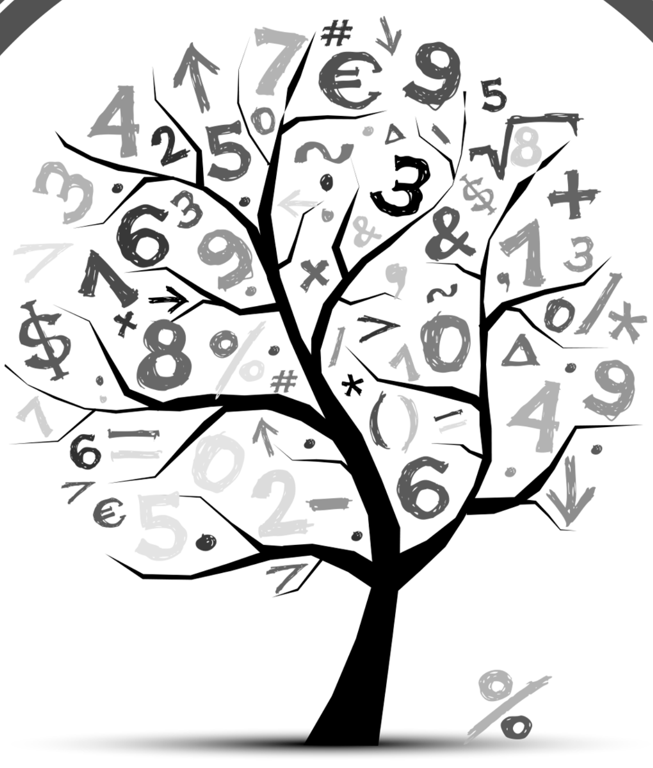
INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)

Atena Editora
Ano 2020

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA
ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA
MIRIAN FERREIRA DE BRITO
(ORGANIZADORES)



Atena
Editora
Ano 2020

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Camila Alves de Cremo
Correção: Vanessa Mottin de Oliveira Batista
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
Mirian Ferreira de Brito

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I62 Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira, Mirian Ferreira de Brito. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-610-2
DOI 10.22533/at.ed.102201012

1. Matemática. 2. Conhecimento. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Lucas (Organizador). III. Brito, Mirian Ferreira de (Organizadora). IV. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2020

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos.

Atena Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o “novo” exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro “***Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática***”, em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todas e a todos uma boa leitura!

Prof. Dr. Américo Junior Nunes da Silva

Prof. Me. André Ricardo Lucas Vieira

Profa. Dra. Mirian Ferreira de Brito

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

MATHEMATICAL MODELING AND BIDIMENSIONAL SIMULATION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS FOR TURBULENT FLOW IN INCOMPRESSIBLE NEWTONIAN FLUIDS AROUND ISOTHERMAL GEOMETRIES

Data de aceite: 17/11/2020
Data de submissão: 06/10/2020

Rômulo Damasclin Chaves dos Santos
Postdoctoral Researcher Fellow
Campinas State University – UNICAMP/SP
Campinas, São Paulo
http://lattes.cnpq.br/5416661457556148

ABSTRACT: An immersed boundary method is development for the fluid-body interaction, being consider the heat-transfer for the onset turbulence in two-dimensional (2D) thermofluid dynamics around isothermal complex geometries immersed in incompressible Newtonian flows. The fluid motion and temperature are defined on a fixed Eulerian grid, while the immersed body is defined on a Lagrangian grid. A virtual physical model is used for the diffusion of interfacial forces within the flow, guarantees the imposition of the no-slip boundary condition. This model dynamically evaluates not only the force that the fluid exerts on the solid surface, but the heat exchange between them. Therefore, this work presents the Navier-Stokes equations, together with the energy equation, under physically appropriate boundary conditions. To calculate the turbulence viscosity, two models where used, to know, the Smagorinsky model, implemented in the context of the Large Eddy Simulation (LES) model, and Spalart-Allmaras model, based on Unsteady Reynolds Average Navier-Stokes Equation (URANS). For all simulations, a computational code was developed to calculate different dimensionless numbers, such as, lift and drag coefficients, Nusselt, Strouhal numbers, among other. The results are compared with previous numerical results, considering different Reynolds numbers.

KEYWORDS: Immersed Boundary Method, Mixed Convection, Laminar and Turbulent Flow.

1 I INTRODUCTION

Many physical phenomena in fluid mechanics can be describe by mathematical modeling, using a set of partial differential equations, often nonlinear, known as the laws of conservation of fluid mechanics, they are: conservation of momentum, conservation of mass (continuity) and energy. These laws together model the dynamics of the forces acting on the fluid, as well as, the energy exchange that occurs in the different regions of the flow. In this work, this set of equations was discretized by finite difference method, for incompressible Newtonian fluid, where it relates the term of viscous stresses with the deformation rates in the velocity field, thus simulating the flow dynamics with the called Navier-Stokes equation.

Traditional methods of domain discretization present some difficulty in terms of implementation and calculation time, requiring successive remeshing process (reconstruction of new mesh) for each new iterative process, in addition to the need to introduce a new generalized coordinate system. Thus, considering these physical and mathematical problems, a computational code was developed for the immersed boundary methodology for the thermofluid dynamics interaction. We present some of the main works involving the immersed boundary method, considering the heat-transfer by mixed convection process. The purpose of this set of references is the preparation for the theoretical foundation of the methodology, bringing greater ease with respect to the immersed boundary methodology, extracting important physical and mathematical conceptual points, which will be applied in the methodology of interest in this work. Among the main references involving the thermal part, we can list some important ones, such as, Badr & Dennis (1985) and Badr *et al*. (1990). These works do not present the immersed boundary method, but they are an excellent precursor in relation to the flow around rotating circular cylinder involving forced convection, being the theoretical basis used in other important works for the implementation of the thermal part. In summary, the experimental and numerical works of the authors Badr & Dennis considered the problem of laminar flow with heat-transfer by forced convection from a rotating circular cylinder around its own axis, initially for a Reynolds number equal to 100, with a specific rotation rate (α), for the interval varying between $0.5 \leq \alpha \leq 3.0$. Meanwhile, the second work, uses the Reynolds number range varying between $10^3 \leq Re \leq 10^4$, with specific rotation rate equal to 4. In both works, the cylinder is located in a uniform flow. Thus, the author report that the temperature fields are strongly influenced by the vorticity of rotation of the cylinder. The author found, in both studies, that the heat-transfer coefficient tends to decrease as the rotation of the cylinder increase. An attribution of the presence of a layer of rotating fluid around the cylinder was verified, being separated from the main flow of the flow. Thus, the results demonstrated convergence and numerical stability compared to others available in the literature (see, Lai & Peskin (2006) and Sharma *et al*. (2012))

Park et al. (2017), present the immersed boundary method developed for the study of fluid and flexible body interactions with heat transfer. The movement of the fluid and the temperature are defined in a fixed Eulerian grid, while the flexible movement of the body is defined in a mobile Lagrangian grid. The governing equations for fluid movement, temperature and flexible body movement are solved independently in each grid. To deal with the transfer of momentum between the flexible body and the fluid, a forcing term is added to the fluid motion equations with the imposition of the non-slip condition of the fluid in the flexible body. A heat source is added between the heated body and the surrounding fluid, which can be calculated in a similar way to that used to obtain the amount of movement, imposing the thermal conditions on the body. The momentum and heat transformation between the Eulerian and Lagrangian variables were established using the Dirac delta function. To validate the methodology used by Park et al. (2017), the problems of natural and forced convection for a rigid circular cylinder were simulated. For the natural convection of the heated rigid cylinder with the isothermal boundary condition, a good approximation with the reference data was obtained. For forced convection, a flow around the rigid circular cylinder was also simulated with both isothermal and constant heat flow boundary conditions. The Nusselt average local number for the cylinder, obtained good convergence in relation to the scientific literature. Finally, a flow around the heated flexible cylinder was simulated, and the heat transfer was evaluated in comparison with the rigid cylinder. Two different states were observed for the flexible cylinder, depending on the number of Reynolds and the flexible characteristic of the cylinder. For $Re = 10$ and $Re = 20$, the cylinder presented the "extended-stable" state regardless of the flexible property, where the heat transfer was deteriorated in relation to the rigid cylinder. The flexible variation experienced an initial circular shape to a fan-shape in the extended-stable state. Longitudinal elongation increases the Nusselt number near the fixed point, but decreased the transverse thermal dissipations upstream of the cylinder to the aerodynamic shape rather than circular, this resulted in a decrease in the Nusselt number. Other analyzes were performed and validate, including stability for the fluid-body interaction constants and heat transfer. The problems of natural and forced convection with the boundary condition of the thermal and isothermal flow are simulated with a good approximation compared to previous studies. At $Re = 40$, the cylinder showed both behaviors, depending on the flexible property. Other analyzes were performed and validated, including stability for the fluid-body interaction constants and heat transfers. The problems of natural and forced convection with the boundary conditions of the thermal and isothermal flow are simulated with a good approximation compared to previous studies. Simulations for heat transfer by forced convection around a flexible circular cylinder have been made and validated.

Santos *et al*. (2018), presented the immersed boundary method coupled with virtual physical model to simulated incompressible two-dimensional flows around a heated square cylinder at constant temperature on its surface. A good numerical convergence was obtained, being the margin of error, with respect to the works, less than 3%. The time evolution of the drag and lift coefficient, as well as, the Nusselt number were obtained with this methodology, being the parameters obtained from the Eulerian fields, since the geometry used in this work has singularities, which were taken into account in the construction of the code. The implementation process for the calculation of the drag and lift coefficients is simple. This fact is important, because it allows its applicability to other (less simple) geometries. In all simulations, the results show that influence of the surface of the heated body immersed in the flow increase as the Reynolds numbers increase. For the temporal discretization, the second-order Adams-Bashforth scheme was used together with spatial centered scheme. The considered turbulence models were used for the energy transfer process between the largest and the smallest turbulent scales.

In addition to the validation of the methodology, another objective was to better understand all the phenomena present in this flow through a two-dimensional analysis, evaluating the thermal influence of the cylinder on the flow, the emission of vortices and the dynamics of formation and suppression of the wake. The influence of rotation on reducing drag and increasing the lift coefficient was verified, as well as, the distribution of the thermal field near the cylinder. With the rotation movement, the vortex wake is displaced in relation to the horizontal flow line. With the increase of the rotation, the amplitude of oscillations of the fluid dynamic coefficients, tend a null value, that is, the process of vortex generation tends to decrease with the increase of the specific rotation value. Finally, it was verified that the number of Strouhal is little influence for basic values of the specific rotation, but that it depends on the number of Reynolds. The quantitative results show a good numerical agreement in relation to the results available in the literature. Based on this, the immersed boundary methodology with the virtual physical model proved to be promising for the flow simulation with forced convection.

In this work, the properties were considered constant. The buoyance term is based on the approximation of the Boussinesq approximation, considering the problems of mixed convection. Other terms, such as, energy generation, are neglected in this work, as well as, internal heat or humidity. Coriolis force or rotation effects are also absent in this work. The proposed methods were validated for natural and forced convections with the isothermal and constant heat flux boundary conditions. Finally, the heat transfer and the onset turbulence around complex geometry with the surrounding fluid was examined. The obtained numerical results are accurate and stable, presenting a good agreement with the available results in the literature. The following section presents the mathematical methodology.

2 | MATHEMATICAL METHODOLOGY

2.1 Formulation for the fluid motion and temperature

Considering an incompressible and two-dimensional flow a Newtonian fluid, with a domain represented by Ω, and a boundary represented by $\partial\Omega$, with the surface of the immersed body being heated with constant temperature, which can be modeled through discretized points, previously named by Lagrangian points. Since the effect of the frontier is taken into account through the introduction of the forcing term in the momentum and energy equation, the equations that describe the heat transfer by mixed convection in the immersed boundary methodology are expressed as follows

$$\nabla . \mathbf{u} \, , \tag{1}$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \, , \tag{2}$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{g}\big(1 - \beta(T - T_\infty)\big)\mathbf{j} + \mathbf{f} \, , \tag{3}$$

$$\rho_0 c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \, . \nabla)T \right) = k \nabla^2 T + q \, , \tag{4}$$

Where Eqs. (1), (2) and (4) are forced convection, while Eqs. (1), (3) and (4) are for natural convection, and in Eq. (3), the Boussinesq approximation is used. The terms, **u,** p, T and T_∞ denote, velocity vector, pressure, temperature and reference temperature, respectively. The terms, ρ_0, μ, β, k and c_p are fluid density at temperature $T = T_\infty$, viscosity, thermal diffusivity, thermal expansion coefficient and specific heat at constant pressure, $\mathbf{g}$ is a downward gravitational acceleration; the term $\rho_0 \, \mathbf{g} \, (1\text{-}\beta(T\text{-}T_\infty))$ accounts for the effects of the fluid temperature on the fluid flow, the term $\mathbf{j}$ is the unit vector in the positive y-axis direction, respectively.

The term of force $\mathbf{f}$ and thermal source q in the Eqs. (2) e (3) are the Euler force fields where these sources model the existence of the interface immersed in the flow, visualizing the body immersed in the flow having non-null value in Eulerian grid near the Lagrangian grid, being expressed by

$$\mathbf{f}(x,t) = \int_{\partial \Omega_b} F(\mathbf{X}_k, t)\delta(x - \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k \, , \tag{5}$$

where $F(\mathbf{X}_k,t)$ is the Lagrangian force density, calculated on the interface points x and $\mathbf{X}_k$ which are the positions of a particle of Eulerian and Lagrangian fluid on the interface, respectively. The term $\delta(x - \mathbf{X}_k)$ is the Dirac delta function, which represents the interaction between the fluid and the immersed boundary. Similarly, the thermal source represented by q is added to Eq. (4), being responsible for making the flow feel the presence of the heated solid interface, in other words, it is heating source at the Lagrangian point on the immersed border, being able to be expressed by

$$q(x,t) = \int_{\partial \Omega_b} Q(\mathbf{X}_k, t)\delta(x - \mathbf{X}_k) d\mathbf{X}_k \, , \tag{6}$$

where, $Q(\mathbf{X}_k,t)$ is the heat flux at the border being the difference between the derivative of the approximate specific temperature.

2.2 The virtual physical model

The virtual physical model, developed by Silva *et at*. (2003), is a methodology for calculating the forces that act on the discrete points of a given border, also called the interfacial force or Lagrangian force. The characterization of the Lagrangian force represents the difference between the various immersed boundary methodologies. In this work, only the rigid boundaries were treated (no elasticity), but the model can be used or extended to other types of interface, for example, for elastic boundaries, boundaries between different fluids, etc. The virtual physical model uses the diffusion of interfacial forces on the interior of the flow. Thus, the Eulerian force field is applied in the vicinity of the immersed boundary, and its value is minimized as the distance to the interface increases. This model dynamically assesses not only the force that the fluid exerts on the solid surface immersed in the flow, bur takes into account the thermal exchange between them.

The Lagrangian force $F(\mathbf{X}_k,t)$, and the thermal source $Q(\mathbf{X}_k,t)$, are evaluated separately, in other words, for Lagrangian force a balance of amount of movement was carried out on a fluid particle that in close to the fluid-solid interface, while for the thermal part, the dimensionless energy equation was applied, which shows the interaction between the particle fluid and the interface, which takes into account all the terms of the Navier-Stokes equation. Then, assuming that all particle fluid, including those over the interface, must satisfy the balance of amount of movement and energy. Thus, the density of interfacial force can be evaluated using the principle of conservation of the momentum and energy, applying over any participle of fluid that makes up the flow. Therefore, taking the particle fluid crossing an arbitrary immersed boundary interface, we obtain the following formulation

$$F(\mathbf{X}_k,t) = \underbrace{\rho\frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}_k,t)}{\partial t}}_{F_a} + \underbrace{\rho\,\nabla[\mathbf{U}(\mathbf{X}_k,t)\mathbf{U}(\mathbf{X}_k,t)]}_{F_i} + \underbrace{\nabla p(\mathbf{X}_k,t)}_{F_p} - \underbrace{\mu\nabla^2(\mathbf{X}_k,t)}_{F_v}\,, \tag{7}$$

where, the portions referring to the terms of the Eq. (7), from left to right, are called acceleration force, inertial force, pressure force and viscous force, respectively.

In a manner similar to that performed in Eq. (7), for the calculation of the thermal source in the particle fluid in contact with the interface, an energy balance is performed as follows

$$Q(\mathbf{X}_k,t) = \frac{\partial\Theta(\mathbf{X}_k,t)}{\partial \mathrm{t}} + \nabla[\mathbf{U}(\mathbf{X}_k,t)\Theta\mathbf{U}(\mathbf{X}_k,t)] - \frac{1}{Pe}\nabla^2\Theta(\mathbf{X}_k,t)\,, \tag{8}$$

where, the portions referring to Eq. (8), from de right, are called local temperature variation rate, thermal dissipation rate due to convection and diffusive thermal energy transport rate. In Eq. (8), each term is evaluated based on the values of the variables (velocity, pressure and temperature), of the Eulerian grid, interpolated for the Lagrangian grid and for the auxiliary points used in obtaining spatial derivatives. This process is detailed in the next subsection.

2.3 Calculation of velocity, pressure and temperature

2.3.1 Auxiliary point allocation process

The first step is to arbitrate an initial Lagrangian point for calculating the interfacial force $F(\mathbf{X}_k, t)$. Then, two mutually orthogonal auxiliary lines are drawn on this point, one of which is parallel to one of the Eulerian axes. Two auxiliary points are marked on each of the lines, on the outside of the solid body, at a distance Δx and 2 Δx of the Lagrangian point considered. This distance is necessary in order to prevent two auxiliary points from being allocated within the same Eulerian cell. The grids that are more that 2 Δx distance from the Lagrangian points, do not contribute to the interpolation. The internal and external regions of the solid body were identified with the aid of the normal unitary vector on the surface, which has its positive direction forcing outside the immersed body. The auxiliary points are always located in the regions of interest of the flow, that is, in the region to be simulated. Thus, the values of velocity, pressure and temperature at the points, in general, are not know, but can be obtained, from neighboring cells, with the ais of a distribution/interpolation function.

Thus, the general equation for obtaining the velocity at Lagrangian points and auxiliary points is expressed in the following formula

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}_k) = \sum_i D_i(x_i - \mathbf{X}_k)\, \mathbf{U}(x_i)\,, \tag{9}$$

where $\mathbf{U}(\mathbf{X}_k)$ are the Lagrangian velocities, calculated at the auxiliary points and at the point $\mathbf{X}_k$ by the interpolation of the Eulerian velocities. Similarly, for the calculation of pressure and temperature derivatives at each Lagrangian point, it was necessary to obtain the pressure and temperature values on the interface, at point $\mathbf{X}_k$. Thus, for the calculation of pressure and temperature an auxiliary point, which is in a normal position at a distance Δx from the Lagrangian point. The general equation for obtaining the pressure and temperature at the auxiliary points or on the interface and at the Lagrangian points in the x and y directions are given, respectively, by the systems

$$p(\mathbf{X}_k) = \sum_i D_i(x_i - \mathbf{X_k})\, p(x_i) \qquad \Theta(\mathbf{X}_k) = \sum_i D_i(x_i - \mathbf{X_k})\, \Theta(x_i) \tag{10}$$

$$p(\mathbf{Y}_k) = \sum_i D_i(x_i - \mathbf{Y_k})\, p(y_i) \qquad \Theta(\mathbf{Y}_k) = \sum_i D_i(x_i - \mathbf{Y_k})\, \Theta(y_i) \tag{11}$$

where, $p(\mathbf{X}_k)$ and $p(\mathbf{Y}_k)$ are pressure values on the interface, and $p(y_i)$ and $p(x_i)$ are pressure value in the nearest Eulerian grids, in the x and y directions, respectively. Similarly, $\Theta(\mathbf{X}_k)$ and $\Theta(\mathbf{Y}_k)$ are the temperatures at auxiliary points at k points and $\Theta(x_i)$, the temperature at the nearest Eulerian points. The distribution/interpolation function D, adopted in thus work, is used for the interpolation of variables in the Eulerian grid. Regarding the computational cost involved, it was reduced when considering non-null D for distances less than $2\Delta x$ from the interpolation point, which is also valid for the $F(\mathbf{X}_k,t)$ distribution. Therefore, in this work, Peskin (1977) proposal, modified by Juric (1996), is used, being defined by

$$D(x-\mathbf{X_k}) = \prod_{m=1}^{N} \frac{g(r_x)g(r_y)}{h^2}\,, \tag{12}$$

where,

$$g(r) = \begin{cases} g_1(r) & , if \quad \|r\| < 1 \\ 0.5 - g_1(2-\|r\|) & , if \quad 1 < \|r\| < 2 \\ 0 & , if \quad \|r\| > 2 \end{cases} \tag{13}$$

where, $g_1(r) = {}^1\!/_8\left(3 - 2\|r\|\sqrt{1+4\|r\|-4\|r\|^2}\right)$, and r is called the radius of influence of the distribution function, being represented here by $\left[\frac{1}{h}(x-x_k)\right]$ or $\left[\frac{1}{h}(y-y_k)\right]$. The term, $h = \Delta x = \Delta y$, is the size of the Eulerian grid and (x,y) the coordinates of a Eulerian point in the domain. To calculate the temperature at each time step in the iterative process over the immersed boundary, the following equation was used

$$\Theta(\mathbf{X}_k) = \sum_i D_i(x_i - \mathbf{X}_k)\,\Theta(x_i)\,. \tag{14}$$

Thus, after the interpolation of velocity, pressure and temperature at the interface and at auxiliary points, the derivatives that make up the terms for the calculation of Lagrangian source terms are determined in the x and y directions, with the so-called Lagrange polynomials of first and second order. Generically, denominated the components of velocity or pressure, defined by the interpolation function ϕ, given by the linear combination of the Lagrange polynomials, in the form

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{m} \phi_i \prod_{j=0,j\neq i}^{m} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,. \tag{15}$$

2.3.2 Calculation of Lagrangian force distribution and thermal source

After calculating the terms das Eqs. (7) and (8), and obtaining the values for $F(\mathbf{X}_k,t)$ and $Q(\mathbf{X}_k,t)$, then the Eulerian terms are calculated for $\mathbf{f}$ and q. The system calculation for the terms **f** and *q*, in the x and y direction, are presented below, respectively

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(x_i) &= \sum_i D_i\,(x_i - \mathbf{X}_k)\,F(\mathbf{X_k})\,\Delta s\,(\mathbf{X}_k)\\ \mathrm{q}(x_i) &= \sum_i D_i\,(x_i - \mathbf{X}_k)\,Q(\mathbf{X_k})\,\Delta s\,(\mathbf{X}_k)\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(y_i) &= \sum_i D_i\,(y_i - \mathbf{Y}_k)\,F(\mathbf{Y_k})\,\Delta s\,(\mathbf{Y}_k)\\ \mathrm{q}(y_i) &= \sum_i D_i\,(y_i - \mathbf{Y}_k)\,Q(\mathbf{Y_k})\,\Delta s\,(\mathbf{Y}_k)\end{aligned} \tag{17}$$

where, in the Eqs. (16) and (17), in the respective x and y directions, $\mathbf{f}(x_i)$ and $\mathbf{f}(y_i)$, are the forces at each Eulerian node, while $F(\mathbf{X}_k)$ and $F(\mathbf{Y}_k)$, are the force in each Lagrangian node being distributed to Eulerian nodes. The terms, $\mathrm{q}(x_i)$ and $\mathrm{q}(y_i)$, is presented are heat sources for each Eulerian node, due the presence of immersed heated, and $Q(\mathbf{X}_k)$ and $Q(\mathbf{Y}_k)$ are the thermal source in each Lagrangian node being distributed to the nodes Eulerian, thus forming, a thermal field of Eulerian force that acts on the fluid particles near the border.

3 I MATHEMATICAL MODELING OF TURBULENCE

3.1 The Smagorinsky model

The algebraic modeling Smagorinsky (1963) is based on the local equilibrium hypothesis for small scales, so that the injected energy in the spectrum, defined by

$$\xi = -\overline{u'_i u'_j S_{ij}} = 2\nu \overline{S_{ij}}\,\overline{S_{ij}}\,, \tag{18}$$

Equals the dissipated energy by the viscous effects. The terms, u'_i and u'_j are, respectively, the characteristics scales of velocity of the sub-grid. It is assumed that the turbulent viscosity sub-grid is proportional to these characteristics scales, according to the equation

$$\nu_t = C_s \ell \left(u'_j u'_i\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

The turbulent viscosity, Eq. (19), can be expressed as a function of the strain rate tensor (S_{ij}), the characteristic length scale (ℓ), associated with the grid size and the C_s constant, called the Smagorinsky constant, the viscosity turbulent is then represented by

$$\nu_t = (C_s \ell)^2 \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}\;, \tag{20}$$

where, the strain rate tensor $\bar{S}_{ij}$ is represented by

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right), \tag{21}$$

where, the implementation related to the damping function was implemented in such a way as to dampen the turbulent viscosity close to the walls of the immersed boundary, regardless of the type of geometry to be considered.

3.2 The Spalart-Allmaras model

The Spalart-Allmaras turbulence model emerged in the 1990's after a coherent convergence between ideas about an empirical model that resolved the turbulence, that is, that which only a single equation, the modeling would occur directly, solving the question of the main turbulent parameter: turbulent viscosity, without involving calculations with turbulent energy or dissipation or vorticity, where in other existing models, these characteristic parameters are necessary to define the turbulence behavior in the flow. In the Spalart-Allmaras model, a transport equation for turbulent viscosity is established, using empiricism and argument from dimensional analysis, invariance and a selective dependence on molecular viscosity, according to the works of Spalart *et al.* (1992). The equation includes a non-viscous destruction term that depends on the distance to the wall. Unlike algebraic models, the first models of an equation are local, in the sense that the equation at one point does not depend on the solution at other points. Therefore, it is compatible with grids of any nature. The solution close to the wall is less difficult to obtain.

Wall and undisturbed flow conditions are elementary. The model produces relatively smooth turbulent laminar transition at points specified by the user. The model was calibrated in boundary layers with a pressure gradient. The turbulent viscosity (ν_t) is calculated from the Spalart-Allmaras working aid variable, $\tilde{v}$, and damped by the function f_{ν_1} near to the walls,

$$v_t = \tilde{v}\, f_{v_1}, \tag{22}$$

where,

$$f_{v_1} = \frac{\chi^3}{\chi + C_{v_1}^3}, \tag{23}$$

with,

$$\chi = \frac{\tilde{v}}{v}. \tag{24}$$

Thus, the so-called auxiliary work variable of the Spalart-Allmaras model, $\tilde{v}$, obeys the following transport equation

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j \tilde{v})$$
$$= c_{b_1}(1 - f_{t_2})\tilde{S}\tilde{v} + \frac{1}{\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left((v + \tilde{v})\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j}\right) + c_{b_2}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j}\right] \tag{25}$$
$$- \left[c_w f_w - \frac{c_{b_1}}{k^2} f_{t_2}\right]\left[\frac{\tilde{v}}{d_w}\right]^2 + f_{t_1}\Delta U^2 ,$$

where the terms on the right side of Eq. (25) represent, respectively: (**i**) the production of turbulent viscosity, (**ii**) the molecular and turbulent diffusions of $\tilde{v}$, (**iii**) the dissipation of $\tilde{v}$, (**iv**) the destruction of $\tilde{v}$ that reduces the turbulent viscosity to the wall and, finally, (**v**) the terms that model transition effects to turbulence, indicated by the subindex *t*. For regions distant from the walls, the function f_{v_i} has no influence on the calculation of turbulent viscosity, being its unit value and, therefore, making $v_t = \tilde{v}$. The production term of the transport equation, Eq. (25), also needs a correction near to the wall, which is performed by replacing the parameter *S* with a modified variable $\tilde{S}$, which is also influenced by a damping function f_{v_2}, defined similarly to f_{v_2}. Thus, $\tilde{S}$ and f_{v_2} are presented below by following formulation

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{v}}{(kd_w)^2} f_{v_2} , \tag{26}$$

$$f_{v_2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v_1}} , \tag{27}$$

where, d_w, Eq. (26), is the distance to the near wall, and *S* is the modulus of the strain rate, calculated with the variables of the filtered field, being calculated by

$$S = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} . \tag{28}$$

The function f_w is defined as a unit values for the region of the logarithmic boundary layer, intensifying the term of distribution as it approaches the wall, tending to zero for the most distant regions of the wall, thus being defined as being

$$f_w = g\left(\frac{1 + c_{w_3}^6}{g^6 + c_{w_3}^6}\right) , \tag{29}$$

where,

$$g = r + c_{w_2}(r^6 - r) , \tag{30}$$

and,

$$r \equiv \frac{\tilde{v}}{\bar{S}\, k^2 d_w^2} . \tag{31}$$

Others constants of the model are $\sigma = 2/3$, $c_{b_1} = 0.1355$, $c_{b_2} = 0.622$,

$k = 0.41$, $c_{w_1} = {}^{c_{b_1}}/_{k^2} + {}^{(1 + c_{b_2})}/_{\sigma}$, $c_{w_2} = 0.3$, $c_{w_3} = 2$ and $c_{v_1} = 7.1$. These constants were determined empirically. Regarding the average energy equation with turbulent diffusivity, applying an additional scale Q_j, being represented by

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{\Theta})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\alpha\left(\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j}\right) + \overline{u_j \Theta} - \bar{u}_j \bar{\Theta}\right], \tag{32}$$

where, the term $\bar{\Theta}$ is the resolved temperature field.

4 I NUMERICAL METHOD

The numerical method used in this paper is the fractional steps that unites the velocity and pressure. With the aim to solve the Navier-Stokes equation, result new velocity and pressure fields. For the time discretization is used Euler's method of the first order. The Navier-Stokes equation were solved explicitly. The correction of pressure results in a linear system, solved by Modified Strongly Implicit Procedure developed by Schneider & Zedan (1981). The Eq. (2), can be rewritten in the following in the following way

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^m}{\Delta t} + \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i^n u_j^n)\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(v + v_t)\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i}\right)\right] + f_i^n . \tag{33}$$

In the fractional step method, the velocities, pressure and the forcing term of the predictive instant (n) are used to calculate, in the predictive step, and estimate for the velocity in the current time $\bar{u}_i^{n+1}$, represented by the equation

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - u_i^m}{\Delta t} + \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i^n u_j^n)\right] = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(v + v_t)\left(\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i}\right)\right] + f_i^n , \tag{34}$$

the next step in the fractional step method is to subtract Eq. (34) from Eq. (33), resulting in

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(p^{n+1} - p^n) , \tag{35}$$

doing some algebraic manipulations, we get the pressure field calculated, we obtaining the equation corrected for the velocity in the current iteration (corrector step), being represented by

$$u_i^{n+1} = \bar{u}_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial p'^{n+1}}{\partial x_i} . \tag{36}$$

5 I RESULTS

Using the immersed boundary method coupled virtual physical model, implemented in C++ code, is possible perform simulation of (2D) (two-dimensional) flows around a heated body immersed in the flow. In this section, the flow around a pair of heated circular cylinders in tandem have equal diameters and the same center-to-center distance (L_{CC}). The fluid and the heat flow are characterized by Reynolds number $Re = \frac{\rho U_\infty D}{\mu}$ and Prandtl number $Pr = \frac{\mu c_p}{k}$, where ρ is the fluid density, U_∞ is the free stream velocity, D is the cylinder diameter, μ is the dynamic viscosity, c_p is heat at constant pressure and k the thermal diffusivity. In this work, numerical simulations are conducted for different Reynolds numbers (Re = 1 - 500), while keeping the Prandtl number fixed at $Pr = 0.7$. Both heat and fluid flow characteristics like the drag C_d and lift C_ℓ coefficients, recirculation behind the cylinder, streamline and isotherm pattern, average Nusselt number on the cylinder surface are presented and compared with previous result in the literature. In this case, the angle formed by the segment joining the centers of the two cylinders and the axis of the abscissa is zero.

5.1 Description of the problem and boundary conditions

In the Fig. 1, the two cylinders are identical and fixed with the same diameters, maintained in "tandem" (cylinders in line) with downstream of the cylinder A. The cylinders are confined to a channel with free flow, with uniform velocity (U_∞) and constant temperature (T_c (>T_∞)). The horizontal and vertical spacing between the cylinders are fixed in $L_u = 16.5\ d$ and $L_d = 19.5\ d$, respectively. These values are chosen to reduce the effect of boundary conditions on the inlet and outlet relative to the flow patter and the cylinder boundary.

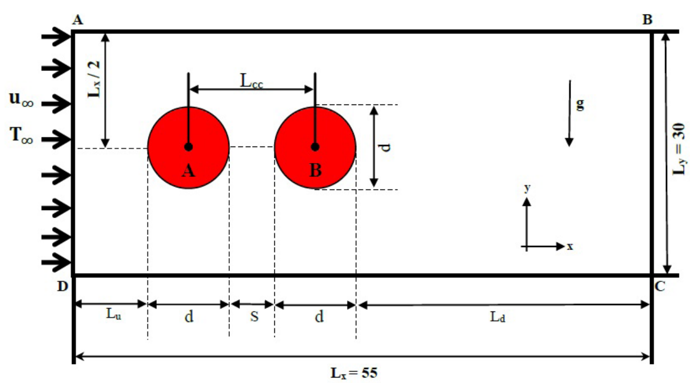


Figure 1: Illustration of the computational domain with two cylinders in tandem configuration.

The drag (C_d) and lift (C_ℓ) coefficients for the calculation of each cylinder are performed as follows:

$$C_d = C_{dp} + C_{dv} = \frac{2F_d}{\rho U_\infty^2 D}, \tag{37}$$

$$C_\ell = C_{\ell p} + C_{\ell v} = \frac{2F_\ell}{\rho U_\infty^2 D}, \tag{38}$$

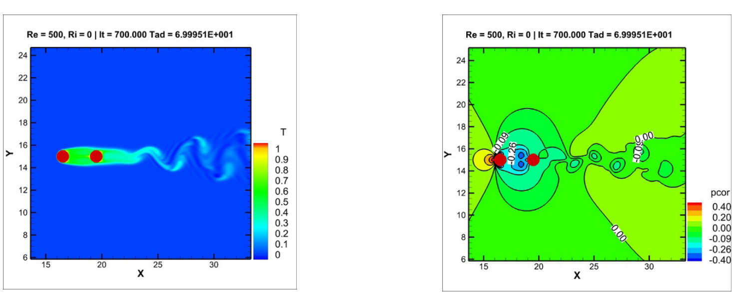
where, $C_{\ell p}$ and $C_{\ell v}$ represent the lift coefficients due pressure and viscous forces, respectively. In a similar way, C_{dp} and C_{dv}, represent the drag coefficients due to the pressure and viscous forces. The terms, F_d and F_ℓ are forces of drag and lift, respectively, acting on the surface of the cylinder. Thus, the drag and lift coefficients can be obtained from the expressions:

$$\begin{cases} C_{dp} = 2\displaystyle\int_0^1 (p_f - p_r)\, dy\,, \\ C_{dv} = \dfrac{2}{Re}\displaystyle\int_0^1 \left[\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_s + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i \right\} dx + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_f + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_r \right\} dy \right], \end{cases} \tag{39}$$

$$\begin{cases} C_{lp} = 2\displaystyle\int_0^1 (p_i - p_s)\, dy\,, \\ C_{\ell v} = \dfrac{2}{Re}\displaystyle\int_0^1 \left[\left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_f + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_b \right\} dx + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \right\} dy \right], \end{cases} \tag{40}$$

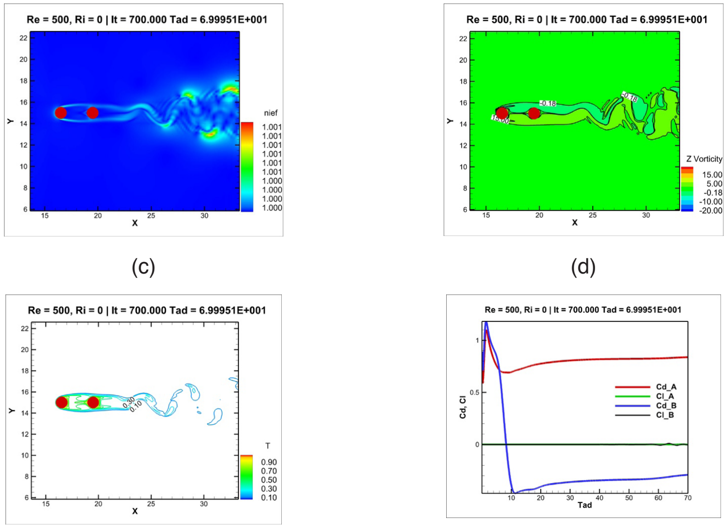
5.2 Flow fields for *Re* = 500 and *Rí* = 0 in cylinders in tandem with forced convection

The Figs. (2) and (3) present simplified fields of temperature, pressure, effective viscosity, vorticity, isothermal lines, and aerodynamics coefficients, C_d and C_ℓ, for the flow around cylinder tandem, for Reynolds and Richardson numbers, equals to 500 and 0, respectively.



(a) (b)

Figure 2: Smagorinsky model for simplified fields of (a) temperature, and (b) pressure for cylinders, for *Re* = 500 with *Ri* = 0.



(c) (d) (e) (f)

Figure 3: Smagorinsky model for simplified fields of (c) effective viscosity (d) vorticity (d) € isotherms lines and Drag (C_d) and Lift C_ℓ coefficients for cylinders, for Re = 500 with R_i = 0.

The main results for the simulations can be summarized as follows:

- A wake forms upstream of the second cylinder, but it needs to be checked whether it can be decreased or suppressed with the increase of the distance between the cylinders;
- The isothermal lines reflect the same behavior of the pattern of the streamlines (current lines);
- The average Nusselt number increase for Re = 500 for different value of R_i, even keeping the distance between the cylinders;
- The thermal buoyancy is suppressed in the recirculation zones of the tandem cylinders, even with a mounting angle;
- The thermal buoyancy tends to in the recirculation zones of the tandem cylinders, even with a mounting angle;
- The thermal buoyancy tends to increase the coefficient of drag and the average Nusselt number of the cylinder more than the second.

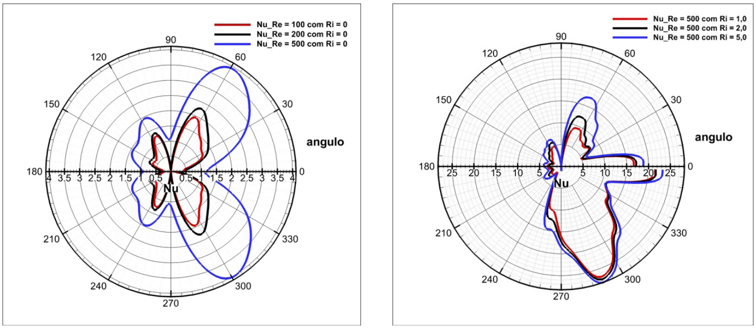
Re	L_{cc}/d	$C_{d,1}$	$C_{l,1}$	St_m	$C_{d,2}$	$C_{l,2}$
100	2	1,222	±0,0072	-	±0,0008	±0,0255
	2,5	1,386±0,011[a]	±0,37	0,169	-0,075	0
	3	1,202	0	-	-0,045	0,0011±0,004
	4	1,342±0,0243	±0,475	0,153	0,761±0,200	±1,452
200	2	1,03±0,0004	±0,031	-	-0,18±0,0033	±0,14
		0,89±0,05[b]	±0,20	0,130	-0,21±0,15	-
		1,03[c]	-	0,130	-0,17	-
	3	1,048±0,021	±0,026	0,130	-0,53±0,012	±0,266
500	3	0,8041±0,015	±1,343	0,216	-0,357±0,008	-4,715±0,008

Table 1: Flow parameters for Re = 100,200 and 500 compared to data available in the literature.

5.3 Variations of the Nusselt number

One of the main purposes of the heat transfer calculations involving cylinders is to determine the local and total transfer around isothermal cylinders. The effect of the flow, especially with respect to the heat transfer, can be better observed by analyzing the local heat transfer coefficient, also known as the Nusselt local number. In the Fig. (4), for different Richardson numbers, the distributions of Nusselt numbers along the perimeter of the upstream and downstream cylinders are provided. For L_{cc}/d =3, Re = 100, Re = 200 and Re = 500, for different Richardson numbers, the local distributions of the Nusselt numbers along the perimeter of the upstream and downstream cylinders are provided. For L_{cc}/d =3, although the local profile of the Nusselt number of the upstream cylinder is similar to that of an isolated cylinder, the downstream cylinder has completely different characteristics, as the transfer rate is closely related to the flow, the local minimum rates of heat transfer appear at the front back stagnation points of the downstream cylinder, where the magnitude of velocities are relatively small.

This, in Fig. (11-(a)), the maximum heat transfer from the downstream cylinder is exhibited with a double protuberance in $\theta \approx 57^{\circ}$ and $\theta \approx 265^{\circ}$ from the cylinder wall, where thermal layers (also known as thermal plumes) and hydrodynamics becomes thinner. The formation of vortices in the downstream region of the cylinder coincides with the oscillations of the average Nusselt number from large amplitude to low amplitude during a vortex release period for L_{cc}/d =3 and Re = 500 for different values of $Rí$, as see in Fig. (11-(b)). It is important to note that although the Nusselt's local distribution of the downstream cylinders resembles that of the upstream cylinder, typified as large protuberance, its magnitude is smaller than of the upstream cylinder, indicating smaller heat-to-cylinder conversion to downstream.



(a) (b)

Figure 4: Local variation of the Nusselt number to the same dimensionless instants: (a) - Re = 100, Re = 200 and Re = 500 for $Rí$ = 0 (forced convection) and (b) - Re = 500 for $Rí$ = 1.0, $Rí$ = 2.0 and $Rí$ = 5.0 (natural convection).

6 | CONCLUSIONS

In this work, a boundary condition-enforced immersed boundary method is developed for simulations of heat and mass transfer problems. The effect of thermal boundaries in the flow and temperature fields considered through the velocity and temperature corrections. The temperature corrections is evaluated implicitly in such a way that the temperature at the immersed boundary, interpolated from the corrected temperature field, satisfies the physical boundary conditions.

For the momentum transfer between the immersed body and the surrounding fluid, the additional momentum forcing obtained by using the forcing term is added to the fluid-body equation. To model the onset turbulence, the Smagorinsky and Spalart-Allmaras models are used. The first model used LES methodology and is based on local equilibrium hypothesis for small scales associated with the Boussinesq hypothesis, such that the energy injected into the spectrum of the turbulence balances the energy dissipated by convective effects. The second model used the URANS concept, with only one transport equation for turbulence viscosity, being calibrated in pressure gradient layers. A computational code was developed to implement the methodology mentioned herein in order to analyze the combination of the heat-transfer phenomena in the turbulence for the thermofluid dynamics interaction around isothermal complex geometries. The agreement of the results with the available data in the literature validates the numerical method.

REFERENCES

1. Badr, H. M., & Dennis, S. C. R. (1985). **Time-dependent viscous flow past an impulsively started rotating and translating circular cylinder**. *Journal of Fluid Mechanics*, *158*, 447-488.

2. Badr, H. M., Coutanceau, M., Dennis, S. C. R., & Menard, C. (1990). **Unsteady flow past a rotating circular cylinder at Reynolds numbers 10^3 and 10^4**. *Journal of Fluid Mechanics*, *220*, 459-484.

3. Sharma, V., and Dhiman A. K., Heat **Transfer from a Rotating Circular Cylinder in The Steady Regime: Effects of Prandtl Number**. Thermal Science, v.16, n.01, pp. 79-91, 2012.

4. Park, S. G., Chang, C. B., Kim, B. and Sung, H. J. (2017). **Simulation of Fluid-Flexible Body Interaction with Heat Transfer**. Int. J. Heat Mass Transfer, 110, 20–33.

5. Santos, R. D., Gama, S.M., & Camacho, R. G. (2018). **Two-Dimensional Simulation of the Navier-Stokes Equations for Laminar and Turbulent Flow around a Heated Square Cylinder with Forced Convection.** Applied Mathematics, 9(03), 291–312.

6. Silva, A. L. E., Silveira-Neto, A. and Damasceno, J. J. R. (2003). **Numerical Simulation of Two-Dimensional Flows over a Circular Cylinder using the Immersed Boundary Method.** J. Comput. Phys., 189, 351–370.

7. PESKIN, C. S. **Numerical Analysis Of Blood Flow In The Heart**. Journal of Computational Physics. v.25, pp. 220-252, 1977.

8. Juric, D., **Computation of Phase Change**, Ph. D. Thesis, Mech. Eng. Univ. of Michigan, USA, 1996.

9. Smagorinsky, J. (1963) **General Circulation Experiments with the Primitive Equations: I. The Basic Experiment**. Monthly Weather Review, 91, 99–164.

10. Spalart, P. & Allmaras, S. (1992). **A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamics Flows.** Recherce Aeropatiale, No. 1, 5–21.

11. Schneider, G. E.; Zedan, M. **A Modified Strongly Implicit Procedure For the Numerical Solution of Field Problems**. Numerical Heat Transfer, v. 4, n.01, pp. 1-19, 1981.

CAPÍTULO 2

MÉTODOS DIRETOS E ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES AX = B: UM ESTUDO INTRODUTÓRIO

Data de aceite: 17/11/2020
Data de submissão: 05/10/2020

Francisco Cleuton de Araújo
Mestre em Matemática pela Universidade Federal Rural do Semiárido - UFERSA
Mossoró – RN
http://lattes.cnpq.br/9157474657085589

O presente artigo toma como base a dissertação apresentada por este autor ao Departamento de Ciências Exatas e Naturais no Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA.

RESUMO: O presente trabalho tem como principal objetivo estudar alguns métodos diretos e iterativos para obter uma solução exata ou aproximada do sistema linear *Ax=b*, assim como investigar o desempenho destes métodos e o uso adequado de cada um deles. A investigação deste trabalho traz à luz métodos de solução de sistemas lineares não convencionais para o Ensino Básico. Acredito que este material irá contribuir com o estudo complementar dos professores e público em geral que tenham interesse pelo tema em estudo.
PALAVRAS-CHAVE: Sistemas Lineares, Métodos Diretos, Métodos Iterativos, Álgebra Linear.

DIRECT AND ITERATIVE METHODS FOR SOLUTION OF THE LINEAR EQUATION SYSTEM AX = B: AN INTRODUCTORY STUDY

ABSTRACT: This work aims to study some direct and iterative methods for to obtain an exact or approximate solution of the linear system *Ax=b*, and investigate the performance of these methods and the proper use of each of these. The investigation of this work brings to light methods of solution of non-conventional linear systems for basic education. I believe that this will work to contribute to the further study of teachers and the general public with an interest in the subject under study.
KEYWORDS: Linear Systems, Direct methods, Iterative methods, Linear Algebra.

1 I INTRODUÇÃO

De modo geral, no Ensino Básico, os procedimentos para resolução de sistemas de equações lineares são apresentados da seguinte maneira: métodos da adição, da substituição e regra de Cramer. Deste modo, podemos incorrer no erro de pensar que só existem esses métodos, ou ainda que estes métodos sejam os melhores, mais práticos e precisos.

No presente trabalho, pretendemos expandir esses conhecimentos apresentando para isso alguns métodos diretos e iterativos para resolução destes sistemas.

Os cálculos para determinar as soluções de sistemas lineares de pequeno porte (número pequeno de equações e variáveis) são simples, manualmente encontramos os resultados desejados sem muitas dificuldades. Em contrapartida, a solução de sistemas de grande porte envolve um número muito elevado de operações. Tornando-se inviável a solução manual. Outro ponto que devemos levar em consideração é que, em sistemas de grande porte, existe uma tendência maior a erros de arredondamento e truncamento.

Podemos nos perguntar então qual a importância em estudarmos métodos para solucionar *Ax=b*. Essa necessidade se concentra no fato de que diversos fenômenos podem ser modelados por *Ax=b*.

Segundo Lamin,

> Provavelmente um dos problemas mais importantes em matemática é resolver um sistema de equações lineares. Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações cientificas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em alguma etapa. (LAMIN, 2000, p. 29)

Ademais, as aplicações de sistemas lineares são inúmeras, abrangendo inclusive diversas áreas do conhecimento, como Economia, Engenharia, Estatística, Física, Ciências Sociais, Biologia, entre outras.

