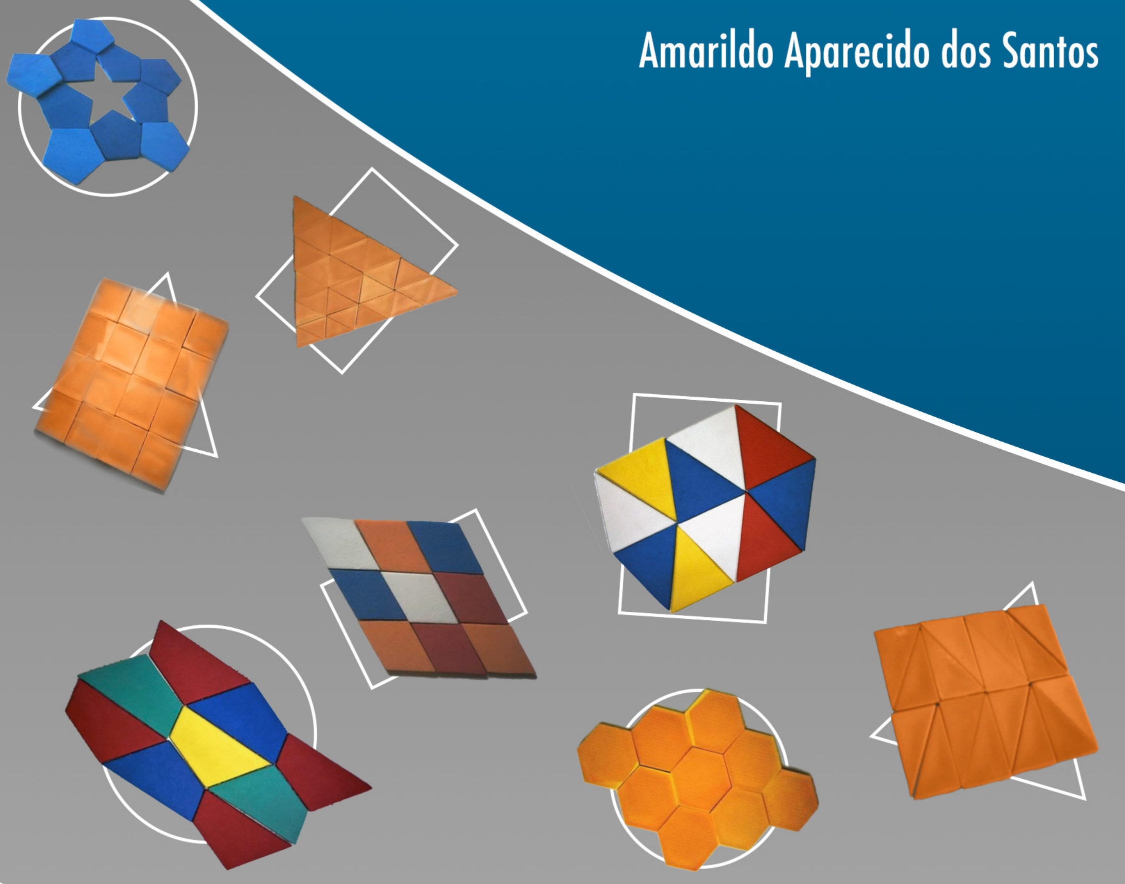
Atena Editora
Ano 2020

UM ESTUDO DAS PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS VIA PAVIMENTAÇÃO

