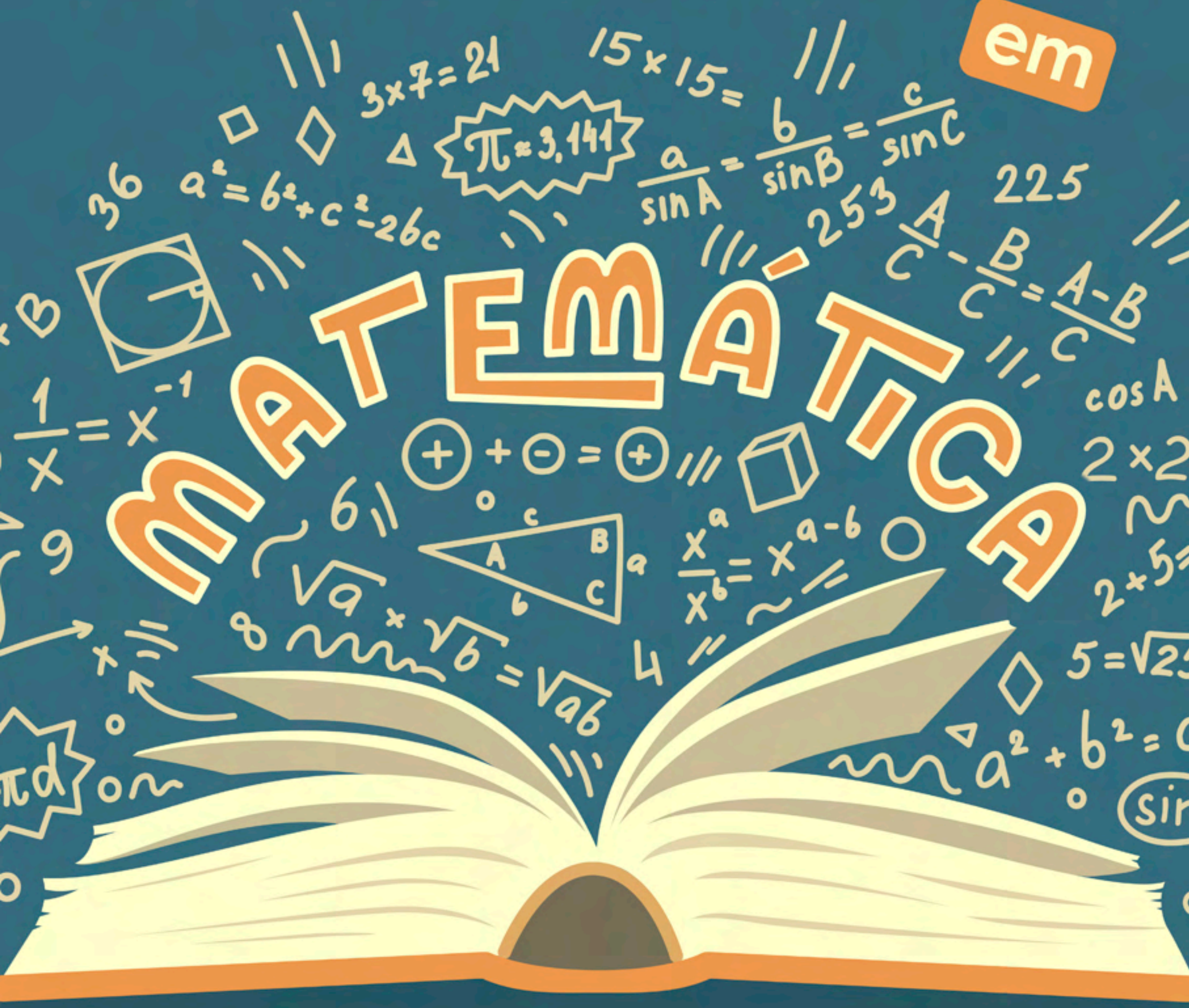
Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

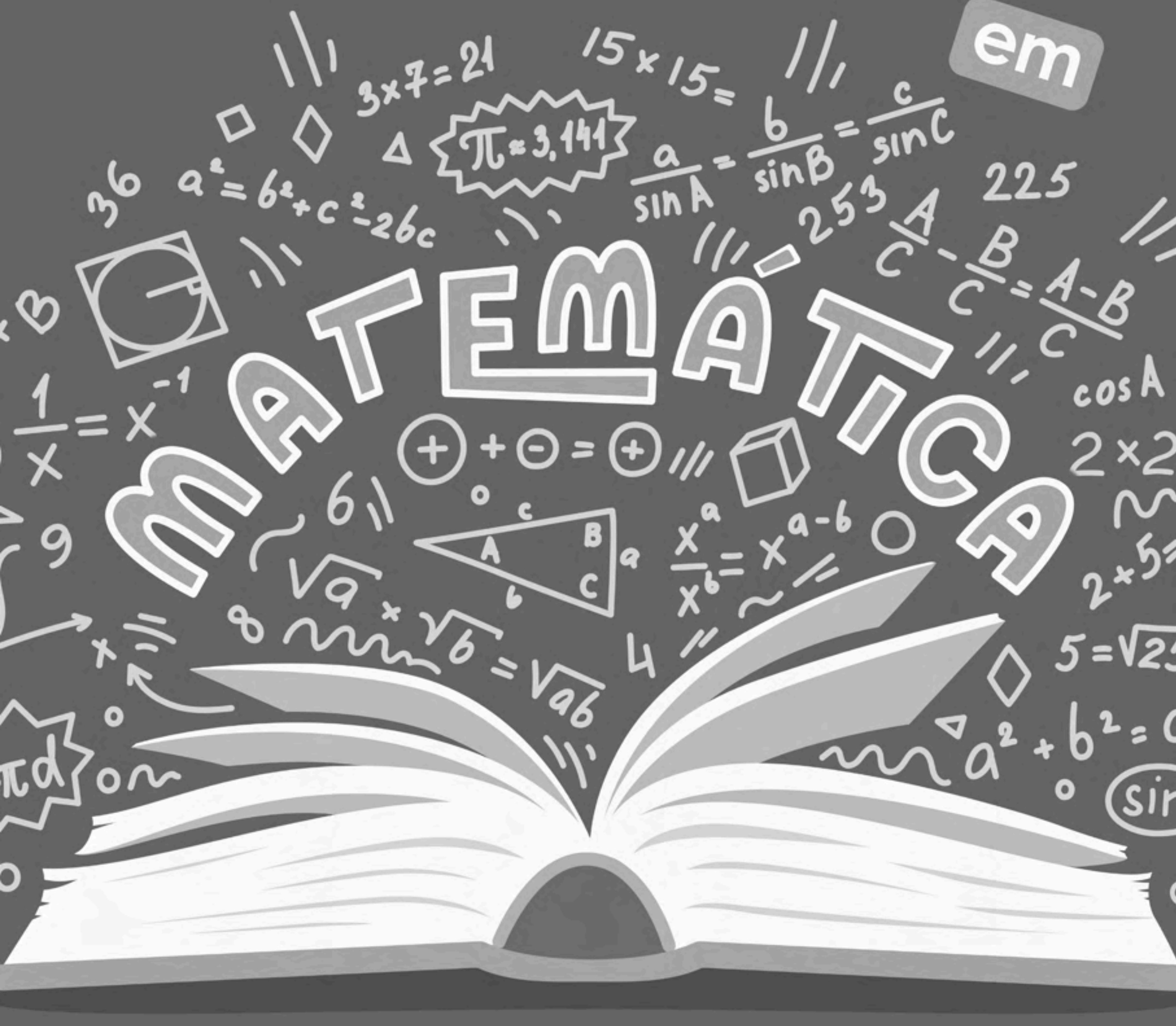
PESQUISAS DE VANGUARDA em MATEMÁTICA e suas aplicações



Atena Editora
Ano 2021

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

PESQUISAS DE VANGUARDA em MATEMÁTICA



e suas aplicações

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Natália Sandrini de Azevedo
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

Todos os manuscritos foram previamente submetidos à avaliação cega pelos pares, membros do Conselho Editorial desta Editora, tendo sido aprovados para a publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Atena
Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações

Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Bruno Oliveira
Indexação: Gabriel Motomu Teshima
Revisão: Os autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P474 Pesquisas de vanguarda em matemática e suas aplicações / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5983-440-2
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.402212809

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora

Ano 2021

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autorizam a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

DECLARAÇÃO DA EDITORA

Atena Editora
Ano 2021

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um "novo normal", onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse "novo normal", é que contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a Educação no Brasil acaba, muitas vezes, sendo uma reprodutora de Desigualdades.

O contexto social, político e cultural, como evidenciaram Silva, Nery e Nogueira (2020), tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse cenário de inclusão, tecnologia e de um "novo normal"; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático (SILVA; OLIVEIRA, 2020).

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático, como assevera D'Ambrósio (1993), e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro "***Pesquisas de Vanguarda em Matemática e suas Aplicações***" nasceu: como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática e do pesquisador em Matemática aplicada sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para educadores da Educação

Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura.

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

D´AMBROSIO, Beatriz S. Formação de Professores de Matemática Para o Século XXI: O Grande Desafio. **Pro-Posições**. v. 4. n. 1 [10]. 1993.

SILVA, A. J. N. DA; NERY, ÉRICA S. S.; NOGUEIRA, C. A. Formação, tecnologia e inclusão: o professor que ensina matemática no “novo normal”. **Plurais Revista Multidisciplinar**, v. 5, n. 2, p. 97-118, 18 ago. 2020.

SILVA, A. J. N. da; OLIVEIRA, C. M. de. A pesquisa na formação do professor de matemática. **Revista Internacional de Formação de Professores**, [S. l.], v. 5, p. e020015, 2020. Disponível em: https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/rifp/article/view/41. Acesso em: 18 maio. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

O USO DA ROBÓTICA EDUCACIONAL COMO FERRAMENTA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 06/08/2021

Bruna Nogueira Simões Cobuci
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF
Campos dos Goytacazes - RJ

Rigoberto Gregório Sanabria Castro
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF, LCMAT
Campos dos Goytacazes - RJ

RESUMO: No processo de ensino e aprendizagem da matemática tem-se buscado metodologias que auxiliem os professores e despertem o interesse e estimulem a criatividade dos discentes, uma vez que a disciplina é vista como uma matéria de difícil compreensão. Assim sendo, com o avanço tecnológico, tem-se utilizado a robótica como uma aliada no ensino. Para contribuir com a teoria das disciplinas de matemática e física, o presente trabalho tem como finalidade utilizar a robótica educacional, baseada na plataforma Arduíno, como ferramenta competente e facilitadora no ensino do movimento uniforme e movimento uniformemente variado em conjunto com as funções afim e quadrática, de maneira que proporcione novos significados aos conteúdos e assim promova a ampliação do conhecimento. Como proposta será realizada uma pesquisa de caráter qualitativo do tipo intervenção pedagógica, composta por três fases. Primeiramente, afim de enriquecer o trabalho com os conceitos necessários, realizou-se uma pesquisa bibligráfica. Na segunda fase foi elaborada a parte física e teórica do robô utilizado. E na terceira e última etapa, buscou-se elaborar a proposta didática-pedagógica, que é composta por listas de exercícios, manual de passo a passo para a construção do robô e realização de experimentação, que são instrumentos de auxílio para o professor ao realizar as atividades propostas. O protótipo robótico construído, é um robô similiar a um carrinho, chamado de robô seguidor de linha. Acordado com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a robótica possibilita contextualizar, exemplificar, conectar e tornar significativos os conteúdos das componentes curriculares. Desta forma, como resultado final esperamos que haja melhorias no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos abordados e também que os aprendizes se interessem pela robótica educacional.

PALAVRAS-CHAVE: Robótica educacional, Arduíno, física, matemática.

THE USE OF EDUCATIONAL ROBOTICS AS A TOOL IN TEACHING AND LEARNING OF AFFINE AND QUADRATIC FUNCTION

ABSTRACT: In the process of teaching and learning mathematics, methodologies have been sought to help teachers and arouse the interest and encourage creativity of students, since the discipline is seen as a difficult subject to understand. Therefore, with technological advances, robotics has been used as an ally in teaching. To contribute to the theory of the disciplines of mathematics and physics, the present work aims to use educational robotics,

based on the Arduino platform, as a competent and facilitating tool in teaching uniform motion and uniformly accelerated motion together with the affine and quadratic function, so as to provide new meanings to the contents and thus promote the expansion of knowledge. As a proposal, a qualitative research of the type pedagogical intervention will be carried out, composed of three phases. Initially, in order to enrich the work with the necessary concepts, a bibliographic research was carried out. In the second phase, the physical and theoretical part of the robot used was elaborated. And in the third and last stage, we sought to elaborate the didactic-pedagogical proposal, which is composed of lists of exercises', step-by-step manual for the construction of the robot and conducting experiments, which are tools to help teachers when performing the proposed activities. The robotic prototype built is a cart-like robot, called a line-following robot. In accordance with the Common National Curriculum Base (BNCC), robotics makes it possible to contextualize, exemplify, connect and make the contents of the curricular components meaningful. Accordingly, as a final result we hope that there will be improvements in the teaching and learning process of the contents covered and also that learners become interested in educational robotics.
KEYWORDS: Educational robotics, Arduino, physics, math.

1 I INTRODUÇÃO

O processo de aprendizagem da matemática levanta alguns problemas, tais como, a difícil compreensão dos alunos. Assim sendo, a mesma não deve ser apresentada como uma disciplina fechada, pois pode gerar desconforto e desinteresse dos discentes. Posto isto, e diante de grandes avanços tecnológicos, um dos desafios dos professores é tornar o ambiente escolar atrativo e oportuno para expandir conhecimentos e estimular a criatividade. (SANTOS; FRANÇA; SANTOS, 2007)

Como ferramenta auxiliar no ensino, o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's) tem se destacado, pois aproxima a realidade dos conceitos teóricos estudados, tornando assim o saber mais conciso e coerente. De acordo com (MARTINHO; POMBO, 2009):

> "As tecnologias de informação e de comunicação (TIC) podem constituir um elemento valorizador das práticas pedagógicas, já que acrescentam, em termos de acesso à informação, flexibilidade, diversidade de suportes no seu tratamento e apresentação. Valorizam, ainda, os processos de compreensão de conceitos e fenómenos diversos.". (MARTINHO; POMBO, 2009, p.528)

A matemática é uma disciplina de baixo rendimento escolar. De acordo com o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), a nota obtida pelos alunos brasileiros em 2018 não foi satisfatória. O Brasil ocupou a 70ª posição entre os setenta e sete países que participaram da avaliação. (TOKARNIA, 2019)

Neste cenário de pouco aproveitamento escolar da disciplina e de grandes transformações cotidianas, a Robótica Educacional tem se demonstrado um ambiente pedagógico enriquecedor e significativo, no que tange um ensino integrado de diferentes disciplinas. (SANTOS e MENEZES, 2005; FRANCISCO JUNIOR; VASQUES; FRANSCISCO, 2010)

Como a robótica é capaz de trazer melhorias no ensino o presente trabalho tem o propósito de introduzir nas aulas de matemática um robô, construído com a plataforma Arduíno, com a finalidade de simplificar o aprendizado de função afim e função quadrática em comunhão com os conceitos físicos do movimento uniforme (MU) e movimento uniformemente variado (MUV).

Utilizar os robôs nas aulas de matemática torna os metódos de ensino mais eficazes (JÚNIOR; COELHO; SANTOS, 2017). Visto que, Segundo Piaget (1970), a matemática é resultado do processo mental da criança em relação ao que se vive no dia a dia, arquitetado por meio de atividades de se pensar o mundo através da relação com os objetos. (LIMA; BEZERRA; VALVERDE, 2016)

O robô utilizado será construído com o Arduíno e outros componentes eletrônicos. O Arduíno é uma placa eletrônica programável que em conjuntos com sensores e atuadores é capaz de automatizar desde projetos simples aos mais complexos. É uma plataforma open-source, ou seja, seu código pode ser alterado e possui hardware (figura 1) e software de fácil manuseio. (ARDUÍNO, 2018)

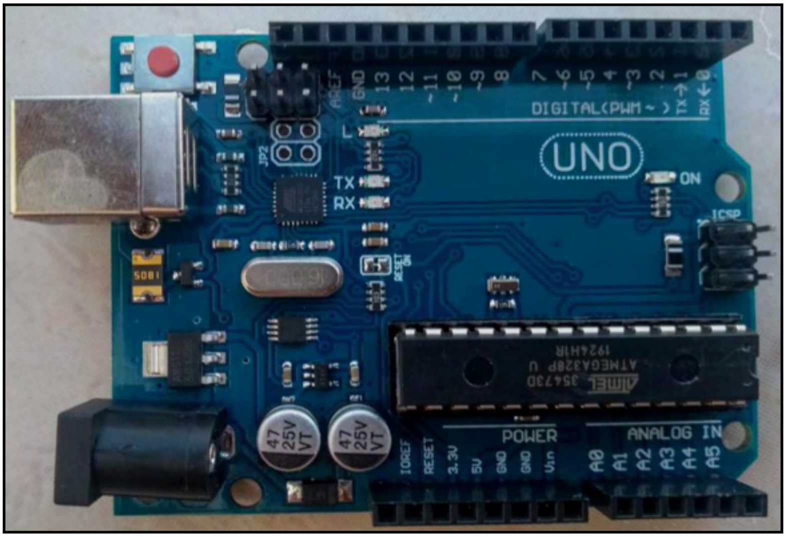


Figura 1: Arduíno (Hardware).

Fonte: Autor.

Ao utilizar robôs como ferramenta auxiliar no ensino espera-se que as dúvidas dos discentes sejam sanadas com mais clareza e que se expanda o interesse pelos conceitos abordados. Também espera-se que o ensino da matemática seja menos exaustivo e mais atraente. Posto que, essa metodologia utilizada, pode ser capaz de fazer com que a matemática seja redescoberta pelos alunos, se originando em um construtor ativo do conhecimento próprio.

2 | OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo geral estimular o estudo de conceitos matemáticos e físicos com o auxílio da robótica baseada na plataforma Arduíno.

Para atingir o objetivo geral deste trabalho serão considerados os seguintes objetivos específicos:

- Elaborar material didático teórico acordado com a proposta curricular do Ministério da Educação (MEC);
- Apronfundar o conhecimento sobre a plataforma Arduíno, a robótica na educação e a motivação para a utilização de robôs no ensino;
- Desenvolver material didático prático com a utilização da placa eletrônica Arduíno;
- Investigar o conhecimento dos alunos em relação à robótica;
- Utilizar o Arduíno para inserir conceitos interdisciplinar de matemática, física e robótica;
- Explorar a criatividade dos aprendizes.

3 | METODOLOGIA

O projeto contará com um robô (figura 2) construído com o Arduíno, rodas, motores, sensores.

Figura 2: Robô seguidor de linha.

Fonte: Autor.

Para abordar os conceitos de movimento uniforme (MU), movimento uniformemente variado (MUV), função afim e função quadrática será realizada uma pequisa do tipo intervenção pedagógica de caráter qualitativo. Uma pesquisa qualitativa não leva em consideração a análise de dados expressos de forma numérica e estatística e sim o método utilizado focada no caráter subjetivo. (Neves, 1996) afirma que:

> “Enquanto estudos quantitativos geralmente procuram seguir com rigor um plano previamente estabelecido (baseado em hipóteses claramente indicadas e variáveis que são objeto de definição operacional), a pesquisa qualitativa costuma ser direcionada, ao longo de seu desenvolvimento; além disso, não busca enumerar ou medir eventos e, geralmente, não emprega instrumental estatístico para análise dos dados; seu foco de interesse é amplo e parte de uma perspectiva diferenciada da adotada pelos métodos quantitativos.”(NEVES, 1996, p.2)

Neste trabalho, para obter dados qualitativos, será realizado pré teste, experimentação prática e pós testes. Cada atividade (material de coleta de dados) e seus objetivos estão dispostos no quadro 1.

MATERIAL	OBJETIVO
PRÉ-TESTE 1	Analisar o conhecimento dos aprendizes em relação aos conceitos de funções afim e quadrática, movimento uniforme e movimento uniformemente variado.
PRÉ-TESTE 2	Analisar o conhecimento prévio do aluno em relação à robótica educacional.
CONHECENDO O ROBÔ	Apresentar a montagem e programação do robô utilizado nas experimentações.
PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL - MU	Observar e analisar o movimento do carrinho sobre a pista. Extrair dados, preencher tabelas, construir gráficos e compreender o conceito de velocidade.
PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL - MUV	Observar e analisar o movimento do carrinho sobre a pista ao se alterar a velocidade. Extrair dados, preencher tabelas, construir gráficos e compreender o conceito de aceleração.
TESTES PÓS EXPERIMENTAÇÕES	Verificar a aprendizagem dos alunos após a aplicação da prática.

Quadro 1: Material de coleta de dados e objetivos.

Para atingir os objetivos propostos neste trabalho será realizada a proposta didática pedagógica que acontecerá em quatro atividades:

- **Atividade 1:** Esta atividade consiste de dois pré testes de verificação de conhecimento. O pré teste 1 que tem o objetivo de resgatar o conhecimento dos alunos no que diz respeito aos assuntos de função e movimento e o pré teste 2 que tem a finalidade de conhecer os saberes prévios dos alunos em relação à robótica. O pré teste 1 (figura 3) possui questões que relacionam o tipo de função, os gráficos, valor de máximo e mínimo, associação dos coeficientes com cada tipo de função e teorias que conectam os conceitos de MU e MUV com função afim e quadrática. Este exercício conta com nove questões objetivas e discursivas.

1. Quais das funções abaixo representam uma função do primeiro e do segundo grau, respectivamente?
   a) $f(x) = -5x + 8$ e $f(x) = 3x^2 - 8x + 1$
   b) $f(x) = 13$ e $f(x) = 13x + 9$
   c) $f(x) = x^2$ e $f(x) = x + 2$
   d) $f(x) = x^3 + x^2 + x$ e $f(x) = 7$
2. Sobre o gráfico da função do primeiro grau, marque a alternativa correta:
   a) O gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima.
   b) O gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo.
   c) O gráfico é uma reta e o seu coeficiente angular indica a inclinação da mesma em relação ao eixo das abcissas.
   d) O gráfico é uma parábola e o seu coeficente a delimita a concavidade da mesma.

Figura 3: Algumas questões pré-teste 1.

Fonte: Autor.

Já o pré teste 2 (Figura 4) é destinado a explorar o conhecimento prévio dos alunos no que diz respeito à robótica, Arduíno e linguaguem de programação. Este exercício conta com sete questões objetivas e discursivas.

1. Você já ouviu falar sobre a Robótica Educacional?
   ( )SIM ( )NÃO ( )PARCIALMENTE
2. Como você imagina que seria o ensino das escolas públicas se pudessem ser introduzido a Robótica Educacional nas aulas das disciplinas da grade escolar?
3. Você conhece a placa eletrônica Arduíno? EXPLIQUE:
   ( )SIM ( )NÃO ( )PARCIALMENTE
4. Você acha interessante a introdução de robôs em sala de aula como ferramenta auxiliar ? EXPLIQUE:
   ( )SIM ( )NÃO ( )PARCIALMENTE

Figura 4: Algumas questões do pré-teste 2.

Fonte: Autor.

- **Atividade 2:** Esta atividade é uma aula prática onde se pode conhecer todos os componentes do robô (função e aplicabilidade), sua montagem e programação. O código de programação é apresentado de forma breve, porém todas as linhas de comando de movimento são explicadas.

- **Atividade 3:** Aula experimental do MU e MUV. No procedimento experimental do MU (Figura 5 e 6) e do MUV (Figura 7 e 8) os alunos deverão seguir o passo a passo que explica desde da inserção da programação no robô até os procedimentos de percurso do carrinho na pista. A ideia metodológica é analisar o movimento do robô seguidor de linha em uma pista. Para experimentação que envolva a função afim será definida uma velocidade e o tempo de percurso para cada volta que o carrinho der na pista. O tempo será marcado com um cronômetro. Os dados serão anotados na tabela e a partir dela será construído gráficos e questões serão respondidas.

1. Com a IDE do Arduino aberta, verificar a programação, em seguida enviar a programação para o carrinho. Lembre-se que o carrinho deve estar conectado ao computador.
2. Colocar o carrinho na pista de maneira que a faixa preta fique entre o sensor 2 e sensor 3.
3. Com um cronômetro, medir o tempo do percuso para uma volta.
4. Medir o deslocamento do carrinho ao completar a primeira volta.
5. Medir o tempo de percurso para mais cinco voltas e medir o deslocamento para cada volta concluída até completar as seis voltas.
6. Preencher a tabela abaixo com os dados de tempo de percurso e distância percorrida.

Figura 5: Procedimento experimental do MU.

Fonte: Autor.

7. Calcular variação de tempo, descolamento e velocidade média e preencher a tabela abaixo:

Δ S (m)	Δ t (s)	V_m

8. Responda:

a) De acordo com a tabela anterior podemos afirmar que a velocidade permaneceu constante?

b) Determine o coeficiente angular e linear da função.

c) Qual é a equação horária do movimento?

d) Construa o gráfico de deslocamento x tempo:

Figura 6: Procedimento experimental do MU.

Fonte: Autor.

Já para a experimentação de função quadrática, no código de programação será alterada a velocidade para cada volta do percurso. Os dados de velocidade, tempo de realização de uma volta e aceleração serão tabelados. A partir destes dados serão construídos gráficos e respondido questões que envolvam o MUV e a função quadrática.

1. Com a IDE do Arduino aberta, colocar a velocidade igual a 100. Verificar a programação e em seguida enviar a programação para o carrinho.

   Lembre-se que o carrinho deve estar conectado ao computador.

2. Colocar o carrinho na pista de maneira que a faixa preta fique entre o sensor 2 e sensor 3.

3. Com um cronômetro, medir o tempo do percuso para uma volta.

4. Medir o deslocamento do carrinho ao completar a primeira volta.

5. Alterar a velocidade do carrinho para 175 e enviar a programação alterada para o carrinho.

6. Com um cronômetro, medir a distância e o tempo que o carrinho leva para percorrer duas voltas completas.

Figura 7: Parte do procedimento experimental do MUV.

Fonte: Autor.

14. Calcular a velocidade e a aceleração de cada deslocamento e preencher a tabela abaixo.

Voltas Completas	Deslocamento em metros (X)	Tempo em segundos (Y)	Velocidade Média (m/s)	Aceleração (m/s^2)
1				
2				
3				
4				
5				

15. Responda:

a) Considerando um erro admissível de 5% podemos afirmar que a aceleração permaneu constante?

b) Determinar a equação horária da posição.

c) Determine o coeficiente a e b da equação horária da posição.

d) Determinar a equação horária da velocidade.

e) Determine o coeficiente a e b da equação horária da velocidade.

f) Construa o gráfico de deslocamento x tempo e velocidade x tempo.

Figura 8: Questões que compõem o procedimento experimental do MUV.

Fonte: Autor.

- **Atividade 4:** Teste pós-experimentação destinado à verificar o quanto experimentação com o robô pôde contribuir para o aprendizado dos alunos em relação aos conteúdos abordados. De acordo com a figura 9, observa-se algumas das questões presentes no teste.

1. Antes de ter utilizado a robótica quais eram suas maiores dificuldades ao estudar função afim e quadrática?

2. O que você achou de positivo nas aulas com o robô?

3. O que você acha que poderia ter melhorado ?

4. Em sua opinião, qual nível de dificuldade das atividades propostas com o robô?

   ( )Muito fácil ( )Fácil ( )Moderada ( )Difícil ( )Muito difícil

5. Em sua opinião, os problemas propostos apresentavam qual nível de dificuldade?

   ( )Muito fácil ( )Fácil ( )Moderada ( )Difícil ( )Muito difícil

6. Você teve dificuldades em responder a atividade proposta para o experimento 1?

   ( ) SIM ( )NÃO ( )PARCIALMENTE

7. Você teve dificuldades em responder a atividade proposta para o experimento 2?

   ( ) SIM ( )NÃO ( )PARCIALMENTE

Figura 9: Teste pós-experimentação.

Fonte: Autor

Após realização de todas as atividas os dados coletados serão analisados, discutidos e comparados com os objetivos propostos.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho, apesar de ainda não estar em fase experimental com os discentes, tem como intenção tornar o ambiente escolar um local motivador, onde os alunos possam descontrair e aprender ao mesmo tempo, sem se prender ao mecanimos de memorização de fórmulas. Assim sendo, após a realização da experimentação esperamos que haja melhorias no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos abordados e que o interesse pela robótica educacional seja intensificado, uma vez que de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a robótica possibilita contextualizar, exemplificar, conectar e tornar significativos os conteúdos das componestes curriculares.

REFERÊNCIAS

ARDUíNO. **O que é Arduino?** 2018. Disponível em: <https://www.arduino.cc/en/Main/Donate>.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** [S.l.]: Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017.

FRANCISCO JÚNIOR, N. M.; VASQUES, C. K.; FRANSISCO, T. H. A. **Robótica Educacional e a Produção Científica na Base de Dados da CAPES.** Revista Electrónica de Investigación y Docencia, n. 4, p. 35-53, 2010.

JÚNIOR, C. R. da S.; COELHO, J. D.; SANTOS, L. S. **Robótica nas aulas de matemática do ensino médio: uma proposta educacional e de baixo custo.** Experiências em Ensino de Ciências, v. 12, n. 5, p. 82–104, 2017.

LIMA, R.; BEZERRA, F. J. B.; VALVERDE, M. A. H. **Uso de materiais manipulativos:a oficina “mãe dinada” como introdução ao estudo de probabilidade e estatística** .ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12º ENEM, 2016.

MARTINHO, T.; POMBO, L. **Potencialidades das tic no ensino das ciências naturais–um estudo de caso.** Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, v. 8, n. 2, p. 527–538, 2009.

NEVES, J. L. **Pesquisa qualitativa: características, usos e possibilidades.** Caderno depesquisas em administração, São Paulo, v. 1, n. 3, p. 1–5, 1996.

SANTOS, J. A.; FRANÇA, K. V.; SANTOS, L. S. B. d. **Dificuldades na aprendizagemde matemática. Monografia de Graduação em Matemática.** São Paulo: UNASP, 2007.

SANTOS, C. F.; MENEZES, C. S. A **Aprendizagem da Física no Ensino Fundamental em um Ambiente de Robótica Educacional.** Anais do XI Workshop de Informática na Escola, do XXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, São Leopoldo, RS, 2005.

TOKARNIA, M. **Pisa mostra que 2% dos alunos brasileiros têm nota máxima em avaliação internacional.** 2019. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2019-12/pisa-mostra-que-2-dos-alunos-brasileiros-tem-nota-maxima-em-avaliacao-internacional#>.

CAPÍTULO 2

BANCO IMOBILIÁRIO MATEMÁTICO: UMA PROPOSTA DE ENSINO EM AULAS DE MATEMÁTICA

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 04/08/2021

Thayná Schleider de Matos
Unicentro
Irati – Paraná
http://lattes.cnpq.br/4571577621599912

Joyce Jaquelinne Caetano
Departamento de Matemática, Unicentro
Irati – Paraná
http://lattes.cnpq.br/6868799162220668

RESUMO: O presente trabalho é resultado de um jogo confeccionado no Laboratório de Educação Matemática (LEMATI) da UNICENTRO e tem por finalidade apresentar uma proposta de ensino de maneira lúdica e interdisciplinar em aulas de matemática. Para isto, foi criado, com base no jogo já existente e mundialmente conhecido, o Banco imobiliário matemático, onde estudantes além de praticarem conteúdo da disciplina através de perguntas e desafios, podem explorar temas transversais considerados de suma importância no desenvolvimento pessoal dos mesmos. A proposta da atividade não proporciona apenas um contato dos alunos com o jogo, mas também uma nova visão da matemática, além da já praticada em sala de aula, através do contato com o lúdico e também, o cultural para revisar e exemplificar conceitos, proporcionando um melhor entendimento dos conteúdos abordados em sala de aula.
PALAVRAS-CHAVE: Matemática; Ensino; Jogos; Interdisciplinaridade.

MATHEMATICAL MONOPOLY: A TEACHING PROPOSAL IN MATHEMATICS CLASSES

ABSTRACT: This work is the result of a game made at the Laboratório de Educação Matemática (LEMATI) at UNICENTRO and the aim is to present a teaching proposal in a playful and interdisciplinary way in mathematics classes. For this, based on the already existing and world-known game, the Mathematical Monopoly was created, where students in addition to practicing the subject's content through questions and challenges, can explore transversal themes considered of paramount importance in their personal development. The activity proposal not only provides to the students a contact with the game, but also a new look to math, in addition to the studies already practiced in the classroom, through contact with the playful and also the cultural, with the objective to review and exemplify concepts, providing a better understanding of the contents covered in the classroom.
KEYWORDS: Mathematics; Teaching; Games; Interdisciplinarity.

1 I INTRODUÇÃO

A disciplina de matemática é comumente vista como difícil e complicada por grande parte dos estudantes, seja por conta do alto nível de reprovações ou também, pelo viés cultural, pois, pode-se notar que os estudantes já apresentam uma aversão a disciplina mesmo que ainda não tenham passado por situações que revelem alguma grande dificuldade.

A realidade de muitas salas de aulas ainda perpetua um ensino de matemática fragmentado e descontextualizado, e em muitos casos prioriza o decorar mais do que o aprender. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) enfatizam:

> [...]o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (BRASIL, 1998, p.26)

Desta forma se faz presente a necessidade de um trabalho que que faça sentido para os alunos, em favor de seu desenvolvimento cognitivo sem abandonar os conteúdos, mas sim os abordando de uma outra maneira, mais lúdica e se bem trabalhada, mais eficiente.

Os jogos possibilitam acompanhar e compreender os caminhos que a criança percorre para chegar a um resultado ou objetivo; a construção de diferentes estratégias mentais e autônomas que antecipam a ação dos participantes; a interação social motivando a utilização e aprimoramento da linguagem e do pensamento infantil; a articulação de ideias da maneira mais lógica possível para ser compreendida por seus pares, além do estímulo ao desenvolvimento da autonomia, tida como o principal objetivo da educação segundo a teoria construtivista (KAMII; DEVRIES, 1991).

Em aulas de matemática, os jogos transformam os alunos em agentes da própria construção do conhecimento onde não apenas absorvem, mas podem pôr em prática aquilo que é trabalhado de maneira indireta conforma ressalta Grando (2000, p.15):

> A busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para o aluno, que lhe proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, enfim, à construção e que lhe possibilite um prazer em aprender, não pelo utilitarismo, mas pela investigação, ação e participação coletiva de um "todo" que constitui uma sociedade crítica e atuante, leva-nos a propor a inserção do jogo no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem.

Neste sentido, esse trabalho tem por finalidade apresentar um jogo desenvolvido no Laboratório de Educação Matemática (LEMATI) da UNICENTRO que corrobora para o ensino aprendizagem da matemática aliado a interdisciplinaridade dentro de sala de aula, onde os alunos não tem contato apenas com a matemática, mas também com a história da própria cidade, levantando questionamentos sobre a mesma resultando na reflexão sobre lugares que as vezes podem passar despercebidos aos olhos, ou deixam de ganhar o devido significado.

2 I METODOLOGIA

Primeiramente apresentaremos algumas concepções sobre o jogo como metodologia de ensino:

Para KISHIMOTO (2001) Definir o que é jogo não é simples pois cada pessoa pode entender a palavra jogo de uma maneira diferente, referindo-se a diversos tipos, como jogos políticos, xadrez, amarelinha, adivinhas, entre outros.

Também, Grando (1995, p.30) enfatiza que "Etimologicamente a palavra JOGO vem do latim locu, que significa facejo, zombaria e que foi empregada no lugar de ludu: brinquedo, jogo, divertimento, passatempo".

Ainda, segundo Grando (1995, p.34)

> "[...] não existe jogo se não há regras (verdade inabalável). E estas regras devem ser respeitadas pelos jogadores. Aquele que ignora ou desrespeita as regras, destrói o jogo e é expulso, pois ameaça a existência da comunidade dos jogadores".

Diante disso propusemos um jogo que trabalhasse educação financeira, tema emergente e tão importante dentro da educação matemática, para tanto buscamos um jogo mundialmente conhecido, o jogo *banco imobiliário* que apresenta diversos conceitos matemáticos.

Nesta linha, apresentamos o que é o jogo *banco imobiliário*, lançado em 1934 pela empresa Hasbro é uma variação brasileira do jogo internacionalmente conhecido como *Monopoly*, criado na Grande Depressão, ele permitia que um cidadão comum virasse um magnata.

O jogo consiste na compra e venda de propriedades como bairro, casas, hotéis, empresas, de forma que vença o jogador que não for à falência, ou o jogador que tiver mais propriedades compradas em mãos. O tabuleiro é composto por propriedades (ruas, avenidas) que se agrupam em grupos de cores, ações de companhias, prisão/visitas e o início que ao passar o jogador recebe o pró-labore, além da receita federal e imposto de renda.

Nesta perspectiva o Banco Imobiliário Matemático foi pensado e construído, surgindo da necessidade de haver um material interdisciplinar no LEMATI que abrangesse também a história da cidade, pois além de não haver nada similar proposto até o momento, sabe-se da importância do aluno reconhecer o meio em que está inserido, além de valorizar a cultura local, evidenciando que a rua, o parque ou algum lugar turístico que frequenta tem a mesma importância e valor que qualquer outro.

Além disso, após a aplicação do jogo o professor tem espaço para elencar questionamentos sobre a preservação de patrimônios existentes no município e que devem ser cuidados e respeitados através de questionário podendo ser desenvolvido para uma maior objetivação do jogo.

Desta forma, utilizando como base o jogo já existente e aqui apresentado, o BIM foi confeccionado contendo um tabuleiro com 22 casas, 15 cartas de lugares conhecidos na cidade e 11 cartas de sorte ou revés que abrangem situações cotidianas e que envolvem problemas matemáticos para sua solução.

A figura 1 mostra o tabuleiro da adaptação elaborada.

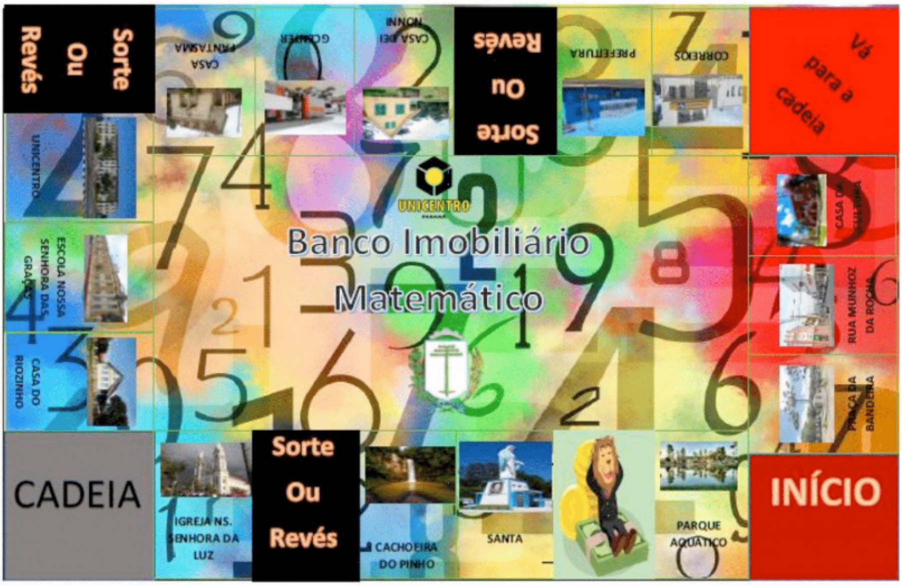


Figura 1 - Tabuleiro.

Fonte: As autoras.

O jogo funciona da seguinte forma:

Cada participante deve escolher seu marcador e receber a quantia de 600 reais para iniciar, as cartas de sorte e revés devem ser embaralhadas, os dados são jogados e quem tirar o maior número inicia.

Ao cair em uma casa o jogador pode escolher dentre as opções disponíveis de comprar ou realizar uma doação, no caso já se distingue o conceito de propriedade pública e privada. Quando tiver um dono, o mesmo deverá estipular um valor de aluguel, de forma que não ultrapasse o valor de compra do imóvel.

Ainda, as propriedades privadas podem ser vendidas a qualquer momento do jogo, existindo uma livre negociação. Para que se assemelhasse ao jogo original também, foi criada uma prisão.

A cada vez que o jogador passar pelo início receberá uma bonificação de 200 reais. Porém, ao cair na casa do leão o participante deve dar 10% do que possui a cada colega, referente ao imposto de renda. Para finalizar, a falência só poderá ser decretada quando a pessoa não possuir nenhuma propriedade e, ganha o jogo quem possuir todas as propriedades ou ser o último a não ir à falência.

As cartas dos lugares possuem os indicativos de propriedade que pode ser adquirida e seu respectivo valor e propriedades que não podem ser adquiridas, neste caso o jogador deve realizar uma doação para manutenção da mesma, instigando a todo o momento que os alunos estejam em contato com a matemática e que a pratique de maneira espontânea.

Nas cartas referentes à sorte e revés são situações cotidianas envolvendo problemas matemáticos que englobam as operações básicas, porém caso o docente queira, pode adaptar para um conteúdo em especifico tranquilamente.

Desta forma, o *bim* é um jogo matemático interdisciplinar que envolve inúmeras questões, além da matemática, como preservação da cultura local através dos patrimônios históricos citados, a preservação ambiental de pontos turísticos, e que pode ser adaptado para as necessidades individuais de professores e turmas em geral, sendo este um dos objetivos do LEMATI, a construção de jogos adaptáveis a realidade da pessoa que o procura.

3 I ANÁLISE E DISCUSSÃO

Ao se utilizar de um jogo mundialmente conhecido, espera-se captar a atenção dos estudantes e mostrar aos mesmos uma nova maneira de aprender matemática, além da lousa e caderno e sim, a matemática pode ser divertida, pode haver descontração em sala e que principalmente há possibilidade de uma ponte entre a matemática e outras disciplinas. Desafiando os educadores e educando a juntos construírem um conhecimento mais complexo e contextualizado.

E, para aqueles que ainda se negam a utilizar a interdisciplinaridade, Trindade (2008 p. 65), justifica essa reflexão ao que explicar sobre

> O caráter interdisciplinar da história da ciência não aniquila o caráter necessariamente disciplinar do conhecimento científico, mas completa-o, estimulando a percepção entre os fenômenos, fundamental para grande parte das tecnologias e desenvolvimento de uma visão articulada do ser humano em seu meio natural, como construtor e transformador desse meio.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os jogos quando utilizados como ferramenta metodológica visando a aprendizagem se constitui em material de ensino extremamente valioso e além de trabalhar com conceitos matemáticos, desenvolve autonomia, capacidade de percepção nas rodadas, criatividade, desenvolvimento de estratégias, raciocínio lógico, pois para o aluno é um desafio a ser desvendado.

Através da fala de diversos teóricos percebe-se a necessidade de se trabalhar mais com essas tendências de ensino que são tão necessárias e eficientes em sala, alcançando um público maior de alunos através da ludicidade e do contato com outros universos de conhecimento.

Nesta linha, o banco imobiliário matemático visa dar sustentabilidade a esta prática com objetivo de exaltar a importância do uso de jogos em aulas de matemática agregando ainda mais ao acervo do LEMATI, ainda mais quando trata-se da interdisciplinaridade que é comumente debatida atualmente.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, À Fundação Araucária e À UNICENTRO pelo apoio ao projeto.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

GRANDO, R.C.**O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula**. 2000. 239f. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

GRANDO, R.C. **O jogo suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino Aprendizagem na Matemática**. 1995. 194 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995

KAMII, C.; DEVRIES, R. **Jogos em grupo na educação infantil: implicações da teoria de Piaget**. Tradução: M. C. D. Carrasqueira; prefácio Jean Piaget. São Paulo: Trajetória Cultural, 1991

KISHIMOTO, T.M. **O jogo e a educação infantil**. In: KISHIMOTO, T.M. (Org.). Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.5. ed. São Paulo: Cortez, 2001. p.13-43.

TRINDADE, Diamantino Fernandes. **Interdisciplinaridade: Um novo olhar sobre as ciências. O que é interdisciplinaridade?** In: FAZENDA, Ivani. (Org.). São Paulo: Cortez, 2008. p. 65 – 84. De

Lançado em 1935, Banco Imobiliário tornou-se um campeão de popularidade. **O GLOBO**. 04, set. de 2013. Disponível em:<https://acervo.oglobo.globo.com/em-destaque/lancado-em-1935-banco-imobiliario-tornou-se-um-campeao-de-popularidade-10681945#ixzz6YWM0ZpRA.> Acesso em: 19 de setembro de 2020.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DE MONITORIAS ON-LINES DE CÁLCULO COMO FERRAMENTA DE NIVELAMENTO E INICIAÇÃO A DOCÊNCIA

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 06/08/2021

Tamires Ester Peixoto Bravo
Universidade Estadual de Goiás
Anápolis- Goiás
http://lattes.cnpq.br/2014335316765679

Pedro Lucas Moreira Rodrigues
Universidade Estadual de Goiás
Anápolis- Goiás
http://lattes.cnpq.br/8222073990662530

Matheus Alencar de Freitas
Universidade Estadual de Goiás
Anápolis- Goiás
http://lattes.cnpq.br/5142640980321407

Enrique Dias de Matos
Universidade Estadual de Goiás
Anápolis- Goiás
http://lattes.cnpq.br/9225511711958080

Pedro Augusto Araújo Sant'Ana
Anápolis
Universidade Estadual de Goiás
Anápolis- Goiás
http://lattes.cnpq.br/5909390356859443

Ivano Alessandro Devilla
Universidade Estadual de Goiás
Anápolis- Goiás
http://lattes.cnpq.br/6427301186294340

RESUMO: Têm-se notado, constantemente nos Cursos de Engenharia, um elevado índice de reprovação nas disciplinas básicas, principalmente, Cálculo 1. Essa problemática, foi observada nos alunos do 1° Período do Curso de Engenharia Agrícola, do Campus Central da Universidade Estadual de Goiás (UEG). Para a resolução deste problema, foi implantado monitorias de nivelamento pelo grupo ENG. AGRI@UEG, que faz parte do Programa de Educação Tutorial (PET). Entretanto, devido a situação formada pela emergência do COVID-19, os encontros semanais, tiveram que ser reformulados e realizados de forma virtual. Este projeto, favorece, significativamente, aos discentes do Curso, tanto aos egressos, quanto para os voluntários, em que, tem a oportunidade de desenvolver habilidades e competências, que agregam tanto profissionalmente, quanto pessoalmente. Além disso, o monitor tem o primeiro contato com a docência, servindo de experiência para futuras decisões na carreira. Já em relação aos participantes, foi caracterizado a necessidade e a aprovação do projeto, entretanto, não se teve uma participação significativa dos mesmos.

PALAVRAS-CHAVE: Atividade Remota, Matemática, Ensino Superior, Estudo Orientado.

APPLICATION OF ONLINE CALCULATION MONITORINGS AS A LEVELING TOOL AND TEACHING INITIATION

ABSTRACT: It has been noticed, constantly in the Engineering Courses, a high rate of failure in the basic subjects, mainly in Calculus 1. This problem was observed in the students of the 1st Period of the Agricultural Engineering Course, of the Central Campus of the State University of Goiás

(UEG). To solve this problem, level monitoring was implemented by the ENG.AGRI@UEG group, which is part of the Tutorial Education Program (PET). However, due to the situation created by the emergence of COVID-19, the weekly meetings had to be reformulated and carried out virtually. This project significantly benefits the course's students, both graduates and volunteers, who have the opportunity to develop skills and competences, which they add both professionally and personally. In addition, the monitor has the first contact with teaching, serving as an experience for future career decisions. Regarding the participants, the need for and approval of the project was characterized, however, there was not a significant participation of all.
KEYWORDS: Remote Activity, Math, Higher Education, Guided Study.

1 I INTRODUÇÃO

A matemática é um dos pilares da engenharia, entretanto, pode-se observar um elevado índice de reprovação dos alunos na disciplina de Cálculo 1 em diversas instituições de ensino superior do país. Como observado por PASSOS et. al (2007), em que, os alunos do curso de Engenharia Agrícola e Ambiental da Universidade Federal do Vale do São Francisco, do Campus de Juazeiro, obtiveram uma média de reprovação em Cálculo 1 de 33,97% em 2004/2, 2005/1 e em 2006/1. Os alunos, ao serem questionados sobre os motivos das reprovações, informaram que é por falta de estudo (62,6%) e por falta de monitorias (41,2%).

A lei Federal n°5.540, de 28 de novembro de 1968, em seu Art. 41, remete o dever de criar a função de monitor, sendo esta função, considerada título (Brasil,1968). O monitor, faz o papel de ligação entre docente e discente, além de estimular a empatia, a criatividade e a interação entre discentes (BRAUN; 2020). Ademais, ela serve como primeiro contado dos estudantes com a docência, fazendo com que ele passe por experiências prazerosas, e adquira habilidades, colaborando com a compreensão de sua verdadeira vocação (SOUZA,2013).

O projeto de monitorias on-lines, ajuda no nivelamento dos alunos, consequentemente, o aumento da média de notas e um maior engajamento dos alunos. Além disso, reduz a sobrecarga dos professores e aumenta a capacidade de autonomia dos monitores (CUNHA JR., 2017).

Como apresentado, a implementação de monitorias na graduação soma benefícios, tanto para os professores, quanto para alunos e monitores, tendo em vista que essa é uma prática que auxilia o ensino, melhorando o compreendimento dos conteúdos para os alunos e o desenvolvimento pedagógico dos monitores.

Em decorrência disso, o grupo PET- ENG.AGRI@UEG, oferece, desde 2013, monitorias para as disciplinas de Cálculo do Curso de Engenharia Agrícola, com auxílio dos professores, sendo uma atividade constante no planejamento da equipe de forma presencial. Entretanto, diante do atual cenário pandêmico, no qual o mundo se encontra, essa atividade foi reprogramada, para a utilização de mídias digitais.

Portanto o presente trabalho, tem como foco discutir o nivelamento e o acompanhamento dos alunos de Engenharia Agrícola da Universidade Estadual de Goiás (UEG), do Campus Central de Ciências Exatas e Tecnológicas- Henrique Santillo, matriculados na disciplina de Cálculo 1 por meio de monitorias de forma remota utilizando o Google Meet, bem como a aceitação e adesão dos alunos a este novo conceito.

2 | MATERIAIS E MÉTODOS

As monitorias foram organizadas pelo Programa de Educação Tutorial (PET) ENG. AGRI@UEG, e oferecidas aos alunos de Engenharia Agrícola matriculados na disciplina de Cálculo 1 do Campus Central da Universidade Estadual de Goiás (UEG), no semestre letivo de 2020/1 que se estende até o mês de outubro devido a situação de pandemia.

Inicialmente, foi realizado um nivelamento dos alunos pelo docente, revisando princípios básicos da matemática que são importantes ao longo do curso, e informando-os da necessidade da monitoria. Devido aos problemas sanitários em todo o mundo, as aulas presenciais foram suspensas, tendo-se uma reformulação do projeto, e a migração então para aulas remotas, ou seja, realizada por meio da plataforma Google Meet.

Ademais, 5 petianos se disponibilizaram-se para realização das monitorias, sendo 3 disponíveis na quarta-feira no período das 14 horas até as 16 horas, e 2 disponíveis na sexta-feira, também das 14 às 16 horas. Os materiais consistiam em listas disponibilizadas pelo professor, em que, os monitores aplicavam-se a auxiliar com dúvidas nas resoluções dos problemas que permeiam, a matemática básica, até conteúdos da própria disciplina. Além disso, foi registrada a frequências dos alunos na monitoria. Também, foi questionado os alunos sobre o nível de satisfação das atividades de monitoria.

3 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

O Projeto de Monitoria on-line para os acadêmicos, proporcionou um maior estímulo ao estudo, troca de conhecimentos, aprimoramento da relação interpessoal com os monitores, professores e com os próprios colegas, desenvolvendo uma relação de respeito e inclusão no ambiente acadêmico.

A grande maioria dos discentes, não compareceram nas monitorias, uma possível justificativa é a dificuldade de conexão à internet, visto que as atividades foram realizadas de maneira remota e totalmente on-line. Outra explicação para essa evasão, é a falta de interesse dos alunos, que por estarem no primeiro período do curso, provavelmente não desenvolveram o pensamento crítico sobre a nova realidade de Ensino Superior na qual se encontram, interferindo em seu percurso universitário. De acordo com Matoso (2012), a prática da monitoria representa um grande desafio, porque, além de ser uma experiência nova, exige uma postura mais séria.

Nas Figuras 1 e 2 são mostradas duas aulas de monitoria remota.

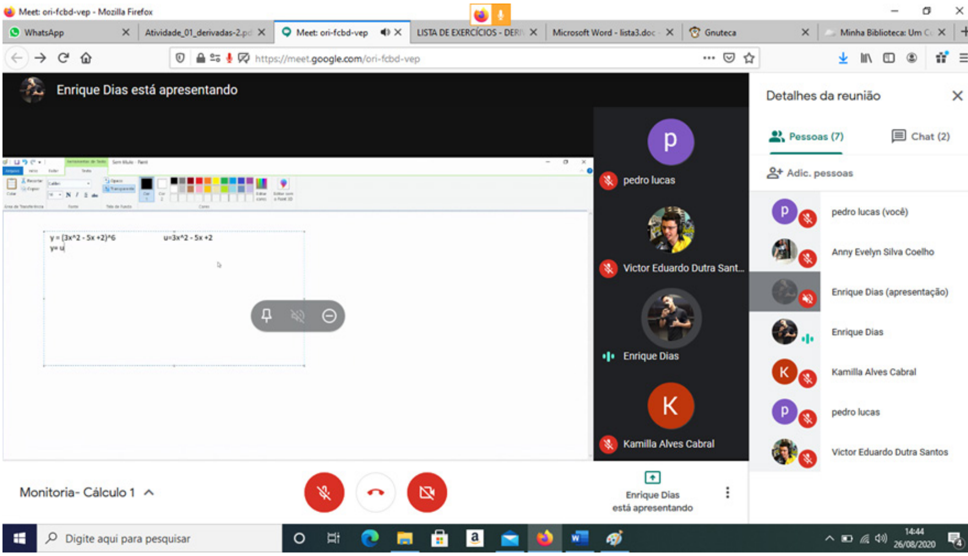


Figura 1: Monitoria realizada dia 28 de agosto de 2020 remotamente.

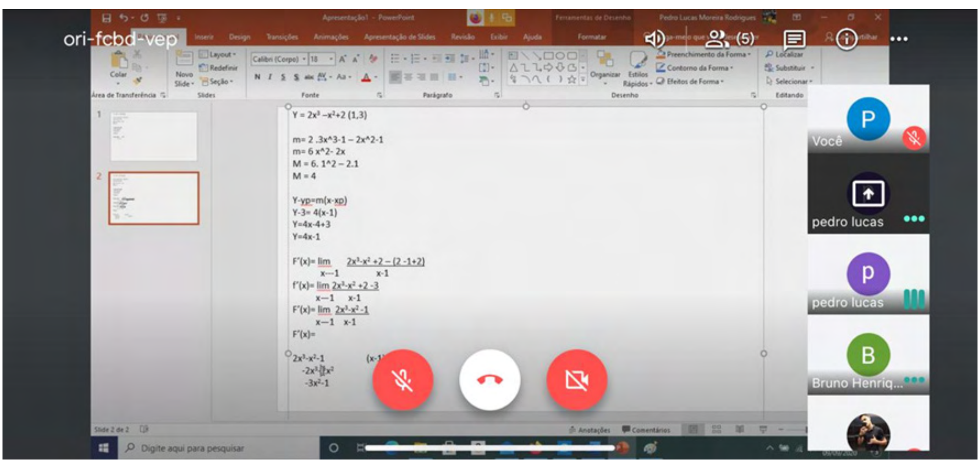


Figura 2: Monitoria realizada dia 16 de setembro de 2020 remotamente.

Comparando com os resultados analisados em ambiente presencial por Capuchinho et al. (2017) em seu trabalho titulado “O Pré-Cálculo como ferramenta didática para nivelamento educacional, inclusão e iniciação à docência”, nota-se uma certa semelhança na adesão e desempenho dos estudantes. Logo, a monitoria de forma remota se aproximou em questão de satisfação para os alunos. Já para os monitores, pode-se notar que houve um nível superior de dificuldade, pelo desafio de conseguir sanar as dúvidas e repassar o conhecimento de maneira remota. Mas essa adversidade foi rompida, sem grandes impedimentos e com uma rápida adaptação. Para os monitores, foi de suma importância o contato com a prática da docência, bem como com as plataformas utilizadas, ficando evidenciado a necessidade de busca contínua para melhorar o desempenho profissional e pessoal.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebe-se, que a monitoria apresenta um papel fundamental na formação dos discentes do curso de Engenharia Agrícola, tanto os voluntários do projeto, quanto aos participantes, consequentemente, o desenvolvimento do Curso, e da Universidade. Porém, mesmo apresentando este papel fundamental, as monitorias de Cálculo 1 não apresentam uma adesão ou aceitação por grande parte dos discentes, seja por falta de condições de acesso, pelo fato das atividades serem totalmente de forma remota, ou até mesmo pela falta de interesse por parte desses alunos, que ainda não compreenderam a importância dessa iniciativa.

Dessa forma, é importante ressaltar que a monitoria de Cálculo 1 é essencial tanto para os discentes, quanto para a Instituição de Ensino Superior, por isso os discentes devem compreender o papel que o estudo orientado tem na formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos, em especial, aos participantes do projeto, ao Professor Tiago Pereira pela orientação, à Universidade Estadual de Goiás, e ao Programa de Ensino Tutorial (PET) do Ministério da Educação pela concessão de bolsas aos alunos.

REFERÊNCIAS

BRAUN, Maria do Socorro de Assis; MELO, S.M. **A monitoria no processo de aprender a empreender.** Rev. Pemo, v. 2, n. 2, p. 1-17, 2020.

BRASIL. Senado Federal, **Lei Federal n.º 5540**, de 28 de novembro de 1968.

CAPUCHINHO, F.F et al.; **O PRÉ-CÁLCULO COMO FERRAMENTA DIDÁTICA PARA NIVELAMENTO EDUCACIONAL, INCLUSÃO E INICIAÇÃO À DOCÊNCIA**.; in: IV Congresso de Ensino, Pesquisa e Extensão da UEG; Universidade Estadual de Goiás, Anápolis-GO; p. 1-5, 2017.

CUNHA JR, Fernando Rezende da Cunha; **ATIVIDADES DE MONITORIA: UMA POSSIBILIDADE PARA O DESENVOLVIMENTO DA SALA DE AULA**; Educação Pesquisa, São Paulo, v. 43, n. 3, p. 681-694; 2017.

MATOSO, L. M. L. **A importância da monitoria na formação acadêmica do monitor: um relato de experiência. Universidade Potiguar**. Rio Grande do Norte, p. 77-83, 2012.

PASSOS, F.G et al.; **ANÁLISE DOS ÍNDICES DE REPROVAÇÕES NAS DISCIPLINAS CÁLCULO I E GEOMETRIA ANALÍTICA NOS CURSOS DE ENGENHARIA DA UNIVASF**; in: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia; XXXV; Petrolina-PE; p. 1-15, 2007.

SOUZA, Felipe Maciel dos Santos; GOMIDE, Lucas Bilche; **EXPERIÊNCIA DE MONITORIA NO ENSINO DE PSICOLOGIA DA APRENDIZAGEM**. Revista Online de Extensão da UFGD, v. 1, n. 1, p 67-78; Dourados-MS; 2013.

CAPÍTULO 4

A PSICOLOGIA EDUCACIONAL, A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E A PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: DISCUSSÕES SOBRE ASPECTOS RELACIONADOS À APRENDIZAGEM

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 04/08/2021

André de Lima Pereira Gomes
Pontifícia Universidade Católica do Paraná,
Escola de Ciências da Vida
Curitiba – PR
https://orcid.org/0000-0003-3576-5129

Gyliane Ornela Barbosa
Pontifícia Universidade Católica do Paraná,
Escola de Educação e Humanidades
Curitiba – PR
https://orcid.org/0000-0002-9733-3279

Márcia Santos Melo
Universidade Estadual de Maringá,
Departamento de Ciências Exatas
Maringá – PR
https://orcid.org/0000-0001-8546-9884

RESUMO: O artigo ora apresentado tem como objetivo discutir alguns aspectos da aprendizagem matemática, a partir da ótica Piagetiana e, também, por apontamentos realizados por estudiosos da área da Psicologia Educacional e da Psicologia da Educação Matemática. Nessa perspectiva, são trazidas reflexões oriundas desde os estudos da Psicologia da Aprendizagem que abordam algumas correntes teóricas (Beheaviorismo e AssocionismoBeheaviorismo e a teoria Histórico Cultural), bem como a ótica Piagetiana sobre algumas dificuldades de aprendizagem e sua relação com os estágios de desenvolvimento. Desse modo, são trazidas ainda algumas contribuições advindas de pesquisas da área da Psicologia da Educação Matemática, adentrando nos apontamentos acerca de algumas limitações enfrentadas pelos professores em sala de aula. Cabe ressaltar que neste artigo as discussões são apoiadas em trabalhos já publicados e em resultados de pesquisas realizadas por grupos de pesquisa em parceria com Universidades e escolas nas quais estão inseridos os pesquisadores, o sujeito aprendente e os docentes.Como resultado das análises dos materiais encontrados foram apontados a importância de levar em conta a construção histórica do sujeito dentro do ambiente escolar no qual diferentes áreas podem contribuir tendo em vista a variedade de aspectos que devem ser considerados: os biológicos, neurológicos e os metodológicos.

PALAVRAS-CHAVE: Dificuldade de Aprendizagem. Ensino Fundamental. Desenvolvimento. Papel do Professor. Interdisciplinaridade.

EDUCATIONAL PSYCHOLOGY, MATHEMATICAL EDUCATION AND THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICAL EDUCATION: DISCUSSIONS ON ASPECTS RELATED TO LEARNING

ABSTRACT: This article aims to discuss some aspects of mathematical learning, from the Piagetian point of view and, also, by notes made by scholars in the area of Educational Psychology and Psychology of Mathematics Education. In this perspective, we bring reflections from the studies of Learning Psychology that address some theoretical currents (Beheaviorism and

Associationism, Beheaviorism and the Cultural Historical theory), as well as the Piagetian view on some learning difficulties and their relation to developmental stages. In this way, we also bring some contributions from research in the area of the Psychology of Mathematics Education, going into the notes about some limitations faced by teachers in the classroom. As a result of the analysis of the materials found, the importance of taking into account the historical construction of the subject within the school environment was pointed out, in which different areas can contribute, considering the variety of aspects that must be considered: biological, neurological, and methodological.
KEYWORDS: Learning Difficulty. Elementary School. Development. Role of the Teacher. Interdisciplinarity.

1 | INTRODUÇÃO

Na contemporaneidade uma palavra usualmente utilizada por diversas áreas do saber é a interdisciplinaridade. A etimologia da palavra mostra que ela advém da junção de outras duas (Inter + Disciplina) e carrega como significado, segundo o Dicionário Online de Português, o que é "próprio a duas ou mais disciplinas; que se efetiva nas relações entre duas ou mais disciplinas; comum a mais do que uma disciplina". Desde modo, ao falar sobre os processos de ensino aprendizagem deve-se levar em conta a força e efeitos dessa palavra no contexto da educação (DICIO, 2021).

A Psicologia, enquanto área do saber que lida com o ser humano e seus processos mentais e/ou comportamentais traz para a área da Educação valorosos caminhos possíveis de se traçar na construção da aprendizagem. Assim, Brito (2001, apud Quintiliano,2011) pontua que muitas contribuições são geradas quando alinhamos os construtos teóricos da Psicologia Educacional com a educação Matemática. Quintiliano (2011), por sua vez, revela que é possível haver muitas dificuldades enfrentadas pelos alunos no ensino matemático, com ênfase principal nas dificuldades algébricas e aritméticas, e que estas, estejam diretamente relacionadas a variáveis psicológicas como a ansiedade, a autoeficácia, a autopercepção de desempenho, entre outros.

Entre os muitos conteúdos da Educação básica, o ensino matemático se destaca, quer seja pela dificuldade de ensinar, quer seja pela falta de proximidade que os alunos têm em enxergar tais conceitos no seu dia a dia. Desse modo, este artigo tem como objetivo discutir alguns aspectos da aprendizagem matemática, a partir da ótica Piagetiana bem como por apontamentos realizados por estudiosos da área da Psicologia Educacional e da Psicologia da Educação Matemática.

Pesquisadores das duas áreas eventualmente se encontram em reuniões anuais da Associação Nacional de Pesquisa em Educação (ANPED), nas quais podemos citar os psicólogos da Educação Matemática da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) representantes do Grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (PSIEM) e os psicólogos de um grupo de pesquisa em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco - Recife (UFPE) os quais, discutem acerca da conceptualização em

Matemática por meio das análises das competências escolares e extra escolares.

2 | PSICOLOGIA E APRENDIZAGEM

Desde o século XIX, quando a Psicologia surge formalmente como disciplina, os assuntos em torno da aprendizagem começaram a ser considerados como objetos de estudo. Nesse início, as teorias que surgiram olhavam o processo de aprendizagem como algo externo ao sujeito. Como exemplo dessas correntes teóricas pode-se pontuar o empirismo associacionista e o comportamentalismo (Behaviorismo) (NOGUEIRA, 2007).

Para Nogueira (2007) o Associacionismo-Behaviorismo é a base da escola tradicional, na qual o aluno apenas recebe, de modo passivo a educação, e o professor transmite determinado conhecimento e assim o aluno, pouco a pouco vai se apropriando do que lhe foi passado.

O pai do Behaviorismo ou Comportamentalismo foi o Norte americano Frederic B. Skinner, tendo como foco principal em sua teoria, a observação e descrição do comportamento. A aprendizagem, nessa perspectiva, está sobre a influência de condições externas e do próprio comportamento dos alunos, aqui o "ensinar" é determinado pelo comportamento de "Explicar" e "aprender" está relacionado ao comportamento de "repetir" ou "Exercitar" o que foi explicado até que se consiga reproduzir com fidedignidade o que foi ensinado (NOGUEIRA, 2007).

Nessa perspectiva, a partir das ideias do filósofo alemão Imannuel Kant, Nogueira (2007) descreve ainda as teorias construtivistas como um meio termo entre as correntes teóricas racionalistas e empiristas. Desse modo, para a teoria construtivista todo o conhecimento se dá por meio da relação que se estabelece entre o indivíduo e o meio. De outra parte, a Teoria Histórico-Cultural ou Sócio Histórica nasceu das contribuições de Liev S. Vygostsky, e carrega em si o pressuposto de que o indivíduo é um ser social desde o nascimento, a criança é ativa e seu pensamento vai se construindo no ambiente histórico de modo gradativo.

Para Vygotsky (1988, apud Nogueira, 2007) desenvolvimento e aprendizado são processos complementares e recíprocos. Ele considerava que o pensamento e a linguagem são áreas interdependentes do desenvolvimento infantil. Quando a criança adquire a linguagem, ela começa a formar seu pensamento, desenvolvendo assim a imaginação, o uso da memória e o planejamento de suas ações. Para essa teoria um conceito só é aprendido quando o indivíduo consegue fazer uso social do mesmo. E talvez esteja aqui uma real deficiência do ensino matemático, uma vez que os alunos não conseguem ver, de maneira clara, o uso social de alguns conteúdos (NOGUEIRA, 2007).

Cabe ressaltar que essa pontuação supracitada não é uma crítica infundada com o viés de diminuir a importância da Matemática no sistema de educação, antes pois, é uma reflexão prático-teórica das práxis do professor, buscando lançar luz sobre lacunas importantes, para que o ensino matemático cresça como conhecimento e diminua como conteúdo meramente a ser decorado.

2.1 A Psicologia e o desenvolvimento segundo o olhar Piagetiano

Frente a isso a Psicologia, enquanto área do saber que lida com o ser humano e seus processos mentais e/ou comportamentais traz para a área da Educação valorosos caminhos possíveis de se traçar na construção da aprendizagem. Brito (2001, apud Quintiliano,2011) pontua que muitas contribuições são geradas quando alinhamos os construtos teóricos da Psicologia Educacional com a educação Matemática.

Nessa perspectiva, Quintiliano (2011) revela que é possível haver muitas dificuldades enfrentadas pelos alunos do ensino matemático (algébricos e aritméticos) que estejam diretamente relacionadas a variáveis psicológicas como a ansiedade, a autoeficácia, a autopercepção de desempenho, entre outros. A Psicologia é uma ciência com inúmeras formas de olhar o desenvolvimento humano, embora não desconsidere estas formas descritas na literatura, para este trabalho é interessante olha como o desenvolvimento ocorre segundo a uma ótica piagetiana, uma vez que essa visão desenvolvimentista está muito enraizada no modelo de ensino no Brasil. Piaget descreve o desenvolvimento cognitivo como um processo que se subdivide em quatro fases ou estágio:

- O primeiro estágio é o Sensório-motor que compreende indivíduos de 0 a 2 anos – nesta fase a criança aprende por meio da experiência; De acordo com Cavicchia, (2010) a evolução cognitiva nesse período pode ser descrita em seis subestádios nos quais estabelecem-se as bases para a construção das principais categorias do conhecimento que possibilitam ao ser humano organizar a sua experiência na construção do mundo: objeto, espaço, causalidade e tempo.

- O segundo estágio é o Pré-operatório que compreende indivíduos de 2 a 7 anos – nesta fase a criança já desenvolve um entendimento rudimentar da matemática, pois aqui ele já consegue utilizar os símbolos, já é capaz de julgar as formas (Cruz, 2014). Com a aquisição da linguagem verbal do indivíduo, palavras como “mais”, “menos” ,“metade” passam a fazer parte do repertório linguístico.

- O terceiro estágio é o Operatório Concreto, que compreende indivíduos de 7 a 12 anos – nesta fase a criança já consegue pensar de modo lógico, principalmente pela utilização de material concreto e situações reais do dia a dia;

- O último estágio é o Operatório Formal que compreende indivíduos de 12 anos em diante – nesta fase a criança já consegue fazer uso de operações lógicas abstratas, ou seja, já consegue raciocinar a respeito de uma problemática e ser capaz de usar a lógica para resolvê-las. (CRUZ, 2014).

Para Myklebust (1965, apud Cruz,2014) o desenvolvimento cognitivo acontece em cinco fases: a Sensação - considerado o nível mais básico da experiência humana; Percepção – está ligada a seleção e interpretação dos estímulos; Imagem – diferenciar ou identificar uma percepção de um objeto; Simbolização – está relacionada a capacidade cognitiva de representar e resumir experiências por meio de símbolos; Conceptualização – nível mais elevado, permite a classificação, ordenação e categorização das percepções.

2.2 A Psicologia da Educação Matemática

Partindo dos apontamentos realizados anteriormente, consideramos pertinente tecer algumas considerações sobre a relação entre a Psicologia e a Educação Matemática, tendo em vista que anterior a esse momento as duas áreas trabalhavam de modo disjunto, a qual culminou na no surgimento da Psicologia da Educação Matemática em 1976 no III International Congress on Mathematics Education (ICME), realizado em Karlshure (Alemanha) a partir do grupo internacional Psychology of Mathematics Education (PME) (FALCÃO, 2003). Embora não pertencessem a esse grupo, vários trabalhos já haviam sido publicados naquela época e assim, resultou num esforço da Psicologia, com intuito de proporcionar suporte para futuras teorizações na perspectiva da Educação Matemática (BARBOSA e FERREIRA, 2007).

Nessa entoada fazem parte ainda os pesquisadores do Departamento de Psicologia da UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro) em parceria com o Departamento de Psicologia UFPE (Universidade Federal de Pernambuco) que focam os seus estudos nos aspectos relacionados à Psicologia do desenvolvimento e Psicologia da Educação Matemática, no que concerne às estruturas aditivas e multiplicativas. Ademais, Falcão (2003), aponta outra relevante contribuição oriunda da área da Psicologia da Educação Matemática que é o grupo de pesquisa em neuropsicologia da Rede Sarah de Hospitais (Brasília), o qual busca mapear os caminhos neuronais relacionados a atividades matemáticas, como a algébrica, por exemplo. Cabe ressaltar que dos grupos de pesquisa mencionados são os que aparecem nos trabalhos publicados por marcados por temas específicos.

Frente ao exposto podemos verificar os esforços em conjunto das duas áreas no sentido de compreender os fatores que envolvem as dificuldades de aprendizagem em matemática bem como em pensar em ações que podem ser realizadas no sentido. Segundo Falcão (2003), estudiosos da Psicologia da Educação Matemática se mobilizam no sentido de considerar o aspecto afetivo no que diz respeito ao alcance das habilidades e competências matemáticas dos alunos. (BREEN, 2000; WEYL-KAILEY,1985; CABRAL & BALDINO, 2002; HAZIN & DA ROCHA FALCÃO, 2001; GINSBURG, 1989; RÉGNIER, 1995; GINSBURG, 1989).