Esperamos que as ideias aqui apresentadas possam contribuir com ensino-aprendizagem de Matemática, em particular de Sistemas Lineares.

O objetivo geral deste trabalho é estudar alguns métodos diretos e numéricos para obter a solução do sistema linear *Ax=b*. Especificamente, nos propomos a: 1) estudar quatro métodos diretos na solução de Ax=b; 2) estudar dois métodos iterativos na solução de Ax=b; 3) resolver sistemas lineares do tipo Ax=b.

2 I MÉTODOS DIRETOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

2.1 Introdução

As soluções do sistema *Ax=b* de ordem *n*, dividem-se em dois grupos: os métodos diretos e os métodos iterativos.

Na presente seção, vamos estudar métodos diretos, que são aqueles que nos fornecem uma solução exata após um número finito de operações aritméticas. A desvantagem desses métodos são os possíveis erros de arredondamento, que em sistemas de grande porte tornam a solução sem significado.

Em geral, nos ensinos Fundamental e Médio são estudados os métodos de adição, substituição e regra de Cramer. Os dois primeiros são eficientes em sistemas de pequeno porte (duas equações e duas variáveis).

A regra de Cramer, que recebe grande destaque, já se mostra um pouco impraticável em sistemas de ordem superior a 3. Neste método faz-se necessário para resolução de um sistema de ordem n, o cálculo de $n+1$ determinantes de mesma ordem e um número elevado de multiplicações e adições.

Vale lembrar que em sistemas de equações lineares de ordem n, com única solução, a solução de $Ax=b$ é dada por $x = A^{-1}b$, onde A^{-1} é a matriz inversa de A. Todavia os cálculos de A^{-1} e $A^{-1}b$ envolvem um número grande de operações, tornando esse processo inviável e pouco competitivo em relação a outros métodos.

2.2 Método de eliminação de Gauss

O processo de eliminação gaussiana consiste na transformação do sistema linear dado em um sistema triangular equivalente, após uma série de operações elementares.

Teorema: Seja $Ax=b$ um sistema linear. Sobre as linhas do sistema aplicamos uma série de operações que podem ser escolhidas entre:

I. trocar duas equações;

II. multiplicar uma equação por uma constante não nula;

III. adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Ao final, obtemos um novo sistema $A'x=b'$, equivalente ao sistema $Ax=b$.

O método de eliminação gaussiana utiliza o teorema acima para triangularizar a matriz A supondo $det(A) \neq 0$.

Exemplo 1: Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 12. \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Equivalente a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-3/2L1]{2L2-L1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 21 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3+1/18L2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 9x_2 + 3x_3 = 21 \\ -\frac{1}{3}x_3 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

É imediato que $x_3 = -2$, $x_2 = 3$ e $x_1 = 1$

Exemplo 2: Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Equivalente a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 4 & -6 & -1 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-1/2L1]{L2-2L1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 13/2 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ -3x_3 = 3 \\ \frac{7}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{13}{2} \end{cases}$$

De onde vem que $x_3 = -1$, $x_2 = 2$ e $x_1 = 1$

2.3 Método de Eliminação Gauss-Jordan

A eliminação gaussiana irá produzir uma matriz na forma escalonada e o método de eliminação Gauss-Jordan produzirá uma matriz em forma escalonada reduzida por linhas.

Exemplo 3: Considere o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

A matriz aumentada para o sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-3L1]{L2+L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3-10L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando a segunda linha por -1 para introduzirmos um líder na linha 2 coluna 2, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{bmatrix}.$$

Agora multiplicando a terceira linha por -1/52 para introduzirmos um líder na linha 3 coluna 3, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz está na forma escalonada. Para obtermos a forma escalonada reduzida por linhas precisamos de mais um passo. Iniciando pela última linha não nula e operando para cima, somaremos múltiplos convenientes de cada linha às linhas superiores com intuito de introduzir zeros acima dos líderes.

$$\xrightarrow{L2+5L3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L1-L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esta última matriz está na forma escalonada reduzida por linhas. Imediatamente, temos $x_3 = 2$, $x_2 = 1$ e $x_1 = 3$.

A eliminação Gauss-Jordan envolve escrever menos e, em sistemas pequenos, pode-se argumentar ser mais eficiente que a eliminação gaussiana. Porém, para sistemas grandes o método Gauss-Jordan precisa de cerca de 50% mais operações que a eliminação gaussiana. Na próxima seção, estudaremos um outro método: a decomposição LU.

2.4 Método da Decomposição ou Fatoração LU

Esse método de resolução de sistemas consiste em decompor a matriz A em um produto da matriz triangular inferior com diagonal unitária L pela matriz triangular superior U.

Teorema: Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e A_k a matriz formada das primeiras k linhas e k colunas de A. Supondo $det(A_k) \neq 0$, onde k=1,2,...,n-1. Então existe única matriz triangular inferior $L = l_{ij}$, com l_{ii} =1,1≤ i ≤ n e uma única matriz triangular superior $U= u_{ii}$ tais que $LU = A$. Ademais, $det(A_k) = u_{11} u_{22} \ldots u_{nn}$.

A demonstração deste teorema pode ser feita por indução sobre n. Para saber mais ver (RUGGIERO; LOPES, 1998).

Vamos usar a decomposição LU para resolver $Ax = b$. Desta forma, sejam o sistema linear $Ax = b$ e a decomposição LU da matriz A. Temos que

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b.$$

Seja $y = Ux$. A solução do sistema pode ser obtida através da resolução dos seguintes sistemas:

i) $Ly = b$

ii) $Ux = y$

Vale lembrar ainda que y é o vetor constante do lado direito obtido ao final do processo da eliminação de Gauss.

Sejam A, L e U matrizes $n \times n$. Fazendo $LU = A$, temos que

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}, \text{ onde } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Existem várias formas de decompor a matriz A na forma LU. Uma dessas formas é dada pelo método de eliminação de Gauss, pois ao final deste método obtemos a matriz U. A matriz L é obtida de forma implícita, e os elementos m_{ij} da matriz L são os números usados na eliminação por linhas $(l_i - m_{ij} l_j) \to l_i$.

Para obtermos os elementos das matrizes L e U, podemos utilizar as seguintes fórmulas gerais:

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj} \ , i \le j \\ l_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}) / \, u_{jj} \, , i>j \end{cases}$$

Por convenção, $\sum_{j=1}^{k} \equiv 0$ se $k < 1$.

Para resolução do sistema proposto, vamos seguir o seguinte roteiro:

a) Verificar se A satisfaz as condições da decomposição LU, isto é, $det(A_k) \neq 0$; b) decompor A em LU; c) resolver o sistema $Ax = b$, onde $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^t$.

Exemplo 4: Resolva o sistema linear a seguir usando a decomposição *LU*.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

É fácil verificar que $det(A_k) \neq 0$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$. Agora vamos decompor a matriz A na forma LU. Aplicando o método de redução por linhas na matriz A temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2+L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}, \text{onde } m_{21} = -1$$

$$\xrightarrow{L3-3L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -10 & -2 \end{bmatrix}, \text{onde } m_{31} = 3$$

$$\xrightarrow{L3-10L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -52 \end{bmatrix}, \text{onde } m_{32} = 10$$

Logo a matriz $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -52 \end{bmatrix}$ e a matriz $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$, isto é, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

Pode ser verificado $A = LU$.

O seguinte passo é resolver o sistema $Ax = b$ isto é feito em dois passos.

Primeiro passo: considere $Ly = b$, então

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \textit{de onde vem:}$$

$y_1 = 8$

$-y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 9$

$3y_1 + 10y_2 + y_3 = 10 \Rightarrow y_3 = -104.$

Segundo passo: como $Ux = y$, temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -52 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -104 \end{pmatrix}, de\ onde\ segue:$$

$-52x_3 = -104 \Rightarrow x_3 = 2.$

$-x_2 + 5x_3 = 9 \Rightarrow x_2 = 1.$

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \Rightarrow x_1 = 3.$

Assim, a solução do sistema é $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Na seção seguinte, trataremos do método de Cholesky. Através desse método podemos simplificar os cálculos da decomposição *LU*, para os casos em que a matriz relacionada ao sistema linear seja simétrica.

2.5 Método de Cholesky

A decomposição de Cholesky requer aproximadamente a metade do número de operações efetuadas na fase da eliminação da decomposição *LU*.

Definição: Uma matriz real simétrica *A* de ordem *n* é positiva definida quando para A_k, matriz formada pelas primeiras *k* linhas e *k* colunas de *A* valer: $det(A_k) > 0$, $k = 1,2,...,n$.

Teorema: Se *A* é simétrica, positiva definida, então *A* pode ser decomposta de forma única no produto GG^t, onde G é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal estritamente positivos.

Se *A*, *G* e G^t matrizes $n \times n$. Então

$$GG^t = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \cdots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & g_{32} & \cdots & g_{n2} \\ 0 & 0 & g_{33} & \cdots & u_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}, \text{onde } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para obtermos os elementos da matriz *G*, podemos utilizar as seguintes fórmulas gerais:

a) Para elementos diagonais de *G*:

$$\begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} {g_{ik}}^2\right)^{1/2}, i = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

b) Para elementos não diagonais de *G*:

$$\begin{cases} g_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{g_{11}}, i = 2, 3, \ldots, n. \\ g_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}\, g_{jk}) / \, g_{jj}\,, i = 2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

Vale observar que na decomposição *LU* tínhamos $det(A) = u_{11}\, u_{22} \ldots u_{nn}$, já no método Cholesky temos que: $det(A) = det(G)^2 = (g_{11}\, g_{22} \ldots g_{nn})^2$, onde $A=GG^t$.

A resolução do sistema linear $Ax = b$ segue o seguinte esquema:

$$Ax = b \Leftrightarrow (GG^t)x = b \Rightarrow \begin{cases} i)\ Gy = b \\ ii)\ G^t x = y \end{cases}$$

Para resolução do sistema proposto, vamos seguir o seguinte roteiro:

a) Verificar se *A* satisfaz as condições do método de Cholesky, isto é, $det(A_k) > 0$; b) decompor *A* em GG^t; c) resolver o sistema $Ax = b$, onde $(b_1\, b_2 \ldots b_n)^t$

Exemplo 5: Resolva o sistema linear a seguir usando o método de Cholesky:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 19 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$$

a) Temos que: $det(A_1) = 1 > 0$, $det(A_2) = 2 > 0$, $det(A_3) = det(A) = 8 > 0$.

b) Usando as fórmulas, obtemos:

$g_{11} = \sqrt{a_{11}} \Rightarrow g_{11} = \sqrt{1} \Rightarrow g_{11} = 1,$

$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} \Rightarrow g_{21} = \frac{1}{1} = 1,$

$g_{31} = \frac{a_{31}}{g_{11}} \Rightarrow g_{31} = \frac{1}{1} = 1,$

$g_{22} = (a_{22} - {g_{21}}^2)^{1/2} \Rightarrow g_{22} = (3 - 1^2)^{1/2} \Rightarrow g_{22} = \sqrt{2},$

$g_{32} = \frac{a_{32} - g_{31} g_{21}}{g_{22}} \Rightarrow g_{32} = \frac{-1-1.1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$

$g_{33} = (a_{33} - {g_{31}}^2 - {g_{32}}^2)^{1/2} \Rightarrow g_{33} = (7 - 1^2 - (-\sqrt{2})^2)^{1/2} \Rightarrow g_{33} = 2.$

Então,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Para $Gy = b$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 5$

$y_1 + \sqrt{2} y_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -3\sqrt{2}$

$y_1 - \sqrt{2} y_2 + 2y_3 = 19 \Rightarrow y_3 = 4.$

Para $G^t x = y$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$2x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 2.$

$\sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}x_3 = -3\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = -1.$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = 4.$

Assim, a solução de $Ax = b$ é $x = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3 | MÉTODOS ITERATIVOS

3.1 Introdução

Em paralelo aos métodos diretos para resolução de sistemas lineares, existem os métodos iterativos. A grande vantagem desses métodos é a autocorreção, diminuindo assim erros de arredondamento nas soluções oriundas de métodos diretos.

Seja o sistema linear $Ax = b$. Este sistema será transformado em um outro sistema do tipo $x = Bx + g$, onde B é a matriz $n \times n$ e g vetor $n \times 1$. A solução desse novo sistema é também solução de $Ax = b$, por se tratarem de sistemas equivalentes. Vale notar que se $\varphi(x) = Bx + g$, então o sistema $x = Bx + g$ é reescrito na forma $x = \varphi(x)$. Onde φ é chamada função de iteração.

O processo de iteração segue o seguinte esquema:

I. Começamos com uma aproximação inicial $x^{(0)}$ para solução;

II. Em seguida, construímos aproximações sucessivas:

$$\begin{cases} x^{(1)} = Bx^{(0)} + g = \varphi\left(x^{(0)}\right), \\ x^{(2)} = Bx^{(1)} + g = \varphi\left(x^{(1)}\right), \\ \vdots \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g = \varphi\left(x^{(k)}\right), k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

De modo que $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$, onde α é solução do sistema $Ax = b$.

Contudo é importante sabermos se a sequência que estamos construindo está convergindo ou não para a solução almejada. Surge, portanto, a necessidade de se trabalhar com critérios de convergência.

Repetimos o processo iterativo até o vetor $x^{(k)}$ está suficientemente próximo do vetor $x^{(k-1)}$.

Ademais, dados uma precisão $\mathcal{E}$ e uma distância $d^{(k)}$, com $d^{(k)} = \max_{1\le i\le n} \left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|$, o vetor $x^{(k)}$ é escolhido como solução aproximada se $d^{(k)} < \mathcal{E}$. O teste de erro relativo pode ser realizado pelo seguinte cálculo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1\le i\le n} \left|x_i^{(k)}\right|} .$$

3.2 Método Iterativo de Gauss-Jacobi

A ideia central desse método é transformar o sistema linear $Ax = b$ no sistema equivalente $x = Bx + g$. Para isso, tendo como base o sistema original

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Assumindo $a_{ij} \neq 0$, operamos da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}) \end{cases}.$$

Assim, $x = Bx + g$, onde

$$B = \begin{bmatrix} a & -a_{12}/\,a_{11} & \cdots & -a_{1n}/\,a_{11} \\ -a_{21}/\,a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/\,a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}/\,a_{nn} & -a_{n2}/\,a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ e } g = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dado uma aproximação inicial $x^{(0)}$, calculamos $x^{(1)},\ldots, x^{(k)}$ recursivamente, pela relação $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{cases}.$$

Exemplo 1: Resolver o sistema linear

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Jacobi com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -3/2 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 0{,}05$.

O processo iterativo é

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(5 + x_2^{(k)}\right) = \frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{5}{4}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(-1 - x_1^{(k)}\right) = -\frac{1}{2}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}$$

De maneira que $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, onde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } g = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Para $k=0$, temos

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}x_2^{(0)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{5}{4} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

$$x_2^{(1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(0)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{7}{8} = -0{,}875$$

$$\therefore x^{(1)} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ -7/8 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(1)}$:

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = \left|\frac{7}{8} - \frac{3}{4}\right| = \frac{1}{8}$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = \left|-\frac{7}{8} + \frac{3}{2}\right| = \frac{5}{8}$$

$$d_r^{(1)} = \frac{5}{7} = 0{,}714 > \varepsilon.$$

Prosseguindo as iterações, temos:

para k=1:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}x_2^{(1)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-7}{8}\right) + \frac{5}{4} = \frac{33}{32} = 1{,}031$$

$$x_2^{(2)} = -\frac{1}{2}x_1^{(1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{15}{16} = -0{,}937$$

$$\therefore x^{(2)} = \begin{pmatrix} 33/32 \\ -15/16 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(2)}$:

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = \left|\frac{33}{32} - \frac{7}{8}\right| = \frac{5}{32}$$

$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = \left|-\frac{15}{16} + \frac{7}{8}\right| = \frac{1}{16}$$

$$d_r^{(2)} = \frac{5}{33} = 0{,}151 > \varepsilon.$$

para k=2:

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{4}x_2^{(2)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-15}{16}\right) + \frac{5}{4} = \frac{65}{64} = 1{,}015$$

$$x_2^{(3)} = -\frac{1}{2}x_1^{(2)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{33}{32}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{65}{64} = -1{,}015$$

$$\therefore x^{(3)} = \begin{pmatrix} 65/64 \\ -65/64 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(3)}$:

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = \left|\frac{65}{64} - \frac{33}{32}\right| = \frac{1}{64}$$

$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = \left|-\frac{65}{64} + \frac{15}{16}\right| = \frac{5}{64}$$

$$d_r^{(3)} = \frac{5}{65} = 0{,}07 > \varepsilon.$$

para k=3:

$x_1^{(4)} = \frac{1}{4}x_2^{(3)} + \frac{5}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{-65}{64}\right) + \frac{5}{4} = \frac{255}{256} = 0{,}996$

$x_2^{(4)} = -\frac{1}{2}x_1^{(3)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{65}{64}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{129}{128} = -1{,}007$

$\therefore x^{(4)} = \begin{pmatrix} 255/256 \\ -129/128 \end{pmatrix}$

Calculando $d_r^{(4)}$:

$\left|x_1^{(4)} - x_1^{(3)}\right| = \left|\frac{255}{256} - \frac{65}{64}\right| = \frac{5}{256}$

$\left|x_2^{(4)} - x_2^{(3)}\right| = \left|-\frac{129}{128} + \frac{65}{64}\right| = \frac{1}{128}$

$d_r^{(4)} = \frac{5}{258} = 0{,}019 < \varepsilon.$

Então, a solução do sistema linear acima, com erro menor que 0,05, obtida pelo método Gauss-Jacobi, é

$$\bar{x} = x^{(4)} = \begin{pmatrix} 0{,}996 \\ -1{,}007 \end{pmatrix}.$$

O valor de $x^{(0)}$ é arbitrário.

O teorema a seguir estabelece uma condição suficiente para a convergência do método Gauss-Jacobi.

Teorema (Critério das Linhas): Sejam o sistema $Ax = b$ e $\alpha_k = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$. Se $\alpha = \max_{1\leq k\leq n} \alpha_k < 1$, então o método Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independentemente da aproximação inicial $x^{(0)}$.

A demonstração desse teorema pode ser vista em (RUGGIERO; LOPES, 1998).

Vamos analisar o sistema linear do exemplo anterior. Temos

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25 < 1;\ \alpha_2 = \frac{1}{5} = 0{,}5 < 1;$$

logo, $\max_{1\leq k\leq 2} \alpha_k = 0{,}5 < 1$ e, portanto, pelo critério das linhas está garantida a convergência para o método Gauss-Jacobi.

Na seção seguinte, vamos tratar do método Gauss-Seidel. Este método também consiste em transformar $Ax = b$ em um sistema equivalente $x = Bx + g$, mediante separação da diagonal.

3.3 Método Iterativo de Gauss-Seidel

Dada uma aproximação inicial $x^{(0)}$, calculamos $x^{(0)}$, $x^{(1)}$,..., $x^{(k)}$,... por

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right) \end{cases}$$

Portanto, o método Gauss-Seidel utiliza os valores mais atualizados para o cálculo de $x^{(k+1)}$.

Exemplo 2: Resolver o sistema

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 6x_2 + 8x_3 = -4 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Seidel, dados $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\varepsilon = 0{,}05$.

O processo iterativo é

$$x_1^{(k+1)} = \tfrac{1}{5}\left(3 - 2.x_2^{(k)} - 2.x_3^{(k)}\right) = -\tfrac{2}{5}x_2^{(k)} - \tfrac{2}{5}x_3^{(k)} + \tfrac{3}{5}$$

$$x_2^{(k+1)} = \tfrac{1}{3}\left(-4 - 1.x_1^{(k+1)} - 1.x_3^{(k)}\right) = -\tfrac{1}{3}x_1^{(k+1)} - \tfrac{1}{3}x_3^{(k)} - \tfrac{4}{3}$$

$$x_3^{(k+1)} = \tfrac{1}{8}\left(-4 - 0.x_1^{(k+1)} - 6.x_2^{(k+1)}\right) = -\tfrac{3}{4}x_2^{(k+1)} - \tfrac{1}{2}$$

Para k=0:

$$x_1^{(1)} = -\tfrac{2}{5}x_2^{(0)} - \tfrac{2}{5}x_3^{(0)} + \tfrac{3}{5} = \tfrac{3}{5} = 0{,}6$$

$$x_2^{(1)} = -\tfrac{1}{3}x_1^{(1)} - \tfrac{1}{3}x_3^{(0)} - \tfrac{4}{3} = -\tfrac{23}{15} = -1{,}533$$

$$x_3^{(1)} = -\tfrac{3}{4}x_2^{(1)} - \tfrac{1}{2} = \tfrac{13}{20} = 0{,}65$$

$$\therefore x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ -1{,}533 \\ 0{,}65 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(1)}$:

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |0{,}6 - 0| = 0{,}6$$

$$\left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |-1{,}533 - 0| = 1{,}533$$

$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |0{,}65 - 0| = 0{,}65$$

$$d_r^{(1)} = \tfrac{1{,}533}{1{,}533} = 1 > \varepsilon.$$

Para k=1:

$$x_1^{(2)} = -\frac{2}{5}x_2^{(1)} - \frac{2}{5}x_3^{(1)} + \frac{3}{5} = \frac{143}{150} = 0,953$$
$$x_2^{(2)} = -\frac{1}{3}x_1^{(2)} - \frac{1}{3}x_3^{(1)} - \frac{4}{3} = -1,866$$
$$x_3^{(2)} = -\frac{3}{4}x_2^{(2)} - \frac{1}{2} = 0,899$$
$$\therefore x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,953 \\ -1,866 \\ 0,899 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(2)}$:

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |0,953 - 0,6| = 0,353$$
$$\left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |-1,866 + 1,533| = 0,333$$
$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |0,899 - 0,65| = 0,249$$
$$d_r^{(2)} = \frac{0,353}{1,866} = 0,189 > \varepsilon.$$

Para : k=2

$$x_1^{(3)} = -\frac{2}{5}x_2^{(2)} - \frac{2}{5}x_3^{(2)} + \frac{3}{5} = -0,4.(-1,866) - 0,4.0,899 + 0,6 = 0,986$$
$$x_2^{(3)} = -\frac{1}{3}x_1^{3} - \frac{1}{3}x_3^{(2)} - \frac{4}{3} = -0,333.0,986 - 0,333.0,899 - 1,333 = -1,961$$
$$x_3^{(3)} = -\frac{3}{4}x_2^{(3)} - \frac{1}{2} = -0,75.(-1,961) - 0,5 = 0,971$$
$$\therefore x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,986 \\ -1,961 \\ 0,971 \end{pmatrix}$$

Calculando $d_r^{(3)}$:

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = |0,986 - 0,953| = 0,033$$
$$\left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = |-1,961 + 1,866| = 0,095$$
$$\left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = |0,971 - 0,899| = 0,072$$
$$d_r^{(3)} = \frac{0,095}{1,961} = 0,048 < \varepsilon.$$

Portanto, a solução $\bar{x}$ do sistema linear com erro menor que $\mathcal{E}$, é

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,986 \\ -1,961 \\ 0,971 \end{pmatrix}.$$

Vamos agora analisar nossa solução, obtida pelo método Gauss-Seidel, a partir de um outro critério de convergência: o critério de Sassenfeld.

Critério de Sassenfeld:

Sejam $\beta_1 = \frac{|a_{12}|+|a_{13}|+\cdots+|a_{1n}|}{|a_{11}|}$ e $\beta_2 = \frac{|a_{j1}|\beta_1+|a_{j2}|\beta_2+\cdots+|a_{jj-1}|\beta_{j-1}+|a_{jj+1}|+\cdots+|a_{jn}|}{|a_{jj}|}$.

Se $\beta = \underset{1\le j\le n}{máx} \{\beta_j\} < 1$, então o método Gauss-Seidel gera uma sequência convergente, qualquer que seja $x^{(0)}$.

Analisando o exemplo anterior pelo critério de Sassenfeld, temos

$$\beta_1 = \frac{2+2}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8 < 1$$

$$\beta_2 = \frac{1\times\frac{4}{5}+1}{3} = \frac{3}{5} = 0{,}6 < 1$$

$$\beta_3 = \frac{0\times\frac{4}{5}+6\times\frac{3}{5}}{8} = \frac{9}{20} = 0{,}45 < 1$$

Logo, $\underset{1\leq j\leq 3}{máx}\ \beta_j = 0{,}8 < 1$ e pelo critério de Sassenfeld está garantida a convergência para o método Gauss-Seidel.

Vale observar que o critério de Sassenfeld pode ser satisfeito mesmo que o critério das linhas não o seja. Também podemos permutar linhas e/ou colunas afim de obtermos uma nova disposição que satisfaça esses critérios de convergência.

Um outro critério importante de convergência é o teste para verificar se a matriz dos coeficientes é estritamente diagonalmente dominante.

Definição: Uma matriz estritamente diagonalmente dominante se:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Analisando por esse critério o sistema linear anterior, temos

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 6x_2 + 8x_3 = -4 \end{cases}, \text{onde } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$|a_{12}| + |a_{13}| = |2| + |2| < |5| = |a_{11}|,$

$|a_{21}| + |a_{23}| = |1| + |1| < |3| = |a_{22}|,$

$|a_{31}| + |a_{32}| = |0| + |6| < |8| = |a_{33}|.$

Logo, podemos garantir que os métodos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel são ambos convergentes para o sistema dado.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para além do que é geralmente estudado no Ensino Básico, buscamos expor alternativas para resolução do problema de resolver *Ax = b*. Com intuito de oferecer uma visão mais ampliada ao professor de Matemática do ensino básico que tenha o desejo de se aprofundar no tema.

Em nossa pesquisa, propomos estudar quatro métodos diretos e dois métodos iterativos. Pretendeu-se com isso solucionar *Ax = b* e traçar um paralelo entre essas diversas formas de abordar a questão. Comparamos alguns métodos e destacamos o uso adequado de cada um deles, tendo em vista a redução de cálculos e a precisão da solução.

A necessidade de estudar tal problemática surge do fato de que diversos problemas em distintas áreas do conhecimento podem ser modelados por sistemas lineares. Deste modo, a relevância do tema nos motivou a pesquisar sobre o assunto.

Finalmente, acreditamos que nossa pesquisa pode servir como introdução para um estudo mais aprofundado sobre a resolução de sistemas lineares.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Santos Demetrio, pelo apoio e pelas valiosas sugestões ao trabalho. Aos professores do curso de Mestrado em Matemática – PROFMAT/ UFERSA, pela contribuição teórica. Ao coordenador do curso Ronaldo Garcia, pelo apoio e incentivo.

REFERÊNCIAS

HEFEZ, A; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HOWARD, A; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

LAMIN, M. R. N. **Resolução de Problemas Modelados com Sistemas de Equações Lineares**. Monografia (Licenciatura em Matemática). Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2000.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 8ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

PULINO, P. **Álgebra Linear e suas Aplicações: Notas de Aula**. Disponível em: < http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/ > Acesso em: 20 jan. 2016

RUGGIERO, M. A. G; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1998.

STRANG, G. Á**lgebra Linear e suas aplicações**. 4ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

CAPÍTULO 3

DIMENSÕES EM $\mathbb{Z}$ AO ALCANCE PARA TODOS: UMA GENERALIZAÇÃO DA GEOMETRIA

Data de aceite: 17/11/2020
Data de submissão: 02/10/2020

Carla Maldonado Ivankovic
Universidad Mayor de San Andrés
FCPN/Carrera de Matemática
La Paz – Bolivia

RESUMEN: *Dimensiones en $\mathbb{Z}$* es un trabajo de investigación pionero en su área, que ha generalizado los axiomas de incidencia de la geometría de Hilbert a números enteros $\mathbb{Z}$, mostrando consistencia, importancia y pertinencia para su mayor desarrollo. Podría revolucionar la geometría y todo lo que ella genera, por lo que necesita beneficiarse del fenómeno de la globalización para obtener la contribución y el aporte de la mayor cantidad de investigadores posible. Actualmente los resultados obtenidos se encuentran en un lenguaje puramente matemático muy especializado, que hace difícil su comprensión, por este motivo es necesario elaborar un documento que pueda ser asimilado por investigadores de diferentes áreas. Por tanto, el objetivo del trabajo es elaborar un documento que explique con mayor facilidad los principales conceptos de *Dimensiones en $\mathbb{Z}$* que acompañe al conocimiento científico y capacite al lector en el entendimiento de esta geometría axiomática para futuros y mayores aportes, utilizando como principal fuente bibliográfica el documento de investigación: *Dimensiones en $\mathbb{Z}$. Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría*, escrito por Andrés Alberdi Baptista.
PALABRAS CLAVE*:* Geometría, Dimensiones Negativas, Dimensiones en $\mathbb{Z}$**.**

DIMENSIONS IN $\mathbb{Z}$ IN THE REACH OF EVERYONE: A GENERALIZATION OF GEOMETRY

ABSTRACT: *Dimensions in $\mathbb{Z}$* is a pioneering research work in its area, which has generalized the incidence axioms of Hilbert geometry to integers $\mathbb{Z}$, showing consistency, importance and relevance for its further development. It could revolutionize geometry and everything that it generates, so it needs to benefit from the phenomenon of globalization to obtain the contribution and input of as many researchers as possible. Currently the results obtained are in a highly specialized purely mathematical language, which makes their understanding difficult, for this reason it is necessary to prepare a document that can be assimilated by researchers from different areas. Therefore, the objective of this work is to elaborate a document that more easily explains the main concepts of *Dimensions in $\mathbb{Z}$* that accompanies scientific knowledge and enables the reader to understand this axiomatic geometry for future and greater contributions, using as the main bibliographic source the research document: *Dimensiones en $\mathbb{Z}$. Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría*, written by Andrés Alberdi Baptista.
KEYWORDS*:* Geometry, Negative Dimensions, Dimensions in $\mathbb{Z}$.

1 | INTRODUCCIÓN

Dimensiones en $\mathbb{Z}$, es una propuesta de replanteamiento y generalización de los conceptos básicos de la geometría clásica, desarrollado por Andrés Alberdi Baptista[1] en el documento de investigación *Dimensiones en $\mathbb{Z}$. Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría.*

Esta propuesta se originó en 1990 en una charla entre Andrés Alberdi, Efraín Cruz[2] y Eduardo Palenque[3], en la que salió a la luz la posibilidad de la existencia de dimensiones negativas. En 1991, se expusieron las primeras nociones de esta geometría en el Primer Congreso Boliviano de Matemáticas, pero no fue sino hasta mayo de 2017 cuando aparecieron los primeros bosquejos de generalización y formalización de estas ideas, las cuales fueron consolidándose hasta octubre de ese mismo año, presentándose la axiomática por primera vez en el XX Congreso Boliviano de Matemática en ocasión del quincuagésimo aniversario de la fundación de la Carrera de Matemática de la UMSA. Actualmente se tiene instaurado el "Taller de Dimensiones en $\mathbb{Z}$" a la cabeza de Andrés Alberdi, con la participación de profesores y estudiantes de la Carrera de Matemáticas de la UMSA.

Dimensiones en $\mathbb{Z}$ trata de generalizar desde un punto de vista axiomático las nociones básicas de geometría conocidas hasta el momento. En la geometría clásica sólo son admitidas dimensiones no negativas en números enteros, vale decir, desde la dimensión cero hasta la dimensión n, donde n es un número natural, e incluso hasta dimensiones infinitas (positivas). Sin embargo, en Dimensiones en $\mathbb{Z}$ se propone la existencia de dimensiones negativas desde una perspectiva axiomática, una idea que no fue desarrollada hasta ahora por la comunidad matemática.

El presente artículo, busca explicar los primeros conceptos de esta geometría axiomática, exponiendo primeramente cómo puede concebirse la idea de dimensiones negativas de una manera intuitiva en una primera parte, pasando luego a una explicación formal de la construcción de los $\mathbb{Z}$ - espacios, que son el conjunto y el marco en el que se desarrolla esta nueva forma de concebir la geometría y finalizando en la explicación también formal de la construcción de un operador que permite relacionar los objetos geométricos que se encuentran en estos $\mathbb{Z}$ - espacios.

2 | DESARROLLO

Históricamente el estudio de la Geometría Axiomática Clásica, desde Euclides hasta Hilbert y Tarski, ha partido de conceptos primitivos los que, al ser intuitivos,

1 Matemático titulado de la Universidad Mayor de San Andrés (UMSA) en La Paz, Bolivia y autor del documento de investigación Dimensiones en $\mathbb{Z}$. Propuesta Inicial para Generalizar los Términos Primitivos de la Geometría.

2 Doctor en matemáticas y actual docente emérito de la Carrera de Matemática de la UMSA.

3 Doctor en física, actual docente emérito de la Carrera de Física de la UMSA y Director del laboratorio de Ciencia de Materiales.

no necesitaban de una definición formal; sin embargo, estos conceptos no definidos hacen de la geometría así estudiada un caso especial y/o particular de la geometría axiomática del estudio de Dimensiones en $\mathbb{Z}$.

En matemáticas, las principales herramientas básicas son la abstracción y la generalización. A través de Dimensiones en $\mathbb{Z}$, se generalizan los conceptos primitivos de la geometría, conceptos como *punto, recta, plano, espacio* y *yace en*, lo que permite demostrar los axiomas de Hilbert, y por otro lado, viabilizar la existencia de dimensiones negativas.

2.1 ¿A qué se refieren las dimensiones negativas?

Hay diferentes maneras de percibir las dimensiones negativas, en esta sección se expondrán tres de ellas, dos que toman como punto de partida la geometría euclidiana pero terminan expandiéndola, y la tercera que considera el álgebra lineal.

I. Primera percepción geométrica

En la geometría euclidiana solo se consideran objetos que pueden ser percibidos por el ser humano a través de sus sentidos, vale decir, solo considera objetos de hasta tres dimensiones. En este sentido, podemos pensar; por ejemplo, en una caja cuadrada de cartón. Esta caja es tridimensional, dado que presenta altura, anchura y profundidad; sin embargo, dependiendo del ángulo desde donde observemos la caja, podríamos percibirla de diferente manera, vale decir como si estuviera en una dimensión diferente, y más específicamente, como si estuviera en una dimensión menor.

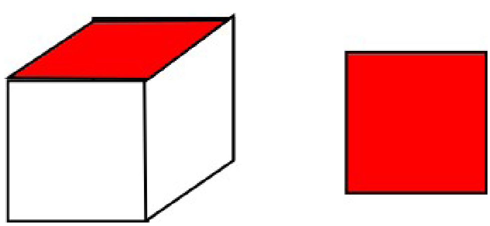


Figura 1. Caja cuadrada de cartón vista en diferentes ángulos

Apelando a la imaginación del lector, si observáramos la caja desde arriba, lo que veríamos sería uno de los lados de la caja, el superior, y observaríamos un cuadrado que está en dos dimensiones. De esta manera, estaríamos percibiendo a este objeto tridimensional como si estuviera en una dimensión inferior; es decir, como si fuera un objeto bidimensional.

De la misma manera, si tomáramos un paralelogramo y lo observáramos de lado, lo que veríamos sería uno de los lados del paralelogramo; vale decir, lo que veríamos sería una línea, la cual se encuentra en dimensión uno, de forma que estaríamos percibiendo a un objeto bidimensional como si fuera un objeto unidimensional.

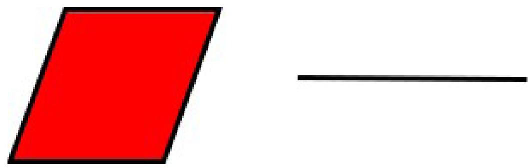


Figura 2. Lado de una caja cuadrada de cartón vista en diferentes ángulos

Finalmente, podríamos tomar un pincel que represente una recta en dimensión uno. Si observáramos el pincel de tal forma que solo podamos ver su parte posterior y no sea posible ver su mango, lo que veríamos sería un punto, el cual se encuentra en dimensión cero. Así, al igual que en los ejemplos anteriores, estaríamos percibiendo un objeto de una dimensión dada, en este caso un objeto unidimensional, como si estuviera en una dimensión inferior, en el caso de este ejemplo, en dimensión cero.

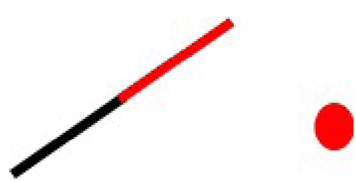


Figura 3. Recta vista en diferentes ángulos

Si pudiéramos ser capaces de agarrar un punto, y verlo desde un ángulo que nos permita apreciarlo en una dimensión menor a la dimensión en la que se encuentra, lo que observaríamos sería un objeto en una dimensión inferior a la del punto; es decir, un objeto en dimensión menor a cero, un objeto en dimensión negativa (en dimensión -1).

Nuestra capacidad visual no nos permite percibir objetos que se encuentren en dimensiones menores a la del punto; no obstante, esto no significa que tales dimensiones no podrían existir. En los ejemplos que acabamos de ver, dependiendo del ángulo desde donde lo veamos, un cubo puede verse como un cuadrado, un cuadrado puede verse como una recta, una recta puede verse como un punto, y un punto puede verse como un objeto en dimensión -1. Esta idea nos conduce a construcciones abstractas de dimensiones negativas decrecientemente hacia abajo, generándose de esta manera las dimensiones negativas.

II. Segunda percepción geométrica

La segunda forma de percibir la existencia de dimensiones negativas, es mediante la observación de las partes de un objeto geométrico.

En el ejemplo de la caja de cartón, este objeto tridimensional, que puede abstraerse como un cubo, está formado por seis caras, donde cada cara se encuentra en dimensión dos. Cada cara de este cubo está formada por cuatro lados o cuatro líneas, donde cada línea se encuentra en dimensión uno. Cada línea o cada recta está formada por infinitos puntos, donde cada punto se encuentra en dimensión cero. Podemos observar entonces, que las partes de cualquier objeto dado se encuentran en una dimensión inferior a este. En este sentido, las partes de un punto tendrían que encontrarse en una dimensión inferior a cero, en dimensión -1. Realizando este ejercicio de manera indefinida, nuevamente se construyen dimensiones negativas decrecientemente hacia abajo, donde en caso de existir las dimensiones negativas, los objetos que se encontrarían en ellas serían partes de objetos iguales o más pequeños que el punto.

III. Percepción desde el álgebra lineal

Una última forma de apreciar la existencia de dimensiones negativas, es partiendo esta vez del álgebra lineal. Para observar esto, debemos comenzar realizando algunos ejemplos de incidencia:

Ejemplos de incidencia

Previamente introduciremos la noción de *objeto geométrico*: Se entiende por objeto geométrico a los objetos completos que abarcan toda una dimensión, por ejemplo, puntos, rectas, planos, etc. Por tanto, no se refiere a objetos geométricos en el sentido clásico (triángulos, cuadrados, circunferencias, esferas, cubos, etc.) si no a objetos abstractos generales.

La notación que emplearemos para los objetos geométricos es la siguiente:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Donde el número de coordenadas de la *n*-ada ordenada determina donde se encuentra el objeto en cuestión, mientras que el número de variables de la *n*-ada ordenada dirá de que objeto geométrico se trata.

Por ejemplo, si fijamos un n=3, los objetos en cuestión se encontrarán en un espacio de tres dimensiones. Si esta 3-ada ordenada no contiene ninguna variable, como por ejemplo (0,0,0)[4], se tratará de un punto, si contuviera una variable, como por ejemplo (x,0,0) se tratará de una recta, si contuviera dos variables como (x,y,0) se tratará de un plano, etc.

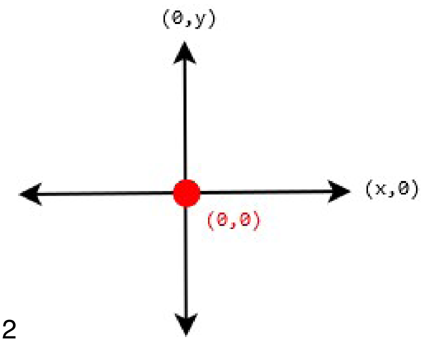
Obsérvese que esta notación sólo funciona para el caso de objetos geométricos que se encuentran en dimensiones de números enteros no negativos. Dicho lo anterior, pasemos a ver los ejemplos de incidencia:

Ejemplo 1. Dos rectas que se intersecan en un punto forman un plano.

Sean dos rectas (x,0) y (0,y) ambas en $\mathbb{R}^2$.

La intersección de estas dos rectas es un punto: $(x,0) \cap (0,y) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$

Por otro lado, estas dos rectas forman el plano: $(x,0) \cup (0,y) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$



2

Figura 4. Intersección de dos rectas en un punto

Ejemplo 2. Dos rectas paralelas forman un plano.

Sean las rectas paralelas (x,0) y (x,1) ambas en $\mathbb{R}^2$.

La intersección de estas dos rectas no existe: $(x,0) \cap (x,1) = \emptyset$

Por otro lado, estas dos rectas forman el plano: $(x,0) \cup (x,1) \in \mathbb{R}^2$

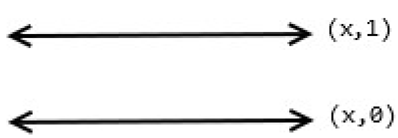


Figura 5. Rectas paralelas

Ejemplo 3. Dos rectas alabeadas[5] forman un espacio de tres dimensiones.

Sean las rectas (0,y,0) y (1,0,z) ambas en $\mathbb{R}^3$

4. Los números que se encuentren en la 3-ada ordenada no necesariamente deben ser cero, pueden ser cualquier otro número real.

5 Afirmamos que dos objetos son alabeados cuando no son paralelos y tampoco se intersecan.

La intersección de estas rectas no existe intuitivamente: $(0, y, 0) \cap (1,0, z) = \emptyset$

Por otro lado, forman el espacio de tres dimensiones: $(0, y, 0) \cup (1,0, z) \in \mathbb{R}^3$

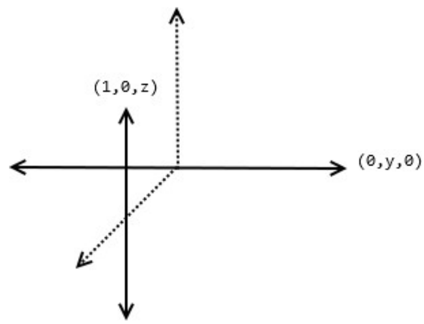


Figura 6. Rectas alabeadas

Los anteriores ejemplos contienen objetos geométricos de hasta tres dimensiones, lo cual permite una representación gráfica. Los siguientes ejemplos se encuentran en dimensiones mayores a tres, no siendo posible su visualización geométrica pero si sus patrones de comportamiento:

Ejemplo 4. Dos planos que están en un espacio de cuatro dimensiones se intersecan en un punto.

Sean los planos $(x,y,0,0)$ y $(0,0,w,z)$ ambos en $\mathbb{R}^4$.

Su intersección es un punto: $(x, y, 0,0) \cap (0,0, w, z) = (0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$

Por otro lado, estos dos planos forman el espacio de cuatro dimensiones:

$$(x, y, 0,0) \cup (0,0, w, z) = (x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4$$

Acá podemos observar un resultado interesante, y es que en la geometría euclidiana la intersección de dos planos nunca puede ser un punto, pero si nos extendemos a un espacio de cuatro dimensiones esta situación cambia.

Ejemplo 5. Dos rectas doblemente alabeadas[6] se encuentran en un espacio de cuatro dimensiones.

Sean las rectas $(x,0,0,0)$ y $(0,1,1,z)$ ambos en $\mathbb{R}^4$

Su intersección no existe intuitivamente: $(x, 0,0,0) \cap (0,1,1, z) = \emptyset$

Ambas forman el espacio de cuatro dimensiones: $(x, 0,0,0) \cup (0,1,1, z) \in \mathbb{R}^4$

De esta manera, se puede observar tres diferentes formas de concebir las dimensiones negativas, pero esta última resulta de mayor importancia, dado que una observación detenida de la misma permite descubrir una relación que puede

6 Se dice que están doblemente alabeadas porque dos de sus coordenadas nunca se van a intersecar, en este sentido, estarán tres veces alabeadas si tres de sus coordenadas nunca se intersecan, y así sucesivamente. Notar por otro lado, que para que dos rectas estén doblemente alabeadas, estas deben estar mínimamente en $\mathbb{R}^4$.

expresarse en forma de ecuación, la cual se presenta a continuación.

Ecuación fundamental intuitiva

De los ejemplos de incidencia mostrados anteriormente pueden notarse las siguientes regularidades:

i) Cuando existe intersección entre los objetos geométricos o estos están alabeados:

$$\delta(A) + \delta(B) - \delta(C) = \delta(D)$$

ii) Cuando los objetos geométricos son paralelos, es decir, cuando

$A \cap B = \emptyset$:

$$\max\{\delta(A), \delta(B)\} + 1 = \delta(D)$$

Donde:

δ (*A*): Dimensión del objeto geométrico A.

δ (*B*): Dimensión del objeto geométrico B.

δ (*C*): Dimensión de la intersección de A y B.

δ (*D*): Dimensión del objeto formado por A y B.

Una definición más formal de se hará más adelante. Nótese por otro lado, que a los objetos geométricos se los denotará por las primeras letras del abecedario en mayúsculas. Apliquemos estas ecuaciones en los ejemplos presentados anteriormente:

Ejemplo 1. Dimensión del espacio formado por dos rectas que se intersecan en un punto: 1 + 1 - 0= 2

Ejemplo 2. Dimensión del espacio formado por dos rectas paralelas:

max{1,1} + 1 = 2

Ejemplo 3. Dimensión del espacio formado por dos rectas alabeadas:

1 + 1 - (-1) = 3

Nótese que para que este ejemplo cumpla con una de las regularidades de la ecuación fundamental intuitiva, el alabeo debe representar una intersección en dimensiones negativas, lo cual no es nada intuitivo. No es que la intersección de estos objetos no exista, no existe intuitivamente como se mencionó en el ejemplo 3 de la anterior sección, si no que la intersección se encuentra en un espacio de dimensión negativa, en este caso, de dimensión –1, por tanto, en el ejemplo 3 de la anterior sección: $(x, y, 0) \cap (1,0,z) \in [-1]$[7]

Ejemplo 4. Dimensión del espacio formado por dos planos que se intersecan en un punto: 2+2-0=4

Ejemplo 5. Dimensión del espacio formado por dos rectas doblemente

7. Se definirá formalmente [] más adelante, por el momento es suficiente entender que [-1] se refiere al espacio de dimensión -1.

alabeadas: 1+1-(-2)=4

Al igual que en el caso del ejemplo 3, el doble alabeo representa la intersección en dimensiones negativas, donde: $(x,0,0,0) \cap (0,1,1,z) \in [-2]$

De los ejemplos 3 y 5 por tanto se observa que los alabeos entre objetos son una manifestación de la noción de dimensiones negativas.

Todo lo expuesto en esta subsección tuvo un carácter más intuitivo que formal, a partir de la siguiente subsección se introducen los aspectos formales de esta nueva teoría, comenzando por la construcción del marco donde esta se desarrolla, los $\mathbb{Z}$ - espacios.

2.2 $\mathbb{Z}$ - espacios

Dimensiones en $\mathbb{Z}$, postula axiomas de una geometría nueva cuyas propiedades permiten generalizar los conceptos básicos de la geometría clásica a dimensiones enteras positivas y negativas con base en la teoría de conjuntos, por lo que los desarrollos que serán expuestos en lo que resta del documento tienen base en la axiomática de la teoría de conjuntos tradicional.

En esta subsección se plantearán los conceptos básicos de *conglomerado* y $\mathbb{Z}$ - *espacios,* conceptos sobre los cuales se construye esta nueva geometría.

Partimos entonces de la definición de Conglomerado, para esto consideramos un conjunto no vacío *C* cualquiera y la siguiente función definida sobre este conjunto:

$$\delta: \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$$

Esta función se denomina *función de clasificación.* A cada elemento de *C* la función le asigna un número entero, negativo o no negativo, en este sentido, si llamamos *objeto geométrico* a los elementos de *C*, lo que hace la función de clasificación es asignarle a cada objeto geométrico un número entero que corresponderá a la dimensión de ese objeto geométrico.

Haciendo una analogía con la geometría euclidiana, si A es un elemento de *C*, es decir, si *A* ϵ *C* tal que δ(*A*)=0, lo que se está diciendo es que A tiene dimensión cero, o como se diría en geometría euclidiana, A es un punto, de igual manera, si δ(*B*)=1, B es una recta, si δ(*C*)=2, C es un plano, etc. Pero en este caso, no se tendrán solo objetos que bajo la función δ tengan un valor no negativo, sino que también existirá algún objeto D tal que δ(*D*)=-1, y se dirá que D es un objeto de dimensión -1.

