RAFAEL WINÍCIUS DA SILVA BUENO

A CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE *Integral*

Atena
Editora
Ano 2021

RAFAEL WINÍCIUS DA SILVA BUENO

A CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE *Integral*

Atena
Editora
Ano 2021

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Camila Alves de Cremo
Daphynny Pamplona
Gabriel Motomu Teshima
Luiza Alves Batista
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Atena
Editora
Ano 2021

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

A construção histórica do conceito de integral

Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Correção: Gabriel Motomu Teshima
Indexação: Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão: O autor
Autores: Rafael Winícius da Silva Bueno

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

B928 Bueno, Rafael Winícius da Silva
A construção histórica do conceito de integral / Rafael Winícius da Silva Bueno. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5983-699-4
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.994210212

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino e aprendizagem de cálculo. 3. História da matemática. 4. Conceito de integral. I. Bueno, Rafael Winícius da Silva. II. Título.

CDD 510.07

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2021

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

DECLARAÇÃO DO AUTOR

Os autores desta obra: 1. Atesta não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao texto publicado; 2. Declara que participou ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certifica que o texto publicado está completamente isento de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirma a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhece ter informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autoriza a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

Atena Editora
Ano 2021

DECLARAÇÃO DA EDITORA

Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

Atena
Editora
Ano 2021

APRESENTAÇÃO

A presente obra é parte do resultado da Tese de Doutorado em Educação em Ciências e Matemática do Professor Rafael W. S. Bueno. Na pesquisa de doutoramento, intitulada "A Construção do Conceito de Integral: uma viagem pelos Três Mundos da Matemática", o autor dedicou um dos capítulos do seu trabalho à investigação documental e bibliográfica que originou este livro.

Adequando a escrita para proporcionar uma leitura mais leve e fluída, Rafael W. S. Bueno reconstrói, neste livro, os caminhos percorridos pela humanidade na concepção e desenvolvimento do conceito de integral. Assim, articula uma narrativa que desmistifica a ideia de um conhecimento "inventado" por uma única mente brilhante e percorre uma jornada tortuosa e cheia de idas, vindas e marcada, até mesmo, por algumas controvérsias.

O livro que você tem em mãos (física ou virtualmente) é, portanto, resultado de árdua e minuciosa investigação de documentos e obras. Foram consultados, durante a pesquisa, muitos materiais recentes, como o livro "Infinitesimal: a teoria matemática que revolucionou o mundo" e o artigo "*The 350th Anniversary of the Birth of G. W. Leibniz*"; outras obras mais antigas, como "*The history of the calculus and it's conceptual development*"; e, ainda, diversos documentos históricos, tais como o manifesto "*The Analyst, or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*", as notas do curso de análise de Cauchy e os arquivos da *Royal Society*, de Londres.

PREFÁCIO: A CONSTRUÇÃO DO CÁLCULO INTEGRAL NUMA PERSPECTIVA CRONOLÓGICA

Um livro nunca é apenas um livro, principalmente quando este é o resultado de uma dedicada investigação, como é o caso do trabalho de Rafael W. S. Bueno. Ao revisitar a história do Cálculo Integral, com foco nos estudiosos que contribuíram para a construção da Análise Matemática, o autor nos apresenta uma narrativa cronológica - desde a antiguidade até o início do século XX - a qual fornece uma visão geral do desenvolvimento dessa área do conhecimento. Como afirma Carl Boyer, os grandes marcos da história da Matemática não surgem subitamente: são antes resultado de um longo e árduo caminho investigativo pouco uniforme. A trajetória descrita pelo autor começa com Arquimedes; passa pela idade média; e, após passar pelo período do pré-cálculo, continua com a controvérsia sobre a “invenção” do Cálculo entre Newton e Leibniz; contempla as contribuições do século XVIII; e, por fim conclui com os importantes aportes para a formalização do Cálculo no século XIX e início do século XX.

Mesmo sem chamar atenção para o fato, o autor procurou traçar esses marcos e mostrar pontos de continuidade e descontinuidade da trajetória do que hoje é denominado Cálculo Integral. Uma importante contribuição que se destaca na narrativa feita por Rafael W. S. Bueno é destacar que o Cálculo não foi “descoberto” por um matemático, mas resultou da participação de muitas mentes que se debruçaram na busca por respostas a problemas de “quadratura” e “cubatura” de curvas geométricas, ou seja, do cálculo de áreas e volumes.

A evolução do Cálculo, conforme afirma Dirk Jan Struik, faz parte da renovação total da Matemática num ambiente em que os pesquisadores começaram a se afastar da visão aristotélica da natureza. O século XVIII testemunhou o surgimento de numerosos métodos para resolver problemas que hoje pertencem ao Cálculo. A maioria desses problemas foram herdados da matemática grega: problemas de quadraturas e cubaturas - o equivalente a encontrar áreas e volumes; questões sobre centros de gravidade; problemas de determinação de tangentes; e problemas sobre valores extremos. Para ilustrar o pensamento de Cavalieri sobre o cálculo de áreas, Rafael W. S. Bueno diz: “A técnica de Cavalieri era baseada na decomposição de figuras em indivisíveis, argumentando que um plano é feito de linhas, assim como uma roupa é feita de fios, e que um sólido é feito de planos, da mesma forma que um livro é composto por páginas”.

Nos séculos XVII a XIX, matemáticos defrontaram-se com a dificuldade de definir certos objetos matemáticos necessários para uma apresentação formal do Cálculo, tais como limite, continuidade, infinito, integral, entre outros. Ao abordar a formalização do conceito de integral, o autor cita Cauchy - que estabeleceu, de maneira rigorosa, a relação entre o conceito de derivada e integral, denominado teorema fundamental do cálculo - quando diz: “Cauchy argumentou que, apesar de ser definida independentemente, a integração constitui-se no processo inverso da diferenciação. Nesse sentido, construiu o que talvez tenha sido a primeira demonstração rigorosa do Teorema Fundamental do Cálculo, sem ter recorrido a noções intuitivas sobre o conceito de área”. Outra importante contribuição de Cauchy foi determinar a “integral definida” como um limite de somas, conforme salienta Rafael W. S. Bueno.

A Análise Matemática do século XIX caracterizou-se como uma tentativa de aritmetizar o Cálculo. Nesse sentido, o autor não poderia deixar de incluir em seu repertório os matemáticos Bolzano e Weierstrass.

Dando continuidade ao trabalho de seus antecessores, Riemann avança na definição da integral definida e, diferentemente de Cauchy, que só realizou integrações de funções contínuas, Riemann trouxe “exemplos de integrais com infinitos pontos de descontinuidade”. Concluindo seu livro, Rafael W. S. Bueno apresenta a contribuição de Lebesgue, no século XX, que ampliou a definição dada por Riemann.

A Matemática é o resultado do esforço coletivo de pessoas, o que pôde ser exemplarmente mostrado com os autores selecionados a comporem o presente trabalho: constata-se que anteriormente a Newton e Leibniz – considerados os “criadores do Cálculo Diferencial e Integral” - pelo menos dezenas de outros matemáticos contribuíram com resultados que viabilizaram a construção de uma definição mais clara e objetiva da integral. Depois deles outros matemáticos se destacaram na formalização da definição desse conceito, tanto no século XIX quanto no século XX. E essa história não termina no início do século XXI, ela prossegue e demonstra a força motriz que mobiliza milhares de matemáticos no mundo na geração de novos conhecimentos.

Boa leitura!

Circe Mary Silva da Silva Dynnikov

SUMÁRIO

1. OS PRIMÓRDIOS DO CÁLCULO

As ideias iniciais relacionadas ao pensamento matemático como é entendido na atualidade são atribuídas às civilizações organizadas às margens dos grandes rios da China, do Egito, da Índia e da Mesopotâmia. Contudo, há informações mais precisas apenas sobre as culturas estabelecidas às margens do rio Nilo, no Egito, e entre os rios Tigre e Eufrates, na Mesopotâmia. Essas informações foram construídas a partir de papiros e tábulas de argila recuperados ao longo dos últimos séculos.

Na Mesopotâmia, onde Babilônia estava localizada, nasceram as primeiras formas de escrita, atribuídas aos sumérios, no quarto milênio antes de Cristo. Essa criação está intimamente ligada à Matemática, pois a escrita era utilizada, essencialmente, para anotar quantidades de rebanhos e de insumos e, sobretudo, para colaborar com a organização da vida em sociedade.

A Geometria, por outro lado, tem sua origem no Egito, onde os impostos governamentais eram cobrados de acordo com a área das terras cultivadas pelos agricultores. Nesse contexto, se uma cheia do rio Nilo alcançasse parte da terra de um agricultor, ele solicitava que os valores a serem pagos fossem reduzidos, proporcionalmente à parte alagada do terreno. Para que essas questões fossem resolvidas, técnicas geométricas elementares eram necessárias. Foi dessa necessidade do cálculo preciso de áreas de terras que surgiu o termo *Geometria* (geo + metria).

Nos papiros de Rhind e de Moscou, escritos por volta de 2000 a 1800 a.C., são encontradas mais informações sobre as práticas matemáticas dos egípcios. Nesse material, são encontradas 110 situações-problema e suas respectivas soluções, sendo 20 relacionadas com o cálculo de áreas de terrenos e volumes de celeiros de estocagem de grãos.

Consideram-se esses documentos históricos como os primeiros registros de ideias que podem, de alguma forma, ainda que rudimentar, relacionar-se com a integração. As próximas contribuições importantes relacionadas com o conceito de integral foram trazidas por Arquimedes de Siracusa (c. 280 a. C.), considerado o maior gênio da Antiguidade.

2. ARQUIMEDES DE SIRACUSA

Arquimedes estudou em Alexandria[1], onde pôde aprender as bases da Matemática. Entre os seus trabalhos vinculados à gênese do Cálculo Diferencial e Integral, destacam-se aqueles referentes ao cálculo de áreas, nos quais utilizava a dupla redução ao absurdo para provar que duas grandezas eram iguais.

Para tanto, supunha que uma das grandezas era maior ou menor que a outra e, a seguir, supunha o contrário, chegando a dois absurdos, o que demonstrava que uma grandeza, não podendo ser nem menor, nem maior que a outra, só poderia ser igual a ela. Nesse contexto, Arquimedes usava uma modificação do método da exaustão, proposto por Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.), considerando uma figura inscrita e outra circunscrita.

Percebendo que uma ideia prévia do resultado era importante para aplicar essa técnica, Arquimedes costumava empregar o conceito físico de equilíbrio de pesos suspensos sobre alavancas, em conjunção com a ideia de que uma superfície, por exemplo, é composta por muitas linhas. Para encontrar uma área ou um volume, o pensador realizava experiências mentais nas quais dividia uma região em um número muito grande de faixas planas, que eram penduradas, na sua imaginação, em uma extremidade de uma barra. Assim, procurava estabelecer o equilíbrio com algo conhecido. Essas experiências levavam Arquimedes a uma resposta para suas questões, mas, não se satisfazendo com esses processos, recorria ao método da exaustão. Sendo assim,

> Pelo método do equilíbrio pode-se ver a fertilidade da ideia que consiste em considerar toda grandeza como sendo formada por um número muito grande de porções atômicas, embora essa ideia não tivesse uma fundamentação precisa. É desnecessário dizer que, com o método dos limites, pode-se fazer com que o método do equilíbrio de Arquimedes se torne perfeitamente rigoroso, confundindo-se, em essência, com a moderna integração (EVES, 2004, p. 423-424).

O método empregado por Arquimedes pode ser entendido como uma antecipação da ideia de infinitesimais, estabelecida no século XVII. Ademais, é possível perceber que o método do gênio grego originou as ideias que levariam ao processo de integração para o cálculo de áreas e volumes, cerca de dois mil anos depois.

Mesmo com o sucesso alcançado, Arquimedes não teve sucessores, pois as gerações seguintes se mantiveram à margem das ideias inovadoras da sua abordagem matemática. Preferiram apoiar-se em métodos geométricos clássicos, considerados já experimentados e comprovados. Por mais mil e quinhentos anos, o trabalhado de Arquimedes referente ao Cálculo permaneceu, então, apenas como um vislumbre de grandes possibilidades.

1 Localizada no Egito e considerada uma das cidades mais importantes da Antiguidade.

3. A IDADE MÉDIA

No período relativo à Baixa Idade Média, do século V até o século XI, a população ocidental praticamente deixou de ter acesso ao ensino, e quase todo o saber grego foi esquecido. Tinham acesso ao conhecimento apenas os monges dos monastérios católicos e alguns poucos leigos cultos. Com exceção da elaboração do calendário cristão, a Matemática foi muito pouco utilizada durante mais de meio milênio.

Nos séculos XI e XII, a urbanização da Europa estimulou a concentração de riquezas, a disseminação de escolas e a intensificação da cultura intelectual. Foi no século XII, também, que se catalisaram as traduções de obras clássicas, como, por exemplo, os tratados de Arquimedes. Mas foi apenas em 1269 que William Moerbeke[1] (c. 1215-1286), proveniente de Flandres[2], publicou uma tradução dos principais escritos científicos do pensador grego para o latim. Foi essa obra que os sábios da Renascença vieram a conhecer.

No século XIV, nas universidades de Oxford e Paris, evoluções matemáticas começaram a ocorrer. Foi nessas instituições, principalmente, que floresceram os primeiros estudos sobre as mudanças de forma geral e, em particular, sobre a variação da velocidade.

Na Grécia Antiga, o movimento era tratado mais como uma qualidade do que como uma quantidade, e não havia um estudo sistemático das qualidades. Inclusive, Aristóteles teria afirmado que a Matemática se concentrava em coisas que não envolviam o movimento. De maneira geral, a Matemática grega baseava-se mais no estudo da forma que no da variabilidade.

Essas ideias predominaram até o século XIV, quando um avanço teórico importante foi feito, contribuindo para uma evolução no sentido da construção do conceito de derivada. O início desse avanço ocorreu nos primórdios daquele século, com a introdução, atribuída ao filósofo francês Jean Buridan (1300-1358), da ideia de *impetus*[3] - noção de que um corpo, uma vez em movimento, tem a tendência de continuar seu movimento, sem a ação de forças externas.

Essa nova doutrina tornou mais aceitável a noção intuitiva de velocidade instantânea, presente nos estudos de variação do século XIV. Nos trabalhos dessa época, começaram a surgir, ainda de forma mais filosófica do que matemática, inúmeras referências sobre a taxa de variação instantânea, mesmo que nenhuma definição precisa desse conceito tivesse sido construída. Esses trabalhos referiam-se à variabilidade de qualidades, discutidas no contexto da latitude das formas.

1 Tradutor de obras filosóficas e científicas.

2 Região situada ao norte da Bélgica.

3 Essa ideia iniciou o caminho trilhado até o princípio da inércia, de Isaac Newton.

Richard Suiseth[4] (c. 1350), matemático do Merton College, de Oxford, também conhecido como *The Calculator*[5], fez vários comentários acerca do infinito nos seus trabalhos, mas foi em sua obra *Liber calculationum*[6] que um importante tratado envolvendo a latitude das formas foi construído. Suiseth chegou à conclusão de que a intensidade média de uma forma, cuja taxa de variação em um intervalo é constante, é dada pela média aritmética entre a primeira e a última intensidade. Essa afirmação foi nomeada de regra de Merton e, em termos atuais, informa que a velocidade média de um corpo que se move com velocidade que tem variação constante é a média aritmética entre as velocidades inicial e final.

É atribuído a Suiseth o primeiro esforço importante de tornar matematicamente compreensível o estudo das quantidades físicas, como densidade, velocidade e intensidade da luz. Seu trabalho sobre as mudanças dessas quantidades antecipou a elaboração científica do tema, como também sugeriu a introdução, na Matemática, de conceitos como o de variabilidade. Inclusive, as palavras *fluxões* e *fluentes,* empregadas por Suiseth, foram utilizadas por Isaac Newton (1642-1727), aproximadamente 300 anos depois, quando este último trouxe suas definições sobre o Cálculo Diferencial e Integral.

As demonstrações dialéticas de Suiseth não trouxeram relação alguma com a Geometria, que acabou por tornar-se a intermediária entre suas tentativas iniciais de estudar quantidades varáveis e as conceitualizações trazidas com a construção do Cálculo. Essa conexão entre o discurso de Suiseth e a Geometria foi propiciada pelo avanço do estudo da latitude das formas, cultivado por outros expoentes do século XIV, dentre os quais destaca-se o pensador francês Nicole Oresme[7] (1323-1382).

Oresme desenvolveu seu estudo a partir de uma abordagem geométrica. As formas, ou qualidades, eram os fenômenos, como a luz, a distância ou a velocidade, que têm vários níveis de intensidade e mudam continuamente. De acordo com Boyer (1996, p. 181), “os termos latitude e longitude, que Oresme usou, são equivalentes, num sentido amplo, à nossa ordenada e abscissa, e sua representação gráfica assemelha-se com a nossa geometria analítica”.

Em seu trabalho, Oresme representou a variação a partir de recursos geométricos, em detrimento da exposição dialética proposta por Suiseth. Segundo Oresme, o modo como uma qualidade varia de um instante para outro, ou de um lugar para outro, pode ser representado por um gráfico de duas dimensões, onde o eixo horizontal representa a extensão (tempo ou espaço) e o eixo vertical representa a intensidade da qualidade de interesse. A sucessão de intensidades é vista, assim, como uma figura plana em que, em

4 Ou Swineshead, ou ainda, Suisset.

5 O Calculador.

6 Livro de cálculos.

7 Oresme foi um dos principais divulgadores da ciência moderna e, segundo Eves (2004), além de filósofo, foi o maior matemático de sua época.

cada ponto do eixo horizontal, é traçada uma reta vertical que representa a intensidade da qualidade observada nesse instante.