Os debates realizados acerca dos assuntos que envolvem as questões relacionadas à aprendizagem matemática não são recentes, tendo em vista que desde a década de 70 pesquisadores já refletiam e estudavam sobre aspectos relevantes para a compreensão dos processos de aprendizagem por parte do sujeito aprendente. (CAMPUS, 1975; SOUZA, 1981; ABREU, 1990; SILVA, 1995).

Cabe ressaltar que os estudos mencionados se referem a pesquisas que investigaram desde os processos de construção do conhecimento espacial da criança (ABREU, 1990), perpassando pelas práticas de professores (MARTINS, 2011) até a análise do processo de ensino-aprendizagem das operações matemáticas com professores e alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental (SILVA, 1995), na qual o autor observou que os alunos não desenvolveram um aprendizado satisfatório no sentido lógico e compreensivo.

Nessa perspectiva consideramos relevante apontar a contribuição das pesquisas realizadas, no sentido de investigar e compreender os aspectos cognitivos relacionados à aprendizagem, pelas áreas tanto da Psicologia quanto da Psicologia da Educação Matemática.

Carvalho (2013) aponta em seu trabalho considerações teóricas advindas de um projeto de pesquisa em desenvolvimento na Universidade Estadual de Londrina, juntamente com o Departamento de Matemática e a Clínica Psicológica da mesma instituição, as quais refletem acerca dos métodos bem como da elaboração de materiais que possam contribuir para o ensino e aprendizagem de Matemática principalmente no que diz respeito as crianças com discalculia.

Destarte a autora traz considerações relacionadas à dislexia (problemas da leitura) bem como da disgrafia e disortografia (expressão escrita) e da discalculia (habilidades matemáticas) pontuando as frustrações, geradas por causa da perda do ano escolar, tanto para os alunos quanto para a família do estudante. Desse modo, esses apontamentos são discutidos a partir do ponto de vista neurológico, o qual envolve as dificuldades de trabalhar com determinados conceitos, tendo em vista as divergências nas literaturas. Ademais, a autora ressalta ainda, a importância da discussão do conceito no sentido de que os professores possam ser orientados e que as crianças discalcúlicas possam ter a assistência necessária no concernente às dificuldades de aprendizagem.

Nessa perspectiva, podem ser citados trabalhos que discutem sobre o funcionamento do Sistema Nervoso Central (SNC) e seu papel no desenvolvimento das habilidades matemáticas, principalmente nos aspectos relacionados a fatos numéricos (COSTA, ROHDE, DORNELES, 2012) bem como a funcionalidade da memória de trabalho (CORSO e DORNELES, 2012). Carvalho (2013) reitera a necessidade da compreensão do processo de desenvolvimento das habilidades numéricas e sua relação com os fatos numéricos.

Por fim, de um modo geral, Carvalho (2013) pontua que expressões relativas a “transtornos do desenvolvimento da aritmética”, “transtornos matemáticos” e “transtornos específicos em matemática”, são colocados de modo a se confundirem com dificuldades em matemática, as quais podem se iniciar a partir da realização de cálculos até a resolução de problemas matemáticos que dependem da compreensão escrita, bem como da mobilização de estratégias aritméticas.

3 I O PROFESSOR E ALGUMAS LIMITAÇÕES EM SALA DE AULA

É indiscutível a presença da matemática no cotidiano da humanidade. Em tudo que nos rodeia ou que fazemos utilizamos números, noção de espaço, noções geométricas, partindo dessa premissa consideramos relevante que o ensino de matemática seja realizado de modo a utilizar essa vivência como potencialidade para o aprendizado do sujeito. Nesse contexto, segundo Libâneo (2001, p. 37): “O ensino mais do que promover a acumulação dos conhecimentos, cria modos e condições de ajudar os alunos a se colocarem ante a realidade para pensá-la e atuar nela”, desse modo percebemos que o professor tem um papel fundamental no que concerne a instrumentalização do aluno para que o processo de aprendizagem da matemática ocorra de modo mais natural possível.

Desse modo, concebemos o papel do professor como aquele que proporciona diferentes metodologias de trabalho em suas aulas, bem como a disponibilização de materiais lúdicos sejam eles concretos ou tecnológicos. Essas ações dos docentes permitirão que os sujeitos possam mobilizar: a imaginação, o uso da memória, a visualização e colocar em prática estratégias advindas da sua própria vivência social (NOGUEIRA, 2007).

Nessa perspectiva podemos citar várias opções de materiais de apoio que podem ser disponibilizadas pelos professores para os alunos: jogos que estimulam e propiciam a construção de noções aritméticas (BRENELLI, 1993), o trabalho com a linguagem computacional LOGO que oportunizam a exploração de noções espaciais, (ABREU, 1990) e o conhecimento de comerciantes independe de sua instrução escolar (LIMA, 1985). Por outro lado, Imenes (1989) aponta para a dificuldade dos professores na percepção de inovações no que diz respeito à Matemática, fruto de ideias relacionadas à concepção de que a Matemática não é para todos, bem como da visão do professor como o sujeito detentor de todo o conhecimento.

Considerando que pesquisas apontam a carência de materiais pedagógicos voltados para a demanda crescente e diversificada dentro da sala de aula, De Carvalho (2013) ressalta que o professor contemporâneo assume classes com inúmeras dificuldades; alunos com dislexia, discalculia, transtorno de déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH) entre outros. Ademais, o autor também pontua que o preparo dos professores para lidar com essa demanda, ainda é muito deficitário, o que os motiva a participarem de cursos de capacitação, conferências e eventos nos quais são discutidas as produções de materiais didáticos que possam ser utilizados como ferramenta para potencializar o ensino de matemática.

4 I METODOLOGIA

Para que uma investigação possa ser efetivada entendemos a necessidade de traçar o caminho metodológico que visa nortear os estudos no sentido do cuidado com o desenvolvimento desde o delineamento do que se vai pesquisar, perpassando pelas variáveis que podem ser observadas até a produção dos dados do que se quer analisar.

Nessa perspectiva, concebemos a abordagem desta investigação como de cunho qualitativo tendo em vista que, a existência de uma relação entre o mundo e o sujeito além daquela proporcionada pelos números, na qual o pesquisador analisa os dados produzidos a partir do seu olhar. Em relação aos objetivos, este trabalho tem em si os aspectos de uma pesquisa exploratória uma vez que busca proporcionar uma maior familiaridade com um problema (GIL, 2008).

Desse modo, buscamos produções que discutissem diferentes pontos de vista de autores em relação aos aspectos relacionados à aprendizagem matemática e os problemas enfrentados tanto pelos sujeitos de aprendizagem quanto pelos docentes. Nesta seara, realizamos buscas em alguns bancos de teses de instituições que realizam investigações nas seguintes linhas de pesquisas: Psicologia e aprendizagem, Psicologia educacional e Psicologia da Educação Matemática. Foram utilizadas como palavras-chave, para a busca dos trabalhos, os termos das linhas de pesquisa mencionadas acima e ao final focamos em 5 produções as quais consideramos que responderiam o objetivo desse artigo.

O exercício mais analítico acerca dos trabalhos encontrados, foram apoiados nos pressupostos de Cervo e Bervian (2002) segundo as etapas trazidas em seu aporte teórico a saber: pré-leitura, leitura seletiva, leitura crítica ou reflexiva e a leitura interpretativa.

5 | ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Após percorrer por toda essa construção teórica, é possível expor algumas considerações pertinentes à temática do ensino/aprendizagem da matemática. Fica claro, diante do exposto, que a relevância do assunto é indiscutível, uma vez que foi possível encontrar quantidade significativa de material disponível.

Ao se olhar para o ambiente escolar, é necessário ter uma visão ampla do sujeito que está dentro da sala de aula, compreender que este é um ser inserido dentro de uma sociedade, que carrega consigo valores próprios, pensamentos próprios, sentimentos únicos, visões de mundo muito distintas. Para essa compreensão é preciso encarar o ambiente escolar como um espaço Interdisciplinar, onde diferentes áreas do saber, podem e devem trabalhar juntas para um maior desenvolvimento da educação.

Entre as inúmeras ciências possíveis de atuação no espaço educacional, a Psicologia vem a algum tempo trazendo importantes contribuições ao corpo docente, principalmente ao ensino específico da Matemática. Ao se apropriar dos construtos teóricos produzidas por pesquisadores como Piaget, é possível compreender que alunos com idades diferentes estão dentro de fases de desenvolvimento diferentes, que muitas das dificuldades visualizadas pelos professores pode ter relação com distúrbios da aprendizagem, como dislexia, discalculia ou disgrafia, e por tanto necessitam de uma transmissão de conhecimento diferenciado também.

Outro pesquisador com considerações importantes na construção deste trabalho é Vygostsky. Para esse pesquisador um conceito só é aprendido quando o indivíduo consegue fazer uso social do mesmo, desde modo é possível inferir que a aprendizagem não está vinculada apenas ao saber do professor, mas também ao espaço social que este professor ocupa na vida de seus alunos, bem como no vislumbre do conteúdo aprendido em seu contexto social, seja na escola ou nos outros núcleos dos quais o sujeito faz parte.

Tendo em vista a importância do papel do professor e considerando que essa já é uma disciplina que carrega alguns estigmas, entendemos a necessidade de que o profissional docente dessa área permaneça em constante evolução de seus aprendizados, e principalmente de como levar o conhecimento matemático de forma clara e eficaz para a sala de aula.

Longe de sanar todos os questionamentos a respeito do processo de ensino aprendizagem da Matemática, este trabalho se debruçou apenas em captar, de modo exploratório, o que vem sendo produzido e comentado a respeito da temática. Assim sendo, é necessário a produção de mais estudos que demonstram, não apenas a efetividade da união de diferentes ciências (como a Psicologia e a Matemática) para o processo de aprendizagem, como também para produção de mais subsídios teórico/científico que auxiliem a educação no país.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, C. P.; FERREIRA, A. C. **Psicologia e Educação Matemática: Um olhar sobre as pesquisas produzidas no Brasil**. In: IX ENEM, 2007, Belo Horizonte. Anais.do IX Encontro Nacional de Educação Matemática (IX ENEM). v. 1, p. 1-10.

BRITO, M. R. F. de. (org). **Psicologia da educação matemática: teoria e pesquisa**. Florianópolis: Insular, 2001.

CARVALHO, A. M. T. **Educação matemática e psicologia cognitiva: intervenção integrada em discalculia do desenvolvimento**. In: VI Congresso Internacional de Ensino de Matemática2013. 2013. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1070/353

CAVICCHIA, D. de C. et al. **O desenvolvimento da criança nos primeiros anos de vida**. IN Caderno de Formação: Formação de Professores Educação Infantil-Princípios e Fundamentos, v. 1, p. 13-27, 2010.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A. **Metodologia Científica**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 2007

CRUZ, V. **Desenvolvimento cognitivo e aprendizagem da matemática. Análise Psicológica**, v. 32, n. 1, p. 127-132, 2014. Disponível em: http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?pid=S087082312014000100008&script=sci_arttext&tlng=en

FALCÃO, J. T. R. **Psicologia da Educação Matemática: uma introdução**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.)

IMENES, L. M. **Um estudo sobre o fracasso do ensino e da aprendizagem Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

INTERDISCIPLINARIDADE. *In*. DECIO, **Dicionário Online de Português**. Porto: 7 graus, 2021. Disponível em: https://www.dicio.com.br/interdisciplinaridade/#:~:text=Significado%20de%20 Interdisciplina ridade&text=Capaz%20de%20estabelecer%20rela%C3%A7%C3%B5es%20 entre,Inter%20% 2B%20disciplina%20%2B%20idade. Acesso em 19/02/2021.

LIBANEO, J. C. **Pedagogia e pedagogos: inquietações e buscas**. Educar em Revista, Curitiba: n.17, 2001.

NOGUEIRA, C. M. I. **As teorias de aprendizagem e suas implicações no ensino de matemática**. Acta Scientiarum. Human and Social Sciences, v. 29, n. 1, p. 83-92, 2007. Disponivel em: http://periodicos.uem.br/ojs/index.php/ActaSciHumanSocSci/article/view/141/2708

QUINTILIANO, L. C. et al. **Relações entre os estilos cognitivos, as estratégias de solução e o desempenho dos estudantes na solução de problemas aritméticos e algébricos**. 2011. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/251112/1/Quintiliano_LucianedeCastro_D.pdf

CAPÍTULO 5

DA INFORMALIDADE A SALA DE AULA: A MATEMÁTICA DO MEU ALUNO

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 28/07/2021

Evren Ney da Silva Jean
Professor da Secretaria Municipal de Educação
Itacoatiara-AM
https://orcid.org/0000-0002-5037-4743

Meiry Jane Cavalcante Rattes
Professora da Secretaria Municipal de Educação
Itacoatiara-AM
https://orcid.org/0000-0002-1958-5673

Márcio Laranjeira Anselmo
Professor da Secretaria de Estado de Educação
Itacoatiara-AM
https://orcid.org/0000-0003-4356-7878

Reginaldo Nascimento da Silva
Professor da Secretaria Municipal de Educação
Itacoatiara-AM
https://orcid.org/0000-0003-1822-6211

RESUMO: Este artigo apresenta os resultados de um projeto desenvolvido com alunos da Escola Municipal Dom Paulo MC Hugh em Itacoatiara, apresentado na I Feira Amazonense de Matemática, na categoria Escolas Públicas de Educação Inclusiva, modalidade EJA. Teve como objetivo investigar o processo de cálculo matemático utilizado pelos estudantes que desenvolvem suas atividades profissionais na construção civil, realizando observações e comparações entre os métodos usados na sua profissão e os utilizados nas aulas de matemática. A pesquisa transcorreu dentro da abordagem qualitativa, tendo como percurso investigativo a pesquisa de campo, compreendendo as atividades profissionais dos alunos por meio da matemática. Os resultados exigiram do pesquisador e dos colaboradores um estudo interdisciplinar no processo de ensino e aprendizagem da matemática que pôde aproximar a comunidade escolar desse conhecimento por meio da experiência de vida dos alunos da Educação de Jovens e Adultos.
PALAVRAS-CHAVE: Educação; Experiência; Matemática.

FROM INFORMALITY TO THE CLASSROOM: MY STUDENT'S MATH

ABSTRACT: This article presents the results of a project developed with students from the Dom Paulo MC Hugh Municipal School in Itacoatiara, presented at the 1st Amazonian Mathematics Fair, in the category Public Schools of Inclusive Education, EJA modality. It aimed to investigate the process of mathematical calculation used by students who develop their professional activities in construction, making observations and comparisons between the methods used in their profession and those used in mathematics classes. The research took place within the qualitative approach, having as an investigative path the field research, comprising the professional activities of students through mathematics. The results required from the researcher and collaborators an interdisciplinary study in the teaching-learning of mathematics,

which could bring the school community closer to this knowledge through the life experience of students in Youth and Adult Education.
KEYWORDS: Education; Experience; Math.

1 I INTRODUÇÃO

Pode-se considerar que o contexto escolar das turmas da Educação de Jovens e Adultos (EJA) vem passando por grandes transformações, sendo "permeado por múltiplas culturas a partir de diferentes saberes e experiências, que nem sempre dão sentido ao ato de educar em uma perspectiva que supere a mera transmissão de conhecimento" (ALMEIDA e GODOY, 2016, p.2).

Há de considerar também, que os estudantes da EJA, por serem um público da educação inclusiva, têm muitos pontos em comum, é uma clientela de jovens, adultos e idosos que na maioria das vezes possuem muitas dificuldades de aprendizagem fortemente influenciadas pelo tempo que estão afastados de uma sala de aula, bem como a necessidade que os mesmos possuem de trabalhar durante o dia ou parte da noite para trazer o sustento aos seus familiares ou até mesmo a necessidade de migrarem do campo para cidade por terem preferência ao ensino presencial ao mediado por tecnologias.

Mediante ao exposto, a produção deste artigo surge num momento de reflexão acerca de relatos de experiências de grupos de professores nos intervalos da escola em que atuam, os quais foram fundamentais para retratar a trajetória acadêmica e profissional do professor/pesquisador quando ministrava o componente curricular de matemática na EJA em uma escola pública municipal do município de Itacoatiara no Estado do Amazonas.

Com o propósito de compartilhar um recorte temporal, o estudo vem apresentar um trabalho desenvolvido com aproximadamente 75 estudantes da 3ª fase da Escola Municipal Dom Paulo Mc Hugh em Itacoatiara no período de 2018. Naquele momento, pôde-se observar pelas conversas e justificativas das ausências e atrasos dos estudantes nos primeiros tempos de aula, a existência de um número significativo dos discentes da escola que desenvolvem suas atividades profissionais na informalidade que a sociedade os impõe e que de uma maneira intuitiva possuem o conhecimento de determinados conceitos da matemática com muita expertise.

No entanto, é notório o contraste entre a matemática adquirida pela experiência profissional quando comparado à formalidade dos cálculos matemáticos apresentados em sala de aula. São dúvidas que mexem com a compreensão do professor e os fazem se perguntar: como o pedreiro, o carpinteiro, a costureira, o eletricista, o serralheiro, dentre outros profissionais que frequentam as aulas noturnas da EJA, especialistas em suas áreas de atuação, conseguem construir orçamentos quase precisos dos materiais a serem usados em uma obra, o tempo gasto e preço para a prestação do serviço, e mesmo assim tenham um rendimento tão abaixo do esperado na disciplina de matemática?

Não se pode considerar o fato de um estudante ao retornar à escola depois de praticamente uma década ou mais, que ele não traga consigo a escolaridade que deveria ter na idade certa. Ora, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação é cristalina quando trata em seu artigo 37,

> § 1º. Os sistemas de ensino assegurarão gratuitamente aos jovens e aos adultos, que não puderam efetuar os estudos na idade regular, oportunidades educacionais apropriadas, consideradas as características do alunado, seus interesses, condições de vida e de trabalho, mediante cursos e exames.

Para Almeida e Godoy (2016) a EJA emerge de lacunas do sistema educacional regular e tem um público-alvo heterogêneo com processos formais e informais para a aquisição de conhecimentos básicos de competências técnicas, profissionais ou com habilidades socioculturais enraizadas em diferentes contextos sociais.

Nesta perspectiva, este trabalho buscou por meio da observação e interação descrever quais os conhecimentos da matemática, os estudantes e seus familiares possuem quando desenvolvem suas atividades na informalidade da construção civil – o aluno pedreiro/ajudante, mediante a experiência de vida destes, exemplificando o tema e o objeto do conhecimento da matemática trabalhados no primeiro semestre do ano letivo de 2018.

Pode-se destacar, os conceitos intuitivos que eles possuem no uso das operações fundamentais nos conjuntos dos números racionais, a noção de geometria plana, ao sistema métrico decimal e aos elementos geométricos, há de considerar que apesar da baixa escolaridade desses profissionais, eles desenvolvem seus cálculos sem a formalidade da matemática ensinada nas escolas, fazem seus cálculos de várias formas, visto que seus resultados são bem próximos dos esperados.

Assim sendo, Magalhães e Moura (2016) completam ao enfatizar que não se pode afirmar como errado o método que o profissional informal da construção civil utiliza para fazer seus orçamentos com as estimativas de tempo, materiais e mão de obra, já que para ele o que importa são apenas os resultados, que na maioria das vezes não precisam ser exatos, mas sim o mais próximo possível do real, atendendo assim suas necessidades enquanto profissional.

2 | METODOLOGIA

Esta pesquisa assume-se com base em uma pesquisa de campo em uma abordagem qualitativa, pois, “parte da ideia de que os métodos e as teorias devem ser adequados àquilo que se estuda” (FLICK, 2009, p. 9).

A pesquisa de campo segundo Gonçalves:

> é o tipo de pesquisa que pretende buscar a informação diretamente com a população pesquisada. Ela exige do pesquisador um encontro mais direto. Nesse caso, o pesquisador precisa ir ao espaço onde o fenômeno ocorre,

> ou ocorreu e reunir um conjunto de informações a serem documentadas. (GONÇALVES, 2001, p.67).

Tem-se na abordagem qualitativa a proposta de defesa de situações reais, buscando por meio da teoria e prática retratar a matemática utilizada, pelos estudantes que desenvolvem suas atividades profissionais na informalidade como pedreiro, pois, ao serem inseridos nas turmas da EJA enfrentam grandes dificuldades em compreender e aprender a formalidade da matemática já utilizada no seu campo de trabalho.

2.1 O caminho percorrido

Para o desenvolvimento desta investigação, houve a necessidade da realização de um trabalho colaborativo, que permitiu aos sujeitos da pesquisa mensurar dentre os alunos matriculados nas turmas da 3ª fase da EJA da escola os tipos de profissões e a quantidade de alunos que as utilizam em sua vida diária, assim como, identificar o tipo de matemática aplicada neste contexto.

Observou-se na Escola Municipal Dom Paulo MC Hugh, que aproximadamente 60% de seus alunos matriculados na 3ª fase da EJA, juntamente com os cônjuges e filhos, usufruem das atividades da construção civil para o seu sustento, dentre a atuação desses alunos, destacam-se os ajudantes, os ajudantes habilitados e o pedreiro, ou seja, basicamente todos os homes que compõe a família dos estudantes descritos no percentual citado adquirem uma renda variável suficiente que os auxiliam nas despesas do dia a dia.

Do mesmo modo, percebeu-se que a maioria da matemática utilizada por esses alunos em sua profissão, já havia sido utilizada no primeiro semestre do ano letivo e tampouco se conseguiu compreender como esse público de alunos tinha um rendimento tão negativo nas atividades e avaliações na qual tinham que desenvolver algum tipo de cálculo matemático de forma contextualizada.

A partir dos grupos de sujeitos configurados, teve-se a ideia de unir as três turmas da terceira fase para a realização de uma pesquisa de campo com abordagem qualitativa que pudesse compartilhar suas experiências com a comunidade escolar na qual todos iriam reconhecer como a matemática está intimamente ligada às atividades da vida diária e seus cálculos algébricos são desenvolvidos e compreendidos pela necessidade que o homem tem de interagir com o outro num contexto sociocultural e que perpassa as gerações.

Assim, foi necessário dividir as atividades em três etapas:

Na primeira etapa, realizou-se uma roda de conversa em cada uma das turmas da 3ª fase da EJA, em que foi solicitado que cada um dos alunos presente se apresentasse e contasse de forma resumida um pouco sobre sua vida profissional e como começou nesse ramo.

Neste momento começamos a coleta de dados, empregando a técnica da observação assistemática, "onde o pesquisador procura recolher e registrar os fatos da realidade sem a utilização de meios técnicos especiais" (QUARESMA, 2005, p. 71), como também, foi realizado a entrevista não estruturada que segundo Mattos (2005) permite ao entrevistado decidir a melhor forma de construir sua resposta.

Segunda etapa, ocorreu a organização dos temas matemáticos utilizados pelos alunos que desenvolvem alguma atividade na construção civil para elaborar orçamentos de edificações com a lista de materiais, preço e tempo da obra para o contratante.

A matemática presente no trabalho do pedreiro se destaca nos temas abaixo:

- Operações fundamentais nos conjuntos dos números racionais;
- Números decimais;
- Sistema métrico decimal;
- Conceitos de geometria plana:
    - Ponto, reta, segmento de reta, plano, ângulos;
- Figuras da geometria plana:
    - Perímetro e área de polígonos presentes em pequenas edificações;
- Figuras geométricas espaciais:
    - Área da planificação e cálculo de volume;
- Noções de proporcionalidade.
    - Regra de três simples e composta;
    - Grandezas diretamente e inversamente proporcional.

Finalizando as etapas, buscou-se dar significado aos desafios existentes no processo ensino-aprendizagem da matemática no contexto amazônico, destacando a importância do professor como mediador na construção do conhecimento, além de proporcionar a apresentação dos resultados das atividades desenvolvidas por instituições que ofertam a Educação de Jovens e Adultos em eventos municipais e estaduais que valorizam as potencialidades que os estudantes adquirem em um contexto sociocultural.

3 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Como resultado desta investigação, os alunos da 3ª fase da EJA, tiveram contato com a planta arquitetônica de uma obra residencial para a realização da leitura e interpretação das informações descritas. Para a maioria dos alunos, foi a primeira experiência em observar um esboço tão detalhado das divisões de uma casa projetada por um engenheiro, onde o aluno pedreiro a partir de sua experiência na construção civil conseguiu interpretar e calcular a quantidade de material necessário para erguer toda estrutura predial, assim como, entregar a casa na chave por um preço negociável com o dono da obra.

Para tanto, houve a necessidade de se realizar uma revisão geral de alguns temas abordados no semestre que são fundamentais para leitura da planta de uma obra. Destacamos a princípio nesta etapa: noções básicas de escala, área e perímetro de algumas figuras planas, planificação, área e volume de alguns sólidos geométricos, assim como, reconhecer as principais ferramentas utilizadas pelos profissionais para medição e execução de prática diária.

Como referência, os alunos tiveram como instrumento de medida o balde de tinta de 18 litros que é o recipiente mais usado para medir o traço de massa e/ou concreto. Parâmetro este, usado com frequência na região para determinar a construção do orçamento de uma obra que tem a unidade de medida de capacidade o litro, conforme tabela a seguir.

Cálculo em litros	**Cálculo em metros cúbicos**
1 litro = 10cm x 10cm x 10cm = 1000cm³ 18 litros = 18 x 1000cm³ = 18000cm³	1 litro = 0,1m x 0,1m x 0,1m = 0,001m³ 18 litros = 18 x 0,001m³ = 0,018cm³

Tabela 1 – Conversão da medida de capacidade litro para metros cúbicos.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Nessas condições, a medida mais utilizada no preparo do traço de massa para reboco, concreto e assentamento de tijolos com uma saca de cimento de 42 kg (encontrado com frequência na região) e o valor cobrado pelo pedreiro na metragem do cálculo de orçamento solicitado pelo contratante é descrito a seguir.

Considerado como estimativa,

1 traço de massa para reboco – 8 baldes de areia x 1 saco de cimento.

1 traço de massa para alvenaria com 1cm de espessura – 8 baldes de areia x 1 saco de cimento.

1 traço de massa para piso ou contrapiso – 8 baldes de areia x 1 saco de cimento.

1 traço de concreto para alicerce, coluna com fundação e vigas – 7 baldes de areia x 7 baldes de seixo x 1 saco de cimento.

Tipo de produto a ser utilizado	**Dimensões aproximadas**	**Preço**
Massa para reboco	m² linear de reboco	R$ 10,00 x m²
Massa para alvenaria	m² linear de alvenaria/200 tijolos	R$ 10,00 x m²
Concreto para alicerce, colunas, vigas	Independente das dimensões	R$ 40,00 x 1 m³
Massa para contrapiso	m² linear	R$ 8,00 x m²
Massa para piso liso	m² linear	R$ 15,00 x m²
Pacote de argamassa de 20kg	m² linear de piso cerâmico	R$ 15,00 x m²
Estrutura armada – ferragem – caixaria	Colunas e vigas - m² linear	R$ 10,00 x m

Tabela 2 – Estimativa para o cálculo do orçamento de uma obra.

Fonte: Elaborada pelos autores.

É importante enfatizar que os valores podem sofrer alterações que depende das condições climáticas, grau de dificuldade da obra e até mesmo do acesso ao ambiente, desde a localização dos materiais até a obra desejada.

Pôde-se perceber que o pedreiro é prudente ao realizar o orçamento de uma obra, pois ele conta com sua experiência profissional e uma calculadora para estimar a quantidade de material necessário para construir obras pequenas como muros e calçadas, edificações um pouco mais complexas como construir uma casa interpretando a planta baixa do projeto, como também mensurar o tempo da obra, a quantidade de ajudantes, sempre atentando a fatores externos como o período do inverno.

Antipoff, Frade e Lima (2016) corroboram ao afirmar que a regra de prudência na matemática do pedreiro é mais importante que a regra de precisão, e apesar das estimativas serem grosseiras do ponto de vista matemático, para este profissional é a mais segura, o que ilustra a primazia da prática na ação eficaz em detrimento do conhecimento matemático científico.

Dado o exposto, os resultados da pesquisa foram compartilhados na seletiva municipal da I Feira Amazonense de Matemática e contou com a participação de várias escolas e, principalmente, da comunidade itacoatiarense que ganhou o direito de representar o município com a modalidade da Educação de Jovens e Adultos na categoria das inclusivas do Estado do Amazonas. Nesta ocasião, os alunos tiveram a oportunidade de trocar experiências com participantes de outros municípios para reconhecer como a matemática é importante para a sociedade, podendo ser compreendida por meio do ensino e pesquisa dos diferentes olhares da comunidade escolar e acadêmica.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta investigação proporcionou aos sujeitos envolvidos na pesquisa, uma compreensão acerca da Matemática desenvolvida pelo aluno pedreiro. Apresentando o saber e fazer da matemática informal desenvolvida em sua atividade profissional até chegar as salas de aula da EJA, permitindo afirmar que nosso alunado traga consigo, mesmo que de forma intuitiva as habilidades e competências de sua experiência sociocultural para o processo de formalização e construção do conhecimento na escola.

Levando em consideração os dados apresentados, pôde-se concluir que o aluno pedreiro utiliza na maioria de seus cálculos, a matemática com base em valores aproximados, fruto da capacidade de observação que vem construindo na prática informal da construção civil, ou seja, ele usa sua habilidade de fazer estimativas, que *a priori* sempre o acompanhou em suas atividades profissionais, evidenciando assim o processo ensino e aprendizagem de conceitos básicos da matemática na escola por meio da contextualização.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. R.; GODOY, E. A. **A narrativa autobiográfica de alunos de EJA como prática pedagógica**. Olh@res, Guarulhos, v. 4, n. 1, p. 351-370, maio 2016. Disponível em: <https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s& source=web&cd=&ved=2ahUKEwiH15Hx4M3tAhVwILkGHal7CcIQFjAAegQIAxAC&url=https%3A%2F%2Fperiodicos.unifesp.br%2Findex.php%2Fol hares%2Farticle%2Fdownload%2F445%2F185&usg=AOvVaw0E5d4KxL16KY_1wxyHOo CG> Acesso em. 15 nov. 2020.

ANTIPOFF, R. B. F.; FRADE, C. C.; LIMA, F. P. A. **Representação e prática na ação eficaz de trabalhadores pouco escolarizados da construção civil**. Trabalho & Educação, Belo Horizonte, v. 25, n.3, p.109-126, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufmg.br/index.php/trabedu/article/view/9550/6803>. Acesso em 15 nov. 2020.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 2 nov. 2020.

FLICK, U. **Desenho da pesquisa qualitativa**. Tradução: COSTA, R. Porto Alegre: Artmed, 2009.

GONÇALVES, E. P. **Iniciação à pesquisa científica**. Campinas, SP: Editora Alínea, 2001.

MAGALHÃES, R. O.; MOURA, G. L. S. A matemática e a construção civil: o uso da matemática no trabalho do pedreiro. In: SIMPÓSIO LINGUAGEM E IDENTIDADES NA AMAZÔNIA SUL-OCIDENTAL, 10., Rio Branco, **Anais do Simpósio Linguagem e Identidades na Amazônia Sul-Ocidental** Rio Branco: Rio Branco: UFAC, 2016.

MATTOS, P. L. C. L. de. **A entrevista não-estruturada como forma de conversação: razões e sugestões**. RAP, v. 39, n. 4, p.823-47, 2005. Disponível em: < https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&ved=2ahUKEwjlpfzX3s3tAhXaLLkGHVU-B50QFjAAegQIAxAC&url=http%3A%2F%2Fbibliotecadigital.fgv.br%2Fojs%2Findex.php%2Frap%2Farticle%2Fdownload%2F6789%2F5371&usg=AOvVaw07Cl7FBfHT0XE8Jg7Dd9wc >. Acesso em: 17 nov. 2020.

BONI, V.; QUARESMA, S. J. **Aprendendo a entrevistar: como fazer entrevistas em Ciências**. Revista Eletrônica dos Pós-Graduandos em Sociologia Política da UFSC, v. 2, n. 1, p. 68-80, 2005.: < https://periodicos.ufsc.br/index.php/emtese/article/view/18027/16976>. Acesso em: 17 nov. 2020.

TORRES, J. R. *et al*. **Ressignificação Curricular: contribuições da Investigação Temática e da Análise Textual Discursiva.** Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências, v.8, n. 2, p.1-13, 2008. Disponível em: <https://periodicos.ufmg.br/index.php/rbpec/article/view/4021/2585>. Acesso em: 17 nov. 2020.

CAPÍTULO 6

A METODOLOGIA DO SISTEMA *NODET* E SUAS POSSIBILIDADES DE PESQUISA SOBRE O USO DO ORIGAMI NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM TEMPOS DE USO DE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 28/07/2021

Daniel Albernaz de Paiva Brito
Mestrando em Educação Matemática financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
Programa de Estudos Prós-Graduados em Educação Matemática
São Paulo - SP
https://orcid.org/0000-0002-2451-7886

RESUMO: Este estudo é parte de uma pesquisa de Mestrado em Educação Matemática financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e trata do uso do Origami na Educação Matemática de adolescentes de entre 14 e 17 anos pelo Sistema NODET do Irã. O objetivo deste artigo é analisar como a metodologia desse Sistema usa o Origami para o ensino de Auto-Similaridade e de Fractais e averiguar quais são as possibilidades de pesquisa que ela apresenta a respeito do uso do Origami na Educação Matemática em tempos de uso de novas tecnologias na Educação. Para isso, foram analisadas as teorias de ensino e de aprendizagem que fundamentam o uso do Origami por esse Sistema, bem como a formação dos seus professores, a elaboração de suas aulas, a sua estratégia didática e uma das atividades que são realizadas com os alunos. Por fim, são feitas considerações finais a respeito das possibilidades de pesquisa sobre o uso do Origami na Educação Matemática em tempos de uso de novas tecnologias na Educação que foram encontradas.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino. Auto-Similaridade. Fractais. Origami. Sistema NODET.

THE *NODET* SYSTEM METHODOLOGY AND ITS RESEARCH POSSIBILITIES ON THE USE OF ORIGAMI IN MATHEMATICS EDUCATION IN TIMES OF USE OF NEW TECHNOLOGIES IN EDUCATION

ABSTRACT: This study is part of a Master in Mathematics Education research and deals with the use of Origami in Mathematics Education of adolescents between 14 and 17 years old by the NODET System in Iran. The aim of this article is to analyze how the methodology of this System uses Origami for teaching Self -Similarity and Fractals and to find out what are the research possibilities it presents regarding the use of Origami in Mathematics Education in times of use of new technologies in Education. For this, the theories of teaching and learning on which the use of Origami by this System is based are analyzed, as well as the training of its teachers, the preparation of its classes, its didactic strategy and one of the activities that are carried out with the students. Finally, final considerations are made about the research possibilities on the use of Origami in Mathematics Education in times of use of new technologies in Education that were found.

KEYWORDS: Teaching. Self-Similarity. Fractals. Origami. NODET system.

1 I INTRODUÇÃO

Este artigo trata da metodologia de ensino de Auto-Similaridade e de Fractais com o Origami de uma unidade de estudos do Sistema NODET (*National Organization for Development of Exceptional Talents*) que é um sistema de escolas do Irã para alunos de alto desempenho de entre 14 e 17 anos do nível equivalente ao Ensino Médio brasileiro.[1]

O conteúdo deste artigo foi elaborado como parte da pesquisa de mestrado do autor a respeito das potencialidades do uso do Origami na Educação Matemática desenvolvida no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) com o financiamento do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

O objetivo deste artigo é analisar como a metodologia desta unidade de estudos do Sistema NODET usa o Origami para o ensino de Auto-Similaridade e de Factais e averiguar quais são as possibilidades de pesquisa que ela apresenta a respeito do uso do uso Origami na Educação Matemática em tempos de uso de novas tecnologias na Educação.

Para isso, este artigo irá analisar como a metodologia desta unidade busca fazer com que o Origami contribua para o ensino de Auto-Similaridade e de Fractais por meio das teorias que lhe servem de base, da formação dos seus professores, da elaboração de suas aulas, da sua estratégia didática e de uma atividade que é realizada com os alunos, e fará considerações finais a respeito das conclusões encontradas.

Sendo assim, além desta introdução, este artigo é dividido em 6 partes, quais sejam: 2. análise das teorias de ensino e de aprendizagem utilizadas pela referida unidade; 3. análise da formação dos seus professores; 4. análise da elaboração de suas aulas; 5. análise da sua estratégia didática; 6. análise de uma atividade que é realizada; e 7. considerações finais.

Os principais organizadores desta unidade de estudos do Sistema NODET são os pesquisadores Ali Bhamani, Kiumars Sharif e Andrew Hudson, e as principais referências utilizadas por este artigo são a publicação que resultou da apresentação que eles fizeram na sexta edição do “Encontro Internacional de Ciência do Origami, Matemática e Educação” (*International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education - OSME*)[2] e a pesquisa sobre o Sistema NODET apresentada em Ghahremani (2013).

Como apontam Bhamani et. al (2015), o Sistema NODET[3] teve início como um

1 Para informações detalhadas sobre a história e a estrutura do ensino no Irã e sobre o Sistema NODET, pesquisar em Gharemani (2013).

2 O Encontro Internacional de Ciência do Origami, Matemática e Educação (*International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education - OSME*) teve sua primeira edição em 1989, tem sido realizado a cada 4 anos, e já ocorreu na Itália, no Japão, nos Estados Unidos, em Singapura e na Inglaterra. A cada edição, é publicado um compêndio com os principais trabalhos apresentados durante o evento, e este artigo utilizou como referência o que resultou da sexta edição, em que foi publicado o trabalho de Kiumars Sharif, Ali Bhamani e Andrew Hudson sobre a unidade de estudos do Sistema NODET que faz uso do Origami para o ensino dos conceitos de Auto-similaridade e de Fractais.

3 O Sistema NODET ou Sistema da Organização Nacional para o Desenvolvimento de Talentos Excepcionais (*National Organization for Development of Exceptional Talents*) do Irã possui o seguinte endereço eletrônico <http://www.nodet.net/>, mas ele só está disponível na língua Persa e não oferece permissão para que os algoritmos de tradução o traduzam para o Inglês ou para o Português. Sendo assim, como indicam os autores das principais referências utilizadas para

sistema governamental para selecionar e preparar alunos de alto desempenho acadêmico para as áreas de Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática, em 1967; foi fechado com a Revolução Iraniana, em 1979; foi reformulado e restabelecido, em 1987; e, atualmente, tem unidades em Teerã e em várias outras cidades do Irã, é aplicado para mais de 11 mil alunos, e conta com um quadro de egressos do qual fazem parte diversos cientistas e matemáticos internacionalmente reconhecidos, como Maryam Mirzakhani, que foi a primeira mulher e a primeira iraniana a ganhar a Medalha Fields.

Entre 2007 e 2009, Kiumars Sharif, que é egresso do Sistema NODET e hoje é um dos seus professores e da Universidade de Teerã, identificou[4] que os seus alunos tinham dificuldades de entender fractais, séries infinitas e conceitos relacionados, e desenvolveu a unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais de que trata este artigo como uma atividade extracurricular ao Sistema que faz uso do Origami para ensiná-los.[5]

É importante ressaltar que tanto a unidade de estudos em questão quanto o Sistema NODET como um todo estão em constante processo de reelaboração e que tudo o que é apresentado sobre eles neste artigo já pode ter sido alterado, muito embora o seu objetivo seja revelar algo dos seus fundamentos e das concepções dos seus organizadores sobre como o Origami pode contribuir para o ensino de Auto-Similaridade e Fractais, o que é mais difícil de ser alterado no curto prazo.

2 | ANÁLISE DAS TEORIAS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM ADOTADAS

Esta seção analisa as teorias de ensino e de aprendizagem utilizadas na unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET com o objetivo de apontar como a sua metodologia busca fazer com que o Origami contribua para o ensino desses tópicos por meio de sua fundamentação teórica.

Como será apresentado, a metodologia dessa unidade busca fazer com que o Origami contribua para o ensino de Auto-Similaridade e de Fractais por meio de sua fundamentação teórica articulando o seu uso ao modelo *Schoolwide Enrichment Model*[6] desenvolvido pelos pesquisadores Joseph Renzulli e Sally Reis de forma a tornar o Origami uma ferramenta para que os alunos sejam instigados a entender os conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais como um âmbito da linguagem Matemática a partir do qual eles

este artigo, o que consta do Sistema no endereço eletrônico da enciclopédia virtual Wikipédia pode ser considerado como uma boa fonte a respeito dele: <https://en.wikipedia.org/wiki/National_Organization_for_Development_of_Exceptional_Talents#External_link> Acesso em: 23 ago. 2020.

4 De acordo com Bhamani et al. (2015 p. 724), essa identificação ocorreu pela observação dos seus alunos e por uma pesquisa informal que eles realizaram com os professores do Sistema NODET.

5 Segundo Bhamani et al. (2015 p. 725), a unidade de estudos sobre Auto-similaridade e Fractais do Sistema NODET funciona como um grupo de estudos que se reúne em 20 seções de 90 minutos que acontecem ao longo do ano escolar.

6 De acordo com Renzulli e Reis (1997) e Renzulli e Reis (2010), o *Schoolwide Enrichment Model* (Modelo de Enriquecimento Escolar) foi desenvolvido por esses autores com o nome de *Enrichment Triad Model* (Modelo da Tríade de Enriquecimento); foi aplicado como um programa para alunos superdotados em diversos distritos escolares de Connecticut, no Norte dos Estados Unidos, a partir de 1976; se mostrou um sucesso; resultou em um livro para professores; e foi ampliado e desenvolvido em diversos outros modelos de ensino por outros pesquisadores em Educação.

podem desenvolver projetos do seu interesse.

De acordo com Bhamani et al. (2015), da mesma forma que o sistema NODET como um todo, sua unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais segue uma abordagem similar a do modelo de ensino e de aprendizagem de alunos super-dotados *Schoolwide Enrichment Model*, que foi desenvolvido pelos pesquisadores Joseph Renzulli e Sally Reis e que propõe que os conteúdos sejam ensinados com os alunos sendo instigados a escolher, analisar e fazer uma apresentação publica do estudo de um tópico do seu interesse.

De acordo com Renzulli e Reis (2010), os alunos super-dotados são aqueles que têm habilidades superiores, criatividade, capacidade de comprometimento e que conseguem direcionar essas características para alguma área da performance humana, e eles podem ser melhor estimulados se incentivados a pesquisar tópicos do seu interesse como propõe o modelo *Schoolwide Enrichment Model* que também pode servir como modelo de ensino para alunos que não apresentam as características da superlotação.

Assim, como sugerem Bhamani et al. (2015), embora o *Schoolwide Enrichment Model* tenha sido desenvolvido como um modelo de ensino e de aprendizagem para estimular os alunos super-dotados a se engajarem nas atividades escolares, ele pode ser adotado para alunos que não apresentam as características da superlotação, particularmente na configuração na qual esses autores o utilizam para estruturar o uso do Origami pela unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET.

Como apontam esses pesquisadores e Ghahremani (2013), o *Schoolwide Enrichment Model* pode servir para que os alunos direcionem suas habilidades para a pesquisa ativa em alguma área da performance humana por meio de atividades que cultivem os seus interesses e é composto de três momentos que podem ser entendidos como momentos de enriquecimento pessoal (*Enrichment Types*) e que serviram de base para estruturar o uso do Origami pela unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET como é apresentado na Quadro 1.

Momentos de enriquecimento pessoal para os alunos (*Enrichment Types*) do modelo *Schoolwide Enrichment*	O uso do Origami pela unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET
Momento I: Atividades Gerais de Exploração (*Enrichment Type I: General Exploratory Activities*) Em um primeiro momento, os alunos são instigados a explorarem os seus interesses e a participarem de atividades a respeito de tópicos que podem despertar sua curiosidade e que podem envolver outras pessoas, como membros do corpo docente, os seus pais, ou membros da comunidade.[7]	Momento I: Exploração geral sobre Auto-Similaridade e Fractais (*topic introduction*) Em um primeiro momento, o professor apresenta aos alunos os conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais por meio da exploração das diversas circunstâncias da natureza e da vida cotidiana a partir das quais eles foram desenvolvidos como um campo da linguagem matemática.
Momento II: Atividades de Treinamento em Grupo (*Enrichment Type II: Group Trainig Activities*): Em um segundo momento, com base nos seus interesses expostos e em suas curiosidades demonstradas no Momento I, os alunos são instigados a receberem algum tipo de orientação do professor a respeito de como esses interesses e curiosidades podem ser abordados de forma estruturada (científica) ou partir diretamente para a sua pesquisa geral.[8]	Momento II: Desafios de Origami a serem resolvidos por meio dos conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais (*assigned activities by the teacher*): Em um segundo momento, o professor propõem aos alunos desafios de Origami para serem solucionados por meio do uso dos conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais enquanto eles os discutem de forma mais aprofundada.[9]
Momento III: Investigação Individual e em Grupo de Problemas Reais (*Enrichment Type III: Individual & Small Group Investigation of Real Problems)* Em um terceiro momento, com base nas suas pesquisas feitas no Momento II, os alunos podem selecionar um tópico específico para se comprometerem a pesquisá-lo de forma avançada tendo em vista aplicações práticas e a resolução de problemas reais.[10]	Momento III: Desenvolvimento e apresentação de Projetos Pessoais com a ajuda do professor (*Larger crreative project to persue*): Em um terceiro momento, os alunos são auxiliados pelo professor a utilizar os desafios de Origami solucionados como base para desenvolverem e apresentarem publicamente um projeto de Origami do seu interesse cuja elaboração envolva os conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais.[11]

Quadro 1: Momentos de enriquecimento pessoal para os alunos (Enrichment Types) do modelo Schoolwide Enrichment Model e como eles servem de base para estruturar o uso do Origami pela unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET.

Fonte: adaptado de Renzulli e Reis (2010); Bahmani et al. (2015) e Gharemani (2013).

7 De acordo com Renzulli e Reis (2010 p. 4), o *Type I enrichment* é elaborado pelos alunos junto com diversas outras pessoas, como os seus pais e os seus professore, e é pensado para que eles sejam expostos a uma grande variedade de disciplinas, tópicos, ocupações, hobbies, pessoas, lugares e eventos que não seriam comumente abordados no currículo regular por meio de palestras, minicursos, etc.

8 De acordo com Renzulli e Reis (2010 p. 5), o *Type II enrichment* inclui o ensino de habilidades básicas para o aprendizado e para a pesquisa e pode envolver atividades em que os alunos estudam de forma mais aprofundada um tópico do seu interesse.

9 De acordo com Bhamani et al. (2015), um exemplo de desafio de Origami que o professor pode propor para que os alunos sejam desafiados a utilizar os conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais é a “torre recursiva” (*recustive tower*) desenvolvida e apresentada por Shunzo Fujimoto no seguinte livro: Shunzo, F. (2010). *Origami Ajsaiori: Fijimoto Shunzo Wa*rudo. Tokyo: Seibundo Shinkosha.

10 De acordo com Renzulli e Reis (2010 p. 5), o *Type III enrichment* envolve os alunos que escolheram um tópico específico para se comprometerem a estudá-lo com profundidade.

11 De acordo com Bhamani et al. (2015 . 731), exemplos de projetos que foram desenvolvidos pelos alunos na etapa da unidade que corresponde ao “Momento III” do *Schoolwide Enrichment Model* foram estudos sobre a realização e a reprodução de modelos recursivos feitos com uma única folha de papel como a “torre de flores” de Chris Palmer (*Chris Palmer’s Flower Tower*) e os espirais de Tomoko Fuse, e estudos sobre quais polígonos podem ser encontrados por meio de cortes transversais em diversos sólidos geométricos, como o quebra-cabeças de Francesco Mancini (*Piece Pyramid Puzzle*).

Com base no Quadro 1, é possível apontar que a metodologia da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET utiliza os momentos do *Schoolwide Enrichment Model* com algumas adaptações para que os alunos se envolvam em desafios de Origami por meio dos quais eles sejam instigados a entender os conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais como um campo da linguagem Matemática a partir do qual eles podem desenvolver os seus próprios projetos.

Tendo isso em vista, no que diz respeito a como a metodologia da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET busca fazer com que o Origami contribua para o ensino desses tópicos por meio de sua fundamentação teórica, é possível concluir que ela articula o uso do Origami com os momentos (*Enrichment Types*) do *Schoolwide Enrichment Model* de forma a torná-lo uma ferramenta para que os alunos entendam a Matemática como uma linguagem para a qual suas experiências podem ser traduzidas e seus projetos desenvolvidos, e os conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais como uma possibilidade dessa tradução.

3 I ANÁLISE DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Esta seção analisa a formação dos professores da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET com o objetivo de apontar como a sua metodologia busca fazer com que o Origami contribua para o ensino desses tópicos por meio da seleção e formação dos profissionais que irão ensiná-los.

Tendo em vista que não foram encontradas informação específicas sobre a formação de professores para essa unidade do Sistema NODET e que as publicações utilizadas para esse artigo indicam que Kiumars Sharif, Ali Bhamani e Andrew Hudson são os seus principais professores, é possível considerar que ela é a mesma formação que para os professores do Sistema como um todo e que é baseada nas etapas do Quadro 2, como sugeridas por Ghahremani (2013), acrescidas de alguma formação sobre Origami.

Formar-se no Ensino Médio no Sistema NODET como um aluno de bom desempenho acadêmico	Formar-se no Ensino Superior em alguma área de Ciências ou Tecnologia e ter uma atuação acadêmica e profissional de destaque.	Estudar em profundidade os Origamis a partir dos quais os conceitos de Auto-Similaridade e Fractais podem ser trabalhados

Quadro 2: Etapas que se sugere que um professor deve passar para poder se candidatar a dar aulas na unidade sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET.

Fonte: adaptado de Gharemani (2013).

Com base no quadro 2, é possível apontar que a metodologia desta unidade do Sistema NOTET requer que os seus professores sejam aptos a relacionar as dinâmicas dos origamis com a linguagem matemática para auxiliar os alunos a estudar os tópicos ensinado e a desenvolver os seus próprios projetos.

4 I ANÁLISE DA ELABORAÇÃO DAS AULAS

Esta seção analisa a elaboração das aulas da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET com o objetivo de apontar como a sua metodologia busca fazer com que o Origami contribua para o ensino desses tópicos nesta etapa de sua implementação.

Como será apresentado, a metodologia dessa unidade busca fazer com que o Origami contribua para o ensino de Auto-Similaridade e de Fractais nesta etapa de sua implementação elaborando a seqüência das suas aulas para que as atividades de Origami apresentem aos alunos a matemática desses conceitos como uma linguagem com a qual eles podem resolver problemas e desenvolver os seus projetos pessoais

Segundo Bhamani et al. (2015), a seqüência das aulas de Origami da unidade também é baseada nos momentos (*Types do Enrichmente*) do *Schoolwide Enrichment Model* e é seguida pelo professor de forma flexível para que os alunos compreendam os conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais e possam usá-los da sua maneira nos seus projetos pessoais, como apresentado no Quadro 3[12].

Exploração Geral dos conceitos de Auto-Similaridades e Fractais (Baseado no Momento I do *Schoolwide Enrichment Model: Enrichment Type I*) O professor apresenta aos alunos diversas circunstâncias da natureza e da vida cotidiana a partir das quais eles podem discutir os conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais, como os padrões geométricos do interior da Mesquita Sheikh Lutfollah (*Mosque Sheikh Lutfollah*) que faz parte de sua cultura e da história do Irã
Apresentação de origamis relacionados aos conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais (Baseado no Momento II do *Schoolwide Enrichment Model: Enrichment Type I*) Depois da exploração geral e de uma discussão preliminar sobre os conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais, o professor propõe aos alunos atividades de Origami nas quais eles podem ser identificados e desenvolvidos.
Desafios com Origamis relacionados aos conceitos de Auto-Similaridade e Fractais (Baseado no Momento II do *Schoolwide Enrichment Model: Enrichment Type II*) Conforme as discussões progredirem, o professor propõe aos alunos desafios de Origami e os auxilia na abstração de suas propriedades para que eles os resolvam utilizando o que aprenderam sobre Auto-Similaridades e Fractais.

12 Cumpre observar que o Quadro 3 foi elaborada para apresentar uma sequência genérica de aulas da unidade sobre Auto-similaridade e Fractais do Sistema NODET e que uma única das etapas por ela apresentadas podem compreender uma ou diversas aulas inteiras ao longo de toda a passagem dos alunos pela unidade, dependendo das circunstancias observadas pelo professor.

Aplicação dos conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais em projetos de interesse dos alunos com base no que foi desenvolvido no Momento II do *Schoolwide Enrichment Model: Enrichment Type III*) Com o auxílio de perguntas e questionamentos, o professor conduz os alunos a graus superiores de abstração no uso dos conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais e os incentiva a mobilizá-los para preverem o comportamento das dobraduras e preencherem tabelas que servirão de base para desenvolverem os seu projetos pessoais que deverão apresentar publicamente quando concluírem os estudos na unidade.

Quadro 3: Sequência das aulas da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET.

Fonte: adaptado de Bhamani et al. (2015).

Tendo isso em vista, no que diz respeito a como a metodologia da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET busca fazer com que o Origami contribua para o ensino desses tópicos por meio da estruturação de suas aulas, é possível concluir que ela as elabora para que o Origami seja um meio para que os alunos compreendam a matemática da Auto-Similaridade e dos Fractais como uma linguagem com a qual eles podem fazer previsões, resolver problemas e desenvolver os seus próprios projetos.

5 | ANÁLISE DA ESTRATÉGIA DIDÁTICA

Esta seção analisa a estratégia didática da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET com o objetivo de apontar como a sua metodologia busca fazer com que o Origami contribua para o ensino desses tópicos por meio da elaboração das relações entre os professores e os seus alunos.

Como será apresentado, a metodologia dessa unidade busca fazer com que o Origami contribua para o ensino de Auto-Similaridade e de Fractais por meio da elaboração das relações entre os professores e os seus alunos dando liberdade para que os professores conduzam as seqüências das aulas conforme o desenvolvimento dos alunos e adapte as atividades de Origami de acordo com os interesses por eles demonstrados.

Segundo Bhamani et al. (2015), a estratégia didática da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET segue as sugestões de como devem ser as relações entre os professores e os alunos do *Schoolwide Enrichment Model* e tem o objetivo de ajudar os alunos a compreenderem os fundamentos de um tópico, mas manterem sua própria forma de entendê-los e de utilizarem os seus conceitos.

De acordo com Renzulli e Reis (2010), no *Schoolwide Enrichment Model* os professores são orientados a ajudar os alunos a melhor entenderem suas habilidades, interesses e estilos de aprendizado e a desenvolver um conjunto de diretrizes (*Total Talent Portfolio*) para conduzirem as aulas de forma que eles tenham o melhor aproveitamento dos seus talentos, como sumarizado na Quadro 4.

Diretriz I: O professor deve ter o foco de suas ações nos pontos fortes dos alunos, deve incentivá-los a demonstrar os seus talentos e interesses e coletar regularmente informações sobre eles para poder aprimorar as suas interações.
Diretriz II: O professor deve classificar as informações obtidas em categorias gerais de habilidades, interesses e estilos de aprendizado para que possa eventualmente formar grupos de estudos com os alunos que tenham pontos em comum ou que possam contribuir uns com os outros.
Diretriz III: Com base nessas informações, o professor deve ajustar as atividade propostas para que todos os alunos se sintam motivados e desafiados.
Diretriz IV: O professor deve estabelecer os objetivos educacionais de forma individualizada para cada aluno e estar atento para rever as estratégias conforme esses objetivos tenham sido atingidos
Diretriz V: O professor deve sempre revisar e analisar as informações obtidas para que possa tomar as melhores decisões sobre como proporcionar aos alunos as melhores oportunidades de enriquecimento pessoal durante as aulas
Diretriz VI: O professor deve mobilizar essas informações atualizadas para ajudar os alunos a fazerem decisões sobre o direcionamento de suas etapas futuras de ensino e sobre os seus estudos para suas carreiras profissionais

Quadro 4: Estratégia Didática do Schoolwide Enrichment Model seguida pelas aulas da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET: Conjunto de diretrizes (Total Talent Portfolio) que os professores são orientados a desenvolver para conduzirem as suas relações com os seus alunos.

Fonte: adaptado de Bhamani et al. (2015), Gharemani (2013), Renzulli e Reis (2010) e Renzulli e Reis (1997).

Com base no Quadro 4, é possível apontar que a metodologia da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET utiliza a metodologia do *Schoolwide Enrichment Model* para que as atividades de Origami sejam constantemente adaptadas as habilidades dos alunos e para que eles se mantenham engajados no estudo desses conceitos conforme desenvolvem os seus próprios projetos.

Tendo isso em vista, no que diz respeito a como a metodologia da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET busca fazer com que o

Origami contribua para o ensino desses tópicos por meio da sua estratégia didática, é possível concluir que ela utiliza a estratégia do *Schoolwide Enrichment Model* e elabora as relações entre os professores e os seus alunos para que as atividades de Origami despertem os interesses dos alunos e eles se mantenham engajados no estudo desses conceitos como uma ferramenta matemática para desenvolverem os seu próprios projetos.

6 I ANÁLISE DE UMA ATIVIDADE

Esta seção analisa uma atividade utilizada pela unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET com o objetivo de apontar como a sua metodologia busca fazer com que o Origami contribua para o ensino desses tópicoS na etapa final de sua implementação que são as atividades realizados com os alunos.

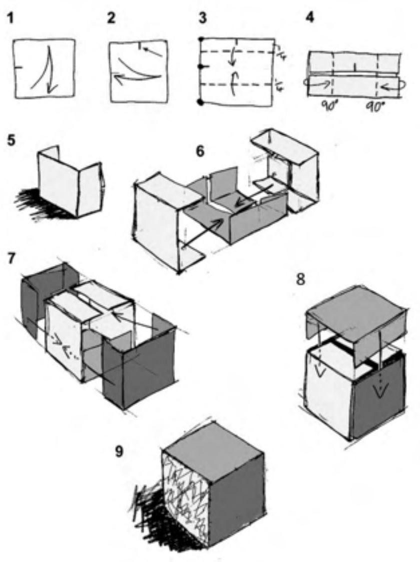
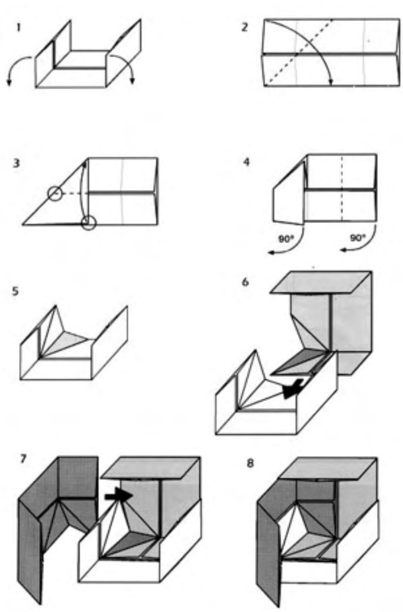
Como será apresentado, a metodologia dessa unidade busca fazer com que o Origami contribua para o ensino de Auto-Similaridade e de Fractais nesta última etapa de sua implementação com atividades estruturadas com base nos interesses dos alunos, nas quais o professor faz perguntas e sugestões aos alunos e os instiga a enfrentar desafios de Origami por meio dos quais eles estudem esses conceitos como um ferramenta matemática com a qual podem realizar os seus próprios projetos.

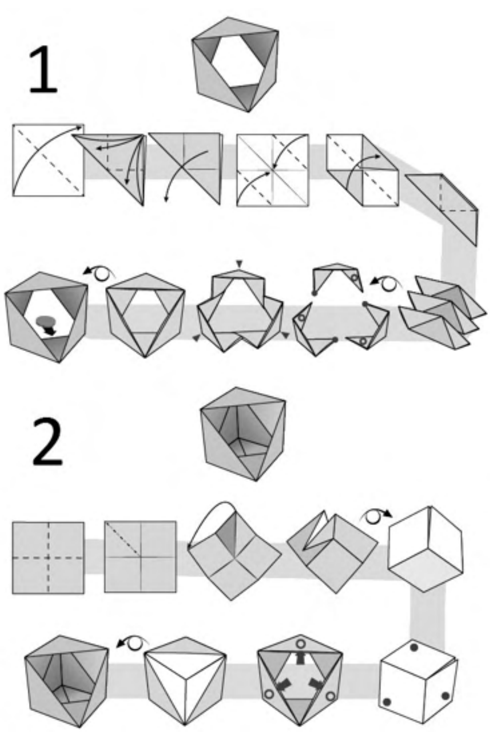
Visto que a estrutura das aulas da unidade sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET é baseada nos “Momentos” (*Enrichment Types*) do *Schoolwide Enrichment Model* e que os “Momentos” I e III correspondem a uma apresentação geral sobre os conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais e a projetos individuais dos alunos, a atividade que será analisada corresponde a um desafio de Origami do “Momento” II, e será a atividade “pirâmide fractal com SierpinsQube” (*fractal pyramid with Spierpins Qube*), que Bhamani et al. (2015) apresentaram como exemplo na publicação de sua apresentação no sexto “Encontro Internacional de Ciência do Origami, Matemática e Educação”, que ocorreu 2014, em Kyoto, no Japão.

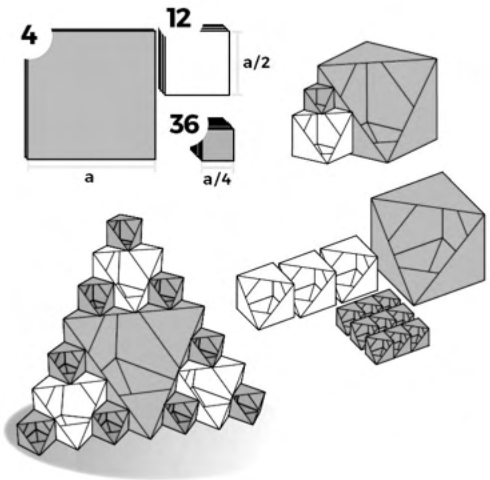
A atividade “pirâmide fractal com SierpinsQube” foi desenvolvida por Kiumars Sharif e consiste no uso do Origami modular para a construção de cubos de diversos tamanhos de forma que se tornem blocos para a construção de uma pirâmide fractal. [13]

De acordo com Bhamani et al. (2015 p. 728), trata-se de uma atividade que requer somente o conhecimento do cálculo do volume de um cubo e é adequada para alunos iniciantes, mas que pode ser utilizada para uma discussão avançada sobre os conceitos de Auto-Similaridade e de Fractais ou de outros tópicos relacionados, como é apresentado no quadro 5.

13 Apresentações da atividade “pirâmide fractal ou SierpinsQube” (*fractal pyramid: Spierpins Qube*) desenvolvida por Kiumar Sharif podem ser encontradas no livro da 26º Convenção Internacional de Origami (Sharif, K. & Bhamani, A. (2015). SierpinsQube. *26th International Origami Convention Book*. Berlin: Origami Deutschland, p 109 a 110) e no seguinte endereço eletrônico: <http://www.origamiheaven.com/pdfs/Sierpinski.pdf> Acesso em 22 jul. 2021.

	Etapa 1: O professor ensina aos alunos a realização do cubo de Origami modular desenvolvido por Paul Jackson como demonstra a figura ao lado.
	Etapa 2: Depois da realização do cubo de Paul Jackson, o professor pede aos alunos que construam um novo cubo com papeis quadrados cujos lados tenham a metade do comprimento dos que foram utilizados e que comparem os comprimentos dos lados, as áreas das faces e os volumes dos dois cubos realizados.
	Etapa 3: Depois de os alunos terem realizado as comparações entre os dois cubos de Paul Jackson, o professor realiza com eles o cubo de Origami modular desenvolvido por David Mitchell (*Columbus Cube*), que apresenta uma pequena variação em relação ao cubo de Paul Jackson, que consiste em uma quina afundada para baixo que implica na bissecção de três ângulos do cubo original, como demonstra a figura ao lado.

	Etapa 4: Depois da realização do cubo de David Mitchell, o professor pede aos alunos que construam um novo cubo com papeis quadrados cujos lados tenham a metade do comprimento dos que foram utilizados e que comparem os comprimentos dos lados, as áreas das faces e os volumes dos dois cubos obtidos.
	Etapa 5: Depois dos alunos terem realizado as comparações entre os dois cubos de Paul Jackson e de David Mitchell, o professor deve frisar com eles os seguintes tópicos para que possam dar início a realização do *Spierpins Qube*: que a redução pela metade dos lados dos papeis quadrados com os quais os cubos foram feitos implica numa redução dos seus volumes para 1:8; que essa redução pela metade dos lados dos papeis quadrados implica em uma redução pela metade dos lados das faces do cubo; e que seja lá qual for a figura geométrica tridimensional que tenha os lados de suas faces reduzidos pela metade terá também o seu volume reduzido para 1:8.
	Etapa 6: Com base nos conceitos trabalhados nas etapas anteriores, o professor ensina aos alunos a realização do *Spierpins Qube*,como demonstra a figura ao lado, e os desafia a calcular qual vai ser a quantidade e quais vão ser os tamanhos em que ele terá de ser feito para que construam com ele uma *pirâmide fractal*.

	Etapa 7: Depois da realização dos *Spierpins Qube*,os alunos constroem a pirâmide fractal, como demonstra a figura ao lado, e calculam os tamanhos e a quantidade de *Spierpins Qube* que terá que ser realizada para que ela tenha a atura que eles desejam.
	Etapa 8: Com base nessa e em outras atividades relacionadas ao Momento II do *Schoolwide Enrichment Model*, os alunos escolhem um tópico do seu interesse e serão auxiliados pelo professor a desenvolvê-lo e apresentá-lo publicamente utilizando os conceitos de Autossimilaridade e de Fractais a partir de um Origami.

Nota: As etapas para a realização do cubo de Origami de Paul Jackson podem ser encontradas em <http://www.origami-artist.com/artwork/origami-diagrams/jackson-cube/> acesso em 04/06/2021. Outra fonte de informações sobre sua construção é o vídeo disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=2m_m2ZKEBLI> acesso em 04/06/2021.

Nota: A figura com as etapas para a realização da *pirâmide fractal* com o *Spierpins Qube* que utilizamos é uma versão editada da apresentada no seguinte endereço eletrônico: <http://www.origamiheaven.com/pdfs/Sierpinski.pdf> acesso em 04/06/2021.

Nota: A figura com as etapas para a realização do *Spierpins Qube*que que utilizamos é uma versão editada da apresentada no seguinte endereço eletrônico: <http://www.origamiheaven.com/pdfs/Sierpinski.pdf> acesso em 04/06/2021.

Nota: A figura com as etapas para a realização da *pirâmide fractal* com o *Spierpins Qube* que utilizamos é uma versão editada da apresentada no seguinte endereço eletrônico: <http://www.origamiheaven.com/pdfs/Sierpinski.pdf> acesso em 04/06/2021.

Quadro 5: Sequência da realização do desafio de Origami *pirâmide fractal* com o *SierpinsQube.*

Fonte: adaptado de Bhamani et al. (2015).

Com base no quadro 5, no que diz respeito a como a metodologia da unidade de Estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET busca fazer com que o Origami contribua para o ensino desses conceitos por meio das atividades realizadas, é possível concluir que ela as estrutura para que o professor proporcione aos alunos oportunidades de eles entenderem a matemática da Auto-Similaridade e dos Fractais como uma ferramenta que podem utilizar para realizar os seus próprios projetos.

7 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste artigo foi analisar como a metodologia da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET busca fazer com que o Origami contribua para o ensino desses tópicos e averiguar quais são as possibilidades de pesquisa que ela apresenta a respeito do uso do Origami na Educação Matemática em tempos de uso de novas tecnologias na Educação.

Com base em tudo o que foi analisado, a título de considerações finais, é possível concluir que a metodologia dessa unidade de estudos busca fazer com que o Origami contribua para o ensino de Auto-Similaridade e de Fractais utilizando-o para que os alunos enfrentem problemas que os façam entender a Matemática como uma linguagem com a qual eles podem resolver problemas e desenvolver os seus próprios projetos e que esse uso do Origami na Educação Matemática apresenta amplas possibilidades de pesquisa em tempos de uso de novas tecnologias na Educação.

Por exemplo, em tempos de uso de novas tecnologias na Educação seriam importantes pesquisas a respeito de como essa metodologia de uso do Origami na Educação Matemática poderia ser aplicada com os alunos de forma remota e quais teriam de ser as adaptações que ela teria de sofrer para que pudesse alcançar os mesmos resultados de que quando é aplicada de forma presencial.

Dessa forma, da análise da unidade de estudos sobre Auto-Similaridade e Fractais do Sistema NODET é possível concluir que a sua metodologia apresenta importantes desafios de pesquisa sobre o uso do Origami na Educação Matemática em tempos de uso de novas tecnologias na Educação os quais o autor deste texto pretende abordar em futuros trabalhos.

REFERÊNCIAS

BAMANI, A; SHARIF, K; HUDSON, A. Using Origami to Enrich Mathematical Understanding of Self Similarity and Fractals. In: MIURA, K.; KASAWSAKI, T.; IVERSON-WANG, P. (Eds.). **Origami6. Proceedings of the Sixth International Meeting on Origami Science, Mathematics, and Education**. American Mathematical Society. 2015. p. 723-733.

GHAREMANI, M. **Considering Science Theacher's Conceptions of Critical Thinking Pedagogy in Several of Iran's Special Gifted Schools: A multi-Phased Study.** 2013. 217 f.. Dissertação de Mestrado em Artes - College of Graduate Studies da University of British Columbia, Okanagan, 2013. Disponível em: <https://news.ok.ubc.ca/education/2012/03/14/the-iranian-gifted-schools/> Acesso em 22 jul. 2021

RENZULLI, S. J; REIS, S. The Schoolwide Enrichment Model: A Focus on Student Strenghts and Interests. **Gifted Education International Journal**. 26(2-3) Cap. 13. 2010. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/254095331_The_Schoolwide_Enrichment_Model_A_Focus_on_Student_Strengths_and_Interests> Acesso em: 22 jul. 2021

RENZULLI, S. J; REIS, S. **The Schoolwide Enrichment Model: a How-To Guide for Educationa Excellence.** (2a ed.). 1997. Waco, Texas: Prufrock Press.

CAPÍTULO 7

A MATEMÁTICA DO AGRONEGÓCIO: CONTRIBUIÇÕES PARA UMA APRENDIZAGEM SIGNIFIC(ATIVA)

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 27/07/2021

Luiz Carlos dos Santos Filho
Mogi das Cruzes – São Paulo
http://lattes.cnpq.br/4580023045906310

RESUMO: A Matemática necessária aos cursos superiores, vem sendo desenvolvida como a ciência do antilogos, conforme descrito por Trindade (1996). Nesta concepção as disciplinas de Matemática são apresentadas como uma ciência pronta e acabada, sem investigação, distante do mundo real, sem experimentação. O estudante não reflete, não cria e não entende qual o papel da Matemática em seu curso superior. Em vista deste cenário, as Metodologias Ativas, que pressupõem o estudante como protagonista diante do processo de ensino e aprendizagem, a ressignificação do papel do professor(a) e das estratégias de avaliação, podem contribuir fortemente para uma reinvenção do ensino e aprendizagem da Matemática. Apresentamos neste trabalho o relato de uma experiência e de seus resultados, que vem utilizando uma aprendizagem ativa baseada em Projeto Investigativo, conforme Moran (2018), na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral do curso de Agronegócio da Fatec de Mogi das Cruzes.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de matemática, Curso Superior, Metodologias ativas, Projeto investigativo.

AGRIBUSINESS MATHEMATICS: CONTRIBUTIONS TO MEANINGFUL LEARNING

ABSTRACT: Mathematics necessary for higher education courses has been developed as the science of antilogues, as described by Trindade (1996). In this conception, the disciplines of Mathematics are presented as a ready and finished science, without investigation, far from the real world, without experimentation. The student does not reflect, does not create and does not understand the role of Mathematics in his higher education course. In view of this scenario, Active Methodologies, which assume the student as the protagonist in the teaching and learning process, the redefinition of the teacher's role and assessment strategies, can strongly contribute to a reinvention of teaching and learning of Mathematics. We present in this work the report of an experience and its results, which has been using active learning based on Investigative Project, according to Moran (2018), in the Differential and Integral Calculus discipline of Fatec's Agribusiness course in Mogi das Cruzes.

KEYWORDS: Teaching Mathematics, Higher Education, Active Methodologies, Investigative Project.

1 I INTRODUÇÃO

O processo de ensino e aprendizagem de Matemática continua sendo, na maioria das vezes e em muitas instituições, desenvolvido baseado em metodologias essencialmente expositivas e fracamente contextualizadas. Em particular a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral que embora tenha seu desenvolvimento histórico ligado a necessidade de resolução de problemas do mundo real, poucas vezes é apresentada como uma *arte de resolver problemas*, valoriza-se mais os aspectos lógicos e dedutivos, o rigor da linguagem e o procedimento algébrico abstrato como nos informam Otero-Garcia (2011) e Simmons (2005).