Nótese que es así como aparecen objetos de dimensiones negativas en esta nueva geometría, son elementos de un conjunto no vacío *C* tales que bajo la función δ toman valores negativos en los enteros.

Dicho todo lo anterior, formalmente definimos al conglomerado de la siguiente manera:

Definición 1. Supongamos un conjunto no vacío C junto con una función δ en los enteros:

$$\delta : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$$

Llamamos al par (C,δ) un conglomerado.

Nótese que δ no puede ser la función vacía, ya que como C es no vacío, existirá al menos un elemento A en C al que se le podrá aplicar la función δ, tal que δ(A)=x donde x será un número entero, de forma que $(A, x) \in \delta$ y $\delta \neq \emptyset$. Este hecho corresponde a la primera proposición:

Proposición 1. δ no es la función vacía.[8]

Ya definido el conglomerado, podemos definir en él una relación que denotaremos con ≡. Dos objetos se relacionarán mediante ≡ solo si ambos están en la misma dimensión, en este sentido, si A_1 y A_2 son rectas, entonces $A_1 \equiv A_2$ porque ambos están en dimensión 1. Lo que permite esta relación es agrupar todos los objetos que tienen la misma dimensión, lo que a su vez permitirá construir los $\mathbb{Z}$ - espacios, como se verá mas adelante.

Formalmente la definimos de la siguiente manera:

Definición 2. Sea un conglomerado (C,δ), se define una relación ≡ de $C \times C$ tal que $(\forall (A, B) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}),\ A \equiv B \Leftrightarrow \delta(A) = \delta(B)$.

Por la siguiente proposición esta es una relación de equivalencia:

Proposición 2. es una relación de equivalencia.

Una relación se dice que es de equivalencia cuando es reflexiva, simétrica y transitiva.

Será reflexiva cuando los objetos se relacionen con sigo mismo, veamos. Si A es un objeto geométrico, A se relaciona consigo mismo mediante ≡ porque δ(A) = δ(A) . Nótese que esta es una consecuencia de la reflexividad en los números enteros.

Una relación será simétrica siempre que dada una relación R, si aRb entonces necesariamente bRa. La relación ≡ es simétrica por la igualdad en los números enteros, ya que si δ(A) = δ(B) entonces δ(B) = δ(A) porque δ(A) *y* δ(B) son enteros.

Finalmente, una relación será transitiva siempre que dada una relación R, si aRb y bRc entonces necesariamente aRc. Nuevamente, por propiedades de los enteros, la relación ≡ es transitiva, dado que si δ(A) = δ(B) y δ(B) = δ(C) entonces δ(A) = δ(C).

El conglomerado por tanto puede particionarse mediante la relación de equivalencia ≡, donde si dos objetos tienen la misma dimensión, se encontrarán en la misma clase de equivalencia.

8 Para una demostración más formal de esta y el resto de las proposiciones presentadas en este documento, acudir al documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en : Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría. La Paz, Bolivia*.

Las clases de equivalencia son lo que denominamos ℤ - espacios, y cada clase de equivalencia se denotará por [*x*], donde *x* es un número entero. Por ejemplo la clase de equivalencia que contiene a todos los puntos es [0], la clase de equivalencia que contiene a todas las rectas es [1], la que contiene a todos los planos es [2] y la clase de equivalencia que contiene a todos los objetos que están en dimensión -1 es [-1], donde [-1],[0],[1],[2] son ℤ - espacios. Será de gran utilidad poder representar estos ℤ - espacios gráficamente, lo que se desarrolla a continuación:

Representación en grilla

A través de la figura 7 podemos representar los ℤ - espacios, lo que permitirá más adelante visualizar las relaciones que se irán definiendo entre los objetos del conglomerado:

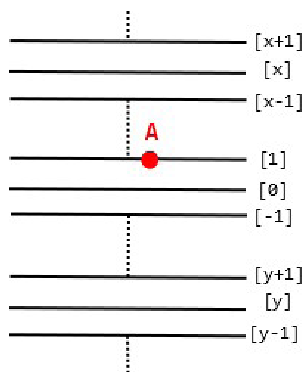


Figura 7. ℤ - espacios

Cada línea representa un ℤ - espacio, y los puntos sobre cada línea, los objetos de cada ℤ - espacio.

En la figura por ejemplo, se observa que A pertenece al ℤ - espacio [1], lo que significa que A es una recta, dado que es un objeto que tiene dimensión 1.

Dada la partición del conglomerado y sus clases de equivalencia, vale decir, sus ℤ - espacios, podemos definir el conjunto de las clases de equivalencia, es decir, su conjunto cociente, además de una función que tiene como codominio a este conjunto:

Definición 3. Definimos $\bar{C}$ como el cociente $C/\equiv$ y a la función $p{:}C \rightarrow \bar{C}$ como la proyección de C en $\bar{C}$. La clase de equivalencia de un objeto $A \in C$ se denota por $\bar{A}$.

El conjunto cociente por tanto es el conjunto de ℤ - espacios:

$$\bar{\mathcal{C}} = \{\cdots, [y-1], [y], [y+1], \cdots, [-1], [0], [1], \cdots, [x-1], [x], [x+1], \cdots\}$$

y la función *p* es la función que asigna a cada objeto del conglomerado su respectiva clase o $\mathbb{Z}$ - espacio.

Nótese que hasta el momento se ha armado el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "p"'] & & \delta(\mathcal{C}) \subset \mathbb{Z} \\ & \bar{\mathcal{C}} & \end{tikzcd}$$

Podemos cerrar el diagrama conmutativo que se está formando con una función [ ] definida sobre $\mathbb{Z}$, donde a cada número entero le asigne un $\mathbb{Z}$ - espacio. La definición más formal es la siguiente:

Definición 4. Definimos al levantamiento de δ como la función denotada por [ ] conforme el siguiente diagrama conmutativo, con $[]\circ\delta = p$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "p"'] & & \delta(\mathcal{C}) \subset \mathbb{Z} \arrow[dl, "{[\,]}"] \\ & \bar{\mathcal{C}} & \end{tikzcd}$$

Que cierra el diagrama conmutativo.

También definimos formalmente a los $\mathbb{Z}$ - espacios:

Definición 5. Llamamos $\mathbb{Z}$ - espacios a los conjuntos no vacíos $[x] \in \bar{\mathcal{C}}$.

Con todo lo anterior, se presentó el marco en el que se desenvuelve esta nueva teoría, y se creó una relación entre elementos de un mismo $\mathbb{Z}$ - espacio. A continuación, se define una nueva relación que permite relacionar objetos que se encuentran en diferentes $\mathbb{Z}$ - espacios y que más adelante permitirá también definir un operador.

2.3 Operador *t*

La relación binaria *t*, relaciona dos objetos de $\mathbb{Z}$ - espacios consecutivos, vale decir, relaciona un objeto de una dimensión x con otro que se encuentra en la dimensión inmediata superior x + 1.

Utilizando la grilla de la figura 7, la relación t entre dos objetos A y B se representará mediante una flecha que vaya de A hacia B como se muestra a continuación:

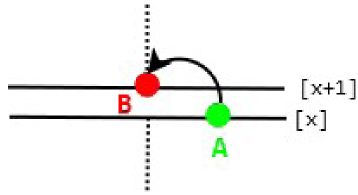


Figura 8. A t relacionado con B: *AtB*

Esta relación generaliza la relación primitiva *yace en* y formalmente se lo define de la siguiente forma:

Definición 6. Supongamos un conglomerado (C,δ) y una relación $t \subset \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ en la clase C que cumpla las siguientes condiciones:

D0) Supongamos $A,B \in C$ con $(A,B) \in t$, entonces $\delta(B) = \delta(A)+1$.

D1) Si $(A,x) \in \delta$ entonces existen $(B,x+1),(C,x-1) \in \delta$ tales que (A,B), $(C,A) \in t$.

D2) Si $(A,x) \in \delta$ entonces existen $(B',x+1),(C',x-1)$ tales que (A,B'), $(C',A) \notin t$.

Una terna de la forma (C,δ,t) con las propiedades mencionadas en la presente definición y en la definición 1 se denomina *estructura de conglomerado.*

La primera condición nos restringe a relacionar solo objetos que se encuentran en $\mathbb{Z}$ - espacios consecutivos[9]; por otro lado, la condición D1 afirma que un objeto A siempre va a t – relacionarse con otro B que se encuentre en un $\mathbb{Z}$ - espacio consecutivo superior y con otro C que se encuentre en un $\mathbb{Z}$ - espacio consecutivo inferior. Mediante el uso de la grilla, se representa D1 de la siguiente manera:

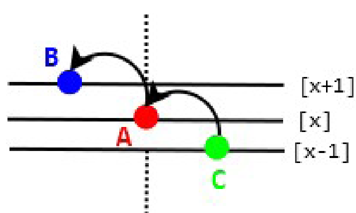


Figura 9. Condición D1

La condición D2 por su parte, afirma que dado cualquier objeto A en cualquier $\mathbb{Z}$- espacio, siempre va a existir otro B’ en una dimensión consecutiva superior y otro C’ en una dimensión consecutiva inferior con los que no se va a relacionar. Gráficamente se lo representa de la siguiente manera:

9 La relación *u* permite relacionar objetos que se encuentran en cualquier $\mathbb{Z}$ - espacio, no necesariamente consecutivos, generalizando la relación *t*; sin embargo, no se desarrollará la relación *u* en este documento. Si el lector está interesado en conocer mas sobre la relación *u*, se lo invita a acudir al documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en $\mathbb{Z}$: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría. La Paz, Bolivia.*

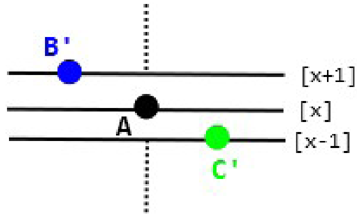


Figura 10. Condición D2

Esta última condición evita que los objetos de un ℤ - espacio se relacionen con todos los objetos de ℤ - espacios inmediatos superiores o inferiores, evitando de esta manera una situación trivial.

La relación t por tanto, en términos coloquiales se refiere a la noción de *estar totalmente en*, donde dos objetos estarán t - relacionados solamente si uno está contenido en el otro.

Relacionar mediante t por ejemplo, un punto con una recta significa que el punto se encuentra en la recta, relacionar una recta con un plano, que la recta se encuentra totalmente en el plano y relacionar un plano con un espacio de tres dimensiones, que el plano se encuentra totalmente en ese espacio.[10]

Finalmente, ahora tenemos las herramientas suficientes para definir operadores:

Operadores t^*yt_*

Definición 7. Sea xЄℤ y AЄ[x], se definen los conjuntos:

$$t^*(A) = \{B \in [x+1]: AtB\}$$
$$t_*(A) = \{C \in [x-1]: CtA\}$$

Por tanto en $t^*(A)$ estamos fijando un objeto A que se encuentra en una dimensión x, y el operador t^* (A) se refiere a todos los objetos en [x+1] que se t - relacionan con A. Por ejemplo, si A es un punto, t^* (A) son todas las rectas que pasan por el punto A.

Por otro lado, en t_* (A) nos referimos a todos los elementos con los que A se t - relaciona. Por ejemplo, si A es un plano, t_* (A) son todas las rectas que están contenidas en ese plano.[11]

10 La relación t cumple con diversas propiedades; sin embargo, las mismas no se encuentran en los alcances de este documento. Si el lector se encuentra interesado por conocer estas propiedades, se lo invita a acudir al documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en ℤ: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría. La Paz, Bolivia*.

11 Para ver mayores detalles sobre los operadores t^* y t se invita al lector a acudir al documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en ℤ: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría. La Paz, Bolivia*.

3 | CONSIDERACIONES FINALES

Todo lo abarcado en este artículo corresponde al primer capítulo del documento de investigación *Dimensiones en ℤ: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría* escrito por Andrés Alberdi Baptista. Si el lector se encuentra interesado en profundizar y continuar con los desarrollos expuestos hasta aquí, puede hacerlo ingresando a la página web https://dimensionesenz.blogspot.com donde encontrará el documento de investigación completo y los últimos avances. También puede contactarse a los correos carla.11.mi.cm@gmail.com de la autora de este artículo y aalberdi@gmail.com de Andrés Alberdi Baptista, desarrollador de esta nueva teoría.

Es importante también mencionar que dado que esta nueva teoría aún se encuentra en desarrollo, aún no ha sido publicada; no obstante, ya ha mostrado su relevancia al ser capaz de demostrar los axiomas de incidencia de Hilbert[12], por lo que es necesario que continúen sus desarrollos.

REFERENCIAS

Alberdi, A. **Dimensiones en ℤ: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría.** La Paz, Bolivia. 2019.

12 La demostración de estos axiomas se encuentra en el documento Alberdi, A. (2019) *Dimensiones en ℤ: Propuesta inicial para generalizar los términos primitivos de la geometría. La Paz, Bolivia.*

CAPÍTULO 4

SÉRIES INFINITAS

Data de aceite: 17/11/2020

Jesus Carlos da Mota
Universidade Federal de Goiás

RESUMO: As séries numéricas são estudadas em qualquer curso de gradução em matemática. Séries simples são estudadas ainda no ensino médio através das progressões aritméticas e geométricas. Em geral é uma questão difícil calcular a soma de uma série infinita. Uma questão que poderia ser mais fácil é a de determinar se a série converge ou não, isto é, se a soma infinita é igual a um determinado número ou não. Neste trabalho, vamos discutir a convergência de algumas séries numéricas, onde veremos que a convergência também pode ser um problema difícil. Por exemplo, as séries $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 sen(n)^2}$ convergem ou divergem? As respostas serão discutidas ao longo do texto.
PALAVRAS-CHAVE: Séries infinitas, Convergência, Série harmônica, Séries especiais.

ABSTRACT: Numerical series are studied in any undergraduate mathematics course. Simple series are studied in high school through arithmetic and geometric progressions. In general, it is a difficult question to calculate the sum of an infinite series. A question that could be easier is to determine whether the series converges or not, that is, whether the infinite sum is equal to a specific number or not. In this work, we will discuss the convergence of some numerical series, where we will see that convergence can also be a difficult problem. For example, the $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ and $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 sen(n)^2}$ series are convergent or not? The answers will be discussed throughout the text.
KEYWORDS: Infinite series, Convergence, Harmonic serie, Special series.

1 I INTRODUÇÃO

Este trabalho é o resultado de um mini-curso ministrado no II Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática, em Brasília-DF, em agosto de 2015.

O objetivo não é fazer um estudo formal das séries infinitas. Isto é feito em um curso regular de graduação em matemática, onde são estudadas as propriedades e os diversos métodos de convergência de uma série. O objetivo aqui é mostrar através de exemplos algumas curiosidades e dificuldades sobre a convergência das séries infinitas. Alguns destes exemplos serão mostrados através de simulações numéricas.

As séries numéricas são estudadas em qualquer curso de gradução em matemática. Séries simples, como as geométricas, são estudadas ainda no ensino médio através das progressões geométricas. Mais simples ainda, são as progressões aritméticas, também estudadas no ensino médio.

Em geral é uma questão difícil calcular a soma de uma série infinita. Uma questão que poderia ser mais fácil é a de determinar se a série converge ou não, isto é, se a soma infinita é igual a um determinado número ou não.

Neste trabalho, discutiremos a convergência de algumas séries numéricas, onde veremos que a convergência também pode ser um problema difícil. Por exemplo, as duas séries citadas no resumo, convergem ou não? Sabemos que a primeira é uma série geométrica de razão igual a 1/2 , e portanto sua soma é facilmente calculada. Já a segunda, não se enquadra em nenhum dos métodos tradicionais de convergência, como Teste da Comparação, Teste da Razão ou de D'Alambert, Teste da Integral, etc. Portanto, estudar sua convergência é um problema difícil.

2 | CONCEITOS BÁSICOS E EXEMPLOS

Os conceitos e resultados básicos serão dados de acordo com a necessidade para o estudo dos exemplo apresentados.

Exemplo 1. Calcular a soma das áreas dos quadrados em destaque da Fig. 1.

Solução: O cálculo resume-se em:

$$A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n}}+\ldots=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2^{2k}} \quad (1)$$

A sequência (S_n), onde $S_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2^{2k}}$ é a sequência das somas parciais da série envolvida.

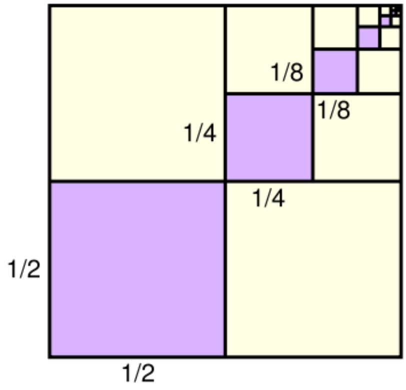


Figura 1: Quadrados com áreas em progressão geométrica

É evidente que esta sequência converge, pois é uma sequência crescente e limitada superiormente por 1 (valor da área do quadrado de lado 1). Para calcularmos o valor exato da soma infinita, devemos primeiramente achar uma fórmula fechada para a soma parcial de ordem n, e depois calcular o limite lim $_{n\to\infty}$ S_n. Neste caso, como os termos de (S_n) formam uma progressão geométrica de razão $r = 1/4$, temos que

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1} = \frac{\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}.$$

Portanto, a soma das áreas dos quadrados é dada por,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

||

Exemplo 2. Fazendo a divisão de 1 por x + 1 obtemos,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots.$$

O matemático italiano Guido Castelnuovo (Venezia, 14 agosto 1865 – Roma, 27 abril 1952), em 1903, fez x = 1, e escreveu:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots, \tag{2}$$

se somarmos um número par de termos, $S_{2k} = 0$ *e se somarmos um numero ímpar de termos* $S_{2k-1} = 0$ *Portanto a soma correta é a média aritmética de 0 e 1, isto é,*

$$S = \frac{S_{2k} + S_{2k-1}}{2} = \frac{1}{2}.$$

||

É claro que esse cálculo é um absurdo, pois 1/2 não pode ser igual a 0 (nem a 1). A conclusão é que a série (2) não converge.

Este exemplo justifica que em uma soma infinita de números reais, que não converge, a propriedade associativa não é válida.

A seguir descrevemos os principais resultados teóricos referidos na solução do Exemplo 1.

Definição 2.1. *Uma sequência de números reais é uma função que associa cada número natural n a um número real* a_n *Denotando a sequência por* (a_n) *diz-se que ela é convergente (ou converge) para um número real L, escreve-se* $\lim_{n\to\infty} a_n =$ *L,* se *para todo número real* $\mathcal{E}>0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, se* $n > n_0$ implica que $|a_n - L| < \mathcal{E}$ *Caso contrário diz que a sequência é divergente (ou diverge).*

Definição 2.2. Se (a_n) é uma sequência, a soma

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$$

é chamada de série infinita com termo geral a_n. Diz que a série converge ou é convergente, se a sequência de suas somas parciais (S_n) onde $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} a_k$, for convergente. Caso contrário diz-se que a série diverge ou é divergente.

Exemplo 3. Calcule a soma S das áreas dos retângulos sob o gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x^2}$, para x≥1, conforme Fig. 2.

Solução:

A soma das áreas dos retângulos é dada por:

$$S=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum \frac{1}{n^2} \tag{3}$$

A primeira peganta é se esta série converge ou diverge. Se ela for divergente, seu "valor" será infinito, pois todos os seus termos são positivos. Por definição devemos calcular o

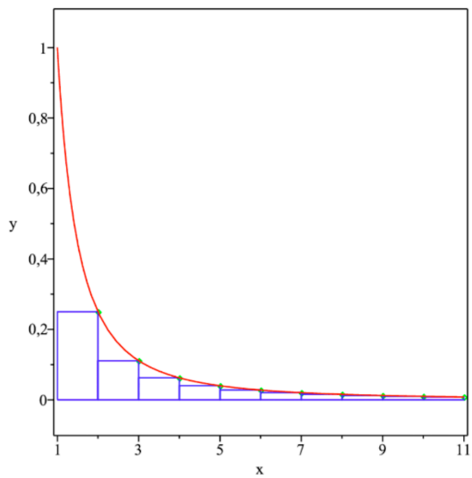


Figura 2

limite das somas parciais (S_n), onde $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

Neste caso, uma fórmula fechada para S_n não é simples. Mas é possível achar uma cota superior para esta soma, que será a área sob o gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x^2}$, para x≥1. Tal área é dada por,

$$A=\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx=\lim_{B\to\infty}\int_1^B \frac{1}{x^2}dx=\lim_{B\to\infty}\left(\frac{-1}{B}+1\right)=1.$$

Como as somas parciais é uma sequência monótona crescente e limitada por A = 1, a conclusão é que a soma S é finita, e ainda, menor do que 1, ou seja, a série é convergente.

A segunda pergunta é: qual é a soma da série? Em geral é muito difícil calcular a soma de uma série. Vamos calcular a soma da série (3) no Exemplo 4.

Exemplo 4. **(Problema de Basel)**. Calcule a soma dos inversos dos quadrados inteiros,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Solução de Leonhard Euler (1735)

A idéia de Euler é brilhante, ver [2], mas não é uma prova rigorosa. A prova rigorosa veio somente em 1941.

Ele começa com a idéia de que todo polinômio em x pode ser fatorado por fatores da forma x − α, onde α é uma raiz do polinômio, e assume que o mesmo pode ser feito por séries infinitas. Euler olha para a expansão em série de Taylor do seno. (Brook Taylor, Edmonton-Ing, 18 agosto 1685 - Londres-Ing, 29 dezembro 1731)

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots .$$

Dividindo por *x*, tem-se que

$$\frac{sen\, x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots .$$

Os zeros de $\frac{sen\, x}{x}$ ocorrem em $x = \pm n\pi$, $n = 1,2,3,\ldots$. Supondo que podemos fatorar esta expansão em fatores lineares obtem-se,

$$\frac{sen\, x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{n\pi}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

O coeficiente de x^2 na última expressão é $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{-1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Por outro lado, o coeficiente de x^2 na expansão de Taylor é -1 / 3! = - 1/6. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esta é a soma da série de Basel. ||

Solução rigorosa do problema de Basel (não é necessário fatorar uma série infinita)

Temos que

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 x^{n-1} y^{n-1} dx\, dy .$$

O Teorema da Convergência Monótona implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^{n-1}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\, dx\, dy\,.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x = u - v$ e $y = u + v$, *obtemos*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \;=\; 2 \int\int_Q \frac{1}{1-u^2+v^2}\, du\, dv, \tag{4}$$

onde Q é o losângulo de vértices (0, 0), (1/2, 1/2), (1/2, -1/2) e (1, 0), conforme Fig. 3. Usando as simetrias deste losângulo, temos

$$\int\int_Q \frac{du\, dv}{1-u^2+v^2} = 2\int_0^{1/2} \int_0^u \frac{dv\, du}{1-u^2+v^2} + 2\int_{1/2}^1 \int_0^{1-u} \frac{dv\, du}{1-u^2+v^2}. \tag{5}$$

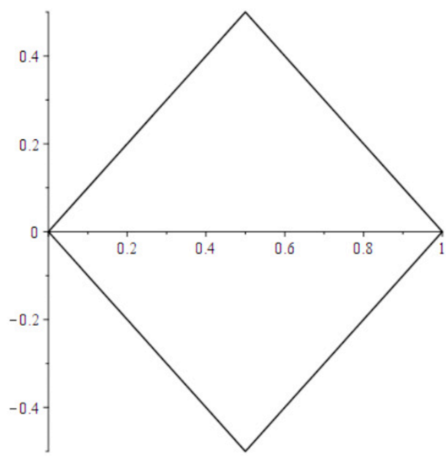


Figura 3

Integrando com relação a v cada integral do segundo membro de (5), temos

$$\int\int_Q \frac{du\, dv}{1-u^2+v^2} = 2\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, arctg\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + 2\int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, arctg\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du. \tag{6}$$

Para o cálculo da primeira integral do segundo membro de (6) usamos que $arctg\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) \;=\; arcsen\, u$, donde

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, arctg\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du \;=\; \int_0^{1/2} \frac{arcsen\, u}{\sqrt{1-u^2}}\, du \;=\; \frac{1}{2}(arcsen\, u)^2 \Big|_{u=0}^{u=1/2} = \frac{\pi^2}{72}. \tag{7}$$

Para o cálculo da segunda integral, fazemos a mudanca de variável $\theta \;=\; arctg\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$. Segue que, $tg^2\theta \;=\; (1-u)/(1+u)$ e $sec^2\theta \;=\; 2/(1+u)$,

ou seja $u = 2\cos^2\theta - 1 = \cos(2\theta)$, donde $\theta = 1/2\, arcos\, u = \pi/4 - 1/2\, arcsen\, u$.
Portanto,

$$\int_{1/2}^{1} \frac{arctg\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \int_{1/2}^{1} \frac{\pi/4 - 1/2\, arcsen\, u}{\sqrt{1-u^2}}\, du = \left(\frac{\pi\, arcsen\, u}{4} - \frac{arcsen^2 u}{4}\right)\Big|_{u=1/2}^{u=1} = \frac{\pi^2}{36}. \tag{8}$$

Substituindo (7) e (8) em (6), obtemos

$$\int\int_Q \frac{du\, dv}{1-u^2+v^2} = \frac{2\pi^2}{72} + \frac{2\pi^2}{36} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Finalmente, substituindo este resultado em (4) , concluimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \qquad ||$$

Exemplo 5. Como no Exemplo 3, calcule a soma das áreas dos retângulos sob o gráfico da função f (x) = 1 / x , para x ≥ 1, conforme Fig. 4.

Solução:

A soma das áreas dos retângulos é dada por:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Esta série é a famosa série harmônica. Com certeza, o exemplo mais importante na

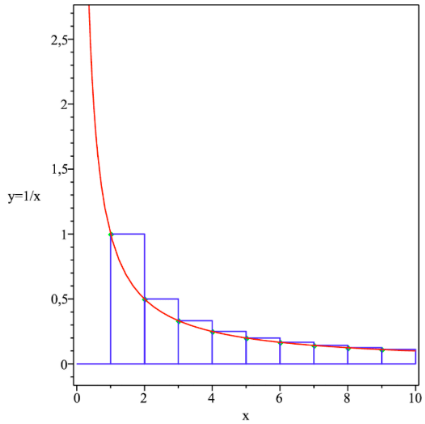


Figura 4

matemática de uma série divergente é o da série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$$

O nome harmônica é devido à semelhança com a proporcionalidade dos comprimentos de onda de uma corda a vibrar: 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... (Ver Fig. 5). Usando o Teste da Comparação é fácil verificar que a série harmônica diverge para infinito, pois:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\ldots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=\infty\,.$$

Voltando ao cálculo de S, a conclusão é que $S = \infty$. Ou seja, a série diverge para ∞. ||

Generalizações da série harmônica:

Exemplo 6. (Série dos inversos dos números primos):

$$\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{p_i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$$

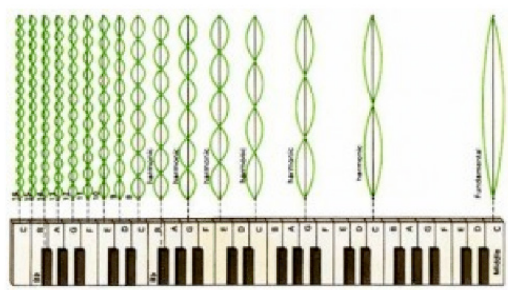


Figura 5. Ilustração do comprimento de onda de uma corda vibrante.

Usando passos de indução, soma da série geométrica, e a série de Taylor, pode-se provar que a série dos inversos dos primos diverge para infinito, ver [6].

Exemplo 7. (Série harmônica alternada):

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\ln 2.$$

Solução: O resultado é uma consequência do desenvolvimento de Taylor da função $f(x)$]n(1+x) em potências de x. A demonstração completa fica como exercício para o leitor. ||

Exemplo 8. (Série-p):

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^p},$$

onde p é um número real positivo. (Se p é negativo facilmente a série é divergente). Se p = 1, a série é a harmônica, e portanto divergente. Pelo Teste da Integral a série é divergente se $p<1$, e é convergente se $p>1$.

Como curiosidade, uma generalização desta série é obtida substituindo o p por um número complexo $z=x+iy$, obtendo a função Zeta de Riemann, denotada por

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^z}.$$

(Georg Friedrich Bernhard Riemann, Hanover-Alemanha, 17 setembro 1826 -Selasca-Itália, 20 julho 1866). Em 1856, surgiu um dos problema mais famosos da matemática, ainda não resolvido até hoje, conhecido com a *Hipótese de Riemann: Todos os zeros da função Zeta de Riemann estão sobre a reta x = 1/2 do plano complexo. Quem resolver este problema, com certeza, ficará famoso e ainda ganhará um milhão de dólares do Instituto de Matemática Clay, um centro sediado em Cambridge (Massachusetts) que se dedica ao estudo avançado das ciências exatas.*

Velocidade que a série harmônica diverge

Agora vamos discutir um pouco a velocidade que a série harmônica diverge para infinito. A soma parcial de ordem n da série harmônica, denominada de n-ésimo número harmônico, é dada por

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}.$$

A sequência (S_n) cresce tão rapidamente quanto o logaritmo natural de n. Isto porque a soma é aproximada pelo valor da integral, ver Fig. 4.

$$\int_1^n \frac{1}{x}dx=\ln n.$$

Pode-se provar que

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-\ln n)=\int_1^\infty\left(\frac{1}{E(x)}-\frac{1}{x}\right)dx=\gamma,$$

onde $E(x)$ é a parte inteira de x, e γ é uma constante real, denominada constante Euler-Mascheroni. (Lorenzo Mascheroni, Bergamo-Itália, 13 maio 1750 – Parigi-Itália, 14 julho 1800).

Euler calculou o valor de γ com 16 casas decimais e Mascheroni calculou com 32. Hoje tem-se esse valor com dezenas de casas decimais, por exemplo com 100 casas decimais o valor é:

$\gamma \approx$ 0, 5772156649015328606065120900824024310421593359399235988O

57672348848677267776646709369470632917467495.

Portanto, para n grande o valor da soma parcial S_n pode ser aproximado por

$$S_n \approx \ln n + \gamma, \quad \text{ou} \quad n \approx e^{S_n - \gamma}.$$

Por exemplo, para S_n=17 são necessários somar aproximadamente $n = e^{17-\gamma} \approx 31.557.600$ temos.

Se quesermos que a soma chegue em 100, teremos que somar aproximadamente

$$n = e^{100-\gamma} \approx \text{número muito grande de termos}.$$

Como curiosidade, ver [5, 7] sobre a série harmônica:

“Suponha que exista um computador que pode fazer uma soma em 10^{-23} segundos, que é o tempo gasto pela luz para percorrer a distância igual ao diâmetro de um elétron. Tal computador seria o mais rápido do universo, pois a velocidade da luz é a máxima neste. Se tal computador fosse somar todas as partes que pudesse da série harmônica em um ano, teria somado $31{,}5576 \times 10^{26}$ termos; em mil anos $31{,}5576 \times 10^{29}$; e em um bilhão de anos $31{,}5576 \times 10^{35}$ termos! Os resultados aproximados que obteríamos, em cada um dos casos, respectivamente seria: 70,804; 77,712 e 91,527. Imagine agora que esse computador estivesse ligado desde a origem do universo, há cerca de 15 bilhões de anos. Ele estaria hoje obtendo o valor aproximado de 94,235 para a soma da série harmônica. Vamos além! O número 10^{80} é maior do que todos os valores anteriores, superando até mesmo a quantidade de átomos de todo o universo conhecido. Pois bem, para essa quantidade de termos a soma de todos eles é aproximadamente 184,784 e permanece nesse mesmo valor aumentando-se drasticamente a quantidade de termos, como $10^{80}+10^{9}$ ou $10^{80}+10^{12}$. Veja que a cada passo estamos aumentando enormemente a quantidade de termos, no entanto, a soma S_n permanece a mesma. Em vista disso nada mais natural do que concluir que a série seja convergente. Mas, verificamos acima que isso é falso. Vemos então que jamais descobriríamos a divergência da série harmônica por meios puramente experimentais através de um computador.”

Exemplo 9. Estudar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^3 \, sen^2 n},$$

denominada de Série Flint Hills (Colinas Pederneiras do Kansas), ver Fig. 6, retirada da referência [3].

Solução: A convergência desta série ainda é um problema em aberto. Existem vários estudos relacionados com o assunto. A discussão a seguir foi retirada da referência [1], e mostra que a convergência está intimamente relacionada com a medida de irracionalidade do número π, denotada por $\mu(\pi)$. Em particular, a convergência da série Flint Hills implica que $\mu(\pi)\leq 2,5$. Mas, o menor limite superior para $\mu(\pi)$ conhecido hoje, é $\mu(\pi)\leq 7,6063...$, obtido em [4]. Portanto, os matemáticos especialistas na área de Teoria do Números, acham o problema da convergência desta série não será resolvido num futuro muito próximo.

Figura 6. Colinas Pederneiras do Kanzas.

Fonte: Google

A seguir, apresentamos mais alguns resultados relacionados a série de Flint Hills.

Definição 2.3. A medida de irracionalidade $\mu(x)$ de um número positivo x é definida como o ínfimo em m, tal que a desigualdade

$$0<|x-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^m} \tag{9}$$

é válida somente para um número finito de co-primos inteiros positivos p e q. Se não existe uma tal m, então $\mu(x) = +\infty$.

Observamos aqui que números co-primos ou primos entre si, são os números de um conjunto onde o único divisor comum a todos eles é o número 1. Dois números a e b são co-primos se, e somente se, $mdc\ (a,b) = 1$. Exemplos de números co-primos: 7, 6 e 9; 3, 7 e 22; 11 e 27. Dois números pares nunca podem ser co-primos, pois se são pares, são divisíveis por 2.

Exercício 1. Mostre que se x é racional, então $\mu(x) = 1$.

Convergência da Série de Flint Hills

Lema 2.4. Para todo número real *x*, $|sen x| \leq |x|$ além do mais , se $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$, então, $|sen\, x| \geqslant \frac{2}{\pi}|x|$.

Dem. A primeira desigualdade segue das seguintes estimativas:

$$|sen\, x| = |\int_0^x \cos y\, dy| \leqslant \int_0^{|x|} |\cos y|\, dy \leqslant \int_0^{|x|} 1\, dy = |x|.$$

Para provar a segunda desigualdade, observe que $|sen\, x| = sen\, |x|$ e sem perda de generalidade vamos assumir que $0 \leq x \leq \pi / 2$. Se x_0= arcoos $|\pi / 2|$ então para $x \leq x_0$ temos que cos $x \geq \pi / 2$ e assim

$$sen\, x = \int_0^x \cos y\, dy \geqslant \int_0^x \frac{2}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} x.$$

Por outro lado, para $x \geq x_0$ temos que cos $x \leq \pi / 2$ e assim

$$sen\, x = 1 - \int_x^{\pi/2} \cos y\, dy \geqslant 1 - \int_x^{\pi/2} \frac{2}{\pi} dy = 1 - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{2}{\pi} x.$$

O que completa a demonstração. ||

Teorema 2.5. Para quaisquer dois números positivos *u* e *v*,

$\frac{1}{n^u |sen\, n|^v} = O\left(\frac{1}{n^{u-(\mu(\pi)-1)v-\epsilon}}\right)$, para todo $\mathcal{E} > 0$. Alem do mais,

1. Se $\mu(\pi)<1 + u/v$ a sequência $\frac{1}{n^u |senn|^v}$ converge para 0.

2. Se $\mu(\pi)>1 + u/v$ a sequência $\frac{1}{n^u |senn|^v}$ diverge.

OBS: $f(n)=O(g(n))$, significa que $|f(n)| < M\, g(n)$ para *n* suficientemente grande, onde *M* é uma constante positiva.

Dem. Seja $\mathcal{E} > 0$ e $k=\mu(\pi) + \epsilon / v$. Então a desigualdade

$$|\pi - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^k}$$

vale somente para um número finito de co-primos inteiros positivos *p* e *q.* Para um inteiro positivo *n*. seja $m = \left[\frac{n}{\pi}\right]$, tal que $|\frac{n}{\pi} - m| < \frac{1}{2,}$ e assim $|n - m\pi| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Então pelo Lema 2.4,

$$|senn| = |sen\,(n - m\pi)| \geqslant \frac{2}{\pi}|n - m\pi| = \frac{2}{\pi} m\, |\frac{n}{m} - \pi|.$$

Por outro lado, para *n* e *m* suficientemente grandes, temos que $|\frac{n}{m} - \pi| \geqslant \frac{1}{m^k}$, o que implica que

$$|sen\, n| \geqslant \frac{2}{\pi} m \left|\frac{n}{m} - \pi\right| \geqslant \frac{2}{\pi} \frac{1}{m^{k-1}} \geqslant c \frac{1}{n^{k-1}},$$

para algum $c > 0$ dependendo somente de k mas não de n (desde que $n/m \to \pi$ quando $n \to \infty$). Portanto para n suficientemente grande, temos

$$\frac{1}{n^u |senn|^v} \leqslant \frac{1}{c^v n^{u-(k-1)v}} = O\left(\frac{1}{n^{u-(\mu(\pi)-1)v-\epsilon}}\right).$$

Se $\mu(\pi) < 1 + u/v$, considere $\epsilon = \frac{v}{2}(1 + u/v - \mu(\pi))$, e a afirmação 1 segue, pois

$$\frac{1}{n^u |senn|^v} = O\left(\frac{1}{n^{u-(\mu(\pi)-1)v-\epsilon}}\right) = O\left(\frac{1}{n^\epsilon}\right).$$

Vamos provar agora a afirmação 2. $\mu(\pi) > 1 + u/v$, então, para $k=1+u/v$ a desigualdade (9) vale para um número infinito de co-primos inteiros positivos p e q. Isto é, existe uma sequência de racionais p_i/q_i tais que $|p_i - \pi q_i| < \frac{1}{q_i^{k-1}} < C \frac{1}{p_i^{k-1}}$, para alguma constante $C > 0$ que depende somente de k. Portanto, para $n=p_i$ temos

$$\frac{1}{n^u |senn|^v} > C^v n^{v(k-1)-u} = C^v.$$

Por outro, lado temos

$|sen(1+p_i)| = |sen(1+p_i - q_i \pi)| \to sen(1)$, quando $i \to \infty$

e assim,

$$\frac{1}{(1+p_i)^u |sen(1+p_i)|^v} \to 0.$$

Concluimos que a sequência $\frac{1}{n^u |senn|^v}$ diverge, pois ela contém duas subsequências, uma limitada inferiormente por uma constante, e a outra que tende a zero. $\|$

Corolário 2.6. Para quaisquer números reais positivos u e v,

1. Se a sequência $\left(\frac{1}{n^u |senn|^v}\right)$ converge, então $\mu(\pi) \leq 1+u/v$.
2. Se a sequência $\left(\frac{1}{n^u |senn|^v}\right)$ diverge, então $\mu(\pi) \geq u/v$.

Dem. A prova de cada item é dada por contradição, como consequência imediata do Teorema 2.5.

Corolário 2.7. Se a série Flint Hills $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 sen^2 n}$, converge, então $\mu(\pi) \leqslant \frac{5}{2}$.

Dem. A convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 sen^2 n}$, implica que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3 sen^2 n} = 0$, portanto pelo Corolário 2.6 $\mu(\pi) \leqslant \frac{5}{2}$. $\|$

Teorema 2.8. Para quaisquer números reais positivos *u* e *v*, se $\mu(\pi) < \frac{u-1}{v}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |sen n|^v}$ converge.

Dem. A desigualdade $\mu(\pi) < \frac{u-1}{v}$ implica que *u*-*v* ($\mu(\pi)$-1)>1.Então, existe $\epsilon > 0$, tal que *w*=*u*-*v* ($\mu(\pi)$-1)- ϵ >1. Pelo Teorema 2.5,

$$\frac{1}{n^u |sen n|^v} = O\left(\frac{1}{n^w}\right).$$

Portanto,

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^u |sen\, n|^v} = \sum_1^{\infty} O\left(\frac{1}{n^w}\right) = O\left(\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^w}\right) = 0(\zeta(w)) = O(1).$$

||

Corolário 2.9 Para quaisquer números reais positivos *u* e *v*, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^u |sen n|^v}$ diverge, então $\mu(\pi) \geq \frac{u-1}{v}$.

Dem. A demonstração é uma consequência imediata do Teorema 2.8.

O Corolário 2.9 implica que se a série Flint Hills diverge, então $\mu(\pi) \geq 1 + \frac{3-1}{2} = 2$.

Mas esta desigualdade já é conhecida como verdadeira. Portanto, como resultado deste corolário nada podemos afirmar sobre a divergência da série Flint Hills.

Exercício 2 Discutir a convergência da seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} sen\, n\right)^n}{n}.$$

Obs. Se o leitor tentar e não conseguir, não deve ficar triste, pois muitos já tentaram e também não conseguiram. Pesquisando a literatura, até hoje não vimos nenhum resultado concluindo que esta série converge ou diverge, ou seja permanece ainda como um problema em aberto.

REFERÊNCIAS

[1] ALEKSEYEV, M. A.. **On convergence of the Flint Hills series.** arXiv:1104.5100v1 [math. CA], 2011.

[2] MATHEUS, C.. **Soma dos inversos dos quadrados dos inteiros.** Disquisitiones Mathematicae (Versão Portuguesa). Outubro 2008. https://cmssmatheus.wordpress.com /tag/ soma-dos-inversos-dos-quadrados-dos-inteiros. Acessado em 12/09/2020.

[3] GOOGLE. **Flint Hills Kansas.** https://www.google.com.br/search?q=flint+hills+kansas. Acessado em 10/08/2015.

[4] SALIKHOV. V. K.. **On the irrationality measure of π.** Russ. Math. Surv. 63(3): 570–572, 2008.

[5] WEISSTEIN, E. W. . **Harmonic series.** From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/HarmonicSeries.html. Acessado em 10/09/2020.

[6] WIKIPEDIA. **Série dos inversos dos primos.** https://pt.wikipedia.org/wiki/Série dos inversos dos primos. Acesso em 17/09/2020.

[7] _______. **Series-mathematics.** https://en.wikipedia.org/wiki/Series-mathematics. Acessado em 10/08/2015.

CAPÍTULO 5

ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS DE CONTAGEM NÃO ABORDADOS NO ENSINO MÉDIO

Data de aceite: 17/11/2020
Data de submissão: 04/09/2020

Hislley Feitosa Meneses
Piripiri – Piauí
http://lattes.cnpq.br/8388137461435933

Valtercio de Almeida Carvalho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí - IFPI
Teresina – Piauí
http://lattes.cnpq.br/0022863714117479

RESUMO: Este artigo mostra a importância da Análise Combinatória no desenvolvimento cognitivo de estudantes, por ser a área da Matemática que permite, através dos métodos de contagem, analisar e interpretar problemas, assim contribuindo para o seu futuro acadêmico e/ou profissional. O tema principal deste trabalho são os métodos de contagem não abordados no Ensino Médio, objetivando a demonstração, explicação, exemplificações de situações – problema, dos mesmos, que são Permutação Circular, Combinação com Repetição e Permutação Caótica. A pesquisa é de carácter bibliográfica e documental, utilizando livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio como fonte de dados documental, monografias e artigos como fonte bibliográfica. No desenvolvimento do trabalho expõe-se questões do Enem e de Concursos, com suas respectivas resoluções. Conclui-se a importância da implementação desses conteúdos no Ensino Médio.

PALAVRAS-CHAVE: Métodos de contagem. Ensino médio. Permutação circular. Combinação com repetição. Permutação caótica.

COMBINATORY ANALYSIS: A STUDY OF THE MAIN COUNTING'S METHODS NOT CONTEMPLATED IN HIGH SCHOOL

ABSTRACT: This article shows the importance of Combinatorial Analysis in the cognitive development of students. That area of Mathematics analyzes and interprets problems through counting's methods contributing to academic and/or professional future of them. The main theme of this work is the counting's methods not contemplated in High School, aiming at the demonstration, explanation, examples and problem situations of counting's methods, which are Circular Permutation, Combination with Repetition and Chaotic Permutation. The research is bibliographical and documentary, using textbooks of the 2nd year of High School as a source of documentary data, monographs and articles as a bibliographic source. In the development of the work the issues of the National Exam of the High School (Enem) and Public Service Exam are presented, with their respective resolutions. We conclude the importance of the implementation of these contents in High School.
KEYWORDS: Counting's methods. High school. Circular permutation. Combination with repetition. Chaotic permutation.

1 | INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória é a área da Matemática na qual, através de métodos de contagem, se pode fazer a análise das possibilidades e combinações possíveis entre um conjunto de elementos, considerando as restrições. Pode-se, com a Combinatória, calcular o número de possibilidades de um evento ocorrer, contar a totalidade de anagramas de uma palavra, calcular a quantidade de senhas, números telefônicos, etc.

A Combinatória segundo Morgado (2006) "é a parte da Matemática que analisa estruturas e partes discretas". Sendo assim, ela tem um amplo campo de investigação e inúmeras aplicações em várias áreas do conhecimento. Auxilia no desenvolvimento lógico e cognitivo, adequado para diversas áreas, por permitir que se escolha, arrume e conte elementos de um conjunto, sendo necessário analisar, interpretar, pensar, especular e discutir situações-problema, comumente vistos nas Olimpíadas de Matemática, em provas relevantes como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), provas de vestibulares e concursos públicos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (BRASIL, 2000, p.45)

Como exposto, é de grande importância a abordagem dos conteúdos de contagem, dado que eles têm enorme influência no desenvolvimento das competências e habilidades. Estas são descritas nos PCN's como sendo:

> • Ler e interpretar textos de Matemática.
>
> • Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc).
>
> • Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
>
> • Formular hipóteses e prever resultados.
>
> • Selecionar estratégias de resolução de problemas.
>
> • Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.

• Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.

• Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2000, p. 46)

Os métodos de contagem são utilizados durante todo o Ensino Fundamental e Médio, mas, é geralmente abordado, formalmente, no segundo ano do Ensino Médio, e por diversos fatores acaba por não ser muito bem explanado. E dentre os fatores, estão os próprios livros didáticos, que, na sua maioria, não abordam todos os conteúdos que podem ser trabalhados. Assim, surgindo o questionamento de *quais são os principais conteúdos não abordados no Ensino Médio e suas aplicações*. Por efeito, analisaram-se alguns livros de Matemática adotados em turmas de Ensino Médio, para ver quais são estes conteúdos e observou-se que os assuntos Permutação Circular, Combinação com Repetição e Permutação Caótica, não são abordados. E ao analisar 15 livros didáticos, obteve-se a seguinte tabela:

Livros			*Agrupamentos*		
Autor	*Ano*	*Título*	*Permutação Circular*	*Combinação com Repetição*	*Permutação Caótica*
Angel Panadés	2005	Matemática e suas tecnologias	-	-	-
Luis Roberto Dante	2008	Matemática vol. Único	-	-	-
	2011	Matemática contexto e aplicações	-	-	-
Eduardo Chavante	2016	Quadrante Matemática	-	-	-
Gelson Iezzi	2010	Matemática: ciência e aplicações	-	-	-
	2016	Matemática: ciência e aplicações vol 2.	-	-	-
José Ruy Giovanni	2005	Matemática completa	-	-	-
	2000	Matemática uma nova abordagem	-	-	-
Jackson Ribeiro	2010	Matemática ciência, linguagem e tecnologia	-	-	-
Joamir Souza	2013	Novo Olhar- Matemática	-	-	-
Juliane Matsbara	2010	Conexões com a Matemática	Sim	-	-
Kátia Stocco	2013	Matemática ensino médio	-	-	-
Manoel Paiva	2002	Matemática conceito, linguagem e aplicações	-	-	-

Márcio Cintra	2008	Matemática no ensino Médio	-	-	-
Xavier e Barreto	2009	Matemática aula por aula	-	-	-

Tabela 1- Livros do 2º ano analisados

Fonte- Próprio autor.

Conforme a tabela, observa-se que dentre os 15 livros analisados, um, o de título "*Conexões com a Matemática*" de Juliane Matsbara, contempla um dos três conteúdos, que é Permutação Circular.