Apesar de não ter feito conexões significativas entre as curvas de sua representação gráfica e um correspondente simbolismo algébrico, Oresme deu um passo importante na direção do Cálculo, pois foram o estudo de problemas geométricos e a tentativa de expressá-los em termos numéricos que direcionaram estudos posteriores para a construção de conceitos como os de derivada e integral. Nesse sentido:

> Ele assinalou a propriedade de inclinação constante para o seu gráfico do movimento uniformemente acelerado - uma observação equivalente à equação por dois pontos de uma reta em geometria analítica e que leva ao conceito de triângulo diferencial. Além disso, ao achar a função distância, a área, Oresme evidentemente estava realizando uma simples integração que resulta na regra de Merton. Ele não explicou por que a área sob a curva velocidade-tempo representa a distância coberta, mas é provável que pensasse na área como sendo formada de muitos segmentos verticais ou indivisíveis [...] (BOYER, 1996, p. 181).

Desenvolvidos inicialmente em Oxford e Paris, os estudos continuaram, no século XV, na Itália, onde Biagio Pelacani (1365-1416), conhecido como Blasius de Parma[8] e tido como um grande filósofo e matemático do seu tempo, trouxe questões relativas à latitude das formas em *Questiones super tractatus de latitudinibus formarum*[9]. O pensador italiano chegou a inserir esse tópico de estudo em suas aulas nas universidades de Pavia, Bologna e Pádua.

Já o princípio da aquisição uniformemente disforme de uma qualidade era conhecido em Paris, no século XVI, por Álvaro Tomás[10], John Major, Dominic Soto e outros. O princípio da aceleração uniforme parece ter sido de conhecimento comum do século XIV ao século XVI, e é provável que Galileu Galilei (1564-1642) tivesse familiaridade com esse trabalho.

A despeito dos grandes avanços trazidos pelo estudo da latitude das formas, proposto por Suiseth e Oresme, os princípios fundamentais para o desenvolvimento do Cálculo continuavam sendo buscados na Geometria de Arquimedes. Com o início do século XV, as ideias do pensador grego tornaram-se cada vez mais influentes nos trabalhos desenvolvidos por matemáticos, como o próprio Blasius de Parma, a quem são atribuídos tratados sobre os infinitesimais.

Outro proeminente destaque na evolução da Matemática no sentido do Cálculo foi Nicholas Krebs[11] (1401-1464), mais conhecido com Nicholas de Cusa, em referência à sua cidade natal, localizada no sudoeste da Alemanha. Embora suas definições de

8 Matemático, filósofo e astrólogo italiano. Um dos principais responsáveis pela disseminação na Itália das ideias científicas inovadoras oriundas da Universidade de Paris.

9 Questões sobre o tratado da latitude das formas.

10 Filósofo e matemático português que estudou Medicina em Paris, entre 1513 e 1518, e alcançou resultados importantes do estudo das séries infinitas.

11 Jurista, astrônomo, teólogo e filósofo do humanismo renascentista.

infinitamente grande e infinitamente pequeno fossem aparentemente insatisfatórias, ele se tornou importante por ter utilizado as noções de infinito e infinitesimal. Considerou, por exemplo, um triângulo e um círculo como polígonos com o menor e o maior números de lados possíveis, respectivamente.

No seu método para o cálculo da área do círculo, Nicholas de Cusa considerou este como sendo um polígono com um número infinito de lados que pode ser dividido, portanto, em um infinito número de triângulos. Adicionou à sua explicação uma prova arquimediana, utilizando polígonos inscritos e circunscritos e fazendo a dupla redução ao absurdo. No entanto, quando os métodos de Nicholas de Cusa foram utilizados, posteriormente, por outros matemáticos, como Johann Kepler (1571-1630), a prova arquimediana foi abandonada, sendo utilizada apenas a sua noção rudimentar do conceito de limite.

Percebe-se que a Idade Média trouxe pouca evolução à geometria grega ou à álgebra. Suas contribuições concentraram-se principalmente em especulações filosóficas sobre o infinito e o infinitesimal e no estudo inicial do movimento e da variabilidade. Essas questões, apesar de muitas vezes não estarem fundamentadas com rigor matemático suficiente, desempenharam papéis relevantes no desenvolvimento dos métodos e conceitos do Cálculo, pois levaram à associação da Geometria grega com a representação gráfica de variáveis, por meio do estudo da latitude das formas, antecedendo a Geometria Analítica.

4. O PERÍODO PRÉ-CÁLCULO

No século XVI, um dos grandes avanços matemáticos foi o desenvolvimento da Álgebra, desenvolvida pelos hindus e árabes e associada às relações comerciais medievais. No século XIII, letras já haviam sido utilizadas como símbolos para quantidades por Jordanus Nemorarius[1] (1225-1260) em seus trabalhos em Ciências e Matemática. Entretanto, o estabelecimento de símbolos como quantidades abstratas, adentrando na Álgebra, coube ao matemático francês François Viète[2] (1540-1603), que utilizou vogais para denotar quantidades desconhecidas e consoantes para identificar as constantes. Nesse sentido, deve ser enfatizada:

> [...] a introdução de inúmeros sinais para operações e relações matemáticas (em primeiro lugar para a adição, subtração, potência e igualdade) e, acima de tudo, sinais para quantidades desconhecidas e parâmetros, que Viète, em 1591, denotou por vogais A, E, I, ... e consoantes B, G, D, ... do alfabeto latino, respectivamente. A importância dessa notação, que, pela primeira vez, possibilitou colocar no papel a forma simbólica de equações algébricas e expressões contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários (uma palavra também originada de Viète), dificilmente pode ser estimada. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 51).

Esse simbolismo inovador foi fundamental para o avanço da Geometria Analítica e do Cálculo nos séculos seguintes. Os novos estudos permitiram que ideias relativas à variabilidade se inserissem no pensamento algébrico, melhorando a notação e conduzindo a métodos mais simples que aqueles aplicados geometricamente por Arquimedes.

4.1 Contribuições Iniciais

Provavelmente, as primeiras contribuições significativas para o Cálculo foram feitas no século XVI pelo engenheiro Simon Stevin[3] (1548-1620), da Bélgica. Por ter menos preocupações filosóficas e não dar tanta importância ao rigor matemático, Stevin utilizou um viés mais prático nas aplicações das ideias de Arquimedes. Assim, evitou o uso da dupla redução ao absurdo na utilização do método da exaustão, passando diretamente ao limite em seus trabalhos no campo da Hidrostática. Os procedimentos utilizados por Stevin constituíram-se em um passo importante na direção do que se entende atualmente como conceito de limite.

O matemático italiano Luca Valerio[4] (1552-1618) também tentou fazer uso do método de Arquimedes, sem a necessidade da redução ao absurdo, mas mantendo o rigor requerido pelo grego para as demonstrações. Tentou substituir o método por teoremas gerais que poderiam ser citados no lugar de todos os detalhes da prova em cada caso.

1 Importante matemático e cientista do século XIII sobre quem há pouca informação biográfica.

2 Advogado e matemático francês considerado o pai da álgebra moderna.

3 Engenheiro, físico e matemático nascido na cidade de Burges, em Flanders, onde se localiza atualmente a Bélgica.

4 Nasceu em Nápoles e foi professor da Universidade de Roma. Utilizou a obra e os métodos construídos por Arquimedes para buscar encontrar volumes e centros de gravidade de corpos sólidos.

4.2 Johan Kepler

Johan Kepler estudou para tornar-se ministro luterano, mas acabou mudando seus planos em virtude de seu interesse profundo por Matemática e Astronomia. Essa vocação levou-o a ensinar Matemática em um seminário, na Áustria, de 1594 até 1598. Em 1600, foi convidado pelo famoso astrônomo dinamarquês Tycho Brahe[5] (1546-1601) para ser seu assistente em Praga e, com a morte do último em 1601, herdou a posição de astrônomo da Corte do imperador da Bohemia, Rodolfo II, além de sua vasta coleção de dados astronômicos.

De posse das observações de Brahe, Kepler pôde complementar seu estudo sobre o movimento dos planetas em torno do sol; em 1609, formulou as duas primeiras leis do movimento planetário e, dez anos depois, a terceira. Para calcular as áreas varridas pelos planetas, na sua segunda lei[6], Kepler recorreu a uma forma rudimentar de Cálculo Integral. Segundo Boyer (1996, p. 222), "Kepler pensava na área formada de uma infinidade de pequenos triângulos com um vértice no sol e os outros dois vértices em pontos infinitamente próximos um do outro ao longo da órbita".

Kepler não utilizou o rigor clássico de Arquimedes, referente ao método da exaustão, optando por recorrer à abordagem mais sugestiva de Nicholas de Cusa. Esse também foi o procedimento adotado em seu tratado sobre volumes de barris de vinho, de 1615, *Stereometria doliorum vinorum*[7], em que calculou o volume de mais de 90 sólidos. Iniciou seu trabalho determinando a área do círculo, que foi considerado como um polígono regular com um número infinito de lados, de modo que sua área é composta por triângulos infinitesimais que têm um de seus vértices no centro da circunferência e cujas bases são os lados desse polígono. Como as alturas dos triângulos são iguais ao raio (r) do círculo e a soma das suas bases correspondem ao comprimento da circunferência (C), Kepler concluiu que a área A era dada por $A = rC/2$.

Nos seus estudos sobre os volumes de barris de vinho, Kepler também trouxe contribuições para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial. Procurando determinar as melhores proporções dos barris, foi levado a problemas de máximos e mínimos, a partir dos quais construiu tabelas de volumes variando de acordo com as dimensões dos recipientes. Analisando essas tabelas, percebeu que, à medida que o volume máximo se aproximava, a taxa de variação em relação às dimensões ficava cada vez menor.

4.3 Galileu Galilei e Bonaventura Cavalieri

Em 1635, o matemático jesuíta italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) publicou

5 Conhecido por suas observações astronômicas precisas.

6 O raio que liga um planeta ao sol varre áreas iguais em intervalos iguais (EVES, 2004).

7 Nova estereometria dos barris de vinho.

Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota[8], um trabalho que rivalizou em popularidade com *Stereometria doliorum vinorum,* de Johan Kepler. A obra do italiano alcançou tamanha notoriedade, que é possível dizer que a Análise Matemática iniciou com o lançamento desse livro.

Nesse trabalho, Cavalieri apresenta o método dos indivisíveis, que tem relação com os trabalhos de Arquimedes e que, apesar das negativas de Cavalieri, possivelmente foi inspirado no método de Kepler. Essa conexão pode ter ocorrido de forma indireta, uma vez que os dois grandes pensadores mantinham correspondência com Galileu, que foi professor de Matemática em Pisa e posteriormente em Pádua, ambas na Itália.

Galileu pretendia escrever uma obra sobre os indivisíveis, mas esta nunca chegou a ser publicada. Sua visão sobre os infinitamente pequenos só apareceu em *Dois principais sistemas*, de 1632, e, de forma mais abrangente, em *As duas novas ciências*, um tratado sobre dinâmica e resistência dos materiais, publicado três anos depois de *Geometria indivisibilibus*. No seu trabalho, Galileu utilizou, por exemplo, um gráfico para a velocidade semelhante ao utilizado por Oresme, considerando a área abaixo de uma curva velocidade *versus* tempo como a distância percorrida e fazendo alusões aos infinitesimais ao tratar dos momentos ou pequenos incrementos de distância.

Galileu também propôs a lei dos corpos em queda, algo revolucionário para a época, pois foi a primeira descrição quantitativa do movimento na ciência moderna, o que traçou a tendência para a Física e, em especial, para o campo da Mecânica. Embora as ideias fundamentais dessa lei se baseassem em relações geométricas euclidianas, Galileu inclinou-se a assumir que uma reta era composta por infinitos pontos, o que respondeu a uma pergunta enviada a Galileu por Cavalieri, em 1621, e o encorajou a persistir em seus estudos sobre os indivisíveis.

Tratando da destacada obra de Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus,* Boyer (1996, p. 226) ressalta que:

> O argumento em que se baseia o livro é essencialmente o sugerido por Oresme, Kepler e Galileu - que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou “indivisíveis” e que o volume pode ser considerado como composto de áreas que são volumes indivisíveis ou quase atômicos. Embora Cavalieri na época dificilmente pudesse tê-lo percebido, ele seguia pegadas realmente respeitáveis, pois esse é exatamente o tipo de raciocínio que Arquimedes usou em *O método,* então perdido.

A técnica de Cavalieri era baseada na decomposição de figuras em indivisíveis, argumentando que um plano é feito de linhas, assim como uma roupa é feita de fios, e que um sólido é feito de planos, da mesma forma que um livro é composto por páginas. Dessa maneira, a área de uma figura seria dada pela soma de uma infinidade de retas paralelas,

8 Um certo método para o desenvolvimento de uma nova Geometria de indivisíveis contínuos.

do mesmo modo que o volume de um sólido seria dado, conforme a Figura 1, pela soma de uma infinidade de áreas paralelas. Cavalieri afirmava que, se os correspondentes indivisíveis de duas figuras ou sólidos diferentes tivessem a mesma razão constante, então, as suas áreas ou volumes teriam essa mesma razão.

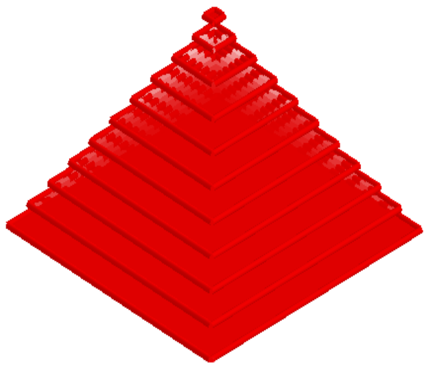

Figura 1-Método para o cálculo do volume da pirâmide.

Fonte: adaptado de Roque (2012).

O próprio Cavalieri destacou que existe uma diferença importante entre os objetos reais, como roupas ou livros, e os entes matemáticos, como planos ou sólidos, pois, uma vez que os primeiros são compostos por um número finito de fios ou páginas, os últimos são compostos por um número indefinidamente grande de indivisíveis. Contudo, em nenhuma passagem do seu livro ele expõe explicitamente sua compreensão sobre o termo *indivisível*, empregado para caracterizar os elementos infinitesimais no seu método. Cavalieri também não entrou em especulações sobre a natureza do infinito em sua obra, centrando suas demonstrações na correspondência entre indivisíveis de duas figuras ou sólidos.

Apesar de Cavalieri ter explorado um conceito que já havia sido trabalhado na Grécia Antiga, sua abordagem foi inovadora, permitindo o cálculo de áreas e volumes, o que dificilmente seria alcançado pelos métodos elementares. Em seus estudos, Cavalieri chegou a resultados que, em termos atuais, seriam expressos por:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Arquimedes conhecia a verdade dessa afirmação para n = 1 e n = 2 e talvez soubesse que era verdadeira para n = 3. Os árabes, por sua vez, tinham provado a sua veracidade para n = 4. Porém, foi Cavalieri, com base em diferentes conceitos e talvez no trabalho do seu contemporâneo francês, Pierre de Fermat (1601-1665), que generalizou essa afirmação para todos os valores inteiros e positivos de n. Mesmo não tendo sido o primeiro a chegar a essa conclusão, seu trabalho representa a primeira publicação do teorema.

A falta de uma definição do conceito de indivisíveis e a ausência de uma explicação de como a soma de elementos sem dimensão poderia levar à composição de uma área ou volume levaram ao surgimento de sérias críticas ao trabalho de Cavalieri. Elas vinham, principalmente, dos matemáticos Paul Guldin[9] (1577-1643) e André Tacquet[10] (1612-1660).

Para combater esses ataques, Cavalieri sustentou que as superfícies e os volumes poderiam ser gerados pelo fluxo de indivisíveis, o que não foi desenvolvido satisfatoriamente para o seu método geométrico. Essa evolução acabou sendo feita por seu sucessor, o também italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), e culminou, posteriormente, com o método das *fluxões*, de Isaac Newton.

4.4 Evangelista Torricelli

A evolução do método dos infinitesimais coube ao matemático italiano Evangelista Torricelli. Em 1641, quando o mentor de Torricelli, o monge beneditino Benedetto Castelli (1578-1643), visitou Galileu, levou consigo um manuscrito do jovem matemático que impressionou o anfitrião. Ambos elaboraram, então, um plano, causando a ida de Torricelli de Roma para Florença, a fim de servir como secretário de Galileu para ajudá-lo a editar e publicar seus últimos trabalhos.

Três meses depois da chegada de Torricelli, que ocorreu no outono de 1641, Galileu faleceu. Após esse episódio, o jovem matemático italiano permaneceu em Florença, como sucessor de Galileu, ocupando o cargo de grão-duque da Toscana e Professor de Matemática na Universidade de Pisa.

Os anos seguintes foram frutíferos para Torricelli e catalisaram seu estudo sobre os indivisíveis. O matemático suspeitava que os antigos possuíssem uma forma secreta para encontrar as soluções para os teoremas, antes de demonstrá-los pelo método da exaustão. O trabalho de Arquimedes em *O método* mostrou, quando encontrado, séculos depois, que aquela suspeita estava correta.