Nos cursos tecnológicos, onde as disciplinas da área de Matemática em suas diversas variações caracterizam-se por ser de serviço, isto é, servir de base e fundamento às disciplinas núcleos das respectivas áreas tecnológicas, os estudantes, infelizmente, vêm sendo encorajados a se tornarem exímios manipuladores simbólicos em problemas descontextualizados e padronizados. Neste sentido as Metodologias Ativas podem se constituir num caminho para construir um conhecimento Matemático que de fato agregue valor ao curso superior tecnológico.

A educação matemática no ensino superior desde o ano de 2000 tem sido objeto de estudo pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). No ano em questão foi criado o Grupo de Trabalho nº 04 – Educação Matemática do Ensino Superior – cujos objetivos, entre outros, é refletir e produzir pesquisas neste campo. Entre suas questões destacamos: “Qual o papel da Matemática no Ensino Superior? Como o aluno se relaciona com a Matemática Formal? Que estratégias o aluno utiliza para aprender Matemática?”. Este campo de pesquisa também visa compreender o enorme fracasso escolar ligado a esta disciplina nos cursos superiores, mais detalhes podem ser encontrados em Igliori e Almeida (2013).

Diante do exposto, o diálogo entre o campo de pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior e as Metodologias Ativas podem resultar numa combinação extremamente fértil para reinventar os processos de ensino e aprendizagem, aqui no caso particular da Ciência Matemática, tornando sua aprendizagem signific(ativa) e construtora de valor na área tecnológica. Foram estas perspectivas de fertilidades que nos motivaram a empreender esta experiência de forma progressiva no campo das Metodologias Ativas utilizando-se para tal a forma de Projeto Investigativo. Neste projeto os estudantes empreendem a investigação de um fenômeno do Agronegócio e a Matemática que o ajuda a compreendê-lo de forma mais profunda.

2 | APRENDIZAGEM ATIVA – RECONSTRUINDO OS PRESSUPOSTOS

A experiência e os resultados que vamos relatar tem sido implementada na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral pertencente ao primeiro semestre do curso de Agronegócio da Fatec de Mogi das Cruzes. Neste 2 º semestre de 2018 iniciamos a empreitada com a quinta e sexta turma e de forma progressiva temos adaptado a experiência, aprendendo com as anteriores.

Na ementa desta disciplina constam os tópicos básicos de um curso introdutório de Cálculo Diferencial e Integral, abordando: funções, limites, derivadas e integral para funções de uma variável. O primeiro movimento realizado para podermos reconstruir a disciplina direcionando-a para as Metodologias Ativas foi desenvolvê-la de modo que o estudante consiga compreender como a Matemática, e aqui mais particularmente o Cálculo Diferencial e Integral, pode contribuir para o entendimento e resolução de problemas do Agronegócio. Nesta reconstrução foram utilizadas como estratégias de ensino e aprendizagem a modelagem matemática conforme Bassanezi (2009); resolução de problemas, Polya (1995) e pesquisa que segundo Demo (2008), " [...] aprende-se a fazer conhecimento pela via da pesquisa, e principalmente o aluno se forma melhor, a medida que entra na dinâmica da aprendizagem reconstrutiva e no conhecimento disruptivo.".

O segundo movimento diz respeito ao estudante, é necessário compreender a debilidade de sua formação básica em Matemática, valorizar seus conhecimentos pregressos e fazê-los evoluir, construir um ambiente de aprendizagem baseado em respeito mútuo e solidariedade onde o estudante independente de seu grau de dificuldade sinta-se acolhido e motivado, onde o indivíduo possa ser ouvido. Faz-se necessário (re) encantar nossos alunos e alunas em face da construção dos conhecimentos, é necessário perceber o estudante como um ser integral de dimensões cognitivas, afetivas e sociais. A psicopedagogia, conforme Bossa (2007), que em seus fundamentos aborda o ser humano de forma integral e trabalha nas causas das dificuldades de aprendizagem, nos forneceu o suporte teórico necessário neste quesito.

Nas Metodologias Ativas, os estudantes são convidados a ocupar o papel de protagonistas em seu processo de ensino e aprendizagem, desenvolvendo, para isto, autonomia e independência intelectual. Os professores (as) assumem o papel de tutores, facilitadores e de curadores, ocupando a posição de gestores do processo de ensino e aprendizagem. Toda esta novidade pressupõe um novo sistema de avaliação. Para dar conta desta demanda empregamos em nossa experiência um processo contínuo de avaliação, onde este deve, conforme Masetto (2003), "[...] estar integrado ao processo de aprendizagem como um elemento de incentivo e motivação para a aprendizagem.". Neste sistema, a avaliação e a aprendizagem estão amalgamadas, o elemento fundante da avaliação é a aprendizagem. O sistema avaliativo deve contemplar, entre outras, as dimensões conceituais, procedimentais e atitudinais, deve prever feedback contínuo e recuperações paralelas, flexibilidade e variedade metodológica e temporal. Desta forma completamos o terceiro movimento para podermos tomar o caminho das Metodologias Ativas.

3 | APRENDIZAGEM ATIVA – UMA EXPERIÊNCIA PROGRESSIVA

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral pertence ao 1º semestre do curso de Agronegócio. Esta disciplina, pensada como aprendizagem ativa, tem por objetivos possibilitar ao estudante o uso criativo dos conhecimentos matemáticos de forma a intervir em sua área tecnológica, com o propósito de aprofundar os conhecimentos técnicos, resolver problemas reais, apoiar e estruturar as experiências em campo. Utiliza-se para tal objetivo, os conceitos de modelagem matemática baseados em ferramentas computacionais. O estudante é estimulado a desenvolver o espírito investigativo em relação as questões de sua área, criando as competências necessárias para utilizar os conhecimentos matemáticos de forma a organizar e modelar dados, construir gráficos, calcular e investigar pontos de máximos e mínimos, taxas de variação média e instantâneas (derivadas), pontos de inflexão e ser capaz, principalmente, de interpretar estes conceitos matemáticos utilizando-os para aprofundar os conhecimentos tecnológicos.

Esta experiência baseia-se na Metodologia Ativa denominada Projeto Investigativo. Segundo Moran (2018) o Projeto Investigativo se caracteriza, " [...] quando o foco é pesquisar uma questão ou situação, utilizando técnicas da pesquisa cientifica.". As atividades baseadas em projetos envolvem os estudantes em um tema de seu interesse, valorizam o trabalho coletivo na forma de cooperação, leva o estudante a enfrentar problemas tanto de ordem técnica quanto organizacionais contribuindo para o desenvolvimento da autonomia e proatividade. O Projeto Investigativo tem como um dos elementos principais a pesquisa que nos serve aqui como estratégia de ensino e aprendizagem, segundo Demo (2008), "É pesquisando que o aluno, ao final das contas, aprende a ler, enfrentar teorias e polêmicas, argumentar e contra argumentar, fundamentar, elaborar texto próprio.".

Para desenvolver os projetos os estudantes necessitam do apoio de ferramentas computacionais que são utilizadas principalmente na parte de modelagem matemática dos fenômenos e na construção de gráficos. Dentro do trabalho de modelagem matemática a experimentação tem um papel fundamental. Experimentar não é comprovar na prática o que a teoria sugere. Conforme Silva, Machado e Tunes (2010), "A experimentação no ensino pode ser entendida como uma atividade que permite a articulação entre fenômenos e teorias. Desta forma, o aprender ciências deve ser sempre uma relação constante entre o fazer e o pensar.". São utilizadas basicamente duas ferramentas computacionais, a primeira é o Geogebra[1], software gratuito que dá apoio a construção de gráficos e resoluções algébricas como cálculos de derivadas, máximos, mínimos, integrais etc. A segunda ferramenta é o Software Excel, que através da ferramenta *adicionar linha de tendência* possibilita encontrar a função matemática que melhor aproxima o fenômeno, fornecendo sua forma algébrica e o coeficiente de correlação R^2, que informa o grau de precisão da aproximação. O estudante experimenta várias funções matemáticas (lineares, exponenciais, logarítmicas, polinomiais etc.) encontrando aquela que melhor modela o fenômeno do agronegócio por ele investigado.

No 2º semestre de 2017 e 1º de 2018, o Projeto Investigativo foi desenvolvido

1 Para maiores detalhes consultar: https://www.geogebra.org/?lang=pt Acesso em: 15 de jul de 2018.

a partir da metade do curso. A apresentação do produto deste projeto, na forma de seminários e artigos, sempre ocorre ao final do semestre. A organização das atividades do Projeto Investigativo tem se estruturado com adaptações, segundo a proposta de Moran (2018), ou seja, atividades que contemplem momentos de: motivação e contextualização; brainstorming, organização; registro e reflexão; melhoria de ideias, produção, apresentação e ou publicação. No startup do projeto os estudantes são encorajados a formarem grupos pequenos e de acordo com a afinidade temática. São orientados a trabalhar de forma sinérgica com suas disciplinas tecnológicas aproveitando as atividades em desenvolvimento nestas disciplinas. Os alunos (as) que já são produtores rurais ou trabalham no agronegócio são orientados a desenvolver o projeto tendo como base suas atividades profissionais. Os grupos elaboram um cronograma com os marcos principais, alinhados as atividades citadas, e são avaliados pelo cumprimento do cronograma e pela produção final, sempre de forma processual. Os demais encontros do curso constroem os conhecimentos matemáticos que dão o suporte para a elaboração do Projeto Investigativo.

4 | RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a apresentação do produto final, realizamos uma discussão sobre a vivência desta experiência de aprendizagem ativa. Os relatos dos estudantes são todos positivos e motivadores, encontramos em suas falas elementos que indicam alguns dos objetivos buscados pelas Metodologias Ativas, tais como, o desenvolvimento da autonomia e do protagonismo do estudante diante da aprendizagem. O estudante passa a compreender melhor o papel da Matemática na construção dos conhecimentos de sua área tecnológica. O aluno (a) se (re)encanta com a Matemática e com o conhecimento. Em termos de desempenho acadêmico os resultados não são diferentes, com altos índices de sucesso escolar:

Alunos (a)	Reprovados por Falta	Reprovados por Nota	Aprovados	Média
120	14	4	96,23%	6.75

Semestres 02/2017 & 01/2018 - 4 turmas.

Fonte: elaborado pelo autor.

Esta iniciativa tem sido realizada de forma progressiva procurando sempre uma melhora em relação à experiência anterior. Estas melhorias são feitas também considerando as sugestões dos estudantes. Como próximos passos temos por objetivo tornar o Projeto Investigativo a espinha dorsal da disciplina, mesclando-o naturalmente com outras modalidades de aprendizagens ativas. Outra iniciativa é integrar de forma interdisciplinar este projeto com os colegas professores (as) das disciplinas de Tecnologia de Produção

Animal e Vegetal e finalmente melhorar o processo de documentação desta experiência. Terminamos o relato de nossa experiência bastante motivados e conscientes de estar contribuindo através de Metodologias Ativas para uma educação inovadora de qualidade e signific(ativa).

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2009.

BOSSA N. A. **A psicopedagia no Brasil: contribuições a partir da prática**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

DEMO, P. **Universidade, aprendizagem e avaliação: horizontes reconstrutivos**. Porto Alegre: Mediação, 2008.

IGLIORI, S. B. C.; ALMEIDA, M. V**. Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo**. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.l.], v. 15, n. 3, dez 2013, p. 718-734.

MASETTO, M. T. **Competência pedagógica do professor universitário**. São Paulo: Summus, 2003.

MORAN, J. Metodologia ativas para uma aprendizagem mais profunda. *In:* **Metodologia Ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática**. Porto Alegre: Penso, 2018 ,Parte I, p. 28-62.

OTERO-GARCIA, S. C. **O rigor e a intuição no ensino de cálculo e análise.** Revista Eletrônica de Educação. São Carlos, SP: UFSCar, v.5, no. 2, nov 2011, p. 267-274.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação Heittor Lisboa de Araujo. – 2. Reimpr. – Rio de Janeiro: Interciência, 1995, 196 p.

SILVA, R. R.; MACHADO, P. F. L. M.; TUNES, E. Experimentar sem medo de errar. *In:* SANTOS, W. L. P.; MALDANER, O. A. (Org.). **Ensino de química em foco**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2010, p. 231-261.

SIMMONS, J. F. **Cálculo com Geometria Analítica** – São Paulo: McGraw-Hill, 2005 v1.

TRINDADE, J.A.O. **Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática**. 1996. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1996.

CAPÍTULO 8

DESIGUALDADE DE CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 30/06/2021

Willian Isao Tokura
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Maracaju – MS
http://lattes.cnpq.br/3530744794583222

Levi Rosa Adriano
Universidade Federal de Goiás, IME
Goiânia – GO
http://lattes.cnpq.br/3206466156270217

Priscila Marques Kai
Universidade Federal de Goiás, INF
Goiânia – GO
http://lattes.cnpq.br/8210180026970752

Elismar Dias Batista
Universidade Federal de Goiás, IME
Goiânia – GO
http://lattes.cnpq.br/3648588387524579

RESUMO: Neste artigo, provamos que se uma variedade Riemanniana satisfaz a condição de duplicação de volume e a desigualdade de Caffarelli – Kohn – Nirenberg com o mesmo expoente, então a variedade tem um crescimento de volume exatamente n-dimensional. Como aplicação, obtemos propriedades geométricas e topológicas de variedades Riemannianas que suportam uma desigualdade de Caffarelli – Kohn – Nirenberg.
PALAVRAS-CHAVE: Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN), desigualdade do tipo Hardy, desigualdade de Sobolev, rigidez, variedades Riemannianas.

CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG INEQUALITIES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

ABSTRACT: We prove that if a Riemannian manifold satisfies the volume doubling condition and the Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality with the same exponent, then it has exactly n-dimensional volume growth. As application, we obtain geometric and topological properties of Riemannian manifolds which support a Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality.
KEYWORDS: Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) inequality, Hardy type inequality, Sobolev inequality, rigidity, Riemannian manifolds.

INTRODUÇÃO

O século XX iniciou-se com grandes avanços na área de análise matemática, em especial na teoria de Equações Diferenciais Parciais (EDP). Em meados da década de 30, Sergei Sobolev, um matemático russo, iniciou os estudos de soluções fracas para as equações hiperbólicas e a minimização de certas integrais variacionais do princípio de Dirichlet. Durante esse período, como ferramenta para resolver tais problemas, Sobolev introduziu o que conhecemos atualmente como espaço de Sobolev, o qual denotamos por $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Diante desse cenário, as ideias de Sobolev se expandiram rapidamente por conta dos inúmeros modelos procedentes da física, química e das engenharias que poderiam ser investigadas através de Equações Diferencias Parciais.

No estudo desse novo objeto $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, assim como qualquer outro conceito importante da matemática, surge o interesse por entender e descrever suas propriedades. Dessa forma, Sobolev em 1936 provou o seguinte resultado.

Teorema 1. *Seja um parâmetro* $p \in [1,n)$ *e* $p^* = \frac{np}{n-p}$, então

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^n) \to L^{p^*}(\mathbb{R}^n) \qquad (1)$$

Em outras palavras, o espaço de Sobolev pode ser incluído de maneira contínua nos espaços de Lebesgue. Equivalentemente, a expressão (1) acima pode ser reescrita como

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \ \ \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), C \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

A desigualdade (2) é conhecida como desigualdade de Sobolev. A importância da desigualdade (2) reside no fato que, por ela é possível extrair certas propriedades para soluções fracas no espaço $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, de fundamental importância na resolução de equações diferenciais parciais, além de permitir extrair certas informações sobre a função *u* por meio de sua derivada.

Como ficou claro depois de um tempo, certos modelos importantes ligados a problemas físicos, químicos e das engenharias que envolviam equações diferenciais parciais mais gerais, necessitavam de desigualdades mais gerais que as obtidas por Sobolev. Nesse sentido, Emilio Gagliardo [6] e Louis Nirenberg [11] obtiveram de maneira independente a seguinte extensão para desigualdade de Sobolev.

Teorema 2. *Sejam* $p \in (1, n)$, $s < r \leq q = \frac{np}{n-p}$ *e* $\theta \in [0,1]$ *então*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{\theta}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^s\, dx\right)^{\frac{1-\theta}{s}}, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \qquad (3)$$

Como podemos observar, as desigualdades (2) e (3) apresentam afinidade com o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, visto que elas são satisfeitas nesse espaço. Observando essa peculiaridade Ledoux [10] e Xia [15] iniciaram o estudo das variedades Riemannianas que suportam a desigualdade de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg, respectivamente. Os autores provaram que as variedades com curvatura de Ricci não negativa que suportam tais desigualdades, são muito próximas do espaço Euclidiano. Mais precisamente, considere

$$GN_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_s^{1-\theta}\|\nabla u\|_p^\theta}{\|u\|_r}, S_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_p}{\|u\|_{p^*}},$$

as constantes ótimas para as desigualdades (3) e (2), respectivamente, onde $\|\cdot\|p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\cdot|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$, então toda variedade Riemanniana com curvatura de Ricci não negativa que suporta (2), ou então (3), com constante C próxima da constante ótima definida acima, é difeomorfa ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$; e no caso em que *C* é igual a constante ótima temos que a variedade é isométrica à $\mathbb{R}^n$, ou seja, do ponto de vista de distância, tem o mesmo comportamento que o espaço Euclidiano.

Dentre as famílias mais gerais de desigualdades, Caffarelli, Kohn e Nirenberg (CKN) provam que, sob um regime de parâmetros *n, p, q, r,* α*, β, σ* e *a* (veja Teorema 3), existe uma constante tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r}|u|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p}|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q}|u|^q\,dx\right)^{\frac{1-a}{q}}, \forall n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Como podemos observar, essa desigualdade generaliza as desigualdades de Sobolev e Gagliardo-Nirenberg.

Seja $\mathbb{R}^n$ o espaço Euclidiano, denote por *dx* o elemento de volume associado a métrica canônica e considere $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o espaço das funções suaves no espaço Euclidiano com suporte compacto.

Dentre as famílias mais gerais de desigualdades, Caffarelli, Kohn e Nirenberg provam que

Teorema 3. *Sejam n≥ 2, p, q, r,* α*, β, σ, a constantes fixadas satisfazendo:*

$$p, q \geq 1, \qquad r > 0, \qquad 0 \leq a \leq 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n}, \frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}, \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} > 0, \gamma = a\sigma + (1-a)\beta,$$

onde

$$\frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n} = a\left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{n}\right) + (1-a)\left(\frac{1}{q} + \frac{\beta}{n}\right),$$

com

$$0 \leq \alpha - \sigma \; se \; a > 0, \qquad e \qquad \alpha - \sigma \leq 1 \qquad se \qquad a > 0 \qquad e \qquad \frac{1}{p} + \frac{\alpha - 1}{n} = \frac{1}{r} + \frac{\gamma}{n}.$$

Então existe uma constante positiva C tal que para qualquer função u ϵ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tem-se*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r}|u|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p}|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q}|u|^q\,dx\right)^{\frac{1-a}{q}}.$$

Denotamos por $C_{opt}(\mathbb{R}^n)$ a constante ótima para a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (CKN) acima, ou seja,

$$C_{opt}(\mathbb{R}^n)^{-1} = \inf_{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) - \{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p}|\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\beta q}|u|^q\,dx\right)^{\frac{1-a}{q}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\gamma r}|u|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}}}.$$

E associado à constante ótima, podemos definir o conceito de função ótima, a qual satisfaz a igualdade de CKN com $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n)$.

Recentemente, os autores em [9] consideraram a seguinte mudança na desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg

$$\alpha = -\frac{\mu}{p}, \qquad \beta = -\frac{\theta}{q}, \qquad \gamma = -\frac{s}{r},$$

e obtiveram o seguinte resultado.

Teorema 4. *Sejam $n \geq 2$, p, q, μ constantes satisfazendo*

$$1 < p < p + \mu < n, \qquad 1 \leq q < p\frac{q-1}{p-1} < \frac{np}{n-p},$$

juntamente com constantes r, θ, s, a dadas por

$$r = \frac{p(q-1)}{p-1}, \qquad \theta = s = \frac{n\mu}{n-p} \qquad e \qquad a = \frac{[(n-\theta)r - (n-s)q]p}{[(n-\theta)p - (n-p-\mu)q]r}.$$

Então com $\delta = np - q(n-p)$ tem-se

$$C_{opt}(\mathbb{R}^n)$$
$$= \left(\frac{n-p}{n-p-\mu}\right)^L \left(\frac{q-p}{p\sqrt{\pi}}\right)^a \left(\frac{pq}{n(q-p)}\right)^{\frac{a}{p}} \left(\frac{\delta}{pq}\right)^{\frac{1}{r}} \left[\frac{\Gamma\left(q\frac{p-1}{q-p}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{p}\frac{\delta}{q-p}\right)\Gamma\left(n\frac{p-1}{p}+1\right)}\right],$$

Onde

$$L = \frac{1}{r} + \frac{p-1}{p} - \frac{1-a}{q} - \frac{(p-1)(1-a)}{p}.$$

E as funções ótimas são da forma

$$V_0(x) = A\left(1 + B|x|^{\frac{n-p-\mu}{n-p}\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{q-p}}, \qquad A \in \mathbb{R}, \qquad B > 0.$$

Os teoremas acima nos revelam que o espaço Euclidiano é um ambiente privilegiado, visto que suporta a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg, isso se torna interessante, pois, tal desigualdade desempenha fundamental importância na teoria da resolução de equações diferenciais parciais elípticas, principalmente em problemas variacionais e regularidade de soluções. Dessa forma, o espaço Euclidiano se torna importante para estudos de tais problemas.

Por outro lado, quando trazemos a desigualdade de CKN para o ramo da geometria diferencial, uma pergunta pertinente é a seguinte:

Questão. *Como é a estrutura dos espaços que suportam a desigualdade de CKN?*

Visando responder essa questão, em [1, 2, 5, 7, 10, 13, 14, 15] os autores consideram o estudo das variedades Riemannianas com curvatura de Ricci não negativa que satisfazem alguma das classes particulares de CKN. Em particular, em [1, 2, 5, 10, 13, 14, 15] os autores utilizam resultados de comparação de volume e obtêm que tais espaços satisfazem exatamente o crescimento de volume n-dimensional, isto é, existe uma constante universal C_0>0 tal que

$$V_{ol}(B_x(\rho)) \geq C_0\rho^n, \qquad x \in M, \qquad \rho > 0.$$

Além disso, alguns resultados de rigidez são obtidos, e entre outras coisas mostram que as variedades Riemannianas com Ricci não negativo e que suportam classes de desigualdades especificas, como: desigualdade de Sobolev, desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, desigualdade de Hardy, etc, com constante *C* sendo próximo da constante ótima do caso Euclidiano para desigualdade correspondente, são difeomorfa ao espaço Euclidiano, e com constante *C* igual a constante ótima do caso Euclidiano temos a isometria com o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

No contexto dos espaços métricos, Kristály e Ohta em [8], estudam os espaços métricos com medida (*X, d, m*) que suportam a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg sem termo de interpolação (isto é, $a = 1$)

$$\left(\int_X \frac{|u|^r}{d(x,x_0)^{-\gamma r}}\,dm\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_X |Du|^2\,dm\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

com parâmetros

$$r = \frac{2n}{n-2-2\gamma}, \qquad -\gamma \epsilon\, [0,1),$$

O obtém o seguinte resultado.

Teorema 5. *Seja (X, d, m) um espaço métrico próprio com medida n-dimensional e assuma que para* $a \in [0,1), n \geq 3, p = 2n/(n-2+2a), x_0 \in X$, *e*

$$c \geq K_a = \left(\frac{1}{(n-2)(n-ap)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(2-ap)\Gamma((2n-2ap)/(2-ap))}{n\omega_n\Gamma^2((n-ap)/(2-ap))}\right)^{\frac{2-ap}{2n-2ap}},$$

a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg (4) ocorra em X, juntamente com as seguintes condições:

$$\frac{m(B_R(x))}{m\left(B_\rho(x)\right)} \leq C_0\left(\frac{R}{p}\right)^n, \qquad \forall x \in X, \qquad e \qquad 0 < \rho < R,$$

e

$$\liminf_{\rho\to 0}\frac{m\left(B_\rho(x_0)\right)}{m_E\left(B_\rho(0)\right)} = 1.$$

Então

$$m\left(B_p(x)\right) \geq C_0^{-1}\left(\frac{K_a}{C}\right)^{\frac{n}{1-a}} m_E\left(B_\rho(0)\right), \qquad \forall p > 0, \qquad x \in X.$$

Tais resultados nos motivaram a entender a geometria e a estrutura das variedades Riemannianas que suportam a desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg com termo de interpolação

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^{\frac{p(q-1)}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p(q-1)}} C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\mu} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{a}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\frac{n\mu}{n-p}} |u|^q\, dx\right)^{\frac{1-a}{q}},$$

onde os parâmetros acima são dados pelo Teorema 3.

RESULTADOS PRINCIPAIS

No restante desse manuscrito, salvo menção em contrário, assumiremos os parâmetros descritos no Teorema 3. Dito isso, nosso objetivo é estender o resultado principal de Kristály e Ohta em [8] para a classe de Caffarelli-Kohn-Nirenberg em variedades Riemannianas com termo de interpolação, isso permitirá entender o comportamento das variedades que suportam tal classe mais geral de desigualdades. Como consequência, apresentaremos teoremas de rigidez métrica e topológica em variedades Riemannianas. Tais resultados fornecem boas pistas de como são os espaços que suportam a desigualdade CKN.

Nosso principal resultado pode ser enunciado na forma do seguinte teorema.

Teorema 6. *Seja* (M^n*, g*)*uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa e assuma que para toda função u* ϵ C_0^∞ *(M) a desigualdade de CKN ocorra. Então para todo* $R > 0$ *temos*

$$\left(\frac{C_{opt}(\mathbb{R}^n)}{C}\right)^{\frac{n}{a}} \omega_n R^n \leq Vol\big(B_R(p)\big) \leq \omega_n R^n,$$

onde ω_n *denota o volume da bola de raio unitário em* $\mathbb{R}^n$*.*

Um teorema devido a Cheeger e Colding [4] afirma que dado um inteiro n ≥ 2, existe uma constante δ(n) > 0, tal que toda variedade Riemanniana (M^n, *g*) completa com curvatura de Ricci não negativa satisfazendo

$$Vol(B_r(x)) \geq \big(1 - \delta(n)\big)\omega_n r^n, \qquad \forall x \in M, \qquad \forall r > 0,$$

e difeomorfa ao espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Então combinando este resultado com o Teorema 6, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1. *Dado um inteiro n* ≥ 2*, existe* ϵ *(n)* > 0*, tal que toda variedade Riemanniana completa não compacta* (M^n*, g*) *com curvatura de Ricci não negativa satisfazendo a desigualdade de CKN com constante* $C = C_{opt}$ ($\mathbb{R}^n$)+ ϵ(*n*) *é difeomorfa ao espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^n$*.*

Pelo teorema de comparação de Bishop-Gromov [3, 12], temos que uma variedade Riemanniana completa (M^n*, g*) com curvatura de Ricci não negativa satisfaz

$$Vol\big(B_R(p)\big) \geq \omega_n R^n, \qquad \forall p \in M,$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, a bola $B_R(o)$ é isométrica a bola Euclidiana de raio R. Assim, em decorrência do Teorema 6, temos o seguinte corolário.

Corolário 2. *Seja* (M^n, g) *uma variedade Riemanniana completa não compacta com curvatura de Ricci não negativa e assuma que para toda função a desigualdade de CKN ocorra com* $C = C_{opt}(\mathbb{R}^n)$*. Então M é isométrica ao espaço Euclidiano* $\mathbb{R}^n$*.*

REFERÊNCIAS

[1] ADRIANO, Levi; XIA, Changyu. Hardy type inequalities on complete Riemannian manifolds. **Monatshefte für Mathematik**, v. 163, n. 2, p. 115-129, 2011.

[2] ADRIANO, Levi; XIA, Changyu. Sobolev type inequalities on Riemannian manifolds. **Journal of mathematical analysis and applications**, v. 371, n. 1, p. 372-383, 2010.

[3] CHAVEL, Isaac. Riemannian geometry: a modern introduction. **Cambridge university press**, 2006.

[4] CHEEGER, Jeff and COLDING TOBIAS. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. **Journal of Differential Geometry**, v. 46, n. 3, p. 406-480, 1997.

[5] DO CARMO, Manfredo Perdigão; XIA, Changyu. Complete manifolds with non-negative Ricci curvature and the Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities. **Compositio Mathematica**, v. 140, n. 3, p. 818-826, 2004.

[6] GAGLIARDO, Emilio. Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. **Matematika**, v. 5, n. 4, p. 87-116, 1961.

[7] HEBEY, Emmanuel. Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities: Sobolev Spaces and Inequalities. **American Mathematical Soc**., 2000.

[8] KRISTÁLY, Alexandru; OHTA, Shin-ichi. Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequality on metric measure spaces with applications. **Mathematische Annalen**, v. 357, n. 2, p. 711-726, 2013.

[9] LAM, Nguyen; LU, Guozhen. Sharp constants and optimizers for a class of Caffarelli–Kohn–Nirenberg inequalities. **Advanced Nonlinear Studies**, v. 17, n. 3, p. 457-480, 2017.

[10] LEDOUX, M. On manifolds with non-negative Ricci curvature and Sobolev inequalities. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 7, n. 2, p. 347-353, 1999.

[11] NIRENBERG, Louis. On elliptic partial differential equations. In**: Il principio di minimo e sue applicazioni alle equazioni funzionali**. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011. p. 1-48.

[12] SCHOEN, Richard M.; YAU, Shing-Tung. **Lectures on differential geometry**. Cambridge, MA: International press, 1994.

[13] XIA, Changyu. Complete manifolds with nonnegative Ricci curvature and almost best Sobolev constant. **Illinois Journal of Mathematics**, v. 45, n. 4, p. 1253-1259, 2001.

[14] XIA, Changyu. The Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities on complete manifolds. **Mathematical Research Letters**, v. 14, n. 5, p. 875-885, 2007.

[15] XIA, Changyu. The Gagliardo–Nirenberg inequalities and manifolds of non-negative Ricci curvature. **Journal of Functional Analysis**, v. 224, n. 1, p. 230-241, 2005.

CAPÍTULO 9

O ENSINO DE FUNÇÃO DO 1º GRAU NA EDUCAÇÃO INCLUSIVA: TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E O SABER MATEMÁTICO PARA ALUNOS CEGOS

Data de aceite: 01/09/2021

Camila Ferreira e Silva
Discente do curso de Licenciatura em Matemática das Faculdades Integradas Ipiranga. Graduada em Licenciatura Plena em Pedagogia pela Universidade Vale do Acaraú

RESUMO: Objetivou-se nesta pesquisa investigar quais as práticas devem ser mobilizados para o ensino e a aprendizagem da matemática com gráficos de função do primeiro grau para alunos cegos de Belém. Utilizou-se como metodologia no trabalho, pesquisas: bibliográfica, de campo e documental, por meio da investigação e articulação dos problemas encontrados obteve-se informações por meio de entrevista com o docente da instituição de atendimento especializado, intervenção da aula particular com uma aluna cega e observação de alunos cegos na prática pedagógica do estágio supervisionado – regência. Verificou-se o auxilio do multiplano como uma ferramenta didático-pedagógico de excelência no ensino da matemática para alunos com deficiência visual na construção de gráficos com a função do primeiro grau, auxiliando professor e aluno na sala de aula e fora dela, aderindo uma práxis de transposição didática como um pressuposto de ensino e qualidade, sendo assim recursos pedagógicos, é necessário neste âmbito educacional. Conclui-se que montagem de gráfico especificamente de função do 1º grau como instrumento é destinado a satisfazer as necessidades básicas de aprendizagem da matemática dos educandos cegos como uma forma de alcançar a independência e aumentar suas possibilidades de acesso à convivência social e que o ensino matemático possa estar a serviço da formação da cidadania com práxis inovadoras dos docentes.

PALAVRAS-CHAVE: Função do 1º grau. Transposição Didática. Alunos Cegos. Inclusão. Ensino

THE TEACHING THE FUNCTION OF 1ST GRADE IN INCLUSIVE EDUCATION: DIDACTIC TRANSPOSITION AND MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR BLIND STUDENTS

ABSTRACT: This research aimed to investigate which practices should be mobilized for the teaching and learning of mathematics with graphs of first degree function for blind students in Belém. It was used as methodology in the work, bibliographic, field and documental researches, through the investigation and articulation of the problems found, information was obtained through interviews with the teacher of the institution of specialized assistance, intervention of a private class with a blind student and observation of blind students in the pedagogical practice of the supervised internship - regency. It was verified the help of the multiplane as a didactic-pedagogical tool of excellence in teaching mathematics to visually impaired students in the construction of graphs with the function of the first degree, helping teacher and student in the classroom and outside it, adhering to a praxis of didactic transposition as an assumption of teaching and quality, thus

pedagogical resources are necessary in this educational context. Conclui-se que montagem de gráfico especificamente de função do 1º grau como instrumento é destinado a satisfazer as necessidades básicas de aprendizagem da matemática dos educandos cegos como uma forma de alcançar a independência e aumentar suas possibilidades de acesso à convivência social e que o ensino matemático possa estar a serviço da formação da cidadania com práxis inovadoras dos docentes.
KEYWORDS: 1st degree function. Didactic Transposition. Blind Students. Inclusion. Teaching.

INTRODUÇÃO

O presente estudo pauta-se no anseio social de propiciar uma educação para todos estabelecendo diferenças, especificamente aos educandos cegos, muitas vezes deixados à deriva do sistema educacional (CARDOSO, 2004). Sobre as diferenças, Figueiredo (2002, p. 68) enfatiza que estas "são inerentes ao gênero humano", explicando que s as diferenças que fazem do ser humano um ser único, porém as semelhanças são os itens que nos aproximam uns dos outros. Deste modo, segue Figueiredo (2002, p. 69), é preciso reconhecer o valor das diferenças como elemento de crescimento dos sujeitos e dos grupos sociais.

No Brasil, o desejo em equiparar oportunidades educacionais aos deficientes gera um paradigma próprio de países subdesenvolvidos. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, gestada em meio a toda uma luta em prol da educação inclusiva, reserva o capítulo V à Educação Especial, na qual assegura aos alunos deficientes a oferta da educação escolar "(...) preferencialmente na rede regular de ensino (...)" (Art. 58, caput), o que incita um movimento que converge ao aumento do número de educandos pertencentes a esse grupo nas escolas regulares.

Assim, a escola inclusiva é entendida por uma parcela da população como aquela que abarca uma maior quantidade de educandos deficientes na rede regular. Mas, como quantidade não significa qualidade, muitas vezes esses educandos só frequentam as classes, sem necessariamente constituir o todo. No caso de educandos cegos, a situação é ainda mais peculiar, sendo que algumas adaptações se fazem necessárias, como o uso do Sistema Braille de escrita, para que eles possam fazer suas anotações ou mesmo para poder ler os livros/apostilas didáticos (CARDOSO, 2004). Porém, nem sempre os professores estão preparados para atendê-los e muitas vezes não há um esforço no sentido de que esta situação se atenue. A presença de um professor especialista se faz necessária, porque "ele" conhece o Braille, "ele" sabe trabalhar com cegos... (CARDOSO, 2004).

O ensino da matemática, por sua vez, tem um agravante, porque muitos de seus conceitos, para serem abstraídos pelo educando, precisam fazer um paralelo com a visualização imediata, com o resultado concreto dos cálculos. Mas, os recursos didáticos disponíveis que propiciam ao cego à visualização de um gráfico, por exemplo, são escassos e por vezes ineficientes, levando em consideração que precisam ser concretos para serem usados pelo cego (CARDOSO, 2004). Segundo Cardoso, (2004) indaga quais as formas em proceder então? Será que é suficiente a conceituação teórica para que a lógica matemática seja entendida? Será que a utilização de novos métodos, como um instrumento que será apresentado neste estudo, pode ter um resultado satisfatório, atendendo não só a necessidade de visualizar cálculos, mas também a de compreender o processo que levou àquele resultado? São estas e outras questões que permeiam o presente estudo, onde a proposição de um recurso pedagógico concreto (Multiplano) pode ser um caminho que leve à amenização das dificuldades dos cegos no que tange ao ensino da matemática e mais especificamente de função do 1° grau, uma vez que ele propicia oportunidades concretas de visualização das consequências dos cálculos, de fundamental importância para as abstrações.

O professor refere-se a "reta" e escreve no quadro "segmento de reta", de modo que podem confundir os alunos, ainda mais alunos com deficiência visual. O professor, ao fazer a transposição, portanto, descaracteriza os conceitos. Chamamos Chevallard (1991), quanto atenta para a "vigilância epistemológica", onde se deve ter o cuidado para não distorcer o conceito ao dar-lhe uma nova roupagem. Observamos uma deformação quando a transposição apresenta o gráfico da função. No caso da aula, em que o professor tratava de função do primeiro grau, informou que o gráfico era uma reta sem associação com a lei que a definia. O modo como fez isso foi construindo uma tabela de pares ordenados onde os valores das abscissas eram dados por ela e as ordenadas eram calculadas pela lei de formação da função. Segundo Chevallard (1991) as transformações/deformações que sofre o saber científico para poder transforma-se em saber ensinado é necessário que seja realizado uma vigilância epistemológica, para que tais deformações e adaptações não resultem por "desfigurar" de maneira tal o saber original, que o saber a ensinar deixe de ser fiel a ele, podendo desta forma desenvolver certos obstáculos à aprendizagem.

O Multiplano deve ser um material pedagógico possível para o fruto de uma necessidade social que se faz presente na escola, ou seja, a necessidade de equiparar oportunidades de acesso ao conhecimento matemático, essencial ao desenvolvimento intra/interpessoal de cada indivíduo. Todos têm a necessidade de saber medir, contar e calcular, independente de possíveis dificuldades que possam existir. O uso de multiplano torna-se uma proposta possível, para intervenção futura deste material didático à pessoa com deficiência visual com gráficos de função do primeiro grau, tendo impedimentos na falta de prática do manuseio deste instrumento.

UM POUCO DA MINHA TRAJETÓRIA RUMO AO TEMA DA PESQUISA

Surgiram-se muitas experiências e uma bem diferente e de grande desafio no transmitir do conhecimento matemático ao estabelecer à escolarização da pessoa com deficiência visual com gráfico de função do primeiro grau. A formação de Pedagogia serve para investigar a natureza, as finalidades e os processos necessários às práticas educativas com o objetivo de propor a realização desses processos em vários contextos, é de grande valor romper as barreiras de função do primeiro grau para alunos cegos ao realizar uma reflexão global e unificadora da realidade da educação.

Como de costume leciono aulas particulares no bairro que moro, no entanto a experiência com a criança cega nessa faixa etária de aproximadamente entre 13 a 15 anos aproximadamente. A docente não se tinha o conhecimento que a criança apresentava deficiência visual, logo a disciplina era Matemática que iria lecionar com o conteúdo de função do 1º grau com gráfico, diante disso a criança possuía bastante dificuldade e ainda era a matéria que a mesma possuía fracasso, a genitora da aluna mostrou-me o que o professor da escola ensinava à sua filha e me questionei como ensinar gráfico à pessoa cega?

No primeiro momento, sugere-se aos familiares uma instituição de atendimento especializado – AEE para que a discente possa desenvolver suas habilidades e potencialidades. Necessitou-se criar estratégias naquele momento da aula particular com a aluna cega, como: na casa da criança possuía garrafas de refrigerante (material concreto) pegando tampas de garrafa *pet* e produzi um plano cartesiano e ensinei a discente o eixo x (ordenada) e no eixo y (abcissa), usando barbantes para que a aluna pudesse sentir a reta mostrei e demonstrei os tipos de função do 1º grau (afim, constante e identidade) com a teoria matemática do sistema braile que sabia, mas a criança nem isso sabia, então se percebe que a família tinha preconceitos que a criança utilizasse o sistema Braille, o sistema de leitura tátil e escrita braille é o mais completo, perfeito, seguro e eficiente meio de acesso à educação e à informação para a pessoa cega. A falta de acesso à informação quase sempre a condena a uma vida sem ou com poucas perspectivas e o preconceito já é uma barreira suficiente para manter a pessoa com deficiência visual isolada da sociedade.

Neste sentido o estudo é relevante para conhecer as implementações que a discussão e a vivência de propostas pedagógicas que contemplem a educação inclusiva precisam começar nos cursos de formação, no qual os licenciados necessitem compreender esta questão tão complexa e tentar planejar ações que viabilizem o aperfeiçoamento do ensino para alunos com necessidades especiais.

Diante desses questionamentos e justificativas levanto a seguinte questão como objetivo geral: Quais conhecimentos e práticas devem ser mobilizados para o ensino aprendizagem da matemática com gráficos de função do primeiro grau para alunos cegos numa instituição de atendimento especializado de Belém?

Para isso os objetivos específicos são: identificar as reflexões teóricas sobre o conceito de inclusão social, verificar acerca da inclusão de educandos cegos no ensino de atendimento especializado e quais recursos os professores de matemática vem utilizando com estes educandos e analisar a utilização do Multiplano, para constatar se o mesmo contribui para a melhoria no processo de ensino-aprendizagem.

Delimitar a pesquisa é estabelecer limites para a investigação. A pesquisa pode ser limitada em relação ao assunto, à extensão e a uma série de fatores (MARCONI & LAKATOS, 2008). Portanto, a pesquisa identificou a falta de prática docente na sala de aula, dificuldades foram encontradas nas práticas cotidianas escolares do corpo institucional e propostas para o bom desenvolvimento utilizado pelos professores aos alunos cegos na instituição de atendimento especializado da cidade de Belém, no Estado do Pará.

O motivo da discussão desta temática é a existência de fortes lutas de transformação no ambiente da inclusão para garantir as conquistas dos trabalhadores em educação, e de toda a comunidade escolar em níveis de atuação. Neste sentido, o estudo tornou-se relevante para o conhecimento de implementação de práticas e ações na realidade do docente, a discernir dificuldades, problemas que se enfrentam por um corpo educacional. A gestão educacional reflete se a ação por ele desenvolvida promove uma melhoria social e reflexão a respeito de uma temática que influência uma prática pedagógica.

Deste modo, trilharam-se os caminhos nos quais contribuíram pesquisas de formas descritiva, exploratória e explicativa e para atingirem os objetivos propostos. O mesmo foi composto por três tipos de pesquisa: bibliográfica, de campo e documental, por meio da investigação e articulação dos problemas encontrados.

Inicialmente de punho, realizou-se uma pesquisa bibliográfica que se torna pública em relação ao tema de estudo, jornais, revistas, livros, pesquisas, monografias, teses etc. Sua finalidade é colocar o pesquisador em contato direto, contudo o que foi escrito, dito ou filmado sobre o determinado assunto, inclusive conferências seguidas de debates que tenham sido transcritos por alguma forma, quer publicadas, quer gravadas (MARCONI & LAKATOS, 2005). Por meio de artigos, livros e *via-internet* adquiriu-se informações que vieram elastecer/ampliar o conhecimento adquirido para desenvolver com mais profundidade o Tema Gerador - O Ensino de função do 1º Grau para alunos cegos: uma questão de transposição didática.

Segundo Marconi & Lakatos (2005), a pesquisa de campo é aquela que se utiliza o objetivo de conseguir informações e/ou conhecimentos acerca de uma problemática, para o qual se procura uma resposta, ou de uma hipótese, que se queira comprovar, ou, ainda, descobrir novos fenômenos ou as relações entre eles.

Diante disso as pesquisas de campo foram feitas em três etapas: uma entrevista realizada com o professor na instituição de atendimento especializado de ensino, uma intervenção da aula particular com uma aluna cega e observação de alunos cegos na prática pedagógica do estágio supervisionado – regência com uma pesquisa documental para analisar o projeto pedagógico da instituição escolar sobre um plano inclusivo e as propostas quanto incluir o discente no sistema educacional estabelecendo as diferenças. A Entrevista vem a ser um encontro entre duas pessoas, afim de que uma delas se obtenha informações a respeito do que se determina (assunto), mediante uma conversação de natureza profissional. É um procedimento que se utiliza na investigação social, para a coleta de dados ou para ajudar no diagnóstico ou no tratamento de um problema social (MARCONI & LAKATOS 2005). A mesma ocorreu em forma de abordagem qualitativa, Severino (2007), afirmou ser um modo que faz referência mais a seus fundamentos epistemológicos do que propriamente a especificidades metodológicas. Entendeu-se assim, que este refere-se a um processo, no qual, o que vale são os conhecimentos de cada indivíduo.

A abordagem qualitativa evidenciada na pesquisa realizada no *lócus,* da instituição de atendimento especializado no Estado de Belém, composto por um professor da instituição. Por meio da quantidade de entrevistas serem pequenas, não será preciso tirar amostragem quantitativa com coleta de dados, no qual Marconi; Lakatos (2005), afirmam ser uma parcela convenientemente selecionada do universo populacional. Efetuou-se a aplicação dos instrumentos elaborados e das técnicas selecionadas como também a coleta de dados prevista, submetidos ao processo de análise e conteúdo, de forma qualitativa por meio de perguntas ao professor com uso de perguntas informais na escola envolvida a pesquisa de campo.

O estudo ora em proposição se organiza em quatro partes: Na primeira parte aborda-se a apresentação e discussão das concepções dos autores que deram início ao campo de conhecimentos da inclusão social, logo o tema gerador é a o ensino de função do 1º grau para alunos cegos: uma questão de transposição didática, importante na compreensão do estudo frente à sociedade atual, aos desafios dessas mudanças sociais no reflexo à educação, pois se explicitou o problema, o objetivo geral e específico, delimitação do estudo e relevância do estudo.

A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E O ENSINO DA MATEMATICA

A escola, dentre as suas principais funções, tem o papel da transmissão de conhecimentos produzidos pela humanidade. Portanto, se discute a questão da inclusão social nas escolas regulares, é importante meditar acerca da natureza daquilo que a escola pretende transmitir como conteúdo específico da matéria propriamente dita.

A prática escolar no que se refere ao Ensino matemático deve estar a serviço da formação da cidadania, pois a linguagem matemática permite a leitura de mundo, a descrição e a relação de vários aspectos da realidade com vista à transformação. A resolução de problemas para alunos cegos visa priorizar aplicações imediatas de algoritmos e conceitos para que impulsione habilidades a serem desenvolvidas, para que os alunos com deficiência visual possam construir e evoluir em conteúdos propondo boas metodologias para que o discente possa avançar logicamente e que as intervenções docentes possam envolver a autonomia do educando.

Visa descrever e caracterizar os processos de estudo para apresentar explicações e respostas sólidas para as dificuldades com os quais se deparam todos aqueles envolvidos com este estudo (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

Pais (2002, p.11) opta pela formulação de uma definição de Didática da Matemática dentro do contexto brasileiro:

> A didática da matemática é uma das tendências da grande área de educação Matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica.

Ainda segundo Pais (2002, p.11) a Didática da Matemática oferece subsídios para “[...] compreender quais as condições de produção, registro e comunicação dos conteúdos matemáticos e de suas consequências didáticas.” O autor afirma que todos os conceitos didáticos têm como finalidade favorecer o entendimento das múltiplas conexões entre a teoria e a prática. (idem, p.11) “A dimensão teórica é entendida como sendo o ideário resultante da pesquisa e a prática como sendo a condução do fazer pedagógico”. Portanto, os elementos que constituem o sistema didático devem ser integrados entre si, não dissociando as relações entre professor, aluno e saber para que a solução esteja ao alcance do aluno é necessário que o docente disponibilize e oportunize às discentes ferramentas de estudos matemáticos.

Nas relações entre professor, aluno e saber, um dos aspetos estudados pela Didática da Matemática é como este saber é transposto desde a sua gênese até chegar ao nível intelectual do aluno, realizando procedimentos e técnicas operatórias às explicações e estratégias. Assim, a Transposição Didática pode ser concebida como um conjunto de ações transformadoras que tornam um saber sábio em saber ensinável.

Segundo Chevallard (1991), para chegar à escola o saber científico sofre transformações que o simplificam a fim de convertê-lo em objeto de estudo escolar. É preciso evitar que, ao simplificá-lo, perca-se o foco do conteúdo, incidindo em erros conceituais e informações incorretas.

Um grande desafio do professor é transformar um conhecimento científico em um conteúdo didático. De fato, teorias complexas, sem perder suas propriedades e características, precisam ser transformadas para ser assimiladas pelos alunos.

EPISTEMOLOGIA DO PROFESSOR

A epistemologia é o ramo da filosofia que estuda a origem, a estrutura, os métodos e a validade do conhecimento, também se designa pela filosofia do conhecimento.

O estudo da evolução das ideias essenciais de uma determinada ciência considera-se que grandes problemas concernentes à metodologia, aos valores e ao objeto desse saber, a partir dessa visão, entenderam epistemologia do professor como sendo as concepções referentes à disciplina com que trabalha esse professor, oriundas do plano estrito de sua compreensão e que conduzem a uma parte essencial de sua postura pedagógica, em relação ao entendimento dos conceitos ensinados aos alunos. Quando se analisa a epistemologia do professor, surgem crenças enrijecidas pelo tempo.

É tarefa da educação escolar a conversão do saber objetivo em saber escolar, de modo a torná-lo assimilável pelos alunos (SAVIANI, 1994). É um direcionamento do professor que deve estar em contínua evolução, aberta às descobertas e permitindo ao aluno conceitos novos, novas ferramentas e novos recursos para uma projeção do didático, para que o educando tenha uma verdadeira missão do conhecimento no processo de ensino-aprendizagem evoluído, atualizado e critico.

Ao encarar a realidade de inclusão social o docente não é culpado por transmitir o conhecimento e esse conhecimento não chegar, é sempre um desafio para todo o corpo institucional ao enfrentar uma turma bem diferente no ensino regular, mas deve-se buscar responder às necessidades do ensino e saber articular com a criança cega, sabendo que muitas delas ficam à deriva do conhecimento. A falta de transposição didática neste cenário deve ser compreendida como uma mudança que supõe-se a passagem de um processo de transformação do saber, que se torna outro em relação ao saber destinado a ensinar, sabendo que os meios e as condições do processo de ensino estão em vista a finalidades educacionais e sociais, sendo sempre um desafio a ser enfrentado por nós educadores.

Por isso Chevallard (1988) recomenda o exercício da "vigilância epistemológica" este princípio de vigilância epistemológica pode, paradoxalmente, esbarrar no próprio professor como um forte fator restritivo, devido ao despreparo, ao desinteresse, ou ao insuficiente domínio dos conteúdos e das relações destes últimos com os saberes de referência. Se o professor os conhece apenas por meio dos cálculos matemáticos apenas nas provas e atividades avaliativas então o docente vai encontrar dificuldades para criar ou recriar melhores exemplos, analogias, metáforas que facilitem ao aluno a apropriação de um saber muitas vezes árido e desvitalizado, conforme é apresentado, com frequência, em livros didáticos, ou trabalhado na escola.

O docente assume, então, um papel ativo, toma decisões considerando o aluno e o saber situados num tempo e num espaço, o que pode tornar compreensíveis sugestões de especialistas para repensar a adequação do conceito de Transposição Didática, substituindo-o por "elaboração didática" (HALTÉ, 1989) ou "mediação didática" (LOPES, 1997), pois elaboram constantemente novas noções, esquemas particulares, explicitações e avaliações originais, uma vez que o conhecimento não existe pronto sob a forma de um repertório que o professor consultaria quando necessitasse para desenvolver seu programa (PERRENOUD, 1994).

APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

O saber está relacionado ao plano histórico da produção de uma área disciplinar, o conhecimento é considerado mais próximo do fenômeno da cognição, estando submetido aos vínculos da dimensão pessoal do sujeito empenhado na compreensão do saber. Além disso, o saber científico tende a ser despersonalizado e mais associado ao contexto histórico e cultural, do que aos desafios pessoais da aprendizagem, propondo a ressignificação dos conteúdos e dos papéis do professor e do aluno no processo de aprendizagem e ensino.

Quando falamos no saber matemático, estamos nos referindo a uma ciência que tem suas teorias estruturadas em um contexto próprio, que não está na dependência de uma validação pessoal e isolada. Por outro lado, o conhecimento refere-se mais à dimensão individual e subjetiva, revelando algum aspecto com o qual o sujeito tenha uma experiência direta. Nessa concepção, está mais presente o caráter experimental e pragmático do que o aspecto teórico e racional.

O saber Matemático é um valor tanto para o professor como para os alunos. De acordo com os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) – Ensino Fundamental (1997), a Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à aprendizagem.

O ensino da Matemática escolar não pode ser apenas uma mudança nos conteúdos a serem ensinados. Não basta acrescentar esse ou aquele tópico, retirar essa ou aquela definição. O que se busca é uma mudança na própria forma de apresentar o conhecimento matemático ou, mais profundamente, uma mudança na visão que passamos para os alunos acerca do saber matemático. É muito importante a utilização de metodologias em sala de aula que pode vir a influenciar no interesse do aluno vidente e do deficiente visual que se encontra muitas vezes no sistema escolar, mas não estão incluídos e sim integrados no ensino que muitas vezes se encontra inapropriados a esses alunos.

A melhor visão da Matemática para esses discentes com deficiência visual devem compor de áreas que possuem interseções e conexões que nos permitem passear por diferentes representações que visem evidenciar, no aluno, a importância de valorizar o papel dessa disciplina como instrumento para compreender o mundo a sua volta e motivar o interesse a linguagem lógico-matemática.

Segundo Andrade & Silva (2013), afirmam em sua pesquisa cientifica que o material planejado pelo professor Rubens Ferronato desde 2000, diante da série de dificuldades enfrentadas por ele ao ensinar conteúdos matemáticos a um aluno cego. Considerando as mínimas condições que as escolas possuem em relação aos métodos e materiais didático-pedagógicos, impossibilitando assim uma maior interação do ensino-aprendizagem e no vínculo que este possui com o cotidiano do aluno. Hoje o multiplano está sendo utilizados por pessoas com deficiência, em específico, os cegos. Este recurso possibilita ao estudante a compreensão da lógica existente nos conteúdos matemáticos e configura-se como elemento decisivo para o entendimento e proposições de alternativas na superação de problemas vivenciados nesta área.

O saber matemático deve chegar às pessoas com deficiências como ato de uma articulação de intenções educativas onde se definem as competências, os conteúdos, os recursos e os meios. A proposta pedagógica entra em ação pela transposição didática. É por meio destas intenções educativas e de competências a serem desenvolvidas que os alunos trazem consigo um saber extraescolar que não deve ser descartado.

RESULTADOS DA PESQUISA QUALITATIVA

Verificar quais recursos os professores de matemática vem utilizando com estes educandos

a) A Entrevista na Instituição de Atendimento Especializado

O Atendimento Especializado - AEE muitas vezes deixa a desejar com a falta de experiência, prática a alunos cegos e a falta de formação a esses profissionais, em que muitas vezes estão no AEE que não possuem a formação certa para tal deficiência dos discentes presentes na escola. Na sala de recurso multifuncional não são trabalhados conteúdos específicos de matemática ou geografia, por exemplo, mas sim, habilidades que são necessárias para que o aluno, em sala de aula, possa construir conhecimentos nessas disciplinas, como orientação espacial, temporal e de capacidade (classificação e seriação). Tendo a inclusão como um princípio que orienta nossa compreensão acerca das pessoas com deficiência, entendemos que para efetivação do processo de aprendizagem desses alunos, faz-se necessário uma reavaliação de nossas posturas enquanto professores.

Verificou-se o depoimento do docente que existem na escola alguns recursos materiais disponíveis capazes de auxiliar a atuação dos professores junto aos alunos, mas não são utilizados pela maioria deles, especialmente por não saberem empregar o material existente. Esse material (multiplano), quando utilizado, é aproveitado apenas pelos técnicos nas salas de recursos para outros fins e menos para utilização de construção de gráficos de função do 1º e 2º grau, pois quase todos os professores trabalham com a didática tradicional, quadro branco e marcadores, livro didático, além da xerox de textos, dificultando a participação do aluno cego em sala de aula e quase sem recursos braille.

Para Brousseau (1986), a Didática da Matemática estuda atividades didáticas que têm como objetivo o ensino da parte específica dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise; incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos, além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber.

Poder-se-ia complementar que a Didática da Matemática seria, também, a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um saber matemático por parte de um sujeito. A teoria de Brousseau esclarece a integração das dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais no campo da Educação Matemática, permitindo, assim, a compreensão das interações sociais que ocorrem na sala de aula entre alunos e professores e das condições e da forma com que o conhecimento matemático pode ser apropriado e aprendido. Segundo ele, o controle dessas condições permitiria reproduzir e aperfeiçoar os processos de aquisição do conhecimento matemático escolar.

b) Observação na Prática Pedagógica

A entrevista se mostrou bastante preocupado com a aprendizagem dos alunos, todavia, em relação à efetiva inclusão dos cegos poucos realizam, uma vez que os alunos não se encontram incluídos no sentido do conceito de inclusão, e quase sempre se encontram isolados das atividades individuais e coletivas, restando-lhes o trabalho com professores itinerantes na sala de recursos.

Yves Chevallard (1991) examina que o saber não chega à sala de aula tal qual ele foi produzido no contexto científico. Ele passa por um processo de transformação, que implica em lhe dar uma “roupagem didática” para que ele possa ser ensinado. Isso acontece porque o objetivo da comunidade científica e da escola é diferente.

Esse caminho que percorre o saber rende-lhe transformações. O saber passa por uma “didatização” para que transite de um saber científico a um saber a ser ensinado e finalmente ao saber ensinado. Tais transformações são denominadas de Transposição Didática. Embora possamos defini-la desse modo, a noção de Transposição Didática é complexa e envolve inúmeros elementos que precisam ser analisados, desde elementos de natureza epistemológica, até os de natureza didática.

A problemática não é de simples solução, pois a realidade confirma as dificuldades enfrentadas pela classe no que concerne à falta de tempo, alegada pelos mesmos, assim como pelo fato de trabalharem em várias escolas ao mesmo tempo, justificado pela baixa remuneração salarial. As questões pertinentes à realidade profissional dos professores investigados se refletem nas dificuldades enfrentadas no cotidiano dos mesmos, os quais padecem em função da crise da educação nacional, vivenciando problemas como: a baixa remuneração oferecida pelo Estado, o número excessivo de alunos em sala de aula, a baixa qualidade da formação inicial realizada no Estado do Pará, a falta de incentivo financeiro para a formação continuada, além de tantos outros problemas.

c) Intervenção da Aula Particular com uma Aluna Cega

A escola, depois da família, é o espaço primeiro e fundamental para o processo de socialização da criança. Segundo Gil (2001, p.16) ao abrir as suas portas igualmente para os que enxergam e os que não enxergam, a escola deixa de reproduzir a separação entre deficientes e não deficientes que há na sociedade.

A aluna cega estuda em escola da rede pública do Estado de Belém, onde se via sem apoio especializado na escola que estudava e não tinha apoio por fora, mesmo existindo uma sala de apoio AEE (Atendimento Especializado) na instituição que estudava. Muitas vezes a pessoa da família permanecia na sala de aula para auxiliar o aluno com deficiência visual, sabendo que não é recomendável porque pode criar uma situação de discriminação, de inibição e de constrangimento para o aluno. Além disso, pode causar uma confusão de papéis, criar um vínculo de dependência ao invés de estimular a emancipação, a autonomia e a cooperação entre os alunos, enquanto que a família fazia o papel da AEE.

De acordo com Caiado (2003), para incluir o alunado na escola inclusiva, eles precisam do professor especializado e qualificado, presente nos programas escolares, oferecendo apoio pedagógico ao aluno e acompanhamento constante aos demais profissionais da escola, para que a representação da deficiência, enquanto incapacidade se altere. Pude perceber que os alunos cegos não demoram mais para aprender do que os outros é mito. Eles podem ser mais lentos na realização de algumas atividades, pois a dimensão analítica da percepção tátil demanda mais tempo. Esses alunos precisam manipular e explorar o objeto para conhecer as suas características e fazer uma análise detalhada das partes para tirar conclusões.

Essa diferença básica é importante porque influi na elaboração de conceitos e interiorização do conhecimento. Assim, a falta da visão não interfere na capacidade intelectual e cognitiva. Esses alunos têm o mesmo potencial de aprendizagem e podem demonstrar um desempenho escolar equivalente ou superior ao de alunos que enxergam mediante condições e recursos adequados.

Devemos ter cuidados com a comunicação oral em relação aos alunos cegos a atitude dos professores é muito importante e decisiva para uma comunicação efetiva e motivadora da aprendizagem. Neste sentido, salientamos o cuidado de nomear, denominar, explicar e descrever, de forma precisa e objetiva, as cenas, imagens e situações que dependem de visualização. Os registros e anotações no quadro negro e outras referências em termos de localização espacial devem ser falados e não apontados com gestos e expressões do tipo aqui, lá, ali, que devem ser substituídas por direita, esquerda, tendo como referência a posição do aluno. Por outro lado, não se deve usar de forma inadequada o verbo ouvir em lugar de ver, olhar, enxergar para que a comunicação seja coerente, espontânea e significativa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A organização escolar é estruturada pela sociedade capitalista que em última instância, mantêm as relações sociais de produção, reflete as divisões sociais existentes, com tendência a perpetuá-las e acentuá-las, para manutenção de poder da classe dominante. Diante do estudo e pesquisa realizada percebe-se que a escola, por vir de um percurso histórico tradicionalista e de grande exclusão depara-se com dificuldade da quebra de paradigmas. Faz-se necessário, que exista mudanças de posturas democráticas requerendo dedicação e compromisso dos diversos atuantes. A inclusão social possibilita o direito de ser cidadão, essa igualdade mesmo sendo um direito ainda bastante desrespeitado, às vezes por falta de informações das pessoas, outras vezes por indiferença e preconceito, sabendo que ainda estamos distantes de uma inclusão ideal.

Sanar as dificuldades a educandos cegos é o que se espera na função do primeiro grau que esta em voga, pois se trabalha uma proposta que, possibilite ao educando compreender o que até então ele só imaginava, ninguém o escutava e todos ignorava-o, sem saber como lidar com o ensino da pessoa com deficiência visual. Pode-se inferir que, dificuldades diagnosticadas, experiências vivenciadas e os resultados obtidos neste trabalho, foram de grande valia para a construção de uma sociedade de educandos ativos, por maiores que sejam os obstáculos, é necessário que se tenha práticas acessíveis a este público e que consiga atingir o objetivo maior que seja o aprender.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Diário Oficial da República Federativa do Brasil, Brasília, DF.

BRASIL. **Declaração de Salamanca e linha de ação sobre necessidades educativas especiais**. Brasília: UNESCO, 1994.

BRASIL. Secretaria do Ensino Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** (5ª a 8ª séries). Brasília: MEC/SEF, 1997.

BROUSSEAU, G. ***Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques****. Recherches em Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

CAIADO, Kátia Regina Moreno. **Aluno deficiente visual na escola**: lembranças e depoimentos. Campinas,SP: Autores Associados:PUC,2003.

CARDOSO, Veridiana. **APRENDENDO MATEMÁTICA ATRAVÉS DAS MÃOS:** uma proposta para o uso do multiplano no ensino de educandos cegos. Criciúma, 2004.

CHEVALLARD, Y. **Sur l'analyse didactique:** deux études sur les notions de contrat et de situation, Aix. Marseille, IREM nº14, 1988.

_______________. **La Transposition Didactique**: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné. Grenoble, La pensée Sauvage. 1991.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GÁSCON, Josep. **Estudar matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto alegre: Aritmed, 2001.

FIGUEIREDO, Rita Vieira. Políticas de inclusão: escola gestão da aprendizagem na diversidade. In: **Políticas organizativas e curriculares, educação inclusiva e formação de professores**. Rio de Janeiro: DP&A, 2002.

GIL, Flávia Ceccon Moreira. A **criança com deficiência visual na escola regular.** 2009. 176 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

HALTÉ, J . F. Savoir er écrire, savoir faire. **Pratiques**, n. 61, Metz, 1989.

LAKATOS, Eva Maria. MARCONI, Marina de Andrade. **Fundamentos de metodologia**. São Paulo: 2005.

____________________________**. Técnicas de Pesquisa.** São Paulo: Atlas, 2008.

LOPES, A.R.C. **Conhecimento escolar em Química**: processo de mediação didática da ciência. Rio de Janeiro : Química Nova, 20 (5), 1997.

PAIS, Luis Carlos. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PERRENOUD, Philippe. **Ofício de aluno e sentido do trabalho escolar***.* Porto: Porto, 1994.

SEVERINO, Antonio Joaquim. **Metodologia científica do Trabalho Científico**, 21 ed. rev. ampl. São Paulo: Cortez, 2007

CAPÍTULO 10

OPORTUNIDADES PARA ARTICULAÇÃO DE ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO NAS AULAS DE MATEMÁTICA A PARTIR DO USO DE *SOFTWARES* MATEMÁTICOS

Data de aceite: 01/09/2021

José Cirqueira Martins Júnior
Universidade do Estado da Bahia (UNEB)
Barreiras (BA)
https://orcid.org/0000-0002-0103-2800

RESUMO: Este artigo traz algumas contribuições da disciplina de *softwares* matemáticos para o desenvolvimento de futuros professores de Matemática. Os objetivos foram traçados para analisar as contribuições de atividades exploratórias com algumas funções polinomiais da disciplina de *softwares* para a formação dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática e, bem como, identificar como os alunos podem utilizar as atividades exploratórias para pensar em sua futura prática pedagógica com o uso de *softwares* nas aulas de Matemática. Nos procedimentos metodológicos contemplaram a pesquisa qualitativa de caráter interpretativo, pois ela se encaixou como uma melhor alternativa para ajudar na compreensão desse problema, sendo os instrumentos usados para a coleta dos dados os registros das atividades gravadas no computador, os cálculos algébricos e os questionários, com a participação de 15 alunos convidados, divididos em 03 grupos de 05 componentes. Os alunos manusearam o *software*, utilizaram a visualização para perceber as relações entre as funções, mudanças de sinais, valores crescentes e decrescentes, pontos de mínimos e máximos, operações algébricas. Desse modo, pelos resultados encontrados, o estudo apontou que ao usar as atividades exploratórias, surge uma oportunidade para se pensar e melhorar a prática pedagógica nas aulas de Matemática quando se utiliza o *software* matemático apropriado, pois incialmente são os professores que tentam promover um ensino motivador aos seus alunos, para que eles tenham uma aprendizagem com resultados mais significativos, refletindo sobre questões do seu cotidiano, quando utilizam elementos mediadores para a sua aprendizagem o *software* GeoGebra, o professor e as atividades exploratórias.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino e Aprendizagem. Atividades Exploratórias. *Software* GeoGebra. Funções Polinomiais. Saberes experienciais.

OPPORTUNITIES FOR ARTICULATION OF TEACHING, RESEARCH AND EXTENSION IN MATH CLASSES FROM USING MATHEMATICAL SOFTWARE

ABSTRACT: This article brings some contributions from the *discipline of* mathematical *software* to the development of future mathematics teachers. The objectives were designed to analyze the contributions of exploratory activities with some polynomial functions of the software discipline for the training of students of the Degree in Mathematics and, as well as, to identify how students can use exploratory activities to think about their future pedagogical practice with the use of *software* in mathematics classes. In the methodological procedures, qualitative research was considered, because it fit as a better alternative to help in understanding this problem, and the instruments used to collect data were the records of activities recorded on

the computer, algebraic calculations and questionnaires, with the participation of 15 invited students, divided into 03 groups of 05 components. The students handled the *software* used visualization to understand the relationships between functions, signal changes, increasing and decreasing values, minimum and maximum points, algebraic operations. Thus, by the results found, the study pointed out that by using exploratory activities, an opportunity arises to think and improve pedagogical practice in mathematics classes when using the appropriate mathematical *software,* because initially it is the teachers who try to promote a motivating teaching to their students, so that they have a learning with more significant results, reflecting on issues of their daily life, when they use mediating elements for their learning the GeoGebra *software*, the teacher and the exploratory activities.
KEYWORDS: Teaching and Learning. Exploratory Activities. GeoGebra *software*. Polynomial functions. Experiential knowledge.

1 I INTRODUÇÃO

O presente artigo traz alguns resultados de uma pesquisa com alunos do curso de Licenciatura em Matemática para saber como a utilização de atividades exploratórias poderia auxiliá-los na compreensão de conteúdos de funções polinomiais do 1º e 2º utilizando o *software* GeoGebra.

Foram traçados objetivos para analisar as contribuições de atividades exploratórias com algumas funções polinomiais na disciplina de *software* matemático para a formação dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática e, bem como, identificar como os alunos utilizam as atividades exploratórias para pensar em sua futura prática pedagógica com o uso de *softwares* na disciplina de Matemática.

A pesquisa foi realizada com 15 alunos matriculados na disciplina de *softwares* matemáticos em que as análises foram constituídas a partir das atividades desenvolvidas por eles, das suas respostas aos questionários, das atividades realizadas e gravadas no *software* GeoGebra nos computadores do laboratório de Educação Matemática.

Notou-se que alguns trabalhos focaram a importância para se usar as tecnologias computacionais no ensino e aprendizagem de funções (ABRAHÂO, 1998; AKKOÇ; TALL, 2005; BERNARDO, 2011; FERREIRA, 2013; SIERPINSKA; 1992). Esses trabalhos mostraram alternativas para melhorar o ensino dos professores, construíram caminhos que permitiram a aprendizagem dos alunos com esses conteúdos e identificaram necessidades de mudanças no currículo para oportunizar a construção de alternativas diferenciadas para o entendimento mais significativo com as funções. Ainda sobre esses trabalhos mencionados, eles apontaram que é necessário estudar os conteúdos de funções e que ainda necessitam de mais investigações sobre esse tema.

O uso das tecnologias computacionais está influenciando o desenvolvimento da sociedade. A sala de aula demanda de tempo para se pensar na elaboração de propostas de atividades, que possam ser realmente válidas para os alunos em sua formação acadêmica inicial. Existe a necessidade de rever o trabalho que é feito na sala de aula com os alunos e, também, saber se ele está sendo promissor para a realidade que foi projetada. Dessa forma, é necessário permitir o diálogo entre a teoria e a prática (STEINBRING, 1994) em que professores precisam dar uma maior atenção no processo de formação dos futuros docentes nos cursos de Matemática para o uso de *softwares* que vem se tornando um elemento importante para as aulas de Matemática em todos os níveis de ensino. Esse diálogo permitirá confrontar ideias, discutir situações, encontrar possíveis soluções e direcionar caminhos mais viáveis para o exercício da docência, formando com isso, profissionais críticos e reflexivos.

Pensar no uso de tecnologias computacionais no exercício da docência tem sido um desafio para os professores. A disciplina de Matemática pela sua própria evolução possui um caráter formal e abstrato e, aos poucos, os *softwares* matemáticos estão permitindo trilhar novas oportunidades para as realizações de pesquisas com a Matemática, tanto no que se refere às suas aplicações, como na sala de aula, envolvendo o ensino e a aprendizagem.

Com as atividades desenvolvidas com o uso do *software*, foi percebido que elas permitiram a realização de saberes, docentes e discentes, nas práticas experienciais, que se constituíram em oportunidades para se repensar, ainda mais, no trabalho que é realizado nas aulas de Matemática. Assim, os saberes construídos trouxeram possibilidades para alimentar as suas aprendizagens (PIMENTA, 2012; VEIGA, 2006). Durante os momentos de troca de experiências dos alunos, eles foram criando condições para a ampliação de seus conhecimentos que envolveram os conteúdos, o uso coerente do *software*, a ampliação de alternativas pedagógicas para as aulas de Matemática e condições de aprendizagem. Os saberes experienciais, construídos com os alunos nas atividades exploratórias, favoreceram uma apropriação de significados intrínsecos aos conteúdos de Matemática, durante e depois das aulas, podendo ser levados como possibilidades para o ensino, pesquisa e extensão nas aulas de Matemática com o uso de um *software* apropriado.

As atividades exploratórias desenvolvidas possibilitaram aos alunos continuarem o trabalho com o uso de *softwares* matemáticos e, isso irá depender da elaboração de propostas pedagógicas, que contemplem os conteúdos que possam colocar os alunos como os principais sujeitos da construção do conhecimento da Matemática.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este texto trata do uso de tecnologias, pois elas representam uma totalidade de coisas que a engenhosidade do cérebro humano conseguiu criar no decorrer dos anos, desde a sua forma de uso até as suas implicações (KENSKI, 2008). O interesse maior é para as tecnologias que usam os aspectos computacionais ou o uso de computadores, com as suas propostas para serem realizadas dentro da sala de aula e, mais especificadamente, nas aulas de Matemática.

Avaliar não é uma tarefa simples com se pensa, é necessário o uso de estratégias que consigam aproximar os alunos de sua realidade. A maioria deles utilizam tecnologias para os mais variados fins e, devido a isso, pretende-se experimentar alternativas pedagógicas para estimular a compreensão, o raciocínio lógico e a troca de conhecimentos com os alunos na sala de aula ou no laboratório de Educação Matemática.