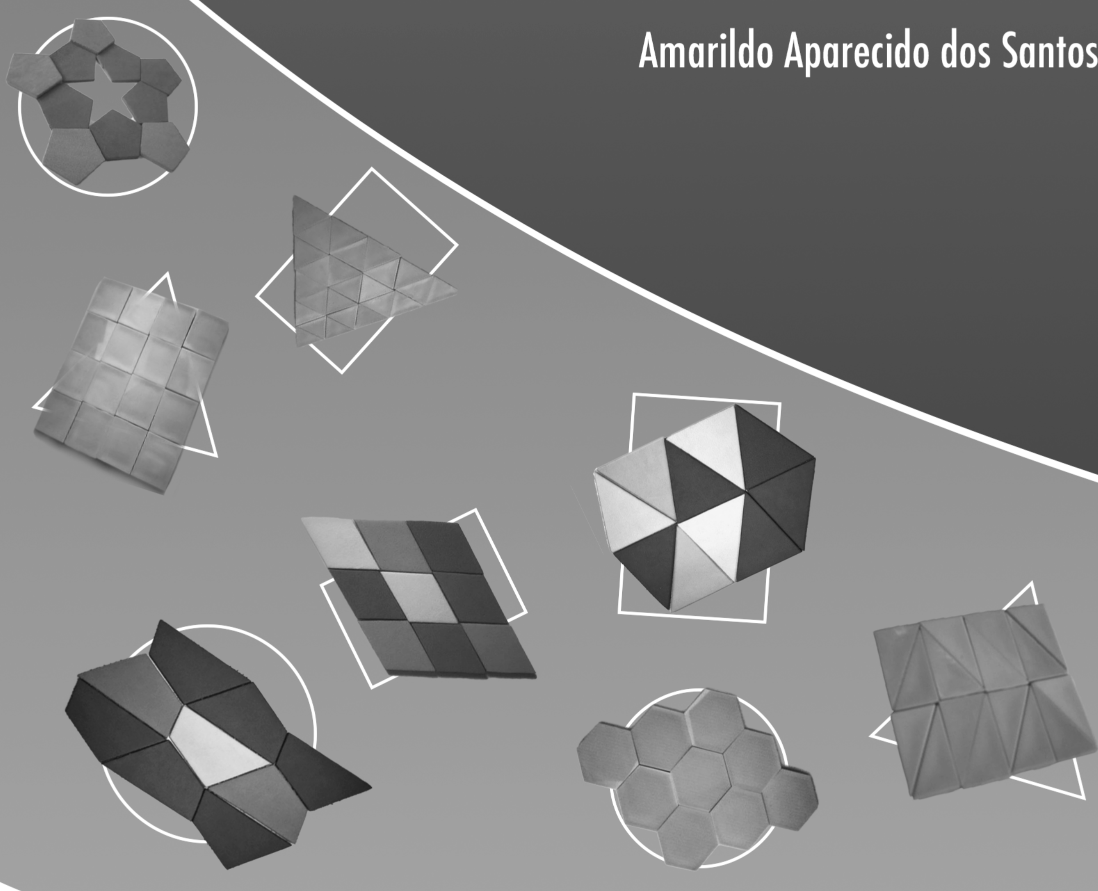
Amarildo Aparecido dos Santos



Atena
Editora
Ano 2020

UM ESTUDO DAS PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS VIA PAVIMENTAÇÃO

Amarildo Aparecido dos Santos



Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
O Autor

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena
Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Um estudo das propriedades dos polígonos via pavimentação

Editora Chefe:	Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária:	Janaina Ramos
Diagramação:	Natália Sandrini de Azevedo
Correção:	Giovanna Sandrini de Azevedo
Edição de Arte:	Luiza Alves Batista
Revisão:	O Autor
Autor:	Amarildo Aparecido dos Santos

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S237 Santos, Amarildo Aparecido dos
Um estudo das propriedades dos polígonos via pavimentação / Amarildo Aparecido dos Santos. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-539-6
DOI 10.22533/at.ed.396202810

1. Polígonos. 2. Pavimentações no plano. 3. Geometria dinâmica. I. Santos, Amarildo Aparecido dos. II. Título.
CDD 625.76

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

DEDICATÓRIA

À minha esposa Rosângela Alves da Cruz dos Santos.

Ao meu filho João Albino da Cruz dos Santos.

Aos meus pais, Albino dos Santos (*in memorian*) e

Conceição Lessa dos Santos (*in memorian*)

Ao meu sogro João Francisco da Cruz (*in memorian*) e a

minha sogra Augusta Alves da Cruz (*in memorian*).

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por criar, uma nova oportunidade na minha vida para a realização do desejo de ser mestre.

Ao Professor Doutor Vincenzo Bongiovanni pela orientação, dedicação, compreensão dos nossos anseios e sapiência em fazer florescer o sonho de ser mestre.

À minha esposa Rosângela Alves da Cruz dos Santos e, meu filho João Albino da Cruz dos Santos, pela compreensão e incentivo em todos os meus momentos de desatenção quando estava concentrado na elaboração deste trabalho.