Publicado em 1644 por Torricelli, o livro *Opera Geometrica*[11], entre outros tratados fundamentados em métodos convencionais provenientes dos antigos, trouxe o ensaio *De dimensione parabolae*[12]. Ao contrário do que sugere o título, o ensaio não demonstrou o cálculo da área interna de uma parábola, mas trouxe 21 construções diferentes desse resultado, que já havia sido calculado por Arquimedes 1.800 anos antes, provando que a

9 Matemático suíço que lecionou nos colégios jesuítas de Roma, na Itália, e Graz, na Áustria.

10 Matemático e professor belga jesuíta que foi aluno de Gregory St. Vincent. Inspirava-se nas ideias de Luca Valerio e nos métodos de Arquimedes.

11 Trabalho Geométrico.

12 Da dimensão da parábola.

área de uma parábola é 4/3 da área de um triângulo com a mesma base e altura.

Em 11 dessas construções trazidas por Torricelli, fazia-se uso do método da exaustão, e nas 10 finais recorria-se à nova geometria dos indivisíveis, com o propósito de mostrar a superioridade do método inovador. Conforme destacou Torricelli, as 10 construções finais eram diretas e intuitivas, pois mostravam não apenas que os resultados eram verdadeiros, mas também o motivo pelo qual o eram. Nesse contexto, Torricelli destacava que o método dos indivisíveis era uma ferramenta admirável para demonstrar incontáveis teoremas por meio de provas curtas, diretas e positivas.

O trabalho de Torricelli sobre tangentes marca uma evolução da visão clássica e estática, caminhando em direção à introdução da noção de velocidade instantânea. Torricelli considerou que as curvas são geradas por um ponto que se move com velocidade não necessariamente constante. Ele empregou essa ideia, então, para determinar tangentes de parábolas e de outras curvas, presentes nos trabalhos de Arquimedes.

A perspectiva de representações cinemáticas de Torricelli, entretanto, pode ter sido antecipada pelos matemáticos franceses Giles Persone Roberval (1602-1675) e René Descartes (1596-1650). Essa suposição provocou uma forte reação de Roberval, que chegou a acusar o italiano de plágio. O episódio levou à criação da lenda de que, devido à sua integridade, Torricelli se abalou tanto com a controvérsia e as acusações feitas pelo matemático francês, que acabou morrendo aos 39 anos de idade.

Apesar das grandes contribuições de Torricelli para o desenvolvimento do Cálculo, não se devem atribuir a esse matemático avanços significativos em termos algébricos. Isso porque nenhuma consideração analítica foi feita por Torricelli, e não há indícios de que tivesse a pretensão de estabelecer, a partir de suas demonstrações, algoritmos gerais capazes de ser aplicados a casos semelhantes. Dessa forma, os resultados alcançados pelo italiano permaneceram no campo geométrico, mesmo que, posteriormente, fossem de fundamental importância para o Cálculo e a Análise.

4.5 Gregory Saint Vincent

O matemático belga Gregory St. Vincent (1584-1667) ampliou o trabalho de Arquimedes e Valerio, levando a ideia de divisão, utilizada no método da exaustão, até uma subdivisão infinita. Em sua obra *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni*[13], utilizou o recurso de construção de infinitos retângulos infinitamente delgados, fazendo uma referência implícita ao uso dos infinitesimais.

13 Obra geométrica sobre a quadratura do círculo e de secções cônicas.

No seu importante tratado sobre a Matemática, que chegou a ser lido por Gottfried W. Leibniz (1646-1716), anos mais tarde, Gregory St. Vincent mostrou, ainda sem a notação moderna do Cálculo, que:

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = ln(b) - ln(a)$$

Os estudos de Gregory St. Vincent levaram-no até a noção de limite de uma progressão geométrica infinita. Dessa forma, o matemático belga foi o primeiro ser humano a chegar à conclusão de que uma série infinita pode ter uma soma.

Em função de um equívoco, Gregory St. Vincent declarou que, utilizando o método dos indivisíveis, havia calculado a área do círculo. Esse erro, infelizmente, parece ter superado suas conquistas por um bom tempo, de modo que suas contribuições ao Cálculo foram reconhecidas somente décadas depois.

4.6 Giles Persone de Roberval

Giles Persone Roberval foi um importante pensador francês que ocupou a cadeira de Matemática do Collège Royal da França, de 1634 até o dia de sua morte. Esse cargo costumava ser disputado a cada três anos, com base em exames competitivos, cujas questões eram propostas pelo detentor da cátedra. Roberval, que havia desenvolvido, entre 1628 e 1634, um método dos indivisíveis semelhante ao de Cavalieri, conseguiu conservar sua posição até o fim da vida.

Apoiado no seu distinto conhecimento, Roberval construiu um método para traçar tangentes em qualquer ponto de uma curva (questão também resolvida, no mesmo período, por Fermat e Descartes) e pôde encontrar o volume do sólido de revolução gerado por essa curva. Para tanto, considerava a curva sendo gerada por um ponto em movimento.

Sem dúvida, Roberval havia se familiarizado amplamente com o trabalho de Cavalieri, tendo até mesmo defendido o italiano de algumas críticas. Entretanto, o francês não afirmava que uma superfície era composta por linhas, nem que os sólidos eram compostos por superfícies. Declarava, em sutil oposição, que a expressão “infinito número de pontos” era utilizada por ele para expressar uma infinidade de pequenas linhas que compõem a linha como um todo e que a expressão “infinito número de linhas” representava a infinidade de superfícies que compõem a superfície como um todo.

Com o desenvolvimento do seu método, indicando que os problemas relativos à área pareciam mais acessíveis que os concernentes às tangentes, Roberval provou que:

$$\int_a^b sen\,(x)\,dx = cos(b) - cos(a)$$

Roberval, porém, não publicou todas as suas descobertas, tendo-as reservado, provavelmente, para testar os candidatos que desafiavam o seu posto no Collège Royal. Por essa razão, algumas de suas conquistas foram reivindicadas, posteriormente, por outros matemáticos, como Torricelli, que acabou sendo acusado de plágio pelo francês.

É difícil determinar a amplitude da influência de Roberval sobre seus contemporâneos. Ademais, seu artigo *Traité des Indivisibles*[14] foi publicado apenas em 1693, cerca de dez anos após as primeiras publicações sobre o Cálculo, feitas por Leibniz. Contudo, é muito provável que Roberval tenha exercido grande influência sobre o cientista francês Blaise Pascal (1623-1662), uma vez que era amigo próximo de seu pai, Étienne.

4.7 Blaise Pascal

Um dos prodígios matemáticos do século XVII, o francês Blaise Pascal começou a despontar nessa ciência aos 12 anos de idade, quando, sem ter acesso à obra de Euclides, reinventou muitas das ideias trazidas em *Os Elementos*. Estudando sozinho e participando regularmente das conferências da Academia de Mersenne, o jovem publicou, aos 16 anos, a obra *Essay pour les Coniques*[15], que tratava de Geometria Projetiva e trazia uma proposição que, desde então, é conhecida como Teorema de Pascal[16].

Por ordens de seu pai, Blaise Pascal continuava estudando prioritariamente outros assuntos, alheios à Matemática, podendo dedicar a essa ciência apenas suas horas vagas. Mesmo assim, seu entusiasmo não foi refreado, e, aos 19 anos, Pascal, que auxiliava os subordinados de seu pai[17] a realizar diversos tipos de cálculos, tentou facilitar a vida de todos e construiu, entre 1641 e 1642, uma das primeiras máquinas de calcular da história. O sucesso da engenhosidade foi tão grande, que o jovem produziu e vendeu cerca de 50 unidades nos anos seguintes.

Os interesses de Pascal, no entanto, costumavam variar bastante. Assim, voltou a dar atenção à Matemática apenas em 1654, quando redigiu sua *Obra Completa sobre as Cônicas*, se dedicou à continuação do seu *Essay* e deu início, junto com Pierre de Fermat, à Teoria das Probabilidades.

Após um novo período longe da Matemática, dedicado, sobretudo, à Teologia, o francês voltou-se aos estudos com infinitesimais a partir do ano de 1658. Utilizando seu conhecido triângulo aritmético como subsídio para algumas de suas demonstrações, chegou a resultados vinculados ao Cálculo, como, por exemplo, à seguinte igualdade, dada em notação moderna por:

---

14 Tratado do indivisíveis.

15 Ensaio sobre as cônicas.

16 Os três pontos de cruzamento dos pares de lados opostos de um hexágono qualquer, inscrito em uma cônica, são colineares.

17 Nessa época, o pai de Pascal fora nomeado oficial de impostos.

$$\int_0^b x^n dx = \frac{b^{n+1}}{n+1}$$

Pascal foi tão longe ao comparar os indivisíveis da Geometria com o zero da Aritmética, que tal ideia só foi completamente concebida e compreendida por Leonhard Euler (1707-1783), décadas mais tarde. Nessa ideia, a área abaixo de uma curva era concebida como a soma de um número indefinido de retângulos infinitamente finos, diferindo da área original por uma quantidade que poderia ser tornada menor que qualquer outra quantidade dada.

Se Pascal não tivesse falecido tão jovem, ou se tivesse se dedicado com mais frequência à Matemática, ou ainda, se fosse atraído por métodos algorítmicos, provavelmente teria se antecipado a Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz na criação do Cálculo. O fato de Pascal ter subestimado o valor das visões algébrica e analítica talvez tenha sido responsável por sua falta de habilidade em definir o conceito de integral e também por sua incapacidade em reconhecer a natureza inversa entre os problemas da tangente e da quadratura.

Quando Pascal morreu, em 1662, fazia cerca de um ano que um jovem introvertido, silencioso e pensativo ingressara na Universidade de Cambridge, do outro lado do Canal da Mancha. Apoiando-se nos ombros de gigantes, o tímido rapaz inglês, nos anos seguintes, utilizaria a Matemática para mudar, para sempre, a forma como os seres humanos veem o mundo.

4.8 Pierre de Fermat

O pacato e modesto francês Pierre de Fermat, jurista por formação acadêmica e sem qualquer estudo oficial em Ciências Exatas, foi um dos protagonistas da Matemática do século XVII. Ocupando o cargo de magistrado do Parlamento da cidade de Toulouse, auferia bons rendimentos e ainda tinha tempo para dedicar-se a outras atividades, como a Matemática, que lhe era fonte de imensos prazeres. Empregando boa parte de sua energia no estudo de Matemática, Fermat configurava-se como um verdadeiro estudioso, sendo chamado, inclusive, de Príncipe dos Amadores.

Um dos poucos matemáticos com quem o introspectivo Fermat se comunicava era justamente Blaise Pascal, e com ele construiu as primeiras ideias sobre a Teoria das Probabilidades. Singh (1999, p. 60) afirma que “Fermat era um gênio retraído, que sacrificava a fama de modo a não ser distraído por picuinhas com seus críticos”.

O matemático amador francês também estudou formas de associar equações algébricas indeterminadas (casos em que o x, por exemplo, assume o papel de variável, e não de incógnita) a linhas geométricas, levando ao que se conhece atualmente como

Geometria Analítica. Essa descoberta, porém, só foi divulgada em 1679, com a publicação póstuma de *Ad Locus Planos et Solidos Isogoge*[18]. Segundo Garbi (2010, p. 197), “a abordagem de Fermat foi mais clara e mais próxima daquilo que se faz hoje, quando comparada à de Descartes”.

Armado com as novas ferramentas criadas por meio da Geometria Analítica, Fermat resolveu atacar o problema de traçar tangentes e encontrar máximos e mínimos de uma curva. Para achar o máximo ou o mínimo de uma curva polinomial $y = f(x)$, Fermat comparou o valor de $f(x)$ em um ponto específico com o valor de $f(x+E)$ em um ponto vizinho, ambos próximos de um vale ou de um ápice da curva, lugares geométricos onde, de acordo com o francês, a variação se tornava praticamente imperceptível.

Para achar os pontos de máximo ou de mínimo, Fermat igualava, então, $f(x)$ a $f(x+E)$, de forma que, quanto menor o intervalo E entre os dois pontos, mais perto chegava da verdadeira equação. Depois de dividir tudo por E, Fermat fazia $E = 0$, e os resultados davam-lhe os valores das abscissas nos pontos de máximo e de mínimo da curva. A essência desse processo está na diferenciação, e o método empregado por Fermat equivale, em notação atual, a achar o limite seguinte e, então, igualar a zero.

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

O procedimento de Fermat é muito semelhante ao utilizado no Cálculo atual, à exceção do símbolo Δx (ou h), que ocupa o lugar do E do francês. A contribuição de Fermat foi tão importante na evolução da Matemática rumo ao Cálculo, que Isaac Newton certa vez chegou a escrever que desenvolveu suas ideias inspirado no método de Fermat para estabelecer tangentes.

Entretanto, o raciocínio utilizado por Fermat era menos transparente que o usado na modernidade. A Análise contemporânea recorre ao conceito de limite para tratar de quando essa variação se aproxima de zero, enquanto o Príncipe dos Amadores parece não ter recorrido a esse conceito e, de fato, interpretou que E chegava a zero. Em todo caso, nenhum matemático, com a possível exceção de Isaac Barrow (1630-1677), chegou tão perto de antecipar a invenção do Cálculo quanto Pierre de Fermat.

4.9 René Descartes

Um dos maiores críticos do trabalho de Fermat foi o seu compatriota René Descartes, nascido na cidade de La Haye-en-Touraine[19]. Ao concluir sua formação básica na escola local La Flèche em 1614, o jovem Descartes, atendendo ao apelo de seu pai, iniciou seus estudos na área do Direito na Universidade de Poitiers. Nessa época, no entanto, sua atenção já estava voltada para outras áreas do conhecimento, como Filosofia, Física e,

18 Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos.

19 A partir de 1969, a cidade passou a ser chamada de Descartes, em homenagem ao seu cidadão mais ilustre.

principalmente, Matemática.

O pensador francês, em consonância com os ideais filosóficos vigentes na época, acreditava que o desenvolvimento técnico melhoraria a vida dos homens. Defendia que o pensamento humano deveria voltar-se apenas para o que fosse passível de ser quantificado e que as deduções lógicas deveriam ser subsidiadas por relações entre entes quantificáveis, traduzidos em equações.

Em 1628, quando morava na Holanda, Descartes deparou-se com um problema[20] que, aparentemente, ainda não havia sido resolvido. Aplicando alguns de seus novos métodos, criados nos seus estudos autônomos, resolveu a questão sem maiores dificuldades. Ao perceber a força de suas criações, resolveu escrever *La Géométrie*[21], que, publicada como um apêndice de *Le Discours de la Méthode pour Bien Conduire sa Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences*[22], foi a obra responsável, em 1637, por levar a Geometria Analítica ao conhecimento público.

Nesse trabalho, o notável pensador francês declarou que resolver problemas de Geometria tinha uma dimensão algébrica análoga, que levava à resolução de equações simbólicas. Afirmou que uma curva poderia ser representada analiticamente por meio do *locus* de um ponto, que tem suas distâncias (x e y) relativas a duas linhas retas fixas[23] definidas e relacionadas. Descartes mostrou que essa relação poderia ser representada por uma determinada equação envolvendo x e y e outros possíveis dados do problema (constantes) e, reciprocamente, que qualquer dessas equações expressava as propriedades geométricas das suas curvas. De acordo com Gleick (2004, p. 48), Descartes “abriu as portas das jaulas, libertando estranhos e novos bestiários de curvas, muito mais variadas do que as elegantes secções cônicas estudadas pelos gregos”.

A obra de Descartes ocupou papel decisivo na condução dos pensamentos matemáticos de Newton. Quando o cientista inglês leu *La Géométrie* pela primeira vez, em 1664, “o livro surgiu como uma revelação dos limites intermináveis do possível” (WHITESIDE, 2002, p. 494).

A disputa de Descartes com Fermat fez o primeiro interessar-se pelo problema das tangentes, levando-o a considerações importantes. Entretanto, os métodos de Descartes eram puramente algébricos, sem o envolvimento de qualquer ideia de limite ou infinitesimal. Em contrapartida, qualquer tentativa de interpretação geométrica de seus cálculos levaria, necessariamente, a algum desses conceitos. Se tivesse pensado em variáveis contínuas, e não somente em correspondência entre símbolos, que representavam linhas em um diagrama, talvez Descartes pudesse ter interpretado o seu método para encontrar tangentes em termos de limites, concebendo, assim, uma diferente interpretação do seu trabalho em

20 Problema de Pappus, de Alexandria.

21 A Geometria.

22 O discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências.

23 A ideia de dois eixos coordenados surgiu posteriormente.

relação ao Cálculo.

4.10 John Wallis

Na França do século XVII, apenas Fermat e Descartes fizeram uso substancial dos seus novos métodos. Já na Inglaterra, o matemático e teólogo John Wallis (1616-1073), participante das reuniões regulares que levariam à criação da Royal Society e um dos predecessores ingleses de Isaac Newton, apoiou-se na Geometria Analítica para resolver problemas relacionados à quadratura.

Em 1656, Wallis, então professor de Oxford, publicou sua obra-prima, *Aritmetica Infinitorum*[24], que, embora utilizasse as inovações de Descartes, tratava de um assunto obscuro para o francês: o cálculo da área de uma região limitada por uma curva, ou o cálculo do volume de um sólido limitado por superfícies curvas. Wallis trabalhava, então, com o que atualmente é denominado de Cálculo Integral.