Existe vários outros métodos de contagem não abordados no Ensino Médio, ocorrendo, muitas vezes também, este fato na graduação em Matemática, seja Bacharel, Licenciatura ou Tecnólogo. Porém, este trabalho só abordará os *três modelos de agrupamentos citados na Tabela 1*, sempre com um olhar voltado para uma possível abordagem dos três no Ensino Médio, pois:

> Em primeiro lugar, entre os vários tipos de "números para contagem" da Análise Combinatória eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de Problemas de Análise Combinatória. Outra razão para seu estudo é a aplicabilidade destes números a problemas de probabilidade finitas, um campo de aplicação importante da Análise Combinatória. (MORGADO, 2006, p.2)

Portanto, este trabalho tem como objetivo geral apresentar os principais métodos de contagem não abordados no Ensino Médio e suas aplicações. E os objetivos específicos de analisar livros de matemática do 2º ano do Ensino Médio, demonstrar matematicamente os principais métodos não abordados e apresentar aplicações em situações – problema. Isto devido à importância desses assuntos, e o estudo da Análise Combinatória em sala de aula, que em vários casos não ocorre.

O desenvolvimento metodológico da pesquisa é do tipo bibliográfica e documental. Com a análise dos 15 livros do 2º ano do Ensino Médio, sendo feito o levantamento dos que abordam ou não os conteúdos, serviu como fonte de dados documental. Os principais autores utilizados são Morgado (2006) e Santos (2007), assim como artigos, dissertações e monografias de mestrados, além de provas e banco de questões como fonte de dados bibliográficos. Sendo utilizado os descritores: "Análise Combinatória", "Permutação Circular", "Combinação com repetição", "Permutação Caótica" e "Situações-problema".

2 | PERMUTAÇÃO CIRCULAR

Permutação é a quantidade de maneiras de se ordenar n objetos, e disto, conclui-se que essa quantidade de maneiras é a ordenação dos n elementos em uma reta, ou seja, os elementos estão alinhados. Porém, nem sempre os elementos a serem permutados estão alinhados, eles podem ter uma disposição circular, de forma que não exista um primeiro e/ou um último elemento. E o número total de possíveis disposições circulares, dado um número finito de elementos participantes, são calculadas pela Permutação Circular. Esta pode ser definida como o número de possibilidades de se ordenar n objetos distintos em torno de um círculo.

A fim de compreender este agrupamento, vamos analisar o caso de termos três objetos distintos de forma linear e, posteriormente, em círculo, denominados *a*, *b* e *c*, e observar que a quantidade de maneiras de ordena-los em uma reta é dado pela fórmula $P_n=n!$, logo, $P_3=3!$ þ $P_3=6$ formas de ordenação destes três elementos de forma linear. Mas, e a quantidade de maneiras de ordena-los em um círculo? Observe abaixo as seis ordenações em círculo.

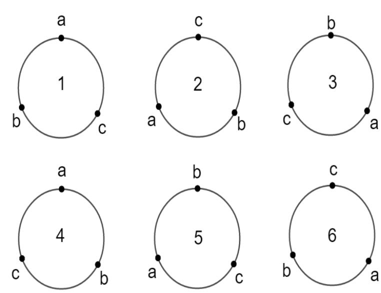


Figura 1- Permutação de três elementos em círculo

Fonte- Próprio autor

Observando as seis figuras, tem-se que ao rotacionar os círculos 2 e 3, independente do sentido, ambos coincidem com o círculo 1. E, ao se rotacionar os círculos 5 e 6, os mesmos coincidem com o círculo 4. Ou seja, o número de possibilidades de se dispor os três objetos em torno de um círculo são duas, que são a forma do círculo 1 e do círculo 4.

Da mesma forma, fazendo a ordenação de 4 elementos, estes sendo *a, b, c* e *d*, em forma linear, tem-se $P_4=4! = 24$. Observe abaixo estas ordenações em círculo.

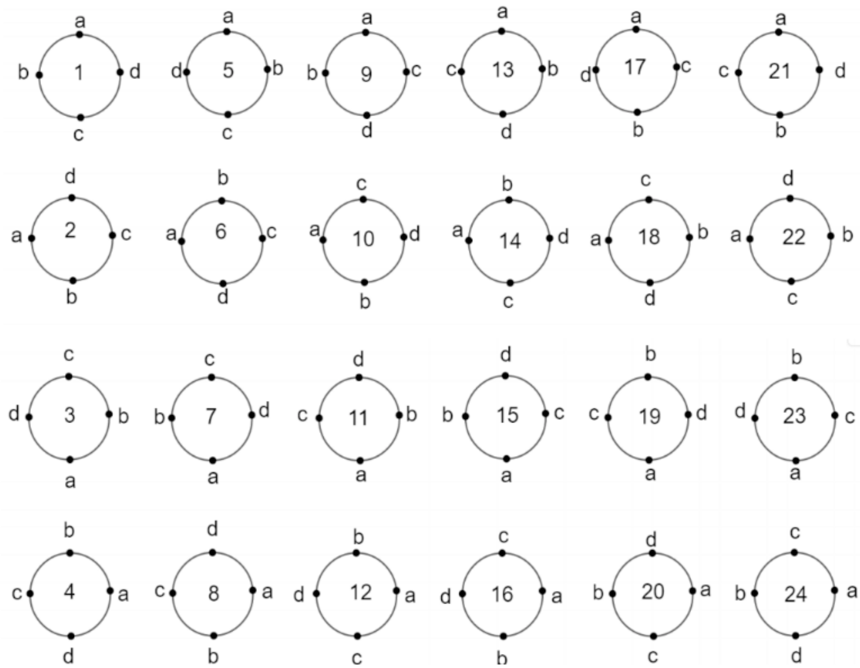


Figura 2- Permutação de quatro elementos em circulo

Fonte- Próprio autor

Ao observar os círculos acima, nota-se que os círculos 2, 3 e 4 são iguais, por rotação, ao círculo 1. Assim, também se tem os círculos 6,7 e 8 iguais ao 5, os 10, 11 e 12 ao 9, os 14, 15 e 16 iguais ao 13, os 18, 19 e 20 ao 17 e que os círculos 22, 23 e 24 são iguais ao 21. Portanto, os círculos distintos são os 1, 5, 9, 13, 17 e 21, expostos abaixo.

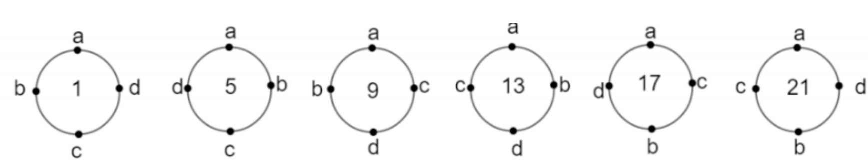


Figura 3-Permutação circular de quatro elementos

Fonte-Próprio autor

Ou seja, das 24 permutações simples de 4 elementos, tem-se 6 permutações circulares distintas. Portanto o número de permutações circulares de 4 elementos distintos é 6.

Por recorrência[1] tem-se que, como visto acima, o número de possibilidades de se ordenar 3 e 4 objetos distintos em torno de um círculo são, respectivamente, 2 e 6, e estes resultados podem ser reescritos como $2 = \frac{3!}{3}$ e $6 = \frac{4!}{4}$.

Assim, generalizando, a Permutação circular é representada por

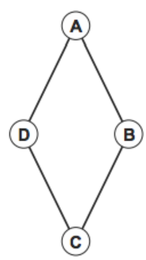
$$(PC)_n = \frac{n!}{n} \Rightarrow (PC)_n = \frac{n(n-1)!}{n}$$

O que implica que a Permutação circular de n objetos distintos é dada por

$$(PC)_n = (n-1)! \qquad (1)$$

Segue a aplicação no exemplo.

Exemplo: (ENEM 2013) Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas. azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

a)6 b)12 c)18 d)24 e)36

SOLUÇÃO: Como são 4 lugares e se tem 3 cores, aplica-se a fórmula (1) com 4 elementos, ficando um local em cada possibilidade para ser preenchido com uma das pedras, assim, tem-se $(PC)_4 = (4-1)! = 3! \Rightarrow (PC)_4 = 6$ *modos. Desta forma, tem-se que destas 6 possibilidades, tem-se em cada uma, um vértice a ser preenchido. Logo, para preencher cada um desses vértices, tem-se somente uma possibilidade já que há a restrição de não poder ficar pedras adjacentes de mesma cor, totalizando 6 possibilidades. Portanto, o número de jóias diferentes que o artesão pode obter é* 6+6=12. *Assim sendo a alternativa b correta.*

1 Técnica matemática que permite definir uma fórmula genérica através de casos particulares.

3 I COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

Diferentemente da Combinação Simples, o agrupamento chamado de *Combinação com Repetição* ou *Combinação Completa* é o número de subconjuntos formados por elementos distintos unido com o número de subconjuntos formados por elementos não distintos. Ou seja, de acordo com Santos (2007) na Combinação Simples de n elementos tomados p a p, deve-se ter p menor que ou igual a n, enquanto que na Completa essa restrição não é necessária, podendo-se selecionar p objetos, dentre os n distintos, onde cada objeto pode ser tomado até p vezes.

Para melhor compreensão, supõe-se que uma pessoa queira comprar 2 potes de sorvete e no local de venda há 4 sabores de sorvete. Representando a quantidade de potes do sabor um por S_1, do sabor dois por S_2, do três por S_3 e do quatro por S_4. E através do exposto acima se mostra, na tabela abaixo, cada possibilidade de compra, ou seja, cada subconjunto que pode ser formado por dois diferentes ou repetidos sabores.

Possibilidades	*Quantidade*			
	S_1	S_2	S_3	S_4
1	1	1	0	0
2	1	0	1	0
3	1	0	0	1
4	0	1	1	0
5	0	1	0	1
6	0	0	1	1
7	2	0	0	0
8	0	2	0	0
9	0	0	2	0
10	0	0	0	2

Tabela 3-Possibilidades de agrupamentos

Fonte-Próprio autor

Observando a tabela, nota-se que há 6 possibilidades de comprar os dois potes de sorvete distintos, concordando com o resultado encontrado para Combinação Simples de 4 elementos tomados 2 a 2: $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} \Rightarrow C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} \Rightarrow C_4^2 = 6$.

E ainda se encontram 4 agrupamentos (4 opções distintas de compras) com os dois potes de sorvete do mesmo sabor. Portanto, pelo Princípio Aditivo, tem-se um total de 10 modos de comprar os dois potes de sorvete.

A dificuldade, nesse tipo de problema, até então, é encontrar esse total de 10 possibilidades de resultados (ou soluções) de uma forma simples e elegante.

Para isso, pode-se escrever $S_1+S_2+S_3+S_4 = 2$, ou seja, temos uma equação linear de coeficientes unitários, onde o número de possiblidades é o de soluções inteiras não negativas dessa equação. E para resolver, usa-se um sistema conhecido como “bola-traço” o qual para cada sinal de operação (+) coloca-se um traço e, o número de bolas entre esses traços representa a quantidade total de objetos desejados, neste exemplo dois. Daí temos a representação das 10 possíveis soluções neste método “bola-traço”.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
S_1 & + & S_2 & + & S_3 & + & S_4 & = 2 & \xrightarrow{\text{Solução}} & (S_1,S_2,S_3,S_4) \\
\bullet & | & \bullet & | & & | & & & \rightarrow & (1,1,0,0) \\
\bullet & | & & | & \bullet & | & & & \rightarrow & (1,0,1,0) \\
\bullet & | & & | & & | & \bullet & & \rightarrow & (1,0,0,1) \\
 & | & \bullet & | & \bullet & | & & & \rightarrow & (0,1,1,0) \\
 & | & \bullet & | & & | & \bullet & & \rightarrow & (0,1,0,1) \\
 & | & & | & \bullet & | & \bullet & & \rightarrow & (0,0,1,1) \\
\bullet\bullet & | & & | & & | & & & \rightarrow & (2,0,0,0) \\
 & | & \bullet\bullet & | & & | & & & \rightarrow & (0,2,0,0) \\
 & | & & | & \bullet\bullet & | & & & \rightarrow & (0,0,2,0) \\
 & | & & | & & | & \bullet\bullet & & \rightarrow & (0,0,0,2)
\end{array}
$$

Figura 4-Soluções conforme o sistema “bola-traço”

Fonte-Próprio autor

Pelo exposto, nota-se que há uma bijeção entre as sequencias de bola-traço e a solução, ou seja, cada sequência representa uma única solução e toda solução tem uma única sequencia que a define. Dado que, todas as sequências acima são formadas por 3 traços e 2 bolas, tem-se um caso de permutação com repetição. Assim utilizando a fórmula da Permutação com Repetição, onde se tem um total de 5 elementos com a repetição de 2 objetos e 3 de outro, obtém-se $P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} \Rightarrow P_5^{2,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 1 \cdot 3!} \Rightarrow P_5^{2,3} = 10$. Além disto $P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = C_5^2$. Portanto há 10 possibilidades de compra do sorvete.

De fato, de acordo com Morgado (2006) a Combinação Completa pode ser interpretada como o número de modos de se selecionar p objetos, distintos ou não, entre n objetos distintos ou como o número de soluções inteiras não negativas de uma equação linear de coeficientes unitários.

Observando o exemplo acima, generalizando os termos, e analisando o método bola-traço, identifica-se que a quantidade de traços é (n-1) e que o número de bolas é p, totalizando (n-1 + p) elementos, e o número de elementos repetidos, ou seja, as bolas e traços, são p e (n-1), respectivamente.

Em resumo, tendo-se uma equação linear de coeficientes unitários do tipo

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = p$$

O número de soluções inteiras não negativas desta equação é dado pela fórmula da Permutação com Repetição, que se obtém

$$P_{(n+p-1)}^{p,(n-1)} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Relacionando à fórmula da Combinação Simples, fica da seguinte forma

$$C_{(n+p-1)}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n+p-1-p)!} \Rightarrow C_{(n+p-1)}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

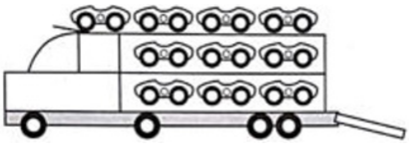
“De modo geral, C_n^p é o número de modos de escolher *p* objetos distintos entre os *n* objetos distintos dados, e CR_n^p é o número de modos de escolher *p* objetos *distintos ou não* entre *n* objetos distintos dados”. (MORGADO, 2006, p.52).

Portanto, a fórmula da Combinação com repetição é:

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \qquad (2)$$

Para melhor compreensão, segue um exemplo da utilização desta fórmula.

Exemplo:(ENEM 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro corres disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) C_6^4 b) C_9^3 c) C_{10}^4 d) 6^4 e) 4^6

SOLUÇÃO: Como se deve ter pelo menos um carrinho de cada cor, e se tem 4 *cores, restam 6 carrinhos. Assim, como estes 6 carrinhos podem ser da mesma cor, usa-se a fórmula (2), portanto, tem-se* $CR_4^6 = C_{4+6-1}^6 = C_9^6 = \frac{9!}{6!(9-6)!} \Rightarrow C_9^6 = \frac{9!}{6!3!}$ *que, através da combinação complementar , obtém-se* $C_9^6 = C_9^3$. *Portanto, a alternativa b é a correta.*

4 I PERMUTAÇÃO CAÓTICA

De acordo com Silva (2016), Permutação Caótica ou Desarranjo é o conjunto das funções f:A→ A tais que $f(a_i) \neq a$ para todo $i \in \{1,2,3,...,n\}$, ou seja uma Permutação Caótica dos elementos do conjunto $A=\{a_1,...,a_n\}$ é o conjunto das permutações dos elementos de A nas quais nenhum deles fique na sua posição inicial. Ou seja, "uma permutação dos números (1, 2, ..., n) é dita caótica (ou desordenamento) quando nenhum número está no seu lugar primitivo. Assim, as permutações 2143 e 3142 são caóticas, mas 1342 não é." (MORGADO, 2006, p.73) pois o 1 está no seu lugar primitivo.

Para melhor entendimento, calcula-se o número de permutações caóticas da palavra "rua". O número geral de permutações simples é $P_3 = 3! = 6$, que são *{(rua), (rau), (ura), (uar), (aru), (aur)}*, observa-se, dentre os 6 anagramas, que somente (uar) e (aru) são caóticas, pois nenhuma das três letras está na sua posição inicial. Agora contando o número de anagramas com cada letra fixa, assim chamando de A_1 o número de permutações da palavra "rua", fixando o "r", de A_2 as permutações fixando "u", e de A_3 o "a", obtém-se a seguinte tabela:

Número	*Anagramas*
$A_1 = 2! = 2$	(rua) , (rau)
$A_2 = 2! = 2$	(rua) , (aur)
$A_3 = 2! = 2$	(rua) , (ura)

Tabela 4-Permutações da palavra *rua* com elementos fixos

Fonte-Próprio autor

Totalizando um conjunto de 6 anagramas em que pelo menos uma letra está no seu local primitivo, porém, observa-se que se conta as ordenações repetidas, portanto, deve-se subtrair este do conjunto que contém todas as permutações gerais possíveis, logo

6-6

Mas, fazendo isso também se retira as permutações que são as interseções $\#(A_1 \cap A_2)$, onde "r" e "u" estão fixos que é (rua), $\#(A_1 \cap A_3)$, no qual "r" e "a" estão fixos que é (rua), e $\#(A_2 \cap A_3)$, que "u" e "a" estão fixados sendo (rua). Ou seja, deve-se adicionar as interseções. Logo,

$$6-6+3$$

Por efeito, acaba-se adicionando também a interseção $\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ onde todas as letras estão em seu lugar original, que é (rua), portanto subtrai-se essa interseção. Assim tem-se

$$6-6+3-1=2$$

que é o desordenamento da palavra "rua". Observa-se que este resultado é dado por n! menos o PIE[2] com três conjuntos. O número de Permutações caóticas de n elementos é representado por D_n, portanto o número de desarranjos da palavra "rua" é $D_3=2$.

Generalizando os fatos, o número geral de permutações de n elementos distintos é dado por n!. Já o número de permutações onde cada elemento está fixo em sua posição de origem (posição primitiva), isto é, o 1º elemento está no seu local primitivo ou 2º no seu lugar inicial, assim por diante até o enésimo elemento fixado na posição inicial, será definido a seguir. Chamando de A_i para i=(1,2,3,...,n) o número de permutações com cada elemento fixo tem-se a seguinte quantidade:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1: & 1\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1=(n-1)! \\ A_2: & (n-1)\cdot 1\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1=(n-1)! \\ A_3: & (n-1)\cdot(n-2)\cdot 1\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1=(n-1)! \\ \vdots & \qquad\qquad\vdots \\ A_n: & (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot 1\cdot 1=(n-1)! \end{array}\right\} = n\cdot(n-1)!=n!$$

Evidentemente, no cálculo acima, há permutações repetidas nas sequências onde cada elemento está fixo, ou seja, há alguma permutação do A_1 em que o segundo elemento está no seu lugar primitivo e isso ocorre também com A_2, até o A_n, tendo desta forma várias interseções. Logo, precisa-se calcular o número dessas permutações observando as diversas interseções, e para isso utiliza-se a fórmula generalizada do PIE:

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\#(A_i)-\sum_{1\le i_1<i_2\le n}\#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\right)+\ldots+\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n}\#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k}\right)+\ldots+$$
$$(-1)^{n-1}\#(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

Onde $\sum_{i=1}^{n}\#(A_i)=n!$, calculado anteriormente, e que $\sum_{1\le i_1<i_2\le n}\#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\right)$ é dado pela combinação de quaisquer dois elementos, assim observa-se abaixo

2 Princípio da Inclusão e Exclusão.

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \quad : \quad \left.\begin{array}{c} 1\cdot 1\cdot (n-2)\cdot (n-3)\cdot \ldots \cdot 1=(n-2)! \\ \\ 1\cdot (n-2)\cdot 1\cdot (n-3)\cdot \ldots \cdot 1=(n-2)! \\ \\ (n-2)\cdot 1\cdot 1\cdot (n-3)\cdot \ldots \cdot 1=(n-2)! \\ \vdots \\ (n-2)\cdot (n-3)\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1\cdot 1=(n-2)! \end{array}\right\} = C_n^2\cdot (n-2)!$$

Logo, desenvolvendo $C_n^2\cdot(n-2)!$, obtém-se $C_n^2\cdot(n-2)!=\dfrac{n!}{2!(n-2!)}\cdot(n-2)!$

Simplificando, fica $C_n^2\cdot(n-2)!=\dfrac{n!}{2!}$.

Portanto $\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} \#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\right)=\dfrac{n!}{2!}$, é o número de permutações em que há pelo menos dois elementos em seus lugares de origem.

Seguindo o mesmo raciocínio para o $\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} \#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\right)$, tem-se que $\#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\right)$é igual a (n-3)!, C_n^3 vezes, ou seja, $C_n^3\cdot(n-3)!=\dfrac{n!}{3!(n-3!)}\cdot(n-3)!$, simplificando, tem-se $C_n^3\cdot(n-3)!=\dfrac{n!}{3!}$.

Logo, $\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} \#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\right)=\dfrac{n!}{3!}$ é o número de permutações com três elementos em seus lugares primitivos.

Por recorrência, conclui-se que $\#(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=\dfrac{n!}{n!}=1$.

Portanto, pode-se reescrever a fórmula generalizada do PIE da seguinte forma

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=n!-\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}-\frac{n!}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot 1$$

Deixando todos os termos em forma de fração

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\frac{n!}{1!}-\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}-\frac{n!}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{n!}{n!}$$

evidenciando n! tem-se

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=n!\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\right) \qquad (3)$$

Sendo assim (3) o número de permutações de n elementos, com algum deles em seu lugar inicial.

Para se obter o desordenamento, ou seja, o número de permutações caóticas, de n elementos é necessário subtrair (3) do número geral de permutações simples de n elementos que é n!. Logo, D_n segue da seguinte forma:

$$D_n = n! - n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

Evidenciando n! tem-se

$$D_n = n!\left[1 - 1 \cdot \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}\right)\right]$$

Logo, realizando a multiplicação

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1+1} \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

Portanto, conclui-se que a fórmula da Permutação Caótica é da seguinte forma

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^{n} \cdot \frac{1}{n!}\right) \tag{4}$$

Além dessa fórmula "é interessante observar que D_n é aproximadamente igual a $\frac{n!}{e}$; mais precisamente, D_n é o inteiro mais próximo de $\frac{n!}{e}$" (MORGADO, 2006, p.75). De tal forma observa-se a tabela abaixo:

n	D_n	$\frac{n!}{e}$
1	0	0,3...
2	1	0,7...
3	2	2,2...
4	9	8,8...
5	44	44,1...
6	265	264,8...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabela 5-Aproximações

Fonte-Morgado, 2006, p.75

Segue um exemplo resolvido utilizando esta fórmula.

Exemplo: (FUVEST 2017) Cláudia, Paulo, Rodrigo e Ana brincam entre si de amigo secreto (ou amigo-oculto). Cada nome é escrito em um pedaço de papel, que é colocado em uma urna, e cada participante retira um deles ao acaso. A probabilidade de que nenhum participante retire seu próprio nome é

a)1/4 b)7/24 c)1/3 d)3/8 e)5/12

SOLUÇÃO: Considerando que Cláudia seja a primeira, Paulo o segundo, Rodrigo o terceiro e Ana a quarta pessoa a tirar o papel da urna. E como a questão pede a probabilidade que nenhum dos quatro retire o seu próprio nome, ou seja, nenhum dos papeis retorne ao seu local de origem, deve calcular o número total de possibilidades e o de desordenamento. Logo, o número total de possibilidades de se retirar o papel é dado pela fórmula da permutação simples, ou seja, $P_4 = 4! = 24$. *Agora calcula-se o número de possibilidades de nenhuma das 4 pessoas tirarem seu próprio nome utilizando a fórmula (4), tem-se*

$$D_4 = 4!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) \Rightarrow D_4 = 24\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)$$

$$\Rightarrow D_4 = 24\left(\frac{12 - 4 + 1}{24}\right) \Rightarrow D_4 = 12 - 4 + 1 \Rightarrow D_4 = 9$$

Portanto há 9 possibilidades dos papeis retirados não saírem na ordem Claudia, Paulo, Rodrigo e Ana. Assim o resultado da questão é o quociente entre o estas possibilidades e o número total, logo a probabilidade é de $\frac{9}{24}$, que simplificando por 3, obtém-se $\frac{3}{8}$, que corresponde a alternativa d.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento deste trabalho pode-se reconhecer que há a ausência de importantes conteúdos da Análise combinatória nos livros didáticos, constatados na tabela 1. Visto que os Métodos de Contagem são ferramentas imprescindíveis para o desenvolvimento da capacidade de pensar e compreender dos alunos, ao explorar novos conteúdos permite-se a elevação do nível dos estudantes, inclusive os de nível superior.

Durante a pesquisa constatou-se a presença dos agrupamentos Permutação Circular, Combinação com Repetição e Permutação Caótica em questões de provas importantes como Enem e provas de concursos, três presentes no corpo deste artigo, utilizadas como exemplo e também para mostrar a importância desses conteúdos no Ensino Médio.

Por fim, conclui-se que esses são os principais conteúdos da Análise Combinatória que não são abordados no Ensino Médio. Portanto, enfatiza-se a importância da inserção desses conteúdos nos livros didáticos, devido à necessidade da abordagem dos mesmos no Ensino Médio e por serem necessários para um melhor desenvolvimento dos alunos, beneficiando-os em seu futuro acadêmico e profissional.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, Luís R. D. **Métodos de contagem.** Dissertação (Mestrado em matemática) – PROFMAT. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa. 2013.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais.** Brasília: MEC, 2000.

DURO, Mariana L. **Análise combinatória e construção de possibilidades:** o raciocínio formal no Ensino Médio. Dissertação (pós-graduação em educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. 2012.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar, 1:** conjuntos, funções. 9ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, Elon L. **Curso de análise.** Vol 1. 14ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

MOGADO, Augusto César; et al. **Análise combinatória e probabilidade:** com as soluções dos exercícios. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

SANTOS, José P. O.; MELO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. **Introdução a análise combinatória.** 4 ed. Rio de Janeiro: Moderna, 2007.

SILVA, Websther. **Uma generalização para o problema do amigo secreto.** Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização) – Universidade aberta do Brasil; Universidade Federal do rio Grande do Norte. Luís Gomes. 2016.

TATAIA, Paulo E. C. O. **Análise combinatória para o ensino médio.** Monografia (especialização em Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 2012.

CAPÍTULO 6

O PERCURSO PROFISSIONAL DE MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO E A GEOMETRIA DIFERENCIAL NO BRASIL

Data de aceite: 17/11/2020
Data de submissão: 21/09/2020

Antonio José Melo de Queiroz
Universidade Estadual do Ceará
Tauá-Ceará
http://lattes.cnpq.br/7680043057030896

RESUMO: Este trabalho elaborou uma visão panorâmica sobre o início da carreira do professor e pesquisador brasileiro Manfredo Perdigão do Carmo (1928 – 2018). Será discutida de forma breve sua formação em Engenharia Civil, a pós-graduação em Geometria Diferencial e suas atividades iniciais de pesquisa e ensino. No texto será abordada a produção científica deste eminente geômetra, uma breve exposição dos primeiros artigos científicos, formação de parcerias de pesquisa, orientação de diversos estudantes em nível de doutorado e o constante esforço para colaborar com a produção de conhecimento matemático no Brasil. Além das atividades de ensino e pesquisa, o matemático esteve envolvido com ações de gerência institucional, foi presidente da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e membro da Academia Brasileira de Ciências (ABC). Diante do exposto acima, este estudo teve como objetivos compreender e analisar o início do percurso profissional do professor Manfredo Perdigão do Carmo bem como sua importância para a formação da área de estudos da Geometria Diferencial no Brasil. A metodologia adotada nesta pesquisa é do tipo exploratória, permitindo uma maior aproximação e compreensão do objeto de estudo, baseada em análises bibliográficas e, principalmente, análises documentais, com destaque para a investigação dos artigos científicos, além da observação de documentos em que constam suas atividades de orientação de teses de doutorado e entrevistas concedidas por Manfredo do Carmo, em que trata de diversos pontos de sua carreira profissional. Alguns resultados observados na pesquisa são a trajetória acadêmica exitosa e rica em detalhes, bem como o árduo trabalho do professor Manfredo para criar e consolidar uma escola de Geometria Diferencial no Brasil, mantendo um alto nível de produção científica. A conclusão obtida ressalta a importância das atividades de pesquisa e ensino de Manfredo do Carmo, bem como suas parcerias na realização das atividades de pesquisa.

PALAVRAS-CHAVE: Manfredo do Carmo; Geometria; História da Matemática.

THE PROFESSIONAL CAREER OF MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO AND THE DIFFERENTIAL GEOMETRY IN BRAZIL

ABSTRACT: This paper elaborated a panoramic view about the beginning of the career of Brazilian teacher and researcher Manfredo Perdigão do Carmo (1928 - 2018). It will be briefly discussed his background in Civil Engineering, the postgraduate degree in Differential Geometry and his initial research and teaching activities. The text will address the scientific production of this eminent geometer, a brief exposition of the

first scientific articles, formation of research partnerships, orientation of several PhD students and the constant effort to collaborate with the production of mathematical knowledge in Brazil. In addition to teaching and research activities, the mathematician was involved in institutional management activities, was president of the Brazilian Society of Mathematics (SBM) and a member of the Brazilian Academy of Sciences (ABC). Given the above, this study aimed to understand and analyze the beginning of the professional career of Professor Manfredo Perdigão do Carmo as well as its importance for the formation of the field of studies of Differential Geometry in Brazil. The methodology adopted in this research is exploratory, allowing a closer approach and understanding of the object of study, based on bibliographical analysis and, mainly, documentary analysis, with emphasis on the investigation of scientific articles, in addition to the observation of documents containing their PhD thesis orientation activities and interviews given by Manfredo do Carmo, in which deals various points of your professional career. Some results observed in the research are the successful and detailed academic trajectory, as well as the hard work of Professor Manfredo to create and consolidate a school of Differential Geometry in Brazil, maintaining a high level of scientific production. The conclusion obtained underscores the importance of Manfredo do Carmo's research and teaching activities, as well as his partnerships in conducting research activities.
KEYWORDS: Manfredo do Carmo; Geometry; Mathematics History.

INTRODUÇÃO

O sucesso recente da Matemática brasileira esconde a sua origem tardia e difícil. Atualmente, o Brasil encontra-se no grupo 5 da International Mathematical Union (IMU), ou seja, o país está no conjunto de países que mais produzem Matemática de qualidade no mundo. Porém, ao longo da história da ciência nacional, percebe-se que a Matemática superior, com raras excessões, foi ensinada somente em escolas de engenharia até a década de 1930. Assim, não havia uma formação oficial de cientistas matemáticos até essa data, isto não significa a ausência de estudos nesta área, existiram alguns nomes fortes e autodidatas que conseguiram realizar trabalhos de pesquisa importantes em algumas áreas da Matemática, alguns deles foram, Joaquim Gomes de Sousa, Theodoro Augusto Ramos, Otto de Alencar Silva, Lélio Gama, dentre outros, conhecidos como pioneiros da Matemática brasileira.

Manfredo Perdigão do Carmo, um dos matemáticos mais importantes do Brasil, iniciou sua carreira em um segundo momento da Matemática nacional, pois quando concluiu sua graduação em Engenharia Cívil em 1951 e posteriormente quando decidiu concentrar esforços à docência e a iniciação científica em Matemática, já existiam algumas faculdades dedicadas ao ensino e pesquisa em ciência básica, situadas no eixo Rio de Janeiro – São Paulo. Assim, apesar da irrelevante ou inexistente divulgação destas atividades, já existia a semente da produção científica nacional germinando em solo brasileiro.

Em conformidade com o apresentado acima, traz-se nesta pesquisa o objetivo de compreender e analisar o início da trajetória profissional do professor Manfredo Perdigão do Carmo, entre as décadas de 1960 e 1970, bem como, apresentar a sua importância para a formação da área de Geometria Diferencial, no Brasil, visto que até o início de suas atividades de pesquisador, existiam poucos trabalhos nacionais neste campo de estudo.

O percurso metodológico trilhado neste trabalho foi à pesquisa documental e bibliográfica com um caráter exploratório e qualitativo, tendo em vista a análise de algumas entrevistas do professor Manfredo do Carmo, documentadas em vídeos e textos, bem como o estudo de material bibliográfico sobre História da Matemática no Brasil e leitura de alguns trabalhos de pesquisa e livros publicados pelo professor Manfredo.

Os principais resultados apresentados são a relevância da produção científica de Manfredo do Carmo, observando que a maior parte de suas investigações em Geometria Diferencial foram realizadas em parceria com importantes geômetras. É destacado também as suas atividades de ensino sob a forma de orientação de vários estudantes brasileiros no IMPA que, posteriormente, se deslocaram para diversas universidades e formaram novos núcleos na área relatada acima.

BREVE BIOGRAFIA

Manfredo Perdigão do Carmo nasceu em Maceió, AL, em 1928, onde também fez sua educação básica, na época, ensino primário e secundário. Um fato interessante deste período é que ele foi aluno de Benedito de Morais, assim como Elon Lages Lima. Manfredo se refere ao memorável professor com muito respeito e carinho relatando que “[…] era uma pessoa diferenciada, que fazia aquilo com gosto, com amor, com o maior entusiasmo.”(CARMO, 2003, p. 199). Percebemos que Benedito de Morais era um mestre que cativava e marcava seus estudantes, pois Manfredo com mais de 70 anos de idade ainda lembrava de suas aulas no ensino básico.

Em 1947, Manfredo do Carmo iniciou o curso de Engenharia Cívil na Escola de Engenharia de Recife, nessa instituição sofreu influência de outro insigne professor, Luiz Freire. De acordo com Silva (2013), a visão de futuro de Luiz Freire, associada às parcerias com outros matemáticos, fez a Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) ser um importante centro de produção e divulgação da Matemática. Manfredo destaca o estímulo, promovido por Luiz Freire, aos estudantes para seguirem carreira científica (CARMO, 1994).

Já graduado, em 1951, Manfredo retorna a Maceió e realiza alguns trabalhos em engenharia, porém, Luiz Freire o indicou, em 1954, para uma posição no Instituto Tecnológico da Aeronaútica e, no mesmo ano, Manfredo retorna para Recife com o objetivo de ser professor no recém criado Instituto de Física e Matemática da Universidade de Recife (atual UFPE), iniciando sua frutífera carreira docente e a intenção em estudos profundos da Matemática.

O período entre 1955 e 1960 foi dedicado à preparação matemática e aprendizagem de assuntos que ainda não tinha conhecimento consolidado. Manfredo do Carmo relata que entre 1955 e 1956 dedicou-se ao preenchimento de falhas em sua formação e, como era admirador de Física, desenvolveu, pela primeira vez, o interesse em Geometria Diferencial. O ano de 1957 foi particularmente importante por sua participação no 1º Colóquio Brasileiro de Matemática (CBM). Carmo (1994) narra que, neste evento, percebeu pela primeira vez a existência de pessoas, no Brasil, com interesses semelhantes aos seus, conheceu alguns matemáticos como Chaim Samuel Honig, Alexandre Rodrigues e soube que seu amigo de infância, Elon Lages, estava cursando doutorado em Topologia, nos Estados Unidos.

A partir do colóquio, o professor Manfredo iniciou e manteve uma correspondência valiosa com Elon, que indicou uma série de livros e notas de aulas para aprofundamento nos estudos de matemática e, principalmente, de Geometria Diferencial. Em 1958, os dois se reencontraram em Fortaleza, Elon já era doutor e Manfredo havia sido convidado para ministrar um curso de Geometria, que foi o germe para a escrita de seu livro mais famoso, Differential Geometry of Curves and Surfaces. Após algumas reflexões com o amigo, o professor resolveu passar um período de estágio no IMPA, entre 1959 e 1960, lá, sob orientação de Elon Lages, aprofundou estudos em Geometria Diferencial e conforme relatou “pela primeira vez na vida eu estava em contato com a matemática nascente.” (CARMO, 2003, p. 203).

Em outubro de 1960, Manfredo do Carmo chegou à Universidade de Berkeley para cursar doutorado em Matemática, na área de Geometria Diferencial e sob orientação de um dos maiores geômetras da época, Shiing-Shen Chern. Manfredo foi indicado por cartas de referências de Elon Lages, Leopoldo Nachbin e Maurício Peixoto. Vale destacar que seu objetivo era trabalhar com um grande matemático, assim relatou, “[…] tomei a decisão de me dedicar inteiramente à Matemática. Decorria dai que eu devia fazer o Doutorado em uma boa Universidade. Como eu estava interessado em Geometria Diferencial, era natural procurar estudar com S.S.Chern.” (CARMO, 1994, P. 3).

Após a elaboração de uma prestigiada tese e conclusão do doutorado, o professor Manfredo retornou ao Brasil e entre 1963 e 1967 colaborou com várias universidades brasileiras e foi, nas palavras de Clóvis Pereira da Silva, “[…] quem mais contribuiu, ao lado de Alexandre Augusto M. Rodrigues, para o desenvolvimento e consolidação da pesquisa em Geometria Diferencial no Brasil.” (SILVA, 2009, p.

49). No retorno, esteve na sua instituição de origem, Universidade de Recife. Em 1965, trabalhou na Universidade de Brasília, onde iniciou as atividades de pesquisa com Elon Lages. A partir de 1966, ingressou como pesquisador do IMPA, instituição em que trabalhou até a sua morte, em 2018. Ainda em 1966, participou da formação da pós-graduação em Matemática na Universidade Federal do Ceará (UFC), onde ministrou diversos cursos, após esse período retornou aos Estados Unidos com o auxílio de uma renomada bolsa Guggenheim.

Durante a estadia em solo americano, Manfredo do Carmo realizou importantes trabalhos de pesquisa, que serão discutidos posteriormente, e, além disso, firmou importantes parcerias. De volta ao Brasil, em 1969, fixou-se no IMPA, onde iniciou um trabalho de formação de jovens talentosos e consolidação da pesquisa em Geometria Diferencial no Brasil.

Manfredo também esteve ligado a outras funções importantes para a ciência nacional, tendo sido presidente da SBM entre 1971 e 1973 e membro da ABC, a partir de 1970. Observamos que o professor foi ativo e acreditou na possibilidade da formação de uma comunidade matemática nacional. Será apresentado nas próximas seções que Manfredo elaborou profundos trabalhos de pesquisa em colaboração com grandes matemáticos, escreveu diversos livros e, além disso, formou excelentes geômetras.

PRIMEIROS ARTIGOS CIENTÍFICOS E LIVROS

O primeiro artigo científico de Manfredo do Carmo foi resultado de sua tese de doutorado, publicado no Annals of Mathematics, periódico americano e um dos mais prestigiados do mundo. O trabalho, nas palavras de Marques (2018), estudava as relações entre a topologia e a curvatura de alguns objetos geométricos e representou um ótimo início de carreira para o matemático.

Durante a segunda estadia nos Estados Unidos, entre 1967 e 1969, o professor Manfredo produziu pesquisas em parcerias com Elon Lages, Frank Warner, Nolan Wallach, Shiing-Shen Chern, Shoshichi Kobayashi e outros. Com Elon Lages, publicou um artigo no Archiv der Mathematik em que obtiveram "[…] uma condição para que uma variedade compacta Mn do espaço euclideano Rn+p estivesse contida em Rn+1."(CARMO, 1994, p. 8). É importante destacar que este texto é citado em quase todas as "revisões bibliográficas" escritas sobre o assunto (CARMO, 1994).

Ainda durante este período, Manfredo do Carmo escreveu em colaboração com S. S. Chern e S. Kobayashi seu trabalho de pesquisa mais citado pela comunidade matemática, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental forms of constant length, publicado no periódico Functional Analysis and related fields. A partir deste período, o professor Manfredo desenvolveu o interesse pela subárea de superfícies mínimas, assunto em que contribuiu até o fim de sua carreira.

Após o breve relato dos primeiros artigos científicos publicados pelo professor Manfredo, deve-se destacar alguns fatos importantes, tais como, a realização de colaborações, a importância de suas contribuições para a Matemática, e que seus escritos foram, com raras exceções, os primeiros publicados por um brasileiro na área de Geometria Diferencial.

Corroborando com o que foi citado no parágrafo anterior, Tenenblat (2018) afirma que Manfredo do Carmo produziu mais de 80 trabalhos científicos em cooperação com 32 matemáticos e atuou em diversos temas de sua área tais como, as relações entre Topologia e curvatura, convexidade e rigidez, imersões conformes, subvariedades mínimas e outros.

Além da pesquisa em Geometria Diferencial, Manfredo valorizava a produção de livros de Matemática em língua materna. Tenenblat (2018), lembra que algumas de suas obras eram “testadas” nas disciplinas que ministrava e Barbosa (2018) reforça que, durante o período em que Manfredo lecionou na UFC, o livro de Geometria Diferencial não continha exercícios e estes eram elaborados ao longo do curso para a inclusão no texto. Além disso, o professor utilizava a opinião da turma como “medida” para avaliação de cada lista de problemas.

O livro citado no parágrafo anterior pelo professor Lucas Barbosa foi o primeiro texto didático produzido por Manfredo do Carmo, cujo título é Geometria Diferencial Local, e representava “[…] um esquema para a parte básica do curso de Geometria Diferencial.” (CARMO, 1963, p. 3). Esta obra é composta de cinco capítulos que tratam de curvas, superfícies regulares e algumas propriedades, como a primeira forma fundamental, superfícies imersas e a segunda forma fundamental, geometria intríseca das superfícies e o teorema fundamental para estes objetos matemáticos.

Este livro foi publicado em 1963 pelo Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife, na coleção Textos de Matemática, sob a coordenação de Alfredo Pereira Gomes, além disso, foi utilizado como notas de aula para um curso ministrado por Manfredo no 4º Colóquio Brasileiro de Matemática. Outra obra didática do professor Manfredo, muito famosa, é intitulada Differential Geometry of Curves and Surfaces, publicada em 1976 pela editora Prentice Hall, nos Estados Unidos, posteriormente traduzida para o português e publicada pela SBM.

Tenenblat (2018) lembra que este livro nasceu de uma obra preliminar publicada pelo IMPA, Elementos de Geometria Diferencial, em 1971, e Manfredo do Carmo cita a influência do matemático Blaine Lawson para que o referido texto fosse publicado em solo americano, pois ressalta que, em uma temporada no Rio de Janeiro, Lawson estudou o livro, o estimulou à tradução para o inglês e iniciou tal tarefa, que foi concluida por Leny Cavalcante, esposa de Manfredo. O professor ainda destaca sua surpresa ao saber que o texto já teria vendido mais de 30 mil exemplares (CARMO, 2003).

Esses dois textos de Manfredo do Carmo foram citados por pertencerem ao período inicial de sua carreira e mesmo assim, um destes tornou-se referência em diversas universidades nacionais e estrangeiras. Através desta observação é possível perceber o empenho e o talento do professor Manfredo para a escrita de Matemática, bem como o interesse na consolidação bibliográfica nacional, tendo como consequência o estímulo ao estudo e pesquisa em Matemática no Brasil. Na próxima seção será discutido brevemente algumas atividades de ensino realizadas pelo matemático, que tem uma vasta descendência acadêmica.

ATIVIDADES DE ENSINO

Manfredo Perdigão do Carmo envolveu-se ativamente em diversas atividades de ensino ao longo de sua carreira, ele relatou que "[...] havia essa preocupação de criar uma matemática nacional, era preciso ter alunos que fizessem teses, trabalhos de pesquisa aqui no Brasil, com problemas tirados daqui." (CARMO, 2003, p. 217). Em 1969, no retorno às suas atividades no IMPA, Manfredo assumiu a direção de ensino no instituto, cargo que lidava com a estruturação e manutenção das atividades de pós-graduação. Além disso, ministrou vários cursos como, Geometria Diferencial Clássica, Formas Diferenciais e Geometria Riemanniana, organizou seminários avançados e orientou alunos de doutorado (CARMO, 1994).

A orientação de alunos na elaboração de suas teses foi uma das principais atividades contribuintes para a formação da escola de Geometria Diferencial no Brasil, uma vez que, boa parte desses jovens doutores retornaram aos seus estados de origem, ou assumiram postos de trabalho fora do eixo Rio de Janeiro – São Paulo, e estimularam a criação de novos grupos nesta área de pesquisa.

Neste sentido, Tenenblat (2018) relata que Manfredo foi orientador de 27 teses de doutorado. Estes novos doutores continuaram suas pesquisas e, por sua vez, passaram a orientar novos alunos, sendo assim, muitos geômetras brasileiros estão ligados, direta ou indiretamente, a Manfredo Perdigão do Carmo.

Será citado, em ordem cronológica, os orientandos de Manfredo que realizaram o doutoramento na década de 1970: Keti Tenenblat (1972), Rubens Leão de Andrade (1973), Edmilson de Vasconcelos Pontes (1974), José de Anchieta Delgado (1977), Antonio Carlos Asperti (1977), Ivan Azevedo Tribuzy (1978), Renato de Azevedo Tribuzy (1978) e Luquésio Petrola de Melo Jorge (1978) (SILVA; AZEVEDO, S/d). Estes foram os primeiros estudantes que realizaram trabalhos de tese sob supervisão de Manfredo do Carmo.

Importante destacar que as pessoas citadas acima passaram a realizar suas atividades de ensino e pesquisa em diversos estados do país, como, Distrito Federal, Ceará, Rio Grande do Norte, São Paulo e Amazonas. Esse fato evidencia a importância das atividades realizadas por Manfredo do Carmo para a formação do campo de pesquisa e ensino de Geometria Diferencial no país. Na próxima seção, será abordado algumas breves considerações finais desta pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao concluir esta pesquisa, pode-se ressaltar alguns pontos relevantes no início da carreira do professor Manfredo do Carmo. Primeiro, sua produção científica expressiva em quantidade e qualidade, dado que, sua primeira publicação já ocorreu no Annals of Mathematics, umas das revistas de Matemática mais pretigiada do mundo. Além disso, podemos destacar a grande quantidade de parceiros de pesquisa, Manfredo valorizava a produção conjunta e a praticou até o fim de sua vida.

O segundo ponto a ser notado é a preocupação com a formação de uma bibliografia em língua portuguesa. Manfredo do Carmo escreveu, desde o seu retorno ao Brasil, depois do doutorado, várias notas de aulas dos cursos que ministrava. Alguns destes textos se tornaram livros célebres e referências em Geometria Diferencial, no Brasil e no exterior.

O terceiro aspecto observado foi à formação de profissionais para atuarem em ensino e pesquisa da Geometria Diferencial no Brasil. Manfredo orientou vários estudantes de mestrado e doutorado, foram citados os primeiros orientandos de doutorado, em ordem cronológica, observando que estas pessoas passaram a desenvolver diversas atividades na área e, em várias regiões do país, colaborando de forma decisiva para a formação da comunidade de Geometria Diferencial.

A partir destes pontos destacados, foi ressaltado o desenvolvimento do objetivo da pesquisa, uma vez que, foi discutida a importância científica dos artigos e livros de Manfredo do Carmo, bem como as atividades de orientação de teses de doutorado, realizados no IMPA. É importante lembrar que foram analisadas apenas algumas atividades iniciais da carreira do professor Manfredo, entre as décadas de 1960 e 1970. Seu percurso profissional completo é muito amplo e rico em detalhes, espera-se que seja tema de outras pesquisas. O autor agradece ao professor Diego da Silva Pinheiro, doutorando em Geometria Diferencial da UFC, por suas valiosas contribuições.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. L. M *et al*. **Mesa Redonda Recordando Manfredo**. In: JORNADA MANFREDO DO CARMO, 2018, Rio de Janeiro. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=pyiX_P3pD5c&t=138s. Acesso em: 25 novembro 2019.

CARMO, M. P. Manfredo Perdigão do Carmo. *In*: PALIS, J.; CAMACHO, C.; LIMA, E. L. (orgs.) ***IMPA 50 anos***. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. p. 199-222.

CARMO, M. P. Manfredo Perdigão do Carmo. [Entrevista cedida a] Pedro Mendes. ***Matemática Universitária***, Rio de Janeiro, n. 16, p. 1–18, jul. 1994.

CARMO, M. P. **Geometria Diferencial Local**. Recife: Instituto de Física e Matemática da Universidade de Recife, 1963.