Dessa forma, a aprendizagem é algo que precisa ser realizado pelos alunos durante as suas experiências com os conteúdos de Matemática, cabe ao professor criar condições para que eles façam as conexões dos conteúdos com as suas realidades ou futuras realidades profissionais, sendo a representação do conhecimento algo que é indispensável para a existência desse processo de aprendizagem (DUVAL, 1999, 2011). Conforme esse autor salienta, os tipos de representações e as mudanças de registros que os alunos podem fazer, em muitas das atividades que lhe são propostas, existe a possibilidade de evidenciar a aprendizagem com os conteúdos trabalhados em que "[...] a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas" (DUVAL, 2011, p. 15) e os principais registros realizados pelos alunos durante a pesquisa foram os registros gráficos proporcionados pela visualização do *software*, os de linguagem natural durante os diálogos sobre as respostas encontradas e os algébricos em suas operações algébricas.

Desse modo, não se tem como desatrelar a visualização de algo relacionado à cognição pelo fato de possuir aspectos direcionados aos estudos de Psicologia e, em especial, aos processos de ensino e aprendizagem. Com isso, Presmeg (2006, p. 206, tradução minha) afirma que "a visualização inclui processos de construção e transformação, tanto imagem visual mental e todas as inscrições de natureza espacial, que podem ser implicadas no fazer Matemática". Nota-se que, no fazer Matemática, a visualização está diretamente vinculada a esses processos e ao que pode acontecer no cérebro humano e, bem como, à construção de imagens que podem ser formadas durante a aprendizagem de conteúdos ligados a essa disciplina, sendo isso o que se justifica para usá-la.

Também em complementação a essas ideias, será apresentada a definição dada por Arcavi (2003) para quem:

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados. (ARCAVI, 2003, p.217, tradução minha).

Observa-se nessa definição, uma abrangência de aplicação da visualização e, de como ela, pode beneficiar o ensino e a aprendizagem, com elementos que são característicos para um melhor desenvolvimento dos processos mentais e de como essas ideias podem se tornar aliadas para a compreensão de conteúdos matemáticos.

Os professores precisam fazer o uso dos recursos tecnológicos como alternativas para diferenciar e remodelar o seu trabalho, pois tais recursos tem o intuito de priorizar aos alunos a construção do seu conhecimento de modo dinâmico e com autonomia. Assim, com as ideias de Borba e Penteado (2001) em relação ao uso de tecnologias computacionais, elas devem ajudar a:

> [...] superar práticas antigas com a chegada desse novo ator informático. Tal prática está também em harmonia com uma visão de construção de conhecimento que privilegia o processo e não o produto - resultado em sala de aula, e com uma postura epistemológica que entende o conhecimento como tendo sempre um componente que depende do sujeito. (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 44).

Percebe-se que as tecnologias computacionais vão se transformando no decorrer do tempo e, assim, o fazer pedagógico dos professores no ensino e, o que acontece para a aprendizagem dos alunos, também devem se modificar, talvez não no mesmo ritmo, mas priorizando momentos que oportunizem novos caminhos para a melhoria de suas *práxis*.

Ao introduzir os recursos tecnológicos na sala de aula, o professor deve realizar um planejamento das atividades que serão trabalhadas com os alunos, não só por fazer parte de sua atividade de docência, mas também como uma tentativa de direcionar os alunos, a partir de experiências de seu cotidiano, construir conhecimentos com a disciplina de Matemática. Dessa maneira, os professores abrirão espaços para as mudanças que devem ocorrer com o uso de tecnologias, sejam elas em nível local, regional ou para os lugares em que os alunos estarão inseridos. Por isso, é importante o planejamento das atividades com o uso de *softwares* conforme descreve Pimenta (2012) que:

> Por isso, a finalidade da educação escolar na sociedade tecnológica, multimídia e globalizada, é possibilitar que os alunos trabalhem os conhecimentos científicos e tecnológicos, desenvolvendo habilidades para operá-los, revê-los e reconstruí-los com sabedoria. O que implica analisá-los, confrontá-los, contextualizá-los. (PIMENTA, 2012, p. 25).

O professor de Matemática é colocado numa condição de pensar o seu trabalho e em como as tecnologias podem auxiliá-lo no estreito caminho entre o ensino para a aprendizagem dos conteúdos. Conforme o aumento de experiências relevantes com o uso de *softwares* entre os professores e alunos, que evidenciem a aprendizagem desses protagonistas a partir de atividades que condicionem a isso, o ambiente de ensino para a aprendizagem acaba se modificando por aquilo que se torna o ponto principal a ser alcançado, o de compreender e aprender que as tecnologias contribuem para a construção de conhecimentos de Matemática.

Cada professor tem a sua prática, e suas experiências trazem situações a serem melhoradas e rediscutidas. De acordo os planejamentos e o que pode ser construído durante as aulas, os professores de Matemática precisam ser estimulados a utilizar as tecnologias computacionais para auxiliar os seus alunos a pensarem quando as utilizam, mesmo sabendo que isso não seja tão fácil. Desse modo, articulando com as ideias de Marques (2002, p. 36) nas quais “as próprias práticas, na atuação guiada pela reflexão crítica, transformadas em práxis e conduzidas pelo agir comunicativo, as próprias práticas exigem serem reconstruídas de contínuo na construção de novas teorias de seu entendimento, organização e condução”.

A seguir, serão apresentadas algumas pesquisas para ajudar no entendimento de funções com suas dificuldades, e como foi desenvolvido o trabalho com professores e alunos.

A respeito do estudo de funções, existem algumas dificuldades epistemológicas apontadas por Sierpinska (1992) e, essas precisam ser levadas em consideração, durante as aulas de Matemática tanto pelos professores como os alunos. Mesmo apresentando tais dificuldades, nota-se que o conceito de função possui um caráter formal e que ainda pode dificultar a sua compreensão. É preciso rever a questão dos aspectos psicológicos, pois é a partir do que pode acontecer nos pensamentos dos alunos que os professores devem criar caminhos para eles assimilarem os conceitos de modo mais eficiente. Com isso, a autora sugere que antes da formalização é necessário que os professores criem oportunidades para que os alunos desenvolvam um amplo aspecto de representar as funções para compreender suas regularidades e similaridades, o intuito é o de promover uma reflexão sobre os conceitos abstratos que direcionam para uma compreensão mais concreta durante as aulas.

A pesquisa de Abrahão (1998) procurou estudar algumas dificuldades que professores de Matemática tinham para interpretar gráficos de funções polinomiais produzidas por calculadoras gráficas. Antes da realização das atividades esses professores conheceram algumas potencialidades dessa ferramenta para o ensino de funções reais. O trabalho mostrou que a compreensão de gráficos gerados pelas calculadoras não é imediata e os professores não conseguiram conciliar os seus conhecimentos teóricos com a visualização gráfica. O estudo sinalizou que o ensino de Matemática dê atenção especial ao conceito de escala e que a interpretação de gráficos de funções seja acompanhada de um estudo cuidadoso que interligue suas representações algébrica, tabular e gráfica.

O trabalho de Akkoç e Tall (2005) que analisou o conceito de função com atividades de alunos em uma escola da Turquia, perceberam que a aprendizagem desse conteúdo é difícil e os alunos não conseguem uma compreensão ampla e, geralmente, apresentam respostas limitadas quando precisam fazer uma conexão entre os modos de representações que esse conteúdo permite realizar. O estudo aponta que existe um descompasso entre o que é proposto no currículo para a aprendizagem dos alunos e o que é trabalhado no contexto real, assim, é necessário rever e buscar alternativas que possam ajudar a superar as dificuldades que os alunos encontram durante a aprendizagem. Observa-se que fora do contexto do Brasil as dificuldades de compreensão dos alunos são semelhantes e, mesmo não usando *softwares*, os autores constataram que é necessário buscar alternativas diferenciadas para o ensino e aprendizagem do conceito de função.

A pesquisa de Bernardo (2011) que procurou estabelecer as conexões das representações para as funções do 1° grau com alunos do ensino médio por meio dos registros de representações semióticas. Nesse experimento, os alunos utilizaram o *software* GeoGebra para mudar os valores dos parâmetros da função que passaram a estabelecer relações entre os diferentes tipos de registros. Desse modo, o estudo apontou que as atividades levaram os alunos a relacionarem e a observarem os diferentes registros de representação dos objetos matemáticos quando usaram a ferramenta computacional e, ela proporcionou aos alunos o controle da diversidade dos registros das representações e podiam optar pela que era mais significativa.

No estudo de Ferreira (2013) que investigou as contribuições de uma proposta pedagógica baseada na Modelagem Matemática e no uso de ambientes informatizados pode trazer para a abordagem do conceito de função, na perspectiva da Educação Matemática Crítica. O estudo foi de caráter qualitativo, realizado com alunos da primeira série do ensino técnico integrado de um Instituto Federal em Minas Gerais. As atividades foram sugeridas a partir de temas de interesse dos alunos e o estudo mostrou que existem contribuições da Modelagem Matemática a partir de temas para a Educação Matemática Crítica, contribuições para a abordagem de conteúdo matemático, em especial do conceito de função e contribuições das TIC para o desenvolvimento do ambiente de aprendizagem com Modelagem Matemática. Pela análise dos resultados, a proposta preparou os alunos para entender o papel da Matemática, em especial o conceito de função, que os habilitou a participarem com um melhor entendimento e na transformação de suas realidades.

3 | METODOLOGIA DE PESQUISA

A pesquisa em Educação Matemática tem se tornado crescente, ela está se constituindo, como uma área profícua para a compreensão de problemas direcionados com a sala de aula, especialmente os de Matemática. A proposta que melhor se encaixou para auxiliar na investigação do problema foi a da pesquisa Qualitativa de caráter interpretativo (BOGDAN; BIKLEN; 1994; BORBA; ARAÚJO, 2012; CRESWELL, 2010) para compreender um pouco da realidade no Ensino Superior com esses atores, esse tipo de abordagem se tornou indispensável para encontrar algumas contribuições usando o *software*.

Com isso, torna-se relevante compreender o contexto da sala de aula em que "[...] os pesquisadores fazem uma interpretação do que enxergam, ouvem e entendem. Suas interpretações não podem ser separadas de suas origens, história, contextos e entendimentos anteriores" (CRESWELL, 2010, p. 209).

Esta pesquisa foi realizada na disciplina de *softwares* matemáticos e os instrumentos utilizados para coletar os dados foram os registros das atividades exploratórias gravadas no computador, os cálculos algébricos e os questionários. Participaram os 15 alunos matriculados dessa disciplina para o experimento e, com isso, eles foram divididos em 03 grupos com 05.

Foram utilizadas atividades exploratórias para desenvolver as propostas de conteúdos com os alunos e, no intuito de compreender essas atividades, será apresentada a definição de Martins Júnior (2015) em que elas são um:

> Conjunto de atividades, didaticamente planejadas, com o objetivo de permitir a exploração, a conjecturação, a dedução lógica, a indução, a intuição, a reflexão na ação e a mediação em relação aos conteúdos abordados para possibilitar a construção de conhecimentos realizados por seus atores, sendo essas atividades livres ou guiadas e, usando para isso, os meios necessários que possam dinamizar a relação entre a teoria e a prática e o ensino para a aprendizagem. (MARTINS JÚNIOR, 2015, p. 58-59).

Entende-se que, depois do ensino, os professores passam a trabalhar com atividades para saber se os alunos incorporaram os conteúdos apresentados, assim sendo, a atividade deste artigo foi um contato inicial para o desenvolvimento de propostas no trabalho com os conteúdos de algumas funções polinomiais. Notou-se que, os conteúdos de funções, podem ser modificados e readaptados para diferentes investigações, isso dependerá dos objetivos dos professores ou pesquisadores que queiram encontrar novas possibilidades para o desenvolvimento de pesquisas com esses conteúdos.

4 I DESCRIÇÃO E ANÁLISE

Foi realizado o convite para os 15 alunos da turma e, todos aceitaram e, assim, foram divididos em 03 grupos com 05 componentes. Essa atividade durou aproximadamente 3h no laboratório de Educação Matemática da UNEB, *campus* IX, em Barreiras. Os alunos são participantes do curso de Licenciatura em Matemática, eles estavam matriculados na disciplina de *softwares* matemáticos, que é um componente curricular de 45h, possuindo uma ementa direcionada para o desenvolvimento de conteúdos voltados para as aulas de Matemática com *softwares* específicos. Os *softwares* matemáticos usados durante a preparação e efetivação das aulas para essa disciplina foram: GeoGebra, Maple, Maxima, VCN, Winplot entre outros, ambos de natureza gratuita e, esse artigo, irá tratar apenas da pesquisa desenvolvida com uma atividade exploratória e usando o *software* GeoGebra.

Será apresentado, a seguir, o modelo de uma das atividades exploratórias que foi utilizada pelos alunos no laboratório de Educação Matemática:

1) Dada a função $f(x) = ax + b$ construam a sua representação no GeoGebra.

a. De acordo a variação dos parâmetros a e b o que acontece com a função?

b. Quando podemos diferenciar que ela será crescente ou decrescente? É possível provar algebricamente? Justifique.

c. Estude algum intervalo dessa função, existe ponto de mínimo ou máximo? Existem raízes? É possível provar algebricamente? Justifique.

2) Dada a função $g(x) = ax^2 + bx + c$ construa a sua representação no GeoGebra.

a) De acordo a variação dos parâmetros a, b e c o que acontece com a função?

b) Quando podemos diferenciar que ela será crescente ou decrescente? É possível provar algebricamente? Justifique.

c) Explore algum intervalo dessa função, verificando se existe ponto de mínimo ou máximo? Existem raízes? É possível provar algebricamente? Justifique.

3) Estude, simultaneamente, os parâmetros diferentes para as funções f(x) e g (x) e, construam, os gráficos no GeoGebra.

a) Qual a principal diferença entre elas?

b) É possível provar algebricamente essa diferença? Justifique.

Para a realização da atividade os alunos receberam as folhas de rascunhos, lápis, borracha, caneta e um computador do laboratório para plotar as funções e, com isso, eles foram modificando os parâmetros para perceber o que acontecia com cada uma delas. Cada grupo discutiu sobre as mudanças ocorridas nas funções, e o motivo de colocá-los reunidos foi para confrontarem as suas respostas elaboradas quando tentavam chegar há uma justificação mais convincente para os procedimentos algébricos que iam sendo construídos.

A parte que mais trouxe discussão foram os momentos em que havia a necessidade de fazer e provar a justificação algébrica. Alguns alunos relataram que nunca haviam feito esse tipo de atividade, pois no decorrer de outras disciplinas do curso, eles eram levados ao laboratório de Educação Matemática e ficavam construindo funções e figuras geométricas, mas sem o fato de confrontar as imagens projetadas pelo *software* com as suas provas algébricas e, bem como, as possíveis explicações dos principais motivos das funções estarem variando sem um padrão. Para verificar esses fatos, será mostrado um exemplo de um dos arquivos gerados e gravados no laboratório de Educação Matemática, pelos alunos de um dos grupos durante a sua realização, conforme mostrado na figura 01 a seguir:

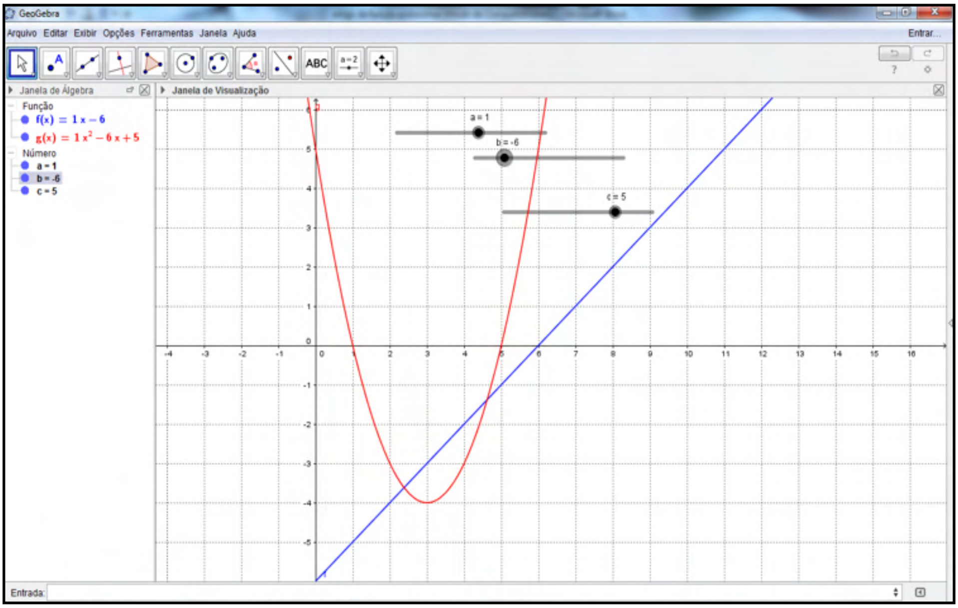
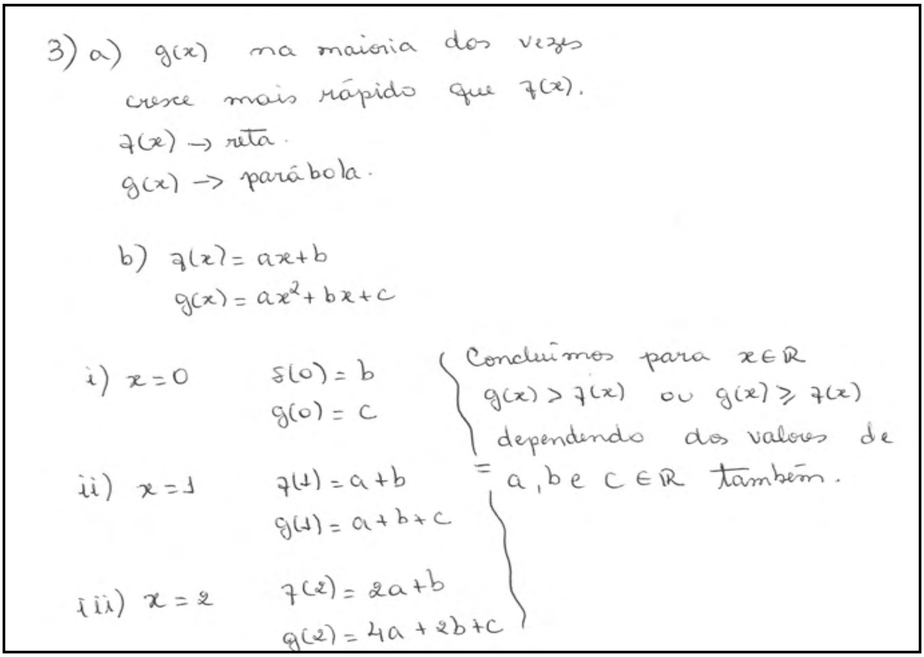


Figura 01. Gráfico construído pelo GRUPO 03 para auxiliar na visualização das questões.

Fonte: Os dados da pesquisa.

Notou-se que os alunos tentavam associar as imagens fornecidas pelo *software* e, a partir do que estava sendo visualizado, eles conseguiam atribuir um significado algébrico e uma compreensão para os seus resultados encontrados. Desse modo, observou-se que foram construídas oportunidades para verificar a aprendizagem dos alunos durante o experimento, pois com a visualização efetivada pelos recursos tecnológicos, ela proporcionou uma interação mais coerente e representativa para os conteúdos de funções do primeiro e segundo grau. A visualização é apontada como uma alternativa que indica a aprendizagem dos alunos (ARCAVI, 2003; GUZMÁN, 2002; MARTINS JÚNIOR, 2013, 2015; TALL, 1991).

A seguir, será mostrado um dos desenvolvimentos algébricos construídos pelos alunos de um dos grupos, ficando evidenciado que a utilização da visualização, proporcionada pelo *software* GeoGebra, auxiliou como uma alternativa para a mediação de suas aprendizagens, conforme a figura 02:



3) a) $g(x)$ na maioria dos vezes cresce mais rápido que $f(x)$.

$f(x) \to$ reta.

$g(x) \to$ parábola.

b) $f(x) = ax+b$

$g(x) = ax^2+bx+c$

i) $x=0$ $f(0)=b$ $g(0)=c$

ii) $x=1$ $f(1)=a+b$ $g(1)=a+b+c$

iii) $x=2$ $f(2)=2a+b$ $g(2)=4a+2b+c$

Concluímos para $x \in \mathbb{R}$ $g(x) > f(x)$ ou $g(x) \geq f(x)$ dependendo dos valores de a, b e $c \in \mathbb{R}$ também.

Figura 02. Solução apresentada pelo GRUPO 01 com a mudança do registro visual para o algébrico mostrando a aprendizagem dos alunos.

Fonte: Os dados da pesquisa.

Entende-se que a aprendizagem foi mobilizada pelos alunos quando eles utilizaram a representação algébrica condicionada à visual, ocorrendo isso, a partir da mudança de representação dos registros. Esse fato de mudança de representação semiótica já foi apontado por Duval (1999, 2011) como um dos principais elementos para evidenciar que existe a aprendizagem dos alunos em conteúdos de Matemática. Eles desenvolveram o raciocínio lógico formal por meio do que foi visualizado pelo *software* GeoGebra e construíram as respostas utilizando o desenvolvimento algébrico e, com isso, percebe-se a existência da aprendizagem dos alunos. Desse modo, as representações semióticas realizadas com essa atividade oportunizaram condições de mudanças nos registros e indicaram caminhos mais significativos para as compreensões dos alunos e, bem como, um pensar e um agir diferenciados para o trabalho na sala de aula.

Com a utilização dessas atividades, os professores podem promover a reflexão, a exploração e a mediação de conteúdos que serão planejados, desenvolvidos e concluídos com os seus alunos (MARTINS JÚNIOR, 2013, 2105). As atividades exploratórias permitiram aos alunos pensarem na sua prática e, ao fazerem uma interação com os seus futuros trabalhos que serão desenvolvidos no período do estágio e, também, como possíveis pesquisas a serem realizadas no Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) e, assim, essas atividades fomentaram oportunidades para construir possibilidades de aprendizagens, tanto por parte dos alunos como a de professores na disciplina de Matemática.

A seguir, serão apresentadas algumas respostas dos questionários que foram enviados pelos grupos e depois transcritos, que foram colocadas na forma de citação para facilitar a dinâmica da leitura, sendo investigados com a seguinte pergunta: existiram contribuições dessa atividade quando foi relacionado o conhecimento algébrico com o visual proporcionado pelo *software* GeoGebra? Justifique.

> Sim. Tentar provar o que a gente estava vendo foi difícil, pois não conseguimos encontrar regularidade inicialmente. No decorrer, ficou mais fácil e podemos ampliar essas questões para o nosso estágio ou até pesquisar algum problema em nosso TCC. (Resposta Grupo 01).

> Sim. Nunca fizemos uma atividade desse jeito, quando estamos no laboratório plotamos funções conforme as listas dos professores e já aparecem os resultados. Aqui é estranho, a função se comporta de vários jeitos e ela estimula a pensar e descobrir alternativas para a solução. Foi proveitoso, precisamos pensar mais aqui na Universidade com os *softwares* matemáticos. (Resposta do Grupo 02).

> Sim. Não foi só essa, mas todas as outras atividades foram significativas para a nossa aprendizagem, foi importante no sentido de ajudar a construir os parâmetros para parte algébrica, a sua qualidade dinâmica foi ótima. Entendemos agora que a aprendizagem em Matemática pode ser facilitada por atividades que realmente nos ajudem, percebemos isso como alunos e também como futuros professores de Matemática. (Resposta do Grupo 03).

Pelas respostas dos alunos, entende-se que antes, eles estavam sendo habilitados para trabalhar com as tecnologias, mas não foi explorado o uso coerente delas nas disciplinas em que foram exigidas como uma alternativa pedagógica para seus exercícios e seus estudos em possíveis trabalhos. Desse modo, torna-se necessário ampliar o uso de *softwares* matemáticos durante as aulas, como uma oportunidade de auxiliar professores e alunos a construírem melhor as suas práticas pedagógicas, com experimentos que sejam realmente válidos de ensino e aprendizagem, e que reconfigurem uma articulação planejada e coerente, entre a teoria e a prática com os conteúdos a serem desenvolvidos.

Notou-se que o uso do *software* auxiliou como um recurso alternativo para a melhoria da didática dos alunos. A esse respeito, o uso da Didática nas aulas de Matemática será imprescindível no processo de ensino para a aprendizagem, criando condições para a troca de conhecimentos, conforme relata Steinbrind (1994):

> Também no que diz respeito ao professor de matemática e a sua formação inicial ou em serviço, a Didática da Matemática tem inicialmente o papel de auxiliar: a Didática deve preparar metodologicamente os estudantes para a prática de ensino futura e dotá-los de estratégias úteis para o ensino. (STEINBRIND, 1994, p. 89, tradução minha).

A Didática da Matemática é uma aliada importante para o trabalho pedagógico dos professores de Matemática, ela fornece condições para estruturar as suas ideias e reformular a direção de suas ações com metodologias viáveis para o processo de aprendizagem. Com isso, ela fornece subsídios importantes na formação e, no decorrer da caminhada, os futuros professores de Matemática irão incorporar possibilidades de adquirir mais experiências, auxiliando-os na construção de saberes que lhes darão condições de reformular o seu trabalho de docência. Quando ocorreu a conexão das atividades exploratórias com o uso do *software*, os alunos começaram a refletir sobre alternativas para dar continuidade dessas experiências ao seu trabalho como professores e pesquisadores. Desse modo, foi essencial essa conexão por possibilitar o amadurecimento de ideias para desenvolver projetos e melhorar a qualidade de ensino e aprendizagem dos alunos, estabelecendo alternativas viáveis para articular o ensino, pesquisa e extensão de conteúdos de Matemática a partir do uso de *softwares* matemáticos.

Afirma-se que o professor de Matemática necessita reformular, periodicamente, as suas ações didáticas. Esse aspecto simboliza uma condição inicial para repensar o seu trabalho e encontrar caminhos que irão guiá-los para uma reflexão sobre o que está sendo feito, possibilitando, dinamizar e priorizar, a sua aprendizagem e a de seus alunos.

O processo de reflexão é uma alternativa que os professores e futuros professores de Matemática podem usar para a readaptação de sua docência. Esclarece Schön (2008) que é na prática onde os alunos conseguem incorporar elementos concretos de sua aprendizagem, através de uma instrução e, assim, o professor passa a ajudá-los no processo de aquisição do conhecimento que é indispensável para as suas aprendizagens, evidenciando que o papel do educador pode diferenciar durante a realização de seu trabalho. Desse modo, os estudantes aprendem, principalmente, através do fazer, apoiados pela orientação de seus professores, permitindo situações para se tornarem proficientes durante a reflexão-na-ação e, quando isso funciona bem, acaba por envolver um diálogo entre o professor e o aluno, que toma a forma de reflexão-na-ação de modo recíproco, que origina um ensino prático reflexivo e, consequentemente, uma aprendizagem para os atores envolvidos no processo de reflexão.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao pesquisar o uso das tecnologias em algumas aulas de Matemática no Ensino Superior, afirma-se que o professor ainda não será substituído pelos *softwares* matemáticos que funcionam em um computador, no entanto, atualmente se faz necessário pensar o ensino tentando encontrar caminhos que o adeque com esse instrumento durante suas aulas, para promover o processo de ensino para a aprendizagem.

Cabe ao professor, em seu âmbito pedagógico, a preparação de condições para que os seus alunos tenham experiências diversificadas com os conteúdos que são trabalhados nas aulas de Matemática. As práticas antigas que não sinalizam mais em oportunidades para os alunos construírem conhecimentos precisam ser revistas e condicionadas há um novo agir, tanto por parte dos professores como pelos alunos, o de pensar com as tecnologias.

A aprendizagem dos alunos e a melhoria do trabalho pedagógico do professor são os principais focos a serem alcançados, pois idealizando e construindo formas alternativas para se adquirir conhecimentos, encontra-se caminhos que podem ser melhor trilhados por esses atores.

Dentre algumas contribuições desse estudo, ele permitiu uma melhoria na compreensão dos conteúdos por meio da visualização, ofereceu condições para as mudanças de registros de representação semiótica evidenciando a aprendizagem dos alunos, favoreceu a melhoria da prática pedagógica com o uso do *software* GeoGebra, as atividades exploratórias ajudaram a pensar em novas experiências significativas para outros conteúdos, ampliou horizontes de ensino, pesquisa e extensão para os conteúdos de Matemática com o uso de *softwares* matemáticos.

Desse modo, pelos resultados encontrados, o estudo apontou que ao usar as atividades exploratórias, surge uma oportunidade para se pensar e melhorar a prática pedagógica nas aulas de Matemática quando se utiliza o *software* matemático apropriado, pois incialmente são os professores que tentam promover um ensino motivador aos seus alunos, para que eles tenham uma aprendizagem com resultados mais significativos, refletindo sobre questões do seu cotidiano, utilizando elementos mediadores para a sua aprendizagem o *software* GeoGebra, o professor e as atividades exploratórias.

REFERÊNCIAS

ABRAHÃO, A. M. C. **O comportamento de professores frente a alguns gráficos de funções f: obtidos com novas tecnologias.** Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, 1998.

AKKOÇ, H.; Tall, D. A mismatch between curriculum design and student learning: the case of the function concept. In: HEWITT, D.; NOYES, A. (Eds.). **Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick,** p. 1-8, 2005.

ARCAVI, A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: **Educational Studies in Mathematics,** n. 52, p. 215-241, 2003.

BERNARDO, A. T. **Os registros de representação no ensino de função polinomial do 1° grau: uma proposta para o caderno do aluno do estado de São Paulo.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirante de São Paulo: São Paulo, 2011.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Porto: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012, p. 23-29.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: método qualitativo, quantitativo e misto.** 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. **Proceedings XXI Psychology of Mathematics Education,** n. 1, México: Eric, 1999, p. 3-26.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** 8. ed. Campinas: Papírus, 2011, p. 11-33.

FERREIRA, N. S. **Modelagem Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação como ambiente para abordagem do conceito de Função segundo a Educação Matemática Crítica.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Ouro Preto, 2013.

GUZMÁN, M. The role of visualization in the teaching and learning of Mathematical Analysis. In: **2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level.** Hersonissos: University of Crete, p. 1-24, 2002.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação.** 4. ed. Campinas: Papírus, 2008.

MARQUES, M. O. Formação continuada do professor pela pesquisa. In: MELLO, R. I. C. (Org.). **Pesquisa e Formação de professores.** Cruz Alta: UNICRUZ, 2002, p. 33-37.

MARTINS JÚNIOR, J. C. Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, XVII, Vitória, **Anais...** Vitória: SBEM, p. 1-12, 2013.

MARTINS JÚNIOR, J. C. **Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Ouro Preto, 2015.

PIMENTA, S. G. **Saberes pedagógicos e atividade docente.** 8. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

SCHÖN, D. A. **Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem.** 1. reimp. Porto Alegre: Artmed, 2008.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Eds.). **The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy.** Vol. 25. USA: M. A. A. Notes, 1992, p. 25-58.

STEINBRING, H. Dialogue between theory and practice in Mathematics Education. In: BIEHLER, R.; et al. (Eds.). **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994, p. 89-102.

TALL, D. **Recent developments in the use of the computer to visualize and symbolize calculus concepts**. Washington: The Laboratory Approach to Teaching Calculus, n. 20, 1991, p. 15-25.

VEIGA, I. P. A. Professor tecnólogo do ensino ou agente social? In: VEIGA, I. P. A.; AMARAL, A. L. (Org.). **Formação de professores: políticas e debates.** 3. ed. Campinas: Papírus, 2006, p. 65-93.

CAPÍTULO 11

ENSINANDO MATEMÁTICA POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES COM MATERIAL CONCRETO

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 16/06/2021

Graciela Siegloch Lins
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)
Foz do Iguaçu – PR

Marcos Lübeck
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)
Foz do Iguaçu – PR

Jocinéia Medeiros
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)
Foz do Iguaçu – PR

Fernando Luiz Andretti
Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE)
Foz do Iguaçu - PR

RESUMO: Os desafios no ensino da Matemática são grandes e o número de dificuldades apresentadas pelos alunos colabora para sua rejeição. Um dos temas de grande preocupação dos estudantes envolve a álgebra com suas equações, expressões e operações sempre providas de letras representando valores desconhecidos e envolvidas em passos mecânicos de solução que muitos alunos não compreendem e por isso apresentam grande desinteresse. Tornar esta parte da Matemática visualmente atrativa e com soluções que podem ser construídas pelos alunos, foi uma das propostas das aulas e atividades direcionadas a nonos anos do ensino fundamental no ano de 2018 em um colégio estadual de Foz do Iguaçu no Paraná e que farão parte deste relato descrevendo o processo de planejamento, preparação e aplicação das atividades além dos resultados obtidos com relação a aprendizagem dos alunos envolvidos nestas aulas, podendo ser destacados a cooperação no trabalho em grupo, a contextualização entre áreas de objetos e equações além da motivação na busca por resposta em comparação ao método tradicional sobre o mesmo tema em sala de aula regular.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática; Ensino e aprendizagem; Instrumento educativo; Material concreto.

TEACHING MATHEMATICS THROUGH SOLVING EQUATIONS WITH CONCRETE MATERIAL

ABSTRACT: The challenges in teaching Mathematics are great and the number of difficulties presented by the students contributes to their rejection. One of the topics of great concern to students involves algebra, with its equations, expressions and operations always provided with letters representing unknown values and involved in mechanical steps of solution that many students do not understand and therefore show great disinterest. Making this part of Mathematics visually attractive and with solutions that can be built by students was one of the proposals for classes and activities aimed at the ninth grades of elementary school in 2018

at a state school in Foz do Iguaçu, Paraná, which will be part of of this report describing the process of planning, preparation and application of activities, in addition to the results obtained in relation to the learning of students involved in these classes, which can be highlighted the cooperation in group work, the contextualization between areas of objects and equations, in addition to motivation in the search per answer compared to the traditional method on the same topic in the regular classroom.
KEYWORDS: Mathematics Education; Teaching and learning; Educational instrument; Concrete material.

1 I INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática passa constantemente por dilemas, e tornar esta disciplina mais acessível e interessante aos olhos de seus espectadores e reprodutores no meio educacional é um dos desafios enfrentados por professores em todos os níveis de ensino.

São diversos os argumentos que o professor ouve de seus alunos para justificar a falta de interesse na disciplina, mas notadamente a capacidade de interpretar problemas matemáticos para a escrita algébrica compreendendo seu significado e estabelecendo relações com as teorias que a justificam, são um grande empecilho para a aprendizagem dos alunos.

Estas dificuldades e desinteresse à Matemática se acentuam quando os alunos chegam a adolescência, e torna-se um desafio ainda maior cumprir um currículo com predominância em termos algébricos necessários e importantes ao desenvolvimento do raciocínio do indivíduo, que competem com elementos externos no convívio particular e social que por muitas vezes se mostram mais atrativos e que representam uma satisfação momentânea à seus interlocutores, como o caso das tecnologias de informação tão comuns no cotidiano atual.

Assim, o desafio principal que os professores precisam enfrentar está na busca por estratégias de ensino, próximas a realidade dos alunos, proporcionando experiências de aprendizagem capazes de torná-lo produtor do conhecimento e não apenas reprodutor do que lhe é imposto, desenvolvendo sua criatividade, raciocínio lógico e capacidade de resolver problemas.

Com o anseio de propor o ensino de equações e da busca de suas soluções por meio de material concreto, realizaremos neste trabalho o relato de experiência vivenciada no ano de 2018 em uma escola pública no município de Foz do Iguaçu no Paraná, com três turmas de nono ano do ensino fundamental, às quais fizeram parte das aulas ministradas em Laboratório de Matemática da escola em questão com a associação de equações a material concreto relacionado a áreas de polígonos.

2 | CONTEXTUALIZANDO A MATEMÁTICA

Pensando na Aprendizagem da Matemática, dentre outras coisas, podemos dizer que é frequentemente vista como a compreensão de regras em detrimento da memorização, e por muito tempo, tal sentido foi atribuído e observado nesta ciência, porém, diante da diversidade de relações que o mundo atual oferece aos estudantes, e a vasta gama de novidades que se mostram mais interessantes e significativas, não se torna possível justificar um ensino descontextualizado e, desarticulado de estratégias capazes de competir com o cotidiano, e assim, minimizar a ruptura que surge nesta transição do real para o saber escolar.

Segundo Pais (2006), o pensamento é interpretado como uma constante usina de produzir articulações, onde não há mais possibilidades de priorizar uma relação linear entre um sujeito e um objeto. O autor afirma ainda que o conhecimento não é definido por uma ligação linear que liga dois polos separados, não se tratando de introduzir uma visão abstrata da matemática, mas do desafio de trabalhar com recursos para viabilizar a construção conceitual, sem recair na tentação de permanecer oscilando entre as duas pontas da dicotomia usuais.

A articulação entre compreensão e memorização, pode ser considerada um dos desafios da educação matemática, certamente a memorização se faz necessária, mas segundo Pais (2006, p.61) "não se deve confundir memória cultural com a memorização inexpressiva, concebida somente na repetição de fórmulas, modelos e regras."

O uso das tecnologias no cotidiano de nossos alunos é um exemplo que traz consigo, quase que automaticamente, a necessidade da utilização da criatividade, se tornando uma das competências indispensáveis para um bom desenvolvimento frente ao uso destas ferramentas, desta forma, a centralização do ensino da Matemática em torno de atividades que priorizam a memorização e a repetição, cada vez mais são questionadas.

A contextualização se apresenta na inserção dos conceitos em situações em que favoreçam a aprendizagem, dando ao aluno maiores chances de compreender o sentido do saber proposto.

Segundo D'Ambrósio (2012) motivar o aprendizado de uma ciência criada e desenvolvida em outros tempos e com a finalidade de resolver problemas de uma realidade que já não existe, só será possível adaptando-a para situações do mundo atual, pois as motivações e urgências que antes se apresentavam já não são as mesmas de hoje, e manter-se nos modelos anteriores é tornar a matemática uma disciplina morta que poderia ser tratada como um fato histórico.

É necessário dar sentido ao saber que se pretende compartilhar com os alunos para que eles o façam seu, e por isso a necessidade da busca por alternativas para o ensino vem sendo cada vez maior.

3 | METODOLOGIA

Para tratar do conteúdo de equações do segundo grau para três turmas do nono ano do ensino fundamental, utilizou-se a metodologia das investigações matemáticas, através da contextualização de equações e suas relações com figuras geométricas e material concreto manipulativo em Laboratório de Matemática da escola em questão.

Em termos gerais, investigar é buscar conhecer algo que não se sabe, e em matemática investigar é descobrir as relações existentes entre os objetos matemáticos, sejam eles conhecidos ou não, buscando identificar as possíveis propriedades que possam os constituir. Do aspecto geométrico, as investigações geométricas contribuem na percepção de aspectos essenciais de atividades matemáticas, como a formulação de teses, a concretização de relações entre situações estritamente matemáticas e a realidade, desenvolver a visualização espacial e a representação por diferentes métodos de um mesmo objeto. (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2009)

Para tratar do conteúdo de Equações do segundo grau com uma incógnita, inicialmente foram ministradas aulas tradicionais em sala de aula com o auxílio de resolução de problemas algébricos e contextualizados com situações do cotidiano. Nesta fase, os alunos receberam as noções iniciais de equação do segundo grau com uma incógnita e suas partes, e a resolução de equações completas e incompletas por meio do método algébrico.

Munidos de noções básicas sobre o tema, os alunos foram conduzidos, em etapa seguinte e com duração de dez aulas, para o Laboratório de Matemática da escola onde a atividade se desenvolveu. Nesta fase, incialmente foi proposto que se reunissem em grupos de quatro alunos e que conhecessem o material a ser estudado e observassem suas características.

Figura 1 – Alunos explorando o material.

Fonte: Autores, 2018.

O material utilizado se constituía por placas de Produtos Notáveis que pode ser adaptado às peças do conhecido Material Dourado, muito utilizado para a composição de números decimais e suas operações, ou como alternativa pode ser facilmente construído em EVA ou papel cartão. Neste caso utilizamos o material já disponível na escola por se mostrar suficiente para a utilização por todos os alunos e em bom estado de conservação.

As peças utilizadas consideram que u = 1,5 cm e x = 10 u. Os valores de u e x podem ser adaptados de acordo com a necessidade do professor seguindo a mesma proporção.

Os quadrados pequenos foram nomeados de unidades, e sua área vale 1. Os retângulos foram chamados de barras e possuem dimensões 1 e x, e sua área será x. E os quadrados maiores possuem lado x, e área x^2, sendo chamados de quadrados.

Ao todo cada kit a ser explorado possuía: 4 quadrados grandes, de lado x; 15 retângulos de medidas u (que será nossa unidade de comprimento) por x; e 30 quadrados pequenos de lado u.

Os alunos foram questionados sobre as relações que poderiam existir sobre as peças que tinham e as equações que já conheciam buscando a identificação de áreas dos polígonos e a constituição de equações.

Como sequência foram utilizados quadrados e retângulos com valores inteiros e assim calculadas suas áreas individuais, propondo na sequência a área conjunta dos elementos. Os alunos então, foram questionados quanto a possibilidade de calcular as áreas das figuras que eles possuíam nos kits dispostos na mesa e se estas poderiam ser adicionadas. Neste ponto se estabeleceu a relação figura e área e posteriormente a adição das partes formando um quadrado ou retângulo, como é o caso do exemplo que se segue:

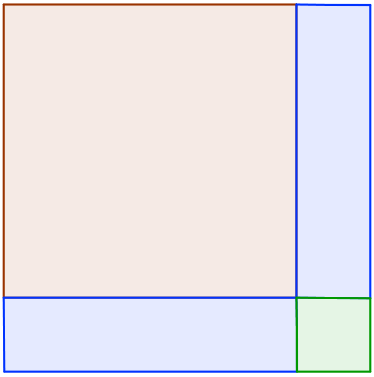


Figura 2 – Resolução da equação 1.

Fonte: Autores, 2018.

Consideramos aqui 1 quadrado, 2 barras e 1 unidade, ou seja, dado o polinômio x^2+2x+1, pode-se formar com ela o quadrado cujas dimensões são x+1 e x+1, logo

$x^2+2x+1=(x+1)(x+1)$. A fatoração do polinômio de 2º grau facilita a resolução da equação de 2º grau correspondente $x^2+2x+1=0$, chegando a solução $x'=x''=-1$.

Neste momento os alunos deveriam com o material proposto, formar quadrados ou retângulos que seriam determinados por equações do segundo grau entregues em uma lista, além disso deveriam efetuar o registro no caderno e obter as raízes das equações propostas.

Figura 3 – Alunos resolvendo equações com termos positivos.

Fonte: Autores, 2018.

Na lista entregue, além da adição de termos também existiam equações com os termos sendo subtraídos. Tal fato foi proposital e quando os alunos questionaram sobre equações deste tipo e como poderiam proceder foi proposto que eles investigassem uma forma de fazer com que as figuras se subtraíssem sem que fossem quebradas ou cortadas. Não demorou muito para que os alunos compreendessem que se no primeiro grupo de questões em que os termos eram somados as áreas também se somavam, então agora quando apareciam subtrações estas deveriam ter sua área diminuída da área total obtida com a adição dos termos positivos e para realizar as subtrações propuseram que figuras negativas deveriam ser sobrepostas as positivas registrando então a área restante a figura.

Figura 4 – Resolução de equações com termos negativos.

Fonte: Autores, 2018.

Após compor as equações em quadrados ou retângulos deveria ser registrado no caderno a figura obtida e na sequência a solução algébrica das raízes pretendidas em cada caso.

A cada nova etapa o nível de dificuldade das equações que se exploravam ia aumentando e os alunos em conjunto com sua equipe deveriam buscar as soluções, lembrando que estas só seriam possíveis se as raízes da equação fossem racionais, caso contrário não possuiriam solução por este processo.

4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

O desenvolvimento da atividade se mostrou um método eficaz para o ensino de equações e suas resoluções, foi possível perceber um interesse maior dos alunos diante do conteúdo exposto e a evolução que cada um obtinha ficava evidente. Os alunos se envolveram mais com a solução dos problemas e ao trabalhar em equipe desenvolveram a cooperação mútua na busca pelas soluções. Com o avanço no nível de dificuldade das equações propostas os alunos se mostravam motivados em buscar soluções para as questões problema. Ficou claro a identificação das equações com os conceitos de área e de sua generalização por meio de valores gerais representados pelas incógnitas.

Ao investigar as relações de áreas e equações foi possível observar que os alunos frequentemente pediam orientação e apresentavam suas possíveis soluções ou dúvidas diante das questões promovendo o debate de ideias sobre o tema com colegas e com a professora. Ao fim da atividade muitos se mostravam dispostos a explicar no quadro a solução obtida aos demais alunos da turma, demostrando satisfação em ter conseguido executar a tarefa proposta e apresentando compreensão do conteúdo estudado.

Ao serem questionados sobre o que achavam sobre aulas de matemática deste tipo, muitos alunos apresentaram o desejo de ter mais aulas sob este formato, fugindo ao modelo tradicional, relatando não parecer que estavam em uma aula de matemática.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ensinar Matemática é um desafio que se apresenta mais prazeroso e menos complexo, quando provido de elementos que o tornem mais atrativo e menos rígido quanto a sua forma original. Contextualizar os conteúdos estudados e dar forma aos objetos, quando estes podem passar por este processo, faz com que a Matemática saia do contexto teórico e faça parte de um mundo mais concreto, e visualmente atrativo.

Motivar a aprendizagem matemática e a busca por sua compreensão é um dos pontos chaves do ensino hoje, o aluno precisa compreender que faz parte da construção do conhecimento e que a ciência que embasa a tecnologia e recursos que temos hoje são possíveis graças a esforços coletivos em diversas áreas, inclusive na Matemática.

Por meio dos blocos de produtos notáveis e as atividades propostas, pudemos expor aos alunos as relações básicas entre as áreas de figuras simples evoluindo para figuras que representam problemas gerais e que são registrados e codificados com o auxílio das equações e de suas variações, abrindo um leque de possibilidades de relações entre esta ciência e o cotidiano do aluno, além de explorar conteúdos relacionados ao tema inicial.

Buscar diferentes estratégias de ensino deve ser um processo constante, tendo em mente a formação de cidadãos reflexivos, capazes de relacionar conteúdos escolares com situações do cotidiano e como resultado desse processo, ser capaz de buscar soluções para os problemas que surgem com a vida em sociedade.

REFERÊNCIAS

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática:** Da Teoria à Prática. 23 ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

PAIS, L. C. **Matemática Ensinar e Aprender**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P. da. BOCARDO, J. OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

CAPÍTULO 12

A UTILIZAÇÃO DO EXCEL COM ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS PARA O TRATAMENTO DE INFORMAÇÕES EM CONTEÚDOS DE ESTATÍSTICA

Data de aceite: 01/09/2021

José Cirqueira Martins Júnior
Universidade do Estado da Bahia (UNEB)
Barreiras (BA)
https://orcid.org/0000-0002-0103-2800

Leandro Vieira dos Santos
Universidade do Estado da Bahia (UNEB)
Barreiras (BA)
http://lattes.cnpq.br/3502266488886725

RESUMO: Esse artigo aborda algumas contribuições de atividades exploratórias com conteúdos de Estatística num curso Técnico em Comércio de uma escola estadual de ensino profissionalizante. Os principais objetivos da pesquisa foram possibilitar a construção de tabelas, gráficos e conceitos de média, mediana, moda e desvio padrão a partir de situações presentes no cotidiano dos alunos com o auxílio do *software* Excel e avaliar se o Excel contribui para um melhor entendimento desses conteúdos de Estatística quando associados à aplicação de atividades exploratórias. A metodologia utilizada foi a qualitativa de caráter exploratório e os instrumentos para a coleta dos dados consistiram em registros das atividades exploratórias e os das planilhas do Excel gravadas no computador. Desse modo, o estudo apontou que as atividades exploratórias quando associadas ao Excel podem proporcionar uma compreensão mais significativa de alguns conteúdos de Estatística para os alunos, indicando ser uma alternativa didática para a formação de posturas críticas e reflexivas nas aulas de Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Aprendizagem. Estatística. Excel. Atividades Exploratórias.

ABSTRACT: This article discusses some contributions of exploratory activities with Statistical content on a technical course in Commerce of a state school of vocational education. The main objectives of this research were to enable the construction of tables, graphics and concepts of average, median, and standard deviation from present situations in the daily life of the students with the help of Excel *software* and assess whether Excel contributes to a better understanding of these Statistical content when associated with the application of exploratory activities. The methodology used was the exploratory and qualitative instruments for data collection consisted of exploratory activities and records of Excel worksheets recorded on the computer. Thus, the study pointed out that the exploratory activities when associated with Excel can provide a more meaningful understanding of some Statistical content for students, indicating alternative didactics for the formation of critical stances and reflexive in math classes.

KEYWORDS: Learning. Statistics. Excel. Exploratory Activities.

1 I INTRODUÇÃO

Esse trabalho foi realizado com alguns conteúdos de Estatística na disciplina de Matemática, a partir disso, foi desenvolvido um projeto com a utilização do *software* Excel no tratamento de informações de atividades exploratórias. O público alvo deste projeto abrangeu 21 alunos do 4° ano do curso Técnico em Comércio, em uma escola estadual na cidade de Barreiras (BA). O trabalho foi desenvolvido na sala de aula e no laboratório de informática da referida escola, a fim de analisar as contribuições de atividades exploratórias associadas ao Excel para a compreensão de conteúdos dessa disciplina. Assim, propomos como questão de investigação "Quais as contribuições do *software* Excel para auxiliar os alunos do 4° ano na aprendizagem de conteúdos de Estatística?", e para encontrar as respostas, elaboramos os seguintes objetivos: possibilitar a construção de tabelas, gráficos e conceitos de média, mediana, moda e desvio padrão a partir de situações presentes no cotidiano dos alunos com o auxílio do *software* Excel; avaliar se o Excel contribui para um melhor entendimento de conteúdos de Estatística quando associados à aplicação de atividades exploratórias.

Entendemos que o papel do professor também é o de permitir a formação de opiniões e a construção de conceitos, articulando situações para que os alunos coloquem em prática os conteúdos estudados, usando para isso atividades de maneira dinâmica e com questões voltadas para área específica no curso Técnico em Comércio, relacionando a realidade atual com outras similares, eles têm a oportunidade de colocar em prática a teoria que foi construída durante as aulas. Percebemos que o avanço das tecnologias vem sendo evidenciado em diferentes áreas e níveis da Educação, pois também está aumentando a necessidade de compreensão e a realização de procedimentos didáticos com uma tentativa de melhorar a aprendizagem dos alunos. Desse modo, apontamos que "o nosso trabalho, como educadores matemáticos, deve ser o de ver como a matemática se constitui quando novos atores se fazem presentes em sua investigação" (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 47).

O projeto foi realizado com os alunos de uma turma de ensino médio profissionalizante, utilizamos a pesquisa qualitativa de caráter exploratório, que se encaixou como uma melhor alternativa para a compreensão do nosso problema. Os instrumentos utilizados para coletar os dados foram os registros algébricos das atividades exploratórias e os das planilhas do Excel gravadas no computador.

2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A Estatística é uma ciência que está presente em muitas de nossas realizações e também aparece com frequência em programas de televisão, jornais e revistas, possibilitando, assim, oportunidades para pensar, analisar e interpretar determinados fenômenos que ocorrem (CAMPOS; WODEWOTZKI; JACOBINI, 2011; COOB; MOORE, 1997; LOPES; COUTINHO; ALMOULOUD, 2010). A partir da ligação que essa ciência estabelece com o cotidiano dos alunos, temos a oportunidade de usá-la para motivá-los durante a contextualização dos conteúdos que pode ocorrer em sua passagem pelo ensino médio.

Percebemos que a escola tem uma importante função de formar alunos capazes de compreender as informações, que são transformadas em conhecimento, este, por sua vez, pode ser facilitado a partir do uso de tecnologias computacionais. Assim, de acordo com as propostas, esses conteúdos permitirão que os alunos ampliem as suas abordagens interdisciplinares, compreendam as informações veiculadas pelos diversos meios de comunicação, estudem situações de seu contexto profissional, ampliem a sua formação crítica e reflexiva (GONÇALVES; PIRES, 2014; KUHN; BAYER, 2017).

O desenvolvimento tecnológico está ficando tão rápido e diversificado que algo aprendido em certos programas ou *softwares,* recentemente, já pode ter sido modificado ou aperfeiçoado em pouco tempo de uso e, dessa forma, é necessário uma atenção maior para as ferramentas que são utilizadas, na sala de aula, com os alunos para divulgar ou experimentar algo possível de ser usado para auxiliá-los em uma melhor compreensão de conteúdos trabalhados. A escola também tem um papel no incentivo para a utilização de tecnologias computacionais durante as aulas, pois em nosso meio está, cada vez mais, sendo exigido que as pessoas tenham experiências e mostrem conhecimentos com as tecnologias para muitos de seus aspectos rotineiros e profissionais.

Ao introduzir os recursos tecnológicos na sala de aula, o professor deve realizar um planejamento para as atividades que serão trabalhadas com os alunos, não só por fazer parte de sua atividade de docência, mas também como uma tentativa de direcionar os alunos, a partir de experiências de seu cotidiano, para a construção de conhecimentos com a disciplina de Matemática. Dessa maneira, os professores abrirão espaços para as mudanças que devem ocorrer com o uso de tecnologias, sejam elas em nível local, regional ou para os lugares em que os alunos estarão inseridos. Por isso, é importante o planejamento das atividades pelos professores conforme descreve Masseto (2012) que:

> As atividades didáticas que contemplam a tecnologia da informação permitem ao aluno ir além da tarefa proposta, em seu ritmo próprio e estilo de aprendizagem. Neste novo processo educativo, o aluno dispõe de recursos para avançar, pausar, retroceder e rever o conhecimento. Esse processo permite fazer anotações e investigações pessoais, consultar materiais alternativos e complementares, bem como discutir com outros usuários ou com os próprios colegas suas produções. Os alunos são dotados de inteligências múltiplas e podem ser despertados para colocar suas habilidades e competências a serviço da produção do conhecimento individual e coletivo. (MASSETO, 2012, p. 103).

Diante disso, os recursos tecnológicos poderão ser utilizados na disciplina de Matemática, no ensino médio, como auxílio à compreensão da realidade, bem como, acompanhar as transformações que estão ocorrendo de forma rápida. Notamos que dentro da sala de aula, e nas aulas de Matemática, as mudanças ainda estão lentas quando comparadas com as das tecnologias computacionais.

A aprendizagem é algo que precisa ser realizado pelos alunos durante as suas experiências com os conteúdos de Matemática, cabe ao professor criar condições para que eles façam as conexões dos conteúdos com as suas realidades ou futuras realidades profissionais, sendo a representação do conhecimento algo que é indispensável para a existência do processo de aprendizagem (DUVAL, 1999, 2011; SILVA, 2011). Conforme esses autores salientam, os tipos de representações e as mudanças de registros que os alunos fazem, em muitas atividades que lhe são propostas, existe a possibilidade de evidenciar a aprendizagem com os conteúdos trabalhados, pois durante ela "[...] a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas" (DUVAL, 2011, p. 15) e os principais registros realizados pelos alunos durante a pesquisa foram os registros gráficos proporcionados pela visualização do Excel, os de linguagem natural durante os diálogos sobre as respostas encontradas e os algébricos em suas operações algébricas.

Observamos que ainda existe uma preocupação de pesquisadores com o ensino e a aprendizagem em conteúdos de Estatística, tentando proporcionar condições de compreensão e realização de procedimentos diferenciados com professores e alunos dentro da Educação Matemática. Evidenciamos isso no trabalho de Lopes (2003) que fez uma pesquisa colaborativa com professoras, estudou os seus conhecimentos profissionais construídos entre a teoria e a prática na sala de aula na educação infantil, mostrou que os conhecimentos didáticos da Matemática ampliam-se com a produção conjunta dos conhecimentos conceituais, didáticos de Matemática e Estatística que promoveram a construção de conhecimentos para os pesquisadores, professores e alunos envolvidos com a Estatística e Probabilidade. Temos a pesquisa de Andrade (2008) em que foram investigados alunos do ensino médio sobre as implicações da Modelagem Matemática na aprendizagem de conteúdos trabalhados pelos professores, assim, foi verificado que ela, quando está associada com uma Educação Crítica, favorece uma ação didático-pedagógica viável para a aprendizagem dos alunos.

Apresentamos também a pesquisa de Santana (2011), que estudou alunos do ensino médio a respeito de Letramento Estatístico utilizando a Educação Matemática Crítica, favorecendo, desse modo, a criação de um ambiente de letramento e aprendizagem com as atividades desenvolvidas. Finalizamos com a investigação de Silva (2015), o objetivo desta pesquisa consistiu no trabalho com a teoria das situações didáticas como uma alternativa para o ensino de Estatística, o público alvo foram alunos do ensino fundamental; essa proposta contribuiu para um aprendizado mais significativo e colaborou para o interesse e conhecimento dos participantes com o auxílio do *software* BrOficce. Este *software* foi utilizado no laboratório de informática, onde se realizou a análise e construção de gráficos e o cálculo da média nas atividades propostas.

3 | METODOLOGIA DE PESQUISA

A pesquisa utilizada nesse artigo foi a qualitativa de caráter exploratório, pois foi a que mais se adequou ao nosso problema de estudo, buscando compreender algumas ações dos alunos na sala de aula e no laboratório de informática com as atividades exploratórias usando do Excel (FIORENTINI; LORENZATO, 2012; GIL, 2002).

Esta pesquisa foi realizada na disciplina de Matemática em uma turma de 4º ano do ensino médio, composta por 21 alunos, no curso Técnico em Comércio, em uma escola estadual de ensino profissionalizante, na cidade de Barreiras (BA). Os instrumentos utilizados para coletar os dados foram os registros algébricos das atividades exploratórias e os registros das planilhas do Excel gravadas no computador.

Usamos atividades exploratórias para desenvolver as propostas dos conteúdos de Estatística com os alunos e, no intuito de compreendê-las, trouxemos a definição mencionada por Martins Júnior (2015) que as define como um:

> Conjunto de atividades, didaticamente planejadas, com o objetivo de permitir a exploração, a conjecturação, a dedução lógica, a indução, a intuição, a reflexão na ação e a mediação em relação aos conteúdos abordados para possibilitar a construção de conhecimentos realizados por seus atores, sendo essas atividades livres ou guiadas e, usando para isso, os meios necessários que possam dinamizar a relação entre a teoria e a prática e o ensino para a aprendizagem. (MARTINS JÚNIOR, 2015, p. 58-59).

4 | DESCRIÇÃO E ANÁLISE

Realizamos o convite para os alunos da turma e todos aceitaram, com isso, apresentamos o projeto e as etapas que seriam desenvolvidas. As aulas foram intercaladas entre a sala de aula e o laboratório de informática. Durante as aulas, na sala, mostramos algumas definições e exemplos dos conteúdos propostos, e no laboratório, cada aluno tinha um computador com o *software* Excel para o seu manuseio e portavam folhas de papel para os rascunhos de suas operações algébricas.

A atividade que trouxemos nesse artigo durou aproximadamente 02 aulas no laboratório, onde os alunos a respondiam sozinhos e tentavam desenvolver os conceitos construídos nas aulas em sala. Quando algum aluno perguntava se as respostas estavam corretas, dizíamos que se não encontrasse nenhuma outra resposta que pudesse melhor interpretar os cálculos visualizados ou realizados, então tinha encontrado uma resposta satisfatória. Ficamos no laboratório com eles para orientar em alguma dificuldade, sejam elas no manuseio de equações, utilização do Excel ou coisas similares, mas não para fornecer alguma reposta pronta a respeito das questões propostas na atividade.

Apresentamos, a seguir, o modelo de uma das atividades exploratórias que foram utilizadas pelos alunos no laboratório de informática:

A CARGILL é uma empresa multinacional que trabalha com produtos relacionados à agricultura como o milho, soja, algodão, arroz, etc. A região do Oeste da Bahia é uma das maiores produtoras de grãos do Brasil e, devido a isso, essa empresa construiu uma de suas processadoras de grãos na cidade de Barreiras, gerando emprego, renda e mais qualidade de vida para a população. A questão salarial nessa empresa, sempre motivou os funcionários a estudarem e tentarem a realização de cursos, tanto técnicos como superiores, para um melhor desempenho na produção e, consequentemente, no salário de cada um deles. A tabela abaixo representa uma pesquisa dos salários em um grupo de 50 funcionários dessa empresa, variando desde o técnico de segurança do trabalho até o administrador do setor de produção, abrangendo o setor primário e secundário da empresa. Desse modo, analise os dados da tabela, façam os cálculos algébricos necessários e respondam as questões abaixo:

N° de funcionários	Valor dos salários (R$)
20	1.000 2.000
18	2.000 3.000
9	3.000 4.000
3	4.000 5.000

Tabela 1. Pesquisa do valor salarial na CARGILL.

Fonte: Os dados da pesquisa.

a) Qual é o valor da média, moda, mediana e desvio padrão dos salários na CARGILL?

b) Quais diferenças podemos encontrar entre a média e a mediana?

c) Em que esses valores podem ser úteis para o administrador da empresa?

d) Como o desvio padrão pode ajudar a entender o aumento ou a redução do salário dos funcionários?

e) Quanto mais o funcionário estudar, qual o intervalo de salário em que ele pode chegar? Justifique.

f) É interessante um funcionário ficar apenas com um salário mínimo de R$ 880,00? Como o valor da média, mediana e desvio padrão podem te ajudar a entender melhor essa situação?

Notamos dois momentos em que houve a aprendizagem Matemática com os conteúdos de Estatística, um quando os alunos visualizaram os valores no Excel e dialogaram a respeito destes, e o outro quando efetuaram os registros algébricos. Quando eles associaram essas operações com o que foi visualizado no Excel, surgiram possibilidades para a compreensão dos valores encontrados em cada um dos itens propostos e, conforme faziam as mudanças entre esses registros de representações semióticas, a aprendizagem ficou evidente. Para confirmar a existência dos registros gráficos, apresentamos a figura abaixo:

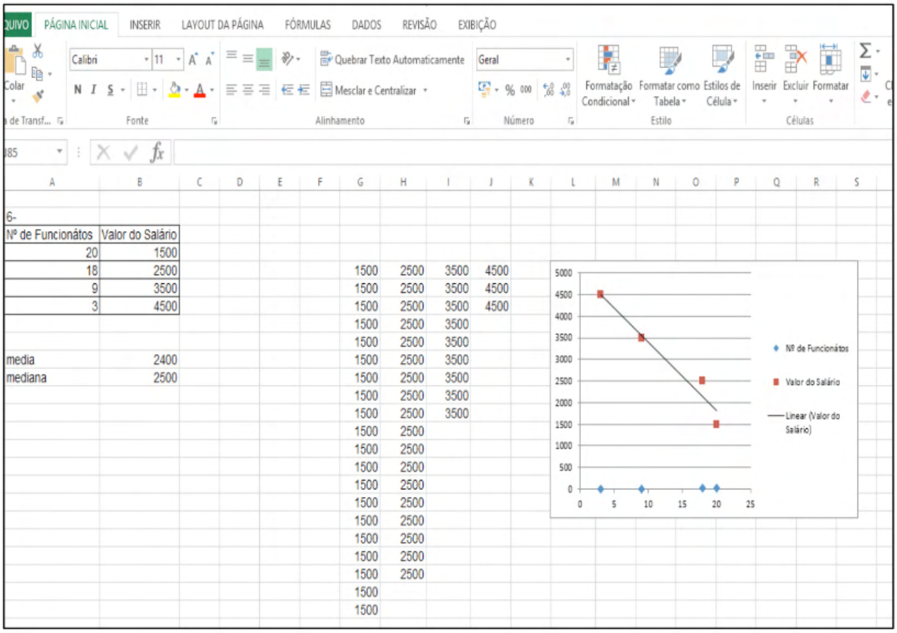


Figura 1. Construção do gráfico de linha para a visualização da média.

Fonte: Os dados da pesquisa.

Percebemos que a visualização tem sido apontada como um dos elementos chaves para verificar o processo de aprendizagem (PRESEMG, 2006). Os alunos utilizaram as respostas fornecidas pelo Excel como representação para compreender e facilitar as interpretações de algumas questões, ao visualizar, eles perceberam as regularidades, semelhanças e aproximações com a reta que passa pelos pontos, mostrando os valores abaixo e acima da média, indicando uma possível explicação para o desvio padrão com o afastamento dos valores quando comparados à média. Durante esses momentos, eles foram incentivados a confrontar suas respostas encontradas, proporcionando condições para dialogar a respeito da utilização dos conhecimentos de Estatística construídos durante as aulas, com isso, eles criaram um conjunto de argumentos a partir dos registros gráficos gerados pelas imagens do Excel. Notamos que as discussões das respostas foram importantes para despertar nos alunos a comunicação da compreensão de suas soluções, que é um registro natural, revelando que nas aulas de Matemática a linguagem e a discussão de respostas precisam ser mais exploradas.

Na aprendizagem dos alunos, durante o manuseio do Excel, o intuito não foi apenas deixá-los plotando os gráficos e tabelas, mas também desenvolveram as operações algébricas para ajudá-los na ampliação de seus processos cognitivos de construção do conhecimento. As mudanças feitas dos registros gráficos para os algébricos configuram alternativas de domínio de conteúdo dos alunos e revelam o desenvolvimento de suas habilidades na solução de questões que porventura não utilizem as tecnologias computacionais (DUVAL, 1999, 2011; SILVA, 2011). Conforme a figura abaixo:

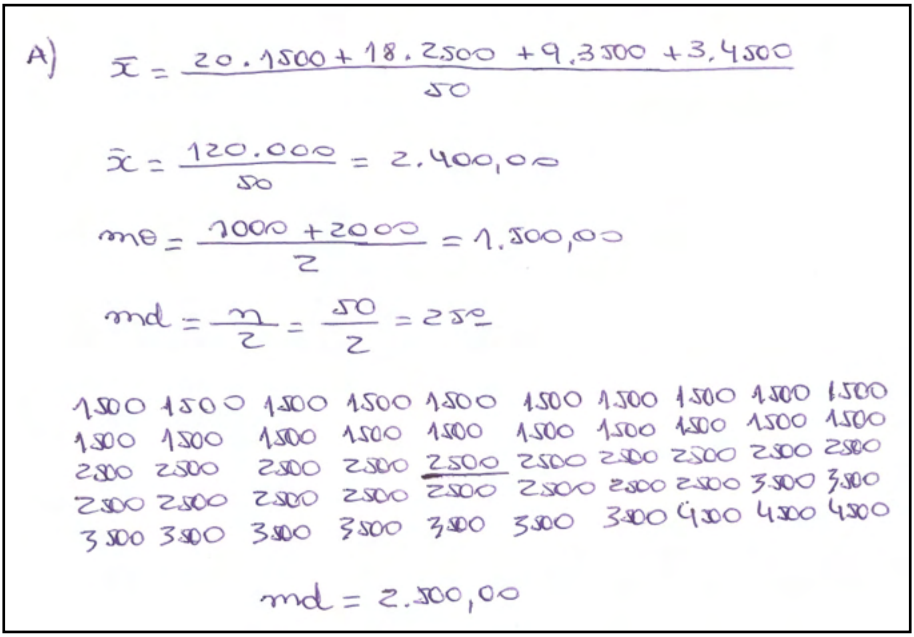


Figura 2. Operações algébricas para a média, moda e mediana.

Fonte: Os dados da pesquisa.

A questão sobre a compreensão de situações reais de cursos profissionalizantes é apontada como algo essencial para o desenvolvimento do currículo e das disciplinas (GONÇALVES; PIRES, 2014; KUHN; BAYER, 2017). Trouxemos a resposta do item f na figura 3, que revelou a interação dos alunos com o desenvolvimento do curso, eles perceberam a necessidade de ampliar as discussões sobre a prática e o domínio dos conteúdos, sinalizando uma oportunidade para ir além, conforme a sugestão apontada nessas atividades para a continuação nos estágios, onde estarão inseridos em ambiente próprio, pois com a participação e tomada de decisão em relação às questões abordadas, houve um despertar para a formação de posturas críticas e reflexivas de suas realidades.

F) NÃO. ESSES VALORES AJUDARAM A TER COMPREENSÃO PARA TOMAR DECISÃO DENTRO DA EMPRESA COM ALGUMA INFORMAÇÃO CONCRETA PARA DIZER, SE TIVER AUMENTO OU REDUÇÃO DE SALÁRIOS E ESTÁ ME PREPARANDO PARA OS ESTÁGIOS... A MATEMÁTICA AGORA ESTÁ COMEÇANDO A FAZER SENTIDO.

Figura 3. Resposta do item f a respeito da ajuda dos conteúdos de Estatística.

Fonte: Os dados da pesquisa.

A partir do que foi encontrado com os resultados dessa pesquisa, entendemos que as atividades exploratórias permitiram aos alunos compreender os conteúdos abordados, buscando uma maior interação com as possíveis situações de trabalho. Quando motivados pelo uso do Excel, as condições para a aprendizagem foram facilitadas a partir da mudança dos registros de representação semiótica fornecidas pelas atividades exploratórias durante as aulas de Matemática.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na perspectiva tecnológica o professor tem a oportunidade de mediar e facilitar a compreensão dos conteúdos para os alunos, pois, conforme o exposto ao longo do artigo, com o auxílio do Excel eles foram motivados para uma participação ativa nas aulas de Matemática. Desse modo, é relevante aos professores posicionarem-se em relação ao uso de tecnologias computacionais durante as aulas, nas quais, a prática elaborada priorizando o entendimento dos conteúdos é o que se justifica para indicar caminhos seguros para as diferentes formas de aprendizagem (MARTINS JÚNIOR; SOUZA; RAFAEL, 2016).

Encontramos algumas contribuições das atividades exploratórias para os alunos, elas tornaram as aulas mais dinâmicas e atrativas, permitiram a visualização dos valores algébricos utilizados durante as soluções das questões, colaboraram para a discussão dos valores gráficos encontrados nas operações, pois aulas trabalhadas de modo a explorar os potenciais dos alunos resultam na qualidade de um fazer pedagógico consistente e diferenciado.

Desse modo, o estudo apontou que as atividades exploratórias quando associadas ao Excel podem proporcionar uma compreensão mais significativa de alguns conteúdos de Estatística para os alunos, indicando ser uma alternativa didática para a formação de posturas críticas e reflexivas nas aulas de Matemática.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, M. M. **Ensino e aprendizagem de Estatística por meio da Modelagem Matemática: uma investigação com o ensino médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 2008.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

CAMPOS, C. R.; WODEWOTZKI, M. L. L.; JACOBINI, O. R. **Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de Modelagem Matemática.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

COOB, G. W.; MOORE, D. Mathematics, Statistcs, and teaching. AMHERST/MA. **The American Mathematical Monthly**, n. 104, p. 801-823, 1997.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. **Proceedings XXI Psychology of Mathematics Education**. n. 1, México: Eric, p. 3-26, 1999.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** 8. ed. Campinas: Papirus, 2011, p. 11-33.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GONÇALVES, H. J. L.; PIRES, C. M. C. Educação Matemática na Educação Profissional de Nível Médio: análises sobre possibilidades de abordagens interdisciplinares. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 230-254, abril, 2014.

KUHN, M. C.; BAYER, A. A Estatística na Educação profissional numa perspectiva da Educação Estatística Crítica. **Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia**, Canoas, v. 6, n. 1, p. 1-17, 2017.

LOPES, C. A. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2003.

LOPES, C. A. E.; COUTINHO, C.; ALMOULOUD, S. A. **Estudos e reflexões em Educação Estatística**. São Paulo: Mercado de Letras, 2010.

MARTINS JÚNIOR, J. C. **Ensino de Derivadas em Cálculo I: aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Ouro Preto, 2015.

MARTINS JÚNIOR, J. C.; SOUZA, I. S.; RAFAEL, C. F. B. A formação de professores que ensinam matemática: encontro e desencontros In: SILVA, A. J. N. *et. al*. (Orgs.). **Educação e Linguagens: novos olhares.** 1. ed. Curitiba: Appris, 2016, p. 51-69.

MASSETO, M. T. Projetos de aprendizagem colaborativa num paradigma emergente. In: MORAN, J. S.; MASSETO, M. T.; BEHRENS, M. A. (Orgs.). **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** 19. ed. São Paulo: Papirus, 2012, p. 67-132.

PRESMEG, N. Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. In: BOERO, P.; GUTIÉRREZ, A. (Orgs.). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future**. Roterdã: Sense Publishers, 2006, p. 205-235.

SANTANA, M. S. **A Educação Estatística com base num ciclo investigativo: um estudo do desenvolvimento do Letramento Estatístico de estudantes de uma turma do 3º ano do ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Ouro Preto, 2011.

SILVA, B. A. O conceito de probabilidade condicional: registros de representação. MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** 8. ed. Campinas: Papirus, 2011, p. 95-111.