Fazendo uso de ideias de Descartes e Cavalieri, Wallis transcendeu ambos ao utilizar as séries infinitas como parte de seus estudos e análises. Ao aritmetizar *Geometria Indivisibilibus* e abandonar o cenário geométrico, associando valores numéricos aos infinitos indivisíveis das figuras e usando pela primeira vez o símbolo ∞[25], o inglês chegou, de forma menos laboriosa que Cavalieri, a resultados (para todos os valores inteiros de m) como:

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

O tratamento dado por Wallis para os infinitamente pequenos foi bem mais audacioso que aquele adotado por Fermat, por exemplo. Enquanto o francês não chamou expressamente seu símbolo E de infinitesimal, Wallis afirmou que $1/\infty$ representava uma quantidade infinitamente pequena, ou *non-quanta*. Com esse recurso, encontrou diversos resultados importantes, como a fórmula geral para o cálculo da área de um triângulo. Nesse caso, Wallis supôs o polígono dividido em infinitos paralelogramos, paralelos à sua base.

Fermat, por sua vez, criticou parte do trabalho de Wallis, sugerindo falta de rigor e elegância nas suas demonstrações por indução e interpolação. Wallis replicou, argumentando que sua Matemática se fundamentava nas ideias de Cavalieri e que os questionamentos do francês estavam respondidos nos livros do italiano. Mais ainda, Wallis afirmou que seu método era uma sofisticação daquele[26] utilizado pelos antigos.

Apesar das reticências de Fermat, o jovem Newton buscou inspiração nas criações de Wallis sobre a quadratura, e a primeira descoberta importante de Newton, em 1664,

24 Aritmética do infinito.

25 Para representar o infinito

26 Método da exaustão.

sobre séries binomiais com potências fracionárias, ocorreu a partir de uma generalização do trabalho de seu compatriota. Junto com Newton, Wallis construiu, no final do século XVII, um trabalho que exaltava a matemática britânica, bem como o papel dele próprio nessa escola. Assim, Wallis acabou por participar efetiva e decisivamente de uma grande controvérsia entre Newton e Leibniz sobre o Cálculo.

4.11 Isaac Barrow

O londrino Isaac Barrow foi uma figura cultural altamente distinta no século XVII e respeitado como filósofo, teólogo e matemático. Em 1663, passou a ser o primeiro homem a ocupar a Cátedra Lucasiana de Matemática em Cambridge, posição da qual, em 1669, abdicou em favor de Isaac Newton. Seu trabalho inicial foi uma edição completa de *Os Elementos*, de Euclides, escrita para ajudar seus alunos de Matemática e, posteriormente, publicada para comercialização em latim e em inglês.

Considerado um conservador, Barrow não apreciava formalismos algébricos, o que o diferenciava diametralmente de Wallis. O professor lucasiano, em suas aulas e seus trabalhos, preferia utilizar a visão cinemática de Torricelli, em detrimento da percepção aritmética empregada por Wallis. Barrow pensava nas grandezas geométricas sendo geradas por fluxos de pontos.

Barrow aproximou-se muito de encontrar uma demonstração geométrica para o Teorema Fundamental do Cálculo. No entanto, em função de sua característica rejeição de recursos algébricos, não foi capaz de perceber o importante significado dos resultados encontrados por meio de sua análise geométrica.

A despeito da falta de apreciação pelos métodos analíticos de Descartes e Fermat e da incapacidade de aceitar a importância da aritmetização de Wallis, os resultados geométricos alcançados por Barrow significaram uma aproximação altamente considerável em relação ao Cálculo. Entre esses resultados, estão inúmeros teoremas sobre quadraturas e tangentes e, provavelmente, o reconhecimento mais lúcido, até aquele momento, sobre a relação entre esses dois tipos de problema.

Isaac Barrow pensava nitidamente em termos de problemas geométricos e infinitesimais, preterindo a ideia de funções e símbolos para variáveis. Seu método era semelhante ao usado por Fermat, sendo que, enquanto o francês utilizava unicamente a letra E, o professor de Cambridge fazia uso de duas letras, a e e (futuros Δy e Δx), conforme se percebe na Figura 2, aproximando-se ainda mais do processo de diferenciação conhecido, difundido e utilizado atualmente.

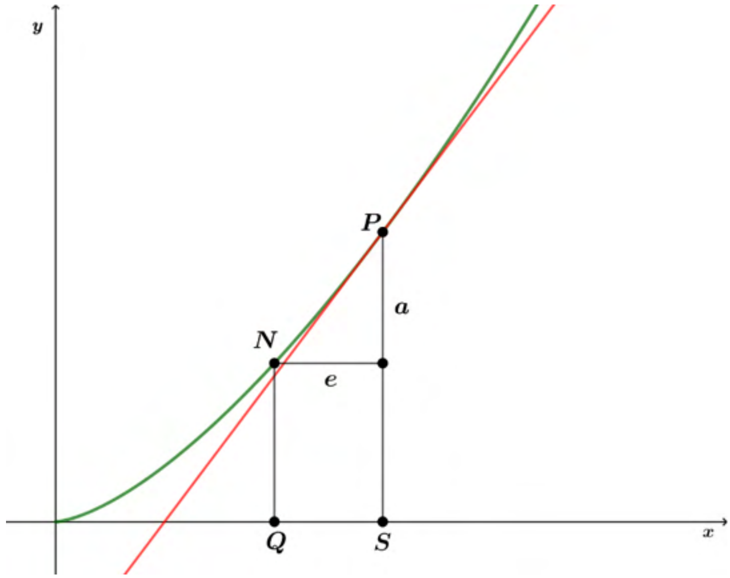

Figura 2-Método de Barrow para o problema da tangente.

Fonte: adaptado de Contador (2006).

Algumas das afirmações de Barrow assemelhavam-se às de Fermat, quando este último negligenciava, no fim dos seus cálculos, todos os termos que continham *E*, por exemplo. Nenhum dos dois, todavia, foi capaz de justificar formalmente essa ação.

Pode-se afirmar que Barrow, provavelmente, percebeu a conexão inversa entre os problemas da tangente e da quadratura, mas sua visão enfaticamente geométrica impediu-o de usar essa relação de forma eficiente. Barrow sabia, entretanto, que, naquela mesma época, o seu jovem amigo e sucessor, Isaac Newton, estava concentrado nessas mesmas importantes questões.

5. DOIS GIGANTES E UMA CONTROVÉRSIA

5.1 Isaac Newton

Isaac Newton, um jovem interiorano britânico, de Wollsthorpe, ingressou no College of the Holy and Undivided Trinity[1], na Universidade de Cambridge, na Inglaterra, em 1661, aos 18 anos de idade. Nessa época, seu interesse estava voltado, principalmente, para estudos vinculados à Química.

A partir de 1663, quando começou a entrar em contato com obras clássicas da Matemática, como *Os Elementos*, de Euclides, e *La Géométrie*, de René Descartes, e a assistir às aulas de Isaac Barrow sobre espaço, tempo e movimento, Newton voltou a atenção para incursões matemáticas. *La Géométrie* cristalizou a sua primeira visão do poder universal da variável algébrica, traduzido na potencialidade de generalizar o particular.

Com suas intensas leituras, Newton familiarizou-se com as séries infinitas, que lhe forneceram meios para encontrar soluções numéricas para o cálculo de áreas de formas geométricas diversas. No livro de John Wallis, *Arithmetica Infinitorum,* deparou-se com os passos introdutórios para a criação do Cálculo, encontrando, então, inspiração para ampliar esse trabalho e desenvolver um método mais geral. Nesse contexto,

> [...] conceber as séries infinitas e então aprender a manipulá-las era transformar o estado da Matemática. Newton parecia agora possuir uma habilidade ilimitada para generalizar, para mudar de um ou de alguns casos específicos conhecidos para o universo de todos os casos (GLEICK, 2004, p. 50).

O período no qual a produção científica de Newton alcançou o seu auge, porém, foi quando estava longe de Cambridge. Entre 1665 e 1667, a universidade fechou suas portas, em virtude de uma epidemia de peste bubônica que assolou Londres e as cidades vizinhas, chegando a matar um de cada seis londrinos. Nesse tempo, o pensador voltou para Wollsthorpe, onde sua família tinha uma fazenda, e lá escreveu manuscritos com conceitos fundamentais e inovadores para os campos da Matemática, Óptica, Mecânica e Gravitação Universal.

O primeiro ano da peste foi o ano da transformação de Newton. Solitário, acabou se tornando o maior matemático do mundo, atravessando as fronteiras do conhecimento estabelecido:

> Anteriormente, Galileu Galilei, Johannes Kepler e outros tinham erguido a ponta do tapete da natureza e visto algumas das maravilhas ocultas debaixo dele. Agora, Newton simplesmente removia o tapete do lugar. Não só revelou que o universo tem padrões secretos, as leis da natureza; além disso, forneceu ferramentas matemáticas para exprimir essas leis precisamente e deduzir suas consequências (STEWART, 2013, p. 54).

1 Colégio da Santíssima e Indivisa Trindade.

Enquanto esperava a reabertura da universidade, Newton concentrava-se em pensar sobre o funcionamento do universo e, assim, acabou fazendo uma descoberta espetacular atrás da outra. Esse período em que o cientista esteve no interior é denominado frequentemente de *anni mirabiles*, ou seja, anos miraculosos, pois resultou no que pode ser considerado o maior conjunto de conhecimentos que qualquer pessoa jamais produziu em um espaço de tempo tão reduzido. Segundo o próprio Newton afirmou posteriormente, ele estava no melhor período da sua vida para a invenção e se dedicava à Matemática e à Filosofia com uma intensidade que nunca conseguiu replicar.

Newton criou, pensando cineticamente em curvas geradas pelo movimento de um ponto (ou mais), métodos gerais para encontrar a inclinação da reta tangente a uma curva, em qualquer ponto específico, e para quadrar linhas curvas (a atual integração) que pudessem ser quadradas. Dessa forma, pensou na tangente como a reta na qual a curva se tornaria se pudesse ser analisada por um microscópio altamente poderoso e a encontrava por meio do cálculo da relação entre dois pontos separados por uma distância infinitesimal.

Ao estender sua abordagem cinemática, Newton começou a tratar as curvas como o *locus* de um ponto que se desloca em condições determinadas. Dessa ideia, veio a inspiração para propor o termo *fluxional*, incorporado à teoria para descrever, em 1666, o método das *fluxões*, atualmente conhecido como Cálculo Diferencial e Integral.

Newton desenvolveu a teoria das *fluxões* pensando no movimento como o cerne do estudo das curvas. Utilizava as suas criações conceituais, *fluente* e *fluxões*, afirmando que as *fluentes* são as quantidades que fluem (atuais variáveis), enquanto as *fluxões* são as velocidades com que essas quantidades fluem (atuais derivadas). Newton definia a derivada como a velocidade de fluência e, para representar a *fluxão* de uma *fluente* y, por exemplo, criou a notação $\dot{y}$, que, em linguagem moderna, equivale a dy/dt, com t representando o tempo.

De acordo com Stewart (2013), pode-se ilustrar esse método com o seguinte exemplo: seja uma grandeza y, que é o quadrado de outra grandeza t, ou seja, $y = t^2$. Newton introduziu, então, “uma pequena diferença em t”, denotada por o, fazendo com que a variação correspondente em y fosse:

$$(t + o)^2 - t^2 = 2to + o^2$$

Desse modo, a taxa de variação, em um intervalo muito pequeno o (menor que qualquer coisa finita, mas maior que zero), era dada por:

$$\frac{2to + o^2}{o} = 2t - o$$

Considerando que o pode ser feito cada vez menor, fluindo para zero, essa taxa vai, cada vez mais, aproximar-se de $2t$, que é a taxa de variação instantânea de y em relação a t. Sendo assim, Newton escrevia:

$$\dot{y} = 2t$$

O recurso conceitual representado pelo símbolo *o*, uma distância infinitesimal, também possibilitou que Newton conseguisse quadrar linhas curvas que pudessem ser quadradas. Apesar de o Cálculo não ser resultado do trabalho de um único indivíduo, Newton foi o primeiro homem a conceber um procedimento geral para determinar variações instantâneas e a invertê-lo para o cálculo de áreas.

Para encontrar, por exemplo, distâncias (*fluentes*) a partir das velocidades (relação *fluxional*), Newton resolvia aquilo que atualmente é denominado equação diferencial, invertendo o procedimento utilizado para encontrar a *fluxão.* O jovem inglês prontamente notou que o problema de encontrar *fluentes* a partir das *fluxões* era equivalente ao de determinar a área sob uma curva, a partir da expressão algébrica da sua função[2]. Newton descobriu e passou a utilizar em suas pesquisas o que atualmente é denominado de Teorema Fundamental do Cálculo.

Todavia, tanto o Cálculo quanto outras descobertas impressionantes feitas por Newton permaneceram desconhecidos por cerca de meio século, pois o cientista não aceitava bem as críticas, muitas vezes infundadas, à sua obra. Acredita-se que, até 1669, apenas Isaac Barrow conhecesse o trabalho matemático de Newton.

Nesse ano, porém, um dos seus artigos, intitulado *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*[3], que trata das séries infinitas e suas aplicações para cálculo da área, foi enviado por Barrow a seu amigo John Collins[4] (1625-1683), em Londres. A partir de então, Newton começou a ser percebido.

Em *De analysi*, o jovem britânico empregou a ideia de momentos de área e, assim, pôde encontrar um método geral para a quadratura de curvas. De acordo com o que afirmava Newton, se houvesse uma abscissa x e uma ordenada *y*, de forma que a área abaixo da curva fosse dada por:

$$z = \left(\frac{n}{m+n}\right) a x^{\frac{m+n}{n}}$$

Então, se o momento de variação da abscissa fosse *o*, a nova abscissa seria x + *o*, e a nova área:

$$z + oy = \left(\frac{n}{m+n}\right) a (x+o)^{\frac{m+n}{n}}$$

2 A expressão “função” ainda não havia sido criada.

3 Da análise por meio de equações tendo um número infinito de termos.

4 Um empresário que incentivava o estudo da Matemática no século XVII, servindo, muitas vezes, segundo Westfall (1995), de entreposto de informações sobre os últimos avanços dessa ciência.

Aplicando o seu teorema binomial, dividindo a expressão por *o* e descartando os termos contendo *o*, Newton encontrava:

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

Ou seja, afirmava que, se uma área fosse dada por:

$$z = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{\frac{m+n}{n}}$$

Então, a curva que origina essa área seria denotada por:

$$y = ax^{\frac{m}{n}}$$

Além disso, de forma inversa, Newton argumentava que, se a base AB de uma curva AD for perpendicular à ordenada BD, de acordo com a Figura 3, e ainda, se AB for chamado de x e BD de *y*, com a, b, c ... sendo quantidades dadas e m e n inteiros, então, se y = $ax^{m/n}$, a área de ABD será:

$$\text{Área} = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{\frac{m+n}{n}}$$

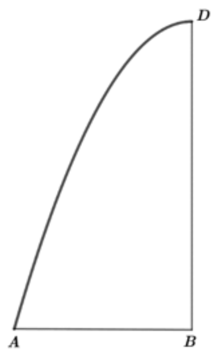

Figura 3-Exemplo elaborado por Newton em ***De analysi.***

Fonte: adaptado de Bonfim e Calábria (2017).

Mesmo tendo realizado essas descobertas incríveis, Newton recusou-se a permitir que Barrow e Collins tentassem publicar o seu trabalho. *De analysi* permaneceu inédito, então, até 1711. Houvesse o jovem gênio publicado esse artigo quando o escreveu, teria se poupado de uma grande controvérsia e – provavelmente o mais importante – teria feito o conhecimento humano avançar mais depressa.

A aversão por controvérsias, o que levou Newton a não publicar sua obra enquanto a criava, ampliou-se ainda mais após a apresentação, na Royal Society, em 1672, de um manuscrito seu sobre ótica. Nesse trabalho, afirmava que a luz é composta por partículas, que a luz branca é uma mistura heterogênea e que a Óptica é uma ciência matemática e, portanto, rigorosa e precisa. Essa foi a primeira comunicação pública de Newton.

Em face desse trabalho, no entanto, o jovem cientista, que já desfrutava do prestígio de ocupar a cátedra lucasiana de Matemática no Trinity College, acabou sendo duramente questionado por muitos dos pensadores que, até então, admirava, como, por exemplo, o inglês Robert Hooke (1635-1703). Newton desagradou-se tanto com as discussões que se seguiram, que prometeu a si mesmo jamais publicar trabalho científico algum.

O matemático, entretanto, fez uma nova tentativa, em 1675, quando enviou para a Royal Society a sua teoria corpuscular da luz. Vendo-se novamente confrontado, principalmente por Hooke, preferiu voltar-se definitivamente para os seus estudos, sem buscar editar seus trabalhos novamente[5]. Após sua curta e infeliz incursão além dos muros de Cambridge, Newton contentou-se em explorar solitariamente as margens distantes do conhecimento humano.

Embora tenha descoberto o Cálculo entre 1665 e 1666, a primeira publicação de Newton envolvendo esse domínio ocorreu apenas em 1687, no famoso *Principia mathematica philosophiae naturalis*[6]. As proposições trazidas nesse livro, versando sobre velocidade, aceleração, tangentes e curvaturas, são extremamente semelhantes às utilizadas atualmente no Cálculo.

