aprendizaje del estudiante. Siguiendo las teorías constructivistas del conocimiento, se trata de apostar por un aprendizaje significativo. [2,7, 8]

La utilización de la resolución de problemas como estrategia metodológica activa, desafía al estudiante a generar un conocimiento, a partir de la búsqueda de soluciones a problemas que cuidadosamente planteados y seleccionados, deben ser interesantes, atractivos y estar relacionados con su carrera o su entorno profesional. Por eso en cada unidad se incorporan problemas de aplicación sencillos como un aporte a la Competencia Genérica, Tecnológicas: "Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería". [3]

Paralelamente la autoevaluación permanente permite que el estudiante desarrolle la Competencia Genérica Actitudinales: "Aprender en forma continua y autónoma" atento a que debe aplicar competencias instrumentales metodológicas como Gestión del Tiempo, Orientación al Aprendizaje y Planificación. [3]

En las evaluaciones, frecuentemente, los estudiantes deben justificar si dadas afirmaciones éstas son verdaderas o falsas y para justificarlas debe utilizar los conceptos desarrollados en la asignatura. Es decir*, fundamenta y argumenta los juicios que emite.*

4.2.4 Competencia pensamiento creativo

Los estudiantes de la asignatura *usan la información pero siempre dentro de la* *perspectiva* que le imponemos los docentes en cada contenido, para generar nuevas ideas.

4.2.5 Competencia pensamiento analógico

Los estudiantes asocian ideas diferentes para captar el sentido de un caso o problema. *Utilizan analogías de manera intuitiva para asociar ideas y explicarlas*, con problemas trabajados en física. En las evaluaciones se le solicitan ejemplos para saber si el estudiante comprende los conceptos.

También sucede que los estudiantes solicitan ejemplos sobre contenidos matemáticos (ya vistos) o ejemplos de física, para comprender los contenidos.

4.2.6 Competencia resolución de problemas

Cada guía práctica de la asignatura contiene actividades rutinarias, de comprensión y situaciones problemáticas.

Las evaluaciones parciales consisten de actividades de comprensión de los contenidos y situaciones problemáticas sencillas, donde deben aplicar los conceptos desarrollados en las clases.

- *Identifica lo que es y no es un problema y toma la decisión de abordarlo, que tiene ciertas condiciones, datos y comprende situaciones, y los resuelve.*
- *En las clases hace preguntas adecuadas para definir un problema planteado.*
- *Se lo orienta respecto a los datos que le brinda el problema,* Ejemplo: en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Recoge la información que necesita para resolver los problemas en base a datos y no sólo a opiniones subjetivas y sigue un método lógico de análisis de la información.
- *Las situaciones problemáticas, cada estudiante las abordan desde distintos puntos de vista. Relacionándolo con conceptos previos*.

4.2.7 Competencia pensamiento reflexivo

Cuando los estudiantes estudian ecuaciones diferenciales ordinarias, deben reconocer algunos conceptos tales como definición de derivadas, utilizar simplificación de expresiones algebraicas y trabajar con propiedades de logaritmos, no siempre logran identificar cuáles son los pasos que deben realizar para completar la guía teórica-practica de ese contenido. Los docentes visualizamos que ha realizado un análisis y reflexión, en la evaluación práctica y en el examen final, cuando se indaga al respecto.

4.2.8 Competencia orientación al aprendizaje

Se toman semanalmente revisiones conceptuales a fin de motivar un estudio diario y constante, pretendiendo guiar y acompañar al estudiante en su aprendizaje, permitiendo la toma de conciencia de los procesos realizados, de los errores y de su forma de aprender, que le será de utilidad y experiencia al momento de rendir las evaluaciones parciales. Coincidiendo con Litwin(1887), que la evaluación es una instancia de aprendizaje.

- En las evaluaciones teóricas- prácticas y en los exámenes finales se evalúa a los estudiantes en los contenidos importantes de la materia. *Si el estudiante ha incorporado los aprendizajes propuestos por los docentes y muestran una actitud activa*, e*l estudiante está poniendo en práctica los enfoques, métodos y experiencias que se proponen en la asignatura.*
- Previo al examen o los parciales, en las clases teóricas, prácticas y consultas. El estudiante pregunta para aprender y se interesa por aclarar dudas y comprender los contenidos. *Muestra iniciativa en la búsqueda de información,* para ampliar o aclarar dudas, miran videos explicativos o bajan libros digitales, es decir algunos estudiantes *amplían la información más allá de las referencias mínimas obligadas.*
- En algunas actividades problemáticas sencillas o cuando estudia temas no desarrollado en las clases pero si evaluados. *Comprende los elementos que componen la disciplina*. *Está aplicando los contenidos aprendidos en nuevas situaciones.*
- Cuando aprueba el examen final de la asignatura, relaciona los conocimientos de la asignatura y es capaz de ver el conjunto.

4.2.9 Competencia gestión del tiempo

Las fechas de las evaluaciones las establecemos los docentes con acuerdo de los estudiantes en el cuatrimestre.

El cronograma de dictado de la materia, si bien lo elaboran los docentes, se modifica o no de acuerdo al ritmo de trabajo de los estudiantes. El tiempo asignado a las evaluaciones parciales es un tiempo acotado.

4.2.10 Competencia comunicación verbal

En clases de consulta se les hace preguntas con el fin de visar lo aprehendido, los fundamentos utilizados por el estudiante ante una situación problemática, modificando a veces el enunciado, a fin de poder indagar sobre la construcción del conocimiento. En los exámenes finales, cada estudiante para aprobar debe responder preguntas y desarrollar los contenidos en forma oral, logrando lo siguiente:

- Se expresa de manera consistente conceptualmente y con fluidez.
- Interviene con amplitud cuando es interpelado por los docentes.
- Expone ideas acertadas, fundamentadas en temas importantes de la asignatura.
- Se expresa con cierta tranquilidad, se controla suficientemente sus nervios para

expresarse en el examen final.

4.2.11 Competencia comunicación escrita

Las revisiones conceptuales y los parciales, se evalúan en forma escrita, para aprobar cada estudiante debe desarrollar actividades de comprensión y resolver situaciones problemáticas. Usa correctamente el lenguaje técnico propios de la materia.

5 I CONCLUSIONES

De nuestro análisis podemos advertir que, si bien no enseñamos por competencias se logra que el estudiante desarrolle o profundice algunas de ellas.

a) El estudiante al aprobar la materia ha desarrollado o profundizado las competencias:

- *Pensamiento Analítico*, debido a que sabe cuál es la jerarquía de contenidos de cada unidad del programa de la asignatura, en cuanto a importancia.
- *Pensamiento Sistémico* relaciona contenidos de las asignaturas previas con los de Análisis Matemático 2, como así también los contenidos propios de la asignatura. Transfiere en un porcentaje de satisfactorio de los conceptos para resolver situaciones sencillas planteadas. Recurre a otras fuentes bibliográficas distintas de las brindadas en la cátedra.
- *Pensamiento Crítico,* fundamenta y argumenta para responder sobre un determinado contenido de la materia.
- *Pensamiento Analógico,* utilizan analogías de manera intuitiva para asociar ideas y explicarlas, con problemas trabajados en las materias previas a Análisis Matemático 2.
- *Resolución de Problema,* los aborda desde distintos puntos de vista. Relacionándolo con conceptos previos.
- *Pensamiento Reflexivo,* para entender los conceptos debió analizar y reflexionar *para* interpretar un concepto importante de la asignatura.
- *Orientación al Aprendizaje*, ha incorporado los aprendizajes propuestos por los docentes y muestran una actitud activa. El estudiante está poniendo en práctica los enfoques, métodos y experiencias que se proponen en la asignatura.
- *Comunicación verbal,* se expresa de manera consistente conceptualmente y con fluidez, manejando el lenguaje técnico.
- *Comunicación escrita,* desarrolla actividades de comprensión y resuelve situaciones problemáticas, utilizando satisfactoriamente el lenguaje técnico propios de la materia.

b) Si bien, en los trabajos prácticos los estudiantes trabajan en grupos (a lo sumo cuatro estudiantes por grupo), no hemos realizado un seguimiento en cuanto a la modalidad de trabajo.Los docentes no solo, debemos contar con una sólida formación disciplinar, sino que debemos ser capaces de diseñar e implementar propuestas pedagógicas en el que se desarrollen los contenidos y se aporte a las competencias necesarias para que los estudiantes comprendan las asignaturas del ciclo superior y que logre desarrollar las competencias requeridas para el egresado.

c) Las ingenierías que demanda el campo laboral actual se caracterizan además del conocimiento técnico-científico, por perfiles híbridos y complejos: informática, expresarse a través de diversos lenguajes, el trabajo colaborativo, la integración de los saberes: conceptuales, procedimentales y actitudinales para dar solución a diversos problemas. Los resultados de la formación de ingenieros deben dar como resultado perfiles de egreso que traspasan las fronteras de una disciplina y de un área de conocimiento específica. Por todo esto la asignatura análisis Matemático 2 está tratando de adaptarse a estos nuevos estándares.

6 | PROPUESTAS DE MEJORAS

Teniendo en cuenta las condiciones actuales de relación docente estudiante, formación docente, infraestructura y equipamiento, en el próximo dictado de la asignatura se propone trabajar en los siguientes aspectos para profundizar o alcanzar nuevas competencias:

- Incorporar videos seleccionados por los docentes que le contribuyan al estudiante para aclarar determinados contenidos.
- Seleccionarles página web de contenidos que se desarrollen en la asignatura.
- Establecer tiempos más acotados para las revisiones de conceptos y en las evaluaciones, de modo que se habitué a administrar su tiempo.
- Incorporar en los trabajos prácticos más cantidad de actividades que le ayuden a tomar decisiones.
- Incluir autoevaluaciones en guías de trabajos prácticos que se resuelvan previas al parcial, de modo que les permita ser menos dependientes de las consultas.
- Incluir actividades de trabajo en equipo y realizar un seguimiento.
- Teniendo implementado y evaluado el sistema de evaluación continua, el paso siguiente que nos hemos planteado para generar la trazabilidad necesaria que certifique el aporte de la asignatura a las competencias de egreso del ingeniero. Para ello se definirán algunas rúbricas de los resultados de aprendizaje de competencias cognitivas, metodológicas e interpersonales, según el siguiente detalle:[13]

Tipo	Competencia	Nivel de dominio
Cognitiva	Pensamiento analítico	Seleccionar los elementos significativos y sus relaciones en situaciones complejas.
Cognitiva	Pensamiento lógico	Utilizar procedimientos lógicos para conceptuar, distinguir e inferir ideas, factores y/o consecuencias de casos o situaciones reales.
Cognitiva	Pensamiento práctico	Utilizar sus capacidades y los recursos de que dispone para alcanzar los objetivos en situaciones habituales y siguiendo instrucciones.
Metodológica	Gestión del tiempo	Establecer objetivos y prioridades, planificar y cumplir la planificación en el corto plazo (cada día, cada semana)
Metodológica	Resolución de problemas	Identificar y analizar un problema para generar alternativas de solución, aplicando los métodos aprendidos.
Metodológica	Orientación al aprendizaje	Incorporar los aprendizajes propuestos y mostrar una actitud activa para su asimilación.
Metodológica	Planificación	Organizar diariamente el trabajo personal, recursos y tiempos, con método, de acuerdo a sus posibilidades y prioridades.
Interpersonales	Automotivación	Tener conciencia de los recursos personales y limitaciones (personales, entorno, etc.) para aprovecharlos en el óptimo desempeño de las tareas encomendadas.

-Mapa de rúbricas Proyecto Tuning.

REFERENCIAS

1. Alaniz, S.; May G.; Morano, D.; Simunovich R. "**La Evaluación Continua como Herramienta para Mejorar los Resultados del Aprendizaje**". Actas del XXI Encuentro Nacional y XIII Internacional Educación Matemática en Carreras de Ingeniería (EMCI 2018).

2. Alaniz, S.; May G.; Baracco, M.; Simunovich R. "**Opinión de los estudiantes sobre los parcialitos como ayuda para la comprensión de los temas de Matemáticas Especiale**s" Actas de presentado en XVIII Encuentro Nacional y VI Internacional Educación Matemática en Carreras de Ingeniería (EMCI 2014).

3. CONFEDI. Declaración de Valparaiso sobre competencias genéricas de egreso del ingeniero iberoamericano. **Competencias genéricas de egreso del ingeniero argentino**. **Competencias requeridas para el ingreso a los estudios universitarios en Argentina**. FASTA Ediciones. (Abril 2014).

4. Delors, J. (Coord.) (1886). **La educación encierra un tesoro**. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI. Madrid, España: Santillana. Ediciones UNESCO.

5. Documento Curricular Ciclo General de Conocimientos Básicos en Carreras de Ingeniería CGCB. Red de Facultades de Ingeniería UNSL, UNSJ, UNC;UNLP, UNP, Año 2008.

6. Documento plan estratégico ASIBEI. (2016). **Competencia y Perfil del Ingeniero Iberoamericano, Formación de Profesores Desarrollo Tecnológico e Innovación**.

7. Litwin, E. (2007).**El oficio de Enseñar. Condiciones y Contextos**(1ªed.)Buenos Aires:Editorial Paidos.

8. May G.; Hidalgo G.; Esperanza J.; Aliaga L.; Simunovich R.”**Parcialitos” como herramienta de evaluación continua para el aprendizaje en Análisis Matemático II**. Actas de XXVIII Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de La Facultades de Ciencias Económicas y Afines. (2013).

9. May G.; Alaniz, S.; Esperanza J.; Simunovich R.; Oromi, F. **“Análisis de la Opinión de los estudiantes sobre “los parcialitos” y el modo de evaluación de la asignatura Matemática II**”. Actas de XXIX Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de La Facultades de Ciencias Económicas y Afines. (2014).

10. Jure, I. y Solari, A. (comp.)(2006). **El espacio de las competencias en la articulación curricular por disciplinas entre el nivel medio y universitario**. Universidad Nacional de Rio Cuarto. Rio Cuarto. Córdoba. Argentina.

11. Suarez y Arroyo, B (2005). **La formación en competencias: un desafío para la educación superior del futuro**, Universidad Politécnica de Cataluña Barcelona.

12. Tobón, S (2004). **Formación basada en competencias. Pensamiento complejo, diseño curricular y didáctica**. Colombia. Esfera Editores.

13. Villa, A. y Poblete, M. **Aprendizaje basado en competencias. Una propuesta para la evaluación de competencias genéricas**. Universidad del Deusto (2002).

14. Zepeda-Hurtado, M. E., Cardoso-Espinosa, E. O., Rey-Benguría,”**El desarrollo de habilidades blandas en la formación de ingenieros**” Instituto Politécnico Nacional,México y Universidad de Ciego de Ávila “Máximo Gómez Báez”,Cuba - Científica, vol. 23, núm. 1, pp. 61-67, 2019-https://www.redalyc.org/jatsRepo/614/61458265007/html/index.html

CAPÍTULO 18

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMATICA COMO SUBSÍDIO PARA A CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE RAZÃO, PROPORÇÃO E TEOREMA DE TALES

Data de aceite: 01/12/2021

Elismar Dias Batista

Willian Isao Tokura

Jeidy Johana Jimenez Ruiz

Priscila Marques Kai

RESUMO: O presente artigo tem como objetivo trabalhar a utilização de técnicas ancestrais elaboradas por alguns dos povos antigos como: Gregos, Egípcios e Babilônios, na construção dos conceitos de **Razão e Proporção**. Iniciou se uma pesquisa investigativa com alunos das turmas do 8° e 9° ano do Colégio Estadual Trajano Coelho Neto e Colégio Estadual Idalina de Paula, no período de abril a junho de 2012, com intuito de aplicar métodos pedagógicos com o auxílio da História da Educação que propiciem a construção do conhecimento, além de tornar o ambiente (sala de aula) propício para a investigação matemática através de experiências semelhantes às feitas por povos percussores da ciência.

PALAVRAS – CHAVE: História da Matemática; metodologia; ensino.

ABSTRACT: This article aims to work the use of ancestral techniques developed by some of the ancient peoples such as: Greeks, Egyptians and Babylonians, in the construction of the concepts of Reason and Proportion. An investigative research was started with students from the 8th and 9th grade classes of the State College Trajano Coelho Neto and the State College Idalina de Paula, from April to June 2012, in order to apply pedagogical methods with the help of the History of Education that fosters the construction of knowledge, in addition to making the environment (classroom) conducive to mathematical investigation through experiences similar to those carried out by people who were the forerunners of science.

KEYWORDS: History of Mathematics; methodology; teaching.

INTRODUÇÃO

A matemática foi uma das primeiras ciências a surgir, e seu surgimento veio de forma intuitiva devido às necessidades do homem, pois a partir do momento em que o ser humano deixou de ser nômade e passou a ter um local fixo, surgiu à necessidade de novas técnicas de sobrevivência. Pensando em matemática como princípio criativo e cognitivo do homem, podemos perceber que ainda antes de se tornar nômade ele utilizava de técnicas de caça e organização do raciocínio para comunicação, o que nos leva a perceber que a matemática (ciência) está atrelada a origem do ser.