À amiga Ms Andréa Gomes Nazuto Gonçalves pela sua grande amizade, pelo apoio irrestrito nas disciplinas cursadas, pelo companheirismo nos trabalhos de pesquisa e pelo infinito apoio durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos alunos que participaram da sequência de atividades Abimael Silva Passos de Oliveira, Cristiano Ferreira Astolpho, Henrique Braguiroli de Queiroz, Iohanna Cristina Almeida Figueiredo, Karla Carolina Melchior de Oliveira, Naum Alves Correia, Stephanie Deniz de Almeida, Pâmela Souza de Almeida pela colaboração, empenho e apoio.

À grande amiga Professora Doutora ELISABETE MARCON MELLO pelo incentivo a publicação deste livro e pela irrestrita colaboração em todos os trabalhos e projetos de pesquisa que estamos inseridos.

SUMÁRIO

RESUMO

O objetivo do presente trabalho é investigar o envolvimento de alunos da 8ª série do Ensino Fundamental no estudo das propriedades dos polígonos a partir de pavimentação no plano. Refletindo sobre este objetivo surgiu a questão de pesquisa: *Em que medida um trabalho de exploração com as pavimentações no plano favorece o estudo das propriedades dos polígonos?* criamos, então, uma sequência de atividades, utilizando alguns elementos da metodologia de pesquisa denominada engenharia didática. A sequência foi dividida em três blocos. O primeiro sobre o reconhecimento dos polígonos via manipulação de material concreto; o segundo com o uso do *software* Cabri Géomètre e o terceiro bloco no ambiente papel e lápis. A pesquisa foi amparada pelos pressupostos teóricos de Parzysz sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico; pelas ideias de Machado, que sugere para a construção do pensamento geométrico a articulação entre quatro processos: percepção, construção, representação e concepção; pela teoria dos campos conceituais proposta por Vergnaud. A análise dos resultados obtidos na aplicação da sequência mostrou que o trabalho realizado pelos alunos nos blocos I e II foi insuficiente para que os alunos atingissem a etapa de validações dedutivas, mas foi importante por solidificar conceitos, tais como o conceito de pavimentação e o conceito de polígono regular.

PALAVRAS-CHAVE: Polígonos, Pavimentações no plano, Geometria Dinâmica.

ABSTRACT

The aim of this paper is to investigate the involvement of students of the 8th grade (Fundamental Teaching) in the study of the properties of the polygons, starting from paving in the plan. Thinking about this objective, the research subject emerged: How much can a exploration work with the pavings in the plan help the studies of the properties of the polygons? So, a sequence of activities was created using some elements of the methodology of research, denominated engineering didacticism. The sequence was divided in three blocks. The first about the recognition of the polygons by manipulating of concrete material; the second with the use of the software Cabri Gèométre and the third block in the atmosphere paper and pencil. The research was aided by the theoretical presuppositions of Parzysz on the development of the geometric thought; for Machado's ideas, that suggests for the construction of the geometric thought the articulation among four processes: perception, construction, representation and conception; by the theory of the conceptual fields proposed by Vergnaud. The analysis of the results obtained in the application of the sequence showed that the work accomplished by the students in the blocks I and II was insufficient so that the students reached the stage of deductive validations, but it was important for solidifying concepts, such as the paving concept and the concept of regular polygon.
KEYWORDS: Polygons, Pavings in the plan, Dynamic Geometry.

CAPÍTULO 1

PROBLEMÁTICA

INTRODUÇÃO

Foi na década de 90 que iniciei as atividades como professor de matemática com a normal insegurança provocada pela profissão docente e a constante preocupação com o desenvolvimento do processo de assimilação dos alunos no aprendizado matemático.

Em 2000, introduzi um trabalho sobre construções geométricas de polígonos regulares com régua e compasso na escola pública estadual. Deparei-me com algumas dificuldades apresentadas pelos alunos, ora no manuseio do compasso e da régua, ora na percepção das propriedades apresentadas na construção e até mesmo no reconhecimento das figuras geométricas associadas ao cotidiano por meio de visualização. Essas dificuldades estimularam-me a questionar seus reais motivos e a empreender uma pesquisa sobre o estudo de polígono. Tais objetos estão presentes em pisos, paredes, calçadas e até mesmo em materiais pedagógicos escolares manipulativos.