5.2 Gottfried Wilhelm Leibniz

O pensador alemão Gottfried W. Leibniz ingressou na Universidade de Leipzig aos 14 anos, em 1661, e completou seus estudos com 20 anos de idade. Nesse período, concentrou-se, principalmente, em aprender as leis e a filosofia escolástica. Ao receber, após o término do seu mestrado em Direito, negativa da Universidade de Leipzig ao seu pedido para lá permanecer como professor, submeteu sua tese, *De casibus perplexis*[7], em outubro de 1666, à universidade de Altdorf, onde, cinco meses depois, concluiu seu doutorado.

Declinando de um convite para permanecer em um posto acadêmico em Altdorf, Leibniz passou a dedicar sua vida a servir duas importantes famílias da nobreza alemã dos séculos XVII e XVIII. O jovem advogado começou a trabalhar, em 1667, como secretário, assistente, consultor e bibliotecário do Barão Johan Christian von Boineburg (1622-1672).

Cinco anos depois, em meio a uma disputa entre franceses, holandeses e ingleses que deixou a Europa à beira de uma grande guerra, Boineburg enviou Leibniz a Paris, em

5 Além disso, ressalta-se que Isaac Barrow faleceu em maio de 1677, o que deixou Newton ainda mais desprotegido e isolado do mundo exterior a Cambridge.

6 Princípios matemáticos de filosofia natural.

7 Sobre casos difíceis (no Direito).

uma missão diplomática que buscava dar ao Barão acesso às suas terras na França e a uma pensão que lhe era devida naquele país. Foi na sua estada em Paris que o jovem gênio alemão começou a desenvolver seu conhecimento matemático.

Esse processo teve início quando Leibniz percebeu, a partir de interações com matemáticos europeus, como o holandês Christian Huygens (1629-1695), a fragilidade de suas percepções dessa ciência. Com o incentivo de Huygens, o inspirado Leibniz começou a estudar a Matemática com grande entusiasmo. Passou a ler *Arithmetica Infinitorum*, de Wallis; *Geometria*, de Cavalieri; e um importante livro de Gregory St. Vincent, que tratava a área como sendo composta pela soma de infinitos retângulos infinitamente delgados.

> Nos quatro anos e meio que viveu em Paris, ele, de um advogado com pouco preparo formal em Matemática, cresceu para tornar-se um profundo conhecedor da matéria, que não apenas compreendia os mais avançados estudos de seus contemporâneos, mas ainda os levava adiante – como, por exemplo, inventando o Cálculo (BARDI, 2008, p. 80).

Em 1673, Leibniz interrompeu sua estada na capital francesa para acompanhar Melchior Friedrich von Schönborn (1644-1717), sobrinho do Eleitor da Mangúcia e genro do então já falecido Boineburg, em outra missão política, dessa vez em Londres. Nessa passagem pela metrópole inglesa, que ocorreu cerca de um ano após a primeira apresentação pública do trabalho de Newton, o jovem cientista alemão teve acesso a um exemplar de *Lectiones Geometricae*, de Barrow, encontrou pessoalmente Collins e, após apresentar uma máquina de calcular que ele mesmo havia inventado e construído, acabou tornando-se membro da Royal Society.

Em fevereiro de 1673, faleceu o Eleitor da Mangúcia. Leibniz retornou a Paris e continuou seus estudos em Matemática, pois, conforme o próprio cientista afirmou mais tarde, até aquele momento, tinha pouco conhecimento sobre as séries infinitas, os novos métodos geométricos e as ideias de Descartes. Nesse período, em função da sua ligação com a Royal Society, recebia constantemente correspondências com relatos sobre a evolução da Matemática britânica. Isso acabaria por tornar-se, posteriormente, um dos pilares da controvérsia sobre a criação do Cálculo.

Em meio a essa incursão pela Matemática, Leibniz acabou demitido pela família Boineburg em setembro de 1674. Após sucessivas tentativas infrutíferas de permanecer em Paris, acabou aceitando o convite do Duque Johan Friedrich (1625-1679) e assumiu, no verão de 1676, uma posição de bibliotecário e consultor, em Hannover, tendo como sua principal obrigação junto ao Duque (e posterior Eleitor de Hannover) construir a história genealógica da família. No período vivido em Paris, Leibniz, que havia ido para a capital francesa como um jovem interessado principalmente nas leis e assuntos de Estado, transformou-se em um dos mais importantes matemáticos do continente europeu.

Na sua viagem de Paris a Hannover, Leibniz passou por Londres. Em sua breve estada na capital inglesa, o jovem alemão visitou novamente a Royal Society e, com o assentimento de John Collins, teve acesso a dois documentos da biblioteca da instituição: *De analysi*, de Newton, e *Historiola*, do próprio Collins, que continha um resumo da Matemática britânica da época. Todavia, Leibniz provavelmente não percebeu que as séries infinitas, sobre as quais se debruçava o método de Newton, eram, de certa forma, equivalentes ao seu método diferencial, que acabou surgindo no mesmo período.

Em 1673, Leibniz entendeu que a construção da tangente a uma curva depende da razão entre a diferença das ordenadas e das abscissas, quando essas são feitas infinitamente pequenas. Além disso, percebeu que as quadraturas estão relacionadas à soma de retângulos infinitamente finos que, juntos, formam a área.

Leibniz chegou, então, às descobertas primordiais do Cálculo em 1675. No que diz respeito ao processo de diferenciação, suas ideias eram muito similares ao método das *fluxões*, de Newton. O matemático alemão havia elaborado, também, a sua notação característica para o Cálculo, que continua a ser utilizada até os dias atuais.

Leibniz tinha construído as mesmas conclusões a que o seu colega inglês havia chegado anos antes. Depois de algumas tentativas iniciais, o matemático alemão, que sempre teve uma ótima percepção da importância das representações para o desenvolvimento do pensamento humano, definiu *dx* e *dy* como as menores possíveis diferenças em x e *y* e criou o sinal de integral com um “s” alongado, advindo da palavra soma[8]. Achar as tangentes, então, levava ao *Calculus differentialis*[9], e encontrar as áreas direcionava para o *Calculus integralis*[10].

Todas essas conclusões sobre o trabalho de Leibniz foram construídas a partir de seus manuscritos, tal como aconteceu com as invenções de Newton. A primeira publicação oficial do matemático alemão sobre o Cálculo ocorreu apenas em 1684, sob o título *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur*[11]. Nesse trabalho, Leibniz trouxe as fórmulas:

$$dxy = xdy + ydx$$

$$d(x/y) = (ydx - dy)/y^2$$

$$dx^n = nx^{n-1}$$

Dois anos depois, em 1686, Leibniz publicou um novo texto, dando ênfase ao Cálculo Integral. Mostrou que a quadratura se caracteriza como o método inverso ao utilizado

8 *Summa* em latim.

9 Cálculo diferencial.

10 Cálculo integral.

11 Um novo método para máximos e mínimos e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais.

para encontrar tangentes, focando na relação inversa entre diferenciação e integração, o que o levou ao Teorema Fundamental do Cálculo. A ideia central da abordagem trazida por Leibniz distinguia-se da de Newton, pois não se fundamentava na noção de taxa de variação (derivada ou *fluxão*), mas na conceituação de diferenciais.

Leibniz percebia a integral, por exemplo, como a soma de retângulos infinitamente pequenos, cada um com área ydx, conforme a Figura 4, de maneira que, utilizando sua criação notacional, denotava a área sob a curva $y(x)$ por:

$$\int ydx$$

Como Leibniz não estabelecia um intervalo de integração, os cálculos de integral do matemático alemão não traziam as constantes de integração, como são normalmente utilizadas na atualidade.

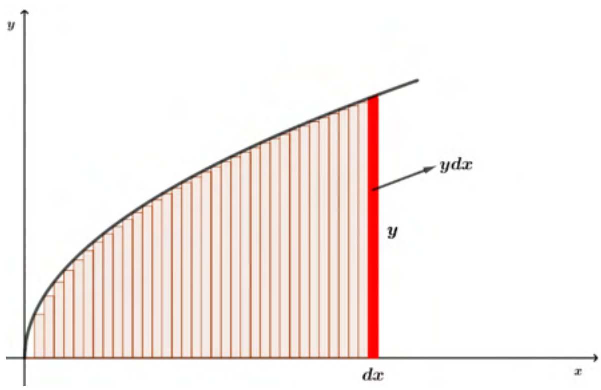

Figura 4-A ideia de Leibniz para a integral.

Fonte: adaptado de Bonfim e Calábria (2017).

Nessa época, emergiu um elemento de terminologia em função de atitudes diferentes de Newton e Leibniz em relação à definição de integral. Embora tanto um quanto o outro conhecessem os dois aspectos do conceito, o matemático inglês definiu a *fluente* como a quantidade gerada por uma *fluxão* dada, ou seja, como o inverso da *fluxão*; mantendo essa ênfase, incluiu nos seus trabalhos diversas tabelas de integrais imediatas. Leibniz, por sua vez, definiu a integral a partir da soma de um número infinito de retângulos infinitamente pequenos. Essas duas visões foram perpetuadas nas disciplinas de Cálculo, nas quais frequentemente são abordadas duas integrais: a indefinida e a definida. Essa questão pode ser percebida também quando se faz referência, em trabalhos acadêmicos, à Integral de Newton ou à Integral de Leibniz.

Em *Nova methodus*, que foi a primeira publicação sobre o Cálculo a ser divulgada em qualquer parte do planeta, Leibniz externou uma série de tesouros matemáticos, como a resolução de um problema que Descartes não havia conseguido solucionar. Entretanto, não incluiu no trabalho introdução histórica alguma sobre seus métodos. Nem sequer mencionou a comunicação que havia estabelecido com Collins e, principalmente, com Newton.

Em contrapartida, ao encaminhar *Nova methodus* para a publicação, em julho de 1684, Leibniz informou para o editor que estava de posse de certas cartas de Newton sobre o método das *fluxões*, mas que acreditava que o gênio inglês não reivindicaria essas invenções para si. Foi essa pequena suposição que levou a uma enorme controvérsia entre os dois gigantes matemáticos.

5.3 A controvérsia

O Cálculo não é, certamente, uma conquista que pode ser atribuída a um único homem, pois a sua gênese remonta às questões propostas filosoficamente na Grécia Antiga, e o seu desenvolvimento, até a construção de métodos algorítmicos, no século XVII, agregou contribuições de intelectuais de diferentes épocas. Mesmo com essa percepção, a invenção desse campo de estudos frequentemente é atribuída a Newton e (ou) a Leibniz, que organizaram tal evolução de ideias, culminando com a construção de uma sofisticação simbólica que permitiu a generalização de séculos de corporificações por meio do Teorema Fundamental do Cálculo.

No entanto, esse não foi um trabalho realizado conjuntamente pelos dois gigantes. Pelo contrário, cada um desenvolveu sua própria visão sobre o Cálculo isoladamente, em décadas diferentes, utilizando notações e abordagens distintas para problemas semelhantes.

A controvérsia reside, portanto, no fato de que, apesar de Newton ter chegado primeiro às ideias modernas sobre o Cálculo (em 1665), Leibniz foi reconhecido por muitos como o precursor desse campo, em função de suas publicações iniciais sobre o tema (em 1684 e 1686). Os argumentos trazidos nessa disputa, que levaram Newton a acusar Leibniz de copiar suas invenções, tiveram suas origens na primeira visita do distinto alemão à Royal Society, no começo de 1673.

A partir dessa incursão inicial de Leibniz à Royal Society, foi estabelecida uma troca regular de correspondências entre o cientista alemão e Collins, tendo como foco as principais evoluções matemáticas da Grã-Bretanha. Embora Newton provavelmente não soubesse da existência de Leibniz, o jovem alemão costumava receber relatos periódicos sobre as realizações matemáticas do inglês, contendo, inclusive, citações do seu trabalho em *De analysi*:

> [...] o resultado imediato foi um “Relatório Matemático”, enviado em abril de 1673, que consistia em uma revisão, elaborada por Collins, sobre o que havia de mais interessante na Matemática inglesa da época, que Leibniz, quase

> certamente, não achou relevante naquele momento, apesar de, algum tempo depois, ter dado a atenção merecida (HALL, 1975, p. 183).

Leibniz, cada vez mais impressionado com os relatos sobre os avanços de Newton, escreveu, em 1676, para Henry Oldenburg (1619-1677), secretário da Royal Society, solicitando mais informações sobre o trabalho do colega inglês com as séries infinitas. Com a insistência de Collins e Oldenburg para que Newton respondesse às cartas, o cientista inglês terminou por redigir, em junho de 1676, sua resposta inicial para Leibniz. Evitando estabelecer comunicação direta, encaminhou-a para Oldenburg, que, por sua vez, a repassou para Leibniz, e assim

> [...] teve início a troca de cartas envolvendo Leibniz, Oldenburg, Collins e, finalmente, Newton, durante os dois últimos anos que Leibniz passou em Paris. Eles se corresponderam mais ou menos continuamente, jogando uma espécie de jogo de gato e rato [...] (BARDI, 2008, p. 101).

As cartas que Newton passou a enviar para Leibniz não eram simples. Duas das mais importantes, *Epistola prior* e *Epistola posterior*[12], tinham, respectivamente, 11 e 19 páginas. Juntas, continham o resumo das descobertas matemáticas de Newton e procuravam mostrar a Leibniz que o professor de Cambridge havia chegado, há muitos anos, a uma versão das séries infinitas e a outras tantas inovações significativas. Ainda assim, com receio de que outros acessassem suas ideias precursoras, Newton não fez qualquer menção explícita ao Cálculo, mas acrescentou uma referência codificada sobre o seu estudo: “preferi ocultá-lo assim 6accdae13eff7i319n404qrr4s8t12vx”.

Essas frases secretas eram compostas por caracteres codificados e ordenados. Após serem apropriadamente traduzidos, esses símbolos resultam na seguinte sentença: “dadas em uma equação as *fluentes* de qualquer número de quantidades, encontrar as *fluxões* e vice-versa”. Contudo, é provável que Leibniz não tenha conseguido ler essas linhas.

Newton, após enviar a *Epistola posterior*, por ainda estar concentrado em sua disputa com Hooke sobre a Óptica, solicitou a Oldenburg que encerrasse o ciclo de comunicações com Leibniz, redigindo: “Espero que isso satisfaça o Sr. Leibniz, para que não seja necessário voltar a escrever sobre esse assunto. Pois, tendo outras questões em mente, ser forçado a tratar dessas coisas torna-se uma interrupção nada bem-vinda por mim”.

Não sabendo da posição de Newton sobre as suas correspondências, Leibniz escreveu sua resposta, repleta de elogios, em junho de 1677. Comunicou o cerne do seu Cálculo Diferencial, fez algumas perguntas relevantes e solicitou que a troca de ideias continuasse. Porém, em agosto de 1678, Oldenburg faleceu e, apesar de Newton certamente ter recebido o material de Leibniz, não respondeu, e a correspondência entre

12 Carta anterior e Carta posterior.

ambos terminou.

Ao publicar seus trabalhos sobre o Cálculo, seis anos mais tarde, Leibniz sabia que Newton havia desenvolvido certas técnicas matemáticas que tinham conexão com os seus métodos. Ainda que não estivesse satisfeito em seu desejo de compreender plenamente o trabalho do inglês sobre as *fluxões*, Leibniz certamente conhecia pelo menos os conceitos básicos empregados por Newton.

Durante os anos que transcorreram entre as cartas trocadas por Leibniz e Newton e as publicações do alemão sobre o Cálculo, o cientista inglês passou por uma fase de silêncio, dedicando-se a estudos sobre teologia e alquimia. Essa reclusão teve seu fim decretado por um cometa, avistado da Terra em 1682. Newton elaborou um conjunto de proposições sobre cometas e afirmou, também nesse trabalho, que o Sol e os planetas tinham gravitação para seus respectivos centros, a qual era descrita de acordo com o quadrado da distância.

Em agosto de 1684, o astrônomo Edmund Halley (1656-1742) viajou de Londres para Cambridge, a fim de fazer a Newton uma pergunta que, segundo Halley pensava, somente Newton seria capaz de responder: poderia a força que mantém os planetas em movimento em torno do Sol diminuir conforme o inverso do quadrado da distância?

Ao propor tal questão a Newton, Halley obteve prontamente a resposta e a informação de que o professor lucasiano havia chegado a essa conclusão alguns anos antes. Três meses após retornar a Londres, o astrônomo recebeu de Newton um tratado de nove páginas, denominado *De motu corporum in gyrum*[13]. Foi esse trabalho que impulsionou a redação, em pouco mais de dois anos, do manuscrito de *Philosophiae naturalis principia mathematica*[14].

A motivação que moveu Newton no fim de 1684 e que o dominou nos 30 meses seguintes transformou a sua vida e o futuro da ciência global. Em julho de 1687, editado e financiado por Halley, foi lançado o livro conhecido como *Principia*. Assim:

> [...] embora alguns possam pensar que a maior contribuição de Halley foi predizer a volta do cometa ao qual ele acabou por dar seu nome, pode-se argumentar que, de fato, o seu maior feito foi convencer Newton a publicar um dos mais importantes livros já escritos – os *Principia* (BARDI, 2008, p. 137).