MARQUES, F. C. S. C. **A Matemática de Manfredo Perdigão do Carmo**. *In*: JORNADA MANFREDO DO CARMO, 2018, Rio de Janeiro. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=4vb5jHfDuKk&t=116s. Acesso em: 14 novembro 2019.

SILVA, C. P. ***Início e Consolidação da Pesquisa em Matemática do Brasil***. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2013.

SILVA, C. P. ***Aspectos Históricos do Desenvolvimento da Pesquisa Matemática no Brasil***. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

SILVA, C. P.; AZEVEDO, A. **Mestrados e Doutorados em Matemática Obtidos no Brasil a Partir de 1942.** *Sociedade Brasileira de História da Matemática*, Rio Claro, S/d. Disponível em: www.sbhmat.com.br. Acesso em: 10 setembro 2017.

TENENBLAT, Keti. O **Legado de Manfredo Perdigão do Carmo**. *In*: JORNADA MANFREDO DO CARMO, 2018, Rio de Janeiro. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=umMK2Wa8n-E&t=473s. Acesso em: 20 novembro 2019.

CAPÍTULO 7

PROCESO COORDINADO DE FORMACIÓN DE MAESTROS DEL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Data de aceite: 17/11/2020
Data de submissão: 02/10/2020

María Teresa Costado Dios
Universidad de Cádiz, Departamento de Didáctica
Puerto Real (Cádiz), España
https://orcid.org/0000-0002-2672-4061

José Carlos Piñero Charlo
Universidad de Cádiz, Departamento de Didáctica
Puerto Real (Cádiz), España
https://orcid.org/0000-0001-7583-4729

RESUMEN: El trabajo colaborativo es una técnica que permite desarrollar habilidades y capacidades de trabajo en equipo, sabiendo escuchar las opiniones de las demás personas que lo forman aparte de la propia, así como fomentar la ayuda mutua, todo ello para desarrollar un aprendizaje significativo.Este artículo presenta la estructura y los resultados de un proyecto de trabajo colaborativo a nivel de profesorado universitario del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Cádiz para la mejora del proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. El planteamiento principal del proyecto supone un trabajo de coordinación entre profesores de diferentes asignaturas del área de matemáticas, para utilizar la misma metodología de enseñanza y de evaluación, para un mejor aprendizaje de las matemáticas por parte del alumnado, así como un mayor nivel de compromiso de éste con su propio proceso de aprendizaje. De esta manera el profesorado universitario se retroalimenta de las opiniones, experiencias positivas y negativas, así como de las vivencias personales de la vida del docente de los demás miembros del equipo y del alumnado. Lo que pretendemos es promover el diálogo, la comunicación y el asesoramiento mutuo entre iguales para fomentar una enseñanza de mayor calidad. Este proyecto se puso en marcha en el curso 2017/2018 creando las bases, perfilando sus objetivos e introduciendo varias estrategias de enseñanza, cuyos resultados aquí se presentan, haciendo más partícipe al alumnado de su propio proceso de aprendizaje y que seguirá en cursos próximos introduciendo mejoras para crear la sinergia fundamental del proyecto.

PALABRAS CLAVE: Formación del profesorado, didáctica de las matemáticas, conocimiento matemático, educación primaria, trabajo colaborativo.

COORDINATED PROCESS OF FORMATION OF TEACHERS OF THE DEGREE OF PRIMARY EDUCATION

ABSTRACT: Collaborative work is a technique that allows you to develop teamwork skills and abilities, knowing how to listen to the opinions of other people who form it apart from your own, as well as promoting mutual help, all that to develop meaningful learning. This article presents the structure and the results of a project of collaborative work at the level of university professors of the Degree of Primary Education of the University of Cádiz for the improvement of the teaching - learning process of mathematics.

The main approach of the project supposes a coordinated work between university professors of different subjects of mathematics area, where the teachers use the same methodology of teaching and evaluation, for better learning of mathematics by students, as well as a higher level of commitment to their own learning process. In this way, the university teachers receive feedback from the opinions, positive and negative, as well as from the personal experiences of the teacher's life from the other team members and the students. Our aim is to promote dialogue, communication and mutual advice among equals to promote higher quality teaching. This project was launched in the 2017/2018 academic year creating the bases, outlining its objectives and introducing several strategies, the results of which are presented here, making students more involved in their own learning process and which will continue in upcoming courses introducing improvements to create the fundamental synergy of the project.
KEYWORDS: Teacher training, didactics of mathematics, mathematical knowledge, primary education, collaborative work.

INTRODUCCIÓN

El trabajo cooperativo o en grupo (Johnson et al. 1994) es un término usado para referirse a un procedimiento de enseñanza y aprendizaje, basado en la organización de la clase en pequeños grupos y que sirve para desarrollar habilidades y capacidades de trabajo en equipo, saber escuchar y ayudarse entre los miembros del grupo de trabajo a fin de favorecer que se produzca en los estudiantes un aprendizaje significativo (Bernheim 2011).

El proyecto bajo el que se enmarca este trabajo, propone que el trabajo colaborativo se realice a nivel del profesorado, buscando un mayor nivel de compromiso con el alumnado, donde los profesores que forman equipo utilizan la misma metodología de trabajo y de evaluación. Los ámbitos sujetos a estudio en este proyecto son los del Conocimiento y Didáctica de las Matemáticas. Ambas disciplinas forman parte del conocimiento profesional del docente en formación, pero se podría aplicar a otros ámbitos de la educación.

Esta comunicación presenta los primeros pasos de un proyecto de trabajo colaborativo a nivel de profesorado universitario para la mejora del proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas dentro del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Cádiz. Este documento está estructurado en: descripción del proyecto, estrategias utilizadas y conclusiones de nuestro proyecto.

DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

Este proyecto de coordinación entre profesorado universitario se implementa y se desarrolla en las asignaturas de Conocimiento Matemático I y II (CM1, CM2), y Didáctica de las Matemáticas I y II (DM1, DM2), correspondientes al primer, segundo y tercer curso del Grado en Educación Primaria (Tabla 1) de la Universidad de Cádiz (UCA), a fin de conseguir una mayor adecuación de la temática y evaluación del alumnado a lo largo de su formación en matemáticas en diferentes cursos del grado. Este planteamiento dota a los docentes universitarios de una perspectiva global e integradora del curriculum de los maestros en formación, permitiendo identificar dificultades y hacer un seguimiento individualizado de los mismos.

Grado Educación Primaria	Primer cuatrimestre	Segundo cuatrimestre
Primer curso		Conocimiento Matemático I
Segundo curso	Conocimiento Matemático II	Didáctica de la matemática I
Tercer curso	Didáctica de la matemática II	

Tabla 1. Distribución de asignaturas de Conocimiento y Didáctica de la Matemática en el Grado de Educación Primaria de la Universidad de Cádiz.

La elección de estas asignaturas para efectuar este proyecto coordinado se basa en su complementariedad y en las diversas relaciones cruzadas existentes entre ellas. Este procedimiento sigue el marco teórico del “Conocimiento base para la enseñanza” de Shulman (1986), donde propuso tres categorías iniciales: conocimiento del contenido de la materia, conocimiento didáctico del contenido y conocimiento curricular (Figura 1). Precisamente, con la unión y trabajo en equipo del profesorado universitario buscamos que la enseñanza, metodología y evaluación empleada sea la misma para un mejor aprendizaje de las matemáticas por parte del alumnado que el día de mañana tendrán que ensenar como maestros.

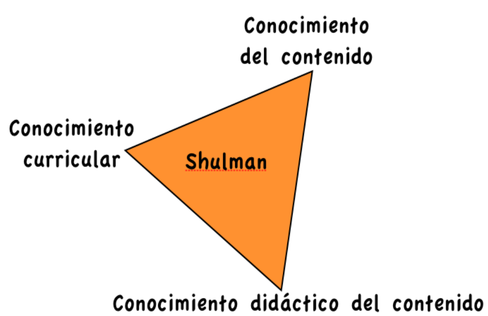


Figura 1. Esquema de las tres categorías iniciales propuestas por Shulman (1986).

Los objetivos generales de este proyecto son:

1. Planificar la programación de las 4 asignaturas del área de matemáticas de manera conjunta por parte del profesorado con el objetivo de que se complementen a la perfección. Diseñar y desarrollar el temario y las prácticas a llevar a cabo en beneficio de un mejor aprovechamiento por parte del alumnado.

2. Compartir información y recursos, no sólo respecto a las asignaturas, sino también respecto al interés, motivación, capacidades, ideas previas, actitudes y carencias a fin de consensuar una evaluación global del alumnado.

3. Prestar especial atención a las deficiencias formativas previas del alumnado respecto al conocimiento matemático y su seguimiento desde primer curso.

Con este proyecto, aparte de los objetivos mencionados anteriormente, queremos realizar el esquema de Diagnóstico – Intervención – Evaluación, bien sea respecto a los conocimientos que el alumnado tiene o que va adquiriendo durante el grado respecto a las matemáticas, así como a su didáctica y metodología para enseñarlas, y como han mejorado y a su propia evolución desde primer curso, afectando todo este proceso a las asignaturas de matemáticas del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Cádiz.

ESTRATEGIAS IMPLEMENTADAS

El alumnado del Grado de Educación Primaria de primer curso proviene en su mayoría de un ambiente de clase donde predomina la metodología tradicional, donde el profesor expone las ideas y el alumnado es un agente pasivo en su aprendizaje. Dentro de este proyecto se pretende cambiar ese modelo tradicional a un modelo activo donde el alumnado se involucre y se implique en su propio proceso de construcción cognitiva, pues el alumno es capaz de progresar por sí mismo elaborando información y donde el profesor puede favorecer dicho desarrollo proponiendo entornos y actividades adaptadas al nivel de su alumnado.

Las estrategias puestas en marcha han sido diseñadas por el profesorado integrante del proyecto para cumplir los objetivos del mismo. Recopilando los resultados de las mismas en su puesta en práctica, se pretende abordar el cumplimiento de los objetivos del proyecto, creando asignaturas complementarias, conocer las deficiencias y fortalezas formativas del alumnado, así como su evolución y actitudes de cara a valorar su formación final en el área de matemáticas.

Durante el curso 2017/2018 se han realizado las estrategias siguientes: una prueba de nivel (PN) en CM1 y la docencia en formato Blended Learning en DM1. Con la primera estrategia pretendíamos conocer el nivel de conocimientos matemáticos con los que llega el alumnado a la Facultad de Educación y que ellos mismos fueran conscientes de sus carencias y se implicaran en su propio proceso de aprendizaje. Con la segunda metodología aplicada en segundo curso, pretendíamos que el alumnado participara de forma activa en su aprendizaje, haciendo un revisión previa del temario que se iba a explicar en clase mediante el visionado de videos.

Las estrategias llevadas a cabo en el curso 2018/2019 fueron en la asignatura de CM2 un taller combinando los ámbitos geométrico y magnitudinal donde los alumnos debían construir un objeto en 3D, el cual tuvo mucho éxito, y una prueba de nivel inicial en las asignaturas de CM1 y CM2. Además en la asignatura de DM2, con el alumnado que en el curso anterior había cursado DM1, se siguió con la estrategia de Blended Learning.

Prueba de nivel en CM1

En la asignatura de CM1 en el curso 2017/2018 se realizó una prueba de nivel al comienzo (PN1) y final del cuatrimestre (PN2) para comprobar la evolución del alumnado. En dichas pruebas debían resolver problemas matemáticos de diversa naturaleza y cálculos diversos. En el caso de la prueba PN1, ésta consistió en la realización de 20 ejercicios de nivel de primaria donde debían resolver problemas y operaciones diversas a principios de cuatrimestre (febrero de 2018). Posteriormente, a mediados de mayo se llevó a cabo en clase la prueba PN2 consistente en aquellos 10 ejercicios pertenecientes a la primera prueba que tuvieron mayor dificultad o peor ejecución. Se busca con esto que el alumnado sea consciente (al igual que el docente) de su propio conocimiento matemático inicial, así como también de su propia evolución antes de la finalización del cuatrimestre.

Del total de alumnos que realizaron las dos pruebas de nivel, en PN1 un 41,3 % obtuvieron una nota inferior a 5 puntos y un 45,6 % una calificación de aprobado, así como un 10,9% de notables y solo un 2,2 % obtuvo calificación de sobresaliente. En PN2, solo un 2,2 % ha obtenido una nota inferior al 5, el 15,2 % son aprobado, un 54,3 % son notables y un 28,3 % obtuvieron calificación de sobresaliente. A vista de los resultados, se puede estimar un avance en el conocimiento matemático del alumnado observando un aumento de sus calificaciones.

Quisiera resaltar varios casos particulares dentro del alumnado. Sólo 4 personas han bajado la nota en 1 o 1,5 puntos, pero han sido 12 personas las que han aumentado su puntuación en más de 4 puntos de PN1 a PN2. Los casos más destacados son 3 alumnos, donde uno de ellos ha pasado de una calificación de 2 (suspenso) a 9 (sobresaliente) y los otros dos han visto aumentada su nota en 6,25 puntos pasando de un suspenso a un notable. Es significativo decir que el desarrollo del conocimiento está posiblemente influenciado por la actitud de los estudiantes e implicación en su proceso de aprendizaje.

Blended Learning en DM1 y DM2

En la asignatura de DM1 en el curso 2017/2018 se puso en marcha la estrategia Blended Learning. Esta estrategia consiste en un aprendizaje mixto (Piñero y Canto, 2019) donde el alumnado debe visionar vídeos de la lección por adelantado. Dicha lección se correspondía con el aprendizaje de resolución de operaciones usando el algoritmo ABN.

Esta estrategia de aprendizaje mixto para el aprendizaje del ABN se llevó a cabo en el grupo C de la asignatura de DM1 y se siguió con una metodología tradicional en el grupo B. Para comprobar el nivel de compromiso del alumnado con este contenido a enseñar se realizó una pregunta en el examen final relacionada con el mismo. En el grupo C, casi todo el alumnado respondió a dicha pregunta de examen y con éxito, sin embargo, en el grupo B, casi nadie contestó a dicha cuestión, solo un 6% del alumnado. Estos resultados denotan una gran aceptación de la metodología mixta por parte del alumnado en el grupo C donde se implantó.

Para probar su eficacia se ha realizado un cuestionario antes y después de la implementación de la estrategia. Concretamente, una de las preguntas planteadas ha sido *¿Las matemáticas sirven para razonar y aprender a pensar?* y los resultados (figura 2) evidencian un claro aumento de la concepción de las matemáticas por parte de los estudiantes, y por lo tanto, la eficacia y ventajas de la técnica formativa de aprendizaje mixto aplicada al alumnado.

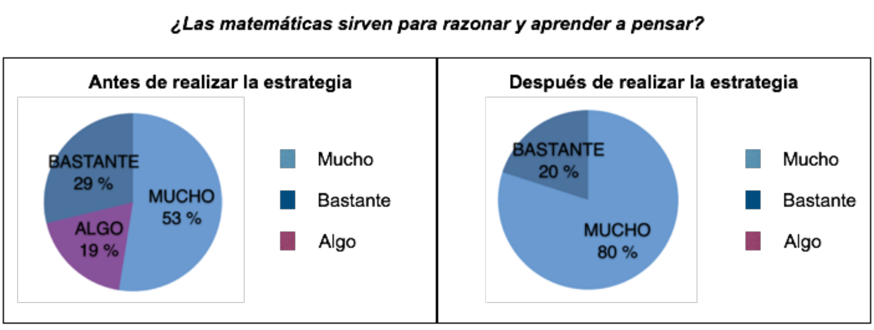


Figura 2. Evolución de la concepción de las matemáticas por parte de los alumnos de la asignatura DM1 expresadas en porcentajes antes y después de aplicar la metodología.

El mismo grupo de estudiantes continuó participando de la propuesta de Blended Learning durante su siguiente etapa formativa en la asignatura de DM2 al curso siguiente 2018/2019. Concretamente, dicha estrategia fue aplicada cuando el alumnado tuvo que realizar una unidad didáctica para un centro educativo en concreto diseñado por el profesorado con unas características específicas de centro y de alumnos en la clase. Los estudiantes debían ir revisando esa documentación proporcionada previamente para ir diseñando la unidad didáctica para un determinado contenido matemático a enseñar. En la figura 3 se muestran los resultados la pregunta *¿Cuál es tu relación con las matemáticas?*, la cual pertenecía a un cuestionario que debían responder antes y después de la implementación de la estrategia. Dicha gráfica muestra un aumento de empatía hacia las matemáticas.

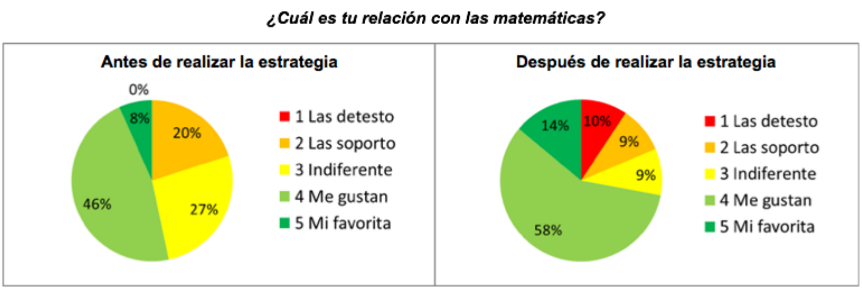


Figura 3. Evolución de la relación afectiva con la materia antes y después de la implementación de la estrategia de Blended Learning en DM2.

A la luz de los resultados presentados en las figuras 2 y 3, puede concluirse que los estudiantes no sólo encuentran más útil la materia tras la experiencia de aprendizaje mixto, sino que mejora su relación afectiva con la misma. La valoración de los alumnos ha resultado positiva tanto en DM1 como en DM2. Si bien en este documento no se refleja el desglose completo de la valoración por asignaturas, pero cabe señalar que la valoración es tanto más positiva cuanto más avanzado es el estado de formación del estudiante. De los más de 100 estudiantes participantes en el proyecto ninguno piensa que el proyecto no haya favorecido la comprensión de los contenidos.

Pruebas iniciales de nivel en CM1 y CM2

Durante el curso 2018/2019 se realizaron pruebas de nivel inicial en CM1 y CM2 (alumnos que el curso anterior habían cursado CM1). Se puede decir que se obtuvieron unos resultados no demasiado esperanzadores en el sentido de nivel bastante bajo por parte del alumnado de sus conocimientos matemáticos a nivel de primaria, pues en las dos pruebas realizadas, lo que se preguntaba era de nivel básico de primaria. En CM1 realizaron la prueba 59 estudiantes donde 22 de ellos no superaron dicha prueba y solo 11 personas obtuvieron una nota superior a 7, siendo la nota más alta de la prueba un 8,33. En CM2, el conocimiento preguntado era sobre geometría y magnitudes (áreas y perímetros), y de las 59 personas que realizaron la prueba, obtuvieron menos de un 4, 29 personas, y mas de un 7 solo 4 personas siendo la nota máxima de 9,58. Por estos resultados se podría esperar un elevado número de suspensos al terminar la asignatura de CM2 pero, sin embargo, ocurrió todo lo contrario. El simple hecho de los alumnos fueran conscientes de su nivel al iniciar la enseñanza de la asignatura, hizo que se volcaran totalmente en ella.

En CM2, los resultados de estas pruebas iniciales eran peores que en CM1, sin embargo la evolución del alumnado fue muy diferente. En CM2, la calificación final global de la asignatura en primera convocatoria (examen final de febrero 2019) fue muy satisfactorio, un casi 77% de aprobados. Los propios estudiantes reconocieron que al principio la prueba de nivel les asustó un poco y sobre todo viendo los resultados de la misma, pero posteriormente reconocieron que el conocer al principio sus dificultades y deficiencias, eso hizo un cambio en su forma de pensar y por lo tanto de afrontar la asignatura teniendo que dedicarle más tiempo de estudio y esfuerzo. Todo lo contrario ha sucedido en CM1, donde el conocimiento previo no era tan malo y sin embargo los resultados globales de la asignatura en primera convocatoria (examen final de junio 2019) han sido peores con solo un 36% de aprobados.

Taller de geometría y magnitud en CM2

En cuanto al taller de geometría y magnitud, éste se llevó a cabo en CM2 (curso 2018/2019), donde los alumnos tenían que crear un objeto 3D original formado por diferentes poliedros y/o polígonos combinando varios materiales. También tuvieron que hacer el desarrollo 2D de dicho objeto como una figura única en el plano, donde analizaron los conocimientos matemáticos básicos implicados en la construcción de dicho objeto (número de vertices, número de aristas, ángulos, polígonos/poliedros que lo forman), así como las competencias que hayan podido desarrollar en ellos mismos realizando esta actividad.

Los estudiantes se dividieron en grupos de trabajo de entre 4 y 6 personas, resultando en 13 grupos. Presentaron trabajos muy diversos (figura 4), desde unicornios, estuches, una máquina de caramelos hasta un barco pirata, todos ellos usando diferentes materiales y multitud de formas geométricas. Los resultados fueron muy satisfactorios, donde las calificaciones finales (nota de la ejecución del objeto, junto con la nota del informe y presentación oral) fueron de dos grupos aprobados, otros dos sobresaliente y el resto obtuvieron una calificación de notable.

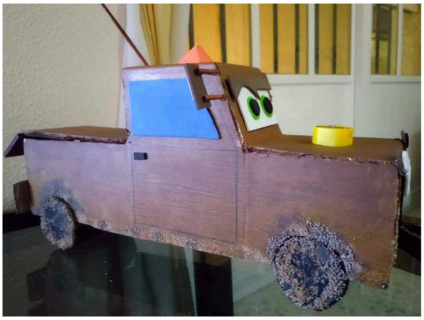
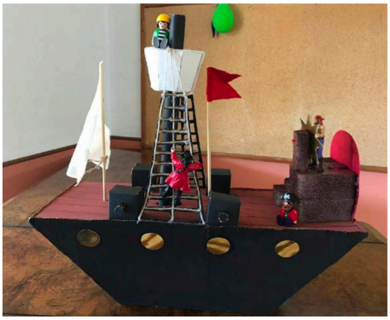
 

Figura 4. Una de las figuras creadas por los alumnos en el taller, concretamente el coche Mate de la película CARS cuya utilidad era de estuche y de sacapuntas (izquierda). Ejemplo de barco, en este caso pirata, para fomentar en los alumnos la creatividad y su imaginación contando historias de aventuras (derecha)

El taller lo valoraron muy positivamente, pues tuvieron que aplicar conocimiento adquirido en la asignatura y hacerlo realidad, es decir, crear un objeto real con diferentes materiales y después analizar el conocimiento matemático que se escondía detrás de él. La realización del taller y obtener una buena calificación, les hizo ganar confianza en sí mismos y que el proceso de enseñanza-aprendizaje estaba siendo significativo. Los resultados de este taller fueron publicados en Costado y Piñero (2020).

CONCLUSIONES

Por todos los resultados expuestos anteriormente, consideramos el proyecto de coordinación entre profesorado universitario un éxito, es decir, que las actividades llevadas a cabo fueron en beneficio del alumnado, pues ellos mismos fueron conscientes de sus deficiencias formativas previas adquiridas en niveles inferiores, las subsanaron y evolucionaron de una manera más que positiva, estableciendo una conexión entre los conocimientos nuevos y los previos, y creándoles necesidad de aprender. Al venir de una metodología de enseñanza tradicional, los alumnos muestran rechazo ante los cambios además de quedar demostrado que llegan a la universidad con un nivel deficiente en su formación básica de matemáticas. Por esto pensamos que los resultados de primer curso relacionados con la asignatura de CM1 son peores que en el resto de asignaturas del área. En segundo curso, se produce en los estudiantes un cambio de mentalidad para ser receptivos de otros métodos de enseñanza e implicarse en su proceso de aprendizaje. Al finalizar en tercer curso, con la asignatura de DM2 su formación de matemáticas dentro del grado, los alumnos reconocen los beneficios del cambio metodológico a una enseñanza más innovadora, que resulta ser fundamental y efectiva, fomentando así la autonomía y motivación del alumnado y un aprendizaje progresivo y significativo, tomando conciencia de sus deficiencias para convertirlas en fortalezas. Igualmente, alaban la ayuda del profesorado y la coordinación existente entre ellos, buscando una docencia de calidad y una buena formación de su alumnado. Los estudiantes muestran una mejor relación afectiva y un mayor dominio del conocimiento tras el ciclo completo de asignaturas sometidas a coordinación.

REFERENCIAS

Bernheim, C. T. **El constructivismo y el aprendizaje de los estudiantes**. UDUAL, v. 48, p. 21-32, 2011.

Costado, M. T. y Piñero, J. C. **Conexión curricular: taller de geometría y magnitud.** Revista de Estudios SocioEDucativos (RESED), v. 8, p. 307-310, 2020.

Johnson, D. W. , Johnson, R. T. y Holubec, E. J. **Cooperative Learning in the Classroom**. Association For Supervision and Curriculum Development, Virginia, 1994. Traducción castellana: El aprendizaje cooperativo en el aula. 1999. Editorial Paidós SAICF.

Piñero Charlo, J. C., y Canto López, M. del C. **Eficacia comparativa de métodos de aprendizaje mixto en la enseñanza de nuevos algoritmos a maestros en formación: estudio de un caso para la elaboración de directrices de diseño**. Brazilian Journal of Development, v. 5, n. 6, p. 7431–7444, 2019.

Shulman, L. S. **Those who understand: knowledge growth in teaching**. Educational Researcher, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986. Traducción castellana: El saber y entender de la profesión docente. Estudios Públicos, v. 99, p. 195-224, 2005.

CAPÍTULO 8

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA DE ÁREA E PERÍMETRO DAS FIGURAS PLANAS

Data de aceite: 17/11/2020
Data de submissão: 15/10/2020

Selma de Nazaré Vilhena Machado
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Moju – Pará
http://lattes.cnpq.br/9613017427265531

Alessandra Maués Quaresma
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Moju – Pará
http://lattes.cnpq.br/3427315946859082

Bruno Sebastião Rodrigues da Costa
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/4681222044310540

Crislaine Pereira Antunes
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Moju – Pará
https://orcid.org/0000-0003-2433-2985

Eldon Ricardo Souza Pereira
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/2329672254632939

Eusom Passos Lima
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/8868675030514401

Gilvan de Souza Marques
Secretária de Educação do Estado do Pará
http://lattes.cnpq.br/8122756217699175

Izabel Cristina Gemaque Pinheiro
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Moju – Pará
http://lattes.cnpq.br/8529654767042818

Karoline de Sarges Fonseca
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Moju – Pará
http://lattes.cnpq.br/3912463550379632

Mayanna Cayres Oliveira
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Moju – Pará
http://lattes.cnpq.br/3270884094346330

Mauro Sérgio Santos de Oliveira
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/9008439528066444

Simei Barbosa Paes
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Moju – Pará
http://lattes.cnpq.br/5952742880615316

RESUMO: A História da Matemática acompanha a humanidade desde o início das organizações sociais, auxiliando o homem a resolver problemas, construir modelos, estabelecer associações, relações e quantificações entre os conhecimentos, sendo um instrumento que contribui no processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, o referido trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa realizada por duas alunas do curso de Licenciatura Plena em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior, localizado no município de Moju. O

assunto envolvido refere-se a Geometria Plana, especificamente aos conteúdos de área e perímetro. A pesquisa ocorreu na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Profº. Bernardino Pereira de Barros na turma do 9º ano com 23 alunos no município de Abaetetuba – Pará. Com isso, objetivamos mostrar a importância do ensino da História da Matemática como instrumento de incentivo e motivação no processo de ensino e aprendizagem de Geometria. Tivemos como metodologia a História da Matemática, utilizando como ferramenta uma sequência de atividades para o ensino de área e perímetro, a qual foi balizada por meio da Engenharia Didática de segunda geração, evidenciadas pelas análises preliminares, analise a priori, experimentação e analise posteriori e validação. Dessa forma, apresentaremos os dados coletados, por meio de quadros, onde tivemos melhorias no processo de ensino e aprendizagem de área e perímetro, concluindo que o uso da História Matemática contribui positivamente para esse processo. Nessa perspectiva, a História da Matemática é uma das possibilidades de se ensinar a matemática, pois a torna mais próxima das realizações do cotidiano dando aos alunos um maior entendimento da sua presença quanto parte da sociedade para o surgimento da matemática.
PALAVRAS-CHAVE: Educação matemática. Ensino e Aprendizagem. Geometria Plana. História da Matemática.

THE USE OF THE HISTORY OF MATHEMATICS FOR THE AREA AND PERIMETER OF FLAT FIGURES

ABSTRACT: The History of Mathematics accompanies mankind from the beginning of social organizations, helping mankind to solve problems, build models, establish associations, relationships and quantifications between knowledge, being an instrument that contributes to the process of teaching and learning. In this sense, this work presents the results of a research carried out by two students of the Full Mathematics Degree course of a Higher Education Institution, located in the municipality of Moju. The subject involved refers to Flat Geometry, specifically to area and perimeter contents. The research took place at the State School of Elementary and High School Profº Bernardino Pereira de Barros in the 9th grade class with 23 students in the municipality of Abaetetuba - Pará. With this, we aim to show the importance of teaching the History of Mathematics as an instrument of incentive and motivation in the process of teaching and learning Geometry. Our methodology was the History of Mathematics, using as a tool a sequence of activities for the teaching of area and perimeter, which was based on second-generation Didactic Engineering, evidenced by preliminary analysis, a priori analysis, experimentation and posteriori analysis and validation. In this way, we will present the data collected, by means of tables, where we had improvements in the teaching and learning process of area and perimeter, concluding that the use of Mathematical History contributes positively to this process. From this perspective, the History of Mathematics is one of the possibilities of teaching mathematics, because it brings it closer to the achievements of everyday life, giving students a greater understanding of their presence as part of society for the emergence of mathematics.
KEYWORDS: Mathematics Education. Teaching and Learning. Plane Geometry. the

History of Mathematics.

1 I INTRODUÇÃO

A geometria está presente em diferentes formas e em diversas situações em nosso cotidiano, fazendo parte da vida do ser humano desde os tempos mais remotos, tornando-se assim um dos ramos mais antigos da matemática. Com o auxílio da geometria e os conhecimentos adquiridos no dia a dia, é possível que o aluno desenvolva competências e habilidades que os ajudarão na vida escolar como também no seu cotidiano.

Compartilhando o mesmo pensamento, Passos (2000) nos mostra que a geometria é uma importante ferramenta “para a descrição e a inter-relação do homem com o espaço que vive”. Ainda para o autor, a geometria é fundamental para a formação do aluno, pois é a “parte da matemática mais intuitiva, concreta e ligada a realidade” (PASSOS, 2000, p. 49).

Desse modo, seu conhecimento se torna indispensável para o desenvolvimento do ser humano, pois ajuda na compreensão do mundo, desenvolve o raciocínio lógico e proporciona um melhor entendimento de outras áreas do conhecimento.

Com esse entendimento, a História da Matemática é um instrumento que proporciona ao aluno uma melhor compreensão, pois Fossa (2008), relata que a História da Matemática traz múltiplas vantagens na construção de atividades, onde vai propiciar ao aluno a participação no desenvolvimento matemático, com isso aumentará o interesse dele sobre o estudo o que vai fazer com se tenha um melhor desempenho.

Segundo Fossa (2008)

> A história proporciona ao aluno o significado da investigação matemática proposta e, em consequência, a mesma deixa de ser algo misterioso e ininteligível. Ao enfocar elementos pré-formais e, frequentemente, aplicados da matemática, a história leva o aluno a pensar sobre conceitos matemáticos sem a linguagem técnica que poderá ser uma barreira inicial ao seu entendimento (FOSSA, 2008, p. 13).

Assim caracterizado por Mendes (2010), a investigação em História da Matemática em sala de aula, pode vim a desenvolver a criatividade dos alunos, estimulando a aprendizagem dos mesmos, onde isso venha a acarreta na formulação de ideias matemáticas através de pesquisas, cujo os alunos cheguem a sentir-se como descobridores de cada tema investigado.

Para Mendes (2010)

> [...], os estudantes desenvolverão sua autoconfiança de forma

> crescente e amadurecida, principalmente nos momentos de investigação e na socialização de suas experiências com os outros colegas envolvidos no processo investigatório em sala de aula. Isso implicará formar estudantes mais criativos e capazes de encorajar-se na demonstração dos princípios matemáticos percebidos durante a investigação histórica. Isso certamente evidenciará a natureza viva e globalizante da Matemática incluída na investigação, por meio de conexões entre a Matemática e outras disciplinas acadêmicas que podem fornecer ligações entre o contexto externo e a sala de aula (MENDES, 2010, p. 41- 42).

Nesse sentido, a presente pesquisa objetiva mostrar a importância do ensino da História da Matemática como instrumento de incentivo e motivação no processo de ensino e aprendizagem de Geometria, para de área e perímetro, onde os resultados foram satisfatórios e serão mostrados por meio de quadros.

Compreendendo a relevância de se almejar maneiras de se ensinar a Geometria, buscamos por meio da História da Matemática uma alternativa metodológica, assim também como autores que afirma a relevância do uso da mesma em sala de aula.

Com isso, o conhecimento matemático pode ser apresentado aos educandos como historicamente construído e em permanente transformação. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo (BRASIL, 1998).

2 I A GEOMETRIA E SEU PERCURSO

Os primeiros conhecimentos geométricos surgiram em meio as necessidades encontradas pelo homem em compreender melhor o ambiente onde vivia. Segundo Eves (1997), os conceitos mais primitivos encontrados sobre a geometria são muito antigos, originando-se através de simples observações de figuras, reconhecendo e comparando formas e tamanhos. Daí a origem da palavra “geometria” do grego geo = terra + metria = medida que significa medição de terra.

> As primeiras considerações que o homem fez a respeito da geometria são, inquestionavelmente, muito antigas. Parecem ter se originado de simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas, comparar formas e tamanhos (EVES, 1997, p. 1).

Ainda para Eves (1997), a necessidade do homem em delimitar terras ocasionou o surgimento de uma geometria que se caracterizava pelo traçado de desenho de formas, fórmulas, cálculo de medidas de comprimento de áreas, volumes, etc. Tendo assim, nessa época, o desenvolvimento da noção de figuras geométricas como, retângulo, quadrado, triângulos e outros conhecimentos simples, como noção de vertical, paralela e perpendicular, teriam aparecidos pela construção de muros e moradias.

> Inúmeras circunstâncias da vida, até mesmo do homem mais primitivo, levavam a um certo montante de descobertas geométricas subconscientes. [...]. A necessidade de delimitar a terra levou à noção de figuras geométricas simples, tais como retângulo, quadrado e triângulos. Outros conceitos geométricos simples, como as noções de vertical, paralela e perpendicular, teriam sido sugeridos pela construção de muros e moradias (EVES, 1997, p. 1-2).

É notório que, no decorrer da história, a geometria sempre teve grande influência e importância, ajudando o homem em suas descobertas. Hoje vemos que, mesmo com o passar do tempo, sua relevância não se limitou e continua sendo um componente essencial para a construção do conhecimento.

3 I O ENSINO DA GEOMETRIA

A partir do movimento da matemática moderna (década de 70), o ensino da geometria foi colocado em segundo plano. Dessa maneira os livros didáticos reservam nos últimos capítulos os conteúdos referentes a esse campo.

No Brasil, Pavanello (1989, p.166) afirma que o ensino de geometria se dá de forma diferenciada "a tradicional dualidade do ensino brasileiro até que poderia, em termos de ensino da matemática, ser colocada como: escola onde se ensina geometria (escola para elite) e escola onde não se ensina geometria (escola para o povo)". Pois para o autor, o abandono do ensino de geometria se inicia primeiro nas escolas públicas e se torna mais intensa do que nas escolas privadas, diferenciando-as entre ensino para a elite e ensino para o povo.

Como afirma os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática para os anos finais, a geometria é um elemento importante para resolvermos situações do nosso cotidiano, que também podemos levar para fora da escola. Essa prática de ensino pode ser situada de várias atividades que o aluno realiza no seu dia a dia, as quais envolvem matemática:

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema [...]. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc (BRASIL, 1998, p. 51).

Ainda para os PCNs, a geometria "desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive" (BRASIL, 1998, p. 122), por esse motivo deve ser ensinada e não excluída da grade curricular do aluno.

No ensino fundamental é importante que o conhecimento matemático em seus diversos campos possibilitem o aluno a relacionar observações empíricas as representações do mundo real, para que assim os alunos se tornem capazes de fazer deduções e suposições.

> No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas (BRASIL, 2017, p. 263).

Dessa forma, a contextualização se mostra importante para que essas observações se tornem possíveis por situações cotidianas do aluno, onde ele consegue observar por si só o quanto a matemática se faz presente ao seu redor.

No ensino fundamental, anos finais, é interessante destacar algumas habilidades a serem alcançados quanto o ensino de geometria que vão desde a capacidade de demonstração simples do assunto abordado até a construção do raciocino hipotético-dedutivo do aluno.

> Esses conceitos devem ter destaque nessa fase do Ensino Fundamental, de modo que os alunos sejam capazes de reconhecer as condições necessárias e suficientes para obter triângulos congruentes ou semelhantes e que saibam aplicar esse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo (BRASIL, 2017, p.270).

Com isso, a geometria não deve se limitar apenas em aplicação de fórmulas de cálculo de área e volume, como também a aplicação numérica de teoremas. Visto que desde os tempos mais antigos, cálculos de áreas, por exemplo, eram realizados por deduções sem a utilização de fórmulas, obtendo um resultado verídico.

Essas habilidades podem ser alcançadas por ferramentas e métodos de ensino diferente do tradicional, onde irá possibilitar que o aluno crie seu próprio pensamento crítico assim também como o seu conceito sobre o que está sendo ensinado.

4 | ÁREAS E PERÍMETROS

No ensino fundamental, anos finais, observamos a geometria nos capítulos finais dos livros didáticos, o que acaba prejudicando seu ensino, pois o tempo se apresenta curto, tornando-se superficial, principalmente no que se refere aos conceitos de área e perímetro de figuras planas.

O livro é um dos recursos ou o único que o professor utiliza para ensinar, ele apresenta de forma direta o conteúdo de área e perímetro, não há um conceito voltado para uma aplicação do cotidiano do aluno. O que se mostra são as figuras seguidas de suas fórmulas para cálculo de área e perímetro. Por não haver essa contextualização e distinção, os alunos acabam misturando área com perímetro, ou que a área é a soma de dois lados.

O que observasse quanto ao ensino de área e perímetro, é que o aluno apresenta certa dificuldade em aprender o seu conteúdo, causando assim uma confusão durante o seu estudo. Segundo Lima (2002) é preciso evidenciar a diferença entre as noções de área e perímetro, para então evitar tais confusões.

> [...] o cálculo de área e perímetro é usualmente ensinado através de fórmulas de área, que são funções que fornecem a medida de área, em termos do comprimento de segmentos associados a figura. Este procedimento é indispensável para o cálculo de áreas, mas, em sua utilização, tem sido verificada persistentes dificuldades entre os alunos. Uma delas é a confusão entre área e perímetro; outra é a extensão indevida da validade das fórmulas de área: a área de um paralelogramo é o produto dos lados (LIMA apud BELLEMAIN e LIMA, 2002, p.27).

Para o estudo de área e perímetro de um objeto, é preciso primeiramente compreender a noção de espaço e forma. Esse conhecimento pode ser repassado através do uso de matérias concreto, onde é preciso que o aluno consiga distinguir, por exemplo, o quadrado do retângulo assim também como suas propriedades, pois temos que ambos são quadriláteros possuindo em comum seus ângulos, para que, a partir daí possa efetuar o cálculo.

5 | O USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁTICO

A afirmação de que a Matemática é “uma ciência voltada unicamente para os número e grandeza” já não encontra mais adeptos desde as últimas décadas do final do século passado, registra Boyer (2002). Hoje já é notável que a Matemática vai além desses aspectos e sofre mutações conforme as necessidades sociais dos indivíduos, de acordo com Rosa Neto (1988), pois se desenvolve e evolui. Essa ideia é ratificada por Saito e Dias (2013) quando afirmam “que o conhecimento matemático afigurou-se de forma diferenciada em determinados momentos da história, atendendo a uma necessidade não só interna, como, também, a uma demanda extramatemática.”

A História da Matemática como instrumento didático, é um método de conhecimento essencial para que o aluno compreenda o mundo. No entanto, o ensino da Matemática tem passado por certas dificuldades já que as maiorias dos alunos não gostam dessa disciplina e os professores não fazem nada para mudar essa concepção. Segundo Schimidt, Pretto e Leivas (2006):

> Ela é descrita como um campo de conhecimento fundamental para que o ser humano compreenda o mundo. Porém, o ensino dessa disciplina tem passado por certos problemas quando os alunos dizem que não sabem ou não gostam dela ou quando os professores relatam sobre sua prática de ensino (SCHIMIDT, PRETTO E LEIVAS, 2006, p. 4).

Outra forma de participação da História, manifestada na proposta dos PCNs para o ensino da Matemática, diz respeito ao uso de problemas históricos, pois considera que os conceitos matemáticos devem ser mostrados mediante a exploração de problemas, ou seja, situações em que os alunos precisem desenvolver estratégias para resolvê-las.

Para D'Ambrosio (1999), em Matemática é impossível discutir práticas educativas que se fundamentem na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições sem recorrer à História, que compreende o registro desses fundamentos. Em suas palavras: "desvincular a Matemática das outras atividades humanas é um dos maiores erros que se pratica particularmente na Educação Matemática".

Além do mais, é quase impossível dissociar as raízes da Matemática com a própria história da humanidade, afirma D'Ambrósio (1999), reforçando, assim, o valor de ensinar a disciplina recorrendo a fundamentos históricos e suas interpretações. Lopes e Ferreira (2013) discorrem com propriedade a respeito da utilização da História da Matemática como recurso metodológico de ensino, à medida que essa abordagem possibilita aulas mais motivadoras, dinâmicas, interessantes, pois ao perceber a fundamentação histórica da matemática, o professor tem em suas mãos ferramentas para mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos, fugindo das repetições mecânicas de algoritmos.

Por esse motivo, ao utilizar o uso da História da Matemática, o professor deverá verificar o seu objetivo, dinamizando a aula, para que os conteúdos ministrados façam sentido. Sendo primordial que o professor consiga repassar aos estudantes a compreensão de que a Matemática está em todas as situações da vida do ser humano, pois suas raízes estão assentadas no cotidiano e são indispensáveis ao desenvolvimento e conquista tecnológica (SANTOS, 2006).

Sobre esse assunto, Mendes (2001) afirma que é importante que o professor conheça profundamente o tópico histórico que deseja apresentar aos alunos, para que possa segurar as discussões engendradas por esse, na realização das atividades. A falta de esclarecimento sobre o conteúdo histórico pode prejudicar o desenvolvimento das atividades e consequentemente influenciar no resultado dos objetivos previstos.

6 I METODOLOGIA

O trabalho foi desenvolvido na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Prof. Bernardino Pereira de Barros, localizado na Rua Magno de Araújo, 1485 na cidade de Abaetetuba-PA, em uma turma do 9º ano composta por 23 alunos. Para realização da pesquisa foi preciso 24 aulas, a qual levou um mês e duas semanas começando no mês de novembro e terminando na terceira semana de dezembro, os resultados foram coletados por meio de uma sequência de atividades e balizado na engenharia didática que segundo geração, (ALMOULOUD 2007 apud DE ALMEIDA, 2011, p.5), ela "se apoia em um esquema experimental baseado na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino, além da validação, que é a comprovação ou não das hipóteses assumidas no estudo, mediante as análises a priori e a posteriori."

A seguir será apresentado os momentos que explicarão como foi apresentado e desenvolvido o trabalho.

- Inicialmente, buscamos analisar os conhecimentos que os alunos possuíam sobre o assunto, por meio de uma apostila contendo cinco questões sobre área e perímetro.

- No segundo, foi apresentado a turma um vídeo que descrevia a história da geometria. Nele, era possível observar a origem da geometria, o porque ela surgiu, o que influenciou sua origem, sua aplicação no dia a dia, seu desenvolvimento até os dias atuais para que, desse modo o aluno se interessasse e motivasse em buscar mais conhecimento sobre a matemática.

- Já no terceiro momento adentramos a parte das figuras planas apresentando-as com o auxílio de um slide. Como a maioria dos alunos ainda apresentava dúvidas em identificar e caracterizar as figuras geométricas planas, foi sucinto o auxílio do professor para que alcançássemos todos da turma. Após esclarecido o assunto, mostramos para os alunos as figuras que abrangeríamos durante nossos cálculos, triangulo, retângulo, quadrado, losango e trapézio. Em continuidade, explicamos o significado de geometria plana e os conceitos que ela envolve, ressaltando as figuras a serem trabalhadas, suas definições e classificação quanto ao lado e ângulo.

- No quinto momento foi utilizado o ladrilhamento como ferramenta, pois fora iniciado os cálculos de área e perímetro.

- Após o uso do ladrilhamento, aplicamos o Gibi. Essa ferramenta foi organizada por nós com um cenário da História em Quadrinhos da turma da Mônica. Como ele seria dado aos alunos, buscamos agrupar tudo que fora apresentado durante nossa sequência de atividades, desde a história da geometria até os problemas sobre área e perímetro.

Imagem 1: História em Quadrinhos

Fonte: Os autores (Dezembro – 2018)

Imagem 2: História em Quadrinhos

Fonte: Os autores (Dezembro – 2018)

Imagem 3: História em Quadrinhos

Fonte: Os autores (Dezembro – 2018)

Após a distribuição do Gibi, explicamos a finalidade dessa ferramenta que era de ensinar os alunos a calcularem a área e perímetro de figuras, agora com valores maiores do que os usados no ladrilhamento.

- Por fim, foi realizada um teste a posteriori, com o intuito de verificar se a sequência de atividades utilizando a História da Matemática contribuiu no processo de ensino e aprendizagem.

7 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante a aplicação da sequência de atividades foi perceptível muitas dificuldades, uma delas centrava-se na utilização dos instrumentos matemáticos, o transferidor e compasso. Os alunos não conseguiam manipulá-los para encontrar os ângulos das figuras, sendo que ele é indispensável no ensino da geometria plana.

A seguir apresentaremos o quadro com os resultados dos testes a priori e a posterioi que foram aplicados durante o projeto e mostrarão o desempenho obtido neste processo.

	Certo				Errado			
	Área		Perímetro		Área		Perímetro	
	Priori %	Posteriori %	Priori %	Posteriori %	Priori %	Posteriori %	Priori %	Posteriori %
Q. 1	0	78	43	100	100	12	57	0
Q. 2	9	100	87	100	91	0	13	0
Q. 3	0	100	13	78	100	0	83	12
Q. 4	0	87	9	87	100	13	91	13
Q. 5	0	100	83	100	100	0	17	0

Quadro 1 – Resultados dos testes

Fonte: Os autores (Dezembro – 2018)

Observamos que após a sequência de atividades foi possível amenizar os erros encontrados na aprendizagem de área e perímetro, pois os alunos já haviam entendido o assunto, assim conseguiam associar as fórmulas às suas figuras. Dessa forma podemos perceber que aumentou o percentual de acertos tanto em área quanto em perímetro, pois o sucesso mínimo corresponde a 78% o que a priori era equivalente a 0%. Sendo assim, constatamos que o trabalho realizado com a turma foi significativo, trazendo resultados positivos, pois o número de acertos nas questões foi maior que os de erros principalmente no que se refere as questões de área.

Nessa perspectiva, a História da Matemática é uma das possibilidades de buscar outra forma de entender a matemática, pois a aproxima das realizações no cotidiano dando ao aluno uma visão maior de sua participação quanto parte da sociedade para o surgimento da matemática.

8 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, compreendemos que o ensino de geometria é de suma importância na vida de todo ser humano, pois vivemos cercados de figuras e formas geométricas. É com a geometria que o educando diferencia o espaço e forma de tudo que a rodeia.

É evidente que a História da Matemática é fundamental na vida dos seres humanos, por isso criamos uma sequência de atividades de modo que auxiliasse o professor na explicação da geometria plana nos conteúdos de área e perímetro. Nosso objetivo, ao utilizar essa ferramenta foi alcançado, pois, despertou no aluno o interesse pelo contexto histórico da Matemática assim também como ajudá-lo a desenvolver seu próprio conceito sobre os assuntos de uma forma diferente e divertida, por meio da História da Matemática.