Relacionando o surgimento da matemática com o ensino matemático, podemos perceber uma divergência no uso e aplicabilidade da mesma, pois o conhecimento matemático dos últimos anos tem sido totalmente desassociado com a necessidade do aluno, pois como vimos acima à matemática enquanto ciência surgiu com a necessidade do ser humano e se ela não for ensinada da mesma forma acarretará na deficiência do processo de ensino e aprendizagem, o que a torna negligente no âmbito escolar, visto que o aluno não consegue compreender a necessidade de se estudar matemática, acreditando ser apenas um sujeito subordinado a um sistema o qual o obriga a aprender um emaranhado de formulas e teoremas que não fazem o menor sentido.

Atualmente vêm surgindo inúmeras linhas de pesquisa no âmbito da Educação Matemática, pois várias contestações têm sido feitas a respeito dos métodos de ensino utilizados atualmente. Com todas essas pesquisas concluiu-se que o processo de ensino e aprendizagem precisa ser significativo, e para isso o professor tem que estar capacitado para tornar interativo e dinâmico um ensino que vem se tornando mecânico e estático, sobre o preparo do professor, Brito e Miorim (1999) diz que

> “A partir da aquisição de conhecimentos históricos e filosóficos dos conceitos matemáticos, o professor tem a possibilidade de diversificar suas técnicas pedagógicas e tornar-se mais criativo na elaboração de suas aulas, as quais podem provocar o interesse dos alunos para o estudo da matemática”.

Com o intuito de tornar o ensino significativo, dinâmico e interessante pensamos e pesquisamos a utilização da História da matemática como subsídio no processo de ensino e aprendizagem, procuramos buscar e se apoiar na construção do conhecimento a partir da necessidade humana.

Porém, para utilizar a História da Matemática é necessário ter conhecimento do ambiente em que está inserido o aluno e práticas culturais da região entre outros.

> “A abordagem adequada para incorporar a história da matemática na prática pedagógica deve enfatizar os aspectos socioeconômicos, políticos e culturais que propiciaram a criação matemática. D’Ambrósio (1999)”.

Tendo como norte as teorias construtivistas de Jean Piaget e Vygotsky, decidimos trabalhar a construção do conceito de **Razão e Proporção** por meio de experiências semelhantes às realizado por povos antigos, tais como: Gregos, Egípcios e Babilônios, remontando todo um contexto histórico didático - pedagógico. Para tanto realizamos uma pesquisa investigativa com alunos das turmas do 8° e 9° ano do Colégio Estadual Trajano Coelho Neto e Colégio Estadual Idalina de Paula no período de abril a junho de 2012.

A pesquisa tem como intuito desenvolver métodos que propiciem a construção do conhecimento assim citado pelos autores das teorias construtivistas, além de tornar o ambiente (sala de aula) ideal para a investigação matemática através de experiências semelhantes às feitas na antiguidade.

Realizou-se uma pesquisa Histórica – bibliográfica, onde os professores compreenderam o surgimento e o desenvolvimento da ciência matemática, a fim de assimilar ideias e métodos que auxiliem a construção do significado.

METODOLOGIA

Descoberta da constante “PI”, e a construção dos conceitos de razão e proporção

Após os professores terem pesquisado a respeito do tema História da Matemática, formulou-se estratégias de ação metodológica a fim de colocar significado e propiciar uma melhor interatividade entre aluno/professor no processo de ensino e aprendizagem.

No primeiro contato com o campo de pesquisa (escolas estaduais), aconteceram as primeiras apresentações, a fim de conhecer a clientela (alunos) e os colegas com quem iriamos trabalhar (professores regentes das turmas a serem pesquisadas). Logo em seguida fomos conversar com os alunos do 9° ano a respeito da pesquisa que seria realizada com eles, neste momento foi possível fazer uma análise previa de todos os alunos. Como trabalhamos em duas escolas, as diferenças surgiram já no primeiro contato onde os alunos da Escola Estadual Trajano Coelho Neto foram mais receptivos e comprometidos a colaborar com a pesquisa do que os alunos do Colégio Estadual Idalina de Paula, porém conseguimos executar a pesquisa investigativa com as duas turmas. É necessário ressaltar que a Escola Estadual Trajano Coelho é de tempo integral, ou seja, existem variáveis diferentes das escolas tradicionais que influenciam no processo de ensino e aprendizagem, algumas delas seriam a clientela (pois a escola se localiza no centro da cidade), um maior tempo na escola que possibilita o desenvolvimento de práticas de ensino diversificado e a estrutura física da escola que precisa ser diferente, pois a maior parte do dia os alunos passam na mesma.

Não se tem dados precisos da criação do pi, sabemos apenas que ele ganhou um nome próprio de descendência grega, o pi representa a razão do comprimento pelo diâmetro do círculo. O pi tem uma história fascinante que data de 400 antes de cristo, lembrando que um dos passos essenciais, consistiu em obter a consciência da razão entre o perímetro e o diâmetro de qualquer círculo, pois sem esta consciência nunca se teria calculado o pi. Ainda no antigo testamento da bíblia sagrada, no livro de Reis, diz que Salomão construiu “*um lago de dez cúbitos, de margem a margem, circular, cinco cúbitos de fundo,e trintacúbitos em redor”.* O que nos mostra que nesse tempo eles já tinham uma noção da constante da razão entre o comprimento e o diâmetro do círculo, o qual atribuía a esse valor o três.

A primeira atividade proposta aos alunos teve como objetivo incentivá-los a fazer investigações matemáticas e descobrir o valor aproximado da constante pi, além de compreender o significado de razão matemática através de uma experiência feita pelos professores estagiário, a qual consistia em calcular o comprimento de alguns círculos e dividir pelos seus diâmetros. Para essa atividade levamos pra sala alguns círculos e objetos em formato cilíndricos, dividimos a sala em grupos e pedimos que fizesse a divisão entre comprimento e diâmetro dos objetos anotando no caderno os resultados obtidos.

Em seguida debatemos os resultados encontrados, com isso os alunos puderam perceber a regularidade nos resultados. Outa atividade foi a comparações entre alguns números contidos em uma folha de papel A4. Entregamos uma folha para cada aluno com alguns números soltos na mesma, e pedimos que formassem grupos de quatro, e então fizessem comparações entre os números da folha e registrasse os resultados escrevendo no caderno. Neste momento tivemos alguns problemas, pois os alunos não estavam acostumados com essa prática pedagógica de investigar, o que fez com que os mesmos ficassem dispersos sem saber o que fazer, no entanto foi preciso um auxílio por parte dos professores para nortear a execução desta atividade, no entanto obtivemos grandes resultados onde os alunos discutiram entre si as descobertas obtidas. Após executada essa atividade, fizemos uma breve contextualização a respeito do que eles haviam feito, seguimos pedindo agora para fazer comparações entre grandezas (peso, altura, espaço, tempo), foi ai que os alunos perceberam que as comparações podem nos dizer algo, nesse momento a Kely (aluna do 9° do Trajano Coelho Neto) disse:

- Mas professor, fazendo as comparações eu sei qual número é maior, e qual é menor... só isso. Neste momento o professor questionou:

- E se além de comparar qual é maior ou menor nos dividíssemos esses números?

Nesta hora outro aluno perguntou:

- Mas e aí o que vai significar o resultado da divisão, pois com a comparação eu sei quem é maior ou menor e a divisão não diz nada?

Então houve um silencio na sala por alguns segundo, logo o professor pediu pra que pensassem melhor a respeito dessa relação, foi aí que o Kaique (aluno do 9° do Trajano Coelho Neto) disse:

- Há! Dividindo eu vou saber mais do que só comparando. Dividindo dois números, além de saber quem é maior eu vou saber quanto este número é maior que o outro, ou o contrário. Então o professor tomou o rumo das discursões e através dos resultados obtidos pelos alunos foi possível formalizar o conceito de razão onde deixou claro que o significado do resultado obtido com o quociente de dois números depende do contexto que está inserido os números. Os alunos foram questionados sobre sua saúde física, mais especificadamente, em relação a sua massa corpórea, porém não sabiam como realizar tais medidas. Então, o professor apresentou-lhes o IMC (Índice de Massa Corpórea) e o passo seguinte foi calcular o IMC de todos os alunos, antes disso discutimos em sala de aula questões sobre uma boa alimentação e atividades físicas, logo depois apresentamos o método para se calcular o IMC e os alunos então calcularam com o auxílio de uma balança e fita métrica. Após o cálculo dos seus respectivos IMCs o professor questionou o que significava o resultado e qual o fundamento de realizar aquele cálculo. Neste momento gerou certo alvoroço, pois os alunos falavam todos ao mesmo tempo dificultando o entendimento, no entanto, um aluno disse:

- O resultado quer dizer que em um centímetro tem certa quantidade de peso.

Em seguida muitos alunos discordaram dizendo que se fossem centímetros, porque tinha que multiplicar a altura por ela mesma, nesse momento houve a intervenção do professor dizendo quando se multiplica centímetro por centímetro é para calcular o que? Desta forma, perceberam a ligação do peso pela área do corpo e que a sua finalidade é saber quanto de massa aproximadamente tem em cada centímetro quadrado do corpo. Os alunos conseguiram associar o conceito de razão com o que os alunos tinham acabado de visualizar na atividade anterior, utilizamos também a razão áurea para desenhar algumas casas, prédios e outros, fazendo isso, o professor partiu mais uma vez da necessidade do aluno.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o término do estudo percebemos um grande avanço na construção dos conceitos trabalhos, tanto para os alunos quanto para os professores, pois surgiram muitas situações em que proporcionaram conhecimento a ambos. Esperamos que este trabalho não seja limitado pelo término da pesquisa e que tanto alunos e professores procurem cada vez mais se aperfeiçoarem na arte de aprender e ensinar. Pois essa pesquisa nos faz refletir sobre as metodologias até então utilizadas na sala de aula, explicitando o valor da construção do conhecimento e não uma mecanização dele, mediatizada pela história da matemática.

Tendo a história da matemática como subsídio percebemos que grande parte dos conhecimentos matemáticos surgiu das necessidades de um determinado povo, fazendo-nos reconhecer que podemos utilizar a necessidade como instrumento construtivo na sala de aula, além disso, ficou claro que a sala de aula é um ambiente onde o conhecimento é uma mão de via dupla, ou seja, tanto o aluno quanto o professor aprendem e ensina.

REFERÊNCIAS

A historia do numero 1(6). Disponível em: <http://br.youtube.com/watch?v=VJyfj_7Pmnw>. Acessado em 05/07/2012

Aula de Matemática: Número áureo. You Tube. Disponível em: <http://br.youtube.com/watch?v=SUSyRUkFKHY&feature=related>. Acessado em 04/12/2012.

BRITO, A. J.; MIORIM, M.A. A história na formação de professores de matemática: reflexões sobre uma experiência. Anais do III Seminário Nacional de História da Matemática, 1999.

BARONI, R. L.S., NOBRE, S. A pesquisa em História da Matemática e suas relações com a Educação Matemática. In: BICUDO, Maria A. V., (org). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 129-136.

BOYER, C. B. História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974. 496 p.

D'AMBROSIO, U. A História da Matemática – Questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p.97-115.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. 843 p.

OLIVEIRA, I.A. F. G. de. Um estudo sobre a proporcionalidade: a resolução de problemas no ensino fundamental. Recife, 2000. 133 p. (Mestrado em Educação)–programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE, Universidade Federal do Pernambuco, 2000.

CAPÍTULO 19

ANÁLISIS ESTADÍSTICO APLICADO EN LA PROPOSICIÓN DE UNA RED DE CICLOVÍAS EN EL GRAN SAN JUAN

Data de aceite: 01/12/2021
Data de submissão: 07/10.2021

Mariana Laura Espinoza
Escuela de Ingeniería de Caminos de Montaña.
Universidad Nacional de San Juan
San Juan, Argentina

Aníbal Leodegario Altamira
Escuela de Ingeniería de Caminos de Montaña.
Universidad Nacional de San Juan
San Juan, Argentina

RESUMEN: El uso de la bicicleta está muy difundido en la provincia de San Juan tanto para la práctica deportiva, recreacional y también como medio de transporte. En la Universidad Nacional de San Juan se está desarrollando una investigación que tiene como objetivo proponer lineamientos a seguir para materializar una red de ciclovías en el área urbana del Gran San Juan. Para esto se están realizando una serie de encuestas de origen y destino y censos de tipo volumétrico como forma de determinar cómo es el movimiento ciclista a través de las calles. En este artículo se muestra la aplicación de la estadística como herramienta de análisis y toma de decisiones en la investigación.

PALABRAS CLAVE: Estadística, Ciclovías, Análisis, Toma de decisiones.

STATISTICAL ANALYSIS APPLIED IN THE PROPOSAL OF A NETWORK OF BICYCLE PATHS IN GREATER SAN JUAN

ABSTRACT: Use of bicycle is widespread in San Juan province not only for sports or recreational purposes, but also as a transport mean. At the National University of San Juan, Argentina, a research is being carried on to develop guidelines to be followed, for network design of cycle paths in urban area of Greater San Juan.

Traffic censuses and origin and destination surveys, are being carried out, in order to determine cycling movements along the streets in that area. This article shows the application of statistics as an analysis and decision making tool in research projects.

KEYWORDS: Statistics, Cycle paths, Analysis, Decision making.

1 | INTRODUCCIÓN

El crecimiento poblacional, la mejor y mayor calidad del nivel de vida, han derivado en un mayor grado de motorización de la población en general. Argentina es el país con más unidades por habitante de la región. Este nivel de motorización, trae consigo ciertas ventajas y desventajas. La provincia de San Juan no está ajena a esto, si se observa el modelo de movilidad en la ciudad de San Juan [A], este se ha tornado insostenible. Mayores costos de operación y tiempos de viaje, mayor polución de partículas, gases y emisión sonora al ambiente, incremento del número de accidentes con heridos graves y fallecidos son costos que, desde un punto de vista social, no superan los beneficios sociales de un mayor grado de motorización. Con el ánimo de enfrentar esta problemática, la incorporación de alternativas técnicamente viables y económicamente factibles como las ciclovías o el fortalecimiento del transporte público automotor, suele ser las mejores tentativas de solución, tanto desde el punto de vista económico como ecológico, facilitando la disminución del alto impacto que causa el vehículo automotor en el ambiente y en la economía de los ciudadanos.

En San Juan el uso de la bicicleta como modo de transporte y como práctica deportiva está muy arraigado en la comunidad y puede reducir la problemática enunciada.

Este trabajo está enmarcado dentro de un proyecto de investigación llevado a cabo en la Universidad Nacional de San Juan que tiene como objetivo proponer las directrices a seguir para materializar una red de ciclovías en el Gran San Juan. La investigación pondrá en evidencia la necesidad de contar con un sistema de ciclovías en el área urbana del gran San Juan. A través de censos de tránsito y encuestas se valorará y justificará esta consideración.

2 | ANTECEDENTES

Los ciclistas son usuarios vulnerables de la vía, por ello necesitan un entorno seguro en el cual viajar desde donde viven hasta donde estudian, juegan, compran y trabajan. En la medida de lo posible, deben circular segregados de los vehículos motrices, por lo tanto, se les debe proveer una infraestructura ciclo inclusiva para que viajen seguros y con menor riesgo de accidentes.

La ciclovía es una plataforma exclusiva para la circulación ciclista, situada en la calzada de circulación vehicular y delimitada por señalización.

En nuestro país existen sistemas de ciclovías en ciudades como Buenos Aires, Rosario, Córdoba. A nivel internacional podemos citar los sistemas de ciclovías de Santiago de Chile, Bogotá, Río de Janeiro, Madrid, Copenhague, Ámsterdam, entre otras. La provincia de San Juan aún no cuenta con una red de ciclovías que permita la circulación fluida y segura.

3 | OBJETIVO DEL TRABAJO

El objetivo del artículo es mostrar la aplicación de la estadística como herramienta de análisis y toma de decisiones en la investigación de una problemática real en cuanto al desplazamiento de los usuarios urbanos de bicicletas en el Gran San Juan y orientar en la proposición de posibles soluciones.

4 I RELEVAMIENTOS

El trabajo consta de dos fases: una cuantitativa y otra cualitativa. La fase cuantitativa es la que se lleva a cabo mediante la realización de un conteo de usuarios de bicicletas en distintos puntos seleccionados de la ciudad de San Juan. La fase cualitativa se desarrolla mediante la realización de encuestas a los usuarios.