SILVA, F. L. C. F. **Analisando contribuições da teoria das situações didáticas no ensino e na aprendizagem da Estatística e das probabilidades no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Ouro Preto, 2015.

CAPÍTULO 13

NARRATIVAS SOBRE UM LUGAR COMUM: SALA DE RECURSOS

Data de aceite: 01/09/2021

Rozana Morais Lopes Feitosa
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul - UFMS
http://lattes.cnpq.br/4893272296436416
https://orcid.org/0000-0002-7710-5332

RESUMO: Apresentamos nesse artigo resultados finais de uma pesquisa de mestrado que tem como foco de estudo, narrativas produzidas por estudantes cegos em escolas públicas de Campo Grande-MS, acerca de suas percepções sobre a Sala de Recursos. A investigação faz parte da pesquisa intitulada: A Matemática e a atuação do professor de Matemática na percepção de alunos cegos em escolas públicas de Campo Grande-MS. Na busca por uma análise se percebe o espaço comum: sala de recursos e trazemos para este texto recorte das narrativas que mostram como umas das marcas que diferenciam as narrativas dos alunos e como eles se constituem nesse espaço. Direcionamos nosso olhar para suas percepções que despontam nas falas dos entrevistados ao relatarem suas vivências e experiências nesse espaço.
PALAVRAS-CHAVE: Narrativas; Sala de Recursos; Deficiência Visual.

NARRATIVES ABOUT A COMMON PLACE: ROOM OF RESOURCES

ABSTRACT: In this article, we present the final results of a master's research that has as a focus of study, narratives produced by blind students in public schools in Campo Grande-MS, about their perceptions of the Resource Room. The investigation is part of the research entitled: Mathematics and the role of the Mathematics teacher in the perception of blind students in public schools in Campo Grande-MS. In the search for an analysis, the common space is perceived: resource room and we bring to this text a clipping of the narratives that show as one of the marks that differentiate the students' narratives and how they are constituted in this space. We direct our gaze to their perceptions that emerge in the interviewees' statements when reporting their experiences in this space.
KEYWORDS: Narratives; Resource Room; Visual impairment.

1 I INTRODUÇÃO

Este artigo é um recorte da pesquisa de mestrado vinculada ao projeto desenvolvido pelo grupo HEMEP - História da Educação Matemática em Pesquisa que busca investigar a formação e atuação de professores que ensinam Matemática em Mato Grosso do Sul, desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS. A pesquisa realizada em Feitosa (2018) está vinculada a delimitação temporal do Tempo Presente, e se volta a compreender, por meio de relatos de alunos cegos acerca do espaço escolar e das aulas de Matemática, processos de diferenciação, produtores de identidades e diferenças na sala de aula.

A pesquisa permite em seu desenvolvimento, um olhar para os modos de como os entrevistados espacializam a escola e a matemática, bem como a atuação de professores de Matemática sob outro olhar/viés, em especial, a sala de recursos. O que nos leva necessariamente, a compreender uma criação de estratégias ao longo da história de vida dos entrevistados e isso chamamos de historiografia. Na perspectiva de que a historiografia é o estudo dos homens no tempo (BLOCH, 2001) vivendo em comunidade, propomos um olhar para o tempo presente e para o modo como narrativas orais promovem a construção de significações acerca da Matemática e da atuação dos professores de Matemática por alunos cegos.

As estratégias criadas pelos/as alunos/as para espacializar os ambientes escolares dão indícios para analisarmos as falas dos alunos em relação à atuação do professor de matemática na sala de aula e na sala de recursos, perante outras sensibilidades e modos de perceber o mundo.

As narrativas construídas durante a pesquisa evidenciam alguns tons sobre a importância da sala de recursos para os alunos entrevistados no processo de ensino e aprendizagem em matemática e também nas outras disciplinas. Embora este trabalho não tenha como foco a discussão da inclusão, essa questão é imprescindível para entendermos a perspectiva de nossos entrevistados acerca desse espaço e de sua experiência de vida.

Desta forma, houve uma necessidade de revisitarmos o percurso histórico das Leis que regem a Educação Especial no Brasil. A Constituição Federal de 1988 prevê – "promover o bem de todos, sem preconceitos de origem, raça, sexo, cor, idade e quaisquer outras formas de discriminação" (art.3º, inciso IV). Ainda no seu artigo 206, inciso I, estabelece a "igualdade de condições de acesso e permanência na escola" como um dos princípios para o ensino e garante como dever do Estado, a oferta do atendimento educacional especializado, preferencialmente na rede regular de ensino (art. 208). Que, contribui como forma de problematizar o ensino dos alunos com deficiência visual e como discuti-lo em torno do aluno matriculado na rede pública de ensino.

Nas narrativas evidenciamos não somente um processo repetitivo de evasão escolar por parte de alguns alunos, como também a continuidade nos estudos por outros. Quanto a isso, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei nº 9.394/96, no artigo 59 – já determinava que os sistemas de ensino devem:

> assegurar aos alunos currículo, métodos, recursos e organização específicas para atender às suas necessidades; assegura a terminalidade específica àqueles que não atingiram o nível exigido para a conclusão do ensino fundamental, em virtude de suas deficiências;e assegura a aceleração de estudos aos superdotados para conclusão do programa escolar.

Considerando as legislações mais recentes, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional foi alterada pela lei nº 12.796 DE 2013 "assegura" currículos, métodos, técnicas, recursos educativos e organização específicos; terminalidade específica; professores com especialização para atendimento especializado e capacitação para os professores regulares; educação especial para o trabalho visando à efetiva integração na sociedade; acesso igualitário aos benefícios dos programas sociais suplementares disponíveis ao ensino regular.

Além dos direitos já assegurados, a Lei versa sobre a necessidade de professores especialistas e capacitados para atender os alunos da Educação Especial. Em relação aos professores especialistas e capacitados, retornaremos sobre quais são essas diferenças, quando analisaremos a atuação do professor. Ao revermos as historicidades das Leis, percebemos várias mudanças na nomenclatura da Educação Especial. Atualmente, a nomenclatura utilizada para os alunos deficientes é a Lei 13146/2015. O quadro abaixo mostra essas mudanças com respectivo ano e Lei.

Ano	**Nomenclatura**	**Lei**
1961	Educação de Excepcionais.	Lei 4024/61
1971	Deficiências físicas ou mentais e superdotadas.	Lei 5692/71
1988	Portadores de deficiências.	Constituição Federal
1994	Necessidades educacionais especiais.	Tratado de Salamanca
2013	Educando com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades ou superdotados.	Lei 10796/2013
2015	Pessoa com deficiência tem impedimento de longo prazo de natureza física, mental, intelectual ou sensorial, o qual, em interação com uma ou mais barreiras, pode obstruir sua participação plena e efetiva na sociedade em igualdade de condições com as demais pessoas.	Lei 13146/2015

Quadro I – As mudanças das nomenclaturas das Leis.

Fonte: Elabora para a pesquisa/2018.

As Leis foram se ajustando com o intuito de contribuir com o direito às pessoas com deficiência. Com essas mudanças, foi perceptível um problema: as escolas não se estruturaram totalmente na perspectiva da inclusão e principalmente, no atendimento às necessidades educacionais dos alunos. A falta de estruturas adequadas (espaço escolar e acessibilidade) dificulta o cumprimento do direito à inclusão nos princípios da igualdade e na condição dos alunos permanecerem na escola, especialmente, para darem continuidade nos diversos níveis do ensino. Como o Art. 28 da LBI/2015 asseguram ao poder público "criar, desenvolver, implementar, incentivar, acompanhar e avaliar" o:

I - sistema educacional inclusivo em todos os níveis e modalidades, bem

> como o aprendizado ao longo de toda a vida;
>
> II - aprimoramento dos sistemas educacionais, visando a garantir condições de acesso, permanência, participação e aprendizagem, por meio da oferta de serviços e de recursos de acessibilidade que eliminem as barreiras e promovam a inclusão plena; (LBI/2015, p. 34).

É fundamental começarmos pensar em estratégias efetivamente inclusivas tais como: salas de aulas com recursos para que haja equipamentos, auxiliares e condições de se trabalhar a heterogeneidade que compõe qualquer grupo de alunos, ou seja: que todas as salas de aulas se tornem uma sala de recursos.

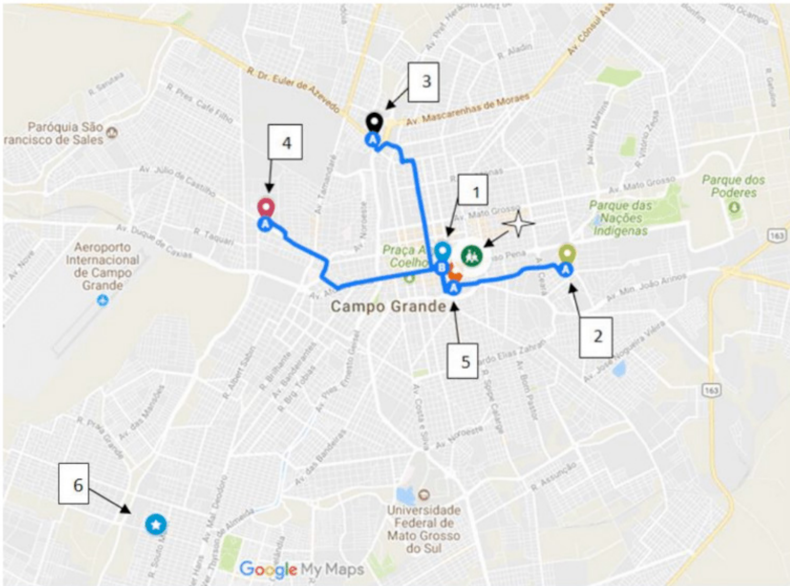
Nessa direção, esta pesquisa de certo modo contribui com o mapeamento das “movimentações” da formação e práticas de professores, que ensinam matemática no país e mais especificamente, no estado de Mato Grosso do Sul. Essa pesquisa soma-se aos esforços do Grupo “História da Educação Matemática em Pesquisa” (cadastrado no CNPq e certificado pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul), em projeto mais amplo financiado pelo CNPq.

2 | SALA DE RECURSO COMO MARCA COMUM NAS NARRATIVAS

> *“A narrativa é o estudo das diferentes maneiras como os seres humanos experienciam o mundo”.*
>
> *(Célia Galvão)*

Ao falar de ensino e aprendizagem de matemática, os alunos sempre se reportam à Sala de Recursos e aos materiais pedagógicos que são utilizados pelos professores especialistas. Para Larissa, o modo mais fácil de aprender matemática é na sala de Recursos. Pois lá os professores “[...] *são especializados em deficiência e ensinam do nosso jeito, no meu caso é o Braille*”. Isabel, por sua vez, reforça que “*saímos daqui compreendendo o que não foi possível compreender na sala de aula*”. Isabel fala desse momento, “*a professora não tem tanto tempo de explicar, porque são cinquenta minutos só de cada aula de matemática*”. Para Maria José, o que precisam na verdade é do apoio da sala de recursos e no mesmo tom, segue falando: “*não teríamos condições de estar na escola, essa é a realidade.*” E completa: “*a escola não produz o material, não tem professores com conhecimento em Braille*” e isso dificulta muito a aprendizagem dos entrevistados.

Os alunos entrevistados têm que fazer um trânsito entre diferentes instituições para garantirem condições mínimas de aprendizagem. Observemos o mapa que segue:



Legenda:

B1 – E.E. Joaquim Murtinho: fica localizada a Sala de Recurso onde Isabel, Maria José e Vitória freqüentam;

A2 – CEEJA Profª Ignês de Lamônica Guimarães: escola que Maria José estuda; Distância CEEJA Profª Ignês de Lamônica Guimarães para a Sala de Recurso (E.E. Joaquim Murtinho) - distância de 3,4 Km. Da escola Profª Ignês de Lamônica Guimarães para o ISMAC - distância de 2,8 Km.

A3 – E.E. São Francisco: escola que Vitória estuda; Distância da E.E. São Francisco para Sala de Recurso (E.E. Joaquim Murtinho) – distância de 3,5 Km. Da Escola E. São Francisco para o ISMAC – distância de 3,7 Km.

A4 – E.E. Arlindo Andrade Gomes: escola que Isabel estuda; Distancia da E.E. Arlindo Andrade Gomes para Sala de Recurso (E.E. Joaquim Murtinho) – distância de 4,7 Km. Da E.E. São Francisco para o ISMAC – distância de 5,3 Km.

A5 – E.M. Prof° Arlindo Lima: escola que Lucas e Larissa estudam. Nessa escola há Sala de Recurso e os alunos frequentam o ISMAC. A distância da E.M. Prof° Arlindo Lima para o ISMAC – distância de 94 m.

6 – E.E. Blanche dos Santos Pereira: escola que Sara estuda. Nessa escola há Sala de Recurso. Distância da E.E. Blanche dos Santos Pereira para o ISMAC – distância de 9,9 Km.

✧- ISMAC – Instituto Sul Mato Grossense para cegos Florivaldo Vargas;

Figura 1 - Mapa de Localização das escolas públicas que os entrevistados estudam e do ISMAC.

Fonte: Google Maps feito para a pesquisa/2018.

As Salas de Recursos citadas pelos entrevistados são salas do tipo II (apenas para deficiente visual), como no caso da E.E. Joaquim Murtinho. A Educação Especial direciona suas ações para atender as especificidades dos alunos com necessidades especiais, tanto no processo educacional como no âmbito de uma atuação mais ampla na escola.

Das narrativas emerge o apontamento de que aprendizagem requer tempo e esse tempo de aprendizagem em geral é mais facilmente atribuído às Salas de Recursos. Nesse ambiente: requer silêncio, repetição e dedicação. Tanto para Isabel, quanto para Maria José sua participação no ISMAC é fundamental no cuidado de si e na volta aos estudos.

Sara, narra que tem dificuldade em atividades com imagens e gráficos, por isso ela pede para fazer no Braille. Na sala essa dificuldade poderia ser trabalhada com o geoplano[1], onde podem ser trabalhos, por exemplo, a parábola e a reta. Outro material que pode ser trabalhado na sala são os materiais concretos narrados por Sara e Isabel. Sara diz: "Ele [professor de matemática] pega o material concreto, por exemplo, quando é para calcular área, pirâmide" e utiliza a fórmula no Braille para fazer o cálculo na reglete[2].

Isabel também concorda com a importância desse material e afirma que ao fazer o uso do material concreto teve "uma noção do desenho", "esse tipo de material é muito bom para termos a noção das figuras que estamos estudando, mas muitos desses materiais não têm na escola". A Sala de Recurso disponibiliza para os alunos esses materiais, mas não são materiais comuns às escolas de um modo geral. Os materiais pedagógicos são muito importantes.

Larissa pontua que quando estuda na sala de recursos com a professora Iolanda, ela pede "*para eu escrever a continha no Soroban, depois em número escrito em Braille e também fazer o cálculo direto e quando têm vários números, eu olho na folha que está escrito em Braille e comparo o resultado*". Na Sala de Recurso os alunos fazem um estudo prévio do conteúdo que vão estudar na sala de aula regular. Quando isso não ocorre, o estudo é feito posteriormente à aula na escola regular, o que, segundo indícios das narrativas, não parece ser tão potente.

No primeiro movimento, os alunos se preparam antes para uma aula, o que se aproximaria da ideia de Aula Invertida, mas, trata-se somente de uma primeira aproximação. Nesse tipo de aula, os alunos estudam os conteúdos curriculares em suas casas para depois irem à escola encontrar com os professores e colegas e para tirarem suas dúvidas e fazerem os exercícios, ou seja, a lição de casa seria feita em sala de aula e a aula seria dada em casa.

A proposta de uma aula invertida é promover aulas menos expositivas, mais produtivas e participativas, capazes de engajar os alunos no conteúdo para melhor utilizar o tempo e conhecimento do professor. Nesse ponto há um grande distanciamento. As aulas ocorrem normalmente, ou seja, de modo expositivo independente do preparo prévio ou não dos alunos. Não parece haver em sala muito espaço para discussão de demandas e o plano de aula parece se impor sobre qualquer movimentação dos alunos.

Outro olhar, as aulas de Orientação e Mobilidade - OM se apresentam como

1 O geoplano é um dos recursos que pode auxiliar na aprendizagem de matemática, desenvolvendo atividades com figuras e formas geométricas, principalmente planas, como características e propriedades delas (vértices, arestas, lados), ampliação e redução de figuras, simetria, área e perímetro.
2 Material utilizado para a escrita do Braille formada por uma prancha, uma grade de (metal ou plástico) e o punção (instrumento para furar a folha).

fundamentais no aumento da autonomia e liberdade na rotina dos entrevistados. Tal relevância, também é atribuída à Sala de Recursos para o processo de leitura do mundo e das áreas de conhecimento. A importância dessa sala é tão relevante que não entendemos como não há um movimento (educacional, administrativo e financeiro) na direção de proporcionar a todas as escolas sua própria Sala de Recursos? Seria o primeiro passo no caminho para que esse espaço diferenciado fosse extinto em sua diferenciação, pois todas as salas seriam, obviamente, Sala com Recursos para trabalhar com a heterogeneidade de qualquer turma.

Narrada como fundamental à aprendizagem e à continuidade no processo de escolarização das pessoas com cegueira e/ou outros tipos de deficiência visual aguda, a sala de recursos multifuncional é parte do projeto base de qualquer escola, então, como entender que muitas vezes, ela é um espaço à parte, que exige deslocamento? Como Maria José relata *(...) "só é questão de acessibilidade mesmo. Sai de um canto para outro, o nosso dia a dia é bem corrido, mas é o que a gente precisa na verdade e sem a Sala de Recursos não teríamos condição de estar na escola".*

Isabel e Maria José estudam na EJA em uma escola que não oferece uma Sala de Recursos Multifuncional para os alunos da educação especial. Assim, elas têm a vaga em outra escola, considerada mais próxima (escolha feita pelo zoneamento/região) daquela em que estuda. Para as entrevistadas, a distância entre sua casa e a escola onde fica a Sala de Recursos é muito grande, e ainda há que se considerar que elas precisam frequentar o Atendimento Educacional Especial - AEE e o Instituto Sul- mato - grossense para Cegos, Florivaldo Vargas - ISMAC. Para facilitar, elas escolheram uma sala de recursos que fica próxima ao ISMAC. Como o atendimento na Sala de Recursos acontece com cronograma de aula (os alunos são atendidos duas vezes na semana), nos demais dias e horários disponíveis vão para o ISMAC ou para o Centro de Apoio Pedagógico ao Deficiente Visual - CAP/DV.

As narrativas reforçam a importância do espaço em estudo e principalmente da escuta atenta em sala de aula. Por essa razão, relatam a conversa excessiva em sala de aula que prejudica não somente a aprendizagem, mas também na orientação dos professores. Com atendimento mais personalizado, fica forte nos discursos dos entrevistados o papel da sala de recursos.

> Na escola, o professor explica, mas às vezes não entendemos e quando entendemos, ficamos com algumas dúvidas porque tem muito barulho. Os alunos falam alto e atrapalham a explicação. Aqui não, a professora Elvira senta do nosso lado e lê para tirar as nossas dúvidas. Perguntamos à professora: "qual é o significado dessa palavra". Ela busca no dicionário ou na internet e temos o significado da palavra. Saímos daqui compreendendo o que não foi possível compreender na sala de aula. A professora Elvira é muito bacana e atenciosa, tem muita paciência. (ISABEL)

> As aulas na Sala de Recurso são boas, o que a gente precisa é desse apoio e, seria bom se fosse na escola em que estudamos [...] estudamos na escola

> e a Sala de Recurso é numa outra escola que poderia ser na mesma escola também. Para nós aqui, a Sala de Recurso é ótima também, só é questão de acessibilidade mesmo. Sai de um canto para outro, o nosso dia a dia é bem corrido, mas é o que a gente precisa na verdade e sem a Sala de Recurso não teríamos condição de estar na escola. (MARIA JOSÉ)
>
> Na aula da Sala de Recurso, eu vou na segunda-feira e terça-feira, agora mudou para terça-feira e quinta-feira, sempre quando posso vou, porque estou aprendendo a ler em Braille. (VITÓRIA)
>
> [...] Essas aulas de reforço [na Sala de Recurso] foram muito boas para mim, me ajudaram bastante. Eu fazia o reforço duas vezes por semana e estudava bastante, por isso, acho que esse ano fui melhor na prova do ENEM. [...] e quando tenho dúvidas, venho aqui na Sala de Recurso e peço ajuda da professora de matemática ou de português. (SARA)
>
> Na aula da Sala de Recurso, temos a Professora Juliana, a Iolanda e o Marcos, são eles que ensinam o Braille e ensinam também as coisas que eu tenho dúvida em sala de aula, principalmente nas aulas de matemática, venho aqui e peço novas explicações e eles me ensinam. (LARISSA)

A relevância de um atendimento mais junto ao aluno, impedido também pela superlotação das salas de aula regulares, parece justificar-se em qualquer discussão pedagógica, tratando-se ou não de pessoas com alguma deficiência. A ideia de adaptação retorna, quando essas salas são descritas como dotadas de equipamentos, recursos de acessibilidade e materiais pedagógicos que auxiliam na promoção da escolarização dos alunos, contribuindo com o desenvolvimento de uma autonomia pedagógica e social. Ao tomarmos essa descrição, não faz sentido pensar que qualquer sala de aula não seja uma sala de recursos ou uma sala com recursos, mas a questão é mais séria: essa sala específica e fundamental não está presente, sequer, em todas as escolas.

Portanto, é fundamental começarmos a pensar/refletir em estratégias efetivamente inclusivas como, por exemplo, que todos os banheiros possam ser usados por todos os alunos (com ou sem deficiência), calçadas que não possam ser construídas sem piso tátil, porque este já será considerado parte de uma calçada, salas de aula com recursos para que nesta haja equipamentos auxiliares pedagógicos e tecnológicos e, condições de se trabalhar na heterogeneidade que compõe qualquer grupo de alunos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos colaboradores desta pesquisa e, em especial à FUNDECT - Fundação de Apoio ao Desenvolvimento do Ensino, Ciência e Tecnologia do Estado de Mato Grosso do Sul.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE JÚNIOR, D. M. de. **História**: a arte de inventar o passado - Ensaios de teoria da história. 1. ed. Bauru: EDUSC, 2007.

BLOCH, M. **Apologia da História ou o Ofício do Historiador**. Tradução: André Telles. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2001.

BRUNER, Jerome. **A Construção Narrativa da Realidade** 18(1). Trad. Critical Inquiry. (1991). Disponível em: <https://pt.scribd.com/doc/294139640/BRUNER-Jerome-a-Construcao-Narrativa-Da>. Acesso em: 15 mai. 2017.

CRUZ, Emmanuel Dário Gurgel da. Narrativa sobre a cegueira: **inclusão, superação e limites** / Emmanuel Dário Gurgel da Cruz. - Natal, RN, 2015.92f.

DOSSE, François. **História do Tempo Presente e Historiografia**. Revista do Programa de Pós-graduação em História Tempo e Argumento. Florianopólis, v. 4, n. 1, p. 5 –22, jan/jun. 2012 - <file:///C:/Users/user/AppData/Local/Temp/2703-6428-3-PB.pdf> **educativa**. 39. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2009.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática: de um inventário a uma regulação. In: **Zetetiké**. Campinas: Unicamp v.11, n19, jan/jun. 2003.

_____Cartografias Contemporâneas: mapear a formação de professores de Matemática. ALEXANDRIA **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v.6, n.1, p. 35-60, abril 2013b, p. 38-40.

_____ História Oral e Educação Matemática - um inventário. **Revista Pesquisa Qualitativa**, São Paulo, (SP), v. 02, n. 01, p. 137-160, 2006.

_____ Registrar oralidades, analisar narrativas: sobre pressupostos da História Oral em Educação Matemática. **Ciências Humanas e Sociais em Revista,** Rio de Janeiro, v. 32, n. 2, p. 20-35, jul./dez. 2010.

LACERDA, Cristina Broglia Feitosa de. **A inclusão escolar de alunos surdos: o que dizem alunos, professores e intérpretes sobre esta experiência**. Cad. Cedes. Campinas, vol. 26, n. 69, p. 163-184, maio/ago. 2006. Disponível em http://www.cedes.unicamp.br

LARROSA BONDÍA, Jorge. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. Tradução de João Wanderley Geraldi. **Revista Brasileira de Educação**. Jan/Fev/Mar/Abr 2002, Nº 19. Disponível em: < http://migre.me/w8Hh1>.

SKLIAR, Carlos; LAROSSA, Jorge. **Experiencia en educación**. 1ª Ed. Rosario: Homo Sapiens Ediciones, 2009.

CAPÍTULO 14

MODELO EPIDÊMICO SIR, COM E SEM VACINAÇÃO E MODELO EPIDÊMICO SEIR

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 04/06/2021

Lívia de Carvalho Faria
Universidade Federal de Viçosa - *Campus* Florestal
Betim - Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/8125113309224788

Mehran Sabeti
Universidade Federal de Viçosa - *Campus* Florestal
Florestal - Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/1192944329873105

RESUMO: Ao longo dos anos, o estudo de fenômenos biológicos através de modelos matemáticos se aperfeiçoou e continua se aperfeiçoando, tornando-se cada vez mais necessário. Esses modelos são ferramentas utilizadas para prever o comportamento, por exemplo, de doenças epidemiológicas em uma população, se a doença irá se extinguir ou não e o efeito da vacinação e da quarentena ao longo do tempo. Será abordado o modelo SIR (Suscetíveis-Infectados-Recuperados) com e sem a incorporação de vacinação e o modelo SEIR (Suscetíveis-Expostos-Infectados-Recuperados), e simulações numéricas dos respectivos modelos. Além disso, os conceitos de reprodutibilidade basal e imunidade de rebanho também serão apresentados.
PALAVRAS-CHAVE: Modelos matemáticos, SIR, SEIR, imunidade coletiva.

SIR EPIDEMIC MODEL, WITH AND WITHOUT VACCINATION AND SEIR EPIDEMIC MODEL

ABSTRACT: Over the years, the study of biological phenomena through mathematical models has improved and continues to improve, becoming increasingly necessary. These models are tools used to predict the behavior, for example, of epidemiological diseases in a population, whether the disease will become extinct or not, and the effect of vaccination and quarantine over time. The SIR (Susceptible-Infected-Recovered) model will be addressed with and without the incorporation of vaccination and the SEIR model (Susceptible-ExposedInfected-Recovered), and numerical simulations of the respective models. In addition, the concepts of basal reproducibility and herd immunity will also be presented.
KEYWORDS: Mathematical models, SIR, SEIR, collective immunity.

1 I INTRODUÇÃO

Alguns conceitos são fundamentais para a compreensão do assunto que será abordado neste artigo. O primeiro deles é a epidemiologia: ciência que estuda os fenômenos associados ao processo saúde-doença em determinada população. Pode-se aplicar procedimentos matemáticos a esses fenômenos ou qualquer outro fenômeno biológico, com o intuito de prever, prevenir ou extinguir determinado acontecimento. A esse processo dá-se o nome de biomatemática.

A principal razão para o estudo de doenças epidemiológicas é o controle e erradicação de determinada infecção. E os modelos matemáticos são ótimas ferramentas que permitem o direcionamento de medidas de controle que visam diminuir a média de transmissão da doença.

Os pesquisadores Anderson McKendrick e William Kermack foram os primeiros a dar forma a chamada epidemiologia matemática. Anteriormente, diversos pesquisadores já tinham contribuído com inúmeras descobertas, mas foram nos anos de 1927, 1932 e 1933 que Kermack e McKendrick publicaram artigos relatando a dinâmica de transmissão de uma doença através de equações diferenciais e além disso, apresentaram os conceitos de imunidade e vacinação em termos matemáticos [1].

Em 1927, os dois pesquisadores desenvolveram o modelo epidemiológico SIR (Suscetíveis-Infectados-Recuperados) que será um dos objetos de estudo deste trabalho. O modelo em questão será analisado com a implementação da vacinação constante. Será estudado também o modelo SEIR (Suscetíveis-Expostos-Infectados-Recuperados) referente a COVID-19, assim como o conceito de reprodutibilidade basal e imunidade coletiva. Algumas simulações de ambos os modelos, desenvolvidas no Python, serão apresentadas afim de demonstrar os resultados obtidos através dos estudos [4].

2 | MODELO SIR COM DINÂMICA VITAL

O modelo SIR (Suscetíveis-Infectados-Recuperados), desenvolvido por Kermack e McKendrick em 1927 se refere a doenças em que o indivíduo adquire imunidade após curar-se da infeção. Algumas doenças que podem ser modeladas pelo SIR são rubéola, sarampo, catapora e varíola [1].

Para diminuir as varáveis do sistema e simplificar os cálculos, o modelo deverá conter algumas premissas, que são elas:

- Todos os indivíduos nascem suscetíveis;
- O tamanho da população é constante, ou seja, a taxa de natalidade é igual a taxa de mortalidade;
- Desconsidera-se imigração e emigração;
- Todos na população têm a mesma chance de se infectar;
- Os indivíduos infectados que se recuperam ganham imunidade.

As premissas dispostas acima serão consideradas durante todo o trabalho. Além disso, a população é dividida em três compartimentos disjuntos: O compartimento dos indivíduos suscetíveis, S, dos infectados, I, e dos recuperados, R. O esquema compartimental do Modelo SIR está representada na figura abaixo.

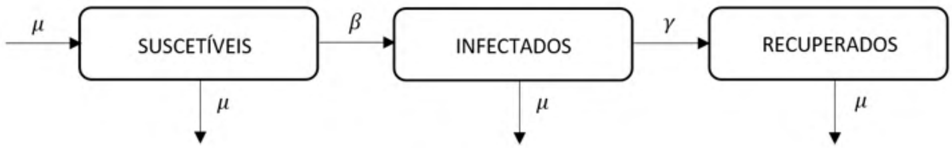


Figura 1: Esquema compartimental do modelo SIR.

Onde os parâmetros μ,*β* e *y* representam as taxas de natalidade/mortalidade, taxa de infecção e taxa de recuperação, respectivamente. E, além disso $0 < \mu, \gamma < 1$ e $\beta > 0$.

O modelo SIR é representado pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \mu - \beta IS - \mu S \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta IS - \mu I - \gamma I \\ \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases} \tag{1}$$

Assim *S*(*t*), *I*(*t*) e *R*(*t*) representam, respectivamente, a proporção de indivíduos suscetíveis, infectados e recuperados no instante de tempo t. E considerando a população total, *T*(*t*)=1, temos *S*(*t*) + *I*(*t*) + *R*(*t*)=1, reescrevendo, *R*(*t*)=1 - *S*(*t*) - *I*(*t*).

Agora, analisaremos a estabilidade local dos pontos de equilíbrio do Modelo SIR. Para tanto, podemos considerar apenas as duas primeiras equações do sistema (1).

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \mu - \beta IS - \mu S \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta IS - \mu I - \gamma I \end{cases} \tag{2}$$

Os pontos de equilíbrio do sistema são aqueles onde a derivada se anula, ou seja, as taxas de crescimento e decrescimento das populações de suscetíveis e infectados permanecem constantes.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = 0 \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

A partir da análise desse sistema, os pontos de equilíbrios encontrados foram $(S^*,I^*,R^*)=(1,0,0)$ e $(S^*,I^*,R^*) = \left(\frac{\mu+\gamma}{\beta}, \frac{\mu}{\mu+\gamma}, 1 - \frac{\mu+\gamma}{\beta}\right)$ denominados equilíbrio livre de infecção e equilíbrio endêmico, respectivamente. Ambos podem ser classificados de acordo com sua estabilidade e para isso será introduzido abaixo o conceito de reprodutibilidade basal.

A **reprodutibilidade basal** ou **valor limiar**, denotado por R_0, é o número médio de casos secundários da doença que são gerados a partir de um caso inicial [3]. Para determinar o valor de R_0 devemos levar em conta a força de infecção, β, a taxa de mortalidade, μ e a taxa de recuperação, y. Se a taxa de mortalidade for alta, então os indivíduos ficarão menos tempo no compartimento dos infectados e o caso contrário acontece para a taxa de recuperação, se y for alta, o período no compartimento dos infectados é mais longo.

$$\text{Período médio de infecção} = \frac{1}{\mu+\gamma}$$

A reprodutibilidade basal é diretamente proporcional ao período médio de infecção (4) e à taxa de infecção, β:

Se $R_0 > 1$, então cada indivíduo infectado é capaz de infectar mais de uma pessoa suscetível e a probabilidade de haver uma epidemia nessa população é maior. Portanto, nesse caso as autoridades devem buscar e aplicar medidas que visem conter uma possível epidemia, como por exemplo, vacina e quarentena. Mas caso $R_0 < 1$ a tendência é que a doença desapareça daquela população de forma natural ao longo do tempo.

A estabilidade dos pontos de equilíbrio pode ser analisada através da matriz Jacobiana associada ao sistema e seus autovalores.

O ponto de equilíbrio livre de infecção $(S^*,I^*,R^*)=(1,0,0)$ será estável se $R_0 < 1$ e instável se $R_0 > 1$. Já o ponto de equilíbrio endêmico $(S^*,I^*,R^*)=\left(\frac{\mu+\gamma}{\beta}, \frac{\mu}{\mu+\gamma}, 1-\frac{\mu+\gamma}{\beta}\right)$ será estável de $R_0 > 1$ e caso contrário, será instável.

2.1 Modelo SIR com vacinação constante

Uma das estratégias de combate e prevenção de uma epidemia é a vacinação constante, que consiste em vacinar uma porcentagem dos recém nascidos. Indicaremos por p a proporção da população vacinada, sendo $0 < p < 1$. Na figura abaixo está representado o esquema compartimental de modelo SIR com vacinação.

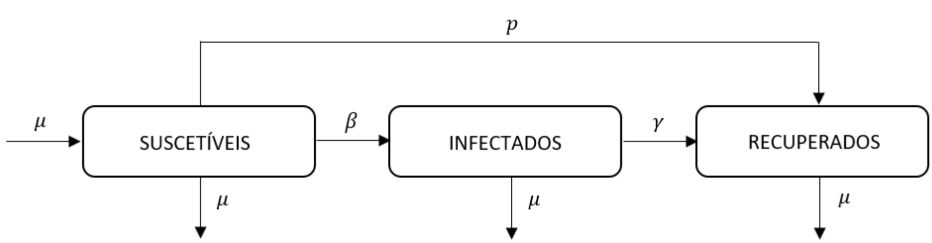


Figura 2: Esquema compartimental do modelo SIR com vacinação.

O intuito da vacinação é que parte da população suscetível se torne recuperada sem adquirir a doença, ou seja, sem passar pelo compartimento dos infectados. Portanto, a equação que representa o compartimento dos indivíduos suscetíveis terá uma modificação: a proporção de recém-nascidos diminui para (1-*p*)µ e a equação que representa os indivíduos recuperados terá um aumento de *p* µ.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = (1-p)\mu - \beta IS - \mu S \\ \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta IS - \mu I - \gamma I \\ \\ \dfrac{dR}{dt} = p\mu + \gamma I - \mu R \end{cases} \tag{6}$$

Para a análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio de um sistema com campanha de vacinação, deve-se considerar $R_0 > 1$. Além disso, denota-se por p_c a proporção mínima de vacinação, dada por $p_c = 1 - 1/R_0$.

Assim como o modelo SIR sem campanha de vacinação, aqui admite-se dois pontos de equilíbrios, também denotados por equilíbrio livre de infecção e equilíbrio endêmico, dados por $(S^*, I^*) = (1-p, 0)$ e $(S^*, I^*) = \left(\frac{\mu+\gamma}{\beta}, \mu\frac{\mu+\gamma}{\beta} - \mu\frac{1}{\beta}\right)$, respectivamente.

A análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio é feita a partir dos parâmetros *p* e p_c, da seguinte maneira:

1. se a taxa de vacinação for maior que a taxa mínima de vacinação, ou seja, se $p > p_c$, então o equilíbrio livre de infecção é estável e o equilíbrio endêmico é biologicamente irrelevante.

2. caso contrário, ou seja, se $p < p_c$, então o equilíbrio endêmico é estável e o equilíbrio livre de doença é instável.

Na tabela abaixo estão representados alguns valores de reprodutibilidade basal, R_0, e a taxa mínima de vacinação, p_c, em algumas localidades.

Doença	Localidade	Período	R_0	p_c
Sarampo	Reino Unido	1950 - 1968	16 - 18	$\simeq 0,9375 - 0,9444$
Rubéola	Polônia	1970 - 1977	11 - 12	$\simeq 0,9090 - 0,9166$
HIV (Tipo 1)	Kampala, Uganda (Heterossexuais)	1985 - 1987	10 - 11	$\simeq 0,9 - 0,9090$

Tabela 1: Valores estimados de R_0 e p_c para algumas doenças.

2.1.1 Imunidade coletiva

Um conceito muito importante dentro de epidemiologia matemática é o de imunidade coletiva, também conhecido como imunidade de rebanho. É a porcentagem da população que precisa estar recuperada, ou ser vacinada, para que determinada doença se extinga da população. Assim como a taxa mínima de vacinação, a imunidade coletiva também pode ser denominada por p_c e dada por p_c=1-1/R_0

Os valores estimados de p_c na Tabela 1, representam então a porcentagem da população que precisa se tornar recuperada, ou ser vacinada para que haja imunidade coletiva e a doença desapareça.

2.1.2 Simulações numéricas

Para realizar as simulações numéricas foi utilizado o programa Python. Essas simulações foram feitas a partir de parâmetros genéricos e não condizem necessariamente com alguma situação real.

Os parâmetros Utilizados para fazer a simulação dos modelos SIR com e sem vacinação foram: μ=0,004, y=0,1429, β=0,9, um intervalo de tempo de 90 dias e como condição inicial (S(0), I(0)) = (0,90; 0,10), e para o modelo com vacinação, p = 0,50.

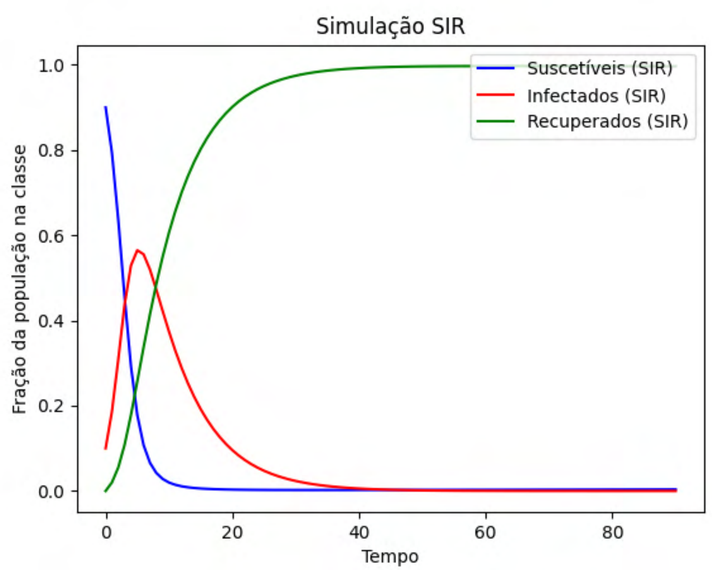


Figura 3: Simulação modelo SIR sem vacinação. Os parâmetros utilizados foram µ=0,004, y=0,1429, β=0,9, um intervalo de tempo de 90 dias e como condição inicial (S(0), I(0))=(0,90; 0,10).

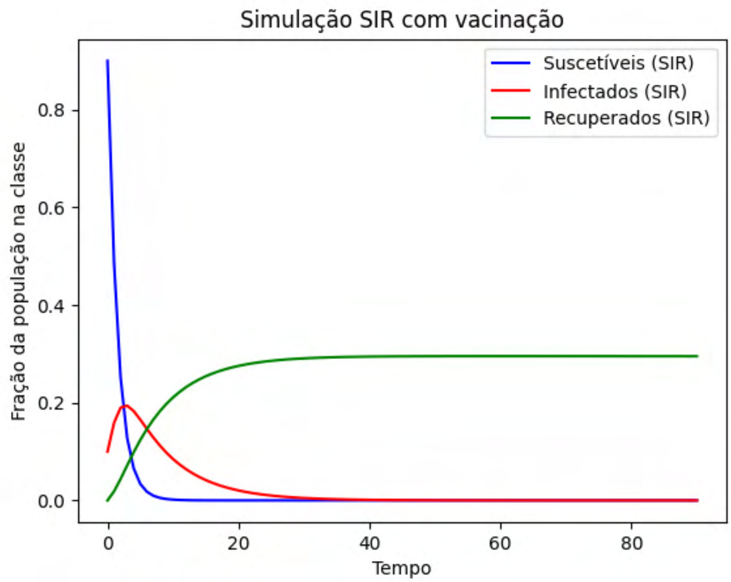


Figura 4: Simulação modelo SIR sem vacinação. Os parâmetros utilizados foram µ=0,004, *y*=0,1429, *β*=0,9, *p*=0,50, um intervalo de tempo de 90 dias e como condição inicial (*S*(0), *I*(0))=(0,90; 0,10).

As simulações numéricas mostram o efeito da campanha de vacinação durante uma epidemia. O pico da curva dos infectados diminui significativamente, consequentemente diminuindo o número de óbitos e possivelmente a ocupação de leitos hospitalares por conta da doença. Pode-se observar também que a curva dos infectados de torna zero em menos tempo com a incorporação da vacina no modelo.

3 I MODELO SEIR

Durante o processo de transmissão de um vírus, inicialmente o patógeno se reproduz rapidamente, mas sem ser notado pelo sistema imunológico e sem que haja transmissão da doença pelo indivíduo infectado. Portanto, o hospedeiro não pode ser classificado como suscetível, infectado ou recuperado. Esses indivíduos são classificados como expostos, e representados por *E*. A adição de um período latente representa um pequeno atraso no sistema. Além disso, um novo parâmetro é incorporado ao modelo, que representa os indivíduos que saem da classe dos expostos e passam para a classe dos infectados, dado por σ. O esquema compartimental do modelo SEIR está representado na figura abaixo.

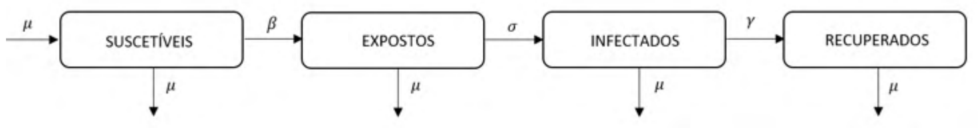


Figura 5: Esquema compartimental do modelo SEIR sem vacinação.

Um exemplo de doença infecciosa que pode ser modelada pelo SEIR, é o COVID-19. Considerando as mesmas premissas utilizadas no modelo SIR, o sistema de equações a seguir define o modelo SEIR:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \mu - \beta IS - \mu S \\ \dfrac{dE}{dt} = \beta SI - \mu E - \sigma E \\ \dfrac{dI}{dt} = \sigma E - \mu I - \gamma I \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases} \tag{7}$$

A reprodutibilidade basal do modelo SEIR é dado por:

$$R_0 = \frac{\beta\sigma}{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)} \tag{8}$$

O sistema possui dois pontos de equilíbrio, denominados equilíbrio livre de doença e equilíbrio endêmico, dados por $(S*, E*, I*, R*) = (1,0,0,0)$ e $(S*, E*, I*, R*) = \left(\frac{(\mu+\sigma)(\mu+\gamma)}{\beta\sigma}, \frac{\mu+\gamma}{\sigma}\frac{\mu}{\beta}(R_0-1), \frac{\gamma}{\beta}(R_0-1)\right)$, respectivamente.

Quanto a estabilidade dos pontos de equilíbrio, se R_0<1, então o equilíbrio livre de doença é estável, se R_0>1, então o equilíbrio endêmico será estável.

3.1 Simulações numéricas

Os parâmetros Utilizados para fazer a simulação do modelo SEIR foram os mesmos utilizados no modelo SIR: μ=0,004, *y*=0,1429, *β*=0,9, um intervalo de tempo de 90 dias e como condição inicial (*S*(0), *I*(0))=(0,90;0,10), e para o modelo com vacinação, *p*=0,50. Além disso, consideramos σ = 0,07.

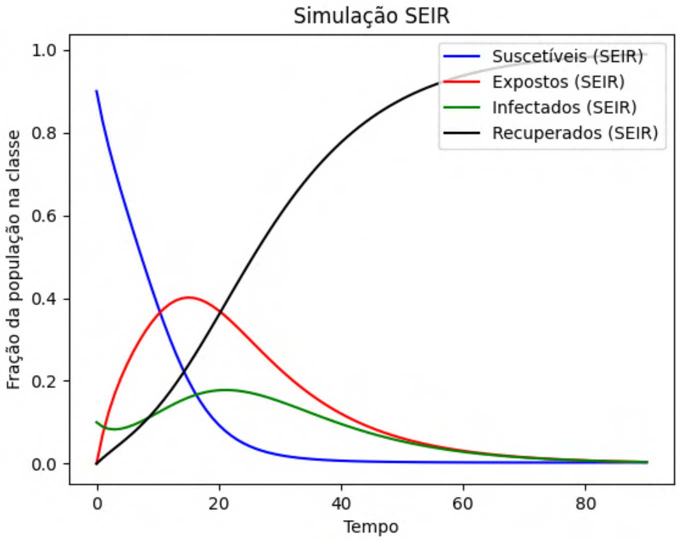


Figura 6: Simulação modelo SEIR. Os parâmetros utilizados *foram* µ = 0,004, *γ*=0,1429, *β*=0,9, *σ*=0,07, um intervalo de tempo de 90 dias e como condição inicial (*S*(0), *I*(0))=(0,90; 0,10).

Comparando as simulações dos modelos SEIR e SIR sem vacinação podemos perceber uma grande diferença nas curvas, principalmente a classe dos infectados. Isso ocorre pois os indivíduos que adquiriam a doença eram classificados como infectados no modelo SIR, mas no modelo SEIR são divididos em duas classes, expostos e infectados.

4 I CORONAVÍRUS (COVID-19)

No final de 2019, foi notificado o primeiro caso de COVID-19 em Wuhan, na China. A doença mostrou-se muito letal e em pouco tempo já tinha se espalhado por todo mundo. Em 20 de janeiro de 2020, a Organização Mundial da Saúde (OMS) classificou o surto como Emergência de Saúde Pública de Âmbito Internacional e, em 11 de março de 2020, como pandemia. Desde o início da pandemia 16,1 milhões de casos de COVID-19 já foram notificados e aproximadamente 449,8 mil pessoas morreram no Brasil [5].

Após muitas observações e pesquisas, o modelo SEIR é o que melhor se adapta ao COVID19 atualmente, podendo ser incorporados ao modelo a vacinação e a quarentena. Abaixo será apresentada uma simulação com dados reais da infecção de COVID-19 no Brasil, afim de demonstrar os gráficos em uma situação real de epidemia.

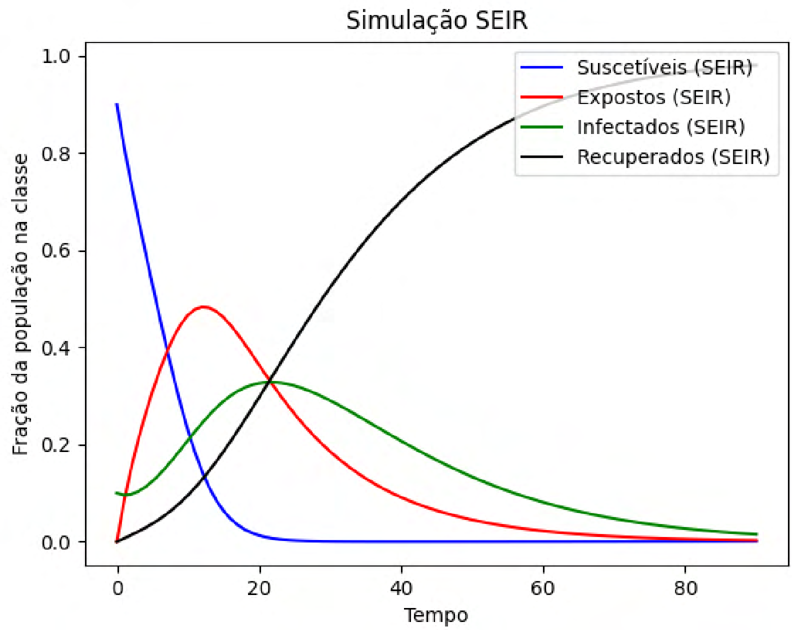


Figura 7: Simulação modelo SEIR. Os parâmetros utilizados foram μ=0,00003, γ=0,07, β=1,02, σ=0,07, um intervalo de tempo de 90 dias e como condição inicial (S(0), I(0))=(0,90; 0,10). [5] [6] [7]

Pode-se perceber que a curva dos infectados, para os parâmetros da COVID-19, é preocupante. Com a implementação da vacinação e da quarentena haveria uma melhoria nas curvas do gráfico acima, diminuindo o número de infectados e, consequentemente, de mortes. A reprodutibilidade basal para o COVID-19 é de, aproximadamente, 2,5, ou seja, a proporção mínima de vacinação, $p_c = 0,6$, que representa 60% da população que deve se tornar recuperada ou vacinada para que haja a imunidade coletiva.

5 | CONCLUSÃO

Neste artigo foram apresentados os modelos SIR (Suscetíveis-Infectados-Recuperados), desenvolvido por McKendrick e Kermack, que podem modelar doenças como a Rubéola, Sarampo e a Varíola, e o modelo SEIR (Suscetíveis-Expostos-Infectados-Recuperados), que modela, por exemplo, o COVID-19. Verificamos importantes conceitos, como o de Imunidade Coletiva e Reprodutibilidade basal. Além disso, através das simulações numéricas pode-se perceber a importância das campanhas de vacinação, que resultam na diminuição dos números de infectados, diminuição da ocupação dos leitos de UTI e como resposta, diminuição no número de óbitos. Outra questão de extrema importância é a proporção mínima de vacinação, p_c, analisada no modelo SIR.

Todas essas questões tratadas aqui demonstram a relevância dos modelos compartimentais, que permitem, de certa forma, prever o que poderia acontecer ao longo do tempo com determinada com população que esteja sendo acometida por uma infecção, e mais ainda, determinar qual a melhor medida protetiva que deve ser usada em cada caso, tal como vacinação e quarentena.

REFERÊNCIAS

[1] ALMEIDA, Priscila Roque de. *MODELOS EPIDÊMICOS SIR, CONTÍNUOS E DISCRETOS, EESTRATÉGIASDEVACINAÇÃO*. 2014. Dissertação (Pós-graduação) - Universidade Federal de Viçosa, 2014.

[2] MARTCHEA, Maia. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer, v.61.

[3] KEELING, Matt J.; ROHANI, Pejman. *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*. Princeton University Press, 2008.

[4] SILVA, Lucas Dantas da; RODRIGUES, Walter Martins; VILLARREAL, Elmer Rolando Llanos. *MODELAGEM MATEMÁTICA DOS CASOS CONFIRMADOS DE CORONAVÍRUS NO BRASIL E NO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE*. Universidade Federal Rural do Semi-árido.

[5] CORONAVÍRUS/BRASIL. COVID-19: *Painel Coronavírus*. Disponível em: https://covid.saude.gov.br/. Acesso em junho de 2021.

[6] AGÊNCIA IBGE NOTÍCIAS. *Em 2019, expectativa de vida era de 76,6 anos*. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-denoticias/releases/29502-em-2019-expectativa-de-vida-era-de-76-6-anos. Acesso em junho de 2021.

[7] VEJA. *Covid-19: após um mês, taxa de transmissão volta a subir no Brasil*. Disponível em: https://veja.abril.com.br/saude/covid-19-apos-1-mes-taxa-de-transmissao-voltaa-subir-no-brasil/. Acesso em junho de 2021.

CAPÍTULO 15

GROUNDED THEORY COMO METODOLOGIA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES, RACIOCÍNIO E PROCEDIMENTOS

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 04/06/2021

Eliandra Moraes Pires
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC
Florianópolis / Santa Catarina
http://lattes.cnpq.br/3716009505913278

Everaldo Silveira
Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC
Florianópolis / Santa Catarina
http://lattes.cnpq.br/3113132549353959

RESUMO: Este artigo parte do nosso desejo de incitar uma discussão entre pares a respeito do método *Grounded Theory* (GT). Para tanto, apresentamos as contribuições da GT no desenvolvimento da Dissertação de Mestrado de um dos autores. Com vistas a contribuir com a disseminação do método junto à comunidade de pesquisadores em Educação Matemática, serão apresentados os procedimentos e técnicas na prática da pesquisa, a partir da amostragem teórica, a quebra e análise de dados e a sensibilidade teórica. Consideramos a importância de desmistificar os conceitos inerentes à análise dos dados e ressaltar como esta metodologia qualitativa pode apoiar investigações no Campo de Educação Matemática.
PALAVRAS-CHAVE: Grounded Theory; Pesquisa Educacional; Pesquisa Qualitativa; Metodologia de Pesquisa; Técnicas e Instrumentos de Pesquisa.

GROUND THEORY AS A RESEARCH METODOLOGY IN MATEMÁTICS EDUCATION: CONTRIBUTIONS, REASONING AND PROCEDURES

ABSTRACT: This article starts from our desire to incite a discussion among peers regarding the Grounded Theory (GT) method. Therefore, we present the the contributions of the GT in the development of the Master's Dissertation of one of the authors. With a view to contributing to the dissemination of the method among the community of researchers in Mathematics Education, procedures and techniques in research practice will be presented, based on theoretical sampling, data breaking and analysis and theoretical sensitivity. We consider the importance of demystifying the concepts inherent to data analysis and highlighting how this qualitative methodology can support investigations in the field of Mathematics Education.
KEYWORDS: Ground Theory; Educational Research; Qualitative Research; Research Methodology; Research Techniques and Instruments.

1 I INTRODUÇÃO

Grounded Theory (GT), também conhecida como Teoria Fundamentada nos/em Dados foi escolhida para o desenvolvimento da Dissertação de Pires (2019)[1]. Este artigo, cuja

1 Dissertação de Mestrado apresentada no Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade

versão anterior fora apresentada em evento da área de Educação Matemática[2], traz o relato de experiência dos autores com a utilização da GT enquanto metodologia utilizada na Dissertação. Para tal serão evidenciados os aspectos metodológicos através do raciocínio, procedimentos e técnicas que envolvem o uso da GT, com o apoio software *ATLAS/ti.*

O método *Grounded Theory* ainda é pouco adotado por pesquisadores da área de Educação Matemática. No entanto, já é possível perceber um movimento neste sentido, conforme salientam Silveira e Klüber (2015, p.840): "embora recente, ainda que não se possa aferir o número por conta do movimento complexo da pesquisa e interlocuções variadas, começam a emergir trabalhos em nível *stricto sensu* sob essa perspectiva (...)".

Incialmente apresentaremos, de modo sucinto, os principais fundamentos do método *Grounded Theory*. Em seguida, através dos dados coletados e analisados por Pires (2019), serão apresentados os procedimentos e técnicas na prática da pesquisa, apresentando a amostragem teórica, a quebra e análise de dados e a sensibilidade teórica, concomitantemente à apresentação dos principais elementos do software *ATLAS/ti*. O objetivo deste artigo é mostrar que através desse método é possível emergir uma teoria substantiva com rigor e fundamentada em dados. Assim como, contribuir para as pesquisas no Campo de Educação Matemática, uma vez que esse Campo se constitui por diferentes áreas em expansão exigindo múltiplos olhares. É preciso considerar a necessidade de teorizações que possam explicar fenômenos sem que haja o risco de cair em uma tendência positivista, mas que se possa dialogar com diferentes correntes fenomenológicas. Desejamos, ainda, evidenciar as facilidades que o Software *ATLAS/ti,* enquanto apoio ao método *Grounded Theory*, tem a oferecer. O uso do Software pode contribuir para que o pesquisador sinta-se menos sobrecarregado podendo exercer plenamente as suas funções, aproveitando o prazer do trabalho de pesquisa enquanto emerge uma nova teoria.

2 I O MÉTODO *GROUNDED THEORY* (GT)

A GT foi desenvolvida na década de 1960 pelos sociólogos Barney Glaser (Universidade de Columbia) e Anselm Strauss (Universidade de Chicago), influenciada pelo Interacionismo Simbólico e pelo Pragmatismo. Sua sistematização técnica e procedimentos de análise tem por objetivo capacitar o pesquisador para desenvolver teorias sociológicas sobre o mundo da vida dos indivíduos, uma vez que alcança significação, compatibilidade entre teoria e observação, capacidade de generalização e reprodutibilidade, precisão, rigor e verificação (Strauss & Corbin, 2008).

É importante salientar que a *Grounded Theory*, possui diferentes vertentes. Na década de 1990, seus fundadores, Glaser e Strauss, seguiram por caminhos diferentes. Na versão straussiana, o método apresenta uma estrutura e um conjunto de ferramentas que ajuda a sensibilizar o investigador para a descoberta de novos conceitos e é caracterizada

Federal de Santa Catarina sob a orientação de Everaldo Silveira.

2 XVIII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática – Cuiabá – MT, 2019.

pelo equilíbrio entre a subjetividade e a objetividade, conforme é apontado por Freitas & Bandeira de Melo (2012). Enquanto que Glaser continuou seus estudos amparado nos princípios da versão originalmente criada, conforme informações obtidas em Bittencourt (2017). Mais tarde, novos pesquisadores passaram a militar sobre essa temática.

Glaser (2014) aponta para a existência de mais de cem tipos de GT que, embora guardem muitas semelhanças, cada qual tem seus traços específicos. Segundo Bittencourt (2017), esses mais de cem tipos diferentes de GT acabam abarcados em três grandes escolas: GT clássica, GT interacionismo simbólico[3] e a GT construtivista[4].

Charmaz (2009, p.24) defende uma vertente da GT em que nem os dados e nem a teoria são descobertos. Para essa autora, “somos parte do mundo o qual estudamos e dos dados os quais coletamos.” E é dentro dessa vertente que encontra-se o trabalho desenvolvido por Pires (2019).

Na interpretação de Charmaz (2009) para o *Grounded Theory*, vemos que o conhecimento é fruto de uma construção entre o investigador e os indivíduos participantes da pesquisa. A teoria gerada deve partir dos dados pesquisados, esses fornecerão subsídios sólidos para a construção de uma análise fundamentada.

Em GT é possível usar qualquer tipo de dados, conforme afirmam Glaser e Holton (2004). No entanto, há preferência aos que são de natureza qualitativa, uma vez que a GT é considerada, sobretudo, um método de análise de dados qualitativos. No tocante à coleta dos dados, embora a GT não ofereça subsídios específicos para tal, Tarozzi (2011) afirma que os três principais instrumentos utilizados para coletar dados em uma GT são:

1. a observação etnográfica;
2. a entrevista;
3. os documentos e a análise de texto.

Quanto ao terceiro instrumento, Charmaz (2009) chama a atenção para o fato destes poderem ser classificados em dois tipos: extraídos e os existentes. Textos extraídos são aqueles cuja produção é uma solicitação do(a) pesquisador(a) aos seus colaboradores pesquisados; textos existentes independem das solicitações do(a) pesquisador(a) e incluem, por exemplo, cartas, relatórios, projetos, fóruns de discussão na internet, literatura e autobiografias publicadas. Em sua investigação, Pires (2019), utilizou-se de textos que foram publicados em periódicos de grande relevância nas áreas de Pesquisa, Ensino e Educação Matemática.

3 I ASPECTOS METODOLÓGICOS

Antes de dar continuidade vamos apresentar, ainda que de modo sucinto, o problema de pesquisa de Mestrado que deu origem a esse artigo. A investigação de Pires

3 Como é visto nos trabalhos traduzidos para o português. No inglês chama-se Full conceptual.
4 Também denominada de escola positivista.

(2019), intitulada “Tendências Metodológicas na Educação Matemática: Obstáculos e Resistências”, teve por objetivo investigar, descrever e analisar os obstáculos e resistências apontados por professores que ensinam matemática no Ensino Básico ao utilizarem alguma Tendência Metodológica diversa ao ensino tradicional. Para tal, propôs algumas questões por considerá-las balizadoras para o desenvolvimento do trabalho: *Quais* são os obstáculos e quais são as resistências? por que há obstáculos e por que há resistências? esses obstáculos e resistências se diferenciam de acordo com a Tendência Metodológica?

Para o desenvolvimento da pesquisa, a autora utilizou-se de dois momentos de codificação e análise. No primeiro momento, tomou como *locus* de pesquisa três periódicos[5] renomadas de Educação Matemática com o objetivo de fazer um trabalho piloto com vistas no processo de Qualificação[6]. A escolha dos artigos extraídos dos periódicos teve como primeiro critério a delimitação do período de publicação: de 1996 até 2016. O período de busca de vinte anos deve-se à escolha pelo *Software ATLAS.ti* como instrumento auxiliador no processo de mapeamento dos artigos – dada a necessidade se se trabalhar com edições que possuem números *online*, sendo que, anterior a essas duas décadas, pouca coisa se tem disponível no formato digital.

A pesquisa envolveu títulos, resumos e leitura na integra dos textos. A organização dos artigos deu-se nas seguintes etapas:

I. Inicialmente foi tomado o ano de publicação dos periódicos, iniciando pelas edições mais antigas, acessando os sumários e selecionando-as conforme os títulos. Ao final dessa primeira etapa, haviam trinta e três artigos selecionados.

II. Na etapa seguinte, foi feita a leitura dos resumos resultando em quatro trabalhos na revista BOLEMA; nove na revista Zetetiké e nove na revista EMP.

III. A terceira etapa contemplou a leitura minuciosa dos textos que ainda causavam dúvidas. Mas acabaram sendo descartados após a certificação de que não eram de interesse para a pesquisa.

IV. A quarta etapa foi a leitura na integra dos textos selecionados na etapa ii. reduzindo para dois trabalhos na revista BOLEMA; dois na revista Zetetiké e quatro na EMP..

Desse modo, o *corpus* do trabalho foi composto, incialmente, por oito artigos selecionados, respeitando os critérios supracitados.

Simultaneamente à escolha da fonte de dados, ocorreu a codificação. Ou seja, enquanto era feita a leitura dos textos, eram usados os recursos de destacar palavras ou frases que eram significativas dentro da perspectiva da pesquisa. Segundo Tarozzi (2011), não existe separação temporal entre o momento da coleta dos dados e sua codificação

5 BOLEMA (Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, Brasil), Zetetiké (Revista de Educação Matemática, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil), EMP (Revista Educação Matemática Pesquisa, PUC, São Paulo, SP, Brasil).

6 Antes de submeter-se à defesa final de uma Dissertação de Mestrado ou Tese de doutorado faz-se obrigatório a aprovação do projeto através de Exame de Qualificação.

quando estamos trabalhando com GT, para ele é fundamental que tais processos aconteçam de modo paralelo e simultâneo. No mesmo sentido, Charmaz (2009) entende que a codificação nessa metodologia precisa ser entendida para além

> de um começo; ela define a estrutura analítica a partir da qual você constrói a análise. [...]. A codificação é o elo fundamental entre a coleta de dados e o desenvolvimento de uma teoria emergente para explicar esses dados. Pela codificação, você define o que ocorre nos dados e começa a debater-se com o que isso significa (CHARMAZ, 2009, p. 70).

Na compreensão de Pires (2019), após a codificação, é comum que se evidencie a necessidade de buscar outros dados. Nesse sentido corrobora com as ideias de Silveira (2014, p. 64) quando este afirma que “a primeira codificação ajuda a definir os temas a serem buscados nas próximas leituras. Também é fundamental para identificar possíveis necessidades de direção nas quais se ampliará a amostra.”.

Nesse sentido, a autora fez uma nova busca, investigando quarenta e seis periódicos que aceitam publicações (também) de artigos sobre Educação Matemática e Ensino de Matemática, além dos três primeiras que já haviam sido analisadas. Na nova busca, foram encontrados apenas oito novos artigos distribuídos em seis periódicos[7]. Utilizou-se as mesmas etapas e critérios elencado na primeira análise (primeiro momento).

Para dar maior suporte às pesquisas em *Grounded Theory* na atualidade, urge ao pesquisador instrumentalizar-se de *softwares* mais avançados. Na sequência, apresentaremos o software *ATLAS.ti* evidenciando os procedimentos e técnicas na prática da pesquisa.

4 | O SOFTWARE *ATLAS.TI*

Para o processo de codificação, o software *ATLAS.ti* é de grande utilidade como suporte às interpretações e organização documental, uma vez que permite a análise e apresentação dos resultados, possibilitando a construção de redes semânticas. Esse software se difere de um programa de estatística que resolve equações e apresenta resultados. Ele é um *software* para análise de dados qualitativos, portanto não tem a função de processar e interpretar as informações. Seu objetivo é promover um espaço para a aplicação de múltiplas teorias: análise de conteúdo, análise do discurso, *grounded theory*, correntes mais fenomenológicas, etc[8].

Quanto a sua estrutura, o *ATLAS.ti* possui algumas nomenclaturas para os seus recursos as quais destacaremos, mostrando os principais elementos constituintes através do Quadro 1.

7 Revista Perspectiva da Educação Matemática; Revista EMR; Revista REVEMAT; Revista REVEDUC; Revista ACTA SCIENTIAE; e Jornal JIEEM.
8 Informações contidas na apostila de treinamento. Ano 2006.

Elemento	Descrição
Unidade hermenêutica (*Hermeneutic unit*)	Reúne todos os dados e os demais elementos.
Documentos primários (*Primary documents*)	São os dados primários coletados. Em geral, são transcrições de entrevistas e notas de campo e de checagem. São denominados de Px, onde x é o número de ordem.
Citações (Quotes)	Trechos relevantes das entrevistas que geralmente estão ligados a um código. Sua referência é formada pelo número do documento primário onde está localizada, seguido do seu número de ordem dentro do documento. Também constam da referência as linhas, inicial e final.
Códigos (Codes)	São os conceitos gerados pelas interpretações do pesquisador. Podem estar associados a uma citação ou a outros códigos e são indexados pelo nome. Apresentam dois números na referência; o primeiro se refere ao número de citações ligadas a ele, e o segundo, ao número de códigos. Os dois números representam, respectivamente, o grau de fundamentação (*groundedness*) e o de densidade (*density*) do código.
Notas de análise	Descrevem o histórico da interpretação do pesquisador e os resultados das codificações até a elaboração final da teoria.
Esquemas (Netview)	São os elementos mais poderosos para exposição da teoria. São representações gráficas das associações entre os códigos (categorias e subcategorias). O tipo das relações entre os códigos é representado por símbolos.
Comentário (Comment)	Todos os elementos podem e devem ser comentados, principalmente os códigos, fornecendo informações sobre seu significado.

Quadro 1 – Principais elementos do *ATLAS.ti.*

Fonte: Bandeira-de-Mello e Cunha (2003, p. 6).

Com o auxílio do *Software ATLAS.ti,* é possível realizar simultaneamente a coleta e análise de dados, empreendendo a codificação e categorização em uma perspectiva espiral e não linear. Isso deverá ocorrer até a saturação teórica e a emersão de uma nova teoria.

De acordo com Contreras (2015), o uso do *ATLAS.ti*, além da condução por um processo de análise fundamentado em evidências, possibilita a recuperação dos caminhos analisados que o(a) pesquisador(a) percorreu. Ou seja, por manter organizado tanto um banco de dados brutos quanto um banco de dados sistematizados (categorizados), o(a) pesquisador(a) tem como refazer os trajetos e recuperar as ações executadas.

No *ATLAS.ti*, as Unidades Hermenêuticas (*Hermeneutic Units*) são os arquivos principais (ou projetos) e são compostas pelos Documentos Primários (*Primary Documents*). Tratam-se dos “dados brutos” – no trabalho em questão, os artigos extraídos dos periódicos.

A figura 1 mostra um exemplo dos documentos primários já inseridos na Unidade Hermenêutica.

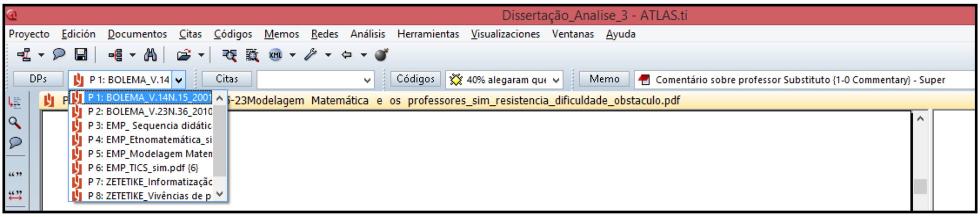


Figura1: Exemplo de documentos primários inseridos em uma Unidade Hermenêutica.

Fonte: Pires (2019).

Na leitura de um documento primário, podemos escolher trechos que expressam alguma ideia que consideramos importante e marcá-los através da opção “Citações” (*Quotes*). Os códigos (*Codes*) podem ser vistos como unidade básica de análise, onde podemos agrupar um conjunto mais amplo de citações conforme exemplo exposto na figura 2.

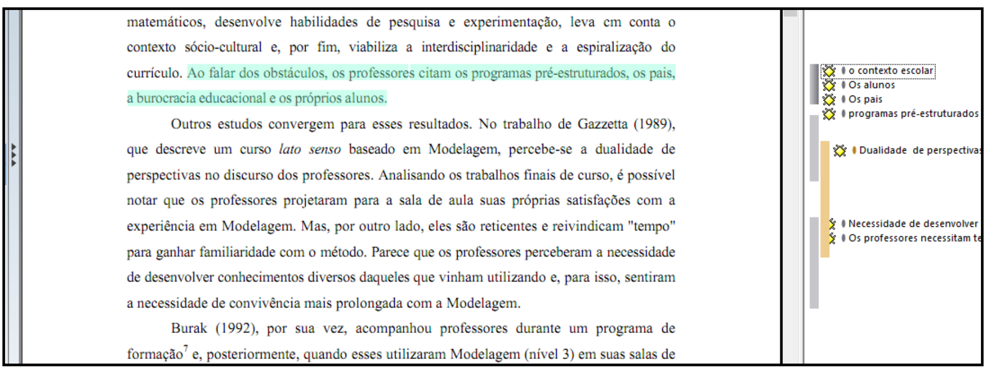


Figura 2: Exemplo de codificação no texto de uma documento primário.

Fonte: Pires (2019).

No exemplo apresentado, o trecho do texto destacado é a citação que foi codificada. Como pode ser observado, o trecho recebeu mais de um código (o contexto escolar; os alunos; os pais e programas pré-estruturados). Isso quer dizer que o trecho do texto selecionado foi classificado, de acordo com um critério, em várias categorias. As barras verticais representam a abrangência da citação codificada e marcam todas as linhas englobadas na mesma.

É possível fazer anotações com o propósito de captar as impressões e interpretações do(a) pesquisador(a) sobre os dados ou sobre o projeto – imaginemos aqueles pequenos apontamentos que geralmente fazemos à margem dos textos – no *ATLAS.ti*, essas anotações são chamadas de *Memo* (memorandos). As anotações são, pois, um comentário em “nível superior” que se referem ao processo de análise de dados. Essas anotações podem estar relacionadas a citações e serem ligadas em redes.

A figura 3, traz um exemplo com o uso do recurso *Memo*, onde são expostas considerações a respeito de uma informação contida no texto. A anotação recebeu a nomeação de “comentário sobre professor substituto”.

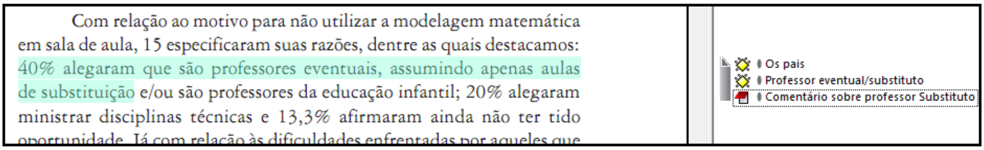


Figura 3: exemplo de anotação através do recurso *Memo*.

Fonte: Pires (2019).

A Figura 4 mostra uma ampliação da Figura 3, onde “abre-se” o comentário (*Memo*) para mostrar sua relação com o processo de codificação.

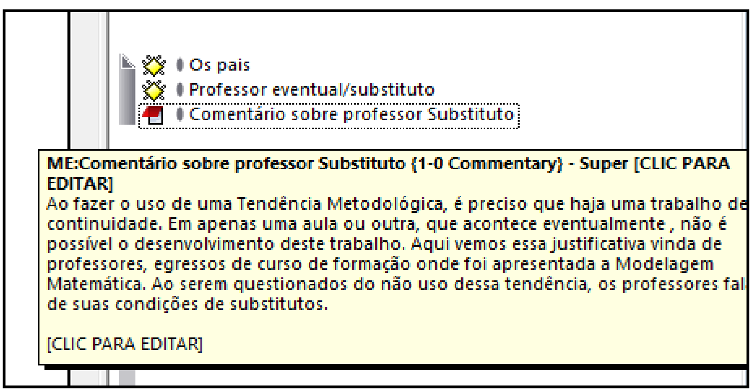


Figura 4: Ampliação e complementação da Figura 5.

Fonte: Pires (2019).