No final de 2003, como professor efetivo na escola E. E. Profa. Inah de Mello, recebi informações sobre o projeto *Bolsa Mestrado* desenvolvido pela Secretaria de Educação. Estava aberta a oportunidade de aperfeiçoar os meus estudos investigativos sobre a construção de polígonos.

Como apoio à minha pesquisa, utilizei os *Parâmetros Curriculares* Nacionais – PCN, uma proposta pedagógica para o ensino básico em todo território nacional que serve como referência para o trabalho desenvolvido em sala de aula, auxiliando o desempenho do professor.

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais constituem um referencial para a construção de uma prática que favoreça o acesso ao conhecimento matemático, que possibilite de fato a inserção dos alunos como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura. (BRASIL, 1998, p.59)

Os PCN estabelecem algumas condições para que as escolas ofereçam aos jovens o acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários para a aprendizagem. As condições que se referem ao tema deste trabalho são: *enfatizar a exploração do espaço e de suas representações e a articulação entre geometria plana e espacial; destacar a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e oferecer sugestões de como trabalhar com explorações, argumentações e demonstrações; apresentar uma graduação dos conteúdos do segundo para o terceiro ciclo que contempla diferentes níveis de aprofundamento, evitando repetições.*

> Em síntese, propõem e explicitam algumas alternativas para que se desenvolva um ensino de Matemática que permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido, desenvolver sua capacidade cognitiva e sua confiança para enfrentar desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício da cidadania, ao longo de seu processo de aprendizagem. (BRASIL, 1998, p. 60)

No que tange aos conceitos geométricos, os PCN assim relatam:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998, p.51)

Em relação à forma de abordar conteúdos, podemos destacar:

> No que diz respeito ao campo das figuras geométricas, inúmeras possibilidades de trabalho se colocam. Por exemplo, as atividades de classificação dessas figuras com base na observação de suas propriedades e regularidades.
>
> Atividades que exploram a composição e decomposição de figuras, como ladrilhamentos, tangrans, poliminós, fazem com que os alunos verifiquem que o recobrimento de uma superfície pode ser feito por determinadas figuras, como triângulos equiláteros, quadrados, retângulos, hexágonos regulares. Assim como a descoberta de que toda figura poligonal pode ser composta/ decomposta por outra e em particular por triângulos, o que facilita o cálculo de áreas e a determinação da soma das medidas dos seus ângulos internos (BRASIL, 1998, p 123)

Este último parágrafo deixa clara a ênfase dada à pavimentação com polígonos regulares ou não, citando que os polígonos podem compor uma superfície, bem como serem decompostos em triângulos com o objetivo de encontrar as medidas dos ângulos internos e a soma de suas medidas, assim como também podem ser feitas comparações entre figuras tendo como base suas propriedades, entre outras.

A utilização dos parâmetros curriculares reforça a minha preocupação com o desenvolvimento de novos recursos e estratégias para o ensino e aprendizagem da matemática.

O aprendizado matemático é parte importante na formação do aluno como um cidadão, pois permite resolver problemas do dia-a-dia desde a mais simples até a mais complexa das atividades. Os conceitos matemáticos se transformam em instrumentos de compreensão, intervenção e mudanças de previsão da realidade. A geometria é parte fundamental do ensino da matemática. Trata-se de um conhecimento que faz parte das grandes construções de nossa História, tendo em vista estar ao alcance dos alunos, primeiro empiricamente e depois abstratamente. Permite um trabalho criativo, desperta a curiosidade e favorece a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. A geometria é uma forma de comunicação entre aluno e professor muito importante, além disso é fácil de ser estimulada, pois em toda parte existe geometria, basta um olhar atento aos detalhes para podermos aguçar a criatividade do aluno.

Diante do exposto e, procurando elementos que favorecessem as inquietações apresentadas pelos alunos e a melhora da compreensão sobre polígonos, optei por trabalhar com a geometria, com o intuito de estabelecer uma articulação entre conhecimento e prática.