La finalidad de los relevamientos es:

- Conocer el número diario de viajes en bicicleta que se realizan en la ciudad de San Juan en un día laboral tipo.
- Analizar el uso de la bicicleta en la ciudad en función del género.
- Valorar la evolución del uso de la bicicleta a lo largo de las distintas horas del día.
- Caracterizar la movilidad en bicicleta en un día laborable.
- Conocer las alternativas y la procedencia modal de los usuarios de la bicicleta.

Los datos obtenidos durante estas dos fases se analizan y se cruzan con otros datos conocidos obtenidos por otro equipo de investigación de la Escuela de Ingeniería de Caminos de Montaña (EICAM) o los datos del Atlas Socioeconómico de la provincia de San Juan; para llevar a cabo una estimación del número total de desplazamientos en bicicleta y de su participación en el reparto modal.

5 I METODOLOGÍA

En la primera etapa del proyecto se realizó el conteo de bicicletas en distintos puntos de la ciudad de San Juan, los mismos se llevaron a cabo sobre algunos puentes seleccionados de la Avenida de Circunvalación (meses de Octubre, Noviembre y Diciembre 2016), como los de la Av. Rawson, Av. Libertador Este, Av. Sarmiento (Rivadavia), Hipólito Irigoyen, 9 de Julio, Av. Ignacio de la Roza, Av. Libertador Oeste, P. A. de Sarmiento Norte (codificados en el mapa como C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8). El conteo se hizo en ambos sentidos de circulación. También se evalúo el reparto por género entre los ciclistas detectados.

Se establecieron turnos de trabajo, cada turno formado por un alumno. Los turnos fueron: 07 a 10 hs, 10 a 13 hs, 13 a 16 hs, 16 a 20 hs. Se contaron, durante periodos de media hora, el número de hombres y de mujeres que pasaban por el punto, en cualquier tipo de bicicleta, sea para el transporte o de tipo deportiva.

El conteo se realizó en días con buenas condiciones climáticas, sin lluvia y sin viento lo que hizo que las condiciones fueran óptimas para este tipo de censo.

También se realizaron encuestas a los usuarios de la bicicleta en determinados “puntos atractores” de la ciudad de San Juan, con el objeto de evaluar el perfil del ciclista urbano. Los puntos atractores censados fueron, la Residencia Universitaria “El Palomar”, la Facultad de Ingeniería, el Centro Cívico y el Hospital Rawson (codificados en el mapa como E1, E2, E3, E4).

La **Ilustración 1** muestra la ubicación de cada uno de los puntos censales.

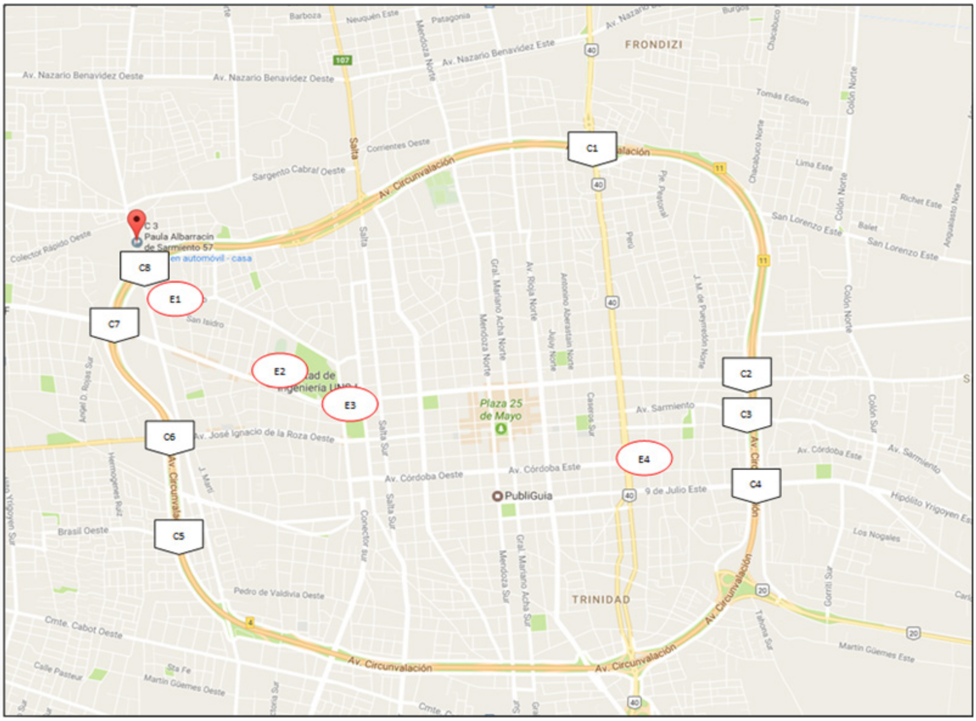


Ilustración 1. Ubicación de conteos y encuestas realizadas

5.1 Planillas de conteo y Encuestas a los ciclistas

Los modelos usados para los conteos y las encuestas fueron los que se muestran en la **Tabla 1** y en la **Tabla 2.**

	Nombre censista:						
	Fecha		Ubicación:				
			Movimiento			Movimiento	
Hora	Media Hora		De: ↑ Hacia:	Total		De: ↓ Hacia:	Total
7hs	7 a 7:30hs	H			H		
		M			M		
	7:30 a 8hs	H			H		
		M			M		

Tabla 1. Planilla de conteo

Encuesta Orientada a la Justificación e Implementación de un Sistema de Ciclovías en el Gran San Juan

Escuela de Ingeniería de Caminos de Montaña - Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de San Juan

Fecha: Hora:		Encuestador:		Ubicación:	
1. Datos del encuestado	**Edad**	**2. Actividad**		**3. Nivel de Estudio (terminado)**	
Varón		1.Trabajador en relación de dependencia		1. Sin estudios	
Mujer		2. Trabajador autónomo		2. Estudios primarios	
		3. Desempleado		3. Estudios secundarios	
Tipo de bicicleta		4. Jubilado/pensionado		4. Universitario	
Común		5. Estudiante (P - S - U)			
Deportiva		6. Ama/o de casa			
4. Frecuencia de uso		**5. Motivo principal de la elección de la bicicleta para este viaje (según importancia)**		**6. ¿En el pasado realizaba este desplazamiento en otro modo?**	
1. Casi todos los días mañana y tarde		1. Más económico		Sí - No	
2. Casi todos los días mañana o tarde		2. Menor tiempo		1. A pie	
3. Casi todos los días por la mañana		3. Más ecológico		2. Auto - Conductor	
4. Casi todos los días por la tarde		4. Motivos de salud		3. Auto - Compartido	
5. Algún día por semana		5. Facilidad de estacionamiento		4. Motocicleta	
6. Sólo los fines de semana		6.Otros (Especificar)		5. Omnibus	
				6. Taxi/remís	
7. Si no hubiera utilizado la bicicleta para este viaje ¿Qué modo habrías utilizado?		**8. Desde la seguridad vial, cuáles son los principales problemas que detectas para el uso de la bicicleta**		**9. ¿Cuál considera el aspecto más importante a mejorar para el desplazamiento en bicicleta? (según importancia)**	
1. A pie		1. Conflicto con vehículos motorizados		1. Construir red de ciclovías	
2. Auto - conductor		2. Conflicto con peatones		2. Mejorar estacionamientos existentes (bicis)	
3. Auto - acompañante		3. Señalización		3. Construir nuevos estacionamientos (bicis)	
4. Motocicleta		4. Estado de la infraestructura		4. Mayor seguridad (robos.. Estacionamiento - Trayecto) bicicletas	
5. Omnibus		5. Otros (especificar)		6. Mejorar infra estructura existente	
6. Taxi/remis		(según importancia)		(Estado del pavimento, poda de árboles, limpieza,etc.)	
10. Origen - Destino (trayecto atrás)		**11. Motivo del viaje (Actual)**		¿Si se mejorara el aspecto señalado arriba, usaría con mayor frecuencia la bicicleta?	
Origen viaje actual:		1. Trabajo			
		2. Estudio		Sí	
		3. Ocio		No	
Tiempo de viaje:		4. Compras			
Destino viaje siguiente:		5. Otros (Especificar)			
Tiempo estimado de viaje:					

Tabla 2. Encuestas a los usuarios de bicicletas (Adaptada “Investigación sobre el uso de la bicicleta en la ciudad de Sevilla,2011” [B])

6 I ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Después de realizar los conteos de bicicletas en distintos puntos de la ciudad de San Juan y las encuestas entre los usuarios de la bicicleta con el objeto de evaluar el perfil del ciclista urbano, se comenzó con el análisis de la información relevada. El análisis estadístico de la muestra obtenida, se divide en dos fases, cuantitativa y cualitativa.

6.1 Resultados de la fase cuantitativa

En esta fase del análisis se trabajó con *planillas de conteo.* El primer paso fue volcar la información en una planilla de cálculo, de su procesamiento se obtuvo la información que se detalla a continuación.

6.1.1 Número total de bicicletas

Se procesaron todas las planillas de conteo. En cada una ellas se sumaron los totales, así se obtuvo "el número total de bicicletas en cada punto censal".

6.1.2 Evolución diaria del uso de la bicicleta

El conteo de cada planilla se realizó cada media y representa la evolución del número total de bicicletas contabilizadas a lo largo del día. La **Figura 1** muestra, como ejemplo, el conteo realizado el día 07/12/2016 en la A014 y Av. Libertador (O), codificado como C7 en la **Ilustración 1** . Puede observarse que hay picos horarios en función del sentido que se está contando, los más representativos en este lugar fueron: entre las 13:30 y 14:30 hs hay un pico en sentido E-O (desde el centro hacia Rivadavia); a las 16:30 hs puede observarse otro pico en sentido O-E (desde Rivadavia hacia el centro). Lo observado coincide con los horarios en donde hay mayor actividad poblacional.

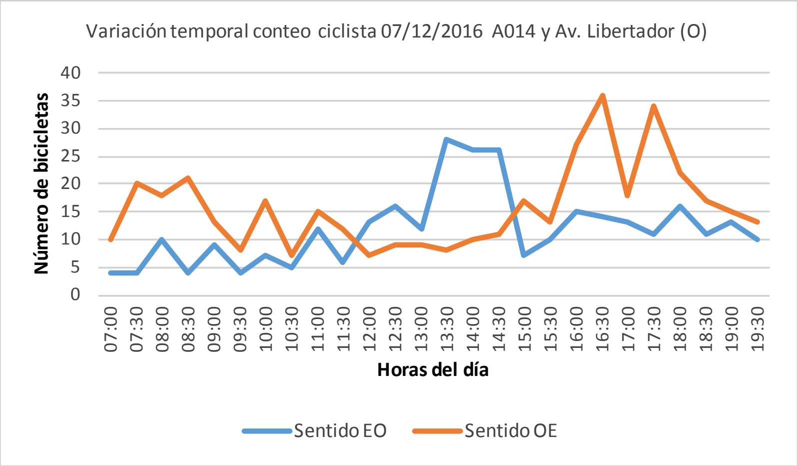


Figura 1. Evolución del número de bicicletas a lo largo del día

6.1.3 Uso de la bicicleta en función del género

La distribución de género en los intervalos horarios medidos a lo largo del día se muestra en la **Figura 2**, la cual exhibe como ejemplo, el conteo realizado el día 07/12/2016 en la A014 y Av. Libertador (O), punto censal C7.

La mayoría de los usuarios detectados fueron hombres, alcanzando el mayor número de desplazamientos contabilizados durante todo el día, mientras que las mujeres suponen un porcentaje menor. Cada período de media hora está representado por dos barras paralelas que representan cada género. Se observan algunos picos siendo el más importante el de los hombres en el período 16:30 a 17 hs. Lo observado coincide con los horarios donde hay mayor actividad poblacional.

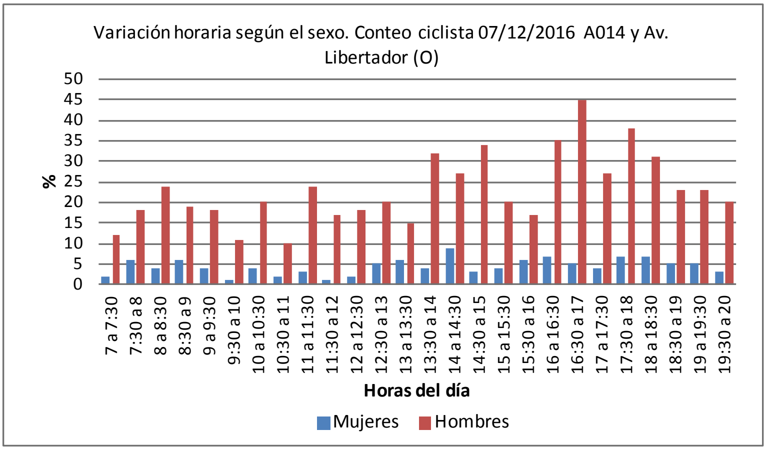


Figura 2. Porcentaje de uso de bicicleta por género a lo largo del día

6.2 Resultados de la fase cualitativa

En esta fase del análisis se trabajó con las *encuestas a los usuarios.*

6.2.1 Descripción de la muestra

- **Edad**

La distribución por edades de la muestra se observa en la **Figura 3**. Cada franja etaria está representada por dos barras paralelas, una los usuarios de bicicletas y la otra la población total de San Juan. De este gráfico puede rápidamente deducirse que la mayoría de los usuarios de bicicleta se encuentra en la franja etaria comprendida entre los 15 y 29 años.

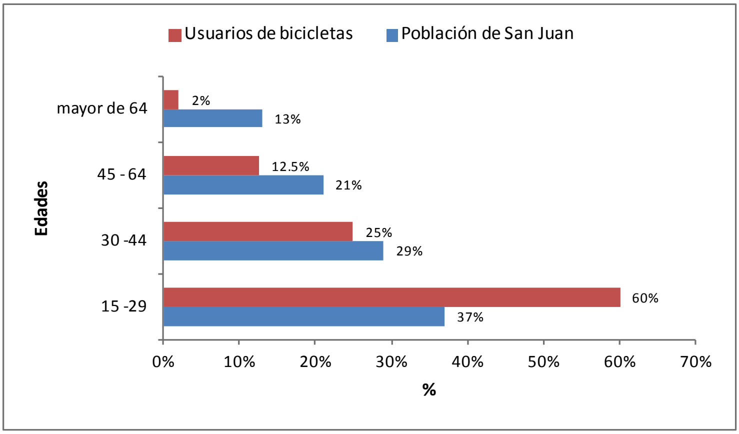


Figura 3. Distribución por edades de la muestra

Si se comparan estos datos con el reparto de población general por edades de la población total de San Juan (Atlas Socioeconómico de la Provincia de San Juan), puede deducirse en que franjas etarias de población hay mayor uso de la bicicleta como medio de transporte.

- **Género:**

La distribución de género de la muestra se representa en la **Figura 4**. Observando el gráfico de torta es clara la predominancia masculina en el uso de la bicicleta.

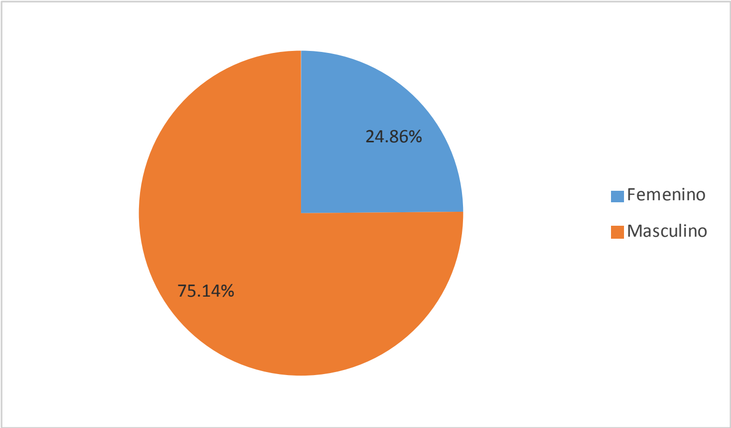


Figura 4. Distribución de encuestados por género

También se muestra el reparto de género según franjas de edades en la **Figura 5**. Cada franja etaria se corresponde con dos barras, una para cada género.

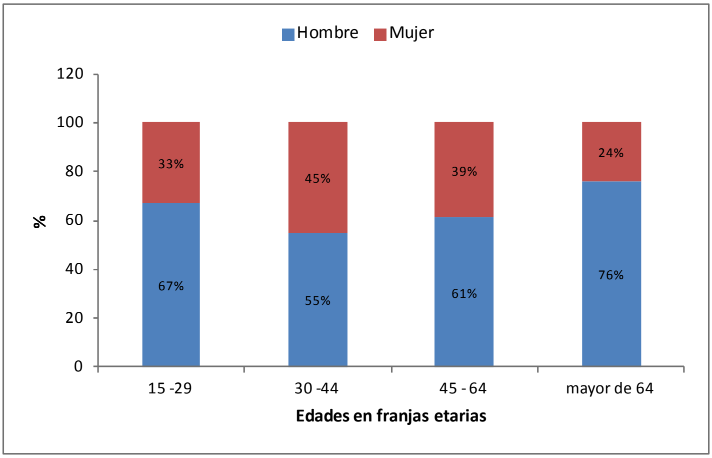


Figura 5. Distribución por género según franja de edad

- ### Nivel de estudio de los encuestados

La **Figura 6** representa la distribución de los encuestados según el nivel de estudios que declaran. Con ella puede rápidamente apreciarse cuál es el nivel de estudios de la mayoría de los encuestados. Los encuestados debían responder con el nivel de estudios terminado. El nivel de estudio es función de la edad del encuestado, por lo tanto, es relativo.