Com o acolhimento e o reconhecimento do livro, as ideias de Newton transformaram-se, quase instantaneamente, na ortodoxia predominante entre os pensadores da Grã-Bretanha. Mesmo que a obra tenha causado um grande impacto também em outros países da Europa, alguns filósofos e cientistas da época, como Leibniz, por exemplo, rejeitaram conceitos complexos trazidos por Newton em *Principia*, especialmente sobre a gravitação universal. Entretanto, nenhum pôde permanecer indiferente às questões discutidas pelo

13 Do movimento dos corpos em revolução.

14 Princípios matemáticos de filosofia natural.

matemático inglês.

Newton passou a ser visto, então, sob um prisma diferente. O isolamento que lutara bravamente por manter nos 20 anos anteriores tornou-se impossível. O matemático inglês, em 1690, era uma pessoa totalmente diferente daquela da década de 1670. A publicação dos *Principia* e o reconhecimento do próprio Newton da importância da obra proveram-no com um novo e sólido sentimento de confiança.

Em 1693, Newton incluiu no volume II de *Opera Mathematica*, de John Wallis, um resumo de suas descobertas sobre o Cálculo, que se dirigia, primordialmente, a Leibniz. Desse modo, por meio de Wallis, o professor de Cambridge fez referências específicas ao seu texto de *Epistola posterior*, inclusive traduzindo as mensagens codificadas da carta que havia sido enviada, mais de 15 anos antes, ao matemático alemão. Nesse trabalho, pela primeira vez, foi divulgada publicamente a informação de que Newton havia criado métodos idênticos ao Cálculo de Leibniz, mas que o precediam.

Ainda que não tenha se manifestado explicitamente sobre o episódio, Leibniz publicou, em 1695, uma resenha anônima da obra inglesa, ressaltando que o trabalho de Newton não passava de um mero louvor à distinção matemática do alemão. Em 1696, um dos seguidores de Leibniz, Jean Bernoulli (1667-1748), propôs um problema, endereçado aos mais destacados matemáticos da época, com o objetivo principal de testar o método e a capacidade de Newton.

O matemático inglês, que nessa época já morava em Londres e ocupava o posto de Superintendente da Casa da Moeda da Inglaterra, recebeu o desafio em 29 de janeiro de 1697. Newton encaminhou, no dia 30 de janeiro, a resposta correta do problema à Royal Society. Além disso, enviou uma carta anônima para Bernoulli, que, compreendendo a sofisticação da capacidade inventiva de Newton, afirmou que reconheceu a autoria do texto “como se reconhece o leão por sua pata” (WESTAFALL, 1995, p. 233).

A chama da disputa arrefeceu por alguns anos, mas ainda não havia se apagado. Tanto é que, em 1699, o matemático suíço Nicolas Fatio de Duiller (1664-1753), um antigo aprendiz de Newton, deu início a um novo capítulo da controvérsia, reacendendo-a ao escrever um artigo no qual afirmava que Newton havia sido o primeiro – por uma diferença de muitos anos – a descobrir o Cálculo.

Leibniz respondeu a Fatio com um artigo publicado na revista alemã *Acta Eruditorum*[15], insinuando que o suíço clamava por atenção e, ainda assim, não havia angariado nem mesmo o apoio de Newton. Como era de seu costume, o matemático alemão também fez veicular uma crítica anônima ao seu próprio artigo, concedendo-lhe diversos elogios. Porém, negando a correspondência prévia com Newton, Leibniz caminhava em direção a uma mentira ao afirmar que, quando da publicação original do seu método, em 1684, só

15 Ata Erudita foi um periódico científico fundado por Leibniz que teve publicações mensais entre 1682 e 1782.

estava ciente de que o inglês havia construído um método de tangentes.

Sem o amparo de Newton, contudo, Fatio foi vencido facilmente por Leibniz, até mesmo no âmbito da Royal Society. John Wallis, por exemplo, incomodado com as acusações do suíço, garantiu ao alemão que sua reputação permanecia intocada em Londres.

Em 1704, um Newton revigorado com sua eleição para presidente da Royal Society colocou fim a um longo silêncio sobre o Cálculo. Junto ao seu livro *Opticks or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light*[16], publicou um apêndice, denominado "Sobre a quadratura das curvas". Em resposta, Leibniz, em uma resenha anônima sobre o apêndice, insinuava sutilmente que Newton havia tomado de Leibniz o Cálculo, passando-se alguns anos até que o cientista inglês descobrisse esse texto.

Em 1709, o matemático escocês John Keill (1671-1721) publicou um artigo ressaltando que os seus resultados, obtidos por integração, vinham diretamente do método das *fluxões*. Keill fez questão de frisar que, sem dúvida alguma, esse método havia sido descoberto por Isaac Newton, apesar de também ter sido divulgado por Leibniz, que, segundo o escocês, apenas mudou o nome e a representação simbólica.

Leibniz leu o texto de Keill somente em 1711 e, ultrajado com as insinuações do escocês, enviou uma carta para a Royal Society, exigindo uma retratação. Nessa época, entretanto, Newton, além de ser o presidente da Royal Society, posição que ocupava desde 1703, era também um Cavaleiro da Rainha. Dado esse contexto, "quando Leibniz fez seu apelo à Royal Society, estava, na realidade, fazendo seu apelo ao próprio Newton" (BARDI, 2008, p. 210).

Na reunião da Royal Society de 22 de março de 1711, na qual a carta de Leibniz foi lida, Newton expôs, finalmente, sua versão sobre a criação do Cálculo. Como resultado, a sociedade acabou solicitando a Keill que redigisse outro documento endossando os direitos de Newton. O novo texto foi enviado para Leibniz em maio do mesmo ano.

A resposta de Leibniz chegou à Royal Society em janeiro de 1712. Nela, o alemão mantinha sua reivindicação pela autoria do Cálculo, argumentando que seu trabalho era tão bom quanto o de Newton. Nessa conjuntura atribulada de argumentos conflitantes, a sociedade estabeleceu uma comissão, com 11 membros, para averiguar o assunto.

Seis semanas depois de ser constituída, a comissão entregou seu relatório final. Após detalhar as alegações de Newton, o documento concluía que o matemático inglês deveria ser reconhecido como o primeiro inventor do Cálculo e que Keill, ao corroborar tal fato, não havia sido, de forma alguma, ofensivo com Leibniz. Este último, por sua vez, respondeu à decisão da comissão com a publicação anônima de um artigo intitulado *Charta Volans*[17], em julho de 1713. No documento, Leibniz afirmou que Newton não veiculou nada

16 Óptica ou um Tratado sobre Reflexões, Refrações, Inflexões e Cores da Luz.

17 Carta voadora.

antes dele, de forma que o britânico havia assumido para si a honra de outrem, pois queria roubar da Europa continental o crédito pela invenção do Cálculo.

Nesses termos, e angariando apoiadores de um lado e de outro, as discussões prosseguiram. Na época, Newton atingia o ápice de sua fama e notoriedade, contando com um grande e crescente grupo de admiradores e discípulos. Em contrapartida, Leibniz sofria com a sua saúde e o seu isolamento, ocupando o posto de arquivista do Eleitor de Hannover (futuro Rei da Inglaterra). Até mesmo o seu maior apoiador, Jean Bernoulli, recusava-se a atacar Newton de frente. Nesse infeliz contexto, Leibniz faleceu, em 1716, e seu funeral foi assistido por apenas uma pessoa, um único criado que permaneceu com ele, até o final, na distante Corte de Hannover.

Newton faleceu apenas em março de 1727 e foi enterrado com grande pompa na Abadia de Westminster, entre reis, nobres e grandes pensadores britânicos. No local, foi erguido um monumento com querubins segurando referências às descobertas de Newton, uma figura feminina, que representa a Astronomia, um globo terrestre e o próprio matemático, sentado em sua poltrona.

6. DÚVIDAS AINDA PAIRAM NO AR

Mesmo após as descobertas de Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz, que levaram ao avanço do Cálculo e ao estabelecimento do seu teorema fundamental, algumas dúvidas ainda pairavam no ar. Apesar de reconhecerem o poder da diferenciação e da integração, alguns pensadores, como o engenheiro inglês Benjamin Robins (1707-1751) e o filósofo irlandês George Berkeley (1685-1753), levantaram questões acerca da fundamentação lógica dessa área de estudos. Muitas dessas dúvidas, que atormentaram os matemáticos durante as décadas seguintes, só foram findadas quando o francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857) trouxe sua aplicação do conceito de limite.

Em *The Analyst, or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*[1], obra publicada em 1734, Berkeley afirmou que o método das *fluxões* era a chave que permitia aos matemáticos modernos a revelação dos segredos da geometria e, por conseguinte, da natureza. No mesmo texto, porém, argumentou que, quanto mais o ser humano analisava e perseguia as ideias de Newton, mais ficava perdido e perplexo em devaneios, pois os objetos, a princípio fugazes e muito pequenos, às vezes acabavam simplesmente desaparecendo.

Colocando nuvens também sobre o pensamento de Leibniz, o filósofo irlandês afirmou que conceber uma quantidade que é infinitamente menor que qualquer coisa sensível e, ainda, manipulá-la algebricamente era uma dificuldade infinita para qualquer pessoa. Berkeley considerava aqueles que assentiam com as ideias de Newton e Leibniz culpados por usarem métodos que, com certeza, não entendiam completamente.

Berkeley também argumentava que o conceito de velocidade dependia de um determinado espaço percorrido, em certo período de tempo, e que essa concepção tornava impossível aceitar a ideia de velocidade instantânea, proposta por Newton. Ainda que os argumentos de Berkeley tenham sido válidos, mostrando que esse conceito inovador não tinha correspondente físico, não havia razão para tal não ser admitido como uma abstração matemática útil, pois se pode entender que a Matemática, em sua forma mais sofisticada, tem critérios de verdade diferentes, mais relacionados com a consistência lógica do que com a plausibilidade da intuição humana.

Buscando dar uma base geométrica sólida para o Cálculo e refutar os argumentos de Berkeley, o matemático escocês Colin Maclaurin (1698-1746) escreveu o trabalho *Treatise of Fluxions*[2], em 1742, com o rigor dos gregos antigos. Entretanto, o método geométrico era menos sugestivo que aqueles que estavam sendo empregados na construção da Análise na Europa continental, e foi provavelmente por essa razão que a Grã-Bretanha não se destacou na Matemática do século XVIII, tempo no qual os métodos analíticos

1 O Analista, ou um Discurso endereçado a um matemático infiel. Nessa expressão, Berkeley referia-se a Halley como o “matemático infiel”.

2 Tratado sobre Fluxões.

transcenderam as percepções geométricas.

Com essa conjuntura de reticências emergentes, criou-se na Inglaterra a percepção de uma possível falta de clareza na notação e nos argumentos de Newton, o que levou a uma confusão sobre a interpretação do seu método. Na Europa continental, por sua vez, o pensamento de Leibniz ganhava popularidade mais rapidamente. O matemático alemão havia estabelecido uma extensa rede de correspondências com muitos colegas, o que fomentou o surgimento de um conjunto considerável de admiradores do seu trabalho. Catalisado principalmente pelo entusiasmo dos irmãos Bernoulli, discípulos diretos de Leibniz, o Cálculo evoluiu mais depressa na Europa continental do que na Grã-Bretanha.

7. A BUSCA POR RESPOSTAS

7.1 Os irmãos Bernoulli

Fugindo dos Países Baixos em função das perseguições espanholas, a família Bernoulli estabeleceu-se na Basileia em 1583. Um dos membros da família, Nicolau Bernoulli (1623-1708), que se dedicou principalmente ao comércio de especiarias, acabou por tornar-se vereador da cidade. Foi Nicolau quem fundou, mesmo sem ter consciência disso, uma notável linhagem de expoentes das Ciências Exatas, principalmente da Matemática.

Jacques[1] Bernoulli (1654-1705), quinto filho de Nicolau, foi o primeiro matemático profissional da família. Apesar de ter morado a vida toda na Basileia, Jacques viajou muito e pôde encontrar grandes cientistas da Europa da sua época, tornando-se amigo de alguns deles, como Leibniz, por exemplo.

O grande interesse de Jacques Bernoulli pelo Cálculo, que havia começado com as obras de Wallis e Barrow e que foi catalisado por sua relação de amizade com Leibniz, permitiu-lhe dominar as técnicas e os novos métodos desse campo. Daí ter sugerido ao alemão, em 1680, o emprego da palavra *integral* para o problema da quadratura e, em seus próprios trabalhos com séries infinitas, demonstrou, por exemplo, que a série harmônica diverge[2].

Além disso, Jacques Bernoulli estudou as coordenadas polares para construir, entre outros, a espiral de Arquimedes, publicando dois artigos sobre o assunto, em 1691 e 1694. Todavia, Newton já utilizava esse importante recurso desde 1671 para, assim como Jacques Bernoulli, aplicar o sistema de coordenadas ao Cálculo.

Jean Bernoulli[3], décimo filho de Nicolau, em virtude de seu enorme talento, mas também do prestígio de sua família, cresceu rapidamente como matemático e acabou por tornar-se o maior rival de seu próprio irmão, Jacques. Foi por intermédio deste que Jean Bernoulli construiu sua amizade com Leibniz, com quem se uniu para difundir o Cálculo e para lutar fervorosamente contra Newton. Quando esteve em Paris, Jean Bernoulli conheceu o Marquês Guillaume François Antoine l'Hôpital (1661-1704), para quem ensinou a nova matemática de Leibniz.

Em troca de um salário regular, Jean Bernoulli comprometeu-se a enviar ao Marquês todas as suas descobertas matemáticas, para que este último as utilizasse como melhor entendesse. Desse acordo, surgiu o primeiro livro-texto sobre o Cálculo, publicado por l'Hôpital em 1696 e intitulado *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*[4]. Esse trabalho é lembrado até os dias atuais devido a uma descoberta de Bernoulli

---

1 James em inglês ou Jakob em alemão.

2 Apesar de Oresme ter feito o mesmo anteriormente.

3 John em inglês e Johann em alemão.

4 Análise dos infinitamente pequenos para a compreensão das curvas.

conhecida como regra de l'Hôpital para formas indeterminadas. No livro, essa regra é definida apenas verbalmente, sem indícios da notação contemporânea relativa às funções.

Os irmãos Bernoulli tinham perspectivas diferentes em relação ao Cálculo. Enquanto Jean demonstrava uma atitude positiva frente aos infinitesimais, Jacques era mais cauteloso no seu uso, argumentando que a ideia de infinito ainda não era suficientemente convincente. Jacques afirmava que o infinitamente pequeno não deveria ser pensado como uma quantidade específica, mas como um fluxo perpétuo em direção ao nada. Tal visão levava à percepção dos diferenciais como variáveis, e esse raciocínio direcionava o Cálculo para o método dos limites, que Jacques não conseguia expressar claramente, pois o conceito de função ainda não havia sido propriamente construído.

7.2 Leonhard Euler

Ministro religioso na Basiléia, o pai de Leonhard Euler tinha conhecimentos de Matemática, tendo sido aluno de Jacques Bernoulli. Apesar disso, foi a contragosto que viu seu filho adquirir entusiasmo pelas Ciências Exatas. De qualquer forma, o suíço Leonhard Euler recebeu uma formação distinta e eclética, estudando Matemática com Jean Bernoulli e ampliando seus interesses até a Medicina, a Astronomia, a Física e os idiomas orientais. Diz-se que Euler:

> [...] foi um furacão que varreu o território da Matemática durante a maior parte do século XVIII e que, nas quase seis décadas de sua vida matematicamente produtiva, dominou o cenário mundial das Ciências Exatas, sem que qualquer outra das grandes figuras da época pudesse disputar-lhe o cetro. Euler é, sem dúvida e de longe, o matemático que mais obras produziu em todos os tempos, cobrindo todas as áreas conhecidas da Matemática e criando outras que não haviam sido sequer vislumbradas por seus antecessores (GARBI, 2010, p. 242).

Embora o Marquês l'Hôpital tenha sido o responsável pela publicação do primeiro livro-texto sobre o Cálculo, foram os dois volumes de *Introductio in analysin infinitorum*[5], publicados por Euler em 1748, quando já fazia parte da Corte de Frederico, o Grande (1712-1786), em Berlim, que forneceram uma nova visão sobre a Matemática. Nessa obra, Euler abordou o conceito de função e ainda fez avançar os processos infinitos, estudando diversos tipos de séries.

Antes de Euler, porém, Jean Bernoulli utilizou a palavra *função*, pela primeira vez, em 1698, em um artigo dedicado à solução de um problema proposto por Jacques. No final do século XVIII, Jean já relacionava a concepção de função com quantidades que eram constituídas a partir de quantidades indeterminadas e outras constantes e, em correspondências trocadas com Leibniz, acabou sofisticando essas ideias, com a construção dos conceitos de variável e constante.

A primeira definição direta do conceito de função foi proposta, então, por Jean

5 Introdução à Análise Infinita.

Bernoulli, em 1718, à Academia de Ciências de Paris. Nesse trabalho, trouxe a letra grega φ para representar uma função, escrevendo-a, ainda sem o auxílio dos parênteses, simplesmente como φx. Tanto os parênteses quanto a letra f foram contribuições posteriores, trazidas por Euler.

Foi na obra de Euler, *Introductio*, que o conceito de função passou a ocupar um papel central na Matemática. O Cálculo passou a ser visto pelo suíço como um estudo das funções, o que lhe permitiu aritmetizar ideias geométricas e distanciar a Análise Infinitesimal das concepções relacionadas à Geometria.