Assim, almejamos que a História da Matemática não se limite apenas como uma disciplina presente na vida acadêmica do professor, mas que este veja ela como uma alternativa metodológica de ensino explorando-a na sala de aula com o aluno.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. et al. **A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos**. Revista Brasileira de Educação. Rio de Janeiro: ANPEd, nº 27, p. 94-108, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília**: MEC / SEF, 1998.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 2002.

BELLEMAIN, P.; LIMA, P. **Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental**. Ed. Geral: John A. Fossa. Natal: SBHMat, 2002.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a base. Brasília: MEC, 2017.

D´AMBROSIO, Ubiratan. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.(org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: UNESP, 1999.

EVES, H.. **Introdução a História da Matemática**. Campinas. Editora: Unicamp, 1997.

FOSSA, John A. **Matemática, História e Compreensão**. Revista Cocar. UEPA, v.2. 2008.

LOPES, L. S.; FERREIRA, A. L. A. **Um olhar sobre a história nas aulas de matemática**. ABAKÓS – Instituto de Ciências Exatas e Informática. Belo Horizonte, v. 2, n. 1. 2013.

MENDES, I. A. **O uso da história da matemática: reflexões teóricas e experiências.** Belém: EDUEPA, 2001.

MENDES, Iran Abreu. **A Investigação Histórica na Formação de Professores de Matemática**. Revista Cocar. UEPA, v.2. 2008.

PASSOS, C.M.B. **Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula**. Tese de doutorado (Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de educação), 2000

PAVANELO, M. R. (1989) **O abandono do ensino de Geometria: Uma visão histórica**. Dissertação (Mestrado em Educação: Metodologia do Ensino) Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas/SP.201

ROSA NETO, **Ernesto. Didática da matemática**. V. 11 - São Paulo: Editora Ática, 1988.

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. **Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI**. Ciência e Educação. Bauru, n. 1, v. 19, 2013

SANTOS, D.A.N. **A Formação de Professores em de Escola da Rede Pública Estadual em Serviço para o Trabalho com Projetos utilizando as Tecnologias de Informação e Comunicação**. Dissertação de Mestrado em Educação. Faculdade de Ciências e Tecnologia UNESP, Presidente Prudente, 2006.

SCHMIDT, G. M.; PRETTO, V.; LEIVAS, J. C. P. **História da Matemática como recurso didático-pedagógico para conceitos geométricos**. Revista Caderno Pedagógico: **Lajeado.** V 13. N 1. 2016.

DE ALMEIDA, Talita Carvalho Silva. **Geometria dinâmica: um caminho para o estudo Geometria Espacial** - XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – 2011. p.8.

CAPÍTULO 9

A RESOLUÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS EM CONTEXTOS NÃO FORMAIS DE APRENDIZAGEM POR ALUNOS DO ENSINO ELEMENTAR

Data de aceite: 17/11/2020

Data de submissão: 06/10/2020

Maria de Fátima Pereira de Sousa Lima Fernandes
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo
Viana do Castelo, Portugal
https://www.dropbox.com/s/fq9s6mk4ldzj4uo/CVRecente_Fatima%20Fernandes.doc?dl=0

Maria Isabel Piteira do Vale
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo
Viana do Castelo, Portugal
https://orcid.org/0000-0001-6155-7935

RESUMO: Os contextos não formais podem proporcionar excelentes experiências de aprendizagem, mas os alunos estão expostos a fatores externos que podem interferir no seu desempenho aquando da realização das tarefas. Este texto reflete parte de um estudo mais abrangente, de natureza qualitativa interpretativa, que decorreu em três contextos não formais de aprendizagem. Para cada contexto construíram-se e implementaram-se trilhos matemáticos com alunos do ensino elementar, de oito e nove anos de idade, com o objetivo de analisar o envolvimento e o desempenho dos mesmos nas resoluções das tarefas propostas. Neste documento discute-se o desempenho dos alunos nas resoluções de três tarefas de matemática de um desses trilhos e a influência de alguns fatores externos que pareceram interferir nesse desempenho. Os dados provêm das produções escritas dos alunos, observações, entrevistas e registos fotográficos e áudio. Os resultados mostram que embora os alunos estejam em ambientes com diversos elementos que podem interferir na sua concentração e resolução das tarefas, envolvem-se em discussões pertinentes e recorrem frequentemente a elementos do contexto para compreender a tarefa, testar possibilidades, argumentar as suas ideias e explicar aos colegas. Se a tarefa permitir, apresentam resoluções diversificadas. A ansiedade para iniciar a experimentação parece ter um efeito negativo na compreensão da tarefa e a vontade de avançar rapidamente para as tarefas seguintes contribui para que apresentem algumas respostas incompletas.

PALAVRAS-CHAVE: Tarefas matemáticas; Contextos não formais de aprendizagem; Trilhos matemáticos.

SOLVING MATHEMATICAL TASKS IN NON-FORMAL LEARNING CONTEXTS BY STUDENTS FROM THE PRIMARY SCHOOL

ABSTRACT: Non-formal contexts can provide excellent learning experiences, but students are exposed to external factors that may interfere with their performance when performing tasks. This text reflects part of a more comprehensive, qualitative interpretive study, which took place in three non-formal learning contexts. For each context, mathematical trails were built and implemented with elementary school students, aged between eight and nine, with the aim of

analyzing their involvement and performance in solving the proposed tasks. This document discusses students' performance in solving three math tasks on one of these math trails and the influence of some external factors that seemed to interfere with this performance. The data comes from the students' written productions, observations, interviews and photographic and audio records. The results show that although students are in environments with different elements that can interfere with their concentration and task resolution, they engage in pertinent discussions and often resort to elements of the context to understand the task, test possibilities, discuss their ideas and explain to colleagues. If the task allows, they have several resolutions. Anxiety to start experimentation seems to have a negative effect on understanding the task and the desire to move quickly to the next tasks contributes to some incomplete responses.
KEYWORDS: Math tasks; Non-formal learning contexts; Math trails.

1 I INTRODUÇÃO

É indiscutível que há muitos contextos não formais de aprendizagem que, pela sua riqueza e diversidade, oferecem oportunidades ímpares para a construção e aplicação de conhecimentos escolares. Porém, há múltiplos fatores externos que podem interferir no desempenho dos alunos quando resolvem as tarefas nesses contextos. Estes fatores são, por vezes, difíceis de controlar. Por um lado, porque as paredes da "sala de aula" não existem ou são fáceis de transpor. Os alunos não estão confinados a uma área fechada nem os espaços estão reservados aos alunos. Por outro, porque as comodidades para a resolução das tarefas raramente são as ideais. Além disso, os alunos estão sujeitos a mudanças, decorrentes da necessidade de se deslocarem, que os colocam perante uma grande probabilidade de enfrentarem situações novas e inesperadas que podem afetar a sua concentração e o seu equilíbrio emocional.

Conscientes destes problemas, deparámo-nos com duas questões: 1. Como é que os alunos resolvem tarefas matemáticas em contextos ao ar livre? 2. Que fatores externos podem interferir no desempenho dos alunos?

Neste trabalho analisam-se as resoluções de três tarefas realizadas por alunos de oito e nove anos, do 3.º ano de escolaridade, ao longo de um trilho matemático. Uma das tarefas incide sobre um dos processos matemáticos e não envolve conteúdos específicos do ano de escolaridade em causa. As outras duas envolvem conteúdos do domínio da geometria e medida. Pretende-se perceber que estratégias utilizam os alunos na resolução dos problemas, como mobilizam os conteúdos trabalhados na sala de aula e que fatores externos poderão interferir no desempenho.

2 | A IMPORTÂNCIA DOS CONTEXTOS NÃO FORMAIS NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A aprendizagem fora da sala de aula tem sido associada a um conjunto de benefícios para a formação dos indivíduos desde os primeiros anos de vida. Por isso, alguns países do Norte da Europa e de outros continentes têm incentivado o ensino e aprendizagem de conteúdos escolares em contexto não formais.

As conclusões apresentadas no relatório publicado pelo OFSTED (2008) sobre a avaliação de atividades realizadas fora da sala de aula por jovens em idade escolar, mostram que estas experiências contribuem para melhorar a motivação, os resultados académicos e outros aspetos importantes relacionados com o desenvolvimento pessoal, social e emocional. Estes resultados encontram eco noutros estudos (e.g. Eshach, 2007; Fägerstam & Samuelsson, 2014) que se debruçaram sobre a influência de experiências fora da sala de aula na aprendizagem de conteúdos de Ciências e Matemática.

Com vista à realização de aprendizagens eficazes, os princípios da educação matemática previstos pelo NCTM (2014) sugerem que os alunos tenham acesso a recursos e experiências de aprendizagem individuais e coletivas que lhes permitam encontrar sentido para os assuntos abordados em sala de aula, fazer ligações entre diversas áreas de estudo e com a realidade. O contributo das experiências fora da sala de aula pode ser significativo para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos e para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, sobretudo se houver articulação entre as abordagens realizadas dentro e fora da escola. Esta articulação pode ajudar os alunos a compreender o mundo que os rodeia, a sentir a aprendizagem mais interessante e relevante. Pode ajudar também a construir uma visão mais ampla dos conteúdos curriculares e a compreendê-los de forma consistente e duradoura, como defende o manifesto *Learning Outside de Classroom (*DfES, 2006).

Os trilhos matemáticos, que podem ser definidos como um conjunto de paragens realizadas durante um percurso pré-definido, nas quais os participantes resolvem tarefas matemáticas que emergem do meio envolvente (Cross, 1997), são experiências de aprendizagem que podem ocorrer em contextos não formais. Constituem oportunidades para os alunos aplicarem, em contexto real, não só o que aprenderam na sala de aula, mas também conhecimentos informais do dia-a-dia e tomar consciência da aplicabilidade dos mesmos em situações concretas (e.g. Fernandes, 2019; Richardson, 2004). Estas experiências contribuem para a construção ou consolidação do significado de conceitos ou processos matemáticos de forma consistente (Wager, 2012), para o conhecimento e interpretação da realidade de forma mais crítica (Bonotto & Bassa, 2001) e para motivarem e favorecerem o envolvimento dos alunos incluindo os mais relutantes (Patterson, 2009; Fernandes, 2019).

3 I AS TAREFAS MATEMÁTICAS NO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

É inquestionável a importância atribuída às tarefas matemáticas no ensino e aprendizagem desta área curricular. São considerados instrumentos mediadores que propiciam o envolvimento dos alunos e estimulam a interação entre estes e os recursos, o ambiente, os colegas ou o professor (Margolina, 2013). O modo como as tarefas são apresentadas, a interação que proporcionam e as especificidades que as caraterizam são aspetos que vão influenciar a aprendizagem matemática que decorre da respetiva resolução (Mason & Johnston-Wilder, 2006; Stein & Smith, 1998). Na verdade, as caraterísticas de cada tarefa determinam as potencialidades para os alunos se envolverem cognitivamente na sua resolução. De acordo com Stein e Smith (1998), as caraterísticas das tarefas permitem categorizá-las, das menos complexas para as mais complexas, da seguinte forma: memorização, procedimentos sem conexões entre conceitos ou significados, procedimentos com conexões entre conceitos ou significados e tarefas para fazer matemática.

Para compreender uma ideia ou um conceito é fundamental estabelecer conexões entre múltiplas representações, que são configurações que revelam algo (Goldin, 2010). As representações visuais, simbólicas, verbais, contextuais ou físicas surgem, assim, como ferramentas para a resolução de problemas e para desenvolver a capacidade dos alunos a nível da explicação e fundamentação do seu raciocínio (NCTM, 2014).

Na teoria de Bruner (1999) há três tipos de representação das ideias sobre a realidade: ativa, icónica e simbólica. A representação ativa é feita pela ação de tocar e manipular objetos. A representação icónica refere-se à capacidade de sistematizar as ideias sobre a realidade através de imagens, diagramas ou esquemas. A representação simbólica diz respeito à utilização de expressões com símbolos aos quais foi atribuído um certo significado. As representações que envolvem símbolos universalmente aceites e generalizáveis são consideradas, por Goldin (2010), complexas, abertas e modificáveis, porque as regras e símbolos convencionados permitem transformar determinadas expressões noutras.

As representações podem ser externas ou internas (Goldin, 2010). As primeiras são observáveis em suporte físico (papel, ecrã de computador ou outros). As representações internas não se conseguem observar, por isso é difícil caracterizá-las e compreender o modo como elas se formam.

Um ensino eficaz, requer práticas eficazes, sendo, por isso, fundamental no ensino e aprendizagem da matemática: estabelecer objetivos focados na aprendizagem, implementar tarefas promotoras do raciocínio e a resolução de problemas, usar e relacionar representações, facilitar um discurso com sentido, colocar questões intencionais, construir fluência procedimental com base na compreensão de conceitos, apoiar o esforço produtivo na aprendizagem e usar evidências do pensamento dos alunos (NCTM, 2014).

4 | METODOLOGIA

Este trabalho decorre de uma investigação mais ampla, de natureza qualitativa interpretativa, com design de estudo de caso, que envolveu a conceção e implementação de três trilhos matemáticos em contextos não formais de aprendizagem com alunos do 3.º ano de escolaridade, com idades entre os oito e os nove anos.

Antes de conceber e implementar os trilhos, a investigadora, não docente da turma participante no estudo, acompanhou os alunos no ambiente de ensino e aprendizagem habitual. Numa primeira fase, com o objetivo de conhecer comportamentos e práticas instituídas na sala de aula, observou-os na resolução de tarefas matemáticas com orientação da docente. Numa segunda fase, na semana imediatamente antes de cada trilho, implementou um conjunto de tarefas sobre os conteúdos programáticos envolvidos no respetivo trilho com o propósito de perceber que dificuldades manifestadas na mobilização de conhecimentos. Nesta fase houve necessidade de retirar alguns tópicos programáticos porque, ao contrário do que estava planificado, ainda não tinham sido abordados.

As tarefas dos trilhos foram construídas em torno de elementos do património do meio envolvente. Privilegiou-se a diversidade a nível do grau de abertura e de desafio e procurou-se abarcar a globalidade dos tópicos programáticos previstos para o 3.º ano de escolaridade.

Os alunos participaram nesta experiência em grupos de três elementos. Cada, grupo foi acompanhado por um estagiário do 2.º ano da Licenciatura em Educação Básica, que transportou material suplente, registou dados, leu as orientações do guião e esclareceu dúvidas. A investigadora acompanhou os grupos que tinha previsto estudar de forma mais profunda.

Cada participante recebeu material de escrita e um guião constituído, em média, por 15 tarefas e 30 questões. Cada tarefa emergia de um breve texto informativo sobre o património, e era seguida por uma pista que orientava para o local e assunto da próxima tarefa.

Este trabalho foca-se apenas numa parte de um trilho realizado num contexto urbano. As primeiras tarefas foram resolvidas em espaços amplos, o que facilitou o distanciamento dos grupos. Estes prosseguiram de forma desencontrada pelo facto de terminarem as tarefas em momentos diferentes.

Os dados aqui apresentados basearam-se em registos escritos, como resoluções dos alunos e notas de campo, e em registos em fotografia e áudio, como conversas e entrevista.

Selecionaram-se as resoluções de três tarefas (abaixo apresentadas). A primeira pelo facto de a resolução ter resultado numa diversidade de representações. As restantes por ilustrarem a aplicação de conteúdos programáticos em situações da realidade, conteúdos quase todos introduzidos no último período do 3.º ano de escolaridade.

Para cada tarefa selecionada, analisa-se o desempenho dos alunos aquando da respetiva resolução, incluindo alguns fatores externos que interferiram.

5 | ALGUNS RESULTADOS

Nesta secção, como já foi referido acima, apresentam-se apenas três tarefas.

Na figura 1, encontra-se o enunciado de uma tarefa que surge na sequência da abordagem histórica do chafariz mais popular da localidade.

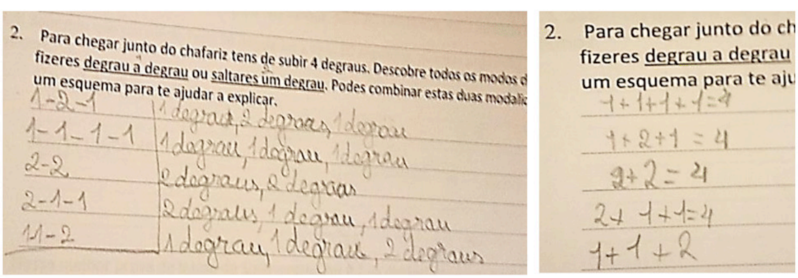
Para chegares ao chafariz tens que subir degraus. Descobre todos os modos de subir se fizeres degrau a degrau ou saltares um degrau. Podes combinar estas duas modalidades. Usa um esquema para te ajudar a explicar.

Figura 1. Enunciado da Tarefa do Chafariz

A resolução desta situação implica, sobretudo, recorrer a processos matemáticos. É esperado que os alunos descubram os diferentes modos de passar pelos quatro degraus, sem saltar mais do que um degrau de cada vez. Teriam que ser aceites resoluções que considerassem retrocessos, porque nada foi mencionado sobre essa possibilidade. No entanto, nenhum grupo considerou essa hipótese. Antes de registarem, todos os alunos foram ao local experimentar espontaneamente (figura 2), à exceção do aluno que apresenta a resolução da figura 5. De acordo com Bruner (1999), estamos perante a representação ativa.

Figura 2. Alunos (grupos1 e 4) a experimentarem diferentes formas de subir até ao chafariz.

Nas duas resoluções apresentadas na figura 3, os alunos usaram como estratégia a elaboração de uma lista com as possibilidades de decompor o número de degraus, na soma de todas as parcelas possíveis no universo dos números naturais: 1+1+1+1, 1+2+1 e 2+2. Na situação que envolve números 1 e 2 consideraram ainda a ordem pela qual as parcelas podem aparecer: 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2. Segundo a tipologia de Bruner (1999), estamos perante a representação simbólica, uma vez que os alunos usam linguagem numérica e ou corrente para representar as ideias.



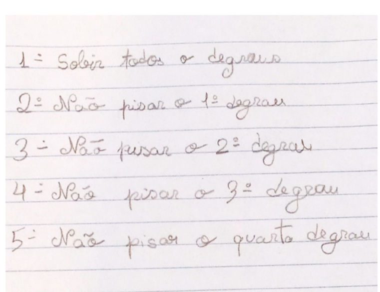
2. Para chegar junto do chafariz tens de subir 4 degraus. Descobre todos os modos d
fizeres degrau a degrau ou saltares um degrau. Podes combinar estas duas modali
um esquema para te ajudar a explicar.

1-2-1	1 degrau, 2 degraus, 1 degrau
1-1-1-1	1 degrau, 1 degrau, 1 degrau
2-2	2 degraus, 2 degraus
2-1-1	2 degraus, 1 degrau, 1 degrau
1-1-2	1 degrau, 1 degrau, 2 degraus

2. Para chegar junto do ch
fizeres degrau a degrau
um esquema para te aju

1+1+1+1=4
1+2+1 = 4
2+2 = 4
2+1+1=4
1+1+2

Figura 3. Algumas representações simbólicas apresentadas (pela aluna MC do grupo 1, à esquerda, e pela aluna LG do grupo 2, à direita)



1º Subir todos os degraus
2º Não pisar o 1º degrau
3º Não pisar o 2º degrau
4º Não pisar o 3º degrau
5º Não pisar o quarto degrau

Figura 4. Resolução do aluno DV (grupo 4)

O grupo mencionado na figura 4 listou as cinco hipóteses para aceder ao chafariz. Na primeira escreveu a possibilidade de colocar o pé em todos os degraus e, em cada uma das restantes quatro, considerou não pisar um deles. Porém, apesar do número de formas estar correto, a resolução não está. É possível não pisar um degrau de cada vez, todavia pode saltar dois degraus não consecutivos. Após saltar o 1.º degrau há duas formas de continuar o percurso: subir os restantes ou degrau a degrau ou saltar o 3.º degrau. Por outro lado, não é possível saltar o 4.º degrau, como foi tido em consideração, porque este corresponde ao topo. Quando questionado, o aluno explicou que pensava poder parar junto do chafariz e não no degrau.

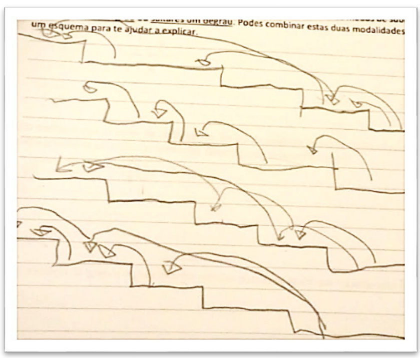


Figura 5. Resolução do aluno SC (grupo 5)

Na figura 5 encontra-se a representação icónica apresentada por um grupo. O primeiro segmento, que se encontra mais à direita, parece corresponder à base e, os restantes, aos degraus. As setas mostram se a ascensão é feita degrau a degrau ou se há salto. Apesar de o desenho ter sido elaborado após a simulação, falta a possibilidade de subir da base para o 2.º degrau e deste para o 4.º degrau. Além disso, na 1.ª, 2.ª e 4.ª situação, a contar de baixo, observa-se uma seta desenhada sobre dois degraus consecutivos, situação que embora tenha sido experimentada, não é permitida pelo enunciado.

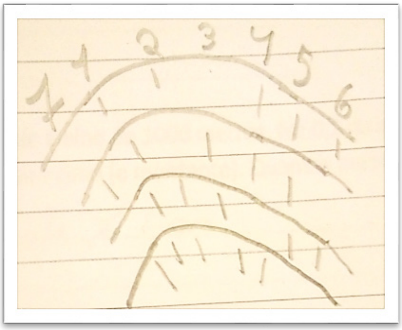


Figura 6. Resolução do aluno BP (Grupo 2)

A figura 6 corresponde à resolução de um aluno que, ao contrário dos colegas, não experimentou. Ele considerou possível saltar o 4.º degrau, que corresponde ao patamar de acesso ao chafariz. Esta ideia foi deduzida pelas respostas do aluno às questões da investigadora gravadas e apresentadas abaixo:

> *Inv.:* Podes explicar como pensaste para fazer este desenho?
>
> *BP:* Eu pensei que se fizesse um desenho [pausa] era uma forma simples [pausa] e representei com as linhas curvas os degraus e [com] os traços os degraus que pisei. Eu podia pisar todos, podia não pisar um ou podia não pisar dois, mas não podiam estar sempre…mas não podiam estar juntos.
>
> *Inv.:* Na quinta e sexta forma de chegar ao chafariz que apresentas neste desenho não tens traço no último degrau, porquê? Se saltares este degrau onde vais parar?
>
> *BP:* [O aluno fica em silêncio, olha para os colegas, depois para o chafariz e por fim para a entrevistadora e diz em voz muito baixa: pois… fiz mal] Foi porque eu pensei que era para chegar ao bordo do chafariz.

Esta última frase do aluno deixa transparecer que houve uma representação interna (Goldin, 2010) que condicionou a resolução do aluno.

Após ter sido confrontado com esta questão e reconhecer que seria necessário colocar o pé no 4.º degrau, foi experimentar as diferentes formas de subir os degraus, focando-se no último degrau (aluno à direita na imagem da figura 7). No final registaram simbolicamente, de forma semelhante às primeiras representações aqui discutidas. Neste caso, a experimentação parece ter facilitado a compreensão do aluno e interferiu na resolução do grupo.

Figura 7. Grupo 2 a simular a subida ao chafariz

Percebeu-se que as situações experimentadas foram as que os alunos registaram, embora nem sempre estivessem corretas. Esta situação parece ser provocada pela precipitação em experimentar logo após a primeira leitura do problema, verificando-se um desvio do foco nas condições impostas pelo enunciado.

Independentemente da correção das resoluções, verifica-se não só uma diversidade de representações, mas também a realização de conexões entre elas, porque a maioria das que foram registadas de forma icónica e simbólica, foram precedidas por representações ativas.

A segunda tarefa selecionada foi realizada num parque de jardins temáticos, a partir do enunciado da figura 8.

> O pavimento em calçada à portuguesa mostra alguns padrões de formas utilizadas pelos romanos que ainda são frequentes na cultura atual. Num dos padrões podes observar um quadrado dividido em dois triângulos: um branco e um preto.
> 1. Qual é a área de cada quadrado?
> 2. Se pudéssemos juntar 4 quadrados destes, conseguiríamos formar um quadrado maior com $1m^2$ de área. Justifica a tua resposta.

Figura 8. Enunciado da Tarefa do Jardim Romano

Estas questões envolvem as medidas de comprimento e as medidas de área, previstas no programa do 3.º ano de escolaridade.

Em construções com calçada à portuguesa é difícil encontrar rigor tanto nas medidas, como na construção de segmentos de reta, pelo que temos consciência de que a figura referida no enunciado não é exatamente um quadrado. Contudo, o objetivo é saber como é que os alunos mobilibilizam conhecimento relativos a esse conteúdo programático, pelo que não se valorizou o aspeto referido.

Depois da investigadora (Inv.) ler o enunciado aos elementos do grupo 5, registou-se o seguinte diálogo:

S: Precisamos de um metro.

B: Não precisamos nada.

Inv.: Por que não precisamos B?

B: Podemos contar [baixa-se e começa a contar as peças da calçada, habitualmente conhecidas por cubos]

ST: Vocês estão a contar todos os quadrados? [referindo-se aos "cubos"] É comprimento vezes largura!

B: 24,5 [referindo-se ao número de cubos de um triângulo].

Inv.: B, a pergunta é em relação ao quadrado e não ao triângulo. Já agora, que parte do quadrado é o triângulo?

B: Metade.

Inv.: Então qual é a área do quadrado se um cubo for uma unidade de área?

B: 48,5.

Inv.: Será?

ST:49!

Inv.: E se medissem com a fita?

S: [Depois de medir um lado, respondeu] É 35 vezes 4.

ST: Não!

Os alunos continuaram a medir os restantes lados.

Inv.: Se é um quadrado, quantos lados precisam de medir?

ST: Um!

B e S: Pois porque os quatro lados são iguais. Então é 35 vezes 4!

S: Isso foi como eu pus.

ST: Mas a área é lado vezes lado!

B e S: Ah, pois é.

Na segunda questão, os alunos perceberam que tinham que pensar num quadrado com dois quadrados pequenos em cada lado, mas manifestaram alguma dificuldade em chegar à resposta. Enquanto não avançavam, distraiam-se a fazer medições, pelo que a investigadora iniciou a seguinte conversa:

Inv.: Se dizem que há dois quadrados pequenos em cada lado, quanto mede o lado do quadrado grande?

S: 35 mais 35.

Inv.: E quanto dá?

S: Setenta

Inv.: Então são suficientes ou não os quatro quadrados pequenos para formar um quadrado com um metro de área?

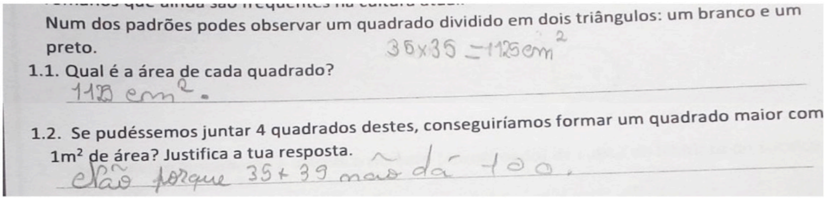
B,S e ST: Não, porque não dá 100.

A primeira parte do diálogo revela que o aluno *ST* conseguiu mobilizar melhor o conhecimento concetual e procedimental do que os colegas, que confundiram área com perímetro. É evidente a importância do papel do professor na estruturação e explicitação do pensamento dos alunos, e no desencadeamento da partilha de ideias e esclarecimento de dúvidas. Tal como em sala de aula, também na resolução de tarefas no exterior é fundamental que o professor coloque questões intencionais e facilite um discurso matemático com sentido (NCTM, 2014). Apesar de mostrarem iniciativa e menos dependência do professor ao longo da resolução, os alunos precisam de ser (re) orientados com frequência no seu raciocínio e no seu trabalho.

Relativamente à mobilização de conhecimentos previstos no Programa e Metas (ME, 2013), os alunos mediram comprimentos utilizando as unidades do sistema métrico (figura 9), relacionaram diferentes unidades de medida de comprimento do sistema métrico nomeadamente 100cm com 1m.

Figura 9. Grupo 5 a fazer medições para responder à tarefa do Jardim Romano

Reconheceram que a área de um retângulo é dada pelo produto das medidas de dois lados concorrentes e reconheceram que um metro quadrado corresponde à área de um quadrado com um metro de lado (figura 10).


Num dos padrões podes observar um quadrado dividido em dois triângulos: um branco e um preto.

$35 \times 35 = 1125 cm^2$

1.1. Qual é a área de cada quadrado?

$1125 cm^2$.

1.2. Se pudéssemos juntar 4 quadrados destes, conseguiríamos formar um quadrado maior com $1m^2$ de área? Justifica a tua resposta.

Não porque 35+39 não dá 100.

Figura 10. Resolução da tarefa do Jardim Romano pelo aluno LG (Grupo 2)

A terceira tarefa, cujo enunciado se apresenta na figura 11, também foi realizada no parque de jardins temáticos.

Observa a vedação que se encontra atrás e ao lado da cascata.
1. Que elementos geométricos (sólidos e polígonos) consegues identificar?
2. Para construir a cascata deste jardim foram necessários vários tratores de rachão (pedra). O maior socalco gastou cerca de 4500 kg e cada um dos outros gastou menos 500kg do que o que está imediatamente abaixo dele.
   Quantas toneladas de pedra foram gastas em toda a cascata?

Figura 11. Enunciado da tarefa do Jardim Renascença

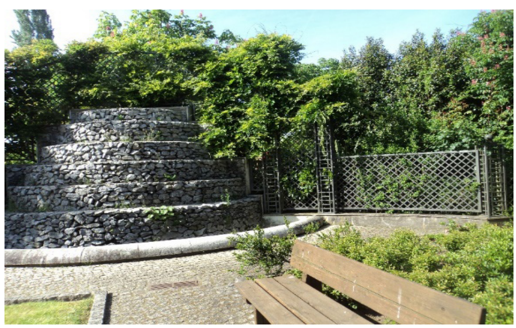
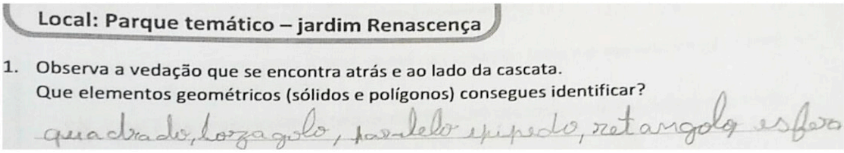


Figura 12. Contexto da tarefa do Jardim Renascença

A resolução da primeira questão envolve a aplicação de conhecimentos do domínio da geometria e medida do 3.º ano e de anos anteriores. Na vedação referida, visível na figura 12, observam-se figuras simples como triângulos, retângulos, incluindo quadrados, losangos e pentágonos não regulares. Existem figuras compostas por outras, nomeadamente paralelogramos, trapézios e diversas figuras não regulares. Encontram-se, ainda, paralelepípedos retângulos e esferas, sendo esta última a única que integra o programa do 3.º ano. Os sólidos geométricos, o retângulo e o losango foram identificados facilmente, mas apenas alguns identificaram quadrados, como é o caso da resolução apresentada na figura 13.

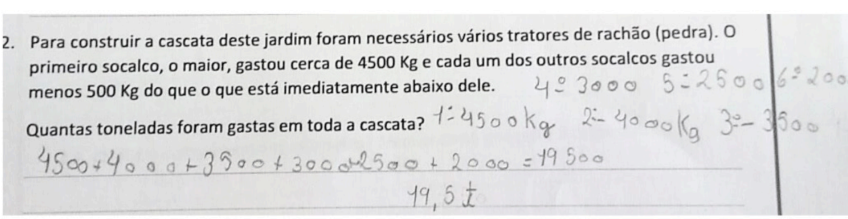

Local: Parque temático – jardim Renascença

1. Observa a vedação que se encontra atrás e ao lado da cascata.
Que elementos geométricos (sólidos e polígonos) consegues identificar?
quadrado, lozangolo, paralelo epipedo, retangolo esfera

Figura 13. Resolução da questão 1 da tarefa do Jardim Renascença pelo aluno LG (Grupo 2)

Registaram-se dificuldades em identificar figuras irregulares e em reconhecer quadrados quando dois dos seus lados não estão na horizontal. Acresce a dificuldade em distinguir quadrados de losangos não quadrados. Quando confrontados com a possibilidade de serem todos quadrados, os alunos certificavam-se apenas se os lados da mesma figura tinham o mesmo comprimento e concluíam, por vezes incorretamente, que todos os losangos eram quadrados.

A resolução da segunda questão requeria o cálculo da massa da pedra e a conversão da soma das massas de quilogramas para toneladas. Esta tarefa surgiu quase na fase final, quando os alunos já acusavam algum cansaço e desconforto com o calor, pelo que foi necessário colocar questões para desencadear o início da resolução. De qualquer modo, apesar de ser um conteúdo abordado muito recentemente, não se registaram dificuldades na compreensão da questão nem na mobilização de conhecimentos. Quase todos recorreram ao cálculo mental e registaram diretamente os valores parcelares (figura 14) e a soma da massa da pedra. No final, alguns esqueceram-se de fazer a conversão, mas os que converteram, fizeram-no diretamente.


2. Para construir a cascata deste jardim foram necessários vários tratores de rachão (pedra). O primeiro socalco, o maior, gastou cerca de 4500 Kg e cada um dos outros socalcos gastou menos 500 Kg do que o que está imediatamente abaixo dele. 4º 3000 5: 2500 6º 2000

Quantas toneladas foram gastas em toda a cascata? 1: 4500 kg 2: 4000 kg 3º 3500

4500 + 4000 + 3500 + 3000 + 2500 + 2000 = 19500

19,5 t

Figura 14. Resolução da questão 2 da tarefa do Jardim Renascença pelo aluno LG (Grupo 2)

6 | ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os dados recolhidos no âmbito da resolução das três tarefas aqui apresentadas mostram que, apesar de estarem num contexto com poucas condições para a concentração na resolução das tarefas, os alunos empenharam-se de forma idêntica à que se verifica em sala de aula, mas com mais entusiasmo e interação com o meio envolvente. As condições físicas, apesar de não serem as ideais para fazer os registos, estão longe de serem obstáculos à resolução, pois os alunos procuram naturalmente soluções alternativas. Mobilizam facilmente conhecimentos de conceitos e processos matemáticos já trabalhados em sala de aula, mas também recorrem a estratégias de resolução de problemas que habitualmente não são utilizadas, como é o caso da simulação/experimentação. Os três tipos de representações apresentados por Bruner (1999) foram identificados no decorrer das resoluções. Comparativamente com a sala de aula, a representação ativa é mais frequente quando resolvem tarefas no exterior. Uma vez que é solicitado o registo da resolução, este tipo de representação é traduzido por desenhos ou símbolos, ou seja, é complementado com a representação icónica ou simbólica.

Apesar de estarem em contextos que proporcionam mais liberdade de movimento, mais autonomia e menos controlo pelo professor, a globalidade dos empenhou-se de forma exemplar, em grupo, discutindo ideias de forma espontânea, entreajudando-se e manifestando responsabilidade. A interação entre os elementos de cada grupo é, de facto, muito maior do que em sala de aula. Evidenciaram menos dependência do professor, provavelmente por sentirem o apoio dos outros elementos do grupo. Contudo, sublinha-se a importância da intervenção do professor, tanto para ajudar a desencadear a resolução da tarefa, como para orientar, promover a reflexão ou tornar as discussões entre os alunos mais produtivas, como adverte o NCTM (2014).

Aparentemente os alunos, quando resolvem as tarefas, não se deixaram influenciar por fatores como o movimento de pessoas estranhas ou automóveis. Aliás, realizar tarefas em locais movimentados e com diversidade é do agrado de alguns, pois foi um argumento que surgiu quando se colocou uma questão da entrevista, nomeadamente: de que trilho gostaste mais e porquê?

Um fator que pareceu interferir foi a ansiedade em avançar para a tarefa seguinte. Este aspeto talvez fosse mais evidente neste trilho, porque o espaço era menos labiríntico, o que permitia localizar os restantes grupos e perceber em que tarefa se encontravam. Isto provocava alguma inquietação nos alunos, levando-os a terminar os registos de forma apressada. Mais uma vez, o papel do adulto é necessário para moderar. A elaboração da resposta a cada questão ficou frequentemente por elaborar, sobretudo quando não havia o "*R*:" de *resposta,* como forma de lembrete. Este aspeto, acrescido ao facto de os alunos não usarem as linhas para efetuarem cálculos, mesmo depois de serem alertados para isso, permitiram perceber que independentemente do contexto, os alunos estão muito presos às rotinas de sala de aula.

A ansiedade pela experimentação e utilização de material pareceu, por vezes, desviar a atenção dos alunos do enunciado da tarefa. No entanto, em algumas situações, a possibilidade de concretizarem o enunciado ajudou a compreender a tarefa e a encontrar caminhos até alcançar a solução. Estas experiências reais não contribuem apenas para enriquecer a aprendizagem; elas são o cerne da compreensão e, por conseguinte, da aprendizagem de um determinado assunto (DfES, 2006).

REFERÊNCIAS

BONOTTO, C.; BASSO, M. **Is it possible to change the classroom activities in which we delegate the process of connecting mathematics with reality**? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32 (3), 385-399, 2001.

BRUNER, J. **Para uma teoria da educação**. Lisboa: Relógio d'Água, 1999.

CROSS, R. **Developing Maths Trails.** Mathematics Teaching, 158, 38–39, 1997.

ESHACH, H. **Bridging In-school and Out-of-school Learning: Formal, Non-Formal, and Informal Education**. Journal of Science Education and Technology, 16 (2), 171-190, 2007.

FAGERSTAM, E.; SAMUELSSON, J. **Learning arithmetic outdoors in junior high school – influence on performance and self-regulating skills**. Education 3-13, 42(4), 419-431, 2014.

FERNANDES, F. **A resolução de tarefas matemáticas em contextos não formais de aprendizagem - Um estudo com o 3.º ano de escolaridade** (Doctoral dissertation).. Universidade do Minho, Portugal, 2019. Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/61132

FERNANDES, F; VALE, I.; PALHARES, P. **A resolução de tarefas matemáticas fora da sala de aula: um estudo com alunos do ensino elementar.** Atas do VIII Congresso Iberoamericano em Educação Matemática. Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, 2017.

GOLDIN, G. **Perspectives on representations in Mathematical Learning and problema solving.** In L. English. & D. Kirshner. (Eds), Handbook of International Research in Mathematics Education (pp. 176-201). New York. Taylor and Francis, 2010.

DEPARTMENT FOR EDUCATION AND SKILLS (DfES). **Learning outside the classroom manifesto**. Nottingham, UK: DfES, 2006.

MARGOLINAS, C. (Ed.). **Task Design in Mathematics Education**. Proceedings of ICMI Study 22 (Vol. 1). Oxford, 2013.

MASON, J.; JOHNSTON-WILDER, S. **Designing and using mathematical tasks**. York, UK: QED Press, 2006.

NCTM. **Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All**. Reston, VA: NCTM, 2014.

OFSTED. **Report on learning outside the classroom**, 2008, Consultado em 20 de setembro de 2020, disponível em http://www.ofsted.gov.uk/resources/learning-outside-classroom

PATTERSON, A. **Effectively Incorporating the Outdoor Environment into the Standard Curriculum**, 2009. Consultado em 19 de setembro de 2020, disponível em http://www.smcm.edu/mat/educational-studies-journal/a-rising-tide-volume-2-summer-2009

RICHARDSON K. M. **Designing Math Trails for the Elementary School**. Teaching Children Mathematics, 11(1),8-14, 2004.

STEIN, M.; SMITH, M. **Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice**. Mathematics Teaching in the Middle School, 3, 268–75, 1998.

STEIN, M. et al. **Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell.** Mathematical Thinking and Learning, 10(4), 313.340, 2008.

WAGER, A. **Incorporating out-of-school mathematics: from cultural context to embedded practice**. Journal of Mathematics Teacher Education, 15, 9-23, 2012.

CAPÍTULO 10

O USO DE JOGOS E DINÂMICAS EM GRUPO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES NA PRÁTICA NO PRIMEIRO ESTÁGIO

Data de aceite: 17/11/2020
Data de submissão: 04/09/2020

Leonardo Pospichil Lima Neto
IFRS – *Campus* Osório
Osório – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/9211064848575790

Lisandro Bitencourt Machado
IFRS – *Campus* Osório
Osório – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/2068174187786786

RESUMO: O acadêmico da Licenciatura em Matemática tem seu primeiro contato com a docência no Estágio Supervisionado ao Ensino de Matemática I, e tal experiência é de fundamental importância, pois é neste momento que efetivamente teremos contato com a prática docente, bem como, seus desafios e realizações. Este trabalho tem por objetivo apresentar as experiências do autor na sua prática do primeiro estágio e também uma reflexão dos respectivos resultados. No estágio, o autor gozou de bastante liberdade por parte do professor supervisor, o que possibilitou que o mesmo fizesse o uso de metodologias pouco usuais na escola atualmente. As metodologias aplicadas foram baseadas em jogos matemáticos e resolução de problemas, onde os alunos foram organizados em quartetos, e assim foram mantidos durante todas as aulas do período de docência. Tais metodologias foram adotadas a fim de criar e aprimorar o raciocínio lógico, indutivo e dedutivo, propiciando criticidade e criatividade, consequentemente criando a capacidade de adaptação a diversas situações e fomentando a coletividade e o coleguismo. As primeiras aulas tiveram um caráter mais dinâmico, com atividades mais concretas e jogos, contudo é impraticável que todas as aulas tenham esse viés. Logo nas primeiras aulas expositivas dialogadas, sucederam questionamentos quanto ao “jogo da aula”, entretanto, ao longo do estágio, ocorreu adaptação ao sistema proposto. A metodologia mostrou resultados durante o período de estágio em dois momentos, no primeiro, um aumento da cooperatividade entre os alunos, quando se auxiliaram a completar os cadernos para apresentação de atividades, e posteriormente na apresentação de um problema, em que eles deveriam expor a resolução para os colegas. A metodologia aplicada gerou um comportamento mais constante nos alunos, tanto nas aulas expositivas quanto nas dinâmicas, mostrando assim que a metodologia escolhida pelo autor foi além dos objetivos esperados.

PALAVRAS-CHAVE: Metodologia de Ensino de Matemática; Primeiro Estágio; Prática Docente.

THE USE OF GAMES AND GROUP DYNAMICS FOR MATHEMATICS TEACHING: POSSIBILITIES IN PRACTICE IN THE FIRST INTERNSHIP

ABSTRACT: The student of Mathematic has his first touch in teaching while doing a Supervised Internship in the course Math Teaching I, that experience is of underlying value, because it’s in this moment that we effectively have contact with the teaching practice, with its realizations and challenges. This paper’s goal is to show the

experiences of the writer in its first internship teaching practice as well as a thought of its results. In the internship the writer received a lot of freedom by its supervising teacher, which allowed him to use unusual methodologies in schools currently. The methodologies applied are based in math games and problem solving, where the students were divided in quartets and kept that way all the teaching time. That methodology was chosen with the goal of creating and improving inductive and deductive logic reasoning, providing criticism and creativity, thereafter creating the capacity of adaptation to different situations and instigating collectivity and fellowship. The first classes had a more dynamic way, with more concrete activities and games, however, it's impractical to have all classes in that bias. In the early classes of a more dialoged and expository way, questions about the "lesson's game" happened, but over the course of the internship, the adaptation to the teaching method took place. The methodology showed off its results, during the time of internship, in two moments, at first, an increase in the cooperation between students, when they were working together to complete the exercise book, and then when presented to a problem, where they had to show the resolution to the classmates. The methodology used created a more stable behavior in the students, both in the expositive and in the dynamic classes, demonstrating that the methodology chosen by the writer went beyond the initial goals.
KEYWORDS: Math Teaching Methodology; First Internship; Teaching Practice.

1 I INTRODUÇÃO

O estágio Supervisionado ao Ensino de Matemática I é o primeiro contato dos acadêmicos da Licenciatura em Matemática com a docência, e tal disciplina é de extrema importância, pois é neste momento que efetivamente ocorre o contato com a prática docente. Neste momento que se vivencia os desafios e as realizações de ser professor.

Desde o início da caminhada escolar, observamos aulas de matemática engessadas, sem espaço para os estudantes interagirem, tanto com o professor quanto com seus colegas, desta forma, retraindo a curiosidade e podando as hipóteses. Na graduação, ocorre a oportunidade de quebrar esse paradigma, buscando-se criar aulas mais dinâmicas e mais livres para os alunos.

No processo de elaboração das aulas, foram pesquisadas diversas tendências e metodologias de ensino, entre elas, resolução de problemas e jogos. Essas tendências de ensino buscam inverter o modelo de aulas tradicionais, no qual o professor é o centro de processo de ensino e aprendizado. A proposta faz com que os alunos se tornem o centro desse processo, tornando-os protagonistas da sua própria aprendizagem. Outro ponto importante no planejamento do estágio, e alinhado com o objetivo de criar aulas mais dinâmicas está a escolha de dividir os alunos em grupos para eles trabalharem, buscando que os mesmos tenham mais interação, gerando dinamismo nas aulas.

Echeverría (1998), aborda a importância da resolução de problemas, bem como, a necessidade de um problema ser desafiador ao aluno e Guzmán (2007), por sua vez, traz um modelo de apresentação das aulas conforme a referida tendência de ensino. Grando (1995) apresenta o jogo como possibilidade para uma maior socialização, e como por consequência o desenvolvimento de conceitos e habilidades, além de o fomento do raciocínio lógico, dedutivo e senso crítico. Para Fiorentini e Miorim (1990), o jogo pode iniciar a aula despertando o interesse dos alunos ou a finalizar como um método de fixar o conhecimento adquirido, funcionando como catalisador no processo de ensino e aprendizagem.

Este trabalho busca apresentar a experiência do autor na prática do seu primeiro estágio, como também as metodologias e reflexões sobre os seus resultados.

2 | PREPARAÇÃO PARA A PRÁTICA DOCENTE

Em um primeiro momento o professor titular da turma propiciou ao acadêmico liberdade para desenvolver o seu trabalho durante o período de estágio, o que possibilitou o uso de metodologias pouco usuais na escola. As metodologias escolhidas para o desenvolvimento do estágio foram baseadas em jogos matemáticos e resolução de problemas.

Tais metodologias foram escolhidas a fim de fomentar uma série de competências dos alunos, entre elas:

- Criatividade;
- Criticidade;
- Raciocínio lógico, indutivo e dedutivo;
- Capacidade de se adaptar a diversas situações.

Outro ponto importante destacado é a escolha do autor em separar os alunos em quartetos, que foram mantidos assim durante todo o período de estágio. Tal escolha buscou estimular a cooperatividade e a coletividade dos mesmos.

3 | METODOLOGIA

Em um método de ensino onde utiliza-se um problema como ponto de partida para o ensino de matemática, alunos e professores têm papéis distintos do que nas aulas tradicionais. O aluno se torna o centro da sua aprendizagem, e o professor assume um papel de mediador no processo de ensino-aprendizagem dos estudantes.

Segundo Echeverría, “Para que possamos falar da existência de um problema, a pessoa que está resolvendo essa tarefa precisa encontrar alguma dificuldade que a obrigue a questionar-se sobre qual seria o caminho que precisava para seguir para alcançar a meta." (ECHEVERRÍA, 1998, p. 48). O problema tem que ser desafiador para o aluno, fazendo com que o discente se force a encontrar métodos para resolver o problema proposto.

Pesquisadores como Schroeder e Lester apresentam três modos distintos de como abordar a resolução de problemas:

a. **Ensinar sobre resolução de problemas**: O professor segue o modelo proposto por Polya (1887), que segue quatro passos:

   a. Compreender o problema;

   b. Elaborar um plano para resolvê-lo;

   c. Executar o plano elaborado;

   d. Verificar o resultado obtido.