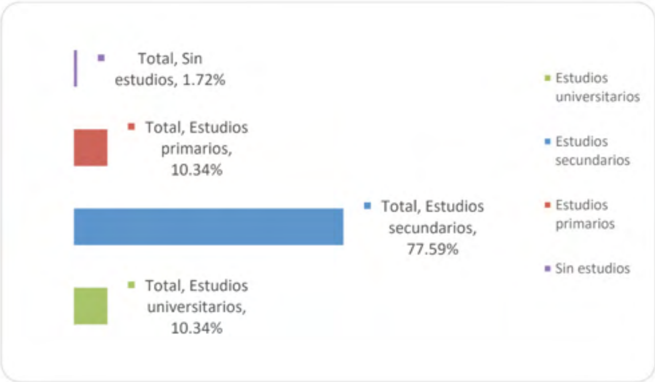


Figura 6. Distribución de los encuestados según el nivel de estudios

- ### Tipo de bicicleta

La clasificación se realiza entre bicicletas comunes y deportivas. La situación se muestra en el gráfico de torta de la **Figura 7**. De la observación del gráfico se desprende que el tipo de bicicleta que se utiliza como medio de transporte en la ciudad es predominantemente la bicicleta común. La bicicleta de uso deportivo se utiliza menos en la ciudad y más en las rutas aledañas a la ciudad.

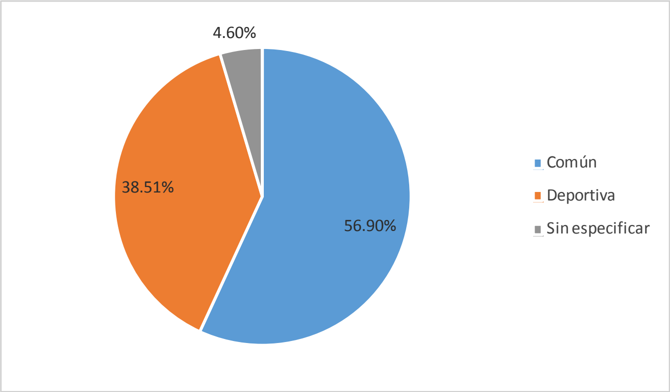


Figura 7. Tipo de bicicleta

- **Actividad**

La **Figura 8** representa la distribución de los encuestados según la actividad que declaran. El porcentaje más importante de usuarios declaró ser estudiante, a estos le siguen los trabajadores en relación de dependencia.

Figura 8. Distribución de los encuestados según la actividad

6.2.2 Resultados de la encuesta

- **Frecuencia de uso**

La periodicidad del uso de la bicicleta entre los encuestados se muestra en la **Figura 9.** De su observación directa puede apreciarse la frecuencia de uso de los usuarios de bicicleta en días laborables, y concluirse cuál es el porcentaje de usuarios cotidianos de este modo de transporte.

Figura 9. Frecuencia de uso de la bicicleta

- **Motivo del viaje**

Los motivos "obligados", Trabajo y Estudio, suponen actividades con horarios rígidos que necesitan de un modo de transporte fiable que garantice no sólo llegar al destino sino cumplir con un horario. Como se muestra en la **Figura 10**, los motivos de viaje "obligados" suponen la mayoría de los viajes, reflejando de esta forma la fiabilidad de la bicicleta como modo de transporte cotidiano.

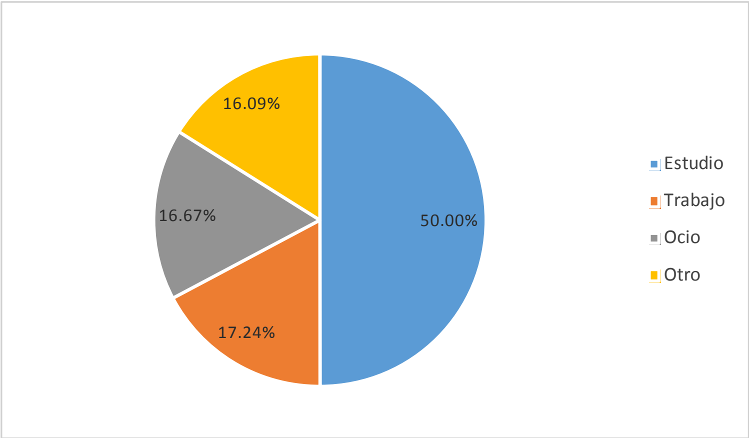


Figura 10. Motivos del Viaje

7 I CONCLUSIONES

La estadística permite en este trabajo realizar un análisis descriptivo en forma cuantitativa y cualitativa:

- En forma cuantitativa evaluar la cantidad de bicicletas que se desplazan en el gran San Juan, su distribución a lo largo del día en diferentes puntos censales y la distribución según género.
- En forma cualitativa evaluar, las edades de los usuarios de bicicletas según determinadas franjas etarias, género, nivel de estudios, tipo de bicicleta, actividad, frecuencia de uso y motivo de viaje.

Mediante los gráficos y las tablas es posible cumplir con el objetivo de analizar el comportamiento sobre el uso de la bicicleta como medio de transporte y de poder proponer con mayor eficiencia una red ciclista en el área urbana.

REFERENCIAS

Malmod, A.; Altamira, A; Baer, L.: Plan de Ordenamiento Territorial del Área Metropolitana de San Juan – Plam-SJ. *Programa de fortalecimiento Institucional de la Subsecretaría de Planificación Territorial de la Inversión Pública.* Documento Final. (2013).

Calvo Salazar, M.; García Cebrián, J.; Hernández Herrador, V.: Investigación sobre el uso de la bicicleta en la ciudad de Sevilla, 2011. *Sistema Integral de la Bicicleta de la Universidad de Sevilla* (2011).

CAPÍTULO 20

GÉNESIS INSTRUMENTAL DE LA NOCIÓN DE FRACTAL EN PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE NIVEL SECUNDARIO

Data de aceite: 01/12/2021

Daysi Julissa García-Cuéllar
Pontificia Universidad Católica del Perú,
Departamento de Ciencias
Lima – Perú
https://orcid.org/0000-0003-0243-6353

Mihály André Martínez-Miraval
Pontificia Universidad Católica del Perú,
Departamento de Ciencias
Lima – Perú
https://orcid.org/0000-0001-7734-1223

Jesús Victoria Flores Salazar
Pontificia Universidad Católica del Perú,
Departamento de Ciencias
Lima – Perú
https://orcid.org/0000-0002-0036-140X

RESUMEN: La presente investigación tiene por objetivo analizar el proceso de génesis instrumental de la noción de fractal en profesores de matemática de nivel secundario. Se utilizaron aspectos del Enfoque Instrumental y del estudio de caso como base teórica y metodológica respectivamente. Profesores de Perú, Brasil, México, Cuba y Colombia desarrollaron una secuencia de actividades donde movilizaron algunas características de la noción de fractal, como la repetición de procesos infinitos o la reproducción del mismo patrón a diferentes escalas, al realizar iteraciones tanto de estructura numérica como geométrica. Los profesores interactuaron con diferentes tecnologías (material concreto y GeoGebra), lo que les permitió construir distintos modelos de fractales como el conjunto de Cantor, el triángulo de Sierpinski, el Copo de hielo de Koch, entre otros. Las producciones presentadas por los profesores tanto en material concreto como en GeoGebra, evidencian que se generó la génesis instrumental de la noción de fractal en los profesores.

PALABRAS CLAVE: Fractales; GeoGebra; Génesis Instrumental; Formación de profesores.

INSTRUMENTAL GENESIS OF THE NOTION OF FRACTAL IN HIGH SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS

ABSTRACT: The present research aims to analyze the process of instrumental genesis of the notion of fractal in high school mathematics teachers. Aspects of the Instrumental Approach and the case study were used as theoretical and methodological basis respectively. Teachers from Peru, Brazil, Mexico, Cuba and Colombia developed a sequence of activities where they mobilized some characteristics of the fractal notion, such as the repetition of infinite processes or the reproduction of the same pattern at different scales, when performing iterations of numerical and geometric structure. The participants interacted with different technologies (concrete material and GeoGebra), which allowed them to build different fractal models such as the Cantor set, the Sierpinski triangle, the Koch Iceflake, among others. The productions presented by the participants, both in concrete material and GeoGebra, show that the instrumental genesis of the notion of fractal was generated in the teachers.

KEYWORDS: Fractals; GeoGebra; Instrumental

Genesis; Teacher education.

1 I INTRODUCCIÓN

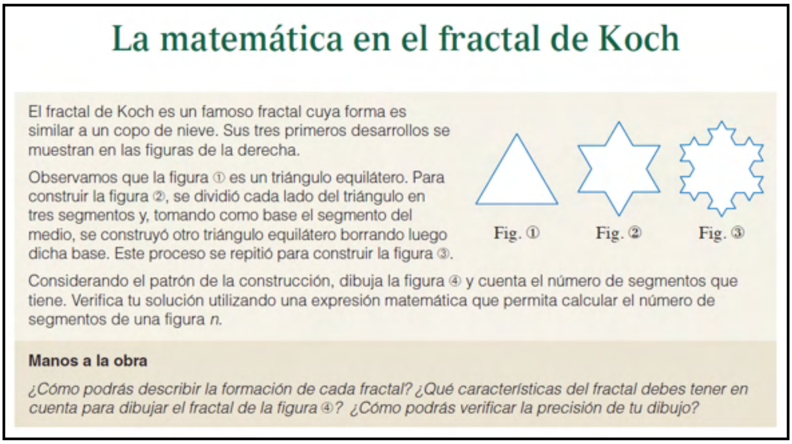
La noción de fractal es importante porque tiene una diversa y destacable aplicabilidad en problemas relacionados con la medicina, la meteorología, la economía e incluso en la misma naturaleza.

El concepto de Fractal presenta cierto grado de complejidad, sin embargo, se puede introducir esta noción de una manera sencilla en el aula de matemática en el nivel de secundaria. Por ello, nuestra investigación se orienta a que los profesores de este nivel se apoderen de algunas características de esta noción y puedan utilizarla en sus enseñanzas.

Los investigadores Oviedo, Kanashiro y Colombini (2004) señalan que el termino Fractal "está relacionado con la palabra Fractus que significa roto o no entero. Este término es atribuible a Benoit Mandelbrot quien lo empleó para definir ciertos conjuntos de números que describen objetos con dimensión fraccionaria" (p. 11).

Así mismo, los investigadores mencionan que los fractales son formaciones gráficas que muestran procesos iterativos que tienen una característica en común: repiten procesos infinitos. Por tanto, se puede concebir una construcción fractal como una figura autosemejante, es decir, todas sus partes tienen repetición a diferentes escalas. Por otro lado, Oviedo, Kanashiro y Colombini indican que los fractales son construcciones que se generan a través de iteraciones sucesivas, lo que implica la ejecución de un algoritmo que se repite indefinidamente. Son objetos que se identifican gráficamente y brindan un acercamiento analítico que posibilita explicar sus comportamientos y tienen dimensión fraccionaria.

La noción de fractal forma parte del currículo de matemática de diferentes países de Latinoamérica, en particular, del currículo de matemática de Perú. En el libro de texto del área de matemática del VII ciclo de Educación Básica Regular del Ministerio de Educación del Perú-MINEDU, texto para estudiantes de 13 a 14 años de edad, se muestran actividades relacionadas con la noción de Fractal, que buscan que los estudiantes generen una noción de este concepto, dado que en el libro de texto no se brinda una definición formal de este concepto. La figura 1 muestra la primera actividad sobre fractales.



La matemática en el fractal de Koch

El fractal de Koch es un famoso fractal cuya forma es similar a un copo de nieve. Sus tres primeros desarrollos se muestran en las figuras de la derecha.

Observamos que la figura ① es un triángulo equilátero. Para construir la figura ②, se dividió cada lado del triángulo en tres segmentos y, tomando como base el segmento del medio, se construyó otro triángulo equilátero borrando luego dicha base. Este proceso se repitió para construir la figura ③.

Fig. ① Fig. ② Fig. ③

Considerando el patrón de la construcción, dibuja la figura ④ y cuenta el número de segmentos que tiene. Verifica tu solución utilizando una expresión matemática que permita calcular el número de segmentos de una figura *n*.

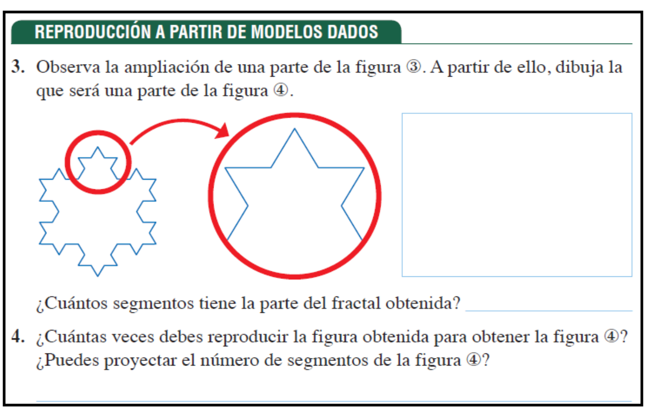
Manos a la obra

¿Cómo podrás describir la formación de cada fractal? ¿Qué características del fractal debes tener en cuenta para dibujar el fractal de la figura ④? ¿Cómo podrás verificar la precisión de tu dibujo?

Figura 1. Actividad extraída del Libro matemática 3 del MINEDU.

Fuente: Perú (2016, p.140)

La actividad mostrada en la figura 1 presenta el fractal de Koch, el objetivo de esta actividad es que los estudiantes describan cómo se forma cada fractal, que identifiquen sus características, así como que reproduzcan cada uno de los modelos dados. La figura 2 muestra una siguiente actividad sobre fractales.



REPRODUCCIÓN A PARTIR DE MODELOS DADOS

3. Observa la ampliación de una parte de la figura ③. A partir de ello, dibuja la que será una parte de la figura ④.

¿Cuántos segmentos tiene la parte del fractal obtenida? ____________

4. ¿Cuántas veces debes reproducir la figura obtenida para obtener la figura ④? ¿Puedes proyectar el número de segmentos de la figura ④?

Figura 2. Actividad extraída del Libro matemática 3 del MINEDU.

Fuente: Perú (2016, p.140)

Por lo anterior, surge la presente investigación que tiene por objetivo analizar el proceso de génesis instrumental de la noción de fractal en profesores de matemática de nivel secundario. Para ello, se ha diseñado una secuencia de actividades que permita por un lado, la instrumentalización de las características de la noción de fractal en el aula de una manera comprensible, así como la reflexión sobre cómo esta noción compleja se puede trabajar en el aula con estudiantes de educación secundaria, y por otro lado, el abordaje de otros contenidos referentes a las características de los fractales como son la semejanza de figuras, progresión, área, perímetro, operaciones con fracciones, etc.

2 I ASPECTOS DEL ENFOQUE INSTRUMENTAL

Se utilizan aspectos del Enfoque Instrumental propuesto por Rabardel (1995), para la elaboración de las actividades pues nos brinda las directrices necesarias para el estudio en escenarios de enseñanza y aprendizaje con tecnologías. Las nociones claves de este Enfoque son las siguientes:

Esquema: Organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situaciones.

Artefacto: Es un objeto material o abstracto, destinado a dar sustento a la actividad del sujeto en la ejecución de un cierto tipo de tarea.

Instrumento: Es lo que un sujeto construye a partir del artefacto. Es entonces una entidad mixta que contiene a la vez un artefacto, material o no, y esquemas de utilización construidos por el sujeto durante su interacción. La figura 3 muestra la composición de un instrumento.

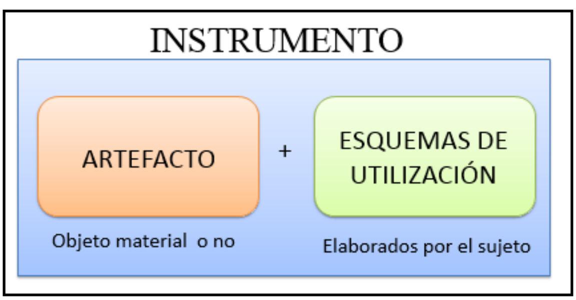


Figura 3. Componentes del instrumento

Fuente: Los autores

De acuerdo con Rabardel (1995), el Enfoque Instrumental estudia la diferencia que existe entre el artefacto, instrumento y los procesos que desenvuelven la transformación progresiva del artefacto en instrumento, transformación que denominó como proceso Génesis Instrumental.