A partir da publicação de Euler de 1748, a ideia de função tornou-se o cerne da Análise Matemática. No começo de *Introductio*, o matemático suíço propõe a sua definição: "uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta, de alguma forma, por essa quantidade variável e por números, ou quantidades constantes".

Euler abordava nos seus estudos, portanto, as funções analíticas e as transcendentes[6], que, segundo pensava, podiam ser mais bem compreendidas a partir das suas expansões em séries infinitas. Destaca-se que

> [...] o objetivo de Euler não era reduzir toda a matemática à álgebra das séries de potências, mas estender o máximo possível a análise, usando a ferramenta algébrica. Ele pretendia unificar a matemática com base na álgebra, que não era encarada somente como uma linguagem para representar objetos matemáticos. Para ele, a álgebra permitia uma definição interna desses objetos. As quantidades podiam ser tidas como abstratas e não demandavam considerações sobre a sua natureza específica. O que importava eram suas relações operacionais com outras quantidades similares, dadas por funções (ROQUE, 2012, p. 375).

Euler começou a utilizar, por exemplo, a representação analítica para funções trigonométricas, fazendo com que o seno ou o cosseno não fossem mais percebidos estritamente como segmentos de reta, mas também como razões. O matemático suíço ainda provou, estudando as séries infinitas, que funções trigonométricas e exponenciais podem ser relacionadas[7]. Para tanto, Euler utilizou-se das séries trigonométricas para cos (θ) e sen (θ), e da série que define e^x:

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

$$sen(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

6 Provavelmente, Euler referia-se às funções algébricas e às funções transcendentes elementares.

7 A letra i, para $\sqrt{-1}$, entretanto, foi introduzida por Euler apenas em 1777, em um manuscrito que acabou sendo publicado, postumamente, em 1794.

Trabalhando com essas três séries, Euler obteve a sua famosa relação entre funções trigonométricas e exponenciais, muito utilizada atualmente no Cálculo com variáveis complexas[8]. Essa relação foi traduzida[9] pelo matemático suíço com a seguinte equação:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)$$

Foi nesse trabalho de Euler que o símbolo *e* foi eternizado como o representante do número irracional 2,71828... base do logaritmo natural. Mesmo que outros matemáticos tenham utilizado anteriormente diferentes símbolos para esse mesmo número, foi a representação de Euler que resistiu ao tempo e continua sendo usada até os dias atuais. Essa notação advém do fato de Euler ter utilizado a forma geral $a^y = x$ para interpretar, pela primeira vez na história, os logaritmos a partir de expoentes e, então, ter denominado a letra a como a base do seu sistema. Nesse sentido, como a vogal seguinte disponível era *e*, foi essa letra que acabou sendo escolhida pelo suíço para representar a base do logaritmo natural.

Tomando a famosa igualdade anterior e fazendo θ ser igual a π (outro símbolo atribuído a Euler), surge a equação que engloba as três notações pelas quais o matemático é popularmente mais reconhecido. Essa equação é, inclusive, considerada a mais bela entre todas as fórmulas, por unir os cinco números mais importantes de toda a Matemática.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Em *Introductio*, Euler também trouxe suas exposições sobre coordenadas polares, de forma que classes completas de curvas, algébricas e transcendentes, foram consideradas. Ademais, nessa obra, o matemático expôs equações trigonométricas para a transformação de coordenadas polares em coordenadas cartesianas. Em face do sucesso e da amplitude desse trabalho, o sistema de coordenadas polares é, usualmente, atribuído a esse prolífico matemático.

Já em *Institutiones Calculi Differentialis*[10], obra publicada em 1755, Euler utilizou suas expansões para derivar funções elementares a partir da ideia de diferenciais, proposta por Leibniz. O matemático suíço simplesmente desconsiderava, no seu processo, diferenciais de ordem mais alta, tais como $(dx)^2$, $(dx)^3$. Desse modo, para $f(x) = e^x$, por exemplo, Euler utilizava a série que define e^x e procedia conforme ilustrado a seguir:

$$d(e^x) = e^{x+dx} - e^x$$

$$d(e^x) = e^x \left[1 - 1 + dx + \frac{(dx)^2}{2!} + \frac{(dx)^3}{3!} + \cdots\right]$$

---

8 Em cursos de Engenharia Elétrica, principalmente.

9 Dessa equação, deduzem-se também as seguintes igualdades: $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ e $sen(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

10 Fundamentos de Cálculo Diferencial.

$$d(e^x) = e^x dx$$

Além disso, em *Institutiones,* Euler traz uma nova definição de função, mais universal e abstrata. Essa ideia originou-se da ampla controvérsia sobre as cordas vibrantes[11], que tornou a definição inicial de Euler obsoleta. No prefácio do seu livro, o matemático suíço escreveu:

> Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que, se as outras mudam, essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade dada pode ser determinada por outras. Correspondentemente, se ***x*** designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de ***x***, de qualquer maneira, ou que são determinadas por ***x***, são chamadas de funções de ***x*** (apud ROQUE, 2012, p. 378).

Com suas ideias inovadoras, Euler transcendeu seus predecessores, que limitavam o Cálculo às fronteiras da Geometria. O suíço construiu uma teoria formal a partir de sua definição de função. Não havia mais a necessidade de conversões constantes para diagramas ou de traduções para concepções geométricas.

7.3 Jean le Rond d'Alembert

O francês Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), assim como Euler, angariou uma ampla educação formal, estudando Direito, Medicina e Matemática. Também como o suíço, d'Alembert envolveu-se na controvérsia sobre as cordas vibrantes e, principalmente, no desenvolvimento do Cálculo, sendo um dos primeiros matemáticos a estudar equações diferenciais parciais.

Considerando discutíveis algumas atitudes matemáticas de Euler, com quem se correspondia regularmente, d'Alembert não consentia a ideia de que os diferenciais pudessem ser assumidos como representações simbólicas para quantidades que são zero, mas que, ao mesmo tempo, são qualitativamente diferentes de zero. O francês criou, então, uma nova perspectiva para o Cálculo, focando na ideia de limite.

Foi d'Alembert quem trouxe o primeiro argumento incisivo para resolver as dúvidas levantadas por Berkeley. Definiu a derivada como um limite de quocientes de incrementos, seguindo a ideia trazida, mas não demonstrada, por Newton. No item denominado "Diferencial", presente no quarto volume de *Encyclopédie* ou *Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*[12], d'Alembert, referindo-se ao gênio inglês, escreveu:

> Ele nunca considerou o Cálculo Diferencial como o estudo de quantidades infinitamente pequenas, mas como o método das primeiras e últimas razões,

11 Célebre problema da área da Física-Matemática, que tratava das vibrações infinitamente pequenas, em cordas homogêneas, finitas e com suas extremidades fixas.

12 Enciclopédia ou Dicionário Explicativo das Ciências, das Artes e dos Ofícios.

> que, seja dito, constitui-se em um método para achar limites de razões. Assim, esse ilustre autor nunca realizou a diferenciação usando quantidades, mas usando equações, pois, de fato, toda equação envolve a relação entre duas variáveis e a diferenciação de equações consiste, meramente, em encontrar o limite da razão de diferenças finitas dessas duas variáveis contidas na equação (D'ALEMBERT, 2012, p. 985).

O francês apresentou, na descrição trazida no verbete, uma percepção do conceito de derivada que, atualmente, pode ser expressa pela seguinte igualdade:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Jean d'Alembert discordava, então, de Leibniz e Euler e afirmava que uma quantidade deve ser alguma coisa ou nada, de modo que, se ainda é alguma coisa, não desapareceu e, se é nada, já não existe. Argumentava que era um absurdo supor a existência de um estado intermediário entre esses dois. Dessa forma, d'Alembert rejeitava a ideia de que os diferenciais eram grandezas infinitamente pequenas e os definia como uma notação que, por fim, se referia aos limites.

Vendo a teoria dos limites como a verdadeira metafísica do Cálculo Diferencial, d'Alembert definiu, no verbete "limite" de *Encyclopédie*, que uma quantidade é dita o limite de outra quando a segunda quantidade pode aproximar-se da primeira mais do que qualquer quantidade dada, por menor que essa seja. O francês ainda afirmou que, apesar de a quantidade aproximadamente chegar cada vez mais perto do seu limite, essa não pode coincidir com ele ou ultrapassá-lo.

Mesmo que d'Alembert não tenha construído uma descrição formal do conceito de limite com a precisão que seria agregada no século XIX, contribuiu significativamente para a evolução do estudo do Cálculo, identificando a derivada como um limite. Entretanto, as ideias de d'Alembert não surtiram efeito imediato em seus contemporâneos, de maneira que os livros publicados na Europa continental, naquela época, continuaram priorizando a explanação de Leibniz.

7.4 Joseph Louis Lagrange

Italiano, de Turim, Lagrange (1736-1813) foi considerado o segundo maior matemático do século XVIII, atrás apenas de Leonhard Euler, com quem costumava trocar correspondência. Lagrange também construiu uma amizade duradoura com d'Alembert. Contando com o apoio e a influência desses dois expoentes da época, Lagrange chegou, em 1766, ao posto de Matemático Oficial da Prússia, cargo que ocupou até 1787, quando foi para a França, onde lecionou Matemática nas escolas Normale e Polytechnique.

Para os discentes da École Polytechnique, Lagrange ministrou cursos de Análise Matemática e redigiu material de apoio para suas aulas, o qual, desde então, é considerado um texto clássico sobre o Cálculo. Os resultados construídos foram publicados em 1797 sob o título de *Théorie des Fonctions Analytiques*[13].

Esse trabalho, que originou a expressão *derivada* e a notação *ƒ`'(x)* para designar a derivada de *ƒ(x)*, ambas utilizadas até os dias atuais, visava, sobretudo, tornar o Cálculo logicamente mais satisfatório. Contudo, “a tentativa de Lagrange de expugnar do Cálculo todos os traços de infinitesimais e o conceito de limite fracassaram, inevitavelmente” (EDWARDS, 1979, p. 297).

Assim como Newton e Leibniz, d’Alembert parece não ter compreendido o vínculo da noção de função com a diferenciação, tendo idealizado essa operação visualizando simplesmente dois lados de uma igualdade que possuíam o mesmo limite. Foi a partir da evolução do método de Lagrange, que envolvia predominantemente as séries de Taylor, que surgiu a concepção de função derivada, o que contribuiu efetivamente para a construção da definição em voga atualmente.

O método de Lagrange, como outras criações matemáticas da época, indicava, assim como ocorreu no caso da controvérsia britânica protagonizada por Berkeley, uma insatisfação com as ideias relacionadas a limites, *fluxões* e infinitesimais. No entanto, a expansão em séries de Taylor era possível somente para funções menos sofisticadas; consequentemente, a abordagem tinha uma aplicação limitada. Nesse sentido, apesar de não conseguir alcançar seu intento, Lagrange influenciou o início da indistinguível teoria das funções de variável real.

13 Teoria das funções analíticas.

8. A FORMALIZAÇÃO DO CÁLCULO

8.1 Bernard Bolzano

Uma nova concepção do Cálculo iniciou-se, por assim dizer, com a divulgação do primeiro trabalho sobre Análise, construído por Bernard Bolzano (1781-1848), proveniente do Reino da Bohemia, onde atualmente se encontra a República Tcheca. O então professor da Universidade de Praga publicou, em 1817, a obra *Rein Analytischer Beweis des Lehrsatzes dass Zwischem je Zwei Werthen, die Ein Entgegengesetztes Resultat Gewähren, Wnigstens Eine Reele Wurzel der Gleichung Liege*[1]. Bolzano propôs-se a construir, nesse trabalho, uma prova totalmente analítica para o teorema do valor intermediário para funções contínuas.

Essa abordagem indicou o início do período do rigor formal em praticamente todas as áreas da Matemática. Com relação ao Cálculo, tal postura levou ao estabelecimento de análises lógicas mais profundas do conceito de limite e acabou por marcar o fim de um tempo de indecisão, desencadeado pelo método das *fluxões*, de Newton, e pelas ideias de Leibniz sobre diferenciais.

Pensando em evitar questões que estavam direcionando discussões matemáticas para campos filosóficos, Bolzano foi um dos pioneiros da jornada para trazer mais rigor aos fundamentos do Cálculo. Assim como Lagrange havia entendido que a introdução de ideias sobre o tempo e o movimento não era necessária, Bolzano nem sequer buscou fazer uso de considerações sobre a intuição espacial humana.

Entendendo que concepções geométricas levavam a ideias equivocadas sobre continuidade, Bolzano propôs uma definição baseada no conceito de limite. Sendo assim, afirmou que uma função $f(x)$ é contínua, em um determinado intervalo, se, para qualquer x desse intervalo, a diferença $f(x+\omega) - f(x)$ pode ser feita menor do que qualquer quantidade, fazendo ω ser tão pequeno quanto se queira. Ou seja, Bolzano definiu que $f(x)$ é contínua em um intervalo se, para todo x desse intervalo:

$$\lim_{\omega \to 0} f(x+\omega) = f(x)$$

Sobre a questão da notação dy/dx , que Euler havia afirmado ser um quociente entre zeros, Bolzano argumentou tratar-se de um símbolo para designar a função derivada. Destacou que a notação não deveria ser entendida como uma razão entre dy e dx, nem como um quociente de zero por zero.

O trabalho de Bolzano não foi amplamente divulgado na sua época, de forma que sua influência imediata continua incerta. Entretanto, houve um matemático que desenvolveu, no mesmo período, ideias muito semelhantes às de Bolzano e que acabou se tornando, em virtude da amplitude alcançada por seu trabalho, a figura conhecida por estabelecer as

1 Prova puramente analítica do teorema que afirma que entre dois valores de sinais opostos existe pelo menos uma raiz real da equação.

novas bases para o Cálculo. Esse proeminente pensador atendia pelo nome de Augustin Louis Cauchy.

8.2 Augustin Louis Cauchy

Nascido em Paris, Cauchy foi aluno da École Polytechnique, onde posteriormente ocupou o cargo de professor de Mecânica. Contribuiu para diversas áreas da Matemática, estudando, entre outros assuntos, equações diferenciais, convergência de séries infinitas e probabilidade. É lembrado também por sua dedicação intensa à causa do rigor matemático, que, no que diz respeito ao Cálculo, culminou com o desenvolvimento da Análise Matemática. Cauchy argumentava que,

> [...] ao apresentar seus conceitos básicos para os estudantes, não era possível apelar para o modo como eram entendidos em uso, uma vez que o iniciante não tem experiência para tanto. Sendo assim, não bastava reconhecer que infinitésimos, ou limites, eram fundamentos inadequados para a análise; uma doutrina positiva se fazia necessária. Cauchy dirá então que, para explicitar os fundamentos da análise, é preciso derivar seus resultados em uma ordem coerente. Isso significa isolar os princípios fundamentais da teoria e deduzir deles os teoremas. Em análise, tais princípios serão os conceitos de função, limite, continuidade, convergência, derivação e integração (ROQUE, 2012, p. 406).

Cauchy publicou três livros-texto provenientes das suas aulas: *Cours d'analyse*[2], em 1821; *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*[3], em 1822; e *Leçons sur le calcul différentiel*[4], em 1829. Nesses trabalhos, o matemático francês frisou, por exemplo, a importância de demonstrar a existência de integrais, antes de estabelecer suas propriedades, e também de construir o conceito de integrais entre determinados limites, ou seja, a noção de integral definida. Ademais, Cauchy trouxe uma nova definição de função (ainda de caráter geral e, portanto, não atual) e descreveu sua ideia sobre a noção de limite, afirmando que:

> Quando os valores atribuídos sucessivamente a uma determinada variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de forma que acabam diferindo desse último de uma quantidade tão pequena quanto se queira, esse valor fixo é chamado de limite de todos os outros valores (BRADLEY; SANDIFER, 2009, p. 6).

Ao trazer essa definição para a ideia de limite, Cauchy foi capaz de desvincular esse conceito de qualquer referência geométrica. Além disso, essa foi a definição mais clara construída até aquele momento, mesmo que, posteriormente, objeções tenham sido trazidas e outras contribuições dadas para sofisticar ainda mais a ideia.

---

2 Curso de análise.

3 Resumo das aulas sobre o cálculo infinitesimal.

4 Lições sobre o cálculo diferencial.

O matemático francês promoveu também uma reconciliação com os infinitesimais, evitando denotá-los como números fixos. Cauchy expressou um infinitesimal, ou uma quantidade infinitamente pequena, simplesmente como uma variável cujo limite era zero. Pode-se depreender daí que Cauchy se referia, em sua definição, a uma variável dependente, ou função $f(x)$, por exemplo, que se aproxima cada vez mais de zero à medida que $x \to 0$.

A partir de suas ideias sobre limite e infinitesimal, Cauchy propôs definições para os conceitos de derivada e integral. O matemático francês[5] definiu a derivada da mesma maneira que Bolzano havia feito anteriormente, ou seja, afirmou que, se há uma função $y = f(x)$ e se incrementa, então, a variável x em Δx,$= i$, de forma que se possa estabelecer a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

o limite dessa razão, quando i tende a zero, se existir, é representado por $f'(x)$ e chamado de derivada de y em relação a x.