Quando o professor ensina pelo método de Polya, ela indica o caminho através de muitas perguntas, fazendo com que, de certa forma, que o aluno tenha um pensamento um pouco mais crítico sobre o assunto.

b. **Ensinar para resolução de problemas**: Nesta corrente de pensamento, as ações do professor baseiam-se em direcionar o aluno para a aplicação da matemática. Neste caso, o professor deve orientar os alunos à como utilizar o conhecimento recebido para a aplicação no problema proposto. Esta forma de ensino da matemática busca que o aluno encontre maneiras criativas de utilizar seu conhecimento para a utilização no seu dia a dia. Segundo Guzmán (2007) a forma de apresentação de um conteúdo matemático baseado na Resolução de Problemas deve seguir do seguinte modo:

   - Proposta da situação problema do qual surge o tema (baseado na história, aplicações, modelos, jogos...)
   - Manipulação autônoma pelos estudantes
   - Familiarização com a sua situação e suas dificuldades
   - Ensaios diversos pelos estudantes
   - Ferramentas elaboradas ao longo da história (conteúdos motivadores)
   - Eleições de estratégias
   - Abordagem e resolução dos problemas
   - Caminho crítico (reflexão sobre o processo)
   - Consolidação formalizada (se conveniente)

- Generalização - Novos problemas
- Possíveis transferências de resultados, de métodos, de ideias... (p. 36 e 37)

c. **Ensinar via resolução de problema**: Nesta linha de pensamento, o professor deve utilizar o problema como ponto de partida para a construção do conhecimento do aluno. Desta maneira, o professor se tornará mediador no processo de ensino-aprendizagem, possibilitando ao aluno participação ativa na aula e na construção do seu próprio conhecimento.

No método de resolução de problemas considera-se que essa abordagem de ensino representa uma maneira eficaz de dar significado ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática pelo uso de problemas como ponto de partida para iniciar um novo conteúdo, visto propiciar ao estudante uma participação ativa na construção do conhecimento matemático (BRASIL, 1998).

A resolução de problemas possibilita um acesso mais democrático do conhecimento, já que trabalha juntamente com os conhecimentos prévios dos alunos. Neste sentido:

> A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam dos alunos uma atitude ativa ou um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. O ensino baseado na solução de problemas pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes. Assim ensinar os alunos a resolver problemas supõe dotá-los da capacidade de aprender a aprender, no sentido de habituá-los a encontrar por si mesmos respostas às perguntas que os inquietam ou que precisam responder, ao invés de esperar uma resposta já elaborada por outros [...] (POZO; ECHEVERRÍA, 1988, p. 09).

Sternberg (2000) considera que a atividade de resolução de problemas exige elaboração de estratégias, criatividade e deve estar de acordo com a experiência e o saber do aluno, pois a busca pela resposta não se dá do mesmo modo para todos os envolvidos na questão.

Uma realidade nos dias de hoje é um ensino de matemática descontextualizado e muito fragmentado, o que propicia um aprendizado baseado em memorização e repetição, dado que além disso, gera uma falta de interesse por parte dos alunos, distanciando o conhecimento de um aprendizado significativo para os alunos, que propicie a reflexão, criatividade e criticidade. Neste sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) salientam:

> [...]o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias,

> a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (BRASIL, 1998, p.26)

Nesse contexto, surgem tendências relacionadas com diferentes abordagens para o ensino de Matemática, dentre elas, a segunda corrente metodológica para este projeto de estágio, é o uso de jogos matemáticos.

Definir o que é jogo não é uma tarefa muito simples, tendo em vista que pode-se obter diversas interpretações. Aurélio (2002) define jogo como "Qualquer atividade recreativa que tem por finalidade entreter, divertir ou distrair; brincadeira, entretenimento, folguedo". Contudo, sabemos que além de entretenimento, o jogo também possibilita socialização e tem por consequência o desenvolvimento de habilidades e de conceitos. Grando ressalta que "[...] a busca pela definição poderia limitar seu próprio conceito" (GRANDO, 1995, p.33).

De acordo com Miorim e Fiorentini (1990, p.7), os jogos "[...] podem vir no início de um novo conteúdo com a finalidade de despertar o interesse da criança ou no final com o intuito de fixar a aprendizagem e reforçar o desenvolvimento de atitudes e habilidades". Desta forma, o jogo pode ser um facilitador no processo de ensino-aprendizagem, com diversas possibilidades, como construção de conceitos e memorização de processos. Neste sentido corrobora Grando (2000)

> As posturas, atitudes e emoções demonstradas pelas crianças, enquanto se joga, são as mesmas desejadas na aquisição do conhecimento escolar. Espera-se um aluno participativo, envolvido na atividade de ensino, concentrado, atento, que elabore hipóteses sobre o que interage, que estabeleça soluções alternativas e variadas, que se organize segundo algumas normas e regras e, finalmente, que saiba comunicar o que pensa, as estratégias de solução de seus problemas.

Neste sentido, evidencia-se a potencialidade dos jogos no ensino de matemática, potencializada pela ludicidade dos jogos, que motiva e envolve os estudantes, tirando os mesmo de uma zona de passividade gerada pelas aulas tradicionais, onde a transmissão de conhecimento e memorização é priorizada.

Uma das competências importantes a serem desenvolvidas no ensino da Matemática refere-se à capacidade de resolver problemas, conforme enfatiza a segunda versão da Base Nacional Curricular Comum (BNCC) "[...] o conceito em foco deve ser trabalhado por meio da resolução de problemas [...]"(BRASIL, 2016a, p.131). Uma forma de apresentar situações problema é por meio de jogos, pois neles há uma mudança constante de acordo com andamento do jogo, demandando uma reflexão dos alunos, em busca de novas estratégias para vencer a partida.

No jogo é necessário elaborar e testar estratégias, levantar hipóteses, deduzir a maneira mais fácil de chegar ao objetivo e refletir as suas ações e as de seu oponente. Outra etapa importante é o registro e análise de cada etapa do jogo.

Desta forma, jogos são considerados uma maneira de possibilitar a elaboração de um pensamento crítico e coletivo, da mesma forma que fomenta um pensamento lógico, dedutivo e indutivo. Sendo assim, a sua utilização pode levar os estudantes a desenvolver a habilidade de pensar em diversas possibilidades para a resolução de uma determinada situação.

4 | PRÁTICA DOCENTE

O primeiro contato do professor estagiário com a turma se deu com a apresentação do professor titular, onde os alunos já esperavam o início do período de regência do professor estagiário, pois foi informado aos mesmos o início das aulas no período de observação. Durante esse primeiro contato, o professor se apresentou formalmente, expondo as metodologias e a maneira que as aulas iriam transcorrer.

A primeira atividade tinha por objetivo dividir os alunos em grupos, através de uma dinâmica, onde o professor solicitou que eles fechassem os olhos. Neste momento o professor contou uma história, e enquanto a contava, colocou etiquetas coloridas nas testas dos alunos. Estas etiquetas definiram os grupos, que já haviam sido selecionados pelo professor. A história contava que eles iriam fazer um cruzeiro com um grupo de três amigos, mas em meio a viagem o cruzeiro começou a naufragar. Os alunos tinham cinco minutos para se reagruparem, sem falar nenhuma palavra. No primeiro momento era esperado que eles não conseguissem realizar a atividade sem conversar, contudo, após alguns minutos, alguns conseguiram entender o processo para se reagrupar com os demais.

Ao final da atividade, o professor informou que os mesmos iriam trabalhar nestes grupos até o final do período de estágio Inicialmente houve certa resistência por parte dos alunos quanto a organização dos grupos, ademais, outro ponto de resistência se deu com a falta de contato deles com a resolução de problemas.

A escolha de separar os alunos em grupos busca fomentar discussões entre os alunos, a fim de que eles desenvolvessem argumentos sólidos e críticos quanto a resolução dos problemas propostos pelo professor. Alinhado a isto, Bona (2013), destaca que o passo para a criação de argumentos ocorre de forma coletiva.

Tal escolha mostrou resultados quando o acadêmico solicitou que cada grupo efetuasse a resolução de um problema distinto e uma posterior apresentação do mesmo para a turma. Observou-se nas apresentações argumentos sólidos acerca de suas resoluções, apontamentos críticos sobre os problemas e um comportamento coletivo e unido por parte dos grupos.

A turma apresentava um perfil agitado, onde facilmente se desfocavam do conteúdo da aula. A maneira encontrada pelo acadêmico para contornar esta situação foi a utilização de jogos e dinâmicas com os alunos, fazendo com que os mesmos focalizassem suas energias nas aulas, tornando-as mais atrativas, dinâmicas e lúdicas, sem perder o foco no conteúdo desenvolvido. A presença de jogos e dinâmicas durante as aulas ajudou a equilibrar a agitação dos alunos e construiu um ambiente propício para os momentos expositivos.

As primeiras aulas tiverem um caráter mais dinâmico, com atividades em grupo e jogos matemáticos. Contudo, é impraticável que todas as aulas tenham este caráter, e logo nas primeiras aulas expositivas os alunos questionaram o acadêmico quanto ao “jogo da aula”.

A escolha do acadêmico em utilizar jogos e dinâmicas nas aulas mostrou resultado quando, ao longo do período de estágio os alunos se adaptaram a metodologia proposta, balanceando a agitação das aulas com jogos e dinâmicas com a calmaria de uma aula expositiva.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dentro dos aspectos planejados para este período de estágio, é possível ressaltar alguns pontos importantes. O primeiro ponto é o objetivo de fomentar a coletividade e cooperatividade entre os alunos, através do trabalho em grupo desenvolvido durante todo o período de estágio. Outro ponto positivo evidenciado é o fomento ao raciocínio lógico e a ludicidade, por meio de aplicação de jogos e atividades dinâmicas.

Fica evidente que eles conseguiram conviver e se ajudar conforme o tempo de convívio que o grupo foi passando. Os grupos apresentaram resistência no início do período de estágio, entretanto, com o tempo, a convivência se tornou harmoniosa e laços de amizade foram criados e reforçados.

Outro ponto de destaque ao final do período de estágio foi uma maior facilidade na capacidade de argumentação dos alunos, onde eles apresentaram um posicionamento mais crítico frente aos problemas apresentados, formas mais criativas de levantar hipóteses e efetuar resoluções.

A aplicação de jogos foi de grande valia, pois isso chamou a atenção dos alunos para as aulas do professor estagiário, rompendo com a metodologia tradicional utilizada nas aulas de matemática. Os jogos trouxeram uma nova dinâmica para a sala de aula, ao mesmo tempo em que desenvolvia o raciocínio lógico e adaptabilidade. Juntamente com os jogos, a resolução de problemas fomentou uma criticidade e criatividade na forma de encarar um problema matemático.

As habilidades desenvolvidas através destas metodologias permitiram aos alunos que efetuassem a resolução de problemas nos quais os mesmos não estavam habituado e passaram a serem compreendidos de forma completamente natural, desenvolvendo suas próprias hipóteses de como resolver o problema proposto, com a interferência mínima do professor.

O período de estágio foi um momento de grande aprendizado para o professor estagiário, que pode vivenciar na docência, suas inseguranças, seus momentos de descontração, o desenvolvimento dos alunos e seu próprio desenvolvimento como professor.

Chegado ao final do período de estágio, foi extremamente recompensador para o professor estagiário ver os alunos com um olhar crítico, efetuando a resolução de cada problema de uma maneira própria e criativa, evidenciando as potencialidades e individualidade de cada um, ao mesmo tempo em eles trabalham em conjunto, como grupo unido, com laços fortalecidos e com a coletividade desenvolvida.

REFERÊNCIAS

BONA, A, S, D. **Ações de investigação na Aula de Matemática**. In XV Encontro Nacional de Educação Matemática, Anais... Curitiba, Paraná, 2013, p. 1-15

BRASIL. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília: MEC, 2016.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. **Parâmetros Curriculares Nacionais, Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental**: Brasília (DF): MEC/ SEF, 1998.

ECHEVERRÍA, M. D. P. **A solução de problemas em matemática**. In: POZO, J. I. (org.). A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998, p. 44-65.

GRANDO, R.C.O **Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula**. 2000. 239f. Tese (Doutorado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

MIORIM, M. A., FIORENTINI, D. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Boletim da SBEM-SP, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução de Heitor Lisboa de Araujo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. **Developing understanding in mathematics via problem solving**. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. New Directions for Elementary School Mathematics. Reston: NCTM, 1989. p. 3142-3153.

STERNBERG, R. J. **Psicologia cognitiva**. Tradução de Maria Regina Borges Osório. Porto Alegre: ArtMed, 2000.

CAPÍTULO 11

ENTENDIMENTOS DE PROFESSORES DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE O USO [OU NÃO] DOS JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Data de aceite: 17/11/2020

Renaura Matos de Souza
UNEB

Ilvanete dos Santos de Souza
UFBA

Américo Junior Nunes da Silva
UNEB

RESUMO: Este artigo é resultado de uma pesquisa qualitativa do tipo pesquisa exploratória, que objetivou identificar e analisar entendimentos de professores dos anos finais do Ensino fundamental, da rede municipal de Barreiras-BA, sobre o uso [ou não] dos jogos no ensino da matemática. Para produção de dados utilizou-se um questionário, com questões abertas e fechadas, que foram analisadas pela Análise de Conteúdo, referenciando-se, sobretudo, em Bardin (2007). Para a fundamentação teórica buscou-se autores que discutem o jogo e ludicidade, em uma perspectiva história e sociológica, bem como formação de professores e Educação Matemática; foram eles: Brougère (2002), Huizinga (2010), Kishimoto (2011), Grando (2000) e Silva (2014). A pesquisa sinalizou a grande maioria dos professores participantes da pesquisa utilizam o jogo como instrumento facilitador da aprendizagem em suas aulas, com o intuito de propiciar o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos e aproximá-los do objeto matemático.
PALAVRAS-CHAVE: Jogo; Raciocínio Lógico, Professor que ensina Matemática, Educação Matemática.

ABSTRACT: This article is the result of a qualitative research of the exploratory research type, which aimed to identify and analyze understandings of teachers from the final years of elementary school, from the municipal network of Barreiras-BA, on the use [or not] of games in the teaching of mathematics. For data production, a questionnaire was used, with open and closed questions, which were analyzed by Content Analysis, referring, above all, to Bardin (2007). For the theoretical foundation, we sought authors who discuss the game and playfulness, in a historical and sociological perspective, as well as teacher training and Mathematics Education; they were: Brougère (2002), Huizinga (2010), Kishimoto (2011), Grando (2000) and Silva (2014). The research signaled the vast majority of teachers participating in the study of the game as an instrument that facilitates learning in their classes, with the aim of promoting the development of students' logical reasoning and bringing them closer to the mathematical object.
KEYWORDS: Game; Logical Reasoning, Teacher who teaches Mathematics, Mathematical Education.

1 I INTRODUÇÃO

O jogo, quando adequadamente planejado para ensinar Matemática, é um recurso que possibilita uma aproximação com essa área do conhecimento e favorece os processos de ensino e aprendizagem. Vale destacar a sua contribuição para o entendimento de conceitos matemáticos e estímulo ao desenvolvimento do raciocínio lógico, de forma motivadora para o aluno; sendo a “motivação”, portanto, um dos fios condutores no processo de ensino e aprendizagem, além de promover a interação e o prazer no processo de aprendizagem.

A aproximação com o objeto de estudo surgiu da experiência da primeira autora com as vivencias promovidas no decorrer da disciplina de “Laboratório do Ensino da Matemática”, durante o curso de Licenciatura em Matemática realizado na Universidade do Estado da Bahia (Uneb), *campus* IX; onde ocorreram atividades cujo enfoque era a discussão sobre jogo enquanto articulador do raciocínio lógico no ensino da matemática. A partir de então nasce a seguinte inquietação: “Quais são os entendimentos de professores dos anos finais do Ensino fundamental, da rede municipal de Barreiras-BA, sobre o uso [ou não] dos jogos no ensino da matemática?”.

Com base nessa interrogação de pesquisa definimos o seguinte objetivo: Identificar e analisar entendimentos de professores dos anos finais do Ensino fundamental, da rede municipal de Barreiras-BA, sobre o uso [ou não] dos jogos no ensino da matemática.

Para tanto, após os resultados produzidos por meio de questionário, composto por questões abertas e fechadas, buscando possíveis indícios para a questão norteadora deste trabalho, foi realizado um levantamento, tabulação e análise dos dados, ressaltando os entendimentos de professores participantes da pesquisa bem como o uso [ou não] dos jogos em sala de aula. Dessa forma tivemos uma visão ampla e fidedigna quanto ao que o professor que atua nos anos finais do ensino fundamental da rede pública de ensino da cidade de Barreiras-BA diz sobre o seu entendimento sobre o uso [ou não] dos jogos e o raciocínio lógico.

Este artigo está dividido em seções, que foram estruturadas de forma a permitir uma melhor aproximação do leitor com a pesquisa realizada; são elas: i) a introdução, onde contextualizamos a temática e problemática que nortearam este trabalho; ii) o percurso metodológico, onde classificamos a pesquisa; iii) um breve fundamentar teórico, onde textualizamos o que destacam autores que abordam a temática pesquisa; iv) a análise dos dados, onde analisamos os conteúdos produzidos pelos e pelas participantes; e por último iv) a exposição de algumas considerações.

2 | BREVE FUNDAMENTAR TEÓRICO

2.1 Algumas abordagens sobre o conceito de jogo pautadas em uma nuance histórico-sociológica

Antes de traçarmos um breve histórico do jogo matemático se faz necessário entendermos o que é jogo. Na busca pela definição de jogo elencamos alguns autores que definem o jogo e o seu significado em diferentes culturas, dentre eles, Alves (2001), Huizinga (2010), Kishimoto (2002; 2011), Silva (2014), Silva, Cruz e Souza (2020), entre outros que serão referenciados no decorrer deste texto.

De acordo com Huizinga (2010, p. 10) “o jogo é uma função da vida, mas não é passível de definição exata em termos lógicos, biológicos ou estéticos”, como o autor relata não existe uma definição exata e precisa do jogo, entretanto é fundamental destacar que a depender da cultura, o jogo tem significados diferentes, como afirma Brougère (2002, p. 20) ao destacar que “cada cultura, em função de analogias que estabelece, vai construir uma esfera delimitada (de maneira mais vaga que precisa) daquilo que numa determinada cultura é designável como jogo”. Portanto, o jogo tem suas peculiaridades, sendo percebido de diferentes formas em diferentes culturas. Cada contexto social estabelece seu conceito de jogo mediante os seus valores e costume de vida.

De acordo com Kishimoto (2011, p.18) o jogo pode ser visto como:

> 1. O resultado de um sistema linguístico que funciona dentro de um contexto social;
>
> 2. Um sistema de regras; e
>
> 3. Um objeto.

Kishimoto (2011) apresenta algumas características do jogo buscando clarificar o seu significado. Portanto o jogo pode ser visto de várias maneiras, e a autora enfoca três delas, que apresentaremos a seguir: a) primeiro o jogo enquanto sistema linguístico, pressupondo interpretações sociais; b) o segundo refere-se ao jogo como um sistema de regras, as quais irá especificar a modalidade do jogo e por fim; c) o último caso o jogo é visto como objeto.

Estas características, as apresentadas anteriormente, nos permitem compreender o conceito de jogo, podendo entender os diferentes significados atribuídos a ele por culturas diferentes, pelas regras e objetos que o caracterizam.

Quando se fala em jogo é importante ressaltarmos as características dos mesmos. Segundo Brougère (2002, p. 21) “o que caracteriza o jogo é menos o que se busca do que o modo como se brinca, o estado de espírito com que se brinca”, isto é, a atividade ou objeto quando imposto deixa de ser jogo e passa a ser uma atividade forçada, como também destacou Silva (2014). Huizinga (2010, p.10) em seu livro Homo Ludens destaca que “antes de mais nada, o jogo é uma atividade voluntária. Sujeito a ordens, deixa de ser jogo, podendo no máximo ser uma imitação forçada”. Todavia para que o jogo possa desempenhar o papel de mediador no processo de ensino e aprendizagem é necessário que haja interesse e envolvimento espontâneo por parte do jogador, não podendo este, de maneira alguma, estar subordinado à obrigação; se porventura isso acontece o objeto deixa de ser jogo, podendo assumir características de um objeto desestimulante e exaustivo para quem o pratica.

Assim como Huizinga (2010), Alves (2001, p. 16) relata que o jogo, a brincadeira já era praticada não somente por crianças como também por adultos ao salientar que “na antiguidade, o brincar era uma atividade característica tanto de crianças quanto de adultos”. Até então o jogo não era visto como um instrumento para desenvolver a aprendizagem, mas como um objeto recreativo, passando a ser reconhecido como educativo no século XVI.

Conforme destaca Huizinga (2010, p. 06) “encontramos o jogo na cultura, como um elemento dado existente antes da própria cultura, acompanhando-a e marcando-a desde as mais distantes origens até a fase de civilização em que agora nos encontramos”. Segundo o autor o jogo é fato mais antigo que a cultura. O autor delineia a história do jogo por meio da relação do trabalho com o homem. Segundo ele o trabalho não tinha o valor que lhe é atribuído hoje, por isso as pessoas não se dispunham de ocupação, passando a ficar com a maior parte do tempo livre, visto que os jogos era o único objeto recreativo a fim de estreitar os laços coletivos, as pessoas passaram então a apreciá-lo, isso apresentou uma concepção na cultura sobre o jogo, como atividade fútil.

Segundo Kishimoto (2011, p. 31) “o jogo visto como recreação, desde a antiguidade greco-romana, aparece como relaxamento necessário a atividades que exigem esforço físico, intelectual e escolar”. Ainda de acordo com a autora é “durante a Idade Média, [que] o jogo foi considerado “não sério”, por sua associação ao jogo de azar, bastante divulgado na época” a autora ainda enfatiza que “o jogo serviu para divulgar princípios de moral, ética e conteúdo de história, geografia e outros, a partir do renascimento”. Kishimoto (2002) faz um percurso histórico do jogo desde a antiguidade, descrevendo suas características em cada momento da história. Ela pontua que no renascimento a brincadeira é vista como uma conduta livre que favorece o desenvolvimento de habilidades facilitando a aprendizagem.

A partir de então “o renascimento vê a brincadeira como conduta livre que favorece o desenvolvimento da inteligência e facilita o estudo. Por isso, foi adotada como instrumento de aprendizagem de conteúdos escolares” Kishimoto (2002, p. 62). Complementando, em relação a concepção de jogo, a autora aponta que está relacionada à visão do renascimento, ao inferir que o jogo é uma forma de expressão onde a criança dotada de valor positivo e boa natureza poderá se expressar espontaneamente por meio do jogo, e que mais tarde essa concepção iria se perdurar com o romantismo. Vejamos:

> O romantismo especifica no pensamento da época um novo lugar para a criança e seu jogo, tendo como representantes, filósofos e educadores, que consideram o jogo como conduta espontânea, livre e instrumento de educação da primeira infância (Kishimoto, 2002, p. 63).

Influenciado pelo romantismo, o pensamento da época ocasionou um novo olhar para a criança e o jogo, considerando este, como conduta livre e também como instrumento para a educação.

Na concepção de Huizinga (2010, p. 8) "em nossa maneira de pensar, o jogo é diametralmente oposto à seriedade" sobre isso Kishimoto (2011, p 27) diz que esse caráter não sério do jogo que Huizinga discute, não implica que a brincadeira deixe de ser séria, a seriedade da qual o autor faz referência está relacionada ao riso que como ele próprio diz "está de certo modo em oposição à seriedade, sem maneira alguma estar diretamente ligado ao jogo", isto é, alguns jogos são realizados com a maior seriedade possível, como ele cita o caso do futebol, por exemplo, que não possui a menor tendência para o riso, mas que acompanha na maioria das vezes, o ato lúdico que se contrapõe ao trabalho considerado atividade séria.

Na visão de Fiani (2009, p. 1), "os jogos são atividades bem mais sérias do que aquelas que praticamos no momento de lazer" como o "jogo da política internacional" ou o "jogo da livre concorrência" "sempre que um conjunto de indivíduos, empresas, partidos políticos etc. estiverem envolvidos em uma situação de interdependência recíproca, em que as decisões tomadas influenciam-se reciprocamente, pode-se dizer que eles se encontram em um 'jogo'" (FIANI, 2009, p. 2). Situações da vida com características competidoras que segundo o autor pode-se dizer que eles se encontram em um jogo.

Conforme Fiani (2009, p. 2) "situações nas quais há interação estratégica podem ser caracterizadas como jogos". Porém de acordo o autor "caberia às ciências sociais explicar as ações praticadas em uma situação de interação entre indivíduos". De acordo o autor há diferentes tipos de situações de interação aquela em que os agentes envolvidos decidem simultaneamente, outras se repetem no mesmo tempo e ainda outras em que alguns agentes decidem já conhecendo as decisões dos outros agentes.

A natureza do jogo só pode ser compreendida pela relação existente entre os indivíduos que estão jogando e a vida desses na sociedade e Huizinga (2010) destaca várias teorias que o jogo pode possuir em relação de cada cultura, tendo em vista que existem inúmeras definições para o conceito de jogo mediante o meio em que este estiver inserido; para algumas teorias o jogo constitui uma preparação do jovem para a vida adulta, atribuindo assim um caráter puramente sério, enquanto outras teorias veem o jogo como objeto de competição, outras ainda o definem como a realização de um desejo.

Alves (2001, p. 16) relata que, “nos povos egípcios, romanos e maias, a prática dos jogos era utilizada para que os mais jovens aprendessem valores, conhecimentos, normas e padrões de vida com a experiência dos adultos”. Assim como Kishimoto, Alves (2001, p. 20) pontua que a depender da cultura e do meio em que você está inserido o jogo tem suas representações particulares, ela pontua que “no século XIX, a infância era vista como uma fase de preparação para o trabalho adulto, portanto dava-se pouca importância para os jogos”. Alves (2001, p. 16) destaca que:

> Na antiguidade o jogo ocupava posição importante na sociedade e eram oferecidos para uma grande maioria, porém para uma minoria poderosa como a Igreja, eram considerados profanos, imorais, delituosos e sua prática não era admitida de forma alguma.

Ainda de acordo Alves (2001, p. 17). “Dessa forma muitos perdem o interesse pelos jogos, pois o cristianismo impõe uma educação rígida, disciplinadora, proibindo assim a prática do jogo”, Portanto com a chegada dos Jesuítas de Inácio de Loyola em 1534, a companhia de Jesus compreende a grande importância e vê o jogo como um aliado do ensino e assim pretendem introduzir os mesmos por meio da *Ratio Studiorum.* Ainda de acordo com Alves “Os jesuítas são os primeiros a trazer o jogo de volta para a educação só que dessa vez não mais como apenas um objeto de recreação, mas como o autor pontua: de forma disciplinadora e recomendada”. Os Jesuítas tiveram um papel importante na educação e contribuíram para que a prática de jogos voltasse a ser efetivada no ensino.

3 I ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

A priori, faz-se pertinente destacar que este texto é resultado de uma pesquisa qualitativa do tipo exploratória. Os dados para realização da pesquisa foram produzidos por meio de questionário exploratório.

A pesquisa foi realizada em duas escolas públicas municipais da cidade de Barreiras – BA; escolas estas que recebem alunos de toda região oeste do estado da Bahia. As escolas ficam localizadas no centro da cidade, acolhendo alunos do 6º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental e que funciona nos períodos matutino e vespertino. Na escola A trabalhavam 04 professores e na escola B 08 professores. Todos receberam o questionário e o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

(TCLE); no entanto apenas 07 responderam e devolveram-nos devidamente preenchido e assinado.

Nesse trabalho as escolas foram identificadas como escola A e escola B e os professores com a letra P seguida de um algarismo; isso com o intuito de proteger a identidade dos participantes dessa pesquisa, considerando as questões éticas do trabalho.

O critério utilizado para escolha dessas escolas foi o desempenho no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica- IDEB. Selecionamos duas escolas de rede Municipal de Ensino da cidade de Barreiras – BA que obtiveram maior nota no IDEB, as médias de desempenho utilizadas são obtidas por meio da Prova Brasil, para escolas e municípios e o do Sistema de Avaliação da educação básica (SAEB).

Após a tabulação os questionários foram analisados. De acordo com Marconi (1986) "*análise* ou (explicação) é a tentativa de evidenciar as relações existentes entre o fenômeno estudado e outros fatores". Isto é, como o próprio nome já diz, a análise tem a função de analisar os dados coletados para confirmar a pesquisa realizada. Para isso fizemos uso da análise de conteúdo (AC). Bardin (2007, p. 37) define análise de conteúdo como:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.

Desse modo a análise de conteúdo consiste em um método de pesquisa utilizado para interpretar e descrever determinado conteúdo, conduzindo a descrições sistemáticas que podem ser qualitativas ou quantitativas. Esse tipo de análise corrobora para descrever e sistematizar as falas descritas pelos professores questionados de modo que se tenha uma análise crítica e aprofundada.

4 I O QUE DIZEM OS PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA SOBRE SEU PENSAR E FAZER EM RELAÇÃO AOS JOGOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Nessa seção apresentamos e discutimos os dados produzidos sobre o que pensam e dizem os professores que ensinam matemática, sobre os jogos nas aulas de Matemática. O quadro 01, a seguir, apresenta as concepções que os professores possuem em relação ao jogo, bem como o uso ou não deste na sala de aula; será apresentado também as formas de avaliação que os professores utilizam quando fazem uso de jogos em suas aulas e a disponibilidade deste recurso na Escola em que trabalham (esses dados foram produzidos a partir do questionário exploratório).

O uso de jogos tem se difundido com mais veemência no ensino, sendo utilizado como um instrumento mediador para o conhecimento de determinadas áreas da educação. Partindo disso, buscamos entender o entendimento dos professores a respeito do jogo e as contribuições que este pode proporcionar para a aprendizagem matemática

Eixo	Sub-eixo	Categorias	Escolas		Fr* Total
			A	B	
Raciocínio lógico	Conceito.	Capacidade de resolver problemas.	02	01	11
		Pensamento elaborado para chegar a uma conclusão verdadeira ou falsa.	02	06	
	Atividade que estimula o raciocínio lógico.	Jogos (sudoku, bingo, trilha, etc).	01	04	11
		Todas as atividades.	01	02	
		Situação problema.	-	01	
		Desafios.	01	02	
	Das atividades realizadas quais estimulam o raciocínio lógico.	Jogos (sudoku, bingo, trilha, etc).	01	04	11
		Todas as atividades.	01	02	
		Situação problema.	-	01	
		Desafios.	-	02	
	Articulação entre jogo e raciocínio lógico matemático.	Estimula o raciocínio lógico.	01	04	11
		Saber jogar e elaborar estratégias para vencer.	01	01	
		É uma maneira lúdica de promover o aprendizado.	-	01	
		Conduz ao pensamento	02	01	

Quadro 01- Entendimentos dos professores sobre- raciocínio *lógico, atividades que o estimulam e articulação entre jogo e raciocínio lógico.*

Fonte: Questionário aplicado nas escolas A e B com os professores que ensinam matemática no ensino fundamental II, abril e maio de 2016.

Fr* - Frequência

.Sobre o conceito de jogo vejam as respostas apresentadas por alguns professores:

> P3- Além de **estimular estratégias para o entendimento o** mesmo ajuda na concentração e **torna a aula mais dinâmica**. [grifos nosso]

> P5- É uma atividade recreativa na qual estimula o interesse dos alunos melhorando a aprendizagem. [grifos nosso]

> P7- **Recurso usado para facilitar a compreensão de certo conteúdo** de forma que a solução dá a sensação de prazer no final. [grifos nosso]. (QUESTIONÁRIO EXPLORATÓRIO/2016).

Cada professor expressa sua opinião sobre jogo de forma singular. Recorremos ao nosso referencial teórico para entendermos o que alguns autores dizem do jogo como estímulo de estratégias para o entendimento. Trazemos as ideias de Fiani (2009, p. 2) ao enfatizar que “situações nas quais há interação estratégica podem ser caracterizadas como jogos”; como menciona o autor situações que os indivíduos desenvolvam estratégias é considerado jogo.

Pautado na fala de P5 e P7 ao afirmarem que o jogo é um instrumento que estimula o interesse dos alunos, assinalado como mediador do conhecimento, os PCN (BRASIL, 1997, p. 36) salientam:

> Um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver.

Além de os alunos se sentirem desafiados, o jogo pode suscitar interesse e prazer por parte dos mesmos, tornando assim o ensino da matemática mais prazeroso para o aluno. Portanto é de fundamental importância o professor saber analisar e avaliar as potencialidades do jogo escolhido por ele, visando atender os objetivos a serem alcançados. Nesse sentido, como destacaram Silva e Sá (2013), Silva (2014) e Silva, Cruz e Souza (2020), o movimento de jogar pressupõe algumas particularidades as quais os professores precisam estar atentos, como por exemplo, a liberdade na participação. Nessa direção, ainda partindo do que apresentaram os autores, entendemos que existem conhecimentos que são necessários à docência, aos quais chamaremos de conhecimentos lúdicos.

O jogo possui aspectos que propiciam o interesse dos alunos; além disso estimula o raciocínio lógico, pois exigem do aluno conexões lógicas para desenvolver estratégias e se chegar ao objetivo desejado.

Ainda em concordância com P5 e P7 Marim e Barbosa (2010, p. 233) apontam que um motivo para inclusão dos jogos nas aulas de Matemática “é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la”. Marim e Barbosa ressalta a importância dos jogos e alguns motivos pelos quais deveriam ser adotados nas aulas de Matemática, segundo os autores, os jogos podem possibilitar melhora na motivação e na qualidade da aprendizagem em relação à Matemática, podendo contribuir para amenizar os bloqueios apresentados pelos alunos propiciando a construção do pensamento e a assimilação dos conceitos matemáticos.

Quando questionado sobre o uso de jogos na sala de aula P1 pontua que “os jogos são interessantes, mas desde que esteja relacionado com o conteúdo e que tenha objetivos definidos”. Nessa direção Moura (1992, P. 47) diz que:

> Ao optar pelo jogo como estratégia de ensino, o professor o faz com uma intenção: propiciar a aprendizagem. E ao fazer isto tem como propósito o ensino de um conteúdo ou de uma habilidade. Dessa forma o jogo escolhido deverá permitir o cumprimento deste objetivo.

Conforme destaca Moura, o professor ao optar pelo jogo deverá perceber as potencialidades que esse possui, levando em consideração o conteúdo que está sendo trabalhado tendo o cuidado para não dissociar este, daquele, não perdendo de vista o objetivo que se deseja atingir por meio da utilização do jogo escolhido.

De acordo Moura (1992, p. 47) “o jogo como objeto, como ferramenta do ensino, da mesma forma que o conteúdo, carece de uma intencionalidade [...]”. Moura (1992, p. 47) acentua ainda que, assim como o jogo, o conhecimento se dá por etapas/níveis que vai do básico que ele chama de cultura primeira ao nível mais complexo que ele denomina de cultura elaborada, vejamos: “existe um crescimento constante do conhecimento, que vai da cultura primeira à cultura elaborada” isso complementa o que o autor cita mais adiante que [...] ao utilizar o jogo como objeto pedagógico, o professor já tem eleita (ou deveria ter) uma concepção de como se dá o conhecimento” (MOURA, 1992, p. 47). Moura faz uma analogia entre o jogo e o conhecimento, ele discute que assim como o jogo possui os seus níveis de evolução o conhecimento se dá de igual modo.

Marim e Barbosa (2010, p. 233) também discutem a importância de relacionar os jogos com o conteúdo trabalhado, “O jogo, quando bem planejado, é um recurso pedagógico eficaz para a construção do conhecimento matemático”. Os autores mencionados discutem a importância de ao se trabalhar com jogos ter o cuidado para não dissociá-lo do conteúdo trabalhado, para que haja realmente ensino e não seja apenas uma atividade recreativa.

Ainda com relação ao uso de jogos na sala de aula destacamos algumas falas: P3 corrobora “é bom, mas da muito trabalho principalmente em salas lotadas”. P5 diz que “é interessante, pois os alunos ficam mais motivados com isso, desperta o interesse do aluno envolvido possibilitando uma maior predisposição para a aprendizagem”. Percebe-se então, diante das exposições do professor P3 as dificuldades ao optar por essa metodologia “uso de jogos” referentes as condições de trabalho, porém na fala de P5 podemos perceber as contribuições que o jogo pode desenvolver para o processo de ensino e aprendizagem.

Quando questionado se fazem uso de jogos em suas aulas de Matemática as respostas são variadas, alguns destacam que o jogo contribui para o ensino e aprendizagem e fazem uso dessa prática metodológica quando se faz necessário.

Ao questionar se adota jogos a maioria alegou que adotavam jogos em suas aulas e responderam fazendo justificativa para o uso de tal:

> P1- Sim. Porque **facilita a aprendizagem**. [grifos nosso]
>
> P5- Sim. **Para motivar a aula, como também desenvolver o raciocínio lógico dos alunos.** [grifos nosso]
>
> P6- Sim. Porque são recursos que **possibilitam motivar o aprendizado**. [grifos nosso]. (QUESTIONÁRIO EXPLORATÓRIO/ 2016)

Ao analisarmos as respostas sustentadas pelos professores investigados destacamos a fala de P1 na citação acima sobre o uso do jogo como facilitador da aprendizagem, para isso, buscamos embasamento teórico em Itacarambi *et al* (2013) ao caracterizar o jogo como mediador do conhecimento. De acordo P5 uma característica que o jogo pode desenvolver é o desenvolvimento do raciocínio lógico, sobre isso Dante (2003, p.11-12) salienta:

> É preciso desenvolver no aluno a habilidade de elaborar um raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis, para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem em seu dia-a-dia, na escola ou fora dela.

Dessa forma, o raciocínio lógico é indissociável ao ser humano, uma vez que esse dependerá diariamente do raciocínio para realizar tarefas diárias. Daí a importância de se trabalhar com atividades que possam desenvolver habilidades para elaborar o raciocínio lógico, para que o aluno possa utilizar no seu dia-a-dia para solução de problemas. O raciocínio lógico é uma habilidade que influencia de forma direta para o desempenho das atividades do ser humano, não é diferente em Matemática, onde pensar e raciocinar são competências para o desenvolvimento da aprendizagem, a capacidade de raciocinar logicamente, elaborar estratégias de captação de conceitos e melhorar o desempenho matemático é uma habilidade que irá propiciar aos alunos o aprimoramento do conhecimento matemático.

Nesse sentido, algumas atividades poderão ser úteis para aperfeiçoar e estimular o raciocínio lógico dos alunos, portanto, atividades como jogos matemáticos podem aumentar a atenção dos alunos podendo estimular o raciocínio lógico, conforme abordaremos mais adiante.

Já P6 diz adotar jogos em suas aulas com o intuito de promover a aprendizagem e ele acredita que a utilização de jogos pode proporcionar um ambiente propício para desenvolver o conhecimento matemático. Os jogos matemáticos ao serem praticados pelos alunos para compreender um determinado conteúdo, podem ser utilizados como um recurso da aprendizagem, este método de ensino distinto do tradicional busca subsídios para uma aprendizagem significativa e formativa da Matemática.

Sobre jogo no ensino da matemática Moura (1992, p. 47) pontua que "o jogo para ensinar Matemática deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades [...]". O jogo quando utilizado como um instrumento deve ser aplicado com objetivos a serem alcançados e com o intuito de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de forma auxiliadora que poderá propiciar a aquisição de habilidades e desenvolvimento do conhecimento, desde que esteja devidamente em conformidade com o conteúdo trabalhado.

Segundo (MOURA, 1992, p. 47) "ao tomarmos o jogo como ferramenta do ensino ele passa a ter novas dimensões, e é isto que nos obriga a classificá-lo, considerando o papel que pode desempenhar no processo de aprendizagem". O jogo quando utilizado como instrumento de ensino deve conter objetivos a serem alcançados, pois devemos considerar o papel que este poderá desempenhar no processo de ensino e aprendizagem. Conforme aborda Moura (1992, p. 47) "o jogo pode, ou não, ser jogo no ensino", isto é, o jogo só será jogo quando classificado como instrumento que pode desempenhar o conhecimento.

Sobre a existência de recursos manipuláveis disponíveis no ambiente de trabalho destinado para uso das aulas de Matemática a maioria alegou que a Escola não disponibiliza e em alguns casos os professores em conjunto com os alunos constroem os materiais didáticos. Destaca-se as falas de P4 "alguns, outros os alunos constroem" P7 diz "não. Sempre produzo os recursos didáticos". Turrioni e Perez (2012, p. 60) salientam alguns motivos que explicam a falta desses recursos, especialmente os de Matemática nas Escolas, "custam caro, existem poucos, aumentam o rendimento escolar, dificultam a abstração, facilitam a tarefa do professor, retardam o processo de aprendizagem", essas são as justificativas mais frequentes para o não uso de recursos didáticos na sala de aula.

Quando questionado sobre quais atividades realizadas em sala de aula podem estimular o raciocínio lógico Matemático, a maior parte dos professores sinalizou que todas as atividades têm por objetivo estimular o raciocínio lógico, vejamos: P3 diz "todas, sem exceção". P7 "todas as atividades têm por objetivo estimular o raciocínio lógico". Já P5 e P6 acreditam que atividades com jogos podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico, P5 enfatiza que "Jogos, desafios, situação- problema". P6 salienta "atividades como: caça-digito, sudoku, tabelas, trilhas, numerox, desafio, origami, quebra-cabeças, etc.". Fica evidente então que todas atividades propostas têm por objetivo desenvolver o raciocínio lógico.

Sobre situações – problema Dante (2003, p. 9) diz que problema "é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la". Ao enfatizar sobre problema matemático Dante (2003, p. 10) salienta "é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la". O uso de situações problema tem como objetivo desenvolver no aluno a capacidade de interpretação, evidenciar os processos de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos por parte do aluno, podendo expressar seus pensamentos para utilizá-los na resolução de situações problema.

As estratégias de avaliação são diversificadas embora a maior parte tenha o mesmo objetivo: verificar se houve aprendizagem por parte dos alunos com o auxílio da metodologia utilizada. Porém a opinião do P3 nos chama a atenção quando diz que não verifica a aprendizagem, "não verifico" (P3), isto é, não avalia os seus alunos quando faz uso de jogos em suas aulas de Matemática, recorrendo ao quadro 4 quando questionado sua opinião sobre o uso de jogos na sala de aula dos anos finais do Ensino Fundamental P3 salienta que "É bom, mas dar muito trabalho principalmente em salas lotadas". Ao observamos logo mais adiante, no quadro 4 quando questionamos se adota jogos matemáticos em suas aulas P3 afirmou que "Sim. Mas ainda são poucos, salas lotadas dificultam e acabam atrasando o conteúdo". Analisando as respostas do P3 percebemos em sua fala que alguns problemas de estrutura do espaço escolar dificultam o uso de tal metodologia, podemos inferir isso quando salienta no questionário ao expressar a dificuldade relativo a superlotação das salas de aula.

De maneira distinta de P3, P5 salienta "aplico atividades relacionadas aos jogos para verificar se houve aprendizagem, observando a participação, interesse e interação dos alunos" e P6 diz que avalia os alunos "observando as respostas dadas pelos alunos durante a execução das atividades". A avaliação é um instrumento importante para identificar o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

De acordo Pavanello e Nogueira (2006, P. 30) a avaliação:

> É essencial à prática educativa e indissociável desta, uma vez que é por meio dela que o professor pode acompanhar se o progresso de seus alunos está ocorrendo de acordo com suas expectativas ou se há necessidade de repensar sua ação pedagógica.

Desse modo, parafraseando as autoras, o objetivo da avaliação como o próprio nome diz, consiste em avaliar o aprendizado dos alunos com base nas aulas ministradas pelo professor.

As concepções sobre avaliar em Matemática estão baseadas em Pavanello e Nogueira (2006, P. 36) ao pontuar a prática pedagógica de Matemática "a avaliação tem, tradicionalmente, se centrado nos conhecimentos específicos e na contagem de erros", as autoras veem essa forma de avaliação como uma comparação entre os alunos e a denomina de avaliação somativa.

Porém, ao avaliar em Matemática sob a perspectiva de Pavanello e Nogueira (2006) deve-se levar em consideração os elementos no processo de ensino e aprendizagem, isso permite tanto o aluno como o professor conhecer a relação com o saber matemático. Ainda de acordo com as autoras referidas (2006, p. 37) “o aluno deve ser sujeito no processo de avaliação e não apenas o objeto a ser avaliado”. Essa perspectiva de avaliação proposta por Pavanello e Nogueira se baseiam na ideia de avaliar o aluno não somente pelos erros e acertos, mas pelos saberes matemáticos que estes possuem, pelo interesse e compromisso com as atividades matemáticas, pela perseverança, e pelo processo de resolução das atividades, entre outros fatores a ser observados em cada aluno.

5 I ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Ao longo da pesquisa encontramos algumas dificuldades, entre elas esteve a resistência que alguns/as professores/as tiveram em responder o questionário. Alguns receberam, mas não devolveram alegando a falta de tempo para responder; outros não entregaram justificando conter questões abertas, o que levava muito tempo para resposta; enquanto outros declararam não ter respondido devido não gostarem do tema da pesquisa, fazendo referência ao “jogo”; e outros não apresentaram justificativa.

Por fim, buscamos identificar o entendimento de professores que ensinam matemática quanto aos limites e possibilidades da inserção de jogos no ensino de matemática. Alguns professores elencaram algumas dificuldades que limitam a inserção de jogos em suas aulas: como as salas superlotadas e a falta de material dessa natureza na Escola em que trabalham.

A realização desta pesquisa contribuiu na compreensão dos entendimentos dos professores quanto à temática deste trabalho e constituiu-se importante, também, para a vida profissional da primeira autora que, enquanto futura docente, se aproximou do ambiente de futura atuação profissional, proporcionando reflexões sobre a prática docente, em buscar se aprimorar os saberes que são necessários à docência, entre eles o conhecimento lúdico e lúdico e pedagógico do conteúdo.

A partir das análises realizadas comprovamos que apesar do jogo ainda ser considerado por alguns professores apenas como objeto recreativo, por outro lado temos uma grande maioria que utilizam esse objeto como instrumento de aprendizagens em suas aulas com o intuito de propiciar o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos. Percebe-se então, que o jogo se constitui como um elemento relevante para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, Eva Maria Siqueira. **A ludicidade e o ensino de matemática:** uma prática possível. Campinas: Papirus, 2001.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo.** Lisboa, Edições 70, 2007.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BROUGÈRE, Gilles. A criança e a cultura lúdica. In: Tizuko Morchida. **O Brincar e suas Teorias**. São Paulo: pioneira Thomson Learning, 2002.

COPI, Irving Marmer. **Introdução à lógica**. Tradução de Álvaro Cabral- 2. ed. – São Paulo: Mestre Jou, 1978.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 2003.

FIANI, Ronaldo. **Teoria dos jogos**. 3. ed. Elsevier, 2009.

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese de doutorado. Campinas, SP: [s.n], 2000.

HUIZINGA, Johan. **Homo Ludens: o jogo como elemento da cultura**. [tradução João Paulo Monteiro]. 6. ed. – São Paulo: Perspectiva, 2010.

ITACARAMBI, Ruth Ribas. **Jogo como recurso pedagógico para trabalhar matemática na escola básica:** ensino fundamental. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **Jogo, Brinquedo, Brincadeira e a Educação**. 14. ed. – São Paulo: Cortez, 2011.

MARIM. V. e BARBOSA, A. C. I. Jogos Matemáticos: uma proposta para o ensino das operações elementares. In: OLIVEIRA. Cristiane Coppe. MARIM. Vlademir (org). **Educação matemática**: Contextos e práticas docentes. Campinas. SP: Editora Alinea. 2010.

MOURA, Manoel Oriosvaldo. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. Série Idéias n.10, São Paulo: FDE, 1992. p. 45-52.

PAVANELLO, Regina Maria; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Avaliação em matemática: algumas considerações. **Estudos em avaliação educacional**, v. 17, n. 33, jun./abr. 2006.

SILVA, A. J. N.; SA, A. V. M. “Doutores da aprendizagem”: revivendo a criança adormecida em cada educador. In: Antonio Villar Marques de Sá; Américo Junior Nunes da Silva; Maria Dalvirene Braga; Onã Silva. (Org.). **Ludicidades e suas Interfaces**. 1ed.Brasília: Liber Livros, 2013, v. , p. 63-78.

SILVA, A. J. N.. **A LUDICIDADE NO LABORATÓRIO: considerações sobre a formação do futuro professor de matemática.** 1. ed. Curitiba: CRV, 2014.

SILVA, A. J. N.; SOUZA, I. S. ; CRUZ, I. S. C. . O ensino de Matemática nos Anos Finais e a ludicidade: o que pensam professora e alunos?. **Educação Matemática Debate**, v. 4, p. e202018-19, 2020. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/1672. Acesso em: 03 nov. 2020.