En cuanto a la génesis instrumental, el investigador sostiene que esta consta de dos dimensiones: La instrumentalización y la instrumentación.

La instrumentalización: Está dirigida hacia la parte artefactual del instrumento, consta de enriquecimiento de las propiedades del artefacto por parte del sujeto. Es decir, es el resultado de la atribución de una función al artefacto por parte del sujeto.

La instrumentación: Está dirigida hacia el sujeto. Se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte del sujeto, relativos a la ejecución de ciertas tareas. En este proceso se lleva a cabo la asimilación de nuevos artefactos a los esquemas y la acomodación de los esquemas para dar nuevos significados a los artefactos.

Rabardel utiliza la noción de esquema redefinida por Vergnaud que menciona que un esquema es una organización invariante de la conducta del sujeto para una clase determinada de situación.

3 I METODOLOGÍA

Nuestra metodología es de corte cualitativo, en ese sentido, Denzin y Lincoln (1994) sostienen que la metodología cualitativa es multimetódica, naturalista e interpretativa. Es decir, que las investigadoras e investigadores cualitativos indagan en situaciones naturales, intentado dar sentido o interpretar los fenómenos en los términos del significado que las personas les otorgan. Asimismo, los investigadores cualitativos tienen más interés por el proceso que por los resultados o productos.

En cuanto a los procedimientos metodológicos, la parte experimental se realizó en dos sesiones con docentes e investigadores que se enfocan en la enseñanza de la matemática en Educación Secundaria. En la primera sesión se realizaron actividades introductorias y en la segunda sesión, actividades que envuelven el uso de GeoGebra. A seguir se describen estos dos tipos de actividades.

Actividades introductorias, en las cuales se presentaron actividades dirigidas a la instrumentalización de las características de los fractales: autosimilitud, repetición de procesos infinitos, la reproducción del mismo patrón a diferentes escalas. Para la realización de estas actividades se utilizó lápiz y regla, así como la técnica del Kirigami (doblado y corte de papel). Se construyeron diferentes modelos de fractales como el triángulo de Sierpinski, el conjunto de cantor, entre otros.

Actividades con Geogebra, se propusieron actividades que permitieron inducir de forma intuitiva la noción de la recursividad y de infinito.

Las actividades se desarrollaron en dos sesiones de 90 minutos cada una. En la primera sesión se desarrollaron actividades de introducción a la noción de fractales y las primeras construcciones de fractales con la técnica de Kirigami. En la segunda sesión, se continuó con la actividad de construcción de fractales con el uso de GeoGebra.

Las actividades

A continuación, se presentan actividades de cada uno de los tipos mencionados anteriormente. La figura 4 muestra la actividad introductoria sobre la noción de fractal.

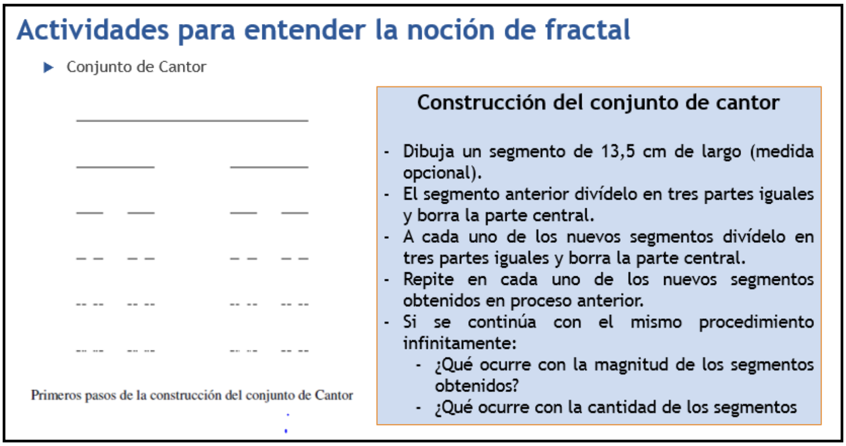


Figura 4. Actividad introductoria presentada a los profesores.

Fuente: Datos de la investigación

Esta actividad se basó en la relación que presenta la noción de Fractal con la palabra *Fractus* que significa roto o no entero. Se esperaba que los profesores reconocieran cada segmento (pintados o en blanco) de cada fase en que se dividió el segmento inicial, como partes de una unidad. La figura 5 muestra la división de estos segmentos.

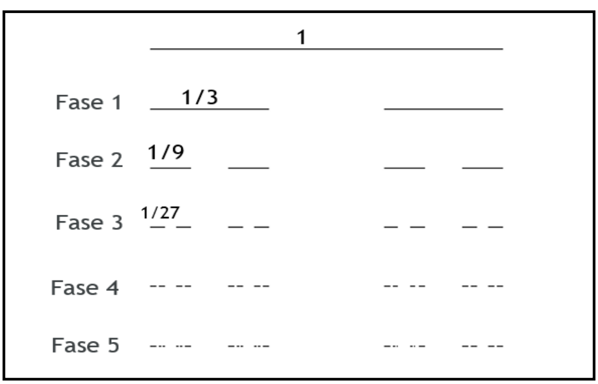


Figura 5. Reconociendo la medida de cada segmento dividido

Fuente: Datos de la investigación

Al inicio de la actividad, se repartió a los profesores distintos materiales como reglas, escuadras, lápices, compás, calculadora y una hoja que tenía un segmento de recta dibujado en la parte superior. Los profesores realizaron la división del segmento y mostraron distintas estrategias, la mayoría utilizó la calculadora para obtener la medida de los segmentos y luego la regla para trazarlos, sin embargo, hubo una profesora que hizo las divisiones utilizando el teorema de Thales, ya que el segmento no era de medida exacta para cada partición que se solicitaba del segmento. Este último procedimiento se muestra en la figura 6.

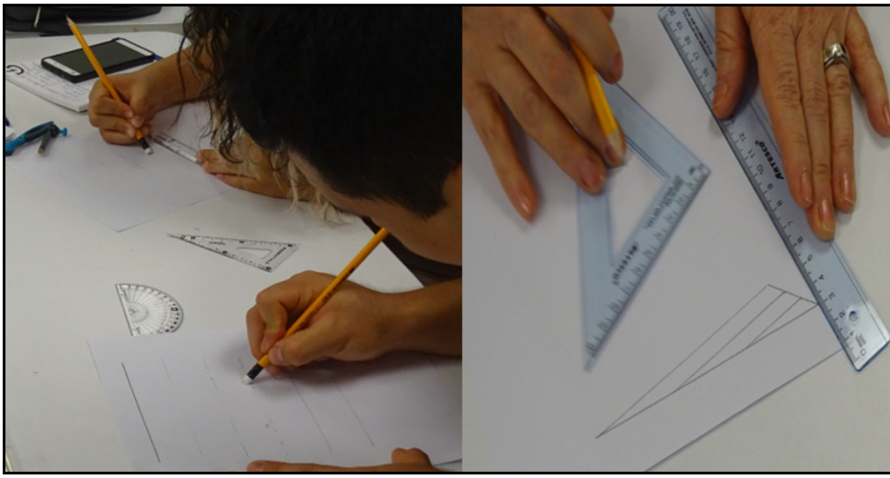


Figura 6. Primera actividad realizada por los profesores.

Fuente: Datos de la investigación

Para finalizar esta actividad, se pidió a los profesores que apuntaran sus observaciones y traten de deducir algunos patrones que se generan al realizar estas particiones del segmento. La figura 7 muestra estos posibles patrones.

Actividades para entender la noción de fractal

- Conjunto de Cantor

Completar la siguiente tabla

Fase	1	2	3	4	...	k	Conjunto de Cantor $k \to \infty$
Números de segmentos	2	4	8	16	...	2^k	
Longitud de cada segmentos	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	...	$\frac{1}{3^k}$	
Longitud total	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{16}{81}$	...	$\frac{2^k}{3^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k$	0

Figura 7. Patrones generados.

Fuente: Datos de la investigación

Otra de las actividades del tipo introductorio involucra la técnica del Kirigami (doblado y corte de papel). En este tipo de actividad, se realizaron las construcciones de los fractales conocidos como escalera de cantor, pirámide de Sierpinski, el libro fractal, entre otros.

Al inicio de la actividad, se repartió a los profesores materiales adicionales como hojas de colores y una tijera. Los profesores realizaron procesos iterativos y siguieron cierto patrón definido por el investigador para la partición de un segmento dado, luego procedieron a efectuar los cortes respectivos con la tijera y construir algunos fractales conocidos, tal y como se muestra en la figura 8.

Figura 8. Pirámide de Sierpinski elaborado por los profesores.

Fuente: Datos de la investigación

Al realizar esta actividad se evidenció que los profesores se sintieron motivados en la construcción de cada fractal. El libro fractal fue la construcción más elaborada y con mayor número de pasos, pero para ellos fue un reto, que al final lograron realizar.

Entre las actividades propuestas a realizarse con GeoGebra, figura la presentación del triángulo de Sierpinski. Los investigadores diseñaron un applet en GeoGebra que, al movilizar un deslizador, se construye paso a paso este fractal. Los profesores tenían que movilizar un deslizador y según la fase que se encuentre debían responder a las preguntas mostradas en la figura 9.

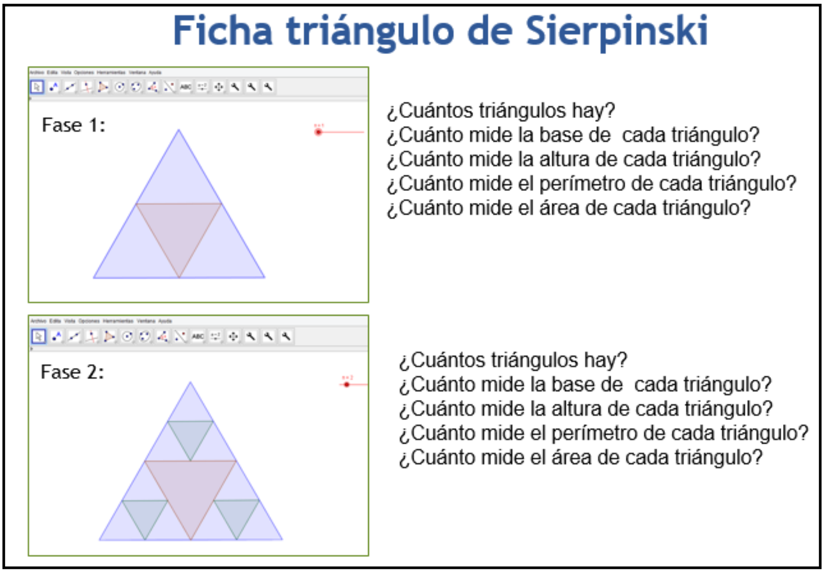


Figura 9. Actividad de triángulo de Sierpinski con Geogebra.

Fuente: Datos de la investigación

Al finalizar la secuencia de actividades, los profesores mostraron mayor interés en la construcción de los fractales mediante la técnica del Kirigami. En un primer momento, hicieron las construcciones con una plantilla, después de reconocer la secuencia de construcción pudieron realizar un libro fractal de la pirámide de Sierpinski.

4 | CONSIDERACIONES FINALES

Consideramos que al concluir la experiencia los profesores instrumentalizaron las características de los fractales por medio de tecnologías de lápiz y papel y digitales como el caso de GeoGebra, y movilizaron esquemas preexistentes como semejanza de figuras, progresiones, segmentos, área, perímetro, así como la formación de nuevos esquemas relacionados con procesos infinitos, particiones iterativas, entre otras que permitieron instrumentar la noción de fractal. A su vez los profesores reflexionaron sobre cómo esta noción compleja se puede trabajar en el aula con estudiantes de educación secundaria.

REFERENCIAS

DENZIN, N.; LINCOLN, Y. **Handbook of qualitative research**. Thousand Oaks, California, 1994.

ESTRADA, F. **Geometria fractal: conceptos y procedimientos para la construcción de fractales.** Bogota: Editorial Magisterio, 2004.

PERÚ, Ministerio de Educación del Perú, **Matemática 3**. Lima: Santillana, 2016.

OVIDEO, L.; KANASHIRO, A.; COLOMBINI, M. **Fractales: un universo poco frecuentado**. Santa fe: Ediciones UNL, 2004.

RABARDEL, P. **Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains**. Université Paris. Armand Colin, 1995. Recuperado de http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/

CAPÍTULO 21

ESTIMATIVAS DA NORMA DO SUP DE SOLUÇÕES LIMITADAS DE EQUAÇÕES DE DIFUSÃO NÃO LINEARES

Data de aceite: 01/12/2021

Data de submissão: 06/09/2021

Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum
Departamento de Matemática, UFSM
Santa Maria, RS

Paulo Ricardo de Ávila Zingano
Departamento de Matematica Pura e Aplicada, UFRGS
Porto Alegre, RS

RESUMO: Vamos desenvolver algumas estimativas para o valor da norma do sup $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ de soluções fracas limitadas para equações de difusões da forma

$$u_t = |u|^\alpha \Delta u + b(x,t)|u|^\lambda |\nabla u|^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0,$$

onde $\alpha>1$, $\lambda \geq \alpha - 1$ são constantes, $b(x, t)$ limitado, e o valor inicial $u(\cdot, 0) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $u(\cdot, 0) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ para algum $0 < p_0 < \infty$. Argumentos de comparação e estimativas de energia são usados para mostrar que

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \| u(\cdot,0) \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} \ t^{-\frac{n}{2\kappa+n\alpha}}$$

para todo $t > 0$, onde $k=\max\{p_0, 1 - \alpha + B\}$, $B= \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)}$ e $K > 0$ é uma constante que depende apenas de n, p_0, α, B.

PALAVRAS-CHAVE: Equações de difusão, soluções fracas, estimativas de energia, teorema da comparação.

SUPNORM ESTIMATES FOR BOUNDED SOLUTIONS OF GENERAL NONLINEAR

ABSTRACT: We derive some basic estimates for supnorm values $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ of bounded weak solutions to general diffusion equations of the form

$$u_t = |u|^\alpha \Delta u + b(x,t)|u|^\lambda |\nabla u|^2, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0,$$

with given $\alpha>1$, $\lambda \geq \alpha - 1$ constant, $b(x, t)$ bounded, and initial data $u(\cdot, 0) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ for some $0 < p_0 < \infty$. Comparison arguments and energy estimates give

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \| u(\cdot,0) \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} \ t^{-\frac{n}{2\kappa+n\alpha}}$$

for all $t > 0$, where $k=\max\{p_0, 1 - \alpha + B\}$, $B= \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)}$ and $K > 0$ constant is dependent of n, p_0, α, B.

KEYWORDS: Diffusion Equation, weak solutions, energy estimates, Comparison Theorem.

1 | INTRODUÇÃO

Neste trabalho nós desenvolvemos algumas estimativas para o valor da supernorma $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ de soluções limitadas de problemas de valor inicial de parabólico da forma

$$u_t = |u|^\alpha \Delta u, + b(x,t)|u|^\lambda |\nabla u|^2 \quad u(\cdot,0) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

para $0 < p_0 < \infty$ e onde $\alpha > 1$, $\lambda \geq \alpha - 1$ são constantes dadas, $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.[1] Tais problemas incluem casos particulares de inumeros modelos importantes em Física e Biologia, ver [4, 9, 10]. Como a equação (1) deixa de ser parabólica quando $u = 0$, não podemos garantir a existência de solução clássica, somente a existência de soluções no sentido fraco. Aqui, dado $0 < T_* \leq \infty$, uma função mensuravel $u = u(x, t)$ é dita solução fraca do problema (1) no intervalo de tempO $[0, T_*)$ se $u \in L^\infty(S_T)$ para cada conjunto $S_T \equiv \mathbb{R}^n \times [0, T]$, $0 < T < T_*$, e $u(\cdot, t) \in L^2_{loc}([0, T_*), H^1_{loc}(\mathbb{R}n))$ com

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_t \, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\varphi(x,0)\, dx = \alpha \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\alpha-1}(sgn\, u)|\nabla u|^2 \varphi \, dx\, dt$$
$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |u|^\alpha \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx\, dt - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} b(x,t)|u|^\lambda |\nabla u|^2 \varphi \, dx\, dt$$

para toda função teste $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, T_*))$ com suporte compacto em $\mathbb{R}^n \times [0, T_*)$.

A existencia de soluções fracas podem ser obtidas por vários métodos ver [3, 8]. Segue do Teorema (4.1) e (4.3) que elas satisfazem o principio do máximo.