Cauchy também foi responsável por introduzir o que atualmente se chama de regra da cadeia, para diferenciação de funções compostas. Assim, supondo como uma segunda função de x, ligada à primeira, denotada por $f(x) = y$, de maneira que $z = F(y)$, Cauchy afirmou que, se Δx, Δy e Δz fossem chamados de incrementos infinitamente pequenos, respectivamente, de x, y e z, então:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y) - F(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Aplicando o limite em ambos os membros da equação, Cauchy pôde concluir que[6]:

$$z' = F'(y) \cdot y' = F'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Tratando do conceito de continuidade, Cauchy formulou uma definição também muito similar àquela trazida por Bolzano. Afirmou que uma função $f(x)$ é contínua, em um dado intervalo, se um acréscimo infinitamente pequeno a, em relação à variável x, resulta sempre em um acréscimo infinitamente pequeno na diferença $f(x+a) - f(x)$. Lembrando a definição de Cauchy de quantidades infinitamente pequenas, sua definição pode ser traduzida da seguinte forma atual: uma função $f(x)$ é contínua em um determinado intervalo se o limite da variável $f(x)$, à medida que x se aproxima de a, é igual a $f(a)$, para qualquer α pertencente a esse intervalo.

Outro conceito desenvolvido por Cauchy foi o de integral definida. Nessa construção, recorreu a muitos dos aspectos que havia estudado anteriormente, como, por exemplo, as

5 Ao demonstrar alguns teoremas sobre a diferenciação, Cauchy utilizou, pela primeira vez na história, a notação com épsilons e deltas (GRABINER, 1981).

6 De acordo com Edwards (1979), nessa demonstração, assim como acontece em alguns livros de Cálculo atuais, a possibilidade de, $\Delta y = 0$ para valores pequenos de Δx, mas diferentes de zero, não é considerada.

ideias de limite e continuidade. Cauchy estabeleceu, em *Résumé des leçons*, de 1823, a integral definida como um limite de somas.

Até aquele momento, a maioria dos matemáticos rejeitava a definição de Leibniz, que também havia percebido a integral como uma soma. A integral era vista unicamente como a antiderivada, no sentido trazido por Newton, pois essa interpretação parecia adequada, uma vez que limites de somas e a ideia de área[7] ainda não haviam sido bem compreendidos.

Intrigado com a falta de rigor na definição do conceito de integral, de tal modo que não conseguia aplicar essa ferramenta convenientemente ao seu estudo do Cálculo com variáveis complexas[8], Cauchy buscou insistentemente uma construção formal lógica para essa ideia. Ao tratar a integral definida como um limite de somas, o francês habilitou-se a provar a existência de integrais de funções contínuas, a considerar integrais de funções que não eram percebidas como derivadas de outras funções conhecidas e a explicar o comportamento de integrais ao longo de um caminho, ou integrais de contorno.

Dessa forma, na vigésima primeira lição de *Résumé des leçons*, Cauchy começou estabelecendo uma função $f(x)$, contínua em um intervalo $[x_0, X]$ para, então, dividir esse intervalo em n subintervalos, não necessariamente iguais, por meio dos pontos x_0, x_1, x_2, ..., $x_n = X$. A partir dessa subdivisão, o matemático construiu a seguinte soma:

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

Analisando essa subdivisão, Cauchy percebeu e destacou que, se os comprimentos desses subintervalos tornam-se muito pequenos, à medida que n fica cada vez maior, o modo como a subdivisão é feita não tem influência sobre o valor de S. Desse modo, S depende unicamente de $f(x)$ e de x_0 e X, ou seja, S possui um único limite, que Cauchy chamou de integral definida.

Cauchy alertou que o símbolo $\int$ não deveria mais ser interpretado como uma soma de produtos, mas como o limite dessa soma. Sendo assim, o matemático francês propôs a seguinte notação para a integral definida, que creditou ao seu compatriota Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830):

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$$

Cauchy argumentou que, apesar de ser definida independentemente, a integração constitui-se no processo inverso da diferenciação. Nesse sentido, construiu o que talvez tenha sido a primeira demonstração rigorosa do Teorema Fundamental do Cálculo, sem ter recorrido a noções intuitivas sobre o conceito de área. Cauchy provou que, se f é uma

7 A primeira definição matemática formal de área, de acordo com Edwards (1979), foi dada pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), em 1887.

8 Principalmente no estudo de integrais de contorno (ou ao longo de um caminho).

função contínua, então:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right] = f(x)$$

Além disso, para deduzir, dessa primeira forma, a segunda expressão utilizada para designar o Teorema Fundamental do Cálculo, Cauchy considerou a função $F(x)$, de tal maneira que $F'(x) = f(x)$, no intervalo $[x_0, X]$, e concluiu que:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0)$$

para qualquer antiderivada F de f.

Com essas construções, Cauchy pôde, enfim, aprofundar seus estudos sobre a teoria das integrais com variáveis complexas. Assim, aplicou sua definição de integral como um limite de somas no artigo *Mémoire sur les Intégrales Définies Prises entre Limites Imaginaires*[9], escrito em 1825 e publicado em 1874.

8.3 Karl Wilhelm Theodor Weierstrass

O jovem alemão Karl Weierstrass (1815-1897), ao concluir sua educação básica, aos 19 anos, foi enviado por seu pai para a Universidade de Bonn, para estudar administração, leis e economia, a fim de que pudesse, posteriormente, galgar a uma posição como servidor público. Entretanto, Weierstrass, sem interesse por essas áreas do conhecimento, não concluiu sua graduação e, em 1838, foi para a Academia de Münster, com o objetivo de participar de um curso de Matemática que pudesse dar-lhe, rapidamente (em virtude das dificuldades financeiras da sua família), o status de professor de Ensino Fundamental. Seu desempenho no curso e nas avaliações acabou sendo tão impressionante que Weierstrass recebeu, em 1841, uma permissão especial do governo para ensinar Matemática e Física no Ensino Médio da época.

Depois de passar seis anos lecionando na cidade de Walcs, na atual Polônia, Weierstrass passou a ensinar Matemática, Física e Botânica em Braunsberg, localizada na região oeste da Prússia. Tendo recebido, em 1854, o diploma de PhD *honoris causa* da Universidade de Königsberg, em virtude do seu trabalho publicado em 1853 sobre funções abelianas, habilitou-se, enfim, para trabalhar no Ensino Superior. Em 1856, mudou-se para Berlim, onde passou a lecionar no Instituto Industrial e na Universidade de Berlim.

Na esfera do Cálculo, Weierstrass levou adiante a tarefa iniciada por Cauchy e formalizou definições por meio de épsilons e deltas, o que levou à eliminação das incertezas ainda existentes nessa área. Weierstrass formulou, por exemplo, a definição puramente

9 Memória sobre as integrais definidas em intervalos imaginários.

aritmética do conceito de limite, substituindo a descrição dinâmica[10] por uma totalmente estática, sem mencionar movimento ou mesmo questões geométricas. Weierstrass escreveu que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Essa expressão, em conjunção com as definições de Cauchy de derivada e integral, forneceu a precisão que constituiu a base para, enfim, alcançar a formulação rigorosa do Cálculo. Assim, "com vários desses limites aparecendo na reformulação Cálculo, a aritmetização da análise estava completa, e o Cálculo assumiu, então, precisamente a forma com a qual aparece nas explicações do século vinte" (EDWARDS, 1979, p. 333).

Além disso, com essa definição do conceito de limite, que não fez referência alguma aos infinitesimais, a expressão Cálculo Infinitesimal passou a ser inadequada para designar essa área da Matemática. O simbolismo puro de Weierstrass foi o responsável, portanto, por erradicar do Cálculo a noção tão controversa de um valor infinitesimal fixo.

10 Caracterizado por expressões como "f(x) aproxima-se de L, à medida que x aproxima-se de α".

9. A INTEGRAL DE RIEMANN

Nascido na província de Hannover, na Alemanha, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) estudou na Universidade de Berlim e, posteriormente, transferiu-se para a Universidade de Göttingen, onde cursou seu doutorado, que culminou com a defesa de sua tese sobre funções de variáveis complexas[1]. Em 1854, candidatou-se para a posição de professor de Göttingen e, ao apresentar seu trabalho para a banca examinadora, da qual fazia parte Carl Friedrich Gauss (1777-1855), introduziu o conceito de espaços com mais de três dimensões, campo que se tornou "de tal maneira fértil que, durante décadas, os matemáticos exploraram suas consequências e fizeram notáveis descobertas" (GARBI, 2010, p. 355).

Trabalhando com o conceito de integral, Riemann criou uma generalização da ideia de Cauchy. A definição do matemático alemão ainda é a mais conveniente e útil descrição de integral definida para aplicações elementares no Cálculo. Riemann afirmou que, para estabelecer corretamente

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

deve-se tomar uma sequência de valores x_1, x_2,..., x_{n-1}, entre a e b, e, para abreviar, chamar $x_1 - a$ de δ_1, $x_2 - x_1$ de δ_2, ... e $b - x_{n-1}$ de δ_n, e denotar frações próprias e positivas por ε_i. Sendo assim, o valor da soma:

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

depende da escolha dos intervalos δ_i e das frações ε_i. Essa soma tende sempre a um certo limite A, uma vez que todos os deltas se tornam infinitamente pequenos. Esse valor A foi, então, chamado por Riemann de:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

O matemático alemão escolheu pontos arbitrários $x_i^* = x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i$, dentro de cada subintervalo da partição construída em $[a, b]$, e definiu a integral da seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot(x_i - x_{i-1})$$

com δ caracterizando o comprimento máximo dos δ_i dos subintervalos da partição.

A integral de Riemann diferiu e avançou em relação à definição dada por Cauchy. A primeira e importante sofisticação reside no fato de Cauchy ter tomado aproximações esquerdas para $f(x)$, em cada subintervalo de $[a,b]$, enquanto Riemann abriu a possibilidade

1 Nesse trabalho, Riemann abordou as famosas equações de Cauchy-Riemann, que estabelecem uma condição necessária, mas não suficiente, para a existência da derivada de uma função complexa.

de se escolher um ponto arbitrário em cada um desses subintervalos. Além disso, e provavelmente ainda mais importante, Cauchy trabalhou apenas com funções contínuas (assumindo implicitamente a ideia de continuidade uniforme), enquanto o matemático alemão não fez uso dessa condição, trazendo, inclusive, exemplos de integrais de funções com infinitos pontos de descontinuidade.

Mais tarde, em 1902, o matemático francês Henri Lebesgue (1875-1941) ampliou a definição de integral dada por Riemann. Para tanto, utilizou uma generalização do conceito de comprimento, denominada de medida de um conjunto. Assim, Lebesgue provou que uma função limitada, em um intervalo fechado, é Riemann integrável se, e somente se, o seu conjunto de pontos de descontinuidade tiver medida zero.

Ademais, Lebesgue demonstrou que toda função limitada, em um intervalo fechado e passível de ser mensurado, é Lebesgue integrável. Avançando em seus estudos, o matemático francês propôs uma releitura do teorema fundamental do Cálculo para a integral de Lebesgue.

Ele afirmou que, se uma função f for diferenciável e f' for limitada em $[a,b]$, então f' é Lebesgue integrável, e:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

A integral de Lebesgue destaca-se como o padrão de estudos dos profissionais da Matemática pura avançada, sendo utilizada na maior parte dos artigos científicos vinculados à Análise Matemática. Enquanto isso, é a integral de Riemann que é discutida, usualmente, nas disciplinas introdutórias do Cálculo, com estudantes de graduação dos mais diversos cursos superiores que envolvem Ciências Exatas.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, A. *Infinitesimal:* a teoria matemática que revolucionou o mundo. 1 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

BARDI, J. S. *A guerra do cálculo.* Rio de Janeiro: Record, 2008.

BONFIM, S. H.; CALÁBRIA, A. R. *O Cálculo Diferencial e Integral de Newton e Leibniz*: aproximações e distanciamentos no método. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

BOYER, C. B. *História da matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRADLEY, R. E.; SANDIFER, C. E. *Cauchy's Cours d'analyse*: an annotated translation. New York: Springer, 2009.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática*: uma breve história, v. 2. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

COOK, A. G. The 350th Anniversary of the Birth of G. W. Leibniz. *The Royal Society Journal of the History of Science*, n. 2, v. 50, 1996.

D'ALEMBERT, J. R. *The Encyclopedia of Diderot e D'Alembert Collaborative Translation Project*. 2012. Disponível em https://quod.lib.umich.edu/d/did/did2222.0001.091. Acesso em 09, de abril, de 2020.

EDWARDS, C. H. *The historical development of calculus*. New York: Springer, 1979.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GARBI, G. G. *A rainha das ciências:* um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GLEICK, J. *Isaac Newton*. São Paulo: Companhia das Letras, 2004.

GRABINER, J. V. *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Cambridge: MIT Press, 1981.

HALL, M. B. The Royal Society's role in the diffusion of information in the seventeenth century. *The Royal Society Journal of the History of Science*, n. 2, v. 29, 1975.

ROQUE, T. *História da matemática:* uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SINGH, S. *O Último Teorema de Fermat*: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Rio de Janeiro: Record, 1999.

STEWART, I. *Dezessete equações que mudaram o mundo*. Zahar: Rio de Janeiro, 2013.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The Concept of Function up to the middle of the 19^{th} Century. *Archive for History of Exact Sciences,* v. 16, n. 1, p. 37-85, 1976.

WESTFALL, R. S. *A vida de Isaac Newton*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

WHITESIDE, D. T. Newton, o matemático. In: COHEN, I. B.; WESTFALL, R. S. (Orgs.). *Newton*: textos, antecedentes, comentários. Rio de Janeiro: Contraponto, 2002.

OBRAS CONSULTADAS

ABOTT, S. *Understanding Analysis*. New York: Springer, 2016.

ARMITAGE, A. René Descartes (1596-1650) and the Early Royal Society. *Notes and Records of the Royal Society of London*, v. 8, n. 1, 1950.

BALL. W. W. R. *A Short Account of the History of Mathematics*. New York: Dover Publications, 1960.

BERKELEY, G. *The Analyst, or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*. London: Tonson, 1734.

BOYER, C. B. *The history of the calculus and its conceptual development.* New York: Dover Publications, 1959.

BRANDEMBERG, J. C. *Uma História da Integral*: de Arquimedes a Lebesgue. São Paulo: Livraria da Física, 2017.

BUENO, R. W. S. A Construção Histórica do Cálculo: da Mesopotâmia à Idade Média. In: RITTER, D.; SOARES, G. O. (orgs.). *Ensino de Matemática em Foco*: pesquisas, relatos e propostas. Rio de Janeiro: Dictio Brasil, 2019.

BUENO, R. W. S.; VIALI, L. A Construção Histórica do Conceito de Função. *Educação Matemática em Revista-RS*, v. 1, n. 10, 2009.

EULER, L. *Introduction to Analysis of the Infinite*. New York: Springer, 1988.

FEINGOLD, M. *Before Newton*: the life and times of Isaac Barrow. Melbourne: Cambridge University Press, 1990.

GUICCIARDINI, N. John Wallis as Editor of Newton's Mathematical Work**.** *Notes and Records of the Royal Society***,** 2011**.**

REZENDE, W. M. As Formalizações do Cálculo Operacionalizadas por Newton, Descartes e Leibniz. In: FONSECA, L. (org.). *Didática do Cálculo:* epistemologia, ensino e aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

SINKEVICH, G. I. Karl Weierstrass' Bicentenary. *Cornel University*, Ithaca, 2015. Disponível em: < https://arxiv.org/abs/1508.02928>. Acesso em: 17 de abril de 2020.

WHITE, M. *Isaac Newton*: o último feiticeiro. Rio de Janeiro: Record, 2000.

SOBRE O AUTOR

RAFAEL WINÍCIUS DA SILVA BUENO é doutor e mestre pelo programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. É graduado em Matemática - Licenciatura pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Trabalhou, entre 2013 e 2019, como docente da Universidade de Santa Cruz do Sul. Em meados de 2019, tornou-se, por meio de concurso público, Professor de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha - IFFar. Atua, desde então, no *campus* Alegrete dessa instituição de ensino, onde é, também, líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Ensino de Ciências e Matemática. Tem experiência docente como professor de Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo I, Cálculo II, Cálculo III, Cálculo IV e Equações Diferenciais Ordinárias) em cursos de graduação em Matemática, Química e Engenharias. Na pós-graduação, trabalha no curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática do IFFar. Exerce, também, atividades de administração acadêmica, sendo membro do Núcleo Docente Estruturante do Curso de Licenciatura em Matemática e Coordenador do Curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática, ambos oferecidos pelo IFFar, *campus* Alegrete. No que diz respeito ao ensino e à aprendizagem de Cálculo, publicou diversos artigos, tais como: “O Cálculo e os Três Mundos da Matemática: um estado do conhecimento”, na revista Dynamis; “Equações Diferenciais Ordinárias, Newton e o Bolo de Chocolate: modelagem matemática na educação”, no periódico Tangram; “Ensino e Aprendizagem de Cálculo: explorando os Três Mundos da Matemática”, na revista Olhar de Professor; e “Newton, Leibniz e Bolt: modelação na formação de professores de Matemática”, no periódico Educação Matemática em Revista – RS. Já, na área da História da Matemática, publicou: o artigo “A Construção Histórica do Conceito de Função”, no periódico Educação Matemática em Revista – RS; e o capítulo “A Construção Histórica do Cálculo: da Mesopotâmia à Idade Média”, no livro Ensino de Matemática em Foco: pesquisas, relatos e propostas.

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

A CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE *Integral*

Atena Editora
Ano 2021

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

A CONSTRUÇÃO HISTÓRICA DO CONCEITO DE *Integral*

Atena Editora
Ano 2021