Para Bandeira-de-Melo e Cunha (2003, p.8), as notas de análise “são o principal instrumento para futuras auditorias no processo de pesquisa utilizado e por isso o pesquisador deve ser claro, e ter em mente que outras pessoas ao lerem seus apontamentos devem ser capazes de seguir o mesmo caminho trilhado”.

5 | DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

No trabalho de Pires (2019), no primeiro processo de codificação (primeira amostragem) que incluiu os oito primeiros documentos investigados, surgiram quarenta e seis códigos relacionados às citações. No novo processo de codificação (segunda amostragem), fora respeitados os códigos já existentes, mas também emergiram novos códigos, totalizando cinquenta e oito.

Segundo Bandeira-de-Melo e Cunha (2003), Esse momento de codificação é a parte central da análise dos dados e pode ser dividida em três fases: codificação aberta, axial e seletiva.

A codificação aberta é a codificação inicial, na qual ocorrem a quebra, a análise, a comparação, a conceituação e a categorização dos dados. É na codificação aberta que emergem as propriedades e dimensões das categorias. Bandeira-de-Melo e Cunha (2003) chamam a atenção, ainda, para o fato de que os códigos gerados podem ser classificados em: primeira ordem e abstratos ou teóricos.

Os exemplos até aqui apresentados resultam de uma codificação aberta e são considerados códigos de primeira ordem, ou seja, são os códigos associados às citações. Os códigos serão considerados abstratos ou teóricos quando se associarem a outros códigos, sem necessariamente estarem ligados a alguma citação.

Seguindo essa lógica, após a codificação inicial dos oito textos que compuseram o *corpus*, ocorreu a codificação focalizada. Numa aproximação por semelhança, pela comparação e observações das relações entre categorias, emergiram dados que foram agrupados nas categorias seguintes:

- O professor e suas relações com o trabalho;
- O professor e suas relações com a escola;
- O professor e suas relações com o currículo;
- O professor e sua relação com o saber; e
- Os alunos e suas relações com as tendências.

Ao fazer a nova codificação focalizada utilizando os novos artigos selecionados (segunda amostragem) através da aproximação por semelhança, comparação e observação das novas relações que se estabeleceram, viu-se que as categorias que haviam surgido inicialmente permaneceram as mesmas.

O Quadro 2 apresenta as cinco categorias, o número de *Quotes* da primeira e da segunda amostra colocados lado a lado para que se possa comparar. É possível observar os *Quotes* que aumentaram na segunda amostra através do destaque em forma de cor. Também foram destacados os novos *Quotes* (para esses, fora usado um tom mais escuro).

CATEGORIA	CÓDIGOS		QUOTES (1ª amostra)	QUOTES (2ª amostra)
O professor e sua relação com o trabalho	Professor eventual/substituto		1	1
	Papel do professor		1	1
	Necessidade refletir sobre as experiências		8	9
	Vantagens		3	3
	Dualidade de perspectivas no discurso dos professores		2	2
	Cautela		1	1
	Competências		1	1
	Falta de familiarização		1	1
	As concepções dos professores		12	18
	Há poucas evidências que os professores estejam usando, mesmo que haja formação		1	1
	Despreparo		3	3
	Tensão		1	1
	Insegurança		4	7
	Relação teoria e prática		1	5
	Ensino tradicional da matemática		8	15
	Zona de conforto			3
	Falta de tempo para trabalhar as atividades em sala de aula			3
	Falta de tempo para planejar e/ou preparar a aula			3
	Emocional			1
O professor e sua relação com a escola	Diretores		1	1
	Os pais		3	3
	Outros atores da escola		1	3
	Troca entre pares		3	3
	A burocracia educacional		1	1
	Dinâmica de sala de aula		1	2

	Falta pessoal de apoio		2	2
	Número elevado de alunos		1	1
	Relação professor e aluno		3	3
	O contexto escolar		5	8
	Dificuldade na implementação		5	6
	Falta de estrutura		7	12
O professor e sua relação com o currículo	Programas pré-estruturados		1	2
	Relacionar a prática com o conteúdo		1	3
	Os alunos		5	11
	Preocupação com o currículo		4	12
Os alunos em relação com a metodologia	Relação dos alunos com a metodologia		6	6
O professor e sua relação com o saber	Dúvidas		1	2
	Falta de conhecimento		4	11
	Crenças		1	1
	Os professores necessitam de tempo para se familiarizar		3	4
	Necessidade de formação		7	8
	Necessidade de estágio		3	3
	Necessidade de desenvolver conhecimentos diversos.		4	4
	Professores ensinam como foram ensinados		1	2
	Formação inicial e continuada como insuficiente		10	17
	Comodidade			2

Quadro2: Categorias, Códigos e Quotes.

Fonte: Pires (2019)

A codificação teórica é o momento em que devemos buscar a *core category,* ou seja, a Categoria Central, o conceito-chave. A ela, todas as outras categorias devem estar ligadas e é através dela que deve nascer a teoria que estávamos buscando. Segundo Tarozzi (2011, p.140), a Categoria Central é o resultado de uma GT e “encontrar e aprofundar a (ou as) *core category (ies)* é o objetivo da codificação teórica, a fase da codificação que se desenvolve no nível máximo de abstração conceitual".

Pires (2019), constatou que a partir desse processo de hierarquização das categorias emersas dos dados, relacionando categorias com subcategorias, foi possível encontrar uma Categoria Central já na primeira amostragem: "As concepções dos professores".

Na segunda amostragem, de modo indutivo, a autora selecionou um conjunto de categorias (conceitos) que se relacionam sistematicamente com a Categoria Central encontrada. Ou seja, "as concepções dos professores" vista como uma Categoria Central inter-relaciona-se com outras três subcategorias: "conhecimento", "sentimento" e "condições". E, juntas, são capazes de explicar o fenômeno social: os motivos pelos quais os professores põem em prática específicas praxes ao ensinarem matemática e traz essa representação através de um diagrama ou *network*.

As redes ou *networks* como são apresentadas no *ATLAS.ti* formam os componentes mais interessantes do software. Através desse recurso, podemos associar os componentes de uma maneira gráfica, facilitando a visualização de relações entre códigos e entre partes do texto. A exemplo disso, o diagrama da Figura 5 mostra a relação entre a Categoria Central e as subcategorias.

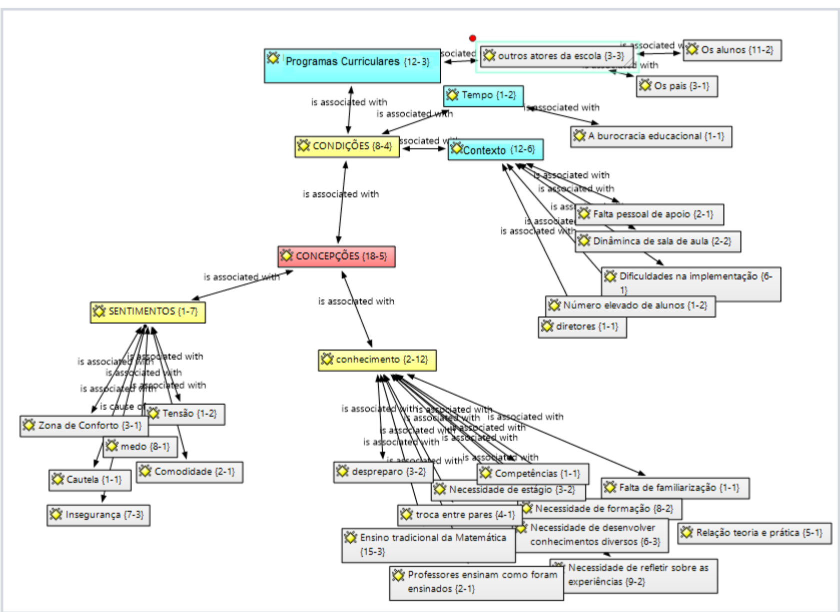


Figura 5: A Categoria Central e as subcategorias.

Fonte: Pires (2019).

Faz-se importante destacar que os grupos categorizados não foram considerados como estanques entre si. No entanto, esse enlaçamento ajudou a autora a pensar muitas maneiras de cruzar os códigos. Embora, *a priori*, tenha feito algumas associações, na hora da análise descritiva, a percepção da pesquisadora foi conduzindo o trabalho de modo a criar novas associações a partir dos excertos dos textos. Por se tratar de um trabalho em rede, não faz sentido algum uma apresentação linear, pois parte-se da plasticidade que envolve a intuição baseada nos dados.

Segundo Tarozzi (2011, p.160) “desenhar diagramas, mapas conceituais, gráficos, permite superar a formalização de categorias, ‘sobrevoar sobre as mesas’ e desse ponto poder refletir e compreender sinteticamente as relações entre os conceitos”. Pode-se dizer que as figuras possibilitam desenvolver a percepção visual e, por serem essas figuras muito simples, é preciso estar consciente de que se tratam de um instrumento de análise e não uma forma de apresentação de dados. Ou seja, não expõem os dados detalhadamente, mas o fato de construí-las (as figuras) ajuda a elaborar conceitos e nexos.

Nesse sentido, as figuras apresentadas no trabalho de Pires (2019) mostram os caminhos percorridos pela pesquisadora no decorrer da codificação teórica e foram expressas de um modo mais profundo por meio da linguagem verbal, construindo, assim, uma nova teoria que foi apresentada em sua Dissertação de Mestrado.

6 | AS CONTRIBUIÇÕES DA GT PARA O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Uma das decisões mais importantes a ser tomada ao dar início à uma pesquisa, está na escolha da metodologia a ser utilizada. O fato de a *Grounded Theory* emergir do desejo de seus criadores em combater a forte linha positivista que ganhava força na década de 1960, reforça nosso interesse e consequente escolha em divulgar esse trabalho. Preocupa-nos as perspectivas de um enfraquecimento e perda de espaço de pesquisas qualitativas nos tempos atuais e vindouros. Essa tendência positivista que paira sobre nossas comunidades de pesquisadores, nas palavras de Charmaz (2009, p.19), é o “paradigma dominante de investigação de uso geral nas ciências naturais”.

Atualmente há muitos tipos de GT e isso se deu a partir da militância de novos pesquisadores. No entanto, mesmo que haja muitas semelhanças entre as diferentes formas de fazer GT, cada qual tem seus traços específicos. Nossas concepções nos fizeram trilhar pelos caminhos apontados por Charmaz (2009, p.24) ao defender uma vertente da GT em que nem os dados e nem a teoria são descobertos uma vez que fazemos parte “do mundo o qual estudamos e dos dados os quais coletamos.”. Dentro dessa vertente, a teoria se constituiu a partir do envolvimento e interações da pesquisadora com os dados pesquisados. No estudo apresentado buscou-se compreender os obstáculos e resistências apontados por professores que ensinam matemática no Ensino Básico ao fazerem uso de Tendências Metodológicas alternativas. Ou seja, o que acontece com determinados indivíduos, em contextos e situações demarcadas. A esse respeito, Tarozzi (2011) considera que os dados mais ricos não são os fatos, mas sobretudo os significados que os sujeitos atribuem àqueles fatos.

Desse modo, buscamos desmistificar a visão equivocada sobre a GT, em que o pesquisador se mantem neutro diante do campo alicerçado deixando que os dados da própria cena social fundamentem a sua teoria. Essa visão foi refutada por Pires (2019) durante todo desenvolvimento de seu Estudo. A *Grounded Theory* não deve ser vista como um método que ignora a literatura e o conhecimento prévio que um pesquisador tem sobre o tema de sua investigação. Defendemos que antes de iniciar um projeto de pesquisa já possuímos um repertório a respeito de nossa área e um envolvimento com o referencial teórico. Assim, iniciamos "nossos estudos a partir dessas perspectivas privilegiadas, mas precisamos permanecer o mais aberto possível a tudo o que vemos e sentimos nas etapas iniciais da pesquisa" (Charmaz, 2009, p. 34).

REFERÊNCIAS

BANDEIRA-DE-MELLO, R.; CUNHA, C. J. C. de A. **Operacionalizando o método da *grounded theory* nas pesquisas em estratégia: técnicas e procedimentos de análise com apoio do *software* Atlas/ti**. In: ENCONTRO DE ESTUDOS EM ESTRATÉGIA, 1, 2003, Curitiba. Anais...Rio de Janeiro: ANPAD, 2003.

BITTENCOURT, M. **Grounded theory como metodologia para o estudo das mídias digitais C&S** – São Bernardo do Campo, v. 39, n. 1, p. 143-167, jan./abr. 2017.

CHARMAZ, K. **A construção da teoria fundamentada**. Porto Alegre: ArtMed, 2009.

CONTRERAS, R. B. **Qualitative data analysis with Atlas.ti 7 windows: introduction. Qualitative Data Analysis with ATLAS.ti 7 Windows Trainning.Apresentação PowerPoint utilizada no curso Qualitative Data Analysis with ATLAS.ti 7 Windows**, Chigago, 10 a 12 mai, 2015.

GLASER, B.; STRAUSS, A. **Awareness of dying. Chicago: Aldine de Gruyter, 1967. FREITAS A. S., & BANDEIRA de MELO, R. (2012). A Grounded Theory for managerial action in the process of e-learning implementation in business schools of Brazil**. BASE-Revista de Administração e Contabilidade da Unisinos, 10(2), 100-116.

GLASER, B. G.; HOLTON, J. **Remodeling Grounded Theory *.Forum QualitativeSozialforschung/ Forum: Qualitative Social Research***, 5(2), Art. 4, 2004 [Disponível em: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs040245 - acesso em 15/03/2011].

PIRES, E. M. **Tendências Metodológicas na Educação Matemática: Obstáculos e Resistências**. 2019. 178 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2019.

GLASER, B. Applying Grounded Theory. **The Grounded Theory Review**,v. 13, n. 1, 2014.

SILVEIRA, E.; KLÜBER, T. E. **Grounded Theory na Educação Matemática: contribuições de um estudo com modelagem matemática**. Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, UFMS.Volume 8, 2015.

STRAUSS, A.; CORBIN, J. **Pesquisa Qualitativa: Técnicas e procedimentos para o**

desenvolvimento da teoria fundamentada. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

TAROZZI, M. **O que é a Grounded Theory? Metodologia de pesquisa e de teoria fundamentada nos dados.** Petrópolis – RJ: Vozes, 2011.

CAPÍTULO 16

STOMACHION: UMA ABORDAGEM SOBRE A HISTÓRIA DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 03/06/2021

Paula Francisca Gomes Rodrigues
Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM
Uberaba – Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/9319538925749073

RESUMO: Este trabalho objetiva explorar a História da Matemática no âmbito da Análise Combinatória e verificar que o tratado do *Stomachion* de Arquimedes é o primeiro registro de estudos sobre o tema. Desejamos aproximar a História da Matemática aos alunos de forma a mostrar que a Matemática é ciência em transformação e que pode ser utilizada como recurso didático. Assim, através de nossos estudos sobre o tratado, propomos sua utilização em atividades do Ensino Básico, haja vista ser uma fonte de estudos sobre Geometria, Análise Combinatória e Raciocínio Lógico. O trabalho foi desenvolvido através de pesquisas bibliográficas onde analisamos livros digitais e impressos, dissertações, artigos e obras publicadas em sites oficiais sobre a História da Combinatória e o Palimpsesto de Arquimedes.
PALAVRAS-CHAVE: Arquimedes, Stomachion, Análise Combinatória, História da Matemática, Ensino Básico

STOMACHION: AN APPROACH TO COMBINATORIAL ANALYSIS' HISTORY

ABSTRACT: This work aims exploring Mathematics History in the scope of Combinatorics and verify that Archimedes' Stomachion is the first record of studies on the subject. We want to bring the History of Mathematics to students in order to show that Mathematics is a changing science and that it can be used as a didactic resource. Thus, we introduce the Stomachion resolution and propose its use in Basic Education activities, since it is a source of studies on Geometry, Combinatorial Analysis and Logic. The work was developed through bibliographic research where we analyzed books, dissertations, articles and works published on official websites on the History of Combinatorics and Archimedes' Palimpsest.
KEYWORDS: Archimedes. Stomachion. Combinatorial Analysis. Geometry. Basic Education.

1 I INTRODUÇÃO

Nos últimos trinta anos o interesse pela História da Matemática vem se consolidando como fonte investigativa e de conhecimento para o desenvolvimento da Educação Matemática, segundo Lopes e Alves (2014, p. 2). Novas descobertas em documentos e textos antigos ajudam a constituir os passos que nos trouxeram até o que conhecemos hoje ou até mesmo modificar o que se acreditava correto, além de introduzir novas ferramentas matemáticas.

O *Stomachion* de Arquimedes é um

grande exemplo disso. Despretensiosamente era considerado apenas um jogo de quebra-cabeças semelhante ao Tangram Chinês mas teve seu nível de importância elevado ao de modificador da História da Matemática quando o perdido Palimpsesto de Arquimedes, conhecido como Códex C, reapareceu em 1998 e foi leiloado no mesmo ano. O comprador, que permanece anônimo, cedeu a obra ao Museu Walters no Estados Unidos para que a obra pudesse ser restaurada e lida.

Apesar de todas as atenções estarem voltadas para o tratado de O Método contido no Palimpsesto, quando finalmente o *Stomachion* pode ser lido e interpretado, descobriu-se que Arquimedes havia estudado Combinatória através dele e que aquele registro era o mais antigo estudo de Combinatória existente e remontava há mais de 2000 anos.

Este texto é fruto de uma dissertação de Mestrado que objetivou aplicar o tratado do *Stomachion* em atividades do Ensino Básico de Matemática, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo Referência de Minas Gerais, bem como criar uma cronologia sobre os estudos em Análise Combinatória, trazer a resolução do *Stomachion* e sua tradução da língua inglesa para a língua portuguesa.

2 | REFERENCIAL TEÓRICO

Arquimedes (287 – 212 a.E.C.) costumava utilizar as areias de Siracusa (ilha da Sicília) para traçar seus diagramas e realizar seus cálculos e comparações. Comunicava-se com seus amigos estudiosos através de cartas onde lhes contava a respeito de suas descobertas e propunha reflexões. Graças a esses registros enviados a diversos locais do Mediterrâneo, os trabalhos de Arquimedes puderam sobreviver ao saque após a tomada de Siracusa.

A História nos diz que existiram três códices com os trabalhos de Arquimedes, conhecidos como Códex A, Códex B e Códex C. Todavia, apenas o Códex C sobreviveu ao tempo e chegou até nós. Além de ser a única fonte de O método e *Stomachion*, contém, ainda, Corpos Flutuantes, é também o mais antigo manuscrito dos tratados de Arquimedes. O Códex C como o conhecemos hoje teve seu conteúdo manuscrito em 975 E.C. (século X) e foi convertido em códex no século XII. (NETZ; NOEL, 2009, p.137)

Até se analisar o último vestígio do *Stomachion*, sabia-se que Arquimedes trabalhou com um jogo composto por catorze peças que, juntas, formavam um quadrado e cujo objetivo seria construir certas formas geométricas a partir delas. Relatos da Antiguidade sobre o jogo sugerem que Arquimedes não o teria inventado, mas que teria se interessado por ele e feito uma série de reflexões matemáticas a seu respeito.

Em 1899, um acadêmico alemão chamado Suter deparou-se com um manuscrito em árabe do século XVII que citava um certo “*Stumashiun* de Arquimedes”. Essa versão trazia um texto muito curto, contido em duas folhas, mas que foi fundamental para complementar a página restante no Palimpsesto. O manuscrito trazia a construção do *Stomachion* (figura 1).

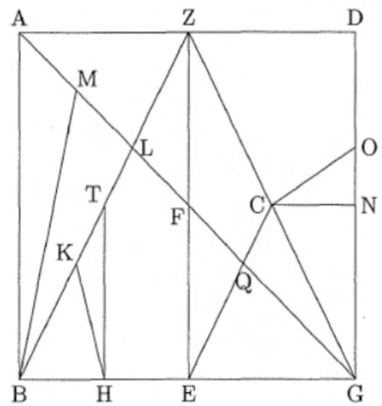


Figura 1 - Diagrama no manuscrito árabe.

Fonte: Netz; Wilson; Acerbi (2004, p. 80).

A partir das técnicas de recuperação de imagens, fotografias com luz ultravioleta, William Noel, o curador do Museu Walters e sua equipe, conseguiram extrair do palimpsesto grande parte do tratado sobre o *Stomachion.* Assim, veio à tona um significado mais intrigante que o de apenas um jogo de quebra-cabeças.

Associando a leitura do tratado do *Stomachion* e de sua construção no manuscrito árabe, chegou-se à conclusão de que os estudos de Arquimedes sobre a geometria das quatorze peças, suas rotações e transposições não objetivavam formar figuras, mas sim, determinar o número de combinações possíveis das mesmas dentro do quadrado, ou seja, de quantas maneiras podemos arranjar as peças do *Stomachion* de modo que sempre formem um quadrado.

Uma luz sobre o assunto foi lançada e indicava que os cientistas estavam diante de um marco sobre os estudos sobre Análise Combinatória: seu primeiro registro.

Leibniz definiu a análise combinatória como “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos” em 1666, já em 1818, Nicholson sentenciou-a como “o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos pode ser associado e misturado entre si.” (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004, p. 4)

Biggs (1979, p. 110) afirma que os princípios de contagem são bem evidentes e são fatos de experiências diárias, os quais até pouco tempo não haviam recebido um status formal e não é possível rastrear o histórico de suas origens. No entanto, o autor nos fornece alguns exemplos memoráveis que persistiram ao longo do tempo, numa tentativa de estabelecer onde os mais antigos surgiram. Uma certa cantiga de ninar presente em livros infantis do século XX tem sua primeira referência datada em 1730 mas guarda semelhanças com enigmas mais antigos, como um problema contido no *Liber Abaci* de Fibonacci em 1202 e ao Problema 79 do Papiro Rhind de aproximadamente 1650 a.C.

A teoria combinatória e sua formalização apenas ocorreram a partir do fim século XVI quando da necessidade de se calcular probabilidades em jogos de azar. Entre os matemáticos que se dedicaram ao assunto, temos Blaise Pascal (1623-1662), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Pierre Fermat (1607-1655), Abraham de Moivre (1667 – 1754), Jacob Bernoulli (1655-1705), Leonard Euler (170-1783) e Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859). (GONÇALVES, 2014, p. 15-18)

Portanto, confirmada a teoria de que o *Stomachion* realmente se tratava do primeiro registro de Combinatória da história, Arquimedes é colocado como pioneiro também neste ramo da Matemática.

A partir deste ponto, busca-se aplicar as descobertas sobre o *Stomachion* no Ensino Básico de Matemática, de acordo com o que propõe a BNCC e o Currículo Referência de Minas Gerais.

3 I ANÁLISE DOS DADOS

Através das informações coletadas no levantamento bibliográfico constatamos que antes do trabalho de Arquimedes no *Stomachion* haviam apenas registros que indicavam a utilização dos princípios aditivo e multiplicativo de contagem no Problema 79 do Papiro Rhind de aproximadamente 1650 a.E.C. e no Livro Chinês das Mutações (ou I Ching) também da mesma época. Após isso, apenas a partir no século XVI E.C. que a Análise Combinatória começa a ser estudada, desenvolvida e formalizada, segundo Biggs.

Em nosso trabalho, além de produzirmos a primeira versão em Português do tratado do *Stomachion* a partir do tratado traduzido da língua grega para a inglesa por William Noel, produzimos sua resolução com o auxílio dos estudos de Arquimedes e da solução proposta por Chung e Graham utilizando as ferramentas matemáticas disponíveis a Arquimedes na época.

Analisando a revisão bibliográfica e os dados produzidos na solução, percebemos que os recursos empregados podem ser aplicados no Ensino Básico de Matemática já que tratam de Geometria Básica, Raciocínio Lógico e Análise Combinatória. Neste sentido, propusemos uma série atividades de aplicações do Stomachion em sala de aula, dentre elas, atividade voltada ao ensino da Análise Combinatória que pode ser trabalhada por professores de Ensino Médio. Trata-se de uma abordagem sobre o tema da Permutação Simples e Fatorial onde o uso de fórmulas não é necessário para a resolução do exercício. Objetivamos que os alunos reconheçam o problema como um problema de contagem e sejam capacitados a resolver problemas elementares que envolvam Permutação Simples.

4 I UMA ATIVIDADE SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

No primeiro momento da atividade apresentamos a história do *Stomachion* de Arquimedes enfatizando que inicialmente era visto como um jogo, apresentamos seu diagrama (figura 1) e suas quatorze peças. Aproveitamos para propor alguns desafios para montagem de figuras a partir das mesmas. Para isso, cada aluno é incentivado a construir sua própria réplica do Stomachion em material de fácil manuseio, emborrachado e de boa durabilidade, o E.V.A. (Espuma Vinílica Emborrachada).

Em seguida, a atividade prossegue com o professor apresentando o diagrama e sua formação a partir de quatro triângulos retângulos, os triângulos básicos. Podendo ressaltar, ainda, a característica do quadrado que é ter os quatro ângulos internos retos.

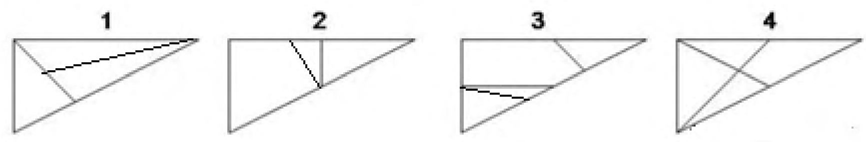


Figura 2 - Triângulos Básicos.

Fonte: Autoria própria e Chung e Graham (2007).

Os alunos são solicitados a formarem os quatro triângulos e, posteriormente, determinar a quantidade de possíveis quadrados que podem ser construídos a partir deles, de modo que tenham o cateto maior sempre na vertical, conforme o diagrama, sempre registrando seus resultados em papel quadriculado. Tão logo o professor verifique que a atividade foi concluída, é interessante que cada discente compare seus resultados com os dos demais colegas. É esperado que parte da turma chegue às vinte e quatro configurações possíveis.

O professor conclui com os alunos que esta atividade requer tempo e solicita que seja repetida de outra forma, desta vez considerando os triângulos básicos apenas pelos números de 1 a 4 que os representam (figura 2). Ao final, serão representadas as seguintes composições: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312 e 4321.

Logo depois, o professor apresenta as seguintes questões: É sempre necessário descrever todas as configurações? Existe um método mais rápido de se determinar as possibilidades de construção do quadrado?

Solução: Sim, como são quatro triângulos para quatro posições distintas, temos que para a primeira há quatro opções, para a segunda há três opções, para a terceira há duas opções e para a quarta, apenas uma. Logo, teremos 4.3.2.1 = 24 possibilidades.

Nesta atividade, os alunos trabalham com permutação simples, mais especificamente com o fatorial de quatro, sem a menção de tais termos e fórmulas, somente com as ideias de seus conceitos.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Constatamos com base no levantamento bibliográfico que o *Stomachion* é o registro mais antigo conhecido de Análise Combinatória, datando do século III a.E.C. e que a matemática empregada por Arquimedes é facilmente reproduzível atualmente e concorda com as diretrizes da BNCC e do Currículo Referência de Minas Gerais para o ensino básico da disciplina e sua vertente de História da Matemática.

Por meio da pesquisa desenvolvida durante a elaboração do trabalho podemos verificar, ainda, como a História da Matemática é rica e explica o surgimento de todo o conteúdo estudado por alunos do Ensino Básico e agrega valor à obra de pesquisadores, mostrando que o conhecimento é construído através de experimentos e teorias pela humanidade.

Ademais, os estudos confirmam a desmistificação do *Stomachion* ser apenas um jogo e que pode também ser empregado como núcleo de desenvolvimento de outras áreas matemáticas, além da lúdica, verificando a polivalência das obras de Arquimedes.

REFERÊNCIAS

BIGGS, Norman Linstead. **The Roots of Combinatorics**. London: Surrey Twzo Oex, 1979. 0. 109-136.

CHUNG, Fan; GRAHAM, Ronald. **A tour of Archimedes' Stomachion**. 2007. Disponível em: http://www.math.ucsd.edu/~fan/stomach/. Acesso em: 08 set. 2020.

GONÇALVES, Rafaela Ramos Soares. **Uma Abordagem Alternativa para o Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio**. 2014. 111 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2012.

LOPES, Lidiane Schimitz; ALVES, Antônio Maurício Medeiros. **A história da matemática em sala de aula: propostas de atividades para a educação básica**. In: Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul - EREMAT, Bagé, RS, 2014, p. 2. Disponível em: <https://eventos.unipampa.edu.br/eremat/files/2014/12/MC_Lopes_01359155031.pdf>. Acesso em: 09 set. 2020.

NOEL, William; NETZ, Reviel. **Códex Arquimedes**. Rio de Janeiro: Record, 2009. 320 p.

WILSON, Nigel; NETZ, Reviel; ACERBI, Fabio. **Towards a Reconstruction of Archimedes' Stomachion**. **Sciamvs 5**, Kyoto, v. 5, n. 1, p. 67-99, dez. 2004.

VAZQUEZ, Cristiane Maria Roque; NOGUTI, Fabiane Cristina Höpner. **ANÁLISE COMBINATÓRIA: ALGUNS ASPECTOS HISTÓRICOS E UMA ABORDAGEM PEDAGÓGICA**. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Pernambuco, jul. 2004, p. 4. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acesso em: 25 jul. 2020.

CAPÍTULO 17

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALÉM DA SALA DE AULA: EM CENA A SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 03/06/2021

Fábio Vieira Abrão
Universidade Cruzeiro do Sul
São Paulo-SP
http://lattes.cnpq.br/9438187179013764

Luciano Soares Gabriel
Universidade Cruzeiro do Sul
São Paulo-SP
http://lattes.cnpq.br/5577989066695264

Norma S. Gomes Allevato
Universidade Cruzeiro do Sul
São Paulo-SP
http://lattes.cnpq.br/9614794595123496

Este texto é uma adaptação do artigo intitulado ENSINANDO GEOMETRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: A SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS ALÉM DA SALA DE AULA, publicado nos anais do XIV EPEM em outubro de 2020.

RESUMO: O objetivo do presente artigo é apresentar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como metodologia para o trabalho em sala de aula. Analisamos uma atividade realizada com alunos do 9º Ano (Ensino Fundamental) de uma escola privada do município de Cerqueira Cesar – São Paulo, cujo objeto de conhecimento matemático era a Geometria, mais especificamente o objeto de conhecimento semelhança de triângulos. Após assistirem às aulas expositivas sobre o conteúdo em questão, os alunos foram convidados a realizar uma atividade de medição de um prédio (igreja), cuja altura era inacessível. A análise de dados foi realizada na vertente das pesquisas de natureza qualitativa, na qual foram analisados os apontamentos e descobertas revelados pelos alunos em seus diálogos e registros escritos da resolução do problema proposto. Entendemos que a Resolução de Problemas como metodologia de ensino proporcionou aos alunos refletir, simular processos e realizar tentativas ao se depararem com um problema, formulando, testando e reformulando hipóteses para resolvê-lo.
PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, Resolução de Problemas, Geometria, Semelhança de Triângulos.

PROBLEM SOLVING BEYOND THE CLASSROOM: ON THE SCENE THE SIMILARITY OF TRIANGLES

ABSTRACT: The objective of this article is to present the Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving as a methodology for classroom work. We analyzed an activity performed with 9th grade students of a private school in the city of Cerqueira Cesar - São Paulo, whose object of mathematical knowledge was Geometry, more specifically the object of knowledge similarity of triangles. After attending lectures about the content in question, the students were asked to perform a measurement activity of a building

(church), whose height was inaccessible. The data analysis was performed according to qualitative research, in which the notes and discoveries revealed by the students in their dialogues and written records of the resolution of the proposed problem were analyzed. We understand that Problem Solving as a teaching methodology allowed students to reflect, simulate processes and make attempts when faced with a problem, formulating, testing and reformulating hypotheses to solve it.
KEYWORDS: Mathematics Education, Problem Solving, Geometry, Similarity of Triangles.

1 I INTRODUÇÃO

Adotar a resolução de problemas para a criação de situações didáticas no ensino de Geometria significa constituí-la como uma metodologia de ensino; uma metodologia que possui caráter desafiador, visto que procura valorizar o espírito investigativo e dinâmico, apresentando grande potencialidade para a aprendizagem geométrica. Segundo Onuchic (1999, p. 208), "quando os professores ensinam Matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver a sua própria compreensão." Assim sendo, este texto tem como objetivo apresentar uma aplicação da Resolução de Problemas como metodologia de ensino utilizada durante aulas de Matemática desenvolvidas alunos do 9º Ano, cujo conteúdo abordado foi Semelhança de Triângulos.

2 I A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos a oportunidade de aprender a aprender, particularmente na Matemática, é a utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino. Para Van de Walle (2009), resolver problemas não é apenas uma meta da aprendizagem matemática, mas um modo de construção de conhecimentos acerca de conceitos matemáticos. Em outras palavras, os estudantes não devem resolver problemas apenas para aplicar Matemática, mas para aprender Matemática a partir da resolução de problemas. Assim sendo, torna-se relevante ter clareza das diferentes concepções de problema. A que adotaremos neste trabalho é a mesma do autor, que define problema como "qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método 'correto' específico de solução" (VAN DE WALLE, 2009, p. 57).

Ao propor aos alunos a resolução de um problema (de maneira individual ou coletiva), é interessante que a temática esteja presente no cotidiano dos mesmos e que se leve em consideração a compreensão atual desses estudantes, para que a busca por respostas seja possível, desafiadora e interessante. Contudo, não podemos perder o foco de que o problema precisa estar relacionado à Matemática que os alunos devem aprender.

Quando nos propomos a aplicar a Resolução de Problemas no ensino da Matemática, não nos referimos a problemas meramente algorítmicos, em que o aluno muitas vezes pergunta “a conta é de mais ou de menos?”, ou “qual é a fórmula para resolver?”; mas, segundo Onuchic e Allevato (2009, p. 178), a “um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução”. Professores e alunos, de modo cooperativo e colaborativo, desenvolvem juntos o trabalho de aprender.

Conforme Allevato e Onuchic (2014), não há formas rígidas para colocar em prática essa metodologia, porém sugerem organizar as atividades seguindo as seguintes etapas:

1) Preparação do problema - Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento; esse problema será chamado problema gerador. No caso do presente trabalho, o problema gerador foi determinar a altura de uma construção, sem que fosse possível medi-la.

2) Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.

3) Leitura em conjunto - Formar pequenos grupos de alunos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.

Se houver dificuldade quanto à leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo com eles o problema.

Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

4) Resolução do problema - De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Ao longo de sua resolução, o aluno será conduzido para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

5) Observação e incentivo – Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. O professor coloca-se como mediador, e ajuda os alunos a pensarem, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem.

Entretanto é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver os problemas secundários que possam surgir no decurso da resolução e que lhes poderão dificultar a continuação do trabalho.

6) Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou realizadas por

diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

7) Plenária – Para esta etapa, todos os alunos são convidados a discutir as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para explicarem seus processos de resolução, defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

8) Busca do consenso – Sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, coletivamente, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

9) Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado "formalização", o professor registra na lousa uma apresentação "formal"– organizada e estruturada em linguagem matemática –, discutindo os conceitos, os princípios e explicando os procedimentos ligados ao conteúdo que pretende introduzir naquela aula, a partir do problema gerador, e que podem ser empregados na resolução daquele problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

10) Proposição e resolução de novos problemas – Novos problemas relacionados ao problema gerador e ao conteúdo aprendido naquela aula podem ser propostos aos alunos, possibilitando analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido.

Analisando as etapas sugeridas, percebemos que não se trata apenas de buscar a resolução do problema, mas de entender a finalidade de cada etapa e a utilidade do problema proposto como mola propulsora à consecução dos objetivos de aprendizagem que se pretende alcançar. É uma metodologia que valoriza a construção do conhecimento em cada uma das etapas vivenciadas e não apenas o resultado obtido para o problema.

A importância de se ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, ou seja, de considerar a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino está indicada na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), documento criado para oferecer um caminho ao ensino das escolas brasileiras, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio. Não é um currículo pronto, mas um documento de orientação aos objetivos de aprendizagem de cada etapa da formação escolar básica.

Dentre as competências gerais a serem desenvolvidas durante a Educação Básica, encontramos uma que vai ao encontro da Resolução de Problemas como metodologia de ensino:

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como **formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental.** Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais

> para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2017, p. 264, grifo nosso).

Observados os benefícios da resolução de problemas para o ensino e aprendizagem de Matemática e sua relevância como metodologia, cabe aos professores a responsabilidade de apresentar um "bom problema", que será o desencadeador para a busca de um novo saber. Conforme Onuchic e Allevato (2005, p. 219), "professores que ensinam dessa maneira empolgam-se e não querem voltar a ensinar da forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios".

3 | PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa registrada neste texto é de natureza qualitativa, pois os pesquisadores buscam apresentar e analisar os dados de modo que se dará destaque a aspectos descritivos e interpretativos percebidos durante o desenvolvimento da atividade, a fim de que permitam identificar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, utilizada na construção de conteúdos geométricos. Segundo Bicudo (2006), nesta concepção de pesquisa

> [...] privilegiam-se descrições de experiências, relatos de compreensões, respostas abertas a questionários, entrevistas com sujeitos, relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de acontecimentos etc. (BICUDO, 2006, p. 107).

Para que pudéssemos coletar informações sobre as potencialidades da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, escolhemos atuar diretamente no ambiente de investigação – uma sala de aula do 9º Ano do Ensino Fundamental com 19 alunos de uma escola particular do interior do estado de São Paulo –, envolvendo-nos com a situação por meio de uma pesquisa naturalista ou de campo, que, de acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 106) "[...] é aquela modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece [...]". A aplicação da atividade foi conduzida por um dos pesquisadores, que era professor da turma em questão.

A análise e a interpretação dos dados iniciaram-se juntamente com a coleta, e foram tomando forma à medida que eram redigidas anotações em um diário de campo. Para interpretarmos os dados relativos às atividades desenvolvidas, foram analisadas as anotações das observações, as audiogravações e as fotos dos alunos durante as aulas e, principalmente, o material escrito produzido por eles com os registros das resoluções do problema ao realizarem a atividade proposta.

Então, confrontamos os resultados obtidos por meio da análise documental desses registros com as compreensões dos autores, que dão sustentação teórica ao desenvolvimento desta pesquisa.

4 I APLICANDO A METODOLOGIA A PARTIR DE UM PROBLEMA DE GEOMETRIA

Após assistirem às aulas expositivas sobre semelhança de triângulos, os 19 alunos do 9º Ano foram convidados a se dirigirem à praça central da cidade, onde há uma igreja muito alta. Ao chegarem, o professor propôs que os estudantes, individualmente, estimassem a altura da igreja e anotassem o valor em seus cadernos. Concluídas as anotações, o docente pediu aos alunos que se reunissem em grupos de cinco e comparassem os resultados. Ao verificarem diferenças consideráveis nos valores, ficaram curiosos e empolgados para saber quem estava correto em relação à altura do edifício.

Incentivados pelo professor a utilizar conhecimentos já adquiridos sobre proporção, os alunos, após discutirem nos grupos, descartaram alguns resultados por considerá-los impossíveis. Segundo Van de Walle (2009, p. 57), a proposição de uma tarefa "deve levar em consideração a compreensão atual dos estudantes. Eles devem ter as ideias apropriadas para se envolverem e resolverem o problema e, ainda assim, considerá-lo desafiante e interessante".

Cada grupo contava com uma trena, réguas, um espelho[1], lápis, cadernos e celulares, com os quais poderiam acessar a internet para realizar pesquisas e pelos quais teriam acesso a calculadora.

Novamente o docente pediu para que os grupos tentassem elaborar uma estratégia para descobrir a altura da igreja. Ao discutirem entre eles, nenhum grupo achou função para o espelho e logo um questionamento surgiu: "É obrigatória a utilização do espelho?". Ao ouvirem um "não" do professor – para evitar qualquer tipo de amputação no pensamento criativo dos estudantes –, os grupos abandonaram o instrumento e desenvolveram outras estratégias. Antes que as apresentassem, o docente relembrou aos grupos que cada estratégia precisaria de uma justificativa, a qual seria avaliada por todos os alunos. De acordo com Van de Walle (2009), os estudantes devem compreender que a justificativa é parte integrante da resolução de um problema e que a responsabilidade para determinar se as respostas estão corretas (ou não) é deles.

5 I AS ESTRATÉGIAS APRESENTADAS PELOS GRUPOS

Os grupos 1 e 2, operando o celular, tiraram foto de um membro do grupo em frente à igreja segurando a trena com o pé, esticada a 1 metro de altura. Na própria tela do celular e

1 A intenção do professor ao fornecer um espelho aos alunos era instigá-los a desenvolver alguma estratégia que se utilizasse da reflexão dos raios de luz.

utilizando uma régua, verificaram que um metro (representado pela trena da foto – Quadro 2, a seguir) correspondia a 0,8 cm. Assim, aplicando a ideia de proporção, montaram uma regra de três e descobriram a altura do edifício, 17,5 m.

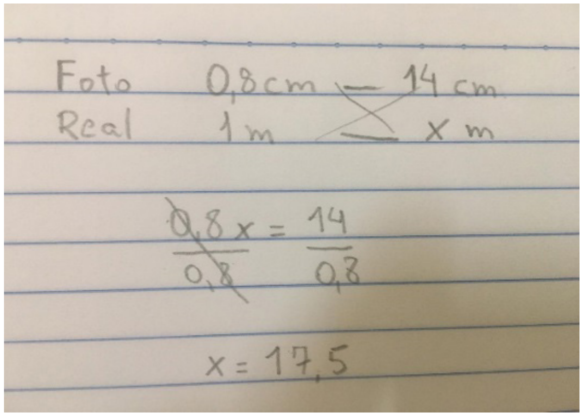


Figura 1 – Resolução Produzida pelos Alunos.

Fonte: Acervo do Autor.

A ideia foi aceita por todos, contudo um dos grupos argumentou que esse valor poderia ser um pouco diferente do real, pois a pessoa que segurava a trena não estava no mesmo plano da igreja. “Para dar certo a medição, meu colega da foto tinha que estar segurando a trena bem pertinho da igreja, mas ele ficou muito na frente”, afirmou um dos adolescentes.

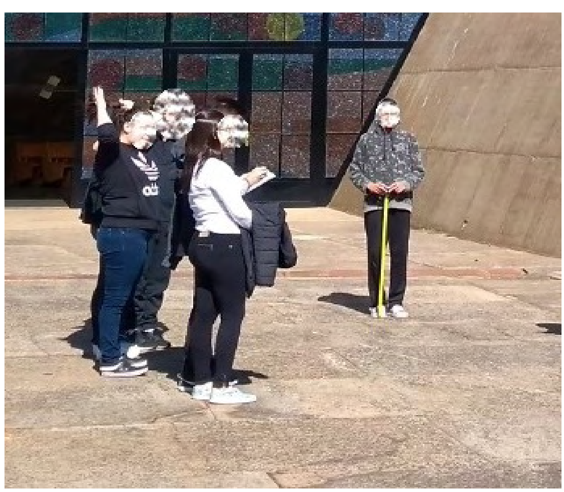


Figura 2: Aluno com a trena na marca de 1m em frente à igreja.

Fonte: Acervo do Autor.

O grupo 3 cogitou pedir informação às pessoas que decoram a cidade na época de Natal para saber quantos metros de fio com luzes são utilizados para unir, mesmo de modo não perpendicular, o topo da igreja ao chão. Os integrantes do grupo pensaram, então, em formar um triângulo retângulo no qual o comprimento do fio seria a hipotenusa; a distância do ponto em que o fio estava fixado ao chão até a porta da igreja seria um cateto; e a altura da igreja seria o outro cateto – de comprimento desconhecido, correspondente à medida que estavam tentando descobrir/calcular. Aplicando o Teorema de Pitágoras, descobririam essa medida, a altura da igreja.

Embora tenham convencido os demais alunos sobre a correção de sua proposta, o grupo descartou a possibilidade, pois ela não atenderia à condição de que a resposta precisava ser estabelecida durante aquela aula.

O grupo 4 foi o primeiro a utilizar a ideia de semelhança de triângulos. Os estudantes tentaram relacionar o problema com uma atividade anteriormente realizada em sala, na qual tinham de descobrir a altura de uma árvore levando em consideração o tamanho de sua sombra, o tamanho de uma pessoa e o tamanho da sombra da pessoa. Mas ao cogitarem medir a comprimento da sombra da igreja, descartaram a possibilidade, pois ela adentrava as casas vizinhas, o que impossibilitava sua medição.

Os outros dois grupos, embora afirmando ter compreendido as explicações dos colegas, não conseguiram elaborar nenhuma estratégia para a resolução do problema.

A aula terminou com a entrega das folhas de caderno contendo as estratégias para as possíveis resoluções e solução do problema.

No dia seguinte à experiência realizada na praça, o professor, na sala de aula, com as produções dos estudantes scaneadas e projetadas na lousa, recapitulou as ideias de cada grupo, organizando uma síntese dos conhecimentos construídos e reconstruídos ao longo da atividade – capacidade de estimativa de valores, proporção direta e inversa, casos de semelhança de triângulos e teorema de Pitágoras. Segundo Onuchic e Allevato (2009), é preciso haver o momento de formalizar, utilizando linguagem matemática organizada e estruturada, conceitos e procedimentos construídos através da resolução de problemas, destacando as diferentes técnicas utilizadas.

Como apenas os grupos 1 e 2 haviam chegado a uma solução numérica para o problema, mas utilizando a mesma estratégia, o docente propôs uma nova estratégia, agora com a utilização do espelho. Após a explicação do professor, novamente os estudantes foram convidados a dirigirem-se à praça. Ao chegarem, cada grupo recebeu uma folha com o esquema a seguir:

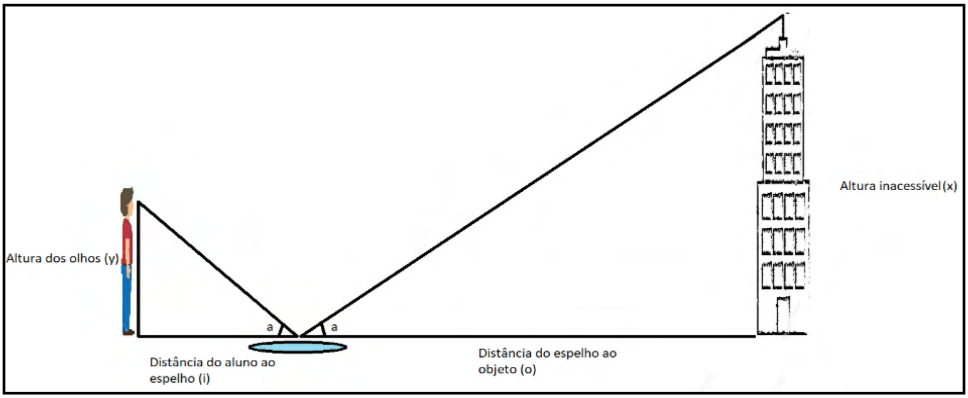


Figura 3: Esquema gráfico da construção dos triângulos para a medida da altura da construção.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Com a trena, o espelho e o esquema em mãos, os adolescentes mostraram-se empolgadíssimos para replicar a ilustração e encontrar a altura da igreja. Observando a facilidade dos grupos em encontrar a resposta, o professor pediu para que um dos alunos explicasse, em voz alta, para que todos escutassem, o processo pelo qual chegaram ao resultado. “Sabemos que os lados de triângulos semelhantes são proporcionais, assim montamos uma regrinha de três e achamos a altura da igreja”, explicou o aluno.

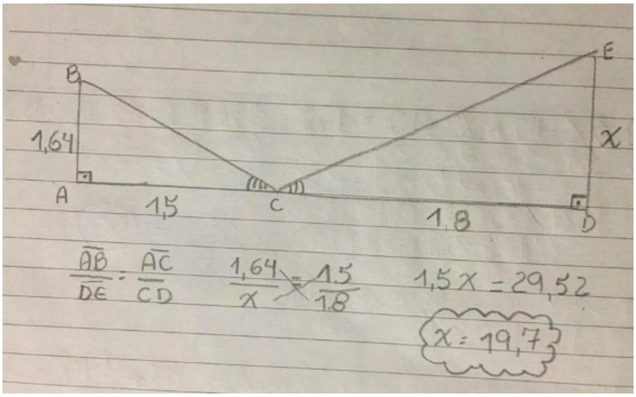


Figura 4 – Resolução Produzida pelos Alunos.

Fonte: Acervo do Autor.

Ao perguntar aos alunos se estavam de acordo com a resposta do colega, alguns disseram que não, por não terem a certeza de que os triângulos eram semelhantes. Essa incerteza fez com que todos repensassem a estratégia utilizada e, depois de discutirem novamente, concordaram que precisariam provar que os triângulos eram realmente semelhantes, antes de trabalharem com a proporcionalidade dos lados.

Depois de algumas medições com a trena, os adolescentes perceberam a impossibilidade de provar a semelhança entre os triângulos com os dados que possuíam (altura do observador, distância entre o observador e o espelho, distância do espelho até a porta da igreja e os ângulos retos).

Figura 5: Alunos realizando medidas com a trena.

Fonte: Autoria própria.

Para instigá-los a buscarem novos caminhos, o professor questionou sobre a possibilidade de descobrirem a medida de mais um ângulo de cada triângulo. Diante da indagação, um dos alunos afirmou que o único ângulo desconhecido do triângulo maior que poderiam medir seria aquele que estava “saindo do espelho”, pois o outro estava a uma altura inatingível.

Diante da afirmação do aluno, o docente propôs que pesquisassem na internet, fazendo uso do celular, sobre “ângulos que saíam do espelho”, pois, de acordo com Van de Walle (2009), o professor pode oferecer sugestões baseadas nas ideias dos estudantes.

Minutos depois, os grupos, quase simultaneamente, concluíram que os triângulos com os quais trabalhavam eram semelhantes pelo caso Ângulo Ângulo (AA), visto que o ângulo de incidência $\hat{i}$ era congruente ao ângulo de reflexão $\hat{r}$ – propriedade descoberta (Figura 6, a seguir) durante a pesquisa realizada. Considerando um raio de luz incidindo sobre uma superfície, tem-se o seguinte:

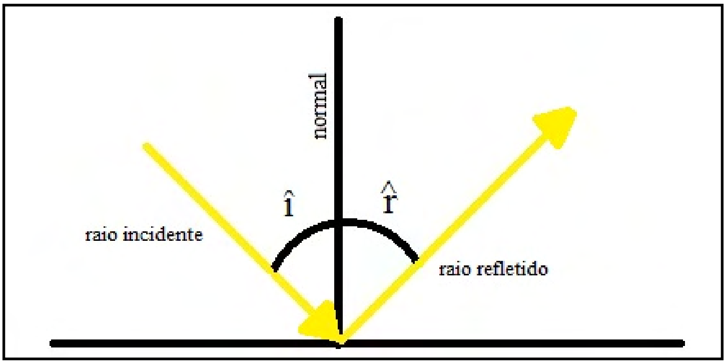


Figura 6: Ilustração da Propriedade Física da Reflexão.

Fonte: Pietrocola et al. (p. 344, 2015).

Então, trabalhando com as razões entre os lados dos triângulos semelhantes, os adolescentes chegaram à solução do problema, a mesma apresentada na Figura 4, mas, agora, com a certeza de que os triângulos eram semelhantes. Ao compararem as respostas entre os grupos e, também, com as respostas encontradas na aula anterior pelos grupos que trabalharam com proporção na fotografia, os alunos verificaram que os valores eram parecidos. A altura da igreja é de 19 metros e as respostas dos alunos variaram entre 17,5 metros e 19,5 metros.

No dia seguinte, o professor de Matemática novamente organizou a estratégia utilizada pelos grupos, apresentando-a na lousa, mas com o objetivo de utilizar os casos de semelhança de triângulos para demonstrar que, quando duas retas transversais cortam um feixe de retas paralelas, as medidas dos segmentos delimitados nas transversais são proporcionais – introduzindo, assim, o Teorema de Tales.

Vale ressaltar que, mesmo não tendo programado, o docente precisou adentrar o conteúdo de Ciências/Física e explicar as leis e os tipos de reflexão luminosas, pois, pelo fato de ainda não os terem estudado, os alunos mostraram-se curiosos e questionadores em relação a essas propriedades.

6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Analisando os apontamentos e descobertas revelados pelos alunos em seus diálogos e registros, entendemos que a Resolução de Problemas como metodologia de ensino proporcionou-lhes oportunidade para refletir, simular processos e realizar tentativas ao se depararem com um problema, formulando, testando e reformulando hipóteses para resolvê-lo. Também oportunizou a elaboração de justificativas para validarem seus raciocínios, compartilhando diferentes estratégias de resolução de um problema. Percebemos, ainda, que a troca de experiências proporcionada pelo trabalho em grupos auxiliou os adolescentes a desenvolverem atitudes de colaboração mútua, socialização e interação, aumentando a autoconfiança, a autonomia e fortalecendo o pensamento crítico de cada membro do grupo. Finalmente, e certamente relevante, ratificando o seu mais destacado princípio, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas constituiu-se como ambiente em que os estudantes construíram conhecimento novo, aprendendo conteúdos matemáticos de forma significativa, ativa, participativa e autônoma, a partir do problema gerador proposto.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs). **Resolução de problemas:** teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a Abordagem Fenomenológica. In: BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p.101-114.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: documento preliminar, terceira versão. Brasília: MEC, 2017.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2005. p. 213 - 231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Formação de Professores – Mudanças Urgentes na Licenciatura em Matemática. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Org). **Educação Matemática no Ensino Superior:** pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009, 169-187.

PIETROCOLA, M. *et al*. **Física em Contextos**: Eletrecidade e Magnetismo, Ondas Eletromagnéticas, Radiação e Matéria. 2. ed. São Paulo: FTD, 2015.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

CAPÍTULO 18

APPROXIMATION OF A SYSTEM OF A NON-NEWTONIAN FLUID BY A SYSTEM OF CAUCHY-KOWALESKA TYPE

Data de aceite: 01/09/2021

Geraldo Mendes de Araujo
Departamento de Matemática, UFPA
Belém - Pa - Brasil
http://lattes.cnpq.br/7240238904153392

Elizardo Fabricio Lima Lucena
Faculdade de Matemática, UFPA
Bragança - Pa - Brasil
http://lattes.cnpq.br/0726671417445350

Michel Melo Arnaud
Instituto de Ciências sociais aplicadas, UNIFESSPA
Rondon do Pará - Pa - Brasil
http://lattes.cnpq.br/2305615345496836

ABSTRACT: In this paper we investigate a problem for a model of a non-newtonian fluid. The problem is considered in a bounded domain of $\mathbb{R}^d$ with Dirichlet boundary conditions. The operator stress tensor is given by $\tau(e(u)) = [(\nu + \nu_0 M(|e(u)|^2))e(u)]$. We proved existence of weak solutions when $d \leq 4$ by using the method of approximations by a system of Cauchy-Kowaleska type. Uniqueness and periodicity of solutions are also considered. *2010 Mathematics Subject Classification*: 35Q35, 76A05, 76DXX.
KEYWORDS: Cauchy-Kowaleska, quasi-Newtonian, Galerkin.

APROXIMAÇÕES PARA UM SISTEMA DE UM FLUIDO NÃO NEWTONIANO POR UM SISTEMA DO TIPO CAUCHY-KOWALESKA

RESUMO: Neste artigo investigamos um problema para uma modelagem de um fluido não newtoniano. O problema é considerado em um domínio limitado do espaço euclidiano d-dimensional com condições de Dirichlet na fronteira. Provamos existência de soluções fracas quando d não supera 4 utilizando o método de aproximações por um sistema do tipo Cachy-Kowaleska. Unicidade e periodicidade de soluções também são consideradas.
PALAVRAS-CHAVE: Cauchy-kowaleska, quasi-newtonian, galerkin.

1 I INTRODUCTION

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^d$ with smooth boundary $\partial\Omega$, and let $T > 0$. We denote by Q_T the time space cylinder $I\times\Omega$, with lateral boundary $\Sigma = I \times \partial\Omega$, where $I = (0,T)$ is a time interval. The unsteady flows of incompressible fluids in a boundary domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d > 1$ is described by the system of equations

$$
\left|\begin{array}{rcll}
\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}-\nabla\cdot\tau(e(u))+\rho(u\cdot\nabla)\,u & = & -\nabla p+\rho f & \text{in } Q_T, \\
\nabla\cdot u & = & 0 & \text{in } Q_T, \\
u & = & 0 & \text{on } \Sigma_T, \\
u(0) & = & u_0 & \text{in } \Omega,
\end{array}\right. \tag{1.1}
$$

where $u=(u_1,u_2,...,u_d)$ is the velocity, p represents the pressure, ρ is a positive constant determining the density of a material, $f=(f_1,f_2,...,f_d)$ stands for the given external body forces, $\tau:\mathbb{R}^{d^2}_{sym}\to\mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ denotes the extra stress tensor, $e=e(u):\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ denotes the symmetric part of the velocity gradient, that is,

$$e(u)=\frac{1}{2}\left[\nabla u+(\nabla u)^T\right], \tag{1.2}$$

whose components are defined as in [7] by

$$2e_{ij}(u)=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\qquad i,j=1,2,...,d \tag{1.3}$$

and$\mathbb{R}^{d^2}_{sym}$ represents the set of all symmetric $d\times d$ matrices, that is,

$$\mathbb{R}^{d^2}_{sym}=\{D\in\mathbb{R}^{d^2};D_{ij}=D_{ji},\ i,j=1,2,...,d\}.$$

Note for example, that when $\tau(e(u))$ is of the form

$$\tau(e(u))=\mu_0(1+|e(u)|^{p-2})e(u), \tag{1.4}$$

with p = 2, the problem (1.1) turns into the Navier-Stokes system, which is a model for Newtonian fluids. In the expression (1.4), $|e(u)|$ denotes the usual Euclidean matrix-norm. We observe that (1.4) can be write in the form

$$\tau(e(u))=\mu_0M\left(|e(u)|^2\right)e(u), \tag{1.5}$$

where $M:\mathbb{R}^+_0\to\mathbb{R}^+_0, M\in C^0(0,\infty)$ is the generalized viscosity function.

Fluids constituted by (1.5), with $p\neq 2$, are sometimes named fluids with shear-dependent viscosity. Models belonging to this class of non-Newtonian fluid mechanics are frequently used in several fields of chemistry, glaciology, biology and geology, as discussed in Málek, Rajagopal, Růžička [8].

The mathematical analysis of the Problem (1.1) when $\tau(e(u))$ = $\nu e(u)$ was done first time by Leray ([10]). After this, it was investigated in general case by Ladyzhenskaya in 1963, where she proposed, among others, to study the system (1.1) with (1.4) and p = 4. Combining monotone operator theory and compactness arguments, she proved the existence of weak solution to model (1.1), if $p\geq 1+\dfrac{2d}{d+2}$ and their uniqueness if$p\geq\dfrac{d+2}{2}$.

More results are known about the Problem (1.1) obtained in a series of papers, include Málek, Rajagopal and Růžička [8], Málek, Nečas and Růžička [6], Frehse and Málek [2], Málek, Nečas, Rokyta and Růžička [7] and among other mathematicians.

The problem that we study in this work consists investigate following mixed problem: let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^d$ with smooth boundary $\partial\Omega$, and let $T > 0$. We denote by Q_T the time space cylinder $I \times \Omega$, with lateral boundary $\Sigma = I \times \partial\Omega$, where $I = (0,T)$ is a time interval. We find $u : Q_T \to \mathbb{R}^d$ and $p : Q_T \to \mathbb{R}$ solving the following system of equations

$$\left|\begin{array}{rcl} u' - \nabla\cdot[(\nu+\nu_0 M(|e(u)|^2))e(u)] + (u.\nabla)u + \nabla p &=& f \text{ in } Q_T, \\ \nabla\cdot u &=& 0 \text{ in } Q_T, \\ u &=& 0 \text{ on } \Sigma_T, \\ u(0) &=& u_0 \text{ in } \Omega, \end{array}\right. \tag{1.6}$$

where the extra stress tensor is given by $\tau(e(u)) = (\nu+\nu_0 M(|e(u)|^2))e(u)$, $e(u)$ as in (1.2)-(1.3), v_0 and v_1 are positives constants. Let us consider $M : (0,\infty) \to (0,\infty)$ satisfying the following hypothesis

$$M \in C^1(0,\infty), \quad M > M_0 > 0, \quad M' > 0, \tag{1.7}$$

$$c_1|e(u)|^2 \le M(|e(u)|^2) \le c_2|e(u)|^2, \tag{1.8}$$

where M_0, c_1 and c_2 are positive constants. This paper is devoted to analyze the existence of weak solutions to system (1.6) by approximating it by a system of Cauchy-Kowaleska type as in Lion ([5]). The method consists in considering the following system of Cauchy-Kowaleska type

$$\left|\begin{array}{ll} u_\epsilon' - \nabla\cdot\tau\left(e(u_\epsilon)\right) + (u_\epsilon.\nabla)u_\epsilon + \frac{1}{2}(\nabla\cdot u_\epsilon)u_\epsilon + \nabla p_\epsilon = f & \text{in } Q_T, \\ \epsilon p_\epsilon' + \nabla\cdot u_\epsilon = 0 & \text{in } Q_T, \\ u_\epsilon = 0 & \text{on } \Sigma_T, \\ u_\epsilon(0) = u_{\epsilon 0} & \text{in } \Omega, \\ p_\epsilon(0) = p_{\epsilon 0} & \text{in } L^2(\Omega). \end{array}\right. \tag{1.9}$$

Employing the method of Faedo-Galerking, we proved that (1.9) has a weak solution $\{u_\epsilon, p_\epsilon\}$, for each $\epsilon > 0$, which convergences as $\epsilon \to 0$ to a weak solution to the problem (1.6). Lions (see [5]) studied the approximation by Cauchy-Kowaleska system for the Navier-Stokes system, when the viscosity is constant. After, Arau´jo, Menezes and Gu´zman ([3]) analyzed the system (1.6) with $\nabla\cdot\tau(e(u)) = (\nu_0+\nu_1\|u(t)\|^2)\Delta u.$. This paper is devoted to study the case

$$\tau(e(u)) = (\nu + \nu_0 M(|e(u)|^2))e(u), \tag{1.10}$$

that is, a extress tensor model for a non-Newtonian fluid as proposed by Ladyzhenskaya ([4]).

2 I NOTATION AND MAIN RESULTS

In order to formulate problem (1.6) we need some notations about Sobolev spaces. We use standard notation of $L^p(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$ and $C^p(\Omega)$ for functions that are defined on Ω and range in $\mathbb{R}$, and the notation $\mathbf{L}^p(\Omega)$, $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$ and $\mathbf{C}^p(\Omega)$ for functions that range in $\mathbb{R}^d$. We also work with the spaces $L^p(I;H^m(\Omega))$ or $L^p(Q_T)$. To complete this recall on functional spaces, see for instance, *Lions* [5]. By $\langle .,. \rangle$ we will represent the duality pairing between X and X', X' being the topological dual of the space X.

Remark 1 *$\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ and $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ are Hilbert's spaces. We note that $\boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{L}^2(\Omega) \hookrightarrow \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ with embeddings dense and compact.*

We introduce the following bilinear and the trilinear forms. As well as the convention of summation of indices, that is, $\alpha_i\beta_j$ instead of X $\sum_{i,j=1}^{d} \alpha_i\beta_j$.

$$a(u,v) = \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)\,dx = ((u,v)) \quad \forall\, u,v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{2.11}$$

$$b(u,v,w) = \int_\Omega u_i(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)w_j(x)\,dx \qquad \forall\, u,v,w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{2.12}$$

$$b_1(u,v,w) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_i(x)(\nabla\cdot v(x))w_i(x)\,dx \quad \forall\, u,v,w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{2.13}$$

$$\tilde{b}(u,v,w) = b(u,v,w) + b_1(u,v,w) \qquad \forall\, u,v,w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{2.14}$$

We also introduce the notations

$$Au = -\Delta u, \quad Bu = (u\cdot\nabla)u, \quad B_1 u = \frac{1}{2}(\nabla\cdot u)u, \quad \tilde{B}u = Bu + B_1 u \quad \forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega),$$

and

$$\mathcal{K}u = -\nabla\cdot M(|e(u)|^2)e(u) \quad \forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{2.15}$$

According this, we have

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v) \qquad \forall u, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{2.16}$$

$$\langle Bu, v\rangle = b(u,u,v) \qquad \forall u, v, w \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{2.17}$$

$$\langle \mathcal{K}u, v\rangle = \int_\Omega M(|e(u)|^2) e_{ij}(u) e_{ij}(v) dx \quad \forall u, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{2.18}$$

Remark 2 *We observe that* $M > 0$ *imply for all* $u_1, u_2 \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$ *that*

$$\langle \mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2, u_1 - u_2\rangle$$

$$= \int_\Omega \left[M(|e(u_1)|^2) e_{ij}(u_1) - M(|e(u_2)|^2) e_{ij}(u_2)\right] \left[e_{ij}(u_1) - e_{ij}(u_2)\right] dx \geq 0.$$

Results $\mathcal{K} : \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) \to \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega)$ *is monotonous.*

Remark 3 *We note that* $\tilde{b}(u,u,u) = 0,\ \forall u \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. *In fact,*

$$b(u,v,v) = \int_\Omega u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i dx = -\int_\Omega v_i^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx - \int_\Omega v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} u_j dx \quad \forall u, v \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$$

In other words, $b(u,v,v) = -b_1(v,u,v) \quad \forall u, v \in \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. *It follows that*

$$\tilde{b}(u,u,u) = b(u,u,u) + b_1(u,u,u) = -b_1(u,u,u) + b_1(u,u,u) = 0$$

Definition 1 *Let* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *and* $f \in L^{4/3}(I, \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$. *A weak solution to (1.6) is a function u, such that*

$$u \in L^4(I; \boldsymbol{H}_0^1\Omega) \cap L^\infty(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)),$$

satisfying the following identity

$$\left| \begin{array}{l} (u'(t), v) + \nu a(u(t), v) + \nu_0 \langle \mathcal{K}u(t), v\rangle + \langle Bu(t), v\rangle = \langle f(t), v\rangle, \\ \nabla \cdot u(0) = u_0, \\ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.19}$$

Definition 2 *Let* $u_{\epsilon 0} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega),\ p_{\epsilon 0} \in L^2(\Omega)$ *and* $f \in L^{4/3}(I, \boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$. *A weak solution to (1.9) is a pair of functions* u_ϵ, p_ϵ, *such that*

$$u_\epsilon \in L^4(I; \boldsymbol{H}_0^1\Omega) \cap L^\infty(I; \boldsymbol{L}^2(\Omega)),$$

$$p_\epsilon \in L^\infty(I; L^2(\Omega)),$$

satisfying the following identity

$$\left|\begin{array}{l}(u'_\epsilon(t),v)+\nu a(u_\epsilon(t),v)+\nu_0\langle\mathcal{K}u_\epsilon(t),v\rangle+\langle\tilde{B}u_\epsilon(t),v\rangle+(\nabla p_\epsilon(t),v)\\=\langle f(t),v\rangle,\\\epsilon(p'_\epsilon(t),q)+(\nabla\cdot u_\epsilon(t),q)=0,\\u_\epsilon(0)=u_{\epsilon0},\\p_\epsilon(0)=p_{\epsilon0},\\\forall v\in\mathcal{D}(\Omega)\text{ and }\forall q\in L^2(\Omega).\end{array}\right.\tag{2.20}$$

Lemma 1 *(Korn's Inequality) Let* $1 < p < \infty$*. Then, there exists a constant* $K_p = K_p(\Omega)$*, such that the inequality*

$$K_p||v||_{W^{1,p}(\Omega)}\leq||e(v)||_{L^p(\Omega)}\tag{2.21}$$

is fulfilled for all v satisfying either $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$*, where* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *is open and bounded with* $\partial\Omega\subset C^1$*.*

Proof. See [9]

Lemma 2 *(Vitali) Let* Ω *be a bounded domain in* $\mathbb{R}^n$ *and* $f^m:\Omega\to\mathbb{R}$ *integrable for every* $m\in\mathbb{N}$*. Assume that*

1. $\lim\limits_{m\to\infty}f^m(x)$ *exists and is finite for almost all* $x\in\Omega$*;*
2. *for every* $\varepsilon > 0$ *there exists* $\delta > 0$ *such that*

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\int_H|f^m(x)|\,dx<\varepsilon,\quad\forall H\in\Omega,\ |H|<\delta$$

then

$$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega f^m(x)dx=\int_\Omega\lim_{m\to\infty}f^m(x)dx.$$

Proof. See [1]

Lemma 3 *Consider* $d\geq 3$ *and* $s,r\in\mathbb{R}$*, with* $s > 2$*,* $r > d$*, verifying* $\frac{2}{s}+\frac{d}{r}=1$*. If* $u\in\boldsymbol{L}^r(\Omega)$ *then,*

$$|b(u,v,w)|\leq c\|u\|_{L^r(\Omega)}\|v\||w|^{2/s}\|w\|^{d/r}$$

$\forall v,w\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$. *Where* $c\geq 0$ *is a constant independent of u,v and w.*

Proof. See [5].

Remark 4 *We note that is possible to obtain, after appropriate modifification of a proof due for Lions [5], that lemma 3 holds to* $b_1(u,v,w)$ $\forall u\in\boldsymbol{L}^r(\Omega)$ *and* $\forall v,w\in\boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$*.*

Theorem 2.1 *If* $d\leq 4$*,* $u_0\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ *and* $f\in L^{4/3}(I;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$ *then, there exists a function* $u:Q_T\to\mathbb{R}$*, solution to Problem (1.6) in the sense of definition 1.*

Theorem 2.2 *(Periodic Solutions) Under the assumptions of the Theorem 2.1 there exists a function* $u : Q_T \to \mathbb{R}$ *, solution to problem (1.6) in the sense of definition 1 such that* $u(0) = u(T)$.

Theorem 2.3 *If* $d \leq 4$, $u_{\epsilon 0}, p_{\epsilon 0} \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ *and* $f \in L^{4/3}(I;\boldsymbol{H}^{-1}(\Omega))$ *then, for each* $\epsilon > 0$, *there exists a weak solution* $\{u_\epsilon, p_\epsilon\}$, *solution to Problem (1.9) in the sense of definition 2. Moreover, if* $d \leq 3$ *then the solution* $\{u_\epsilon, p_\epsilon\}$ *is unique.*

3 I PROOFS OF THE RESULTS

Proof of Theorem 2.3.

We employ the method of Faedo-Galerkin. Let $\{\varphi_\nu, \lambda_\nu\}$ and $\{q_\nu, \overline{\lambda_\nu}\}, \nu \in \mathbb{N}$ be the solution to the espectral problem

$$\left| \begin{array}{ll} (\varphi, v) = \lambda(\varphi, v) & \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \\ (q, \overline{v}) = \overline{\lambda}(q, \overline{v}) & \forall \overline{v} \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{3.22}$$

Consider $V_m = [\varphi_1, ..., \varphi_m] \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)(\Omega)$ the subspace generated by $\{\varphi_1,...,\varphi_m\}$ and $W_m = [q_1,...,q_m] \subset L^2(\Omega)$ the subspace generated by $\{q_1,...,q_m\}$. Let us also consider the pair $\{u_m,p_m\}$, such that

$$u_{\epsilon m}(x,t) = \sum_{r=1}^{m} g_{r\epsilon m}(t)\varphi_r(x) \quad \text{and} \quad q_{\epsilon m}(x,t) = \sum_{r=1}^{m} h_{r\epsilon m}(t) q_r(x), \tag{3.23}$$

solution of the approximate problem

$$\left| \begin{array}{ll} (u'_{\epsilon m}(t), \varphi_r) + \nu(Au_{\epsilon m}(t), \varphi_r) + \nu_0(\mathcal{K}u_{\epsilon m}(t), \varphi_r) & \\ +\langle \tilde{B}u_{\epsilon m}(t), \varphi_r\rangle + (\nabla p_{\epsilon m}, \varphi_r) = (f(t), \varphi_r) & r = 1, ..., m, \\ \epsilon(p'_{\epsilon m}(t), q_r) + (\nabla \cdot u_{\epsilon m}(t), q_r) = 0 & r = 1, ..., m, \\ u_{\epsilon m}(0) = u_{\epsilon 0 m}, \quad u_{\epsilon 0 m} \to u_{\epsilon 0}, \quad \text{strong in} \quad \mathbf{L}^2(\Omega), & \\ p_{\epsilon m}(0) = p_{\epsilon 0 m}, \quad p_{\epsilon 0 m} \to p_{\epsilon 0}, \quad \text{strong in} \quad L^2(\Omega). & \end{array} \right. \tag{3.24}$$

The system of ordinary differential equation (3.24) has a local solution on a interval $[0,t_m[$, $0 < t_m < T$. The first estimate permits us to extend this solution to the whole interval $[0,T]$.