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall t \in [0, T_*). \tag{2}$$

Em particular, soluções do problema (1) são globalmente definidas (i.e., $T_* = \infty$), com $\| u(\cdot, t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ monotonicamente decrescente em $[0, \infty)$. Quanto a unicidade, segue dos resultados em [3, 9] que mesmo as soluções não negativas do problema 1 podem não ser unicamente definidas. Em todo o caso, todas as soluções do problema (1), devem satisfazer a estimativa fundamental

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \| u(\cdot,0) \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} \; t^{-\frac{n}{2\kappa+n\alpha}}$$

para todo $t > 0$, onde $\kappa = \max\{p_0, 1 - \alpha + B\}$, $B = \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)}$ e $K > 0$ denotando alguma constante que depende somente de n, p_0, α, B.

$$u_t = |u|^\alpha \Delta u, + b(x,t)|u|^\lambda |\nabla u|^2 \quad u(\cdot,0) \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{3}$$

2 | ANÁLISE DO CASO $\lambda = \alpha - 1$

O argumento principal deste trabalho é baseado no fato fundamental de que $|u(x, t)|$ pode ser limitada por soluções clássicas limitadas e positivas do problema (1) que são muito mais faceis de serem estudadas. Nós chamamos de soluções clássicas do pro-blema

1 Os casos em que $\alpha = 1$, $\lambda \geq 0$ foram discutidos em [6].

(1)uma solução suave, limitada (C^2 em x, C^1 em t) e que satisfaz a equação no sentido classico para $t > 0$ e a condição inicial em L^1_{loc} ($\mathbb{R}^n$) com t ↘ 0. Para provar isto, vamos primeiramente considerar o caso de soluções não negativas e limitadas $u(\cdot, t) \in L^\infty_{loc}([0, \infty[, L^\infty(\mathbb{R}^n)) \cap L^2_{loc}([0, \infty[, H^1_{loc}(\mathbb{R}^n))$ do problema (1). Soluções clássicas naturais associadas a $u(\cdot, t)$ podem ser introduzidas da seguinte forma: Escolhendo uma função positiva $v \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$, $tv \geq c|x|^{-\sigma}$, $c > 0$, $\sigma > 0$ e $|x| >> 1$, tomando $\epsilon > 0$ e seja $u^\epsilon(\cdot, t)$ a unica solução clássica positiva do problema

$$u_t^\epsilon = |u^\epsilon|^\alpha \Delta u^\epsilon + B \cdot |u^\epsilon|^{\alpha-1} |\nabla u^\epsilon|^2, \qquad u^\epsilon(\cdot, 0) = u_0 + \epsilon v \qquad (u_0 \geq 0) \tag{4}$$

onde $\alpha > 1$ é uma constante dada e $B \in \mathbb{R}$ é escolhida de forma que $b(x, t) \leq B$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. As principais estimativas de $u^\epsilon(\cdot, t)$ são dadas pelos **Teoremas** 4.1 e 4.2 dados a seguir.

Teorema 4.1. *(Principio do Máximo) Para cada $\epsilon > 0$, existe uma unica solução clássica positiva $u^\epsilon(\cdot, t)$ de (4), definida para todo $t > 0$. Além disso, para todo $q \geq \max\{p_0, 1 - \alpha + B\}$, onde $B = \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)}$ tem-se*

$$\|u^\epsilon(\cdot, t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u^\epsilon(\cdot, 0)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall t > 0. \tag{5}$$

Prova: A existência local, unicidade e positividade vem da teoria padrão de equações parabólicas, com existência global mostrada em [8]. Agora, dado $q \geq \max\{p_0, 1 - \alpha + B\}$ finito, seja $\zeta_R \in C^2(\mathbb{R})$ satisfazendo $\zeta_R(x) = e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} - e^{-\varepsilon\sqrt{1+R^2}}$ se $|x| \leq R$, $\zeta_R(x) = 0$ se $|x| > R$.

Multiplicando (4) por $q\, u^\epsilon(x, t)^{q-1}\zeta_R(x)$, integrando em $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$, fazendo $t_0 \to 0$ e $R \to \infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^\epsilon(x,t)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} u_0^\epsilon(x)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx + M(T)^\alpha n\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} u^\epsilon(x,\tau)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx d\tau$$

, onde $M(T)$ satisfaz $\|u^\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq M(T)\ \forall\ t_0 < t < T$.

Assim, pelo Lema de Growall $\int_{\mathbb{R}^n} u^\epsilon(x,t)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} u_0^\epsilon(x)^q e^{-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}} dx e^{M(T)^\alpha n\epsilon} \quad \forall\ t > 0$. Fazendo $\varepsilon \to 0$ e $q \to \infty$, obtemos $\|u^\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Teorema 4.2. *Para cada $\epsilon > 0$, temos*

$$\|u^\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|u^\epsilon(\cdot, 0)\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} t^{-\frac{n}{2\kappa+n\alpha}} \tag{6}$$

para todo $t > 0$, onde $K > 0$ é uma constante que depende somente de n, p_0, α, B, $\kappa = \max\{p_0, 1 - \alpha + B\}$, $u^\epsilon(\cdot, 0) = u_0 + \epsilon w \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, e $u^\epsilon(\cdot, t)$ denota uma solução clássica positiva do problema (4).

Prova: Vamos supor primeiramente que $p_0 \geq 1 - \alpha + \gamma$. Seja $q \geq p_0$ finito, tomando $\mu = \frac{(n+2)q+2n\alpha}{2q+2n\alpha}$ e multiplicando(4) por $(t-t_0)^\mu q u^\epsilon(x, t)^{q-1}\zeta_R(x)$, onde $\zeta_R(x) = \zeta(x/R)$ é a função de corte introduzida na prova do Teorema (4.1), integrando em $\mathbb{R}^n \times [t_0, t]$, fazendo $\mathbb{R} \to \infty$ e introduzindo $w(x, t) = u^\varepsilon(x, t)^{\frac{q+\alpha}{2}}$ obtemos

$$(t-t_0)^{\mu}\|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} + \frac{4q\,(q-\Gamma)}{(q+\alpha)^2}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\mu}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau$$
$$\leq \mu\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\mu-1}\|w(.,\tau)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}\,d\tau, \tag{7}$$

onde $\beta = \frac{2q}{q+\alpha} \in (1, 2)$. Agora nós recaimos na inequação

$$\|\mathrm{v}\|_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq K(\beta_0,\beta)\,\|\mathrm{v}\|^{1-\theta}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}\|\nabla \mathrm{v}\|^{\theta}_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{8}$$

onde β_0 єv(0, β), $\theta \in (0,1)$ é dado por $\theta = \frac{\frac{1}{\beta_0}-\frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\beta_0}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}$ para v є $L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n) \cap H^1(\mathbb{R}^n)$, $1 < \beta < 2$. Usando a inequação de Höulder e o principio do máximo, obtemos

$$\mu\int_{t_0}^{t}(t-t_0)^{\mu-1}\|w(.,\tau)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)}d\tau \leq \mu\mathbb{K}^{\beta}\|w(.,t_0)\|^{\beta\cdot(1-\theta)}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{1-\frac{\beta\theta}{2}}$$
$$\left(\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\mu}\|\nabla w(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\tau\right)^{\frac{\beta\theta}{2}}, \text{ onde } \mathbb{K} = \sup_{q<\beta_0<\beta<2} K(\beta,\beta_0,n).$$

Tomando $E(t)=(t-t_0)^{\mu}\|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} + \frac{4q\,(q-\Gamma)}{(q+\alpha)^2}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)^{\mu}\|\nabla w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau$, e substituindo em (7), obtemos

$$\|w(\cdot,t)\|^{\beta}_{L^{\beta}(\mathbb{R}^n)} \leq \mu^{\mu}\,\mathbb{K}^{\beta\cdot\mu}\|w(.,t_0)\|^{\beta\cdot(1-\theta)\cdot\mu}_{L^{\beta_0}(\mathbb{R}^n)}(t-t_0)^{-(\mu-1)}\left(\frac{(q+\alpha)^2}{4q\,(q-\Gamma)}\right)^{\frac{\beta\theta}{2}\cdot\mu}.$$

Então

$$\|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A(q)^{\frac{1}{q}}\,\|u^{\varepsilon}(.,t_0)\|^{\frac{2q+n\alpha}{2(q+n\alpha)}}_{L^{\frac{q}{2}}(\mathbb{R}^n)}\,(t-t_0)^{-\frac{n}{2q+n\alpha}}, \tag{9}$$

onde $A(q) = \left(\frac{(n+2)q+2n\alpha}{2q+2n\alpha}\right)^{\frac{(n+2)q+2n\alpha}{2q+2n\alpha}} \cdot \mathbb{K}^{\frac{q}{q+\alpha}\cdot\frac{(n+2)q+2n\alpha}{q+n\alpha}} \cdot \left(\frac{(q+\alpha)^2}{4q\,(q-\Gamma)}\right)^{\frac{nq}{22q+2n\alpha}}.$

Agora, usando uma iteração do tipo Moser (ver [1]), obtemos

$$\|u^{\varepsilon}(\cdot,t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq K(p_0,\alpha,n)\|\,u_0^{\varepsilon}\|^{\frac{2p_0}{2p_0+n\alpha}}_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}\,t^{-\frac{n}{2p_0+n\alpha}},$$

onde $K(p_0, \alpha, n) = \left[\prod_{j=1}^{n} A(2^j p_0)^{\frac{1}{2p_0+\frac{n\alpha}{2}}}\right]\cdot 2^{\frac{n}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{j2^j p_0}{(2^j p_0+n\alpha)(2^j p_0+\frac{n\alpha}{2})}}$

A ligação entre $u^{\epsilon}(\cdot, t)$ e $u(\cdot, t)$ é dada pelo seguinte resultado

Teorema 4.3. *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot, t)$ uma solução não negativa e limitada do problema(1) com valor inicial $u_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \geq 0$, e seja $u^{\epsilon}(\cdot, t)$ solução classica positiva de (4), onde $B \in \mathbb{R}$ é tal que $b(x, t) \leq B$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Então temos (redefinindo $u(\cdot, t)$ em um conjunto de medida zero no tempo se necessário), para todo $t > 0$ $u(x, t) \leq u^{\epsilon}(x, t)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.*

Prova: Este Teorema pode ser provado exatamente como a Proposição 2.2 em [4] (ver [4], pages 590–592), onde as funções testes $\psi(x, t)$, $\psi_\epsilon(x, t)$ usadas em [4] :) são aqui definidas por:

$$\psi(x,t) = H_\delta(P(u(x,t)) - P(u^\epsilon(x,t))) \cdot u(x,t)^{B-\alpha} \cdot \zeta(x) \text{ e}$$
$$\psi_\epsilon(x,t) = H_\delta(P(u(x,t)) - P(u^\epsilon(x,t))) \cdot u^\epsilon(x,t)^{B-\alpha} \cdot \zeta(x),$$
$$\zeta(x) = \exp\{\sqrt{1+x^2}\} - \exp\{\sqrt{1+R^2}\} \text{ se } |x| \le R,\ \zeta(x) = 0 \text{ se } |x| > R.$$

Uma consequência imediata deste Teorema é que para cada $t > 0$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le K \cdot \|u_0 + \epsilon v\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \tag{10}$$

para todo $\epsilon > 0$, onde $\kappa = \max\{p_0, 1-\alpha+B\}$. Visto que $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|u^\epsilon(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, fazendo $\epsilon \to 0$ em (10) obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.4. *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot, t)$ solução limitada do problema (1), então*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall t > t_0 \ge 0$$

e

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le K \cdot \| u_0 \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \qquad \forall\ t > 0,$$

onde $k = \max\{p_0, 1 - \alpha + B\}$, $B = \sup\ \{b(x,t) : x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0\}$.

Para finalizar, seja $u^\epsilon(\cdot, t)$ solução do problema

$$u_t^\epsilon = |u^\epsilon|^\alpha \Delta u^\epsilon + \Gamma \cdot |u^\epsilon|^{\alpha-1} |\nabla u^\epsilon|^2 \qquad u^\epsilon(\cdot,0) = |u_0| + \epsilon v, \tag{11}$$

onde $\Gamma = \| b \|_{L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)}$ e v uma função continua positiva arbitraria $v \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$. Usando o mesmo argumento do Teorema 4.3 temos que $u(x, t) \le u^\epsilon(x, t)$ e $-u(x, t) \le u^\epsilon(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (a.e. $t > 0$). Assim , $|u(x, t)| \le u^\epsilon(x, t)$

Como os Teoremas 4.1 e 4.2 são válidos para $u^\epsilon(\cdot, t)$, com B substituido por Γ, obtemos

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \| \, | u_0 | + \epsilon v \, \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t > 0 \tag{12}$$

e

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le K \cdot \| \, | u_0 | + \epsilon v \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \tag{13}$$

para todo $t > 0$,onde $\kappa = \max\{p_0, 1 - \alpha + \Gamma\}$. Fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos o principal resultado desta seção.

Teorema 4.5. *Seja $\lambda = \alpha - 1$ e $u(\cdot, t)$ solução arbitraria limitada do problema (1). Então, redefinindo $u(\cdot, t)$ em um conjunto de medida zero se necessário, temos que*

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \| u(\cdot,t_0) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t > t_0 \ge 0$$

e

$$\| u(\cdot,t) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K \cdot \| u_0 \|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} \, t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \qquad \forall\, t > 0,$$

onde $k = \max\{p_0, 1 - \alpha + \Gamma\}\}$, $\Gamma = \| b \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)}$.

3 I ANÁLISE DO CASO λ > *α* – 1

Nesta seção continuamos a analise do problema de valor inicial (1) considerando o caso em que $\lambda > \alpha - 1$. Usando argumentos similares aos usados na seção anterior,é possivel provar que os **Teoremas** 4.1, 4.2 e 4.3 são válidos para este caso. Desta forma o seguinte resultado é obtido.

Teorema 5.1. *Seja* $\lambda > \alpha - 1$ *e* $u(\cdot, t)$ *solução arbitraria limitada do problema (1). Então, redefinindo* $u(\cdot, t)$ *em um conjunto de medida zero se necessário, obtemos*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \qquad \forall\ t > t_0 \geq 0$$

e

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq K \cdot \|u_0\|_{L^\kappa(\mathbb{R}^n)}^{\frac{2\kappa}{2\kappa+n\alpha}} t^{-\frac{1}{2\kappa+n\alpha}} \qquad \forall\ t > 0,$$

onde $\kappa = \max\{p_0,\ 1 - \alpha + \Gamma\}$, $\Gamma = B \cdot \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\lambda-\alpha+1}$, $B = \|b\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)}$ e $K > 0$ *é uma constante que depende somente de* n, p_0, α, Γ.

REFERÊNCIAS

[1] V. C. Brum, On some degenerate nonlinear diffusion problems and a *priori* estimates (in Portuguese), PhD Thesis, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brazil, 2011.

[2] M. Bertsch, R. Dal Passo and M. Ughi, Discontinuous viscosity solutions of a dege-nerate parabolic equation, *Trans. Amer.* Math. Soc., 320:779-798, 1990.

[3] M. Bertsch, R. Dal Passo and M. Ughi, Nonuniqueness of solutions of a degenerate parabolic equation, *Annali Mat.* Pura Appl., 161:57-81, 1992.

[4] M. Bertsch and M. Ughi, Positivity properties of viscosity solutions of a degenerate parabolic equation, *Nonlinear Anal.* TMA, 14:571-592, 1990.

[5] P. Braz e Silva and P. R. Zingano, Some asymptotic properties for solutions of one-dimensional advection-diffusion equations with Cauchy data in $L^p(\mathbb{R})$, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 342:465-467, 2006.

[6] V. C. Brum, M. V. Ferreira and P. R. Zingano, Supnorm estimates for nonnegative bounded solutions of a one-dimensional degenerate diffusion equation not in diver-gence form, *Journal of Func. Operator Theory Appl.*, 3:191-210, 2011

[7] A. S. Kalashnikov, Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations, *Russ. Math. Surv.*, 62:169-222.

[8] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov and N. N. Uralceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, American Mathematical Society, Providence, 1968.

[9] M. Ughi, A degenerate parabolic equation modelling the spread of an epidemic, *Annali Mat. Pura Appl.*, , 143:385-400, 1986.

[10] *J. L. Vázquez*, The porous medium equation: mathematical theory, Clarendon Press, Oxford, 2007.

CAPÍTULO 22

FREE VIBRATIONS OF CATENARY RISERS WITH INTERNAL FLUID

Data de aceite: 01/12/2021
Data de submissão: 01/09/2021

Joseph Arthur Meléndez Vásquez
Universidade Federal do ABC
Santo André – São Paulo
http://lattes.cnpq.br/0250709024202669

Juan Pablo Julca Avila
Universidade Federal do ABC
Santo André – São Paulo
http://lattes.cnpq.br/7182689370592333

ABSTRACT: Risers are cylindrical tubular structures used to produce/convey subsea oil and gas from wells located on the seafloor up to a floating production platform. The present work calculates the fundamental frequencies of a steel catenary riser with an incompressible internal fluid. The riser, object of this study, is seen as a plane extensible beam, which suffers large displacements but with small deformations. The internal fluid is consider like a bar of infinite flexibility travelling along of riser with constant velocity. The riser's equations of motion are developed in Cartesian coordinates by using the principle of stationary potential energy. The finite element method (FEM) is used for the non-linear static and dynamic analysis of the riser. To solve the non-linear equation, the Newton-Raphson iterative method is used. The fundamental frequencies of a riser are determined for different velocity values of the internal fluid, and for different values of the elasticity modulus. The numerical results are in good agreement with those described in the literature.