TURRIONI, Ana Maria S; PEREZ, Geraldo. Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In: Lorenzato, Sérgio (org). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 3. ed. Campinas, SP: 2012.

CAPÍTULO 12

CURRÍCULO E FORMAÇÃO MATEMÁTICA PARA A DOCÊNCIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL: O DESAFIO DOS ANOS INICIAIS

Data de aceite: 17/11/2020
Data de submissão: 05/10/2020

Julio Robson Azevedo Gambarra
Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Campus Rio Claro/SP
Professor e pesquisador do Departamento Acadêmico de Ciências da Educação da Universidade Federal de Rondônia (UNIR)
Campus Vilhena/RO
http://lattes.cnpq.br/5097801989372147

RESUMO: O trabalho é resultado de uma investigação teórica sobre a formação do professor que ensina matemática nos primeiros anos da educação básica no Brasil. O objetivo geral foi investigar a formação matemática durante a graduação. O problema foi ancorado na questão: que aspectos são considerados sobre a abordagem do ensino e aprendizagem da matemática nos cursos de graduação que formam professores para ensinar nos primeiros anos da educação básica? Um resgate do processo histórico e da legislação educacional que norteia a formação inicial foi feito. O objetivo foi identificar como, em diferentes momentos da história da educação brasileira, foi contemplada a preparação de professores para ensinar matemática nos primeiros anos da educação básica. Com base em pressupostos teóricos, o estudo permitiu as seguintes indicações: 1. Conhecer o processo histórico sobre a formação do professor que ensina matemática nos anos iniciais da educação básica. 2. Compreender o formato do ensino de matemática proposto pelo poder público brasileiro. 3. Especificar o conteúdo de matemática na legislação que orienta o curso inicial de formação de professores para os anos iniciais da eduacação básica. 4. Expandir, durante o treinamento de graduação, o foco no conhecimento teórico e na prática docente das disciplinas que abordam a metodologia e o conteúdo matemático. 5. Aumentar a conscientização sobre a possibilidade de trabalhar com projetos, deixando o paradigma do exercício, dentro de uma concepção de educação matemática crítica. 6. focar em conhecimento matemático significativo.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, Formação de Professores, Matemática, Ensino de Matemática.

CURRICULUM AND MATHEMATICAL TRAINING FOR TEACHING IN BASIC EDUCATION IN BRAZIL: THE CHALLENGE OF INITIAL YEARS

ABSTRACT: The work is the result of a theoretical research on teacher education that teaches mathematics in the early years of basic education in Brazil. The overall goal was to investigate mathematical training during graduation. The problem was anchored in the question: what aspects are considered about the approach to mathematics teaching and learning in undergraduate courses that train teachers to teach in the early years of basic education? A rescue of the historical process and the educational legislation that guides the initial formation was made. The objective was to

identify how, at different times in the history of Brazilian education, the preparation of teachers to teach mathematics in the early years of basic education was contemplated. Based on theoretical assumptions, the study allowed the following indications: 1. Know the historical process of teacher education that teaches mathematics in the early years of basic education. 2. Understand the format of mathematics teaching proposed by the Brazilian government. 3. Specify the math content in the legislation that guides the initial teacher education course for the early years of basic education. 4. Expand, during undergraduate training, the focus on theoretical knowledge and teaching practice of disciplines that address methodology and mathematical content. 5. Raise awareness of the possibility of working with projects, leaving the exercise paradigm within a conception of critical mathematics education. 6. focus on significant mathematical knowledge.
KEYWORDS: Mathematical Education, Teacher Training, Mathematics, Mathematics Teaching.

1 I INTRODUÇÃO

Quando nos propomos a estudar um objeto de pesquisa, é necessário fazermos a contextualização temporal e espacial.

Neste sentido, a delimitação dos períodos históricos citados neste trabalho foi fundamentada a partir de estudos realizados por Fusari (1992) e Curi (2005) a respeito da formação de professores polivalentes no âmbito do sistema educacional brasileiro. Os estudos de Fusari (1992) fazem referência às diferentes características do que se compreende por "competência docente", nos diferentes momentos da história.

A respeito dos distintos períodos históricos da formação do professor que leciona nos primeiros anos na educação básica brasileira, Curi (2005) afirma, que o primeiro período começa com a criação do Curso Normal e termina com a sua extinção por força da Lei Federal nº 5.692, de 11 de agosto de 1971. A lei referenciada estabeleceu a formação de professores polivalentes nos cursos de habilitação para o magistério em nível de segundo grau, atual nível médio, e também possibilitou ao graduado em cursos de Pedagogia fazer opção pela habilitação magistério e lecionar nos anos iniciais do primeiro grau, atual ensino fundamental.

O Curso Normal, foi instituído em 15 de outubro de 1827, pela primeira Lei da Educação no Brasil, de cunho nacional e tinha como finalidade, formar professores para atuar nas escolas das Primeiras Letras. No entanto, o primeiro Curso Normal do país foi instalado apenas, sete anos depois, no ano de 1835.

Em 15 de outubro de 1827, o Imperador D. Pedro I assinou a primeira Lei de Educação no Brasil, de âmbito nacional, criando as Escolas de Primeiras Letras em todas as cidades, vilas e lugares mais populosos do Império. Durante o período inicial do império, as leis e os decretos não tinham numeração, sendo diferenciadas pela data e quanto à natureza da matéria.

O segundo período principia-se com a promulgação da Lei Federal nº 5.692, de 11 de agosto de 1971, e termina com a publicação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), Lei Federal nº 9.394/1996, de 20 de dezembro de 1996, que institui a formação de professores para os primeiros anos da educação básica em nível superior.

E ainda, conforme Curi (2005), o terceiro período inicia-se com a promulgação da Lei Federal nº 9.394/1996, que entre outras atribuições, orienta a formação dos professores para os primeiros anos da educação básica, até os dias atuais. Entende-se por anos iniciais da educação básica, o ensino fundamental do 1º ao 5º ano.

Foi referente a alguns aspectos da formação do professor no terceiro período histórico que este trabalho se desenvolveu.

2 | DESENVOLVIMENTO

Com a promulgação da Constituição brasileira, em 05 de outubro de 1988, passou a vigorar no país, um novo formato para a educação nacional, em todos os níveis de ensino. As referências a educação, estão especificadas na Carta Magna brasileira, do Art. 205 ao Art. 214.

Em 20 de dezembro de 1996, foi sancionada a Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional, Lei Federal nº 9.394, que estabeleceu a obrigatoriedade da formação do professor para a educação infantil e anos iniciais do ensino fundamental em nível superior.

> Art. 62. A formação de docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, em universidades e institutos superiores de educação, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nos 5 (cinco) primeiros anos do ensino fundamental, a oferecida em nível médio na modalidade normal. (Redação dada pela Lei Federal nº 12.796, de 4 de abril de 2013)

A legislação determina que a formação para o exercício da docência seja em nível superior, embora admita a formação em nível médio na modalidade normal, como exigência mínima para a docência na educação infantil e nos 5 (cinco) primeiros anos do ensino fundamental.

A exigência de formação superior em curso de Pedagogia não altera o que já vinha ocorrendo com a formação para ensinar matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, ou seja, um profissional com formação polivalente, domínio e conhecimento em outras áreas do saber humano.

Em 6 de fevereiro de 2006, a Lei Federal nº 11.274 alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e ampliou a duração do ensino fundamental de oito para nove anos, estabelecendo a obrigatoriedade de a criança adentrar ao ensino formal aos seis anos de idade.

O Art. 32 da LDB passou a vigorar com a seguinte redação:

> Art. 32. O ensino fundamental obrigatório, com duração de 9 (nove) anos, gratuito na escola pública, iniciando-se aos 6 (seis) anos de idade, terá por objetivo a formação básica do cidadão, mediante: (Redação dada pela Lei Federal nº 11.274, de 6 de fevereiro de 2006)
>
> I - O desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo.

Destaco que o inciso I, do mesmo artigo 32, estabelece para o ensino fundamental o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo. Entendo que, a exigência legal do pleno domínio do cálculo requer maior preparo específico na formação do pedagogo para o ensino da matemática. Talvez, isso implique na busca de possibilidades de formação complementar em matemática. Indico, como alternativa, a formação em cursos de pós-graduação *lato sensu*, ou ampliar, durante a formação inicial do pedagogo, o foco no conhecimento teórico e na prática de ensino das disciplinas que abordam o conteúdo matemático que é trabalhado nos anos iniciais do ensino fundamental.

Com relação ao pleno domínio do cálculo, estudos mais recentes a respeito das competências matemáticas, segundo Nacarato, Mengali e Passos (2011), mostram que apenas as competências de cálculo não bastam, pois não atendem às exigências da sociedade contemporânea.

A perspectiva e a visão de Nacarato, Mengali e Passos (2011, p. 32), a respeito de aprender e ensinar matemática nos anos iniciais é:

> O mundo está cada vez mais matematizado, e o grande desafio que se coloca à escola e aos seus professores é construir um currículo de matemática que transcenda o ensino de algoritmos e cálculos mecanizados, principalmente nas séries iniciais, onde está a base da alfabetização matemática.

Dentro de uma visão de educação matemática crítica e do entendimento que o mundo está cada vez mais matematizado, Skovsmose (2001, p. 51), afirma:

> Matematizar significa, em princípio, formular, criticar e desenvolver maneiras de entendimento. Ambos, estudantes e professores, devem estar envolvidos no controle desse processo, que, então, tomaria uma forma mais democrática.

Dentro dessa visão crítica, compartilho, mais uma vez, a visão de Skovsmose (2001, p. 66) a respeito de alfabetização matemática: “A alfabetização não é apenas uma competência relativa à habilidade de leitura e escrita, uma habilidade que pode ser simultaneamente testada e controlada; possui também uma dimensão crítica".

Skovsmose (2001) mostra que a perspectiva crítica nos faz pensar em uma educação matemática como prática de possibilidades de inclusão social.

Para Nacarato, Mengali e Passos (2011, p. 33 e 34), "A matemática precisa ser compreendida como um patrimônio cultural da humanidade, portanto um direito de todos. Daí a necessidade de que ela seja inclusiva".

Para essa visão se consolidar, segundo Skovsmose (2008) e Alroe e Skovsmose (2006), é necessário romper com o tradicional paradigma do exercício.

Segundo Skovsmose (2008), há diferentes formas de romper com esse modelo. Uma delas é através da realização de projetos, cuja dinâmica o autor denomina de "cenários de investigação".

Conceber a aula de matemática dentro desse ambiente de aprendizagem requer uma nova postura do professor, diferente daquela defendida pelo modelo de aula tradicional, isto é, o professor expõe algumas ideias matemáticas com alguns exemplos e, em seguida, os alunos resolvem uma lista de exercícios.

Em função do exposto, indico a possibilidade de conscientizar o professor a respeito da possibilidade de trabalhar com projetos, deixando o paradigma do exercício, dentro de uma concepção de educação matemática crítica, focando no conhecimento matemático significativo, isto é, com aplicação para o dia-a-dia.

Como nos diz Nacarato, Mengali e Passos (2011, p. 35), dentro desse "cenário de investigação" é requerida do professor uma nova postura. Os autores completam:

> Ele continua tendo papel central na aprendizagem do aluno, mas de forma a possibilitar que esses cenários sejam criados em sala de aula; é o professor quem cria as oportunidades para a aprendizagem – seja na escolha de atividades significativas e desafiadoras para seus alunos, seja na gestão de sala de aula: nas perguntas interessantes que faz e que mobilizam os alunos ao pensamento, à indagação; na postura investigativa que assume diante da imprevisibilidade sempre presente numa sala de aula; na ousadia de sair da "zona de conforto" e arriscar-se na "zona de risco".

Penteado (2004), ao falar da noção de "zona de conforto" e "zona de risco", diz que, enquanto na "zona de conforto" a prática se pauta na previsibilidade, na "zona de risco" o professor precisa estar preparado para os imprevistos postos pela ação educativa.

Por fim, Nacarato, Mengali e Passos (2011, p. 34) explicam e defendem que, essa perspectiva sugere que [...] a aprendizagem da matemática não ocorra por repetições e mecanizações, mas se trata de uma prática social que requer envolvimento do aluno em atividades significativas".

Refletindo a respeito dos desafios e perspectivas da formação inicial de professores para ensinar matemática, Curi (2011, p. 77) afirma que:

> Tanto no curso de Pedagogia como no curso de Licenciatura em Matemática, os alunos pautam o conhecimento matemático a forma com que aprenderam, com uma relação marcada pela racionalidade técnica, ou seja, o conhecimento que julgam necessitar para ensinar é tido como o que irão receber na formação inicial, supostamente suficiente para o seu desempenho e consideram que tudo o que não foi aprendido na formação inicial carece de "nova" formação.

Curi (2011, p. 77) considera que um grande desafio que os cursos de licenciatura, tanto em Pedagogia quanto em Matemática, encontra, refere-se à questão da motivação dos alunos para a matemática, além da apropriação de conhecimentos. E afirma:

> Um grande desafio que esses cursos têm pela frente é que há necessidade de desenvolver nos seus alunos o gosto de ser professor para ensinar Matemática e ainda promover situações para que eles se apropriem de conhecimentos necessários para uma atuação profissional de qualidade.

Ainda, segundo Curi (2011), nas últimas 3 décadas, o crescimento da área de Educação Matemática ampliou consideravelmente o número de pesquisas voltadas para o setor, que podem auxiliar a prática do professor, e nos indica que há pelo menos três correntes de pensamento sobre formação matemática do professor no Brasil.

- Uma delas defende o pressuposto que um "sólido" conhecimento matemático é condição necessária e suficiente para ensinar.

  Em geral, os defensores dessa linha consideram que a didática se aprende na prática profissional e será bom professor aquele que tem dom para exercer essa profissão.

- Outra linha, talvez na tentativa de contrapor-se à anterior, coloca demasiada ênfase na formação pedagógica, passando a ideia de que um professor não precisa de grandes conhecimentos matemáticos para ensinar.

- A terceira é a que compreende a importância da articulação entre conhecimentos matemáticos e conhecimentos didáticos pedagógicos na formação de professores de matemática.

Entendo que dois aspectos devem ser considerados, simultaneamente, na formação matemática do pedagogo.

O primeiro aspecto é que o conteúdo a ser ministrado no componente curricular, que aborda conceitos matemáticos nos anos iniciais do ensino fundamental, esteja diretamente relacionado com a formação e o conhecimento que o professor tem a respeito da matemática.

Freire (2014, p. 93) nos ensina: “Como professor não me é possível ajudar o educando a superar sua ignorância se não supero permanentemente a minha. Não posso ensinar o que não sei”.

Isso implica no que já defendi, anteriormente, neste trabalho: a busca de possibilidades de formação específica complementar em educação matemática em cursos de pós-graduação *lato sensu*.

O segundo aspecto diz respeito à didática e à metodologia do ensino da matemática, que considero atributos agregadores e necessários. Entendo que o futuro professor tem a oportunidade de adquiri-los na formação inicial em curso de licenciatura em Pedagogia.

Entretanto, como já foquei no primeiro aspecto, é necessário o domínio do conteúdo específico de matemática.

A respeito desse assunto, Baumann (2009, p. 102), afirma: “[...] acreditamos que só é possível focar a dimensão didática se há um domínio dos conteúdos a serem trabalhados”.

É, portanto, da terceira compreensão abordada por Curi (2011, p. 77), que comunga o meu pensamento, pois um não nega o outro, senão que se complementam nessa rede de interligação: o conteúdo e a didática.

Entretanto, um fato chama bastante atenção na formação do professor em curso de licenciatura em Pedagogia.

Em uma pesquisa realizada por Curi (2005, p. 61), a respeito da formação nos cursos de Pedagogia, a pesquisadora analisou como as instituições de ensino superior incorporaram as orientações oficiais quanto à formação docente, com ênfase na oferta de disciplinas voltadas à formação matemática dos futuros professores e suas respectivas ementas. Segundo a pesquisa, a disciplina que,

> […] apareceu com mais frequência nas grades curriculares dos cursos analisados foi Metodologia de Ensino de Matemática, presentes em cerca de 66% das grades. Se considerarmos que outros 25% dos cursos têm na grade curricular a disciplina Conteúdos e Metodologia de Ensino de Matemática, é possível afirmar que cerca de 90% dos cursos de Pedagogia elegem as questões metodológicas como essenciais à formação de professores polivalentes

A partir da pesquisa de Curi (2005), posso afirmar que, nos cursos de Pedagogia, as disciplinas que abordam o conteúdo de matemática têm carga horária bastante reduzida.

É claro que não se deve avaliar a qualidade da formação de um curso apenas analisando as ementas das disciplinas, mas esse aspecto não deixa de ser um fator significativo a ser considerado.

A partir de uma proposta de formação continuada, depois que foi sancionada a atual LDB, o Ministério de Educação, no ano de 1997, divulgou um conjunto de orientações em nível nacional, intitulado de Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), (BRASIL, 1997), cujo objetivo era auxiliar o professor na execução do seu trabalho.

O volume 3 dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), foi dedicado ao ensino de matemática para o ensino fundamental e fez indicações significativas.

A seguir, destaco alguns aspectos legais que considero importantes sobre formação do pedagogo, isto é, aspectos que dizem respeito à formação inicial do docente que, além de receber formação para ensinar matemática nos primeiros anos da educação básica, também recebe formação para lecionar outras disciplinas.

O Conselho Nacional de Educação (CNE), através do Conselho Pleno (CP) instituiu, por meio da Resolução CNE/CP nº 1, de 15 de maio de 2006, as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para a formação de professores em curso de graduação em Pedagogia, licenciatura.

> Art. 5º O egresso do curso de Pedagogia deverá estar apto a:
>
> VI - ensinar Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, História, Geografia, Artes, Educação Física, de forma interdisciplinar e adequada às diferentes fases do desenvolvimento humano;

Portanto, a fundamentação jurídica, aí exposta, deixa claro que o profissional formado em curso de licenciatura em Pedagogia é o responsável pelo ensino do conteúdo de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, além do domínio do conhecimento em outras áreas do saber humano.

Para cada uma das disciplinas citadas, e também para a matemática, existe uma formação específica, realizada em curso superior de licenciatura, para professores que atuam do 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio.

Nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para o curso de licenciatura em pedagogia, aprovadas no ano de 2006, não ficam especificados os conteúdos de matemática. Segundo Baumann (2009, p. 102), “Na proposta ora aprovada não fica evidente o estudo dos conteúdos específicos que fazem parte da Educação Básica e, por conseguinte, o estudo dos conteúdos de Matemática”.

Não existindo a especificação dos conteúdos de matemática na legislação que norteia o curso de formação de professores em Pedagogia, isto é, nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), as Instituições de Ensino Superior (IES), podem sentir-se desobrigadas a ministrá-los. Portanto, indico especificar os conteúdos de matemática na legislação que norteia o curso de formação de professores em Pedagogia, isto é, as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN).

Provavelmente, resida nesse fato uma das características da formação matemática do pedagogo: enfrentar o desafio de ensinar o que nem sempre domina ou aprendeu.

Alunos com dificuldades de aprendizagem matemática impõem ao pedagogo, muitas vezes, que domine conhecimentos que ele não possui, porque não teve acesso em sua formação inicial a conteúdos específicos.

Através da Resolução CNE/CP nº 2, de 1º de julho de 2015, o Conselho Nacional de Educação (CNE), por meio do Conselho Pleno (CP), estabeleceu novas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para a formação em nível superior em cursos de licenciaturas. Ampliou-se as exigências impostas, dentre outras as que se referem ao tempo de estágio supervisionado, que foi aumentado para 400 (quatrocentas) horas.

Nos últimos anos, vários esforços têm sido feitos através de políticas públicas de educação, no sentido de melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática. São alguns exemplos, o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) no ano de 2012 e Base Nacional Comum Curricular (BNCC), estabelecida através da Resolução CNE/CP nº 02, de 22 de dezembro de 2017, que instituí e orienta a implantação da BNCC, a ser respeitada obrigatoriamente ao longo das etapas e respectivas modalidades no âmbito da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), preconiza que as crianças devem estar alfabetizadas em português e matemática até o fim do 2º ano do Ensino Fundamental, isto é, crianças de até 7 anos.

Entendo que as reformas educacionais, em nosso país, sempre foram fixadas tardiamente em relação às reais necessidades dos sistemas de ensino, embora as últimas Constituições promulgadas fizessem referência direta e clara às questões da educação, cultura e esporte.

Feitas estas considerações a respeito da formação inicial do professor que ensina matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, isto é, nos primeiros anos da educação básica, do percurso histórico e da legislação educacional, passo a refletir sobre as perspectivas futuras de políticas públicas de educação no Brasil, dentro do que preconiza o atual Plano Nacional de Educação (PNE), estabelecido através da Lei Federal nº 13.005, de 25 de junho de 2014.

O PNE estabeleceu um conjunto de vinte metas para melhorias na educação, a ser cumpridas em um período de dez anos, portanto, até o ano de 2024. Ficou evidente, no novo PNE, que existe um olhar das políticas públicas de educação para a formação de professores, sobretudo no que diz respeito às áreas de ciências e matemática. É o que está estabelecido na Estratégia 12.4, da Meta 12 do PNE:

Como referência internacional em aprendizagem matemática para os alunos da educação básica, o PNE utiliza o Programa Internacional de Avaliação de

Estudantes (PISA). E determina na Meta 7, Estratégia 7.11:

> Melhorar o desempenho dos alunos da educação básica nas avaliações da aprendizagem no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA, tomado como instrumento externo de referência, internacionalmente reconhecido, de acordo com as seguintes projeções:

PISA	2015	2018	2021
Média dos resultados em matemática, leitura e ciências.	438	455	473

Quadro 1 – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA)

Fonte: Elaborado pelo autor a partir da Lei Federal nº 13.005, de 25 de junho de 2014

O PISA divulga dados da avaliação mundial de educação a cada três anos, através da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). A avaliação é realizada desde o ano 2000 e o Brasil é um dos países que participaram de todas as edições do programa.

O Brasil não tem conseguido cumprir essas metas de qualidade no que se refere a aprendizagem matemática. Segundo os dados referentes a avaliação de matemática em 2018, divulgados pela OCDE/PISA, em 03 de dezembro de 2019, a média brasileira ficou em 384, bem abaixo da meta estabelecida.

Ressalto que, a execução dessas metas vincula-se estreitamente, à necessidade de regulamentação das políticas a serem implantadas.

A Emenda Constitucional nº 108, de 26 de agosto de 2020, tornou o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação (FUNDEB) permanente, definitivo. Estabeleceu um aumento gradativo de investimentos, partindo de 12%, em 1º de janeiro de 2021, até atingir um porcentual de 23% no ano de 2026.

Entendo que, nas últimas duas décadas, o Brasil fez uma travessia no campo educacional onde conseguiu levar as crianças, na idade considerada pedagogicamente adequada, para as escolas. Entretanto, não conseguiu um plano estratégico de governo que garantisse uma formação considerada de qualidade dentro dos padrões internacionais, para o docente que atua nos anos iniciais do ensino fundamental.

O padrão internacional de qualidade que o Brasil se espelha é o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), citado no PNE e referenciado anteriormente.

O rápido aumento da população escolar, especificamente de crianças de seis a dez anos, quase que exigiu dos sistemas de ensino um recrutamento em massa de professores com baixa qualificação. Delors (2003, p. 157 e 158), afirma:

> Este recrutamento teve de fazer-se, muitas vezes, com recursos financeiros limitados e nem sempre foi possível encontrar candidatos qualificados. A falta de financiamento e de meios pedagógicos, assim como a superlotação das turmas traduziram-se, frequentemente, numa profunda degradação das condições de trabalho dos professores.

D' Ambrosio (2011, p. 24), refletindo a respeito do papel do educador numa sociedade em transição e olhando para o futuro das crianças, nos pergunta:

> Como age o professor, que é um agente da sociedade com a responsabilidade de preparar as gerações para a vida futura? É importante lembrar que a ação do professor, e dos sistemas educacionais em geral, mostrará seus efeitos somente no futuro. Um futuro que ninguém conhece. Um futuro no qual estarão agindo as crianças que hoje a sociedade confia a nós, educadores.

Nunca é demasiado insistir na importância da qualidade da formação inicial do professor que atua nos anos iniciais da educação básica**.** Entendo que, quanto maiores as dificuldades que o aluno tiver que ultrapassar, no que diz respeito à pobreza, discriminação no meio social, situação familiar difícil, doenças físicas, mais se exigirá da formação do professor.

A minha atuação como profissional da educação, seja na docência, na gestão ou no campo da pesquisa acadêmica, nos últimos anos, me permite compreender que não é fácil estabelecer políticas públicas para qualquer área que seja em um país com as dimensões continentais como é o Brasil.

3 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o estudo e os meus posicionamentos feitos ao longo deste trabalho, o propósito foi identificar, a partir do conhecimento histórico, do estudo da legislação e das políticas públicas, como a formação inicial do pedagogo contemplou a formação para ensinar matemática. Com o estudo e os meus posicionamentos feitos ao longo deste trabalho, o propósito foi identificar, a partir do conhecimento histórico, do estudo da legislação e das políticas públicas, como a formação inicial do pedagogo contemplou a formação para ensinar matemática.

Investiguei indícios que me permitiram identificar quais eram e como foram tratados os conhecimentos de conteúdos matemáticos na formação de professores para ensinar matemática para os anos iniciais do ensino fundamental.

Assim, vou assumir pressupostos teóricos, que me permitem fazer as seguintes indicações teóricas a respeito da formação inicial de professores para ensinar matemática nos cinco primeiros anos do ensino fundamental:

1. Conhecer o processo histórico sobre a formação do professor que ensina matemática nos anos iniciais da educação básica.

2. Compreender o formato do ensino de matemática proposto pelo poder público brasileiro.

3. Especificar o conteúdo de matemática na legislação que orienta o curso inicial de formação de professores para os anos iniciais da eduacação básica.

4. Expandir, durante o treinamento de graduação, o foco no conhecimento teórico e na prática docente das disciplinas que abordam a metodologia e o conteúdo matemático.

5. Aumentar a conscientização sobre a possibilidade de trabalhar com projetos, deixando o paradigma do exercício, dentro de uma concepção de educação matemática crítica.

6. Focar em conhecimento matemático significativo, isto é, com aplicação para o dia a dia.

Entretanto, este estudo não pretende ser nenhum documento conclusivo a respeito da formação inicial do pedagogo, mais especificamente, da formação de professor para ensinar matemática nos anos iniciais da educação básica no Brasil.

REFERÊNCIAS

ALROE, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogos e aprendizagem em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BAUMANN, Ana Paula Purcina. **Características da formação de professores de matemática dos anos iniciais do ensino fundamental com foco nos cursos de pedagogia e matemática.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, SP: Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2009. 241p.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação para uma sociedade em transição.** 2. ed. Natal, RN: EDUFRN, 2011.

DELORS, Jacques (org.). **Educação: um tesouro a descobrir**. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2003.

BRASIL. Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971. Fixa as diretrizes e bases para o ensino de primeiro e segundo graus e dá outras providências. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil.** Brasília: DOFC PUB 12/08/1971 006377 1.

BRASIL. Constituição da República Federativa do Brasil. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**. Brasília, 05/10/1988.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Fixa as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil.** Brasília: DOFC PUB 23/12/1996 02783 1.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Volume 3, Matemática. Brasília: **Ministério da Educação e do Desporto.** Secretaria de Educação Fundamental, 1997.1.

BRASIL. Diretrizes Curriculares Nacionais para o curso de Graduação em Pedagogia. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP nº 1/2006. Brasília: **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**. Brasília: 16/05/2006, Seção 1, p. 11.

BRASIL. Lei Federal nº 11.274, 6 de fevereiro de 2006. Altera a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, ampliando a duração do ensino fundamental de oito para nove anos. **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**. Brasília, 07/02/2006.

BRASIL. Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014. Aprova o Plano Nacional de Educação - PNE e dá outras providências. Brasília: **Diário Oficial da República Federativa do Brasil**, 26/06/2014.

CURI, Edda. A formação Inicial de Professores para Ensinar Matemática: Algumas Reflexões, Desafios e Perspectivas**.** In: **REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura**. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Ano 6, n. 9 (jul./dez. 2011). Natal, RN: EDUFRN, 2011.

______. **A matemática e os professores dos anos iniciais**. São Paulo: Musa Editora, 2005.

DELORS, Jacques (org.). **Educação: um tesouro a descobrir**. 8.ed. São Paulo: Cortez, 2003.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 48. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2014.

FUSARI, José Carlos. **A formação continuada de professores no cotidiano da escola fundamental**. São Paulo: FDE/SEE, 1992. p. 24-34. (Série Ideias, 12).

NACARATO, Adair Mendes; MENGALI, Brenda Leme da Silva; PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender.** 1. reimpressão. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica.** Campinas, SP: Papirus, 2008.

______. **Educação matemática Crítica:** a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001.

CAPÍTULO 13

PERFIL DE UNIÃO DAS TURMAS DE MATEMÁTICA LICENCIATURA DA UFAL CAMPUS ARAPIRACA

Data de aceite: 17/11/2020
Data de submissão: 03/09/2020

Allanny Karla Barbosa Vasconcelos
Universidade Federal de Alagoas
Arapiraca – Alagoas
http://lattes.cnpq.br/6200309085849093

Gilmar dos Santos Batista
Universidade Federal de Alagoas
Arapiraca – Alagoas
http://lattes.cnpq.br/2571901994559307

Karollayne Stefanny de Farias Holanda
Universidade Federal de Alagoas
Arapiraca – Alagoas
http://lattes.cnpq.br/2314882358359979

RESUMO: A "união faz a força" já dizia o velho ditado. Importante e presente desde os tempos mais remotos o contato social, estimula nossa humanidade, nos une, desenvolve trabalhos rotulados como impossíveis. Elaboramos esta pesquisa com o intuito de descobrir o perfil de união do curso de Matemática Licenciatura da UFAL-Arapiraca. Estruturamos um questionário como ferramenta e podemos utilizar uma amostragem estratificada para inferir os resultados aqui contidos. Podemos observar o nível de harmonia dos alunos do curso Matemática Licenciatura é bastante heterogêneo. Além disso, é recomendável que os mesmos reflitam sobre sua forma de cooperação como também busquem integração entre seus colegas de modo a obter os benefícios que esta ação proporciona. Notando que além de elevar seu empenho no curso, possibilitará a experimentar uma graduação mais prazerosa.

PALAVRAS-CHAVE: União, Benefícios, Matemática, Licenciatura, UFAL.

UNION PROFILE OF MATHEMATICS CLASSES GRADUATION OF UFAL CAMPUS ARAPIRACA

ABSTRACT: "Unity is strength" already said the old saying. Important and present since the most remote times, social contact, stimulates our humanity, unites us, develops jobs labeled as impossible. We prepared this research in order to discover the union profile of the Mathematics Degree course at UFAL-Arapiraca. We structured a questionnaire as a tool and we can use stratified sampling to infer the results contained here. We can observe the level of harmony of the students of the Mathematics Degree course is quite heterogeneous. In addition, it is recommended that they reflect on their form of cooperation as well as seek integration among their colleagues in order to obtain the benefits that this action provides. Noting that in addition to increasing your commitment to the course, it will enable you to experience a more pleasant graduation.

KEYWORDS: Union, Benefits, Mathematic, Graduation, UFAL.

1 I INTRODUÇÃO

Na matemática, de acordo com a Teoria dos Conjuntos, a união é o encontro de dois os mais conjuntos diferentes, sendo que os elementos presentes na união devem ser a combinação de todos os objetos que estão nos conjuntos unidos. Mas também é o ato ou efeito de se unir duas ou mais partes distintas podendo acontecer de diversas formas, como a ligação ou combinação de esforços e pensamentos para um bem comum, por exemplo.

Os alunos que estão a se ingressar neste curso possuem uma ideia e percepção muito equivocada do que irão encontrar e estudar, talvez isso possa explicar a alta taxa de desistências dos mesmos. E mesmo diante de tantas dificuldades, os universitários preferem enfrentar tudo individualmente, isolando-se em seu próprio trajeto. Isso, acarreta uma desunião da turma, muitas vezes ocorrendo um declínio e até mesmo a queda do seu desenvolvimento no curso.

Em Tua Carreira relata que o segredo de um grande sucesso está no trabalho de uma grande equipe. Sempre ouvimos ditados populares da forma: “a união faz a força”, “uma mão lava a outra” ou até “Ninguém é feliz sozinho”. E compreendemos que uma grande equipe não é composta apenas de qualificação, sem união não há “equipe”. Isto porque quando estamos unidos somos sim mais fortes, nos permitimos ser o apoio do outro e adquirimos uma vontade que vai além de si.

Dada a importância que acabamos de apontar, indagamos se nossos matemáticos companheiros de curso teriam essa união, e até onde a sua ausência afeta tanto no rendimento individual do grupo quanto na trajetória de cada um em seu curso. Este trabalho descreve a metodologia utilizada na pesquisa e os resultados obtidos.

2 | METODOLOGIA

A pesquisa foi realizada com as turmas do tronco profissionalizante do turno vespertino do curso de Matemática Licenciatura (presencial) da Universidade Federal de Alagoas, Campus Arapiraca. Segundo ata de frequência das turmas, somando os alunos dos 3º, 5º e 7º períodos, a população é composta por 77 discentes ($N = 77$).

Enfatizamos que por termos utilizado a ata da frequência de cada período havia discentes que estavam em mais de uma lista, tal caso foi contabilizado apenas uma vez e relocado para seu período padrão. Nós optamos por selecionar uma amostra por Amostragem Aleatória Estratificada - AAE. O 3º período é composto por 36 alunos, o 5º por 18 alunos e o 7º por 23 alunos.

Decidimos que tamanho de nossa amostra seria com $n = 50$. E assim obtemos um cálculo com erro de 8%.

$$n = \frac{N.n'}{N + n'}$$

Como nosso $n = 50$ e $N = 77$ temos:

$$\frac{77.x}{77 + x} = 50$$

$$77x = 50\,(77 + x)$$

$$77x - 50x = 3850$$

$$x = \frac{3850}{27}$$

$$x = 142{,}7$$

Assim temos que $x = n'$. Logo por

$$n' = \frac{1}{E^2}$$

temos

$$E^2 = \frac{1}{142{,}5}$$

$$E^2 = 0{,}007$$

$$E = \sqrt{0{,}007}$$

$$E = 0{,}08$$

$$E = 8\%$$

Por hora, façamos o cálculo do extrato com n =50. Utilizando o método ponderado

$$n_e = \frac{N_e}{N_t}\, n$$

Obtemos o n de cada estrato:

$$n_1 = \frac{36}{77}\,50 = 23{,}3 = 23$$

$$n_2 = \frac{18}{77}\,50 = 11{,}6 = 12$$

$$n_3 = \frac{23}{77}\,50 = 14{,}9 = 15$$

Estratos	Quantidades de pessoas	Nº
3º Período	36	24
5º Período	18	12
7º Período	23	15
TOTAL	78	50

Tabela 1: Análise de estratificação para pesquisa.

Na relação de alunos, estes já estão dispostos por ordem alfabética. Enumeramos cada extrato e sorteamos a quantidade de números correspondente a cada um utilizando um sorteador online. Obtemos os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 16, 19, 20, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34 e 36 para o terceiro período. Para o quinto, foram sorteados os números 1, 2, 4, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 e 17. Por fim o sétimo período, foram sorteados os números 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 19, 20 e 22. Escolhidos os elementos da amostra, um por um, pessoalmente, aplicamos o questionário.

3 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como a técnica de amostragem utilizado foi probabilística (AAE), os dados obtidos podem ser generalizados à toda a população, a qual corresponde a todos os alunos do curso de Matemática da UFAL - Arapiraca. Assim, as afirmações que faremos a seguir será sobre toda a população e não somente referente à amostra, embora tenha advindo desta.

3.1 Dados obtidos

De acordo com a análise dos resultados adquiridos com a pesquisa, 72% dos alunos relatam que sua turma não é unida. E 56% afirma que seu curso também não é unido. A partir disso começamos a compreender os motivos que causa tal desunião no curso de matemática, conforme o mostrado no gráfico 1.

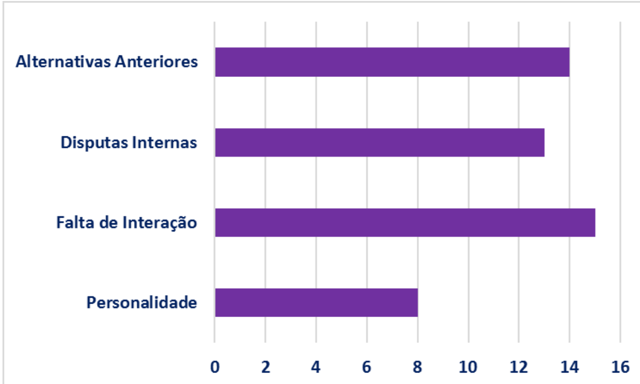


Gráfico 1: Fatores que causam a desunião da turma.

Dentre os 77 discentes pesquisados a maioria afirma cooperar para a harmonia da turma, conforme pode ser visto no Gráfico 2.

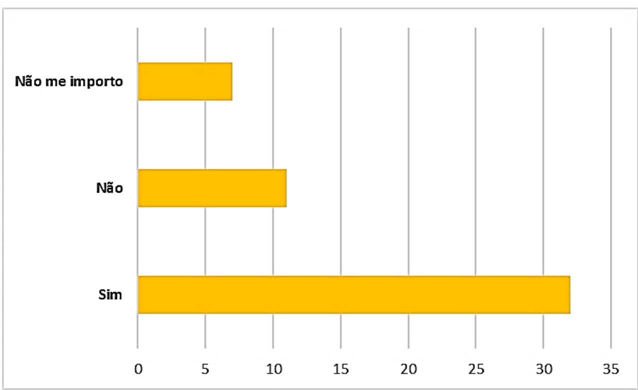


Gráfico 2: Cooperação para a união

Pela Tabela 2 obtivermos a porcentagem dos alunos que cooperam, dos que não cooperam e dos que não se importam com a situação do seu ambiente social de estudo.

Cooperação para união	fa	fr	fp
Sim	32	0,64	64
Não	11	0,22	22
Não me importo	7	0,14	14
Total	50	1	100

Tabela 2: Distribuição de frequência da cooperação para a união

Observe que, 32 alunos afirmam cooperar para a união, isso equivale a 64%. A predominância deste alunos dentre as opções afirmam ajudar a todos, alguns tentam interagir com todos; poucos “aumentar meu grupinho”, e ainda uma parte significativa estar relacionadas como outros pois não precisaram responder a questão por não cooperarem ou não se importarem, como pode ser visto no Gráfico 3 e na Tabela 3.

Formas de cooperação	fa	fr	fp
Tento ajudar todos	24	0,48	48
Tento interagir com todos	10	0,2	20
Tento aumentar meu grupinho	2	0,04	4
Outros	14	0,28	28
TOTAL	50	1	100

Tabela 3: Distribuição de frequência da forma de cooperação para a união da turma

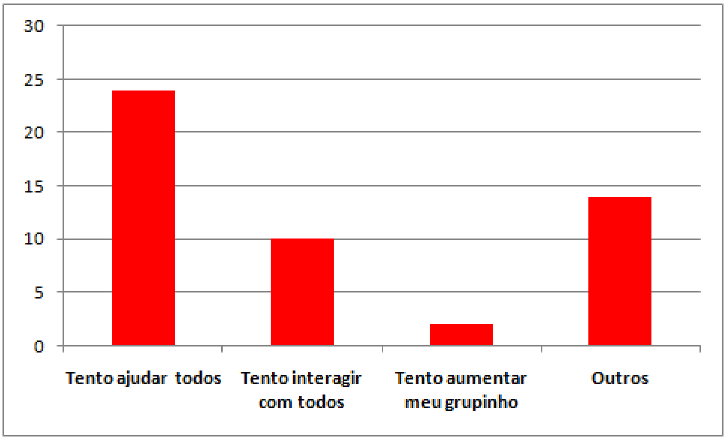


Gráfico 3: Forma de Cooperação para a união da turma

Como visto, 23 alunos afirmam cooperar para a desunião da turma, em percentual 46%, um nível inferior, mas mesmo assim a desunião é obtida. Além disso 49 alunos de 50 afirma que a união da turma melhorar no rendimento de todos da turma e ainda que a maioria não concorda com a afirmação “Sinto que existe muitos conflitos de relacionamento em minha turma”. Dessa forma podemos ver no Gráfico 4 como é composto os grupos de estudo existente nas turmas.

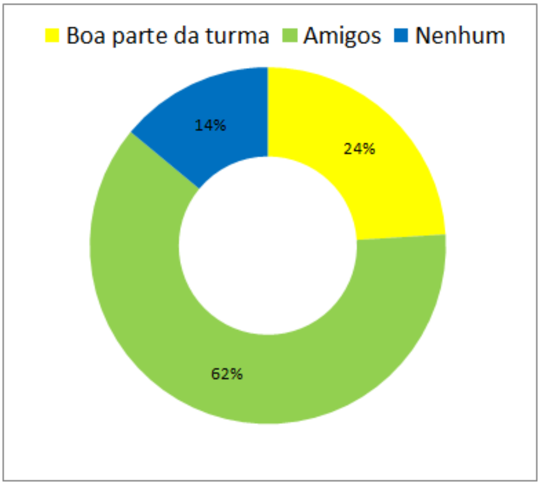


Gráfico 4: Composição de grupos de estudos

Note que 62% afirma só ter amigos em seu grupo preferem a restringir seu próprio ambiente, dispensando qualquer tipo de interação com outros. Já o Gráfico 5 possui uma preponderância em parcialmente satisfeito e/ou satisfeito, aqui podemos observar uma ambiguidade pois ao mesmo tempo que a turma é desunida (72%) os mesmos estão satisfeitos com o nível de união apresentado.

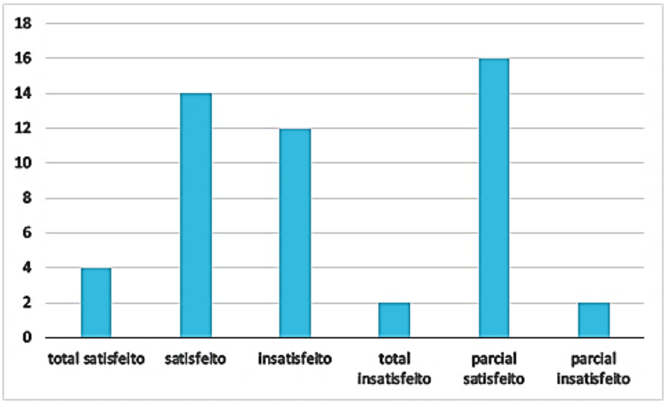


Gráfico 5: Nível de satisfação relacionado a união de turma

4 | CONCLUSÃO

Podemos concluir com base na análise dos dados da pesquisa que a ideia que a união melhora o rendimento para alunos do curso Matemática Licenciatura é bastante homogêneo, apenas uma pessoa afirmou que tal engajamento não influenciaria em resultados individuais. Também foi possível notar que os alunos tendem a desejar que sua turma seja unida, embora 72% declaram que realidade é o contrário. Além disso, detectamos que os alunos não possuem uma cooperação efetiva uma vez que 64% tentam estabelecer uma harmonia, mas de certa forma a desunião ainda se procede baseada na falta de interação, conflitos de personalidade e disputas internas.

É fato que o consenso de unidade é benéfico pois temos que enfrentar muitas adversidades, mas quando nos juntamos um ao outro a coragem aumenta, o nosso potencial se duplica e os nossos objetivos se tornam mais passíveis de realização. (Jenifer Romualdo). Além disso, as trocas de experiências melhoram nossa formação. Uma ex-professora dizia "Professores lidam todo dia com gente, e gente ou pessoas são as coisas mais difíceis de lidar". A convivência da graduação enquanto sujeito ativo torna-se um preparo para nossa atuação profissional.

Como ser um bom profissional se não sabe compreender as personalidades do outro? Portanto, concluímos que os alunos deveriam refletir sobre sua forma de cooperação como também buscar integração entre seus colegas de turma de modo a obter os benefícios que esta ação proporciona. Notando que além de elevar seu empenho no curso, possibilitará a experimentar uma graduação mais prazerosa. Resultando numa formação de não somente professores, mas professores mais humanizados.

REFERÊNCIAS

O que é União? Disponível em http://www.significados.com.br/uniao/ Acessado 08/08/2016 ás 21:06.

Modelos de questionários de feedback de clientes
Disponível em https://pt.surveymonkey.com/mp/customer-satisfaction-survey-templates/ Acessado 08/08/2016 ás 21:15.

PORTAL EDUCAÇÃO - Cursos Online : Mais de 1000 cursos online com certificado
Disponível em http://www.portaleducacao.com.br/administracao/artigos/10105/trabalho-em-equipe-juntos-somos-muito-melhores-do-que-sozinhos#ixzz4Gmn6kNyC Acessado 08/08/2016 ás 20:52.

ROMUALDO, Jenifer Soares. **A importância do trabalho em equipe**. LN Comunicação. Disponível em http://www.lncomunicacao.com.br/site/a-importancia-do-trabalho-em-equipe/ Acessado 08/08/2016 às 20:17.

44 frases de trabalho em equipe para motivar a todos. Tua Carreira. 2019 Disponível em https://www.tuacarreira.com/frases-de-trabalho-em-equipe/ Acessado em 30/05/2019 às 4:15.

SOBRE OS ORGANIZADORES

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA - Professor do Departamento de Educação da Universidade do Estado da Bahia (Uneb - Campus VII) e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA (Uneb - Campus III). Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB), Especialista em Psicopedagogia Institucional e Clínica pela Faculdade Regional de Filosofia, Ciências e Letras de Candeias (IESCFAC), Especialista em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pelo Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco (CESVASF). Foi professor e diretor escolar na Educação Básica. Coordenou o curso de Licenciatura em Matemática e o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) no Campus IX da Uneb. Foi coordenador adjunto, no estado da Bahia, dos programas Pró-Letramento e PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa). Participou como formador do PNAIC/UFSCar, ocorrido no Estado de São Paulo. Pesquisa na área de formação de professores que ensinam Matemática, Ludicidade e Narrativas. Integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/UFSCar), na condição de pesquisador; do Grupo Educação, Desenvolvimento e Profissionalização do Educador (Uneb/PPGESA), na condição de vice-líder e do Laboratório de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (LEPEM/Uneb) na condição de líder. É editor-chefe da Revista Baiana de Educação Matemática e coordenador do Encontro de Ludicidade e Educação Matemática.

ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA - Doutorando em Educação pela Universidade Federal do Sergipe - UFS/PPGED. Mestre em Educação de Jovens e Adultos pela Universidade do Estado da Bahia – UNEB/MPEJA. Especialização em Tópicos Especiais em Matemática; Ensino de Matemática; Educação de Jovens e Adultos; Matemática Financeira e Estatística; e Gestão Escolar. Licenciado em Matemática pela Universidade Nove de Julho. Atualmente é professor efetivo do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano – IF Sertão/PE. Coordenou o Curso de Licenciatura em Matemática pelo Plano Nacional de Formação dos Professores da Educação Básica – *PARFOR* pela Universidade do Estado da Bahia – UNEB, campus XVI/Irecê-BA. Coordena o Núcleo de Educação Matemática – NEMAT na Universidade do Estado da Bahia – UNEB, campus VII/Senhor do Bonfim-BA. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Formação de Professores e Tecnologias da Informação e Comunicação (UFS/CNPq).

MIRIAN FERREIRA DE BRITO - Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Especialista em Metodologia do Ensino do Desenho pela Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), Mestre em Educação e Contemporaneidade pela Universidade do Estado da Bahia (UNEB) e, Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Realiza estudos de Pós-doutoramento no Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos – PPGESA (set/2020)/ UNEB-Juazeiro, Bahia. É membro dos Grupos de Pesquisa: Estudos em Educação, Matemática e Tecnologias (GEEMAT); Estudos em Educação Científica (GEEC); e Educação, Formação de Professores, Ludicidade e Processos Tecnológicos (ELUFOTEC). Atualmente é Professora da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), Departamento de Educação, Campus VII-Senhor do Bonfim, Bahia, em regime de Dedicação Exclusiva, com experiência na área de educação e educação matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino e metodologia da geometria e da matemática, matemática e geometria na educação infantil e ensino fundamental e, formação de professores.

ÍNDICE REMISSIVO

S

T

U

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020