FIRST ESTIMATE

We sometimes omit parameter *t*. Multiplying both sides of $(3.24)_1$ by $g_{r\epsilon m}$ and $(3.24)_2$

by $h_{r\epsilon m}$, next adding from $r = 1$ to $r = m$, we obtain

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\epsilon m}(t)|^2 + \nu\|u_{\epsilon m}(t)\|^2 + \nu_0\int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m}(t))|)^2|e_{ij}(u_{\epsilon m}(t))|^2dx \\ -(p_{\epsilon m}(t), \nabla\cdot u_{\epsilon m}(t)) \leq \|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}\|u_{\epsilon m}(t)\|,\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\epsilon\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p_{\epsilon m}(t)|^2 + (\nabla\cdot u_{\epsilon m}(t), p_{\epsilon m}(t)) = 0, \tag{3.26}$$

because $\tilde{b}(u,u,u) = 0$ (see remark 3). Now using Young's inequality we obtain from (3.25) that

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{\epsilon m}(t)|^2 + \nu_2\|u_{\epsilon m}(t)\|^4 - (p_{\epsilon m}(t), \nabla\cdot u_{\epsilon m}(t)) \\ \leq \frac{\nu_2}{2}\|u_{\epsilon m}(t)\|^4 + c_{\nu_2}\|f(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^{4/3},\end{aligned} \tag{3.27}$$

Because, from (2.21) (Korn's inequality) and (1.8) we can get

$$\nu_0\int_\Omega M(|e(u_{\epsilon m}(t))|)^2|e_{ij}(u_{\epsilon m}(t))|^2dx \geq \nu_0c_1\|e(u_{\epsilon m})\|_{L^4(\Omega)}^4 \geq \nu_2\|u_{\epsilon m}\|^4,$$

Adding inequalities (3.26) and (3.27) and integrating from 0 to t, with $0 \leq t \leq T$, we conclude

$$\begin{aligned}(|u_{\epsilon m}(t)|^2 + \epsilon|p_{\epsilon m}(t)|^2) + \nu_2\int_0^t \|u_m(s)\|^4ds \\ \leq C + C\int_0^t \left(|u_{\epsilon m}(s)|^2 + |p_{\epsilon m}(s)|^2\right)ds.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Where C is a positive constant independent of m and t. By using Gronwall's inequality, we can write

$$(u_{\epsilon m}) \text{ is bounded in } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{3.29}$$
$$(u_{\epsilon m}) \text{ is bounded in } L^4(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \tag{3.30}$$
$$(\sqrt{\epsilon}p_{\epsilon m}) \text{ is bounded in } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{3.31}$$

SECOND ESTIMATE

We consider $P_m : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \to V_m$ the orthogonal projections from $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ to V_m, that is

$$P_m u = \sum_{j=1}^m (u,\varphi_j)\varphi_j \qquad \forall u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

We note that $P_m^* u'_{\epsilon m} = u'_{\epsilon m}$. By the choice of the special basis (φ_ν), we obtain

$$\|P_m\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega),H_0^1(\Omega))} \leq 1 \quad \text{and} \quad \|P_m^*\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega),H^{-1}(\Omega))} \leq 1. \tag{3.32}$$

We will sometimes omit the paremeter *t*. Its follows from $(3.24)_1$, (2.16), (2.17) and (2.18)

$$u'_{\epsilon m} = -\nu P_m^* A u_{\epsilon m} - \nu_0 P_m^* \mathcal{K} u_{\epsilon m} - P_m^* \tilde{B} u_{\epsilon m} - P_m^* \nabla p_{\epsilon m} + P_m^* f. \tag{3.33}$$

We have $|\langle A u_{\epsilon m}, v\rangle| \leq \|u_{\epsilon m}\|\|v\|,\ \forall u_{\epsilon m}, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Thus, from (3.30) we can derive

$$(A u_{\epsilon m}) \text{ is bounded in } L^4(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^{4/3}(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \tag{3.34}$$

Let $u_{\epsilon m}, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. From Schwuarz's inequality and (1.8) we take

$$| < \mathcal{K} u_{\epsilon m}, v > | \leq |\langle M(|e(u_{\epsilon m})|^2) e(u_{\epsilon m}), \nabla v\rangle| \leq c_2 |e(u_{\epsilon m})|^3 \|v\|$$

$$\leq c\|u_{\epsilon m}\|^3 \|v\|.$$

Therefore, (3.30) holds

$$(\mathcal{K} u_{\epsilon m}) \text{ is bounded in } L^{4/3}(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \tag{3.35}$$

Let $u_{\epsilon m}, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Using (2.14) and Hölder's inequality we conclude

$$| < \tilde{B} u_{\epsilon m}, v > | \leq |b(u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, v)| + |b_1(u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, v)|$$

$$\leq 2\|u_{\epsilon m}\|_{L^4(\Omega)} \|u_{\epsilon m}\| \|v\|_{L^4(\Omega)} \leq c\|u_{\epsilon m}\|^2 \|v\|.$$

Thus, from (3.30) we have that

$$(B u_{\epsilon m}) \text{ is bounded in } L^2(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^{4/3}(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \tag{3.36}$$

On the other hand, let $u_{\epsilon m}, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ we can write

$$|\langle \nabla p_{\epsilon m}, v\rangle| = |\langle p_{\epsilon m}, \nabla \cdot v\rangle| \leq |p_{\epsilon m}|\|v\|$$

It follows from (3.31)

$$(\nabla p_{\epsilon m}) \text{ is bounded in } L^{4/3}(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \tag{3.37}$$

It follows from (3.34)-(3.37), (3.32) and hypotesis about *f* that

$$(u'_{\epsilon m}) \text{ is bounded in } L^{4/3}(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \tag{3.38}$$

Analogously we obtain from $(3.24)_2$

$$|(\epsilon p'_{\epsilon m}, v)| = |(\nabla \cdot u_{\epsilon m}, v)| \leq \|u_{\epsilon m}\||v|,$$

$\forall v \in L^2(\Omega)$. Thus, (3.30) implies

$$(\epsilon p'_{\epsilon m}) \text{ is bounded in } L^4(I; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(I; L^2(\Omega)). \qquad (3.39)$$

The limitations (3.29)-(3.31), (3.38), (3.39) and the Aubin-Lions Lemma implies that there exists subsequences from ($u_{\epsilon m}$) and ($p_{\epsilon m}$), still denoted by ($u_{\epsilon m}$) and ($p_{\epsilon m}$), such that

$$u_{\epsilon m} \longrightarrow u_\epsilon \text{ strong in } L^2(I; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ and a.e. } Q_T, \qquad (3.40)$$
$$u_{\epsilon m} \longrightarrow u_\epsilon \text{ weak star in } L^\infty(I; \mathbf{L}^2(\Omega)), \qquad (3.41)$$
$$u_{\epsilon m} \longrightarrow u_\epsilon \text{ weak in } L^4(I; \mathbf{H}^1_0(\Omega)), \qquad (3.42)$$
$$u'_{\epsilon m} \longrightarrow u'_\epsilon \text{ weak in } L^{4/3}(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)), \qquad (3.43)$$
$$\mathcal{K} u_{\epsilon m} \longrightarrow \chi \text{ weak in } L^{4/3}(I; \mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \qquad (3.44)$$
$$p_{\epsilon m} \longrightarrow p_\epsilon \text{ weak star in } L^\infty(I; L^2(\Omega)), \qquad (3.45)$$
$$p'_{\epsilon m} \longrightarrow p'_\epsilon \text{ weak in } L^2(I; L^2(\Omega)). \qquad (3.46)$$

Finally, we note that (3.30)and (3.38) implies $u_\epsilon \in C^0(I;\mathbf{L}^2(\Omega))$. Analagously (3.31) and (3.39) implies and $p_\epsilon \in C^0(I;L^2(\Omega))$. Thus, make sense $u_\epsilon(0) = u_{\epsilon 0}$ and $p_\epsilon(0) = p_{\epsilon 0}$.

To prove that

$$\int_0^T \tilde{b}(u_{\epsilon m}, u_{\epsilon m}, \varphi) \longrightarrow \int_0^T \tilde{b}(u_\epsilon, u_\epsilon, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I; \mathcal{D}(\Omega)), \quad (3.47)$$

we use (3.40) (see [7], pp.210). To prove that

$$\int_{Q_T} M(|e(u_{\epsilon m})|^2) e_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi) dx dt \rightarrow \int_{Q_T} M(|e(u_\epsilon)|^2) e_{ij}(u_\epsilon) e_{ij}(\varphi) dx dt, \qquad (3.48)$$

we use the fact $\nabla u_{\epsilon m} \rightarrow \nabla u_\epsilon$ a.e. in Q_T, (see [2] pp. 565-566). Therefore,

$$|\nabla u_{\epsilon m}|^2 \longrightarrow |\nabla u_\epsilon|^2 \text{ a. e. in } Q_T,$$

that is,

$$|e(u_{\epsilon m})|^2 \longrightarrow |e(u_\epsilon)|^2 \text{ a. e. in } Q_T. \qquad (3.49)$$

Since $M \in C^1(0,\infty)$ follows from (3.49)

$$M(|e(u_{\epsilon m})|^2) \longrightarrow M(|e(u_\epsilon)|^2) \text{ a.e. in } Q_T, \qquad (3.50)$$

Thus,

$$M(|e(u_{\epsilon m})|^2) e_{ij}(u_{\epsilon m}) e_{ij}(\varphi) \longrightarrow M(|e(u_\epsilon)|^2) e_{ij}(u_\epsilon) e_{ij}(\varphi) \qquad (3.51)$$

a.e. in Q_T and $\forall \varphi \in \mathcal{D}(I; \mathcal{D}(\Omega))$. Using (3.30) and (1.8) we obtain

$$\int_{Q_T} M\left(|e(u_{\epsilon m})|^2\right) e_{ij}(u_{\epsilon m})e_{ij}(\varphi)dxdt \leq C\int_{Q_T} |e(u_{\epsilon m})|^3 |e_{ij}(\varphi)|dxdt \\ \leq C\int_{Q_T} |e(u_{\epsilon m})|^3 dxdt C\int_{Q_T} |\nabla u_{\epsilon m}|^3 dxdt \leq C. \tag{3.52}$$

It follows that

$$M\left(|e(u_{\epsilon m})|^2\right) e_{ij}(u_{\epsilon m})e_{ij}(\varphi) \in L^1(Q_T). \tag{3.53}$$

Moreover, if $H \subset Q_T$ is measurable set, we have from (1.8), (3.30) and Hölder's inequality

$$\int_H M(|e(u_{\epsilon m})|^2)e_{ij}(u_{\epsilon m})e_{ij}(\varphi)dxdt \leq c\int_H |e(u_{\epsilon m})|^3|e(\varphi)|dxdt \\ \leq c\left(\int_{Q_T}|e(u_{\epsilon m})|^4 dxdt\right)^{3/4}\left(\int_H |e(\varphi)|^4 dxdt\right)^{1/4} \\ \leq c\left(\int_{Q_T}|\nabla u_{\epsilon m}|^4 dxdt\right)^{3/4}|H|^{1/4} \leq c|H|^{1/4}.$$

Therefore,

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\int_H M(|e(u_{\epsilon m})|^2)e_{ij}(u_{\epsilon m})e_{ij}(\varphi)dxdt \leq c|H|^{1/4}.$$

Assuming that $|H|$ is sufficiently small, we obtain

$$\sup_{m\in\mathbb{N}}\int_H M(|e(u_{\epsilon m})|^2)e_{ij}(u_{\epsilon m})e_{ij}(\varphi)dxdt \leq \varepsilon, \tag{3.54}$$

$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}$. Now using (3.51), (3.53), (3.54) and Vitali's lemma we can derive (3.48). Therefore, we can write $\chi = \mathcal{K}u_\epsilon$ in $L^{4/3}(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. The convergences (3.40)-(3.48) allow us to pass the limit on system (3.24), with φ_r and q_r fixed to obtain

$$u'_\epsilon + \nu A u_\epsilon + \nu_0 \mathcal{K}u_\epsilon + \tilde{B}u_\epsilon = f \quad \text{in } L^{4/3}(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)), \tag{3.55}$$

$$\epsilon p'_\epsilon + \nabla\cdot u_\epsilon = 0 \quad \text{in } L^2(I;L^2(\Omega)). \tag{3.56}$$

To prove uniqueness of solutions to the problem (1.9), let $(u_{\epsilon 1},p_{\epsilon 1})$ and $(u_{\epsilon 2},p_{\epsilon 2})$ weak solutions to Problem (1.9). Then,

$$u_{\epsilon 1}, u_{\epsilon 2} \in L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^4(I,\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \\ p_{\epsilon 1}, p_{\epsilon 2} \in L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)). \tag{3.57}$$

Consider $z = u_{\epsilon 1} - u_{\epsilon 2}$ and $q = p_{\epsilon 1} - p_{\epsilon 2}$. Then, (z,q) verifies

$$
\left|
\begin{array}{l}
z' + \nu A z + \nu_0(\mathcal{K}u_{\epsilon 1} - \mathcal{K}u_{\epsilon 2}) + (\tilde{B}u_{\epsilon 1} - \tilde{B}u_{\epsilon 2}) + \nabla q = 0, \\
\epsilon q' + \nabla \cdot z = 0, \\
z(0) = q(0) = 0.
\end{array}
\right. \tag{3.58}
$$

where the first equality is consider in $L^{4/3}(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$, and the second in $L^2(I;L^2(\Omega))$. After, we take the duality in the equations $(3.58)_1$ and $(3.58)_2$ with z and q, respectively, to obtain

$$
\left|
\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|z|^2 + \nu\|z\|^2 + \nu_0 < \mathcal{K}u_{\epsilon 1} - \mathcal{K}u_{\epsilon 2}, z > + < \tilde{B}u_{\epsilon 1} - \tilde{B}u_{\epsilon 2}, z > \\
+(\nabla q, z) = 0, \\
\epsilon \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|q|^2 + (\nabla \cdot z, q) = 0, \\
z(0) = q(0) = 0.
\end{array}
\right. \tag{3.59}
$$

We note that

$$
\langle \tilde{B}u_{\epsilon 1} - \tilde{B}u_{\epsilon 2}, z\rangle \;=\; \tilde{b}(z, u_{\epsilon 1}, z) + \tilde{b}(u_{\epsilon 2}, z, z). \tag{3.60}
$$

From the monotonicity of K we have $< \mathcal{K}u_1 - \mathcal{K}u_2, \widetilde{u} > \geq 0$. Thus, adding member to member the equalities$(3.59)_1$ and $(3.59)_2$, we obtaine

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|z|^2 + \epsilon|q|^2\right) + \nu\|z\|^2 \leq |\tilde{b}(z, u_{\epsilon 1}, z)| + |\tilde{b}(u_{\epsilon 2}, z, z)|. \tag{3.61}
$$

Because $(\nabla q, z) = -(q, \nabla \cdot z)$. Considering $d = 2$, we get $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. It follows that (see Lions [5])

$$
|u|_{L^4(\Omega)} \leq c|u|^{1/2}\|u\|^{1/2}. \tag{3.62}
$$

Thus, using (2.14), Hölder's inequality, (3.62) and Young's inequality we take

$$
|\tilde{b}(z, u_{\epsilon 1}, z)| + |\tilde{b}(u_{\epsilon 2}, z, z)| \leq |b(z, u_{\epsilon 1}, z)| + |b_1(z, u_{\epsilon 1}, z)|
$$

$$
+|b(u_{\epsilon 2}, z, z)| + |b_1(u_{\epsilon 2}, z, z)| \leq c\|z\|^2_{L^4(\Omega)}\|u_{\epsilon 1}\| + c\|u_{\epsilon 2}\|_{L^4(\Omega)}\|z\|\|z\|_{L^4(\Omega)}
$$

$$
\leq c|z|\|z\|\|u_{\epsilon 1}\| + c\|u_{\epsilon 2}\|\|z\||z|^{1/2}\|z\|^{1/2}
$$

$$
\leq \frac{\nu}{2}\|z\|^2 + c_\nu\|u_{\epsilon 1}\|^2|z|^2 + \frac{\nu}{2}\|z\|^2 + c_\nu\|u_{\epsilon 2}\|^4|z|^2.
$$

It follows from (3.61) that we can write

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|z|^2 + \epsilon|q|^2) \leq c(\|u_{\epsilon 1}\|^2 + \|u_{\epsilon 2}\|^4)(|z|^2 + \epsilon|q|^2).$$

Integrating from 0 to *t* we obtain

$$|z(t)|^2 + |q(t)|^2 \leq c\int_0^t (\|u_{\epsilon 1}(s)\|^2 + \|u_{\epsilon 2}(s)\|^4)(|z(s)|^2 + \epsilon|q(s)|^2)ds. \quad (3.63)$$

Applying Gronwall's inequality in (3.64), we deduce by using (3.30) that

$$u_{\epsilon 1}(t) = u_{\epsilon 2}(t) \quad \text{and} \quad p_{\epsilon 1}(t) = p_{\epsilon 2}(t) \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{and } d = 2.$$

Now supposing $d = 3$ we have $H_0^1 \hookrightarrow L^6(\Omega)$. Using lemma 3 with $s = 4$ and $r = 6$, remark 4 and Young's inequality we have

$$|\tilde{b}(z, u_{\epsilon 1}, z)| + |\tilde{b}(u_{\epsilon 2}, z, z)| \leq |b(z, u_{\epsilon 1}, z)| + |b_1(z, u_{\epsilon 1}, z)|$$

$$+|b(u_{\epsilon 2}, z, z)| + |b_1(u_{\epsilon 2}, z, z)| \leq c\|z\|_{L^6(\Omega)}\|u_{\epsilon 1}\||z|^{1/2}\|z\|^{1/2}$$

$$+c\|u_{\epsilon 2}\|_{L^6(\Omega)}\|z\||z|^{1/2}\|z\|^{1/2}$$

$$\leq \frac{\nu}{2}\|z\|^2 + c_\nu\|u_{\epsilon 1}\|^4|z|^2 + \frac{\nu}{2}\|z\|^2 + c_\nu\|u_{\epsilon 2}\|^4|z|^2.$$

It follows from (3.61) that

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(|z|^2 + \epsilon|q|^2) \leq c(\|u_{\epsilon 1}\|^4 + \|u_{\epsilon 2}\|^4)(|z|^2 + \epsilon|q|^2).$$

Integrating from 0 to *t* we obtain

$$|z(t)|^2 + |q(t)|^2 \leq c\int_0^t (\|u_{\epsilon 1}(s)\|^4 + \|u_{\epsilon 2}(s)\|^4)(|z(s)|^2 + \epsilon|q(s)|^2)ds. \quad (3.64)$$

Applying Gronwall's inequality in (3.64), we deduce again by using (3.30)

$$u_{\epsilon 1}(t) = u_{\epsilon 2}(t) \quad \text{and} \quad p_{\epsilon 1}(t) = p_{\epsilon 2}(t) \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{and } d = 3.$$

Theorem 2.3 has been proved.

Proof of Theorem 2.1.

By a similar argument employed in the estimates of Theorem 2.3, we obtain that when $\epsilon \to 0$

$$(u_\epsilon) \text{ is bounded in } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{3.65}$$
$$(u_\epsilon) \text{ is bounded in } L^4(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \tag{3.66}$$
$$(\sqrt{\epsilon}p_\epsilon) \text{ is bounded in } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)). \tag{3.67}$$

Now we will obtain some estimate to u_ϵ by using fractional derivates. We denote by $\hat{\psi}$ the Fourier transform of function ψ. Denoting $\tilde{u}_\epsilon$ and $\tilde{p}_\epsilon$ to extension of u_ϵ and p_ϵ respectively, by zero outside interval $[0, T]$ we obtain from the (3.24)

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}(\tilde{u}_\epsilon,\varphi_r)+\nu a(\tilde{u}_\epsilon,\varphi_r)+\nu_0\langle\mathcal{K}\tilde{u}_\epsilon,\varphi_r\rangle+\langle\tilde{B}\tilde{u}_\epsilon,\varphi_r\rangle-(\tilde{p}_\epsilon,\nabla\cdot\varphi_r)\\ =\langle\tilde{f},\varphi_r\rangle+(u_{\epsilon 0},\varphi_r)\delta_0-(u\epsilon(T),\varphi_r)\delta_T,\\ \epsilon\dfrac{d}{dt}(\tilde{p}_\epsilon,q_r)+(\nabla\cdot\tilde{u}_\epsilon,q_r)=\epsilon(p_{\epsilon 0},q_r)\delta_0-\epsilon(p_\epsilon(T),q_r)\delta_T.\end{array}\right. \tag{3.68}$$

Talking the Fourier transform in (3.68) and next adding equations of (3.68) with $\varphi_r = \tilde{u}_\epsilon$ and $q_r = \tilde{p}_\epsilon$, we derive

$$\begin{aligned}2\pi i\tau|\hat{u}_\epsilon|^2+2\pi i\tau\epsilon|\hat{p}_\epsilon|^2&=\langle\hat{f},\hat{u}_\epsilon\rangle-\nu(A\hat{u}_\epsilon,\hat{u}_\epsilon)-\nu_0(\mathcal{K}\hat{u}_\epsilon,\hat{u}_\epsilon)\\&-(\tilde{B}\hat{u}_\epsilon,\hat{u}_\epsilon)+(u_{\epsilon 0},\hat{u}_\epsilon)-(u_\epsilon(T),\hat{u}_\epsilon)e^{-2\pi i\tau T}\\&+\epsilon(p_{\epsilon 0},\hat{p}_\epsilon)-\epsilon(p_\epsilon(T),\hat{p}_\epsilon)e^{-2\pi i\tau T},\end{aligned} \tag{3.69}$$

where we denoted $\hat{\tilde{u}} = \hat{u}$ and $\hat{\delta}_t = e^{-2\pi i\tau t}$. It follows from (3.69) that

$$\begin{aligned}&|\tau||\hat{u}_\epsilon|^2+\epsilon|\tau||\hat{p}_\epsilon|^2\\&\leq c\left(\|\hat{f}\|_{H^{-1}}+\|A\hat{u}_\epsilon\|_{H^{-1}}+\|\mathcal{K}\hat{u}_\epsilon\|_{H^{-1}}+\|\tilde{B}\hat{u}_\epsilon\|_{H^{-1}}\right)\|\hat{u}_\epsilon\|\\&+(u_{\epsilon 0},\hat{u}_\epsilon)-(u_\epsilon(T),\hat{u}_\epsilon)e^{-2\pi i\tau T}+\epsilon(p_{\epsilon 0},\hat{p}_\epsilon)-\epsilon(p_\epsilon(T),\hat{p}_\epsilon)e^{-2\pi i\tau T}.\end{aligned} \tag{3.70}$$

From the hypothesis about f we have

$$\int_0^T \|f(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}ds \leq C.$$

Therefore, $\|\hat{f}\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C$. Besides, we have $|\langle Au_\epsilon, v\rangle| \leq \|u_\epsilon\|\|v\|$, $\forall u_\epsilon, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. So, (3.66) holds

$$(Au_\epsilon) \text{ is bounded in } L^4(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^1(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \tag{3.71}$$

Thus $\|A\hat{u}_\epsilon\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C$. We note that Schwarz's inequality, (1.8) implies that $\forall u_\epsilon, v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

$$|\langle\mathcal{K}u_\epsilon, v\rangle| \leq c_2|e(u_\epsilon)|^3\|v\| \leq c\|u_\epsilon\|^3\|v\|.$$

It follows from (3.66)

$$(\mathcal{K}u_\epsilon) \text{ is bounded in } L^{4/3}(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow L^1(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \qquad (3.72)$$

Thus, $\|\mathcal{K}\hat{u}_\epsilon\|_{H^{-1}} \le C$. Analagously we obtain $\|\tilde{B}\hat{u}_\epsilon\|_{H^{-1}} \le C$. It follows from (3.72)

$$|\tau||\hat{u}_\epsilon|^2 + \epsilon|\tau||\hat{p}_\epsilon|^2 \le c(\|\hat{u}_\epsilon\| + \epsilon|\hat{p}_\epsilon|). \qquad (3.73)$$

Remark 5 *Let* $\gamma \in \mathbb{R}$ *with* $0 < \gamma < \frac{1}{4}$. *Then, there exists a positive constant C, such that*

$$|\tau|^{2\gamma} \le C\frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Remark 5 and (3.73) implies that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma}|\hat{u}_\epsilon|^2 dt &\le C\int_{\mathbb{R}} \frac{1+|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}|\hat{u}_\epsilon|^2 dt \\ &\le C\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{u}_\epsilon|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}dt + C\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tau||\hat{u}_\epsilon|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}dt \qquad (3.74) \\ &\le c\int_{\mathbb{R}} \|\hat{u}_\epsilon\|^2 dt + c\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\hat{u}_\epsilon\|^2 + \epsilon|\hat{p}_\epsilon|^2}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}dt. \end{aligned}$$

From Plancherel identity we have

$$\int_{\mathbb{R}} \|\hat{u}_\epsilon\|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} \|\tilde{u}_\epsilon\|^2 dt \le c. \qquad (3.75)$$

Besides, from Hölder's inequality and (3.66) we can write

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\|\hat{u}_\epsilon\|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}dt \le \left(\int_{\mathbb{R}} \|\hat{u}_\epsilon\|^2 dt\right)^{1/2}\left[\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}\right)^2 dt\right]^{1/2} \le c. \qquad (3.76)$$

By using the same argument and (3.67) we obtain

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{p}_\epsilon|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}}dt \le c. \qquad (3.77)$$

From (3.73), (3.76) and (3.77) we conclude that

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\gamma}|\hat{u}_\epsilon|^2 dt \le c, \qquad 0 < \gamma < \frac{1}{4}. \qquad (3.78)$$

In other words,

$$|\tau|^{\gamma}\hat{u}_\epsilon \in L^2(\mathbb{R};\mathbf{L}^2(\Omega)), \qquad 0 < \gamma < \frac{1}{4}. \qquad (3.79)$$

Combining (3.66) and (3.79) we conclude that $\hat{u}_\epsilon$ is bounded in

$$\mathcal{H}\left(\mathbb{R};\mathbf{H}_0^1(\Omega),\mathbf{L}^2(\Omega)\right)=\{\hat{u}_\epsilon;\hat{u}_\epsilon\in L^2(\mathbb{R};\mathbf{H}_0^1(\Omega)),|\tau|^\gamma\hat{u}_\epsilon\in L^2(\mathbb{R};\mathbf{L}^2(\Omega))\}.$$

This implies that $\tilde{u}_\epsilon$ is bounded in $\mathcal{H}\left(\mathbb{R};\mathbf{H}_0^1(\Omega),\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$. Thus, u_ϵ is bounded in $\mathcal{H}\left(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega),\mathbf{L}^2(\Omega)\right)$. But the embedding $\mathcal{H}\left(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega),\mathbf{L}^2(\Omega)\right)\hookrightarrow L^2(I;\mathbf{L}^2(\Omega)$ is compact (see for instance Lions [5]). It follows from this and from the limitations obtained that, there is a subsequence from (u_ϵ), still denoted by (u_ϵ), such that

$$\begin{aligned}
&u_\epsilon \longrightarrow u \text{ strong in } L^2\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right) \text{ and a.e. in } Q_T,\\
&u_\epsilon \longrightarrow u \text{ weak star in } L^\infty\left(I;\mathbf{L}^2(\Omega)\right),\\
&u_\epsilon \longrightarrow u \text{ weak in } L^4\left(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)\right),\\
&\mathcal{K}u_\epsilon \longrightarrow \chi \text{ weak in } L^{4/3}\left(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\right).
\end{aligned}\tag{3.80}$$

From (3.67) we obtain $\epsilon p'_\epsilon \to 0$ in $\mathcal{D}'(Q)$. Therefore $\nabla\cdot u_\epsilon=-\epsilon p'_\epsilon\to 0$ in $D'(Q)$. Combining this and (3.80) we derive $\nabla\cdot u = 0$. Thus, the convergences above permits us to write

$$\left|\begin{aligned}
&\langle u',v\rangle+\nu a(u,v)+\nu_0\langle\chi,v\rangle+\langle Bu,v\rangle=\langle f,v\rangle\quad\forall v\in\mathcal{D}(\Omega),\\
&\nabla\cdot u=0,
\end{aligned}\right.\tag{3.81}$$

because $\nabla\cdot u=0$ implies $\tilde{b}(u,u,v)=b(u,u,v)$. Finally, we can prove that $\mathcal{K}u=\chi$ by using the same argument used in the proof of Theorem 2.1.

Proof of Theorem 2.2.

We employ the method of Faedo-Galerkin again with the basis of eigenvectors from the Stoke's operator (φ_ν). Let $V_m=[\varphi_1,\dots,\varphi_m]\subset\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ the subspace generated by $\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$. So the approximate problem to (2.19) is given by

$$\left|\begin{aligned}
&(u'_m(t),v)+\nu(Au_m(t),v)+\nu_0(\mathcal{K}u_m(t),v)\\
&+\langle Bu_m(t),v\rangle=(f(t),v)\qquad\forall v\in V,\\
&u_m(0)=u_{0m},\quad u_{0m}\to u_0,\quad\text{strong in}\quad\mathbf{L}^2(\Omega).
\end{aligned}\right.\tag{3.82}$$

We know that system (3.82) has a local solution defined on the interval $[0,T]$ and given by

$$u_m(x,t)=\sum_{r=1}^m g_{rm}(t)\varphi_r(x).\tag{3.83}$$

We first show the existence of periodic solutions to system (3.82). For this purpose, we make $v=u_m(t)$ in (3.82) to obtain, by using the same arguments used in the proof of Therem (2.3) to $\langle \mathrm{K}u_m,v\rangle$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu\|u_m(t)\|^2 + \nu_2\|u_m\|^4 \leq \|f(t)\|_{H^{-1}}\|u_m(t)\|. \tag{3.84}$$

Considering the embedding $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ and using Young' inequality we derive

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + c|u_m(t)|^2 + \nu_2\|u_m\|^4 \leq \nu_2\|u_m(t)\|^4 + c_{\nu_2}\|f(t)\|_{H^{-1}}^{4/3}. \tag{3.85}$$

That is,

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + |u_m(t)|^2 \leq c\|f(t)\|_{H^{-1}}^{4/3}. \tag{3.86}$$

Multiplying both sides of (3.86) by e^t we get

$$e^t\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + e^t|u_m(t)|^2 \leq c\|f(t)\|_{H^{-1}}^{4/3}e^t. \tag{3.87}$$

In other words,

$$\frac{d}{dt}\left(e^t|u_m(t)|^2\right) \leq c\|f(t)\|_{H^{-1}}^{4/3}e^t. \tag{3.88}$$

By integrating (3.88) on interval $[0,T]$ we obtain

$$e^T|u_m(T)|^2 \leq |u_m(0)|^2 + c\int_0^T \|f(t)\|_{H^{-1}}^{4/3}e^t dt. \tag{3.89}$$

Therefore

$$|u_m(T)|^2 \leq \theta(T)|u_m(0)|^2 + C, \tag{3.90}$$

where $\theta(T) = e^{-T}$. We have $0 < 1 - \theta(T) < 1$. Now let R be positive constant such that

$$\frac{C}{1-\theta(T)} < R^2. \tag{3.91}$$

Choosing $u_m(0) \in V_m$ such that $|u_m(0)| < R$ we obtain from (3.90) and (3.91)

$$|u_m(T)|^2 < \theta(T)R^2 + R^2\left(1-\theta(T)\right) = R^2.$$

Let $\sigma : \mathcal{B}_R(0) \cap V_m \to \mathcal{B}_R(0) \cap V_m,$ be a nonlinear mapping such that $\sigma\left(u_m(0)\right) = u_m(T)$ and $\mathcal{B}_R(0) = \{u \in L^2(\Omega); |u| < R\}$. We can establish the continuous dependence of the solution with respect initial data. Therefore, from the Brouwer Fixed-Point Theorem there is $u_{0m} \in V_m$ such that $\sigma(u_{0m}) = u_0 m$. In other words, $u_m(0) = u_m(T)$.

Therefore, the system (3.82) has a periodic solution u_m. By using the initial data $u_m(0)$ in (3.82) we can obtain as in proof of Theorem 2.3 that there is subsequence of u_m, still denoted by u_m such that

$$u_m \to u \text{ weak star in } L^\infty(I;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{3.92}$$

$$u_m \to u \text{ weak in } L^4(I;\mathbf{H}_0^1(\Omega)), \tag{3.93}$$

$$u_m' \to u' \text{ weak in } L^{4/3}(I;\mathbf{H}^{-1}(\Omega)). \tag{3.94}$$

We established in Theorem 2.1 that *u* is a solution to problem (1.6) in the sense of the definition (1). We will show now that *u*(0) = *u*(*T*). In fact, from (3.93) and (3.94)

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\,(u_m(s),v)\,\theta(s)ds \to \int_0^T \frac{d}{dt}\,(u(s),v)\,\theta(s)ds, \tag{3.95}$$

$\forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ and $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, with $\theta(T)=0$. In other words,

$$(u_m(0),v) \to (u(0),v) \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{3.96}$$

By using the same argument with $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ and *θ*(0) = 0 we derive

$$(u_m(T),v) \to (u(T),v) \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{3.97}$$

It follows from (3.96) and (3.97) that *u*(0) = *u*(*T*). This concludes the proof of the Theorem 2.2.

REFERENCES

1. *Dunford, N and Schwartz, J. (1958) Linear Operators*, Vol. 1-3. Interscience, New York.

2. Frehse J. and J. Málek, *Problems duo to the no-slip boundary in incompressible fluids dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003 .

3. G. M. de Arau´jo, S. B. de Menezes and R. B. Gu´zman, *Approximation of the Navier-Stokes System With Variable Viscosity By a System of Cauchy-Kowaleska Type,* Mathematical Methods in The Applied Sciences, New York, 2008;**31**:1409-1425 .

4. Ladyzhenskaya O. A., *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow* (2nd edn), Gordon and Breach: London, New York, 1989.

5. J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Resolution Des Problémes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

6. J. Málek, J. Nečas, and M. Růžička, *On weak solutions to a class of nonNewtonian incompressible fluids in bounded three-dimensional domains: the case p* ≥ 2, Advances in Differential Equations, Vol. 6, N. 3, March 2001, pp. 257-302

7. J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta and M. Růžička, *Weak and Measurevalued Solutions to Evolutionary PDEs*, Chapman & Hall, First Edition 1996.

8. J. Málek, K. R. Rajagopal, and M. Růžička, *Existence and regularity of solution and stability of the rest state for fluids with shear dependent viscosity*, Math. Models Methods Appl. Sci. Vol. 5 (6) (1995), 789-812.

9. J. Nečas, *Sur le normes équivalentes dans* $W_p^k(\Omega)$ *et sur la coercivité des formes formellement positives,* in Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Montreal (1966), 102-128

10. J. Leray, *Essai sur Les Mouvements Plans D'un Liquid Visqueux que Limitent des Parois*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1934; **XIII**:331-418.

CAPÍTULO 19

INTERPOLAÇÃO PELO MÉTODO DE HERMITE USANDO DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Data de aceite: 01/09/2021

João Socorro Pinheiro Ferreira
Professor de Matemática da Universidade Federal do Amapá (UNIFAP)

RESUMO: O presente Artigo Científico apresenta os resultados de um estudo sobre o método numérico de Hermite para interpolação polinomial por diferenças divididas finitas. Este método faz um refinamento de diversos métodos interpoladores, porém restringiremos aos métodos de interpolação de Newton. Este método hermitiano procura diminuir o erro produzido ao se interpolar pontos por estes métodos polinomiais. São apresentados resultados de estudos planejados e aplicados aos estudantes de engenharia. A característica principal do método é a de se aplicar a primeira derivada nos pontos que estão sendo interpolados além dos valores das diferenças divididas finitas, característicos dos outros métodos aqui abordados. Uma explanação de como se deve implementar no MATLAB é apresentada para fins de celeridade na solução.
PALAVRAS-CHAVE: BNCC. Interpolação. Hermite. MATLAB. Itinerário Formativo.

INTERPOLATION BY HERMITE METHOD USING SPLIT DIFFERENCE

ABSTRACT: This scientific article presents the results of a study on Hermite's numerical method for polynomial interpolation by finite divided differences. This method refines several interpolator methods, but we will restrict it to Newton's interpolation methods. This Hermitian method seeks to reduce the error produced by interpolating n points by these polynomial methods. Results of planned and applied studies are presented to engineering students. The main characteristic of the method is to apply the first derivative to the points being interpolated in addition to the values of finite divided differences, characteristic of the other methods discussed here. An explanation of how to implement it in MATLAB is presented in order to speed up the solution.
KEYWORDS: BNCC. Interpolation. Hermite. MATLAB. Formative Itinerary.

INTERPOLACIÓN POR EL MÉTODO HERMITE UTILIZANDO DIFERENCIAS DIVIDIDAS

RESUMEN: Este artículo científico presenta los resultados de un estudio sobre el método numérico de Hermite para la interpolación de polinomios por diferencias divididas finitas. Este método refina varios métodos de interpolación, pero lo restringiremos a los métodos de interpolación de Newton. Este método hermitiano busca reducir el error producido al interpolar n puntos por estos métodos polinomiales. Los resultados de los estudios planificados y aplicados se presentan a los estudiantes de ingeniería. La principal característica del método es aplicar la primera derivada a los puntos que se interpolan además de los valores de las diferencias divididas finitas, característica de

los otros métodos aquí discutidos. Se presenta una explicación de cómo implementarlo en MATLAB para acelerar la solución.

PALABRAS CLAVE: BNCC. Interpolación. Hermite. MATLAB. Itinerario formativo.

1 I INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é resolver problemas de interpolação através do método numérico de Hermite. A interpolação é um método matemática com a finalidade de descrever pontos observados em um fenômeno através de um modelo matemático. Em muitos casos, direcionamos os estudos para a produção de um polinômio. Para apresentar dados satisfatórios, faz-se necessário implementar diversos método e verificar aquele que produzir menor erro ao confrontá-lo com a realidade que se está pesquisando. Em outras palavras, o modelo encontrado tem que ser o mais próximo da realidade. Tem aplicações em áreas como da Economia, Administração e Engenharia.

Na Economia, o desempenho do Produto Interno Bruto (PIB), a dinâmica da taxa de inflação entre outros índices econômicos que devem ser publicados periodicamente. Na Administração, o desempenho da oferta e demanda de bens e serviços – modelar o desempenho da venda de uma rede de varejo, para saber como está o desempenho de diversos produtos que são lançados no mercado. Na Engenharia, para descrever ou representar matematicamente pontos obtidos de experiência em laboratório.

Para cursos de Matemática, Física, Química, Biologia, tanto os bacharelados como os de licenciatura, a modelagem matemática através de métodos numéricos se faz presente em diversos objetos de conhecimento – destacando-se o caso da modelagem matemática como metodologia de ensino e aprendizagem ativa. Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) está inserido o ensino de modelagem matemática a partir do ensino fundamental, como uma habilidade a ser desenvolvida nos processos matemáticos, conforme a seguir:

> Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2018, p. 266, grifo do autor).

Entretanto, a interpolação polinomial aqui apresentada reporta-se aos estudantes de graduação, porém destacando-se a importância de sabermos como utilizá-la caso necessite para diversas situações do cotidiano profissional, até porque muitos acadêmicos tornam-se professores.

Outro ponto importante da BNCC é o Itinerário Formativo previsto para o ensino médio, que segundo a mesma, a escola ou sistema de ensino poderá ofertar disciplinas mais específicas para a área de conhecimento que for de interesse do estudante, como por exemplo, se o secundarista tiver interesse em cursar a graduação fortemente estruturada em matemática, poderá optar por disciplinas que envolva cálculo diferencial e integral, métodos numéricos e geometrias avançadas. A definição de Itinerário formativo conforme a BNCC é a seguinte:

> O currículo do ensino médio será composto pela Base Nacional Comum Curricular e por itinerários formativos, que deverão ser organizados por meio da oferta de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino, a saber:
>
> I – linguagens e suas tecnologias;
>
> II – matemática e suas tecnologias;
>
> III – ciências da natureza e suas tecnologias;
>
> IV – ciências humanas e sociais aplicadas;
>
> V – formação técnica e profissional (LDB, Art. 36; ênfases adicionadas). (BRASIL, 2018, p. 475).

As especificidades para a Matemática e suas tecnologias como área de conhecimento são as seguintes:

> II – matemática e suas tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino; (BRASIL, 2018, p. 477).

Portanto, estes estudos realizados podem ser aplicados aos estudantes de Matemática, Engenharia e outras áreas do conhecimento existentes em âmbito da formação acadêmica que necessitem de tal abordagem numérica.

2 I REVISÃO DE LITERATURA

Na geometria, o significado de osculação refere-se ao contato entre duas curvas, linhas ou superfícies e na geometria diferencial, diz-se de curvas que têm um ponto de contato da ordem mais elevada. A curvatura e a torção servem para distinguir a forma de uma curva. A circunferência osculadora de uma curva *C* num ponto P($x(t_0)$, $y(t_0)$), é a circunferência tangente à curva em P que melhor aproxima a curva na vizinhança desse ponto; mais precisamente, é a circunferência que tem a mesma tangente que *C* no ponto *P* assim como a mesma curvatura. Portanto, o raio de tal circunferência é igual ao inverso da curvatura nesse ponto, ou seja, $r = \left|\frac{1}{k(t)}\right|$.

Uma modificação para a técnica de interpolação de Lagrange é interpolar os valores da função e da sua derivada em um conjunto de pontos. Esse procedimento dá origem à interpolação de Hermite. A ideia é representar uma função por um polinômio que seja interpolador de f em alguns pontos de seu domínio e que sua derivada seja interpolada nesses mesmos pontos. Então, supondo que f seja diferenciável, será preciso achar um polinômio H tal que:

$$f(x_i) = H(x_i) \qquad (1)$$
$$f'(x_i) = H'(x_i) \qquad (2)$$

com i=1,...,n.

Quando tal circunstância acontece, diz-se que as funções f e H **osculam** 2 vezes pelos pontos x_i. A interpolação de Hermite tem essa propriedade osculadora que permite uma melhor aproximação da função. A obtenção do polinômio pode ser feita de várias formas.

E possível através do polinômio interpolador de Lagrange e suas derivadas e com o polinômio de Newton. Por praticidade, será utilizado o polinômio interpolador de Newton neste estudo.

De acordo com Chapra (2013, p. 412), a forma generalizada de um polinômio interpolador de Newton para ajustar um polinômio de grau *(n – 1)* a *n* pontos dados é a seguinte:

$$f_{n-1}(x) = b_1 + b_2(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}). \qquad (3)$$

Para um polinômio de grau (n – 1), n pontos dados são necessários: $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$, ... , $[x_n, f(x_n)]$. Usamos esses pontos e as seguintes equações para calcular os coeficientes:

$$b_1 = f(x_1) \qquad (4)$$
$$b_2 = f[x_2, x_1] \qquad (5)$$
$$b_3 = f[x_3, x_2, x_1] \qquad (6)$$
$$\vdots$$
$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1] \qquad (7)$$

onde a função com colchetes corresponde a diferenças divididas finitas. Por exemplo, a primeira diferença dividida finita é representada em geral por:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}. \qquad (8)$$

O polinômio interpolador de Hermite de grau (2n – 1) é definido por:

$$H_{2n-1}(x) = f[x_1] + f[x_1, x_1](x - x_1) + f[x_1, x_1, x_2](x - x_1)^2 + f[x_1, x_1, x_2, x_2](x - x_1)^2(x - x_2) + \cdots + f[x_1, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_{n-1}](x - x_1)^2(x - x_2)^2 \cdots (x - x_{n-1})^2(x - x_n) . \qquad (9)$$

Para escrevê-lo, basta construir a tabela de diferenças divididas finitas onde cada ponto aparece duas vezes.

3 I RESULTADOS DOS ESTUDOS

3.1 Primeiro Estudo

A Tabela 40 da NBR 5410:2008[1] apresenta os fatores de correção para temperaturas ambiente para linhas não subterrâneas considerando dois tipos de compostos isolantes[2]. Parte desta tabela está reproduzida na Tabela 1. São poucos pontos, porém confiáveis. Determine os fatores de correção para uma temperatura de 30ºC.

Neste caso, vamos determinar um polinômio interpolador de Hermite de grau 5 para a Tabela 1. Por que de grau 5? Considerando-se que vamos interpolar 3 pontos, o grau do polinômio interpolador de Hermite será da forma de (2*n*-1) graus, isto é, apresentará o grau menor ou igual a (2*n*-1).

x_i (°C)	$f(x_i)$
20	1.12
25	1.06
35	0.94

Tabela 1 – Fatores de correção para as linhas não subterrâneas de material de PVC.

Fonte: elaborada pelo autor a partir da NBR 5410 de 2008.

O polinômio de Hermite para a Tabela 1 será escrito a partir do modelo (10):

$$H_{2n-1}(x) = f[x_1] + f[x_1,x_1](x-x_1) + f[x_2,x_1,x_1](x-x_1)^2 + f[x_2,x_2,x_1,x_1](x-x_1)^2(x-x_2) + f[x_3,x_2,x_2,x_1,x_1](x-x_1)^2(x-x_2)^2 + f[x_1,x_1,x_2,x_2,x_3](x-x_1)^2(x-x_2)^2(x-x_3)\,. \qquad (10)$$

Na Figura 1 plotamos os três pontos e verificamos que estão alinhados – porque o polinômio linear apresenta o coeficiente de determinação igual a um (1). Uma forma de avaliar a qualidade do ajuste do modelo é através do coeficiente de determinação R^2, e quanto mais próximo de um melhor a qualidade do ajuste. Basicamente, este coeficiente indica quanto o modelo foi capaz de explicar os dados coletados. Poderíamos utilizar este resultado imediatamente, mas vamos aproveitá-lo para realizar um estudo e mostrar como se escreve um polinômio de Hermite a partir de uma tabela.

1 Instalações elétricas de baixa tensão.

2 Cloreto de polivinila (PVC), borracha etileno-propileno (EPR) e isolação extrudada de polietileno termofixo (XLPE).

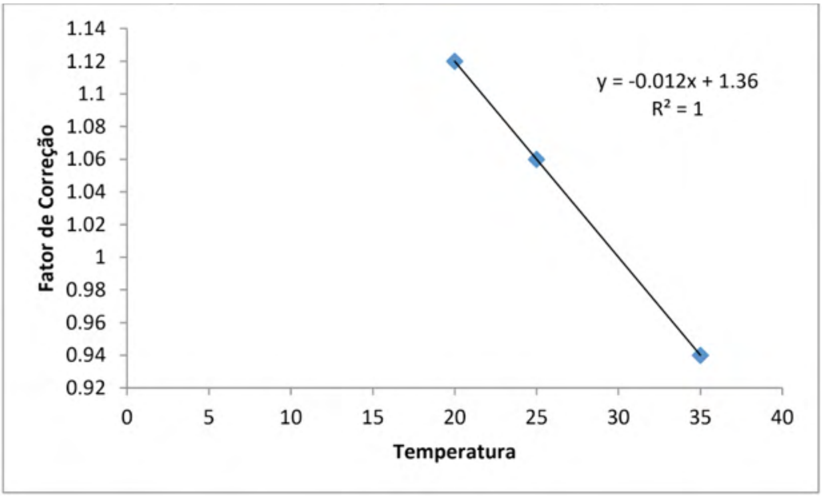


Figura 1 – Gráfico de dispersão das variáveis x e y da Tabela 1.

Fonte: elaborado pelo autor com auxílio do Excel.

Na Tabela 2 foram acrescentadas as colunas para lançamento dos valores de f(x) correspondente a cada x_i e o erro percentual (ε), para i = 1, 2, 3.

x_1	$y_i = f_i(x_i)$	$f(x) = -0.012x + 1.36$	$\varepsilon = \left\lvert \frac{f_i(x_i) - f(x_i)}{f_i(x_i)} \right\rvert \times 100$	$f'(x) = -0.012$
20	1.12	$f(x_1)$ =1.12	0 %	-0.012 = $f[x_1, x_1]$
25	1.06	$f(x_2)$ =1.06	0 %	-0.012= $f[x_2, x_2]$
35	0.94	$f(x_3)$ = 0.94	0 %	-0.012= $f[x_3, x_3]$

Tabela 2 – Valores numéricos de f(x) = -0.012x + 1.36 da Tabela 1 e sua primeira derivada.

Fonte: elaborada pelo autor.

A diferença finita osculada é a primeira derivada do polinômio interpolador de grau $n \leq 2$, que passa nos três pontos, porém neste caso, o polinômio interpolador é de primeiro grau, porque os três pontos são colineares.

A diferença dividida no mesmo ponto $(x_i, f(x_i))$ é a primeira derivada do polinômio interpolador que neste caso os de Newton ou de Lagrange:

$$f[x_i, x_i] = \lim_{x \to x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} = f'(x_i), \qquad (11)$$

para i=1,2, ... , n. Neste caso, as diferenças divididas em cada um dos três pontos são:

$$f[x_1, x_1] = f'(x_1) = -0.012;$$
$$f[x_2, x_2] = f'(x_2) = -0.012;$$
$$f[x_3, x_3] = f'(x_3) = -0.012;$$

As primeiras diferenças divididas finitas da Tabela 1 são obtidas pela Equação (8):

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(25)-f(20)}{25-20} = \frac{1.06-1.12}{5} = \frac{-0.06}{5} = -0.012;$$
$$f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{f(35)-f(25)}{35-25} = \frac{0.94-1.06}{10} = \frac{-0.12}{10} = -0.012.$$

As segundas diferenças divididas finitas são calculadas pela Equação (12):

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_i-x_k} \qquad (12)$$

$$f[x_2, x_1, x_1] = \frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{(-0.012)-(-0.012)}{25-20} = \frac{0.00}{5} = -0.000;$$
$$f[x_2, x_2, x_1] = \frac{f[x_2,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{(-0.012)-(-0.012)}{25-20} = \frac{0.000}{5} = 0.000;$$
$$f[x_3, x_2, x_2] = \frac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_2]}{x_3-x_2} = \frac{(-0.012)-(-0.012)}{35-25} = \frac{0.00}{10} = 0.000;$$
$$f[x_3, x_3, x_2] = \frac{f[x_3,x_3]-f[x_3,x_2]}{x_3-x_2} = \frac{(-0.012)-(-0.012)}{35-25} = \frac{0.000}{10} = 0.000.$$

As terceiras diferenças divididas finitas são determinadas pela Equação (13):

$$f[x_i, x_j, x_k, x_l] = \frac{f[x_i,x_j,x_k]-f[x_j,x_k,x_l]}{x_i-x_l}. \qquad (13)$$

As terceiras diferenças divididas são:

$$f[x_2, x_2, x_1, x_1] = \frac{f[x_2,x_2,x_1]-f[x_2,x_1,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{0.000-(-0.000)}{25-20} = \frac{0.000}{5} = 0.0000;$$
$$f[x_3, x_2, x_2, x_1] = \frac{f[x_3,x_2,x_2]-f[x_2,x_2,x_1]}{x_3-x_1} = \frac{(0.000)-(0.000)}{35-20} = \frac{0.000}{15} = 0.0000;$$
$$f[x_3, x_3, x_2, x_2] = \frac{f[x_3,x_3,x_2]-f[x_3,x_2,x_2]}{x_3-x_2} = \frac{(0.000)-(0.000)}{35-25} = \frac{0.000}{10} = 0.0000;$$

As diferenças divididas finitas de primeira, segunda e terceira ordens calculadas anteriormente estão organizadas na Tabela 3.

x_i	$y_i = f(x_i)$	**Primeira** $f[x_i, x_j]$	**Segunda** $f[x_i, x_j, x_k]$
$x_1 = 20$	$f[x_1] = 1.12$	$f[x_1, x_1] = f'(x_1) = f'(20) = -0.012$	$f[x_2, x_1, x_1] = 0.000$
$x_1 = 20$	$f[x_1] = 1.12$	$f[x_2, x_1] = -0.012$	$f[x_2, x_2, x_1] = 0.000$
$x_2 = 25$	$f[x_2] = 1.06$	$f[x_2, x_2] = f'(x_2) = f'(25) = -0.012$	$f[x_3, x_2, x_2] = 0.000$
$x_2 = 25$	$f[x_2] = 1.06$	$f[x_3, x_2] = -0.012$	$f[x_3, x_3, x_2] = 0.000$
$x_3 = 35$	$f[x_3] = 0.94$	$f[x_3, x_3] = f'(x_3) = f'(35) = -0.012$	-
$x_3 = 35$	$f[x_4] = 0.94$	-	-

Tabela 3 – Diferenças divididas finitas para o Método de Hermite.

Fonte: elaborada pelo autor.

As quartas diferenças divididas finitas, que representam as diferenças das duas terceiras diferenças divididas, são expressas em geral por

$$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m] = \frac{f[x_i, x_j, x_k, x_m] - f[x_j, x_k, x_l, x_m]}{x_i - x_m}. \qquad (14)$$

$$f[x_3, x_2, x_2, x_1, x_1] = \frac{f[x_3, x_2, x_2, x_1] - f[x_2, \ x_2, x_1, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{(0.000) - (0.00)}{35 - 20} = \frac{0.00}{15}$$
$$= -0.000;$$

$$f[x_3, x_3, x_2, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_3, x_2, x_2] - f[x_3, \ x_2, x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{0 - 0}{35 - 20} = \frac{0}{15} = 0.0000;$$

As quintas diferenças divididas finitas, que representam as diferenças das duas quartas diferenças divididas, são expressas em geral por:

$$\boldsymbol{f[x_3, x_3, x_2, x_2, x_1, x_1]} == \frac{f[x_3, x_3, x_2, x_2, x_1] - f[x_3, \ x_2, x_2, x_1, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{0 - (-0.000)}{35 - 20}$$
$$= \frac{0.000}{15} = 0.0000;$$

Terceira $f[x_i, x_j, x_k, x_l]$	Quarta $f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m]$	Quinta $f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m, x_n]$
$\boldsymbol{f[x_2, x_2, x_1, x_1] = 0.000}$	$\boldsymbol{f[x_3, x_2, x_2, x_1, x_1] = -0.0000}$	$f[x_3, x_3, x_2, x_2, x_1, x_1] = 0.000000$
$\boldsymbol{f[x_3, x_2, x_2, x_1] = 0.000}$	$\boldsymbol{f[x_3, x_3, x_2, x_2, x_1] = 0}.0000$	-
$\boldsymbol{f[x_3, x_3, x_2, x_2] = 0.000}$		

Tabela 4 – Continuação da Tabela 3.

Fonte: elaborada pelo autor.

Substituir os valores das Tabelas 3 e 4 na Equação (10) temos:

$$H_5(x) = 1.12 + (-0.012)(x - 20) + (-0.000)(x - 20)^2 + (0.0000)(x - 20)^2(x - 25) + (-0.000000)(x - 20)^2(x - 25)^2 + 0.000000(x - 20)^2(x - 25)^2(x - 35)$$

$$H_5(x) = 1.12 + (-0.012)(x - 20)$$
$$H_5(x) = 1.12 + (-0.012x + 0.24)$$

$$H_5(x) = 1.36 - 0.012x. \qquad (15)$$

Este polinômio de Hermite é o mesmo obtido pelo Excel na Figura 1. Observe que na Figura 1 consta a equação de regressão linear e o coeficiente de determinação igual a 1.

A primeira derivada de $H_{2n\text{-}1}$ é:

$$H_5'(x) = -0.012. \qquad (16)$$

Seja $f \epsilon C^{2n-1}(\{a,b\}$ e $x_1,...,x_n$ pontos distintos em [a , b]. Existe apenas um polinômio de grau menor ou igual a 2n – 1 que verifica

$$f(x_i) = H(x_i)$$
$$f'(x_i) = H'(x_i)$$

O polinômio interpolador de Hermite é

$$f(x) = -0.012x + 1.36. \qquad (17)$$

O valor de x = 30 no polinômio de Taylor é:

$$f(30) = -0.012(30) + 1.36 = 1.00. \qquad (18)$$

O valor de x = 30 no polinômio interpolador de Hermite é:

$$H_5(x) = 1.36 - 0.012(30) = 1.00, \qquad (19)$$

o que comprova a primeira condição.

A primeira derivada de $f(x)$=-0.012x+1.36 é $f'(x)$=-0.012 e a primeira derivada do polinômio de Hermite $H's(x)$=-0.012, que satisfaz a segunda condição do método de Hermite, logo está demonstrado. Na Tabela 5 está o resumo destes estudos.

x_i	$f(x_i)$	$H(x_i)$	$f'(x_i)$	$H'(x_i)$
$x_1 = 20$	$f(20) = 1.12$	$H(20) = 1.12$	$f'(20) = -0.012$	$H'(20) = -0.012$
$x_2 = 25$	$f(25) = 1.06$	$H(25) = 1.06$	$f'(25) = -0.012$	$H'(20) = -0.012$
$x = 30$	$f(30) = 1.00$	$H(30) = 1.00$	$f'(30) = -0.012$	$H'(30) = -0.012$
$x_1 = 35$	$f(35) = 0.94$	$H(20) = 0.94$	$f'(20) = -0.012$	$H'(20) = -0.012$

Tabela 5 – Confirmação do método de Hermite para $f(x)$=-0.012x+1.36.

Fonte: elaborada pelo autor.

Com isto, vimos neste estudo que o polinômio de Hermite encontrado atende as condições do teorema de Hermite, que são $f(x_i) = H(x_i)$ e $f'(x_i) = H'(x_i)$ para todo i=1,...,n.

3.1.1 Interpolação no MATLAB

Nos problemas de interpolação é muito importante o uso de programa computacional para resolvê-lo de forma mais célere, sendo assim, apresentaremos os comandos do MATLAB para obter os coeficientes do polinômio de um modo geral.

O comando

```
>> p = polyfit(x,y,n)
```

encontra os coeficientes do polinômio p(x) de grau n que aproxima os dados y(i) = p(x(i)), em um sentido de **mínimos quadrados**. O vetor p resultante contém os coeficientes do polinômio em ordem descendente de potências.

O comando

```
>> y = polyval(p,x)
```

retorna o valor de um polinômio de grau n (armazenado no vetor p) em x.

```
>> x = [20 25 35];
>> y = [1.12 1.06 0.94];
>> p = polyfit(x,y,2)
p =
   0.0000   -0.0120    1.3600
>> y = polyval(p,30)
```

y =

1.0000

Com isto, chegamos ao resultado obtido anteriormente.

3.2 Segundo Estudo

Vamos agora realizar os estudos da aplicação do polinômio interpolador de Hermite para uma função, que neste caso é a função cosseno.

Determine um polinômio interpolador de Hermite de grau 3 para a função f(x) = cos(x) no intervalo de $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Para a função f(x) = cos(x), temos:

$$f'(x) = -\sin(x), \qquad f(0) = 1, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad f'(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

A primeira diferença finita da função cosseno, no domínio estudado é calculada pela Equação (8), conforme a seguir:

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{0-1}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}. \qquad (20)$$

A diferença dividida no mesmo ponto corresponde a primeira derivada da função cosseno de x, $f(x)$= cos(x), que é:

$$f[x_i, x_i] = \lim_{x \to x_i} \frac{f(x)-f(x_i)}{x-x_i} = f'(x_i) = -\sin(x). \qquad (21)$$

As duas segundas diferenças divididas finitas da segunda osculação são:

$$f[x_2, x_1, x_1] = \frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{-\frac{2}{\pi}-0}{\frac{\pi}{2}-0} = -\frac{4}{\pi^2}; \qquad (22)$$

$$f[x_2, x_2, x_1] = \frac{f[x_2,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{(-1)-\left(-\frac{2}{\pi}\right)}{\frac{\pi}{2}-0} = 4 - \frac{2}{\pi}. \qquad (23)$$

A única osculação de terceira diferença finita é:

$$f[x_2, x_2, x_1, x_1] = \frac{f[x_2,x_2,x_1]-f[x_2,x_1,x_1]}{x_2-x_1} = \frac{\left(4-\frac{2}{\pi}\right)-\left(-\frac{4}{\pi^2}\right)}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{8\pi^2-4\pi+8}{\pi^3}. \qquad (24)$$

As diferenças divididas e as osculações obtidas em (20) a (24) estão organizadas na Tabela 6.

x_i	$y_i = f(x_i)$	Primeira $f[x_i, x_j]$	Segunda $f[x_i, x_j, x_k]$	Terceira $f[x_i, x_j, x_k, x_l]$
$\mathbf{x_1 = 0}$	$f[x_1] = 1$	$f[x_1, x_1] = 0$	$f[x_2, x_1, x_1] = -\frac{4}{\pi^2}$	$f[x_2, x_2, x_1, x_1] = \frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3}$

$\boldsymbol{x_1 = 0}$	$f[x_1] = 1$	$f[x_2, x_1] = -\frac{2}{\pi}$	$f[x_2, x_2, x_1] = 4 - \frac{2}{\pi}$
$\boldsymbol{x_2 = \frac{\pi}{2}}$	$f[x_2] = 0$	$f[x_2, x_2] = f'(x_2) = -1$	
$\boldsymbol{x_2 = \frac{\pi}{2}}$	$f[x_2] = 0$		

Tabela 6 - Diferenças divididas finitas e as osculações de $f(x)=cos(x)$.

Fonte: elaborada pelo autor.

Substituir os valores da Tabela 6 na Equação (9) tem-se:

$$H_{2n-1}(x) = 1 + 0(x-0) + \left(-\frac{4}{\pi^2}\right)(x-0)^2 + \left(\frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3}\right)(x-0)^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$H_{2n-1}(x) = 1 + \left(-\frac{4}{\pi^2}\right)(x)^2 + \left(\frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3}\right)(x)^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$H_{2n-1}(x) = 1 + \left(-\frac{4}{\pi^2}\right)(x)^2 + \left(\frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3}\right)\left(x^3 - \frac{\pi}{2}x^2\right)$$

$$H_{2n-1}(x) = 1 + \left(-\frac{4}{\pi^2}\right)x^2 + \left(\frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3}\right)x^3 - \left(\frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3}\right)\frac{\pi}{2}x^2$$

$$H_{2n-1}(x) = 1 + \left(-\frac{4}{\pi^2}\right)x^2 + \left(\frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3}\right)x^3 - \left(\frac{4\pi^3 - 2\pi^2 + 4\pi}{\pi^3}\right)x^2$$

$$H_{2n-1}(x) = 1 + \left(-\frac{4}{\pi^2}\right)x^2 + \left(\frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3}\right)x^3 - (4 - 2\pi^{-1} + 4\pi^{-2})x^2$$

$$H_{2n-1}(x) = 1 + \left(-4 + \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^2}\right)x^2 + \left(\frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3}\right)x^3$$

$$H_{2n-1}(x) = 1 + \left(\frac{-4\pi^2 + 2\pi - 8}{\pi^2}\right)x^2 + \left(\frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3}\right)x^3. \qquad (25)$$

A primeira derivada de H_{2n-1} é:

$$H'_{2n-1}(x) = \left(\frac{-8\pi^2 + 4\pi - 16}{\pi^2}\right)x + \left(\frac{24\pi^2 - 12\pi + 24}{\pi^3}\right)x^2. \qquad (26)$$

Segundo o teorema: Seja $f \epsilon C^{2n-1}(\{a,b\})$ e $x_1,\ldots,x_n$ pontos distintos em [a , b]. Existe apenas um polinômio H_{2n-1} de grau menor ou igual a 2n – 1 que verifica

$$f(x_i) = H(x_i)$$
$$f'(x_i) = H'(x_i)$$

$$H_{2n-1}(\pi/2) = 1 + \left(\frac{-4\pi^2 + 2\pi - 8}{\pi^2}\right)(\pi/2)^2 + \left(\frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3}\right)(\pi/2)^3$$

$$H_{2n-1}(\pi/2) = 1 + \left(\frac{-4\pi^2 + 2\pi - 8}{\pi^2}\right)\frac{\pi^2}{4} + \left(\frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{\pi^3}\right)\frac{\pi^3}{8}$$

$$H_{2n-1}(\pi/2) = 1 + \left(\frac{-4\pi^2 + 2\pi - 8}{4}\right) + \left(\frac{8\pi^2 - 4\pi + 8}{8}\right)$$

$$H_{2n-1}(\pi/2) = 1 + \left(-\pi^2 + \frac{\pi}{2} - 2\right) + \left(\pi^2 - \frac{\pi}{2} + 1\right)$$

$$H_{2n-1}(\pi/2) = 1 + (-2 + 1) = 0. \qquad (27)$$

O valor numérico da primeira derivada em $x=\frac{\pi}{2}$ do polinômio de Hermite:

$$H'_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{-8\pi^2+4\pi-16}{\pi^2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{24\pi^2-12\pi+24}{\pi^3}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$H'_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{-4\pi^2+2\pi-8}{\pi}\right)+\left(\frac{24\pi^2-12\pi+24}{\pi^3}\right)\frac{\pi^2}{4}$$

$$H'_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{-4\pi^2+2\pi-8}{\pi}\right)+\left(\frac{6\pi^2-3\pi+6}{\pi}\right)\frac{1}{1}$$

$$H'_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-4\pi^2+2\pi-8+6\pi^2-3\pi+6}{\pi}$$

$$H'_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\pi^2-\pi-2}{\pi}\neq-1. \qquad (28)$$

x_i	$f(x_i)$	$H(x_i)$	$f'(x_i)$	$H'(x_i)$
$x_1=0$	$f(0)=1$	$H(0)=1$	$f'(0)=0$	$H'(0)=0$
$x_2=\frac{\pi}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$	$H\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$	$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$	$H'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$

Tabela 7 – Confirmação do método de Hermite para $f(x)=cos(x)$ no [0,π/2].

Fonte: elaborada pelo autor.

O valor esperado em (28) era , porém o resultado obtido foi 4,7, com isto uma revisão deve ser realizada.

3.3 Terceiro Estudo

Neste próximo estudo, vamos escrever o polinômio de Hermite para um estudo de laboratório com sete pontos anotados após a realização de um experimento:

> 17.1 Os dados a seguir são provenientes de uma tabela que foi medida com alta precisão. Use o melhor método numérico (para este tipo de problema) para determinar y em x = 3,5. Observe que um polinômio produzirá um valor exato. Sua solução deve provar que seu resultado é exato. (CHAPRA, 2013, p. 424).

x	0	1.8	5	6	8.2	9.2	12
y	26	16.415	5.375	3.5	2.015	2.54	8

Tabela 8 – Dados obtidos de um experimento em laboratório de engenharia.

Fonte: Chapra (2013, p. 424).

Na Figura 2 plotamos os pontos da Tabela 8 e inserimos a equação que passa exatamente sobre os sete pontos juntamente com o coeficiente de determinação – que também é 1, indicando com isto que o modelo quadrático é exatamente aquele que melhor descreve a experiência desenvolvida em laboratório, porém para atender aos objetivos desta pesquisa, vamos dar prosseguimento ao estudo.

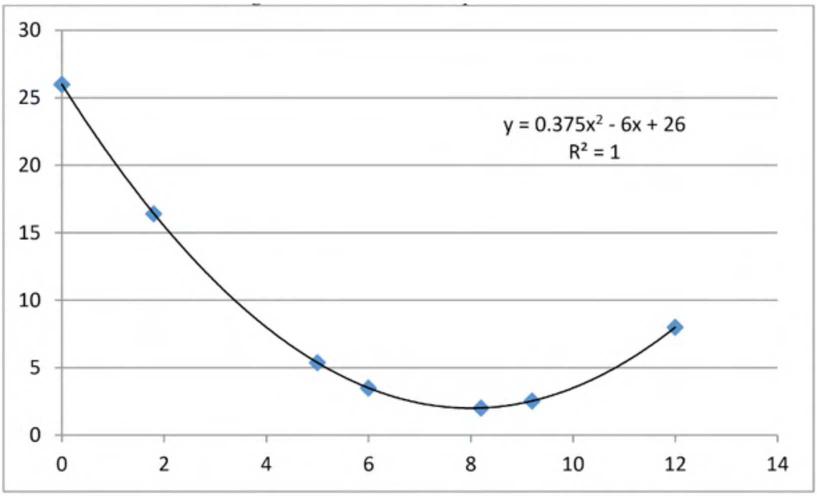


Figura 2 – Gráfico de dispersão da Tabela 8.

Fonte: elaborado pelo autor.

O polinômio interpolador de Newton da Tabela, conforme o polinômio quadrático da Figura 2 é:

$$f(x) = 0.375x^2 - 6x + 26. \qquad (29)$$

A primeira derivada da função (29) é:

$$f'(x_i) = 0.75x - 6 = f[x_i, x_i], \qquad (30)$$

e no ponto x_1=0 é:

$$f'(x_1 = 0) = 0{,}75 \times 0 - 6 = -6 = f[x_1, x_1].$$

As primeiras diferenças divididas finitas da Tabela 8 são obtidas pela Equação (8):

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{16.415-26}{1.8-0} = \frac{-9.585}{1.8} = -5.325; \qquad (31)$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = \frac{5.375-16.415}{5-1.8} = \frac{-11.040}{3.2} = -3.450; \qquad (32)$$

$$f[x_4, x_3] = \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} = \frac{3.5-5.375}{6-5} = \frac{-1.875}{1.0} = -1.875; \qquad (33)$$

$$f[x_5, x_4] = \frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4} = \frac{2.015-3.5}{8.2-6} = \frac{-1.485}{2.2} = -0.675; \qquad (34)$$

$$f[x_6, x_5] = \frac{f(x_6)-f(x_5)}{x_6-x_5} = \frac{2.54-2.015}{9.2-8.2} = \frac{0.525}{1.0} = 0.525; \qquad (35)$$

$$f[x_7, x_6] = \frac{f(x_7)-f(x_6)}{x_7-x_6} = \frac{8-2.54}{12-9.2} = \frac{5.46}{2.8} = 1.950; \qquad (36)$$

As primeiras diferenças divididas finitas de (31) até (36) estão descritos na Tabela 9, para facilitar os cálculos de outras diferenças.

As segundas diferenças divididas finitas, que representam as diferenças das duas primeiras diferenças divididas, são expressas em geral por:

$$f[x_1,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_1-x_2} = \frac{-6-(-5,325)}{0-1,8} = \frac{-0,68}{-1,8} = 0.375; \quad (37)$$
$$f[x_1,x_2,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_2,x_2]}{x_1-x_2} = \frac{-5,325-(-4.65)}{0-1,8} = \frac{-0,68}{-1,8} = 0.375; \quad (38)$$

$$f[x_3,x_2,x_1] = \frac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1} = \frac{-3.450-(-5.325)}{5-0} = \frac{1.875}{5} = 0.375; \quad (39)$$
$$f[x_4,x_3,x_2] = \frac{f[x_4,x_3]-f[x_3,x_2]}{x_4-x_2} = \frac{-1.875-(-3.450)}{6-1.8} = \frac{1.575}{4.2} = 0.375; \quad (40)$$
$$f[x_5,x_4,x_3] = \frac{f[x_5,x_4]-f[x_4,x_3]}{x_5-x_3} = \frac{-0.675-(-1.875)}{8.2-5} = \frac{1.200}{3.2} = 0.375; \quad (41)$$
$$f[x_6,x_5,x_4] = \frac{f[x_6,x_5]-f[x_5,x_4]}{x_6-x_4} = \frac{0.525-(-0.675)}{9.2-6} = \frac{1.200}{3.2} = 0.375; \quad (42)$$
$$f[x_7,x_6,x_5] = \frac{f[x_7,x_6]-f[x_6,x_5]}{x_7-x_5} = \frac{1.950-(0.525)}{12.0-8.2} = \frac{1.425}{3.8} = 0.375. \quad (43)$$

As segundas diferenças divididas finitas de (37) até (43) estão relacionados na Tabela 9, para facilitar os cálculos das diferenças seguintes.