KEYWORDS: Steel catenary risers. Free vibration. Finite element method. Eigenvalue problem.

VIBRAÇÕES LIVRES DE RISERS EM CATENÁRIA COM ESCOAMENTO INTERNO

RESUMO: Risers são estruturas tubulares cilíndricas usadas para transferir petróleo e gás desde um poço de petróleo localizado no fundo do mar até uma plataforma flutuante de produção de petróleo. O presente trabalho calcula as frequências naturais de um riser de aço em catenária com um escoamento interno incompressível. O riser, objeto deste estudo, é visto como uma viga plana curva e extensível, a qual experimenta grandes deslocamentos porém pequenas deformações. O escoamento interno é visto como uma barra de flexibilidade infinita viajando ao longo do riser com velocidade constante. As equações do movimento do riser são desenvolvidas em coordenadas cartesianas via a abordagem variacional utilizando o princípio da energia potencial estacionária. O método de elementos finitos é utilizado para às análises estática e dinâmica não linear do riser. Para a solução das equações não lineares de equilíbrio estático, o método iterativo de Newton-Raphson é utilizado. As frequências naturais do riser são determinadas para diferentes velocidades do escoamento interno e para diferentes valores do módulo de elasticidade do riser. Os resultados obtidos são comparados satisfatoriamente com

dados da literatura.

PALAVRAS-CHAVE: Riser de aço em catenária. Vibrações livres. Método dos elementos finitos. Problema de autovalores.

1 I INTRODUCTION

Fluid traveling through a steel catenary riser (SCR) is subjected to centrifugal and Coriolis acceleration due to angular movement of the catenary riser. The forces induced by these accelerations produce mechanical vibrations on the riser. The dynamic of the internal fluid affects the natural vibration characteristics of an SCR to the point of reduce your useful life in relation to the useful life without consider the internal fluid.

The present work approaches numerically the free vibration's problem of catenary risers with an internal fluid. Risers in catenary configuration are modelled like a flat beam with both ends hinged. A homogeneous internal fluid with constant speed is considered. The finite element method based on the principle of stationary potential energy is used for static analysis, whereas the Galerkin method is employed for dynamic analysis.

2 I MATHEMATICAL FORMULATION

The riser is fully immersed in seawater of density ρ_w, and has an initial arc length equal to S. The external and internal diameters are $D_e$and D_i, respectively, and the density of the riser material is ρ_r. The riser is connected to the platform and connected to the wellhead through hinged supports in both ends. The riser transports an incompressible single-phase fluid of density ρ_f with constant velocity U. The pressure of the transporting fluid is ρ_i. H is the ocean depth and X_H is the horizontal displacement of the platform in relation to the axis y.

Three configurations are considered in the mathematical modelling of the riser, as shown in Figure 1. The configuration 1-1 is fictitious because it represents the riser submerged in seawater without any load applied. The configuration 2-2 is the static equilibrium configuration of the riser when subjected to static or time-independent loads. Finally, the configuration 3-3 represents the motion of the riser around the static equilibrium configuration due to the action of time-dependent loads.

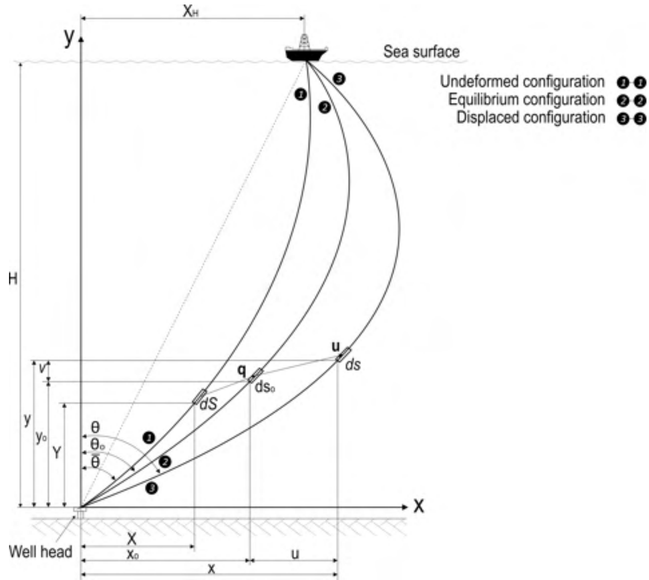


Figure 1: Risers configurations.

(X, Y), (x_0, y_0) and (x, y) are the position coordinates of a differential element of riser at the undeformed, equilibrium and displaced configurations, respectively. $\bar{\theta}$, θ_0 and θ are the inclinations at the lower end of the riser from the vertical axis y, in the undeformed, equilibrium and displaced configurations, respectively. S, s_0 and s are the total arc length of the riser at the undeformed, equilibrium and displaced configurations, respectively. u and v are the horizontal and vertical displacements, respectively.

The equations of motion of the riser, taking as the initial state the static equilibrium configuration, are obtained by using the principle of stationary potential energy that is expressed by

$$\delta\pi = \delta U_a + \delta U_b - (\delta W_W + \delta W_H + \delta W_I) = 0 \tag{1}$$

where δU_a and δU_b are the virtual strain energies due to axial stretching and bending, respectively; δW_W, δW_H and δW_I are the virtual works done by the effective weight, hydrodynamic forces due to the transported internal fluid, and inertial forces due to the riser movement, respectively.

2.1 Virtual strain energy due to axial stretching

The strain energy stored at the riser due to the axial deformation is due to the axial tension acting on the riser and due to the axial stress resulting from enclosing external and internal hydrostatic pressures (see Sparks (1984)). The axial tension is defined by T and the axial stress due to the enclosing hydrostatic pressures is defined by $\sigma = 2v\,(p_e A_e - p_i A_i)/A_r$, where p_e and p_i are the external and internal pressures, respectively, A_r is the cross-sectional area of the riser, A_e and A_i are the external and internal cross-sectional areas of the riser, respectively, and v is the Poisson's ratio. The strain energy due to axial deformation is given by

$$U_a = \int_0^S \frac{1}{2} EA_r \varepsilon^2 dS + \int_0^S \sigma A_r \varepsilon dS \tag{2}$$

where E is the modulus of elasticity. The strain energy U_a is calculated by considering the length of the riser in the undeformed configuration S. By applying the first variation on Equation (2):

$$\delta U_a = \int_0^S \frac{1}{2} EA_r \varepsilon \delta\varepsilon dS + \int_0^S \sigma A_r \delta\varepsilon dS \tag{3}$$

The axial strain ε and its first variation $\delta\varepsilon$ are defined as

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{u'x_0'}{s_0'^2} + \frac{v'y_0'}{s_0'^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{u'^2 + v'^2}{s_0'^2}\right) \tag{4}$$

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{u' + x_0'}{s_0'^2}\right)\delta u' + \left(\frac{v' + y_0'}{s_0'^2}\right)\delta v' \tag{5}$$

where s_0' is the derivative of s_0 with respect to y_0 and is determined as $s_0' = \left(x_0'^2 + y_0'^2\right)^{\frac{1}{2}}$. By substituting Equation (4) and Equation (5) into Equation (3), the following expression is obtained

$$\delta U_a = \int_0^H \left\{ \frac{EA_r}{s_0'^3}\left[u'x_0' + v'y_0' + \frac{1}{2}\left(u'^2 + v'^2\right)\right] + \frac{T_{a0}}{s_0'} \right\} \left(\frac{\left(x_0' + u'\right)}{\left(1 + \varepsilon_0\right)}\delta u' + \frac{\left(y_0' + v'\right)}{\left(1 + \varepsilon_0\right)}\delta v' \right) dy_0 \tag{6}$$

where $T_{a0} = EA_r\varepsilon_0 + \sigma A_r$, is the apparent axial force at the static equilibrium configuration.

2.2 Virtual strain energy due to bending

Considering that the initial configuration of the riser is a straight line, defined by linking both ends of riser, the virtual strain energy due to the bending moment is by definition

$$\delta U_b = \int_0^H M \delta\left(\theta' - \bar{\theta}'\right) dy_0 \tag{7}$$

where $M = EI\,[k(1+\varepsilon) - \bar{k}\,]$ (see Chucheepsakul *et al.* (2003)), I is the moment of inertia, k is the curvature of the riser at the displaced configuration, and $\bar{k}$ is the curvature of the riser at the undeformed configuration. The curvature k is given by $k = (x''y' - x'y'')/s^6$. The following relationship is valid between the riser curvature k and the angle θ

$$\theta' = \kappa s' \tag{8}$$

Finally, δU_b is obtained by substituting the first variation of Equation (8) into Equation (7), and using the following relationships: $\delta x' = \delta u'$, $\delta y' = \delta v'$.

2.3 Virtual work done by the apparent weight

The apparent weight per unit length (w_e)is defined as we = $(\rho_r A_r + \rho_f A_i - \rho_w A_e)g$ (see Sparks (1984)). Then, the virtual work done by the apparent weight is expressed by

$$\delta W_W = -\int_0^S w_e \delta v dS = -\int_0^H w_e \left(\frac{s_0'}{1+\varepsilon_0} \right) \delta v dy_0 \tag{9}$$

2.4 Virtual work done by the hydrodynamic forces

Figure 2 shows a riser element submerse in an oceanic current that follows the positive direction of the x axis. V_n and V_t are the current velocity in the normal and tangential directions respectively.

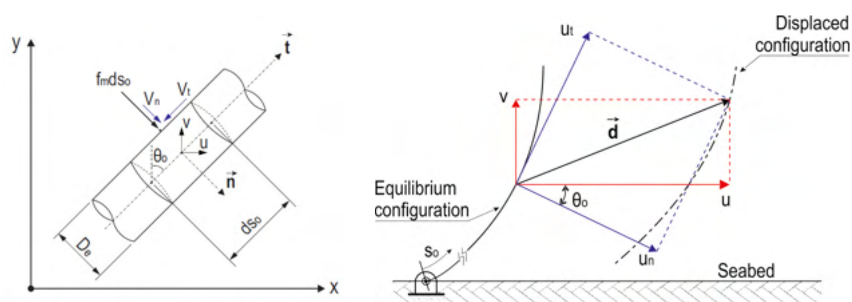


Figure 2. Normal hydrodynamic force acting on inclined riser and the displacement components of a point of riser.

The hydrodynamic loads caused by the current acting on the riser can be determined by using the Morison equation. It is considered that only the velocities and accelerations normal to the riser axis generate forces: The force caused by the current per unit of length is expressed by (see Patel (1989))

$$f_m = \frac{1}{2} C_D \rho_w \left| V_n - \dot{u}_n \right| \left(V_n - \dot{u}_n \right) D_e + C_M \rho_w \frac{\pi D_e^2}{4} \dot{V}_n - C_A \rho_w \frac{\pi D_e^2}{4} \ddot{u}_n \tag{10}$$

where C_D, C_M and C_A are the drag, inertia and added mass coefficients, respectively. $\dot{V}_n$ is the component of the acceleration of the seawater in the normal direction to the cylinder axis. $\dot{u}_n$ and $\ddot{u}_n$ are the components of velocity and acceleration of the riser in the normal direction to the riser axis, respectively. Then, the virtual work δW_H is given by

$$\delta W_H = \int_0^H f_m y_0' \delta u dy_0 - \int_0^H f_m x_0' \delta v dy_0 \tag{11}$$

2.5 Virtual work done by the inertial forces

The riser is subject to two types of inertial forces: one is due to the rigid body dynamics and the other is due to the dynamics of the internal fluid. The virtual work done by the inertial forces is expressed by

$$\delta W_I = \vec{F}_I . \delta \vec{d} \tag{12}$$

where $\vec{F}_I$ is the inertia total force and $\delta \vec{d}$ is the virtual displacement vector, and are defined as

$$\delta \vec{F}_I = -\int_0^H \left(\vec{a}_r \rho_r A_r + \vec{a}_f \rho_f A_i \right) s_0' dy_0 \tag{13}$$

$$\delta \vec{d} = \delta u \, \vec{i} + \delta v \, \vec{j} \tag{14}$$

where $\vec{a}_r$ is the acceleration of the riser and $\vec{a}_f$ is the acceleration of the internal fluid. The acceleration of the riser in Cartesian coordinates is given by

$$\vec{a}_r = \ddot{u} \, \vec{i} + \ddot{v} \, \vec{j} \tag{15}$$

The internal fluid acceleration is expressed by the following expression, which is detailed in Huang (1993),

$$\begin{aligned} \vec{a}_f = & \left[\ddot{u} + \left(\frac{1}{s_0'^2} - \frac{x_0'^2}{s_0'^4} \right) (x_0'' + u'') U^2 - \left(\frac{x_0' y_0'}{s_0'^4} \right) (y_0'' + v'') U^2 + \frac{2U}{s_0'} \dot{u}' \right] \vec{i} + \\ & \left[\ddot{v} + \left(\frac{1}{s_0'^2} - \frac{y_0'^2}{s_0'^4} \right) (y_0'' + v'') U^2 - \left(\frac{x_0' y_0'}{s_0'^4} \right) (x_0'' + u'') U^2 + \frac{2U}{s_0'} \dot{v}' \right] \vec{j} \end{aligned} \tag{16}$$

By substituting Equations (6), (7), (9), (11) and (12) into Equation (1) and integrating by parts, two equations of motion are obtained: one in the *x*-direction and another in the *y*-direction. Then, those two equations can be expressed in matrix form as:

$$\begin{aligned} & [A]\{\ddot{x}\} + [B]\{\dot{x}'\} + [C]\{x''\} + \left([K_{t1}]\{x'\} \right)' + \left([K_{t2}]\{x'\} \right)' + \left([K_{b1}]\{x'\} \right)'' + \left([K_{b2}]\{x''\} \right)' \\ & = \{F\} \end{aligned} \tag{17}$$

In this work, an analysis of free vibration of a riser was conducted considering the following forces: weight of the riser, buoyancy forces, forces due to the internal fluid, and the hydrodynamic force. For this analysis, it is considered that {*F*} is composed only by the forces due to the added masses, which is given by the third term on the right side of Equation (10). Then, the force vector {*F*} is expressed as

$$\{F\} = -C_A \rho_w A_e \left(\frac{1}{s_0'}\right) \begin{bmatrix} 1 & -x_0' \\ -x_0' & x_0'^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

Substituting Equation (18) into Equation (17), the equation of motion for free vibration is obtained:

$$\begin{aligned} &\left[\bar{A}\right]\{\ddot{x}\} + [B]\{\dot{x}'\} + [C]\{x''\} \wedge + \left([K_{t1}]\{x'\}\right)' + \left([K_{t2}]\{x'\}\right)' + \left([K_{b1}]\{x'\}\right)'' \\ &+ \left([K_{b2}]\{x''\}\right)' = \{0\} \end{aligned} \tag{19}$$

3 I NUMERICAL METHOD

This section presents the procedure used to determine the riser's linear natural frequencies with internal fluid. From Figure 1:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \{x_0\} + \{u\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{20}$$

Substituting Equation (20) into Equation (19), the following equation of motion is obtained

$$\begin{aligned} &\left[\bar{A}\right]\{\ddot{u}\} + [B]\{\dot{u}'\} + [C]\{u''\} + \left([K_{t1}]\{u'\}\right)' + \left([K_{t2}]\{u'\}\right)' + \left([K_{b1}]\{u'\}\right)'' \\ &+ \left([K_{b2}]\{u''\}\right)' = \{0\} \end{aligned} \tag{21}$$

The dynamic displacement of the riser in its bottom and top ends is constrained using hinged supports. In the dynamic analysis, the displacement field $\{u\}$ is approximated by (see Cook (2002))

$$\{u\} = [N]\{d\} \tag{22}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & N_5 & N_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_4 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\{d\} = \{u_1 \quad u_1' \quad u_1'' \quad v_1 \quad v_1' \quad v_1'' \quad u_2 \quad u_2' \quad u_2'' \quad v_2 \quad v_2' \quad v_2''\}^T \tag{24}$$

where $\{d\}$ is the vector of nodal displacements of a riser element, $[N]$ is the matrix of interpolation functions, where N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 and N_6 are the interpolation functions of fifth degree.