Para justificar a escolha do tema e fundamentar as dificuldades mais latentes no ensino de Polígonos Regulares apliquei um questionário diagnóstico a 97 alunos de 8ª série da Escola Estadual Profa. Inah de Mello.

As perguntas que compunham o questionário foram as seguintes:

1. Você sabe o que é um polígono regular? Explique com suas palavras.
2. Cite um polígono regular que não seja um quadrado.
3. Cite algumas propriedades dos polígonos regulares.
4. Geralmente os pisos das residências têm formas poligonais. Na sua casa a forma do piso é um polígono regular? Se **sim**, qual o polígono regular?
5. Você é capaz de desenhar uma parte do piso de sua casa? Desenhe-a

A análise dos resultados nos permitiu verificar o conhecimento dos alunos vinculados aos polígonos.

Com relação à primeira pergunta, obtivemos as seguintes respostas:

57%	É uma figura que tem todos os lados iguais.
21%	Sim, é um quadrado.
7%	Uma figura com linhas retas.
6%	Sem resposta/não sabia.
5%	Forma geométrica com os mesmos ângulos.
3%	Figura com 4 lados ou mais que tenha todos os lados iguais.
1%	Polígono regular é uma figura cujos ângulos e lados são iguais.

Podemos observar que apenas 1% dos alunos se aproximou da afirmação correta sobre polígonos regulares.

Com relação à segunda pergunta, obtivemos as seguintes respostas:

44%	Um triângulo.
17%	Um retângulo.
16%	Pentágono.
11%	Hexágono.
5%	Triângulo equilátero/hexágono regular.
2%	Losango.
2%	Pentágono/Hexágono.
1%	Pentágono/Dodecágono.
1%	Dodecágono.
1%	Octógono.

Os resultados mostram que muitos alunos não se apropriaram ainda da nomenclatura para indicar um *polígono regular* e outros não se apropriaram da definição de *polígono regular*. Em muitas respostas estavam ausentes a palavra regular. Dois alunos responderam losango, preocupados apenas com lados de mesma medida.

As respostas ao terceiro item: *Cite algumas propriedades dos polígonos regulares*, resultaram na seguinte tabela:

20%	Sem resposta.
15%	Tem quatro ou mais lados iguais.
13%	Linha, diâmetro, profundidade, reta, ângulo.
11%	Ângulos iguais.
10%	Lados iguais.
9%	Lados e ângulos iguais.
6%	Quatro lados e linhas retas.
5%	Bissetriz, mediatriz.
4%	Número de vértice igual ao número de lados.
3%	Triângulos e lados iguais.
1%	Os que têm 5 partes iguais.
1%	É fácil dizer, pois, eles são retos.
1%	Quadrado, dado, piso, etc.
1%	Possuem ângulos iguais e todos têm quatro lados.

Observamos que 20% dos alunos deixaram de responder e 13% utilizaram argumentações que não se referem diretamente a polígonos regulares. As respostas foram diversificadas e com informações pouco relacionadas à pergunta. Apenas 9% dos alunos que responderam à questão citaram adequadamente as propriedades dos polígonos regulares.

A quarta pergunta: "*Geralmente os pisos das residências têm formas poligonais. Na sua casa a forma do piso é um polígono regular? Se **sim**, qual o polígono regular?*", nos remeteu à seguinte tabela:

78%	Quadrado.
11%	Não.
5%	Retângulo.
2%	Pentágono.
1%	Triângulo equilátero.
1%	Sim.
1%	Sem resposta.
1%	Quadrado e triângulo.

Observamos que a grande maioria dos alunos informou que o polígono regular de suas residências é o quadrado. Notamos que essa figura dispensa a palavra "regular". Onze alunos responderam *não*, porque os pisos de suas casas apresentam outras formas poligonais ou suas casas não possuem pisos.

A última pergunta: "*Você é capaz de desenhar uma parte do piso de sua casa? Desenhe-a.*", resultou na seguinte tabela:

79%	Desenhou o piso com um ou mais quadrados
5%	Não desenhou
5%	Desenhou o piso com retângulo
5%	Desenhou o piso só com triângulos
5%	Não tem piso
1%	Utilizou quadrado e triângulo

Com relação aos desenhos dos pisos de suas casas, foi interessante observar que 79% dos alunos fizeram um quadrado apenas, alguns fizeram dois, outros fizeram quatro quadrados. Um aluno detalhou o piso de toda a casa, colocando o modelo em cada cômodo, os azulejos das paredes e a sua localização. 5% dos alunos informaram que em suas casas não há piso. Outros cinco alunos não desenharam o piso de suas casas, mesmo tendo respondido sim na questão anterior.