As terceiras diferenças divididas finitas, que representam as diferenças das duas segundas diferenças divididas, são expressas em geral por:

$$f[x_i,x_j,x_k,x_l] = \frac{f[x_i,x_j,x_k]-f[x_j,x_k,x_l]}{x_i-x_l}. \quad (44)$$

$$f[x_1,x_1,x_2,x_2] = \frac{f[x_1,x_1,x_2]-f[x_1,x_2,x_2]}{x_1-x_2} = \frac{0,375-0,375}{0-1,8} = 0; \quad (45)$$
$$f[x_4,x_3,x_2,x_1] = \frac{f[x_4,x_3,x_2]-f[x_3,x_2,x_1]}{x_4-x_1} = \frac{0.375-0.375}{6-0} = 0.000; \quad (46)$$
$$f[x_5,x_4,x_3,x_2] = \frac{f[x_5,x_4,x_3]-f[x_4,x_3,x_2]}{x_5-x_2} = \frac{0.375-0.375}{8.2-1.8} = 0.000; \quad (47)$$
$$f[x_6,x_5,x_4,x_3] = \frac{f[x_6,x_5,x_4]-f[x_5,x_4,x_3]}{x_6-x_3} = \frac{0.375-0.375}{9.2-5} = 0.000; \quad (48)$$
$$f[x_7,x_6,x_5,x_4] = \frac{f[x_7,x_6,x_5]-f[x_6,x_5,x_4]}{x_7-x_4} = \frac{0.375-0.375}{12-6} = 0.000. \quad (49)$$

As terceiras diferenças divididas finitas de (44) até (49) estão relacionados na Tabela 9, para facilitar os cálculos das diferenças seguintes.

x_i	$y_i = f(x_i)$	Primeira	Segunda	Terceira
$\boldsymbol{x_1}$ =0	$\boldsymbol{f[x_1] = 26}$	$f[x_1,x_1] = -6,000$	$f[x_1,x_1,x_2] = 0.375$	$f[x_1,x_1,x_2,x_2] = 0$
$\boldsymbol{x_1 = 0}$		$f[x_2,x_1] = -5,325$	$f[x_3,x_2,x_1] = 0,375$	$f[x_4,x_3,x_2,x_1] = 0$
$\boldsymbol{x_2}$ =1.8	16.415	$f[x_2,x_2] = -4,65$	$f[x_4,x_3,x_2] = 0,375$	$f[x_5,x_4,x_3,x_2] = 0$
$\boldsymbol{x_2 = 1.8}$		$f[x_3,x_2] = -3.450$		
5	5.375	$f[x_3,x_3] = -2,25$	$f[x_5,x_4,x_3] = 0.375$	$f[x_6,x_5,x_4,x_3] = 0$
5		$f[x_4,x_3] = -1,875$		
6	3;5	$f[x_4,x_4 = -1,50]$	$f[x_6,x_5,x_4] = 0,375$	$f[x_7,x_6,x_5,x_4] = 0$
6		$f[x_5,x_4] = -0,675$		
8.2	2.015	$f[x_5,x_5] = 0.15$	$f[x_7,x_6,x_5] = 0.375$	
8.2		$f[x_6,x_5] = 0.525$		
9.2	2.54	$f[x_6,x_6] = 0,90$		
9.2		$f[x_7,x_6] = 1.950$		
$\boldsymbol{x_7}$ =12	$f(x_7)$ =8	$f[x_7,x_7] = 3,00$		
12		-		

Tabela 9 – Descrição da natureza recursiva das diferenças divididas finitas da Tabela 8.

Fonte: elaborada pelo autor.

As quartas diferenças divididas finitas, que representam as diferenças das duas terceiras diferenças divididas, são expressas em geral por:

$$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m] = \frac{f[x_i,x_j,x_k,x_m]-f[x_j,x_k,x_l,x_m]}{x_i-x_m}. \qquad (50)$$

$$f[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_5,x_4,x_3,x_2]-f[x_4,x_3,x_2,x_1]}{x_5-x_1} = \frac{0-0}{8.2-0} = 0; \qquad (51)$$

$$f[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2] = \frac{f[x_6,x_5,x_4,x_3]-f[x_5,x_4,x_3,x_2]}{x_6-x_2} = \frac{0-0}{9.2-1.8} = 0; \qquad (52)$$

$$f[x_7, x_6, x_5, x_4, x_3] = \frac{f[x_7,x_6,x_5,x_4]-f[x_6,x_5,x_4,x_3]}{x_7-x_3} = \frac{0-0}{12-5} = 0; \qquad (53)$$

As quartas diferenças divididas finitas de (50) até (53) estão listados na Tabela 10, para facilitar os cálculos das diferenças seguintes.

As quintas diferenças divididas finitas, que representam as diferenças das duas quartas diferenças divididas, são expressas em geral por:

$$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m, x_n] = \frac{f[x_i,x_j,x_k,x_l,x_m]-f[x_j,x_k,x_l,x_m,x_n]}{x_i-x_n}. \qquad (54)$$

$$f[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_6,x_5,x_4,x_3,x_2]-f[x_5,x_4,x_3,x_2,x_1]}{x_6-x_1} = 0 \qquad (55)$$

$$f[x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2] = \frac{f[x_7,x_6,x_5,x_4,x_3,]-f[x_6,x_5,x_4,x_3,x_2]}{x_7-x_2} = 0 \qquad (56)$$

As quintas diferenças divididas finitas de (54) até (56) estão listados na Tabela 10, para facilitar os cálculos das diferenças seguintes.

A sexta diferença dividida finita, que representa a diferença das duas quintas diferenças divididas, são expressas em geral por:

$$f[x_i, x_j, x_k, x_l, x_m, x_n, x_0] = \frac{f[x_i,x_j,x_k,x_l,x_m,x_n]-f[x_j,x_k,x_l,x_m,x_n,x_o]}{x_i-x_0}. \qquad (57)$$

$$f[x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_7,x_6,x_5,x_4,x_3,x_2]-f[x_6,x_5,x_4,x_3,x_2,x_1]}{x_7-x_1} = 0. \qquad (58)$$

Quarta	Quinta	Sexta
$f[x_1, x_1, x_2, x_2] = 0$	$f[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] = 0$	$f[x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] = 0$
$f[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] = 0$	$f[x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2] = 0$	
$f[x_6, x_5, x_4, x_3, x_2] = 0$		
$f[x_7, x_6, x_5, x_4, x_3] = 0$		

Tabela 10 – Continuação da Tabela 9.

Fonte: elaborada pelo autor.

O polinômio de Hermite para este estudo, tendo como referência as Tabelas 8, 9 e 10, é escrito a partir da Equação (9):

$$H_7(x) = f[x_1] + f[x_1, x_1](x - x_1) + f[x_1, x_1, x_2](x - x_1)^2 + f[x_1, x_1, x_2, x_2](x - x_1)^2(x - x_2) + f[x_1, x_1, x_2, x_2, x_3](x - x_1)^2(x - x_2)^2 + f[x_1, x_1, x_2, x_2, x_3](x - x_1)^2(x - x_2)^2 . \qquad (59)$$

$$\begin{aligned} H_{2n-1}(x) = 26 + (-6)(x - 0) + (0{,}375)(x - 0)^2 + 0 \times (x - x_1)^2(x - x_2) + \ 0 \\ \times (x - x_1)^2(x - x_2)^2 + 0 \times (x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - x_3) + 0 \\ \times (x - x_1)^2(x - x_2)^2(x - x_3)^2 + 0 \times (x - x_4)^2(x - x_5)^2(x - x_6)^2(x - x_7) \end{aligned}$$

$$H_{2n-1}(x) = 26 + (-6)(x) + (0{,}375)(x)^2$$

$$H_{2n-1}(x) = 26 - 6x + 0{,}375x^2 . \qquad (60)$$

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho é de apresentar soluções de interpolação numérica de Hermite para situações-probelmas. No decorrer dos estudos, resolvemos três exemplos de interpolação numérica com o polinômio de Hermite e aprendemos que os coeficientes podem ser determinados por diferença dividida finita.

São muito importantes os três estudos realizados, pois vimos que é possível escrever o polinômio de Hermite a partir de tabelas e também de funções.

O uso de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC's) – como, por exemplo, a planilha eletrônica Excel e o programa computacional MATLAB contribuíram enormemente na construção das soluções.

Na interpolação de Hermite, as derivadas, bem como valores da função de interpolação são levadas em consideração, e devem-se incluir os valores das derivadas adicionais mais as equações ao sistema linear que determinam os parâmetros da função de interpolação. Para ter uma solução única, o número de equações deve ser igual ao número de parâmetros a serem determinados e os polinômios cúbicos por partes, são escolha típica para interpolação de Hermite, fornecendo flexibilidade, simplicidade e eficiência.

A interpolação cúbica de Hermite é um interpolador polinomial cúbico por partes com primeira derivada contínua. O polinômio cúbico por partes com *n* nós tem 4(n - 1) parâmetros para que sejam determinados e exige que ele interpole dados fornecidos de 2(n - 1) equações. Ao exigir que tenha uma derivada contínua resulta em (n – 2) equações adicionais, ou, o total de (3n – 4), o que ainda deixa livre parâmetros. Assim, o interpolador cúbico de Hermite não é único e permanecem livre parâmetros podem ser escolhidos de modo que o resultado satisfaça adicionais restrições.

A interpolação de *spline* cúbica é polinomial por partes de grau k que é (k - 1) vezes continuamente diferenciável. Por exemplo, a *spline* linear é de grau 1 e tem 0 contínuo derivados, ou seja, é contínua, mas não suave, e pode ser descrita como "linha quebrada". *spline* cúbico é polinomial cúbico por partes que é duas vezes continuamente diferenciável. Tal como acontece com Hermite cúbico, interpolando dados e exigindo uma derivada contínua impõe (3n - 4) restrições ao *spline* cúbico e requerer segunda derivada contínua impõe (n - 2) adicionais restrições, deixando 2 parâmetros livres restantes.

Os dois parâmetros finais podem ser corrigidos de várias maneiras: especifique a primeira derivada nos pontos finais e . Forçar a segunda derivada a ser zero nos pontos finais, o que dá *spline*; impor a condição "não-um-nó", que força duas cúbicas consecutivas peças iguais, forçar as primeiras derivadas, bem como as segundas derivadas, a combinar em pontos finais t_1 e t_n (se o *spline* for periódico).

Considerando-se que há aplicações da interpolação de Hermite em diversas áreas do conhecimento científico – como na mecânica quântica e probabilidade – existe então uma vasta abrangência de aplicação do método e a possibilidade de se pesquisar e coloca-lo em prática.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, A. L. M. **Matemática computacional.** Coimbra, PT: FCTUC, 2010. Disponível em: http://arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/118/1/MatematicaComputacional.pdf. Acesso em: 27 out. 2020.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5410**: Instalações elétricas de baixa tensão. Rio de Janeiro: ABNT, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 22 nov. 2020.

CHAPRA, S. C. **Métodos aplicados com MATLAB para engenheiros e cientistas**. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

HEATH, M. **Scientific computing: an introductory survey**. Revised Second. Philadelphia: SIAM, 2018. Disponível em: http://heath.cs.illinois.edu/scicomp/notes/index.html. Acesso em: 28 nov. 2020.

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL de Lagrange e de Hermite. [Rio de Janeiro]: [UFRJ], [21--]. Disponível em: http://www2.peq.coppe.ufrj.br/Pessoal/Professores/Arge/COQ862/Interpolacoes%20Polinomiais.pdf. Acesso em: 27 nov. 2020.

CAPÍTULO 20

APRENDIZAGEM DAS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA INVESTIGAÇÃO À LUZ DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Data de aceite: 01/09/2021

Bruno José de Sá Ferraz
Universidade de Pernambuco/Campus Petrolina

Lemerton Matos Nogueira
Universidade de Pernambuco/Campus Petrolina

RESUMO: Este trabalho é uma parte de Trabalho de Conclusão de Curso desenvolvido no curso de Licenciatura emMatemáticadaUPE/Campus Petrolina em 2018 e tem por objetivo primordial, investigar as possíveis dificuldades encontradas por estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental na compreensão das operações com Frações à luzda Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau. Metodologicamente este estudo é de natureza qualitativa,apartir da análise das estratégias utilizadas por quinze estudantes do 7º ano de uma escola privada da cidade de Lagoa Grande-PE, na resolução de seis problemas envolvendo as operações de adição, subtração,multiplicação e divisão com Frações. Estes problemas foram criados com base nas quatro situações da TSD (ação, formulação, validação e institucionalização). Os resultados obtidos evidenciaram uma maior dificuldade nos problemas envolvendo a situação de validação. No entanto, situações como ação e formulação também possuíram um alto percentual de erros e abstenções na resolução. De maneira geral, os resultados obtidos com aplicação doquestionário evidenciaram dificuldades desde à má interpretação dos problemas propostos, à má utilização de técnicas de resolução que não se enquadravam no desenvolvimento do problema, reforçando dificuldades com as quatro operações fundamentais envolvendo frações, principalmente a multiplicação e divisão.

PALAVRAS-CHAVE: Aprendizagem. Fração. Operações. Ensino Fundamental. Teoria das Situações Didáticas.

LEARNING OF OPERATIONS WITH FRACTIONS IN THE 7TH YEAR OF ELEMENTARY EDUCATION: AN RESEARCH IN THE LIGHT OF THE THEORY OF DIDACTIC SITUATIONS

ABSTRACT: This work is part of the Course Completion Work developed in the Mathematics Degree course at UPE / Campus Petrolina in 2018 and its main objective is to investigate the possible difficulties encountered by students of the 7th year of Elementary Education in understanding operations with Fractions in the light of Guy Brousseau's Theory of Didactic Situations (TSD). Methodologically this study is of a qualitative nature, from the analysis of the strategies used by fifteen students of the 7th year of a private school in the city of Lagoa Grande-PE, in the resolution of six problems involving the operations of addition, subtraction, multiplication and division with Fractions. These problems were created based on the four situations of the TSD (action, formulation, validation and institutionalization). The results obtained showed a greater difficulty in the problems involving the validation situation. However, situations such as action and formulation also had a high percentage

of errors and abstentions in the resolution. In general, the results obtained with the application of the questionnaire showed difficulties since the misinterpretation of the proposed problems, the misuse of resolution techniques that did not fit the problem development, reinforcing difficulties with the four fundamental operations involving fractions, mainly the multiplication and division.
KEYWORDS: Learning. Fraction. Operations. Elementary School. Theory of Didactic Situations.

1 I INTRODUÇÃO

Durante o percurso acadêmico na Licenciatura do primeiro autor, especificamente na fase de regência da disciplina de Estágio Curricular Supervisionado II, observou-se que muitos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental pertencentes a escola em que estagiava, possuíam alguma dificuldade na resolução de situações envolvendo operações com frações. Esta observação influenciou diretamente na busca de dados que explicitassem a gênese dessas dificuldades.

Desta forma, compreendemos que a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau é de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho, visto que a teoria pode auxiliar diretamente na busca por dados que explicitem a gênese do problema de pesquisa, alertando que cada conhecimento ou saber pode ser determinado por uma situação, seja didática ou adidática.

Toda essa dinâmica resultou na escolha do presente objeto de pesquisa, enredado pela seguinte questão de pesquisa: *Quais as dificuldades encontradas por estudantes do 7º ano na compreensão das operações com frações à luz da TSD?* Como objetivo geral, pretendemos investigar as possíveis dificuldades encontradas por estudantes do 7º ano na compreensão das operações com frações à luz da TSD. Mais especificamente, pretendemos: Diagnosticar em qual (is) operação (s) envolvendo frações os estudantes do 7º ano apresentam mais dificuldades; identificar as estratégias mobilizadas por estes estudantes nos problemas propostos e compreender como e quais as situações da TSD que melhor pode(m) ajudar a compreender estas estratégias e as dificuldades inerentes.

O estudo de Silva (2007) e Canova (2006) comprovam que as dificuldades com as Frações surgem nos anos iniciais da escolarização, quando os professores dão ênfase prioritariamente ao ensino da representação fracionária, utilizando unicamente o significado de parte-todo. Dentre as diversas explicações para esse baixo rendimento, está a falta de tarefas que favoreçam o aluno na construção de conhecimentos que estejam relacionados aos números racionais e suas operações, utilizando-se de questões mais abertas envolvendo diferentes significados e relacionando os números fracionários aos decimais como também preconiza os Parametros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998).

Silva e Perovano (2012), por exemplo, fizeram uma análise qualitativa, cujo objetivo foi diagnosticar os obstáculos e possíveis erros apresentados pelos alunos na compreensão de frações, procurando estabelecer questões que indagassem o aluno e fizessem com que os mesmos mostrassem suas dificuldades, seja no conceito ou nas operações com frações. Estes autores perceberam que as dificuldades se apresentam em vários contextos. Nesse estudo, quando foi apresentado uma adição de frações com denominadores diferentes, alguns dos alunos analisados mostraram dificuldades no cálculo do MMC, outros somaram os numeradores e denominadores, errando completamente a questão.

Monteiro e Groenwald (2014), analisaram a resolução dos problemas, obtendo resultados expressivos, sendo possível identificar que o conceito de Fração, a noção de equivalência, simplificação de frações e comparação foram aqueles em que os alunos apresentaram maiores dificuldades. A multiplicação é apresentada como uma das operações em que os estudantes obtiveram um bom desempenho, porém a divisão foi a operação em que os estudantes mais se confundiram.

2 | A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD) DE GUY BROUSSEAU

Guy Brousseau é um educador matemático francês, considerado um dos pioneiros dadidática da matemática, o qual desenvolveu uma teoria que busca entender as relações que acontecem entre aluno, professor e saber, também conhecida como Teoria das Situações Didáticas (TSD).

A TSD preconiza que a aprendizagem matemática está ligada à didática matemática, visto que suas múltiplas relações pedagógicas ficam interligadas entre professor, estudante esaber, buscando estabelecer uma compreensão concreta de um conteúdo específico. Assim, considera que a aprendizagem matemática não deve ficar presa as quatro paredes de uma salade aula convencional, pois existem momentos fora da escola em que o aluno em seu espaço social consegue absorver e assimilar conhecimentos sem a presença de um professor. Isso se deve ao que Brousseau (1986) denomina de situação a didática.

> Quando o aluno torna-se capaz de colocar em funcionamento e utilizar por ele mesmo o conhecimento que ele está construindo, em situação não prevista de qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação adidática (BROUSSEAU, 1986, p.49).

Existem diferentes tipos de situações didáticas previstas na educação matemática, sendo ela iniciada com a escolha de um problema considerado compatível para o nível intelectual do aluno. Esses procedimentos buscam explorar aspectos particulares do saber matemático, no qual Brousseau divide o mesmo em situações, a saber: situações de ação; situações de formulação; *situações de validação e situações de institucionalização.*

Segundo Pais (2011) a *situação de ação* se faz vinculada a necessidade da análise de resultados mais imediatos utilizando de problemas que resultem na produção de um conhecimento de natureza mais experimental e intuitiva do que teórica. Por mais que exista teoria por trás desse procedimento o objetivo central se faz no fornecimento de uma solução correta de um certo problema por parte do estudante, não sabendo explicar os argumentos ao qual ele utilizou em sua resolução.

Segundo Brousseau (1986) a *situação de formulação* se faz presente na resolução de problemas com um grau maior de conhecimento por parte do aluno, visto que o mesmo emprega um esquema ao qual é utilizado conhecimentos pré-estabelecidos e adquiridos durante seu percurso de aprendizagem, mesmo que não haja necessidade de validação quanto as justificativas presentes em sua resolução, transformando conhecimentos implícitos em explícitos.

A *situação de validação* se faz presente na resolução de problemas ao qual o aluno utiliza mecanismos de prova para validação de suas respostas, sendo assim utilizado essencialmente como finalidade de natureza teórica. O mesmo busca convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando de uma linguagem mais rebuscada com demonstrações, provas etc. Organizando enunciados em demonstrações, construindo teorias e aplicando-as ao problema, seduzindo seus companheiros na veracidade de suas informações e conhecimentos, afirmando aos demais que o que diz é verdadeiro dentro do contexto empregado.

Para Pais (2011), as *situações de institucionalização* são aquelas aos quais o aluno sob controle do professor procede a passagem do conhecimento por ele adquirido e pelo professor validado, seja para sala de aula e seus colegas ou para o meio em que vive. É ideal que o próprio aluno dê sentido aos conhecimentos que ele manipula, cabendo assim ao professor a tarefa de reconhecer o valor de um saber e torná-lo um meio de referência para turma. O professor por sua vez, se limita a não intervir nas fases anteriores a institucionalização, limitando-se apenas nas orientações quando julgar necessário, evitando assim, mudanças em seu resultado.

3 | METODOLOGIA

Este trabalho é de natureza qualitativa, já que de acordo com Creswell (2007), a abordagem qualitativa provê ao pesquisador um conhecimento mais profundo de um fenômeno e produz um alto nível de detalhes. Os sujeitos de pesquisa foram 15 estudantes do 7º ano do ensino fundamental de uma escola privada da cidade de Lagoa Grande-PE. Salientamos que a escolha da turma foi definida pelos fortes indícios de dificuldades verificadas pelo professor pesquisador (primeiro autor deste trabalho).

A coleta de dados deu-se mediante a aplicação de um questionário diagnóstico contendo seis problemas, construído a partir da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau, considerando as quatro situações propostas na Teoria, a saber: ação, formulação, validação e institucionalização. Estes problemas foram assim categorizados: o primeiro é relativo à fase da ação, o segundo à validação, o terceiro à formulação e os três últimos são referentes a fase da institucionalização, quando se buscou complementar e aprimorar ideias, conceitos e propriedades envolvendo operações com fração através da intervenção do professor- pesquisador.

Após a aplicação do questionário, realizou-se uma intervenção em sala de aula, para que os mesmos identificassem melhor os conceitos e propriedades das operações com fração na resolução dos problemas propostos, contemplando a Situação de institucionalização, como preconiza a TSD. Salientamos que a aplicação do questionário ocorreu em horário normal de aula e teve duração de aproximadamente 1h e 50 min.

A análise dos dados se deu a partir da observação das estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução das situações propostas à luz da TSD, atendo-se às possíveis dificuldades encontradas na compreensão das operações com frações. Além disso, buscamos confrontar os resultados com o que aponta a literatura especializada, com a finalidade de obter resultados mais sólidos, intentando localizar as dificuldades apresentadas pelos alunos nas quatro situações da TSD, durante a resolução dos 6 problemas.

4 | APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Inicialmente traremos os dados (Gráfico 1) referentes ao quantitativo de acertos, erros e respostas em branco, nas (3) situações iniciais da TSD, respondidas pelos 15 estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental. Salientamos que não traremos no Gráfico 1 os resultados de acertos e erros na fase de institucionalização.

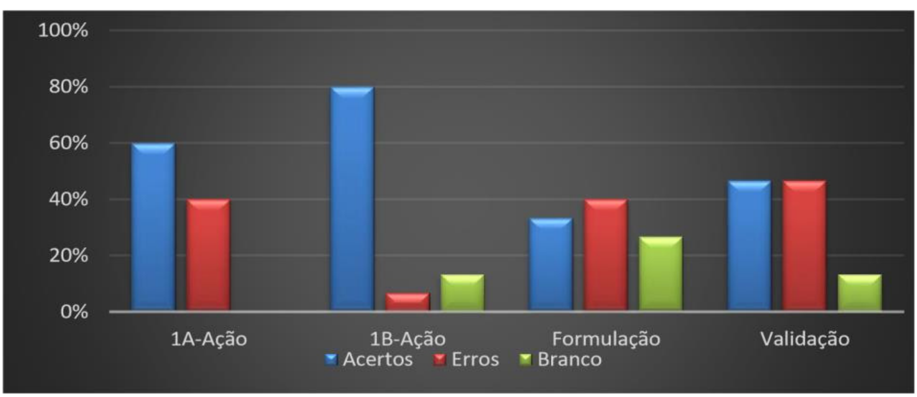


Gráfico1: Resultados quantitativos nas situações de Ação, Formulação e Validação.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os resultados constantes neste Gráfico 1, serviram como diagnóstico que balizou a etapa foi apresentado pelas questões em que se abordava uma situação de validação, onde se fazia necessário a utilização de mecanismos de prova para validação de suas respostas, buscando convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando de uma linguagem mais rebuscada com demonstrações, provas, etc. como posto na TSD.

O problema 2, referente à situação de formulação apresentou um alto número de erros além de um grande percentual de abstenções, evidenciando-se uma grande dificuldade por parte do estudante em apresentar conhecimentos pré-estabelecidos e adquiridos em seu percurso de aprendizagem. O problema 1 que foi dividido em 1(a) e 1(b), foram os que apresentaram o menor número de erros considerando a totalidade de problemas propostos, levando a crer que possivelmente houve o desenvolvimento de cálculos mais intuitivos e sem fundamentos conceituais.

Nas próximas subseções traremos os resultados baseados nas análises das respostas do questionário diagnóstico para as situações de Ação, Formulação e Validação. Para tais analises, confrontamos os esquemas trazidos pelos estudantes ao que preconiza cada uma destas situações da TSD.

4.1 Situação de Ação

4.1.1 Situação 1

Esta situação solicitava que os estudantes realizassem a multiplicação de duas frações, não sendo necessário explicar os procedimentos ao qual ele utilizou para resolvê-la, já que geralmente nesta situação o estudante realiza procedimentos mais imediatos, resultando em um conhecimento mais experimental, como explicita Pais (2011). Para exemplificar, tem-se abaixo a imagem da resposta ao item a, do Estudante A.

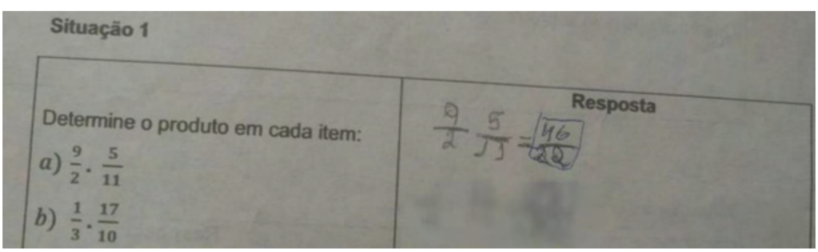
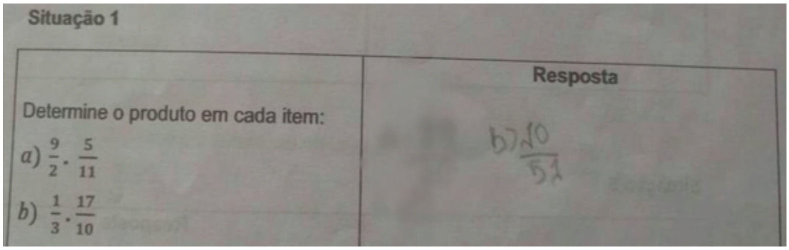


Figura 1: Resposta do aluno A para a situação 1a.

Fonte: Dados da pesquisa.

Na resposta acima podemos perceber que o estudante utilizou de um método correto para encontrar a resposta, multiplicando numerador por numerador e denominador por denominador, contemplando uma resposta mais intuitiva que teórica, como preconiza a TSD. Porém ficou evidenciado que o mesmo possui dificuldade em multiplicações, acarretando ao erro no produto dos numeradores da fração.

No item b (Figura 2), inferimos que o estudante não atingiu as expectativas de resolução.


Situação 1

Determine o produto em cada item:	Resposta
$a)\ \frac{9}{2}\cdot\frac{5}{11}$ $b)\ \frac{1}{3}\cdot\frac{17}{10}$	b) $\frac{10}{51}$

Figura 2: Resposta do Aluno C para a situação 1b.

Fonte: Dados da pesquisa.

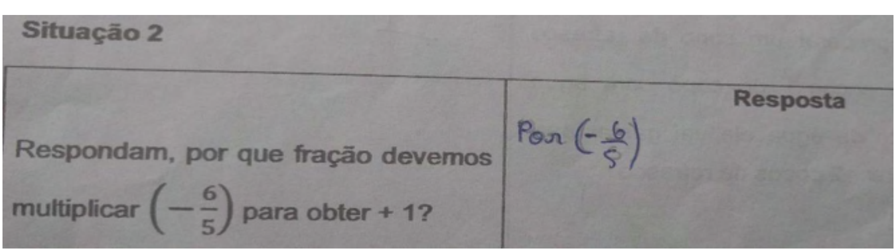
Sendo assim, identificamos que o estudante não atendeu às expectativas de resolução, pois realizou uma multiplicação utilizando o procedimento “meio pelos extremos”, normalmente utilizado mais comumente na resolução de situações envolvendo proporção (igualdade entre duas razões).

Este resultado, destoa do que foi evidenciado por Monteiro e Groenwald (2014), quando afirmam que a multiplicação de frações é uma das operações na qual os estudantes não apresentam muitas dificuldades, visto que os mesmos assimilam a multiplicação de frações com a multiplicação entre números naturais.

4.2 Situação de formulação

4.2.1 Situação 2

Esta situação solicitava que os estudantes encontrassem uma fração, que ao ser multiplicada por $(-\frac{6}{5})$ se obtém (+1). Nesse sentido, esta situação objetivou verificar se o estudante saberia interpretar que a solução do problema estaria relacionada a multiplicação com frações inversas, além de ser necessário que o mesmo soubesse fazer multiplicação com frações com sinais iguais, utilizando de mecanismos de provas para validação de sua resposta como propõe Brousseau (1986). Traremos para a discussão, a resposta do Estudante B (Figura 3).


Situação 2

	Resposta
Respondam, por que fração devemos multiplicar $\left(-\frac{6}{5}\right)$ para obter + 1?	Por $\left(-\frac{6}{5}\right)$

Figura 3: Resposta do aluno B para a situação 2.

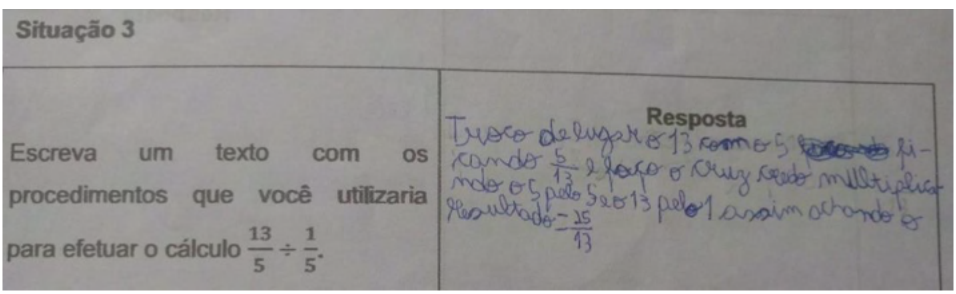
Fonte: Dados da pesquisa.

Na seguinte questão, o estudante observou que teria que multiplicar uma fração com mesmo sinal para se obter uma resposta positiva. No entanto não conseguiu interpretar que o problema necessitava da multiplicação de uma fração inversa à presente na questão. Com efeito, infere-se que o estudante não conseguiu aplicar informações anteriores como é posta na TSD. Neste caso, seria aplicar a informação de que o produto de frações inversas e opostas resultaria em (+1).

4.3 Situação de validação

4.3.1 Situação 3

A situação 3 solicitava que o estudante escrevesse um texto explicando os procedimentos que utilizaria para efetuar a divisão entre duas frações (sendo uma fração impropria e a outra própria). De acordo com o que propõe a TSD para as situações de validação, esperava-se que o estudante demostrasse conhecimentos sólidos pré-estabelecidos, havendo a necessidade de provar seus conhecimentos teóricos. Para exemplificar, traremos a resolução do estudante G (Figura 4).


Situação 3

	Resposta
Escreva um texto com os procedimentos que você utilizaria para efetuar o cálculo $\frac{13}{5} \div \frac{1}{5}$.	Troco de lugar o 13 com o 5 ~~[illegible]~~ ficando $\frac{5}{13}$ e faço o cruz credo multiplicando o 5 pelo 5 e o 13 pelo 1 assim achando o resultado $-\frac{25}{13}$

Figura 4: Resposta do estudante G para a situação 3.

Fonte: Dados da pesquisa.

Foi observado na resposta acima que o aluno possuía alguns conhecimentos pré-estabelecidos, pois apresentou formas de resolução normalmente utilizadas e intermediados pelo professor em sala de aula como a operação de meio pelos extremos, comumente descrito pelo estudante como cruz credo. Os argumentos do estudante, mostram que o mesmo inverteu erroneamente a fração pertencente ao numerador da divisão, já que o processo correto seria a inversão da fração pertencente ao denominador da divisão e não a multiplicação utilizando a técnica de "meios pelos extremos".

Essa reflexão vai de encontro ao que Monteiro e Groenwald (2014) apontou, no sentido de que a divisão de frações acaba se tornando uma das grandes dificuldades para os estudantes. Desta forma, percebemos que o estudante G não conseguiu utilizar um mecanismo de prova contundente (PAIS, 2011), não obtendo êxito em sua resolução.

4.4 Situação de institucionalização

As situações 4, 5 e 6 foram elaboradas para a fase da institucionalização. Neste momento, sob o controle do professor-pesquisador, o estudante necessitaria demonstrar conhecimentos sólidos pré-estabelecidos, visto que o mesmo deve empregar esquemas ao qual tenha sido adquirido em seu percurso de aprendizagem (BROUSSEAU, 1986). Assim, se torna ideal que o próprio aluno dê sentido às suas respostas, cabendo ao pesquisador o papel de verificar e tornar esta resposta um meio de reconhecer e dar valor a um saber, tornando-o referência para a turma.

Contudo, traremos aqui apenas a análise da Situação 4. Salientamos que, antes do professor intermediar o processo de formalização dos conceitos envolvidos nas estratégias de resolução das situações, os estudantes as resolveram individualmente e só depois iniciou-se a intervenção do pesquisador.

4.4.1 Situação 4

Neste momento, os estudantes foram defrontados com a seguinte situação "Rui comeu $\frac{1}{4}$ do bolo e Mara comeu $\frac{1}{5}$. Que fração do bolo sobrou?". O estudante L, por exemplo, utilizou a estratégia mostrada na (Figura 5).

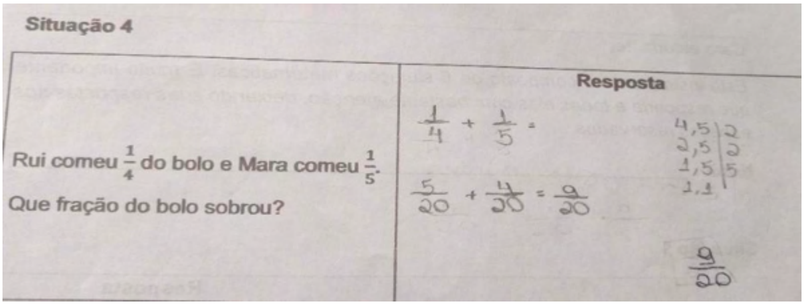


Figura 5: Resposta do estudante L para a Situação 4.

Fonte: Dados da pesquisa.

Da análise do esquema da (Figura 5), percebe-se que o estudante inicialmente observou que teria que fazer a adição das frações correspondentes as partes do bolo comidas por Rui e Mara. Para tanto, necessitou transformar as duas frações em denominadores comuns, utilizando cálculo do MMC (decomposição em fatores primos). No entanto, não se ateve à interpretação do problema, dando a resposta da fração comida pelos dois como resposta final.

Assim como em Monteiro e Groenwald (2014), foi possível perceber que o alto nível de erros nesta situação, esteve relacionado à interpretação do problema, pois alguns dos estudantes resolviam a operação de adição corretamente, porém não conseguiram chegar a resposta correta por não utilizar a operação de subtração.

A partir das intervenções do pesquisador nesta situação, percebe-se que os grupos foram desenvolvendo métodos variados de resolução e obtendo resultados satisfatórios. Isso permitiu que em alguns momentos os membros de alguns grupos se comunicassem, buscando melhor compreender a situação através do diálogo entre o pesquisador e os colegas, atingindo níveis maiores de evolução conceitual.

5 I CONSIDERAÇÕESFINAIS

Este trabalho se prestou a investigar as dificuldades de um grupo de 15 estudantes do 7º ano do ensino fundamental diante das quatro operações fundamentais com frações. O desempenho dos alunos na resolução dos problemas, possibilitou observar que os mesmos demonstraram diferentes evoluções de aprendizagem nas operações com frações, ficando evidenciado principalmente dificuldades na interpretação de problemas mais abertos.

Notamos que em muitos casos os estudantes utilizaram de técnicas de resolução normalmente postas pelos professores em sala de aula, como facilitador para o desenvolvimento dos cálculos. Contrariamente, em muitos casos foi possível observar que estes estudantes cometeram erros pois não possuíam desenvolvimento pleno das estratégias adequadas, explicitando esquemas de resoluções incoerentes.

A TSD tornou-se imprescindível para o desenvolvimento do trabalho, auxiliando de forma direta na elaboração do questionário e na mediação do conhecimento professorestudante, além de ajudar a entender quais situações apresentaram maiores dificuldades. Trabalhos como de Silva e Perovano (2012) e Monteiro e Groenwald (2014) entre outros, possibilitaram constatar que operações envolvendo multiplicação e divisão de frações aliados a problemas que exigem mais interpretação continuam sendo os maiores vilões dos estudantes na resolução de problemas envolvendo frações.

Apesar da gama de trabalhos e pesquisas que investigam a aprendizagem no contexto dos números racionais (operações com frações), este trabalho suscitou uma investigação mais específica no papel do professor como sujeito que articula o saber para o estudante, buscando explicitar as dificuldades de aprendizagem, que quando refletidas, possa auxiliar no desenvolvimento pleno do saber do estudante. Desta forma, este trabalho abriu caminhos para se discutir o conhecimento matemático especializado, necessário ao professor que ensina operações com frações nos anos finais do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental.**Parâmetros Curriculares Nacionais terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental:** introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais.Brasília :MEC/SEF, 1998. 174 p.

BROUSSEAU, G. **Theorisation desphénomènos d"enseignementdes mathématiques**.These détat, Univesité de BordeausI, 1986.

CANOVA, R.F.**Crença, concepção e competência dos professores do primeiro e segundo ciclos do ensino Fundamental com relação a fração**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática,PUC, São Paulo, 2006.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa: Métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Porto Alegre. Editora: Artmed. 2ª, 2007.

MONTEIRO, A; GROENWALD, C **Dificuldades na aprendizagem de frações:** reflexões apartir de uma experiência utilizando testes adaptativos. SãoJosé-RS: ALEXANDRIA Revistade Educação Em Ciência e Tecnologia, 2014.33 p.

PAIS, L. C. **Didática da matemática: uma análise da influência francesa**. 3a.ed. Belo Horizonte: Autêntica., 2011.

SILVA,C;PEROVANO,A.**Obstáculos na compreensão de frações por alunos da educação básica**. Petrópolis-RJ: V Seminário Internacional de Pesquisa Em Educação Matemática, 2012. 21 p.

SILVA, A. F. G. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: analise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como o objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações**. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2007.

CAPÍTULO 21

AS POTENCIALIDADES DE UMA AULA DO CAMPO NO ENSINO FUNDAMENTAL II

Data de aceite: 01/09/2021
Data de submissão: 21/08/2021

Marco André Dantas
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Programa de Pós Graduação de Matemática
Londrina-PR
http://lattes.cnpq.br/3566237335555819

Leonardo Sturion
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Londrina-PR
http://lattes.cnpq.br/7994134300926513

RESUMO: A docência de trigonometria no ensino fundamental e médio, geralmente se apresenta na forma de exercícios decorativos (tanto por meio de fórmulas, quanto por meio de exercícios repetitivos), o que por sua vez não traz um bom aproveitamento por parte dos alunos. Pois, os mesmos ficam reféns de um conhecimento mecânico, a consequência disso é a incapacidade de realizar situações problemas. Para resolver esse impasse, as aulas do conteúdo de trigonometria vêm com contextualizações presentes no cotidiano. Porém, mesmo com essa alternativa, os alunos muitas vezes não conseguem compreender o conteúdo na prática. Assim, este estudo buscou observar e analisar pontos positivos e negativos em uma aula extraclasse, que denominaremos de “Aula de Campo”, baseado em uma experiência de ensino que abordou o conteúdo “semelhança de triângulos” em uma escola particular no Norte do Paraná, na qual o professor é um dos pesquisadores. A metodologia usada na pesquisa é de cunho descritivo com foco qualitativo. Os dados foram colhidos, com os registros dos 19 alunos do 9 ano, que se separaram em 6 grupos, mediante a fotos e relatório. Os resultados encontrados relatam uma observação dos prós e contras de uma “Aula de Campo”. Desta maneira, buscando um direcionamento para professores que tenham intuito de realizar uma aula embasada nesta metodologia.

PALVRAS-CHAVE: Aula de Campo. História da trigonometria. Semelhança de triângulos.

POTENTIALITIES OF A FIELD CLASS IN ELEMENTARY EDUCATION II

ABSTRACT: Teaching trigonometry in elementary and high school is usually shown in manner of memorizing exercises (as through formulas as by repetitive exercises), wich does not bring a good performance of the students. Because they are hostages of a mechanical knowledge, the consequence is their inability to carry out problem situtations. To solve this impasse, trigonometry content classes comes with a quotidian contextualization. However, even with this alternative, students often cannot comprehend its content to put into practice. Thus, this study sought to observe and analyze positive and negative points in an extra-class, wich we will call “Field Class”, based on a teaching experience that addressed the subject “likeness of triangles” in a private school in Northern Paraná, in wich the teacher is one of the researchers. The

methodology used in the research is descriptive with a qualitative focus. Data were collected from the records of 19 students from the 9th grade, who were separated into 6 groups, using photos and a report. Results found report an observation of the pros and cons of a “ Field Class”. Therefore, seeking guidance for teachers who intend to conduct a class based on this methodology.
KEYWORDS: Field Class. History of Trigonometry. Similarity of triangles.

AULAS DE CAMPO NO ENSINO FUNDAMENTAL II

Ainda, nos dias atuais existe uma grande dificuldade no ensino-aprendizagem das ciências exatas, especialmente na matéria de trigonometria. Nesta, a dificuldade pode ser facilmente observada não somente no ensino-aprendizado, mas também na contextualização do assunto.

Historicamente, a trigonometria surgiu da necessidade de resolver problemas de cálculos de distancias inacessíveis. No entanto, nesta época não se tinha conhecimento da palavra “trigonometria”, de acordo com historiadores esta palavra surgiu somente no século XVI depois de Cristo.

De acordo com Lindegger (2000), na astronomia, é impossível o estudo de fases da lua, pontos cardeais e estações do ano sem o uso de triângulos, um sistema de medida e uma escala. Desta forma, esta afirmação nos remete ao pensamento de que as primeiras ideias da exploração do pensamento trigonométrico estavam ligadas a Astronomia. Por terem sido grandes contribuintes à Geometria, os gregos também são tidos como colaboradores de ideias ligadas à Trigonometria. De diversos estudiosos gregos destacamos Tales de Mileto, que ao passar pelo Egito estabeleceu relações para calcular a altura da Pirâmide de Quéops, o que hoje conhecemos por tangente. E Pitágoras a ele atribui a relação, o quadrado da hipotenusa é igual ao quadrado dos catetos, hoje conhecida como relação fundamental da Trigonometria.

Além destes, podemos citar também, Hiparco de Nicéia (180-125 a.C.), que introduziu uma única “função trigonométrica”, denominada de função da corda, a partir dela ele associou a cada corda de um arco um ângulo central correspondente, desta forma, foi possível estabelecer uma tabela trigonométrica, onde os ângulos variam de 0° a 180°, considerando a divisão de Hipsicles do círculo de 360 partes, denominou de arco de 1 grau a cada parte em que a circunferência ficou dividida; calculou a distância entre a Terra e a Lua e por conta do avanço em seus estudos ficou conhecido por Pai da Trigonometria.

Poderíamos citar ainda os árabes que aprimoraram a Trigonometria no estudo da Astronomia e aplicaram à cartografia, os povos do ocidente que direcionaram a Trigonometria ao estudo de problemas cartográficos e topográficos, entre tantos outros estudiosos que contribuíram para o surgimento da Trigonometria.

Na atualidade, ao observar pesquisas voltadas para o ensino-aprendizagem de Trigonometria, percebe-se que os educadores fazem uso de diferentes alternativas metodológicas para trabalhar Trigonometria em sala de aula. Com o objetivo de tornar as aulas mais atrativas, mais presentes no cotidiano e que as atividades sejam atraentes para os alunos e que o professor utilize um material adequado.

Santos e Gualandi (2016), baseados nas ideias de Turine e Pérez (2006) afirmam que o a utilização do material é dependente do profissional que o utiliza, assim como do conteúdo que será estudado, dos objetivos a serem alcançados e do tipo de aprendizagem a ser atingida.

Sampaio (2008) identificou como dificuldade dos alunos na compreensão da Trigonometria, uma prática docente superficial, que não enfatiza o processo histórico e evolutivo do conteúdo, desta maneira o ensino torna-se complicado, favorecendo a não compreensão de funções trigonométricas. Nesse contexto, é comum que os alunos indaguem porque estudar trigonometria? De acordo com Oliveira (2010), os alunos entendem os elementos da Trigonometria como um amontoado de fórmulas que não tem sentido algum, fazendo com que o conteúdo da trigonometria seja um dos principais causadores do mau desempenho dos alunos na escola, sua evasão e reprovação. Outro dilema no ensino da Trigonometria é a distribuição curricular, uma vez que os professores precisam lecionar muitos conteúdos durante um ano letivo, e por este motivo muitas vezes acabam deixando muita coisa pra trás.

Sendo a Trigonometria um dos conteúdos que requerem uma maior quantidade de aulas, visto que, os alunos tendem a ter uma maior dificuldade para o entendimento e aplicações de conceitos, não seria exagerada a ideia de aulas extraclasse para o ensino-aprendizagem da trigonometria. Nesse contexto, o objetivo do presente estudo é a observação de prós e contras de aulas extraclasses em aulas de semelhança de triângulos.

PRINCÍPIO DA TRIGONOMETRIA

Antes de mostrar a nossa proposta e como faremos a análise, temos que falar da história do princípio da trigonometria, de como evolutivamente, na forma de aprender, entender e ensinar. Uma vez que, a História é fundamental para formar cidadãos, pois mostra que antes de entender o presente é necessário compreender os caminhos já percorridos pela sociedade (SAVIANI, 1998).

Antes de ensino-aprendizado é necessário que se faça um levantamento da importância e do porquê do surgimento dessa área tão importante da matemática. Pois, o tipo de questão epistemológica dirige a pesquisa do historiador quando este tenta descobrir circunstancias histórica e sociais sob as quais as invenções matemáticas surgiram. É muito vantajoso o estudo sobre o processo individual e histórico do desenvolvimento matemático; mesmo se os problemas com os quais os alunos eventualmente venham a se deparar sejam diferentes daqueles que os cientistas tenham se deparado no passado, é de extrema importância para a Psicologia da Educação Matemática que seja considerado o relacionamento entre o conhecimento desses problemas (VERGNAUD, 1994). Ou seja, não queremos aprofundar na parte histórica, mas sim fazer dela uma ferramenta de contextualizações para os alunos.

A busca da história da trigonometria, principalmente da origem é do porque ela foi criada, e por consequência, ir de encontro com o nosso trabalho, onde queremos resolver problemas com a trigonometria, e não como a usamos hoje, de aprendermos a trigonometria para depois buscarmos problemas que possam ser resolvida das por ela

No primeiro momento, o pensamento trigonométrico surgiu para resolver problemas de distancias inacessíveis, principalmente ligadas a astronomia. Lindegger (2000) afirma que o estudo das fases da lua, os pontos cardeais e as estações do ano só são possíveis graças a um sistema de medida em escala. Porém essa trigonometria era a esférica, que conforme o mesmo Lindegger (2000) foi por muito tempo a maior aplicação.

Pode-se dizer também, que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios.

Foram os gregos que denominaram a palavra trigonometria que é entendida como as medidas das partes de um triangulo. E entre eles também tiveram vários pensadores sobre a geometria e por consequência a trigonometria, com destaque a Tales de Mileto em passagem pelo Egito, estabeleceu relações para medir a altura da Pirâmide de Quéops, o que nos dias atuais é chamado de tangente, esta ferramenta é utilizada para aferir distancias inacessíveis (NASCIMENTO, 2014). Podemos citar também, Pitágoras, cuja relação atribuída a ele - o quadrado da hipotenusa é igual ao quadrado dos catetos- é a relação fundamental da Trigonometria até os dias atuais (NASCIMENTO, 2014).

Hiparco de Nicéia, entre os anos de 180 a 125 a. C. pode ser considerado o pai da trigonometria, pois "foi ele que conhecido historicamente, fez a relação da astronomia com a geometria, criando assim a trigonometria" (NETO, 2011). Uma das suas principais obras que corrobora com essa visão é o tratado em doze livros, onde existem registros que podem ser considerada a primeira tabela trigonométrica. Porem depois de um tempo Claudio Ptolomeu, criou a *Síntese da Matemática,* que é segundo (NETO, 2011) "é a principal obra da trigonometria da antiguidade, denominado Almagesto, que seu significado é "Grande coleção"". Nesta obra aparece a identidade trigonométrica, tabelas de cordas, e várias demonstrações de relações trigonométricas.

Ao falarmos da origem da trigonometria, não podemos esquecer de citar a contribuição dos hindus, eles também trazem uma coleção de textos que se denomina "*Surya Sidhanta*", que traduzido para o português significa sistemas de astronomias. De acordo com Neto (2011), esta obra "denominou jiva, a relação da meia corda e da metade do ângulo central usando a trigonometria".

> A Trigonometria hindu era essencialmente aritmética, ao contrário da grega, muito mais geométrica. Com as mudanças introduzidas (inclusive quanto ao

> comprimento do raio considerado), as tabelas de Ptolomeu foram refeitas, utilizando os métodos de tabulação. (LINDEGGER, 2000, p. 52).

Mas ao falarmos da história de trigonometria não pode ficar preso em algumas culturas, pois sempre foi necessária à sua utilização, mesmo que ainda não soubesse da sua definição. Tem vários indícios de utilização doa Árabes, indianos e outros. Mas como dito anteriormente a intenção é dar uma breve história da origem de tal matéria. Também não podemos esquecer que a trigonometria obteve uma grande evolução histórica com a participação de vários povos, e suas concepções cientifica, mas não foi o alvo desse estudo.

METODOLOGIA DA PESQUISA

A pesquisa realizada tem natureza aplicada, com abordagem qualitativa utilizando-se de tratamento de dados quantitativos como complementaridade para melhor explicar os objetivos da investigação, do tipo exploratória e interpretativa, de acordo com Bogdan e Biklen (1994).

A pesquisa é de cunho qualitativo, onde, não se buscou uma maneira mais eficiente no ensino-aprendizagem, e sim, uma observação de aulas diferenciadas, e suas vantagens. Os dados foram obtidos por meio de informações contidas nos relatórios dos alunos e também de um questionário realizado após a pratica.

A pesquisa foi realizada em uma escola particular na cidade de Bela Vista do Paraíso-PR, com dezenove estudantes do nono ano do ensino fundamenta II. A ideia de realizar o trabalho com a turma foi bem aceita por todos os alunos, por se tratar de uma aula "diversificada", os mesmos ficaram entusiasmados e por consequência foi obtido o percentual de 100% de participação.

A amostra foi obtida por conveniência (AMADO, 2013; YIN, 2014). O período de coleta foi no primeiro semestre de 2019 e atendeu as normas e os requisitos de ética da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Londrina, com os procedimentos padrão de consentimento.

A escola foi escolhida por conveniência uma vez, que um dos pesquisadores é docente nesta escola. Foram realizados 6 relatórios e 19 questionários por parte dos alunos. Nos relatórios, os mesmos descreviam as realizações das tarefas, além disso, as medições foram registradas por meio de fotos. Esta atividade foi realizada em grupos de 3 ou 4 alunos, os questionários eram constituídos por 5 perguntas, onde os alunos relatavam suas opiniões. Ao todo, foram realizados 5 encontros, com duração de 50 minutos cada e em todos os encontros participaram os 19 alunos.

O projeto denominado "Aula de Campo" teve como objetivo observar e analisar o ensino-aprendizagem em uma aula extraclasse. As observações tinham o objetivo de constatar os prós e contras de tal aula. Dessa forma, mesmo que de maneira sucinta, realizar uma pequena amostragem de conhecimento para futuros professores com o intuito de praticar aulas com esta metodologia.

Na primeira fase do projeto, os alunos elaboravam um relatório no qual deviam aferir lugares altos fazendo o uso de semelhança de triângulos, usando apenas uma trena e a sombra do objeto proveniente do sol. Os alunos anotavam as medidas e registravam as atividades com fotos. Em seguida, ainda usavam a semelhança de triângulos, mas desta vez não podiam mais usar a sombra do sol, para aferir os mesmos objetos. Na segunda fase foram elaborados questionários, para coleta das opiniões dos alunos. No questionário, eles relatavam se a atividades tinham sido prazerosas, proveitosas, etc.

A metodologia adotada para a análise dos resultados do projeto foi à descritiva qualitativa, o ambiente foi a própria fonte de dados, não podendo ter rasuras ou interferências pessoais do pesquisador, descrevendo a maior quantidade de elementos originais produzidos pelos alunos na investigação. Nesse projeto enfatizou-se a metodologia de Aulas Proativas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os dados foram recolhidos depois de ministradas às aulas do conteúdo de casos de semelhanças de triângulos (caso ângulo-angulo). A aula foi ministrada pelo o professor regente da turma que seguiu o seu planejamento anual feito para aquela escola e para aquela turma. Foi seguido o encaminhamento pedagógico da apostila adotada. Onde, se fazia o direcionamento para uma aula de resolução de problemas, assim, o intuito do presente projeto foi fazer uma tentativa de complemento e/ou uma nova perspectiva de visão por parte dos alunos do conteúdo já aprendido, constatou-se que a aula de campo pode trazer benefícios seja na fixação de conteúdo, ou na contextualização e também possibilitou observar as eventuais dificuldades que podem surgir.

No segundo momento, depois de finalizado o conteúdo por parte do professor, foi iniciado o projeto com os alunos. Antes de levar os mesmos para fora da sala, para fazer os levantamentos dos dados dos lugares altos e/ou de lugares interessantes, foi retomado um exercício para discussão e uma exemplificação de que forma e por que fariam as medições. Além disso, a retomada do exercício teve o intuito também de auxiliar nas medidas em condições de climáticas favoráveis, ou seja, dias de sol, por consequência dias de sombra.

EXERCICIO 1

Para descobrir a altura de um prédio, Luiz mediu a sombra do edifício e, em seguida, mediu sua própria sombra. A sombra do prédio media 7 metros, e a de Luiz, que tem 1,6 metros de altura, media 0,2 metros. Qual a altura desse prédio?

Na retomada da resolução desse problema os alunos foram indagados pelo professor com a seguinte questão:

Professor – Como podemos fazer a medição de uma arvore alta usando esse problema?

Aluno 1- Um aluno pode subir lá em cima.

Professor – Repito, usando o problema que acabei de resolver.

Aluno 2 – Ora, medindo a sombra dessa árvore.

Professor – Muito bem, mas nos exercícios eram realizadas comparações de sombras e tamanhos, como podemos fazer isso?

Aluno 3 – Sei lá!

Professor – Vamos retomar o problema... O que ele mediu?

Aluno 2 – Ele mesmo, e também sua sombra.

Professor – Então, é isso que vocês irão fazer, com o tamanho e a sombra de alguém do grupo.

Aluno 4 – Como assim?

Aluno 5 – Vamos medir o aluno 2, e depois sua sombra… lá fora, porque aqui não tem sombra né

Professor – Isso mesmo então vai descer e fazer as medições, mas quero que vocês realizem um relatório.

Aluno 3 - Como assim?

Professor – Descrever o que estão fazendo, exemplo medir a altura de um aluno e também de sua sombra, e não se esquecer de tirar fotos das medições. O relatório pode ser do formato que julgarem mais convenientes.

Assim, os alunos desceram para o pátio da escola, onde começaram as aferições. Foram formados 6 grupos, onde, 5 grupos eram compostos por 3 alunos e 1 grupo era composto por 4 alunos, cada grupo tinha uma trena métrica que foi distribuída pelo pesquisador. Desta forma, descreveremos as medições que julgamos as mais importantes.

Medida 1 – Arvore Central

A primeira medição foi a da arvore central do pátio da escola, onde o grupo um, fez as medições do aluno Nicholas e de sua respectiva sombra (Imagem 1). Posteriormente, o grupo aferiu a sombra da arvore, em seguida foi realizada a semelhança de triângulos e encontrada a altura aproximada da arvore. Após, os dados serem recolhidos foram realizados os cálculos para descobrir o valor da altura da arvore.

Figura 1: Aluno medindo sua própria altura e sombra, respectivamente, com o auxílio dos colegas de classe.

Fonte: Próprio autor.

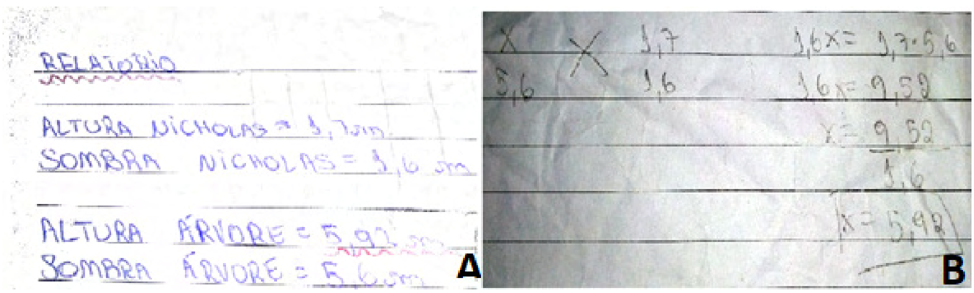


Figura 2: Relatório elaborado pelos alunos em sala de aula.

Fonte: Próprio autor.

Em conclusão, os alunos desse grupo, observaram que a arvore tem aproximadamente 5,92 metros de altura.

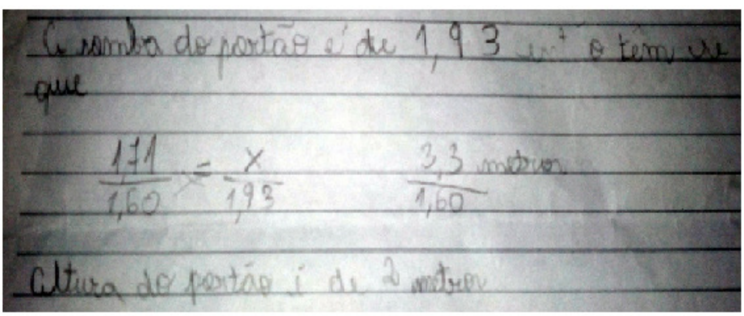
Medida 2 - Portão da Escola

Esta média foi realizada com o intuito de observar se realmente são corretas as medições realizadas por esta metodologia, ou seja, foi realizada a prova real. Para isto, foi medido o portão da escola, que era possível medir e observaram que a altura do mesmo era aproximadamente 2 metros, em seguida os alunos calcularam a altura e a sombra do aluno Vinicius, em que encontraram sua medida de 1,71 metros e sua sombra 1,60. Posteriormente, foi medida a sombra do portão da escola (Imagem 4), e foi encontrada a medida de 1,93 metros:

Figura 3: Aluna medindo a sombra do portão da escola com uma fita métrica.

Fonte: Próprio autor.

Com os valores conhecidos, eles fizeram o cálculo para descobrir a veracidade do procedimento de semelhança de triângulos.



A sombra do portão é de 1,93 m e tem-se que

$$\frac{1{,}71}{1{,}60} = \frac{x}{1{,}93} \qquad \frac{3{,}3 \text{ metros}}{1{,}60}$$

Altura do portão é de 2 metros

Figura 4: Relatório sobre as medições e cálculo da altura do portão.

Fonte: Próprio autor.

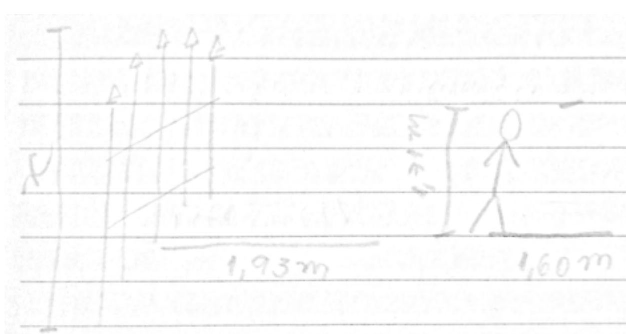


Figura 5: Representação ilustrada do cálculo da altura do portão.

Fonte: Próprio autor.

Assim, eles concluíram que a altura do portão é realmente aproximadamente 2 metros.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em relação aos questionários, conclui-se que foram obtidos êxitos na parte da estimulação. Uma vez que se tratava de uma aula extraclasse, na qual os alunos ficaram mais entusiasmados devido ao fato de se tratar de uma atividade diversificada, e não uma aula “tradicional”. Onde, temos um professor tentando passar conteúdos e alunos tentando aprender.

A respeito das contextualizações, o resultado foi favorável. Pois, se tratou de uma atividade prática, na qual havia uma situação problema, onde os alunos tiveram que fazer medições com trenas, considerando que muitos dos alunos envolvidos não apresentavam habilidades para o manuseio de tal ferramenta, é de grande valia a experiência obtida neste quesito por estes alunos. Bem como na assimilação de semelhança de triângulos caso ângulo-ângulo.

O trabalho em equipe proporcionou aos alunos uma noção pratica de trabalho em grupo. O conteúdo foi bem assimilado, uma vez que os alunos foram capazes de aferir os locais determinados, mesmo que com equívocos, e também foram capazes de elaborar e resolver os cálculos necessários.

A pesquisa dá a convicção de que professores de ensino fundamental II, devem investir em uma metodologia mais dinâmica, afim de estimular os alunos e ao mesmo tempo tornar as aulas menos cansativas e repetitivas. Nesse contexto, seria possível obter uma nova perspectiva e contextualização do ensino-aprendizagem em aulas de matemática.

Todavia, para que isso seja realizado com sucesso, é necessário que o professor seja um norteador na aplicação e desenvolvimento das atividades. Além de aprender a observar o desenvolvimento e saberes por parte dos alunos. Porém, este não deve tomar ar de superioridade. Desta forma, o professor também estaria aprendendo e não somente ensinando.

As “aulas de campo” esporádicas trouxeram grandes benefícios ao aprendizado. Pois, como já dito anteriormente, possibilitou que os alunos colocassem em pratica a teoria, enfrentaram os desafios do trabalho em grupo, além de tornar as aulas mais motivadoras e prazerosas. No entanto, os professores não devem esquecerem de tomar as precauções e direcionamentos necessários para obter melhor proveito das aulas.

REFERÊNCIAS

AMADO, J. **Manual de investigação qualitativa em educação**. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra, 2013.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto, 1994.

COSTA NETO, D. P. Dando corda na trigonometria. 2011. 61 f. Tese (Doutorado em /////) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2011. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/373/1/PDF%20-%20Deocl%C3%A9cio%20Pinto%20da%20Costa%20Neto.pdf>. Acesso em: 11 jun. 2019.

GIOVANNI. J. R.; GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática** – 9 ano. São Paulo: FTD, 2015.

NACARATO. A. M.; PASSOS. C. L.; ORFALI. F. **Coleção anglo vestibulares ensino fundamental 9 ano**. São Paulo: Anglo, 2014.

NASCIMENTO, Maurício Alves. Trigonometry Learning-Teaching through solution and exploration of everyday problems in the classroom. 2014. 219 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

SAVIANI, Dermeval; LOMBARDI, José Claudinei. **História e história da educação: o debate teórico-metodológico atual**. Autores Associados, 2018.

SANTOS, R. C.; GUALANDI, J.H.*;* Laboratório de ensino de matemática: o uso de materiais manipuláveis na formação continuada dos professores. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM**; ISSN 2178-034X, São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

YIN, Robert K. **Case study research**: design and methods. California: Sage ublications, 2014.

SOBRE OS ORGANIZADORES

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA - Professor do Departamento de Educação da Universidade do Estado da Bahia (Uneb - Campus VII) e docente permanente do Programa de Pós-Graduação Mestrado em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA (Uneb - Campus III). Atualmente coordena o Núcleo de Pesquisa e Extensão (NUPE) do Departamento de Educação da Uneb (DEDC7). Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB), Especialista em Psicopedagogia Institucional e Clínica pela Faculdade Regional de Filosofia, Ciências e Letras de Candeias (IESCFAC), Especialista em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pelo Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco (CESVASF). Foi professor e diretor escolar na Educação Básica. Coordenou o curso de Licenciatura em Matemática e o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) no Campus IX da Uneb. Foi coordenador adjunto, no estado da Bahia, dos programas Pró-Letramento e PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa). Participou, como formador, do PNAIC/UFSCar, ocorrido no Estado de São Paulo. Pesquisa na área de formação de professores que ensinam Matemática, Ludicidade e Narrativas. Integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/UFSCar), na condição de pesquisador, o Grupo Educação, Desenvolvimento e Profissionalização do Educador (CNPq/PPGESA-Uneb), na condição de vice-líder e o Laboratório de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/LEPEM-Uneb) na condição de líder. É editor-chefe da Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM) e da Revista Multidisciplinar do Núcleo de Pesquisa e Extensão; e coordenador do Encontro de Ludicidade e Educação Matemática (ELEM).

ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA - Doutorando em Educação pela Universidade Federal do Sergipe - UFS/PPGED. Mestre em Educação de Jovens e Adultos pela Universidade do Estado da Bahia - UNEB/MPEJA (2018), com Especialização em Tópicos Especiais de Matemática (2020), Ensino de Matemática (2018), Educação de Jovens e Adultos (2016), Matemática Financeira e Estatística (2015) e Gestão Escolar (2008). Licenciado em Matemática pela Universidade Nove de Julho (2000). Atualmente é professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - IF Sertão/PE. Coordenou o Curso de Licenciatura em Matemática pelo Plano Nacional de Formação dos Professores da Educação Básica - PARFOR pela Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus XVI - Irecê-BA. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Formação de Professores e Tecnologias da Informação e Comunicação - FOPTIC (UFS/CNPq) e do Laboratório de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática - LEPEM (UNEB/CNPq). É editor assistente da Revista Baiana de Educação Matemática - RBEM, uma publicação do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA da Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus III - Juazeiro/BA em parceria com o Campus VII - Senhor do Bonfim/BA da mesma instituição e com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - IF Sertão-PE, Campus Santa Maria da Boa Vista/PE.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

M

N

O

P

R

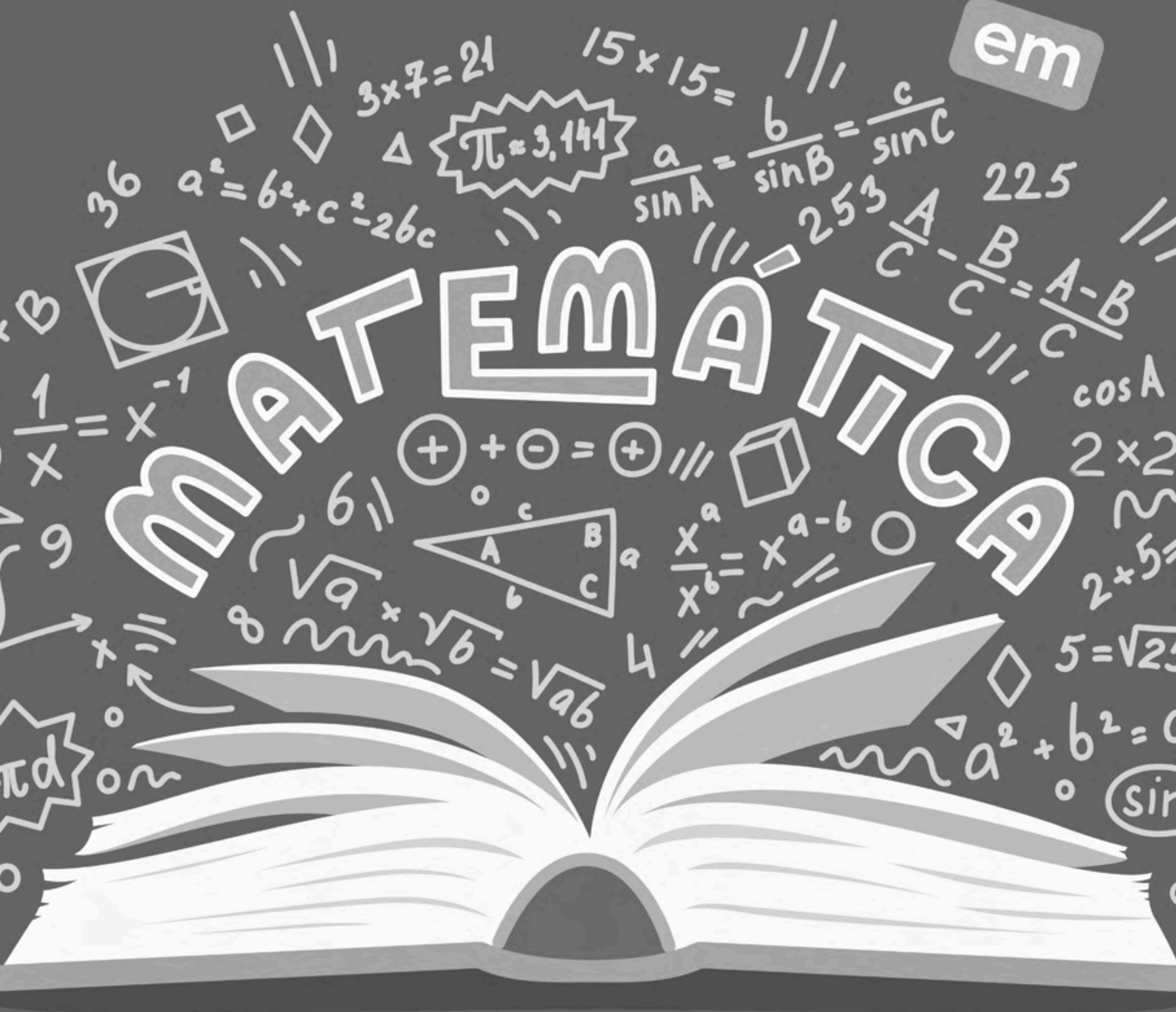
S

T

V

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

PESQUISAS DE VANGUARDA em MATEMÁTICA e suas aplicações



Atena Editora
Ano 2021

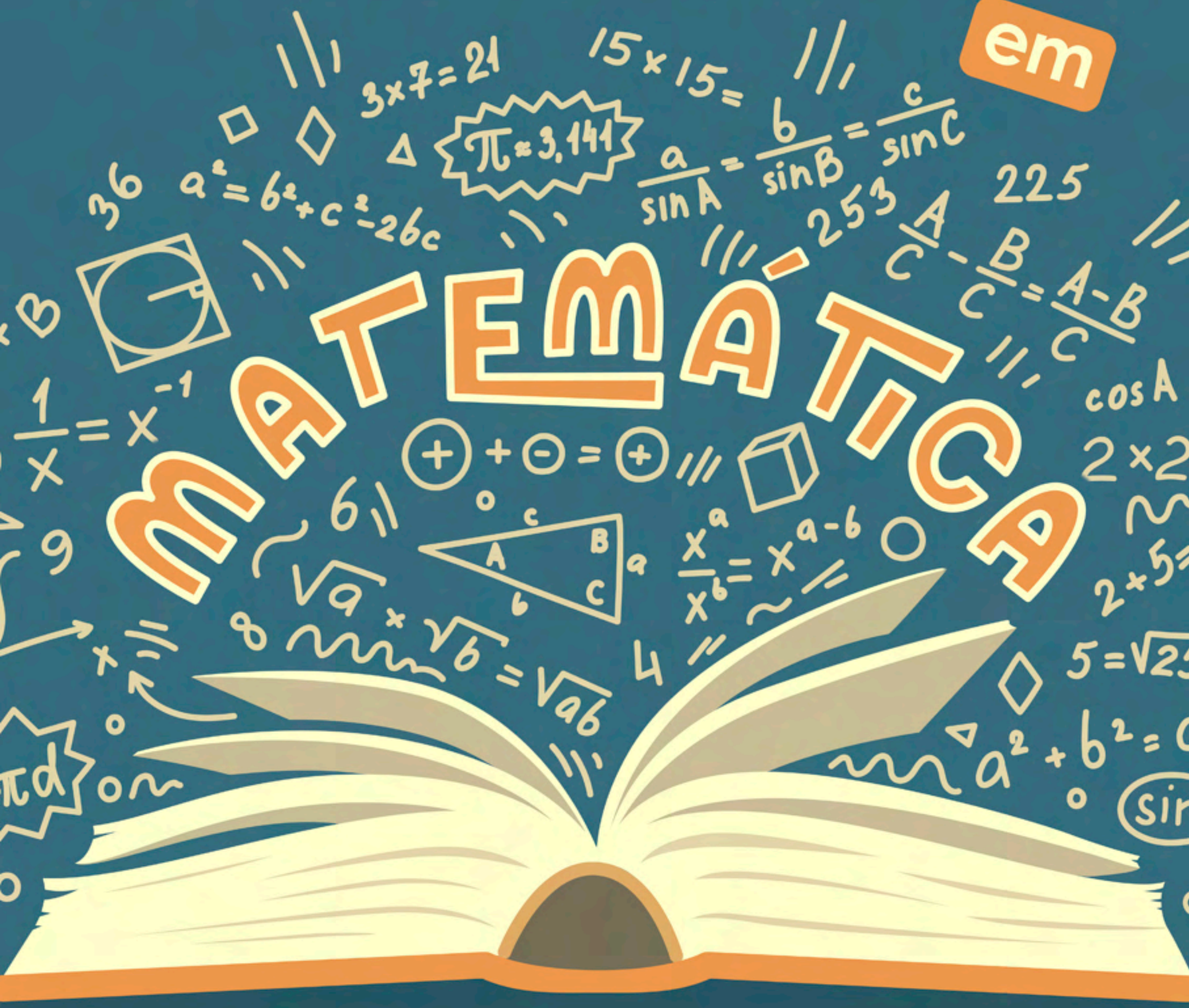
www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

PESQUISAS DE VANGUARDA em MATEMÁTICA e suas aplicações



Atena Editora

Ano 2021