Using the Galerkin finite element method on the Equation (21), the equation of motion for a riser element is obtained, and then, by assembling the matrices of all the finite elements, the global equation of motion is given by

$$[M]\{\ddot{D}\}+[G]\{\dot{D}\}+[K]\{D\}=\{0\} \tag{25}$$

Where $\{D\}$, $\{\dot{D}\}$ and $\{\ddot{D}\}$ are the vectors of nodal displacements, nodal velocities and nodal accelerations of the riser, respectively, $[M]$ is the global mass matrix, $[G]$ is the gyroscopic matrix and $[K]$ is the global stiffness matrix.

3.1 Linear Free Vibration

For the study of linear free vibration, the non-linear terms of the stiffness matrix $[K]$ are neglected. The non-linear terms are those that containing the variables u and v in their formulation. Then, Equation (25) takes the following form:

$$[M]\{\ddot{D}\}+[G]\{\dot{D}\}+[K_L]\{D\}=\{0\} \tag{26}$$

Where $[K_L]$ represents the linear stiffness matrix. Equation (26) has harmonic solution for complex eigenvalues $\lambda_i = \alpha_i \pm i\omega_i$, in the form $\{D\} = \{\bar{D}\}e^{\lambda t}$. The real part of the complex eigenvalues $\mathrm{Re}(\lambda_i)$ must be taken negative values, and this is because the solution must be stable. If $\mathrm{Re}(\lambda_i)\geq 0$, the displacements $\{D\}$ will exponentially increase and the solution will be unstable. Then, by substituting $\{D\}$ into Equation (26), the linear frequencies of a SCR are obtained by solving the quadratic eigenvalue problem given by Equation (27)

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda[G]+[K_L]\right)\{\bar{D}\}=Q(\lambda)=\{0\} \tag{27}$$

To solve Equation (27), the quadratic polynomial $Q(\lambda)$ must be transformed into a linear polynomial.

4 | RESULTS

The riser properties and other parameters used in the simulations are D_e=0.26m, D_i=0.20m, H=300m, ρ_r=7850kg/m^3, ρ_r=1025kg/m^3, ρ_f=998kg/m^3, E=2.07x10^{11} N/m^2, v=0.3, normal drag coefficient (C_{Dn}) and added mass coefficient (C_A) are 0.7 and 1.0, respectively. The axial force applied at the top is T_H=476.20kN.

Table 1 shows the linear fundamental frequencies of the vertical riser obtained for different internal flow speed with current velocity equal to *0m/s.* The results obtained in this study are compared with the results obtained by Moe *et al.* (1988) and Chucheepsakul *et al.* (1999). The results are in good agreement.

U (m/s)	Moe, *et al*., (1988)	Chucheepsakul, *et al*., (1999)	This study
	Analytical solution	20-finite elements	20-finite elements
0	0.2878	0.2891	0.2982
5	-	0.2881	0.2974
10	0.2838	0.2853	0.2950
15	-	0.2804	0.2906
20	0.2706	0.2731	0.2842
25	-	0.2627	0.2753

Table 1: Fundamental frequencies of the vertical riser, ω (rad/s).

In addition, it was studied the effect of the gyroscopic matrix on the values of linear natural frequencies. The quadratic eigenvalue problem expressed by Equation (23) has been solved with and without the gyroscopic matrix. Table 2 present the results obtained.

U (m/s)	With gyroscopic matrix	Without gyroscopic matrix	% error
	$[G]\neq[0]$	$[G] = [0]$	
0	0.2982	0.2982	0.00
5	0.2974	0.2975	0.03
10	0.2949	0.2953	0.14
15	0.2906	0.2915	0.32
20	0.2842	0.2860	0.62
25	0.2753	0.2783	1.10

Table 2: Effect of the gyroscopic matrix on the fundamental frequencies, ω (rad/s).

Following, a SCR has been simulated in order to study the effects of the bending stiffness on the linear natural frequencies. The characteristics of the simulated riser are the same used in the previous simulations with the unique addition of that the horizontal displacement of platform is70*m*. Table 3 shows the effects of the elasticity modulus E and internal flow velocity on the linear fundamental frequencies of SCR.

E(kN/m^2)	U (m/s)		
	0	10	20
2.07 x 109	0.317	0.315	0.307
2.07 x 108	0.304	0.293	0.270
2.07 x 107	0.287	0.284	0.274
2.07 x 106	0.273	0.268	0.248
8.28 x 105	0.269	0.264	0.243
4.14 x 105	0.265	0.259	0.238

Table 3: Fundamental frequencies of a catenary riser, ω (rad/s).

5 I CONCLUSIONS

The present work deals with the problem of free vibration of catenary risers with internal flow. Results are in good agreement with results obtained by another works.

1. In the analysis of free linear vibration of catenary risers, with a fixed value for the axial force at the top and without current, it is concluded that the natural frequencies decreases with increasing the velocity of the internal fluid. Simulations were also conducted to study the effects of the modulus of elasticity over the natural frequencies of catenary risers, concluding that for a constant velocity of the internal fluid, the natural frequency increases with the modulus of elasticity E.

2. Simulations were conducted in linear vibrations without considering the effect of the gyroscopic matrix. By comparing the natural frequencies obtained with and without the gyroscopic matrix, we can conclude that for low values of internal fluid velocity, the effects of the gyroscopic matrix are negligible.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors gratefully acknowledge the financial supports by CAPES – "Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior" and Federal University of ABC.

REFERENCES

CHUCHEEPSAKUL, S.; HUANG, T; MONPRAPUSSORN, T. Influence of transported fluid on behavior of an extensible flexible riser/pipe. In:The Ninth International Offshore and Polar Engineering Conference, 1999. **Proceedings** … Brest, France, 1999.

CHUCHEEPSAKUL, Somchai; MONPRAPUSSORN, T.; HUANG, T. Large strain formulations of extensible flexible marine pipes transporting fluid. **Journal Fluids and Structures**, v. 17, n. 2, p. 185-224, 2003.

COOK, D. **Concepts and applications of finite element analysis**. 4. ed. New York: John Wiley & Sons, 2002.

HUANG, T. Kinematics of transported mass inside risers and pipes. In: The Third International Offshore and Polar Engineering Conference, 1993. **Proceedings** … Singapore, 1993.

MOE, G.; CHUCHEEPSAKUL, S. The effect of internal flow on marine risers. In: The Seventh International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 1988. **Proceedings** … Houston, USA, 1988.

PATEL, M. **Dynamics of offshore structures**. London: Butterworth-Heinemann, 1989.

SPARKS, C. The influence of tension, pressure and weight on pipe and riser deformations and stresses. **Journal of Energy Resources Technology**, v. 106, n. 1, p. 46-54, 1984.

SOBRE OS ORGANIZADORES

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA - Professor do Departamento de Educação da Universidade do Estado da Bahia (Uneb - Campus VII) e docente permanente do Programa de Pós-Graduação Mestrado em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA (Uneb - Campus III). Atualmente coordena o Núcleo de Pesquisa e Extensão (NUPE) do Departamento de Educação da Uneb (DEDC7). Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB), Especialista em Psicopedagogia Institucional e Clínica pela Faculdade Regional de Filosofia, Ciências e Letras de Candeias (IESCFAC), Especialista em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pelo Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco (CESVASF). Foi professor e diretor escolar na Educação Básica. Coordenou o curso de Licenciatura em Matemática e o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) no Campus IX da Uneb. Foi coordenador adjunto, no estado da Bahia, dos programas Pró-Letramento e PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa). Participou, como formador, do PNAIC/UFSCar, ocorrido no Estado de São Paulo. Pesquisa na área de formação de professores que ensinam Matemática, Ludicidade e Narrativas. Integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/UFSCar), na condição de pesquisador, o Grupo Educação, Desenvolvimento e Profissionalização do Educador (CNPq/PPGESA-Uneb), na condição de vice-líder e o Laboratório de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/LEPEM-Uneb) na condição de líder. É editor-chefe da Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM) e da Revista Multidisciplinar do Núcleo de Pesquisa e Extensão; e coordenador do Encontro de Ludicidade e Educação Matemática (ELEM).

ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA - Doutorando em Educação pela Universidade Federal do Sergipe - UFS/PPGED. Mestre em Educação de Jovens e Adultos pela Universidade do Estado da Bahia - UNEB/MPEJA (2018), com Especialização em Tópicos Especiais de Matemática (2020), Ensino de Matemática (2018), Educação de Jovens e Adultos (2016), Matemática Financeira e Estatística (2015) e Gestão Escolar (2008). Licenciado em Matemática pela Universidade Nove de Julho (2000). Atualmente é professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - IF Sertão/PE. Coordenou o Curso de Licenciatura em Matemática pelo Plano Nacional de Formação dos Professores da Educação Básica - PARFOR pela Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus XVI - Irecê-BA. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Formação de Professores e Tecnologias da Informação e Comunicação - FOPTIC (UFS/CNPq) e do Laboratório de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática - LEPEM (UNEB/CNPq). É editor assistente da Revista Baiana de Educação Matemática - RBEM, uma publicação do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA da Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus III - Juazeiro/BA em parceria com o Campus VII - Senhor do Bonfim/BA da mesma instituição e com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - IF Sertão-PE, Campus Santa Maria da Boa Vista/PE.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

M

P

R

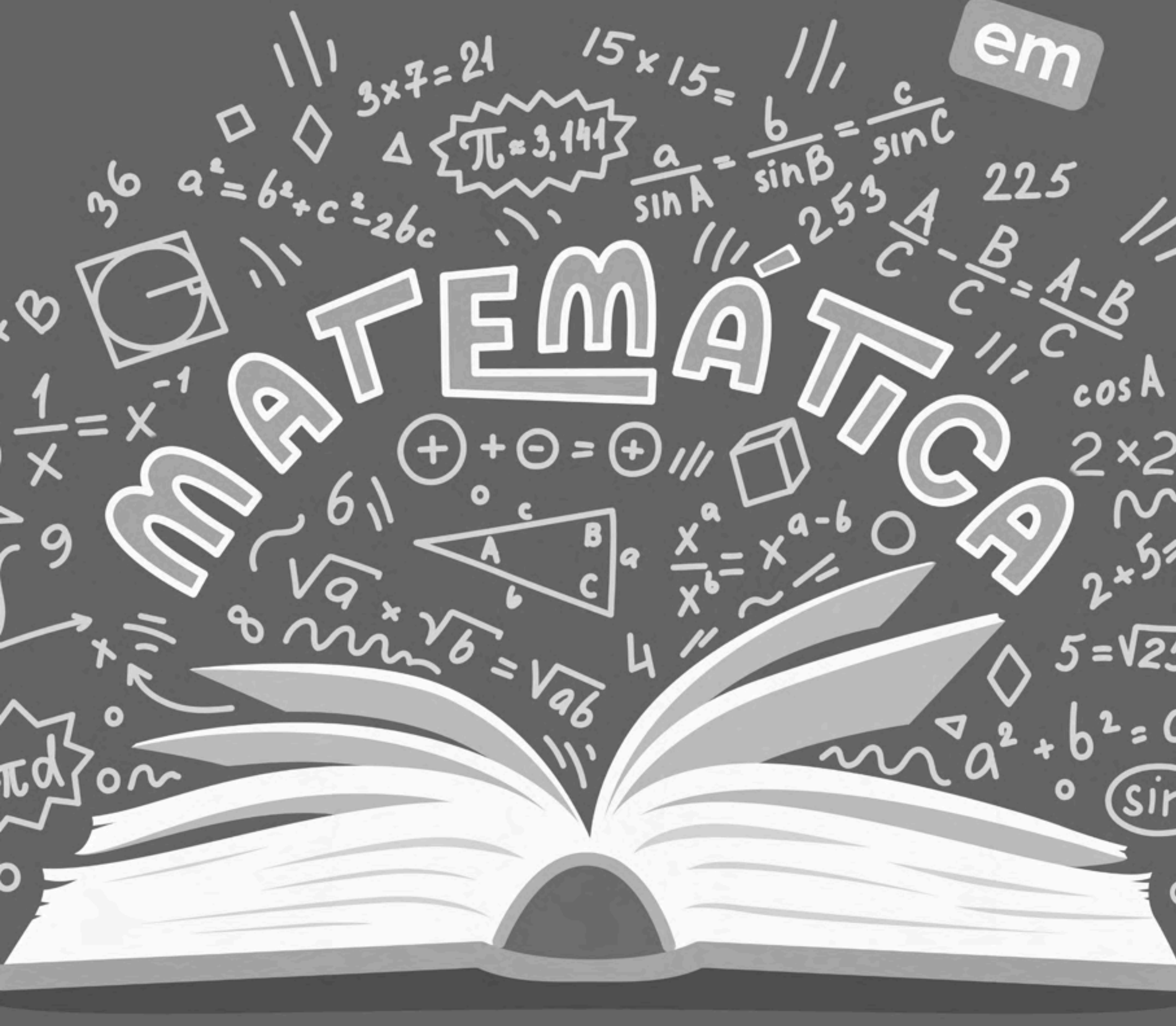
S

T

V

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

PESQUISAS DE VANGUARDA



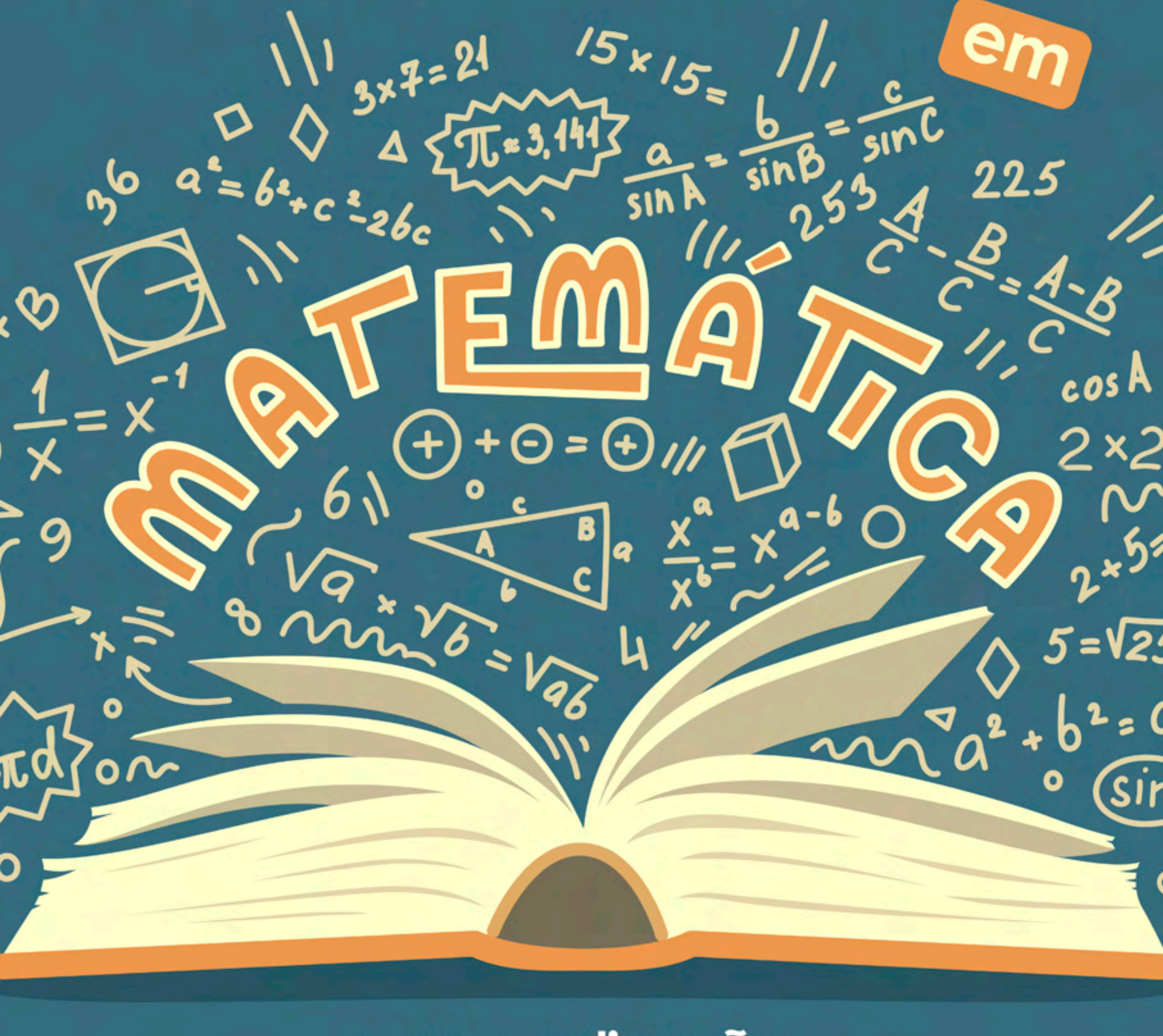
e suas aplicações

2

Atena
Editora
Ano 2021

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

PESQUISAS DE VANGUARDA em MATEMÁTICA



e suas aplicações

2

Atena Editora
Ano 2021