Os questionários mostraram que os alunos não se apropriaram do conceito de polígono regular quando apresentados formalmente na 7ª série do Ensino Fundamental.

Procurando mais referências para dar apoio a esta pesquisa, encontramos a dissertação de mestrado de Sirlei Tauber de Almeida, com o título *Um estudo de pavimentação do plano utilizando caleidoscópios e o software Cabri Géomètre II*, que apresenta temas como: simetrias (reflexão, rotação e translação), polígonos regulares, construções geométricas, pavimentações do plano e sequências numéricas, etc. Essa pesquisa foi aplicada a alunos do Ensino Médio numa escola de Cordeirópolis – SP, no primeiro semestre de 2002. Os seus objetivos foram investigar que papel a geometria deve desempenhar na formação do aluno; que lugar deve ter no currículo programático; se a geometria deve aparecer isolada ou manter uma ligação com outras áreas e que papel deve ser reservado para os modelos físicos, os materiais manipuláveis, a informática, etc. Baseada nessas inquietações a pesquisadora formulou a seguinte questão de pesquisa: É possível elaborar uma estratégia de ensino em Geometria utilizando Caleidoscópios, o *software Cabri Géomètre II e jogos, contribuindo para que a aprendizagem se torne interessante e participativa?* As atividades foram aplicadas para uma classe da segunda série do Ensino Médio de uma escola estadual, através da Metodologia de Resolução de Problemas. A autora conclui que o método utilizado conjuntamente com a sequência de aplicação apresentou uma boa melhoria na resolução de problemas envolvendo pavimentações no plano.

Uma segunda dissertação relacionada com o Ensino e Aprendizagem de Geometria, com o título *Ensino aprendizagem de Geometria: uma proposta fazendo uso* *de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais*, de Renata Aparecida Martins, teve por finalidade explorar como são as tesselações do plano (por polígonos regulares) e do espaço (por poliedros regulares com base caleidoscópicas em suas faces). As construções geométricas foram feitas graficamente e depois no computador, estabelecendo uma interação entre o laboratório de ensino e o de informática. O objetivo da pesquisa foi levar o aluno a perceber a matemática existente nos mosaicos ornamentais e nas pavimentações do plano e do espaço e, ao mesmo tempo, oferecer um ambiente propício para a aprendizagem de geometria. A pesquisa foi aplicada a alunos da 7ª série do Ensino Fundamental de uma escola estadual, utilizando a metodologia de resolução de problemas.

A terceira dissertação relacionada ao Ensino e Aprendizagem da geometria, intitulada *Ensino de Geometria através de Ornamentos*, de Viviane Clotilde da Silva, descreve uma proposta de como desenvolver o ensino da geometria através de desenhos, tendo como base alguns ornamentos, como faixas, rosetas e mosaicos, utilizando na sua confecção translação, reflexão e rotação. O objetivo era elaborar uma proposta de Ensino de Geometria utilizando ornamentos, para estimular a criatividade através da Metodologia de Resolução de Problemas, por meio de trabalhos em grupos e ensino pela descoberta. A pesquisa foi aplicada a alunos da 7ª série de uma Escola Básica Municipal, de Blumenau, Santa Catarina e foi dividida em 4 momentos para a aplicação. Num primeiro momento foi enviado um questionário para 58 professores de Matemática do 1º grau da rede municipal de Blumenau, via correspondência através da secretaria das escolas e, o retorno deveria ser feito do mesmo modo; num segundo momento, realizou-se entrevista com alguns professores com o objetivo de manter com eles um contato mais direto para melhor esclarecimento com relação a algumas questões; num terceiro momento, partiu para a aplicação do projeto em sala de aula e, por último, coleta de depoimentos escritos dos alunos que participaram da aula.

Por fim, nos apoiamos num artigo que se encontra na *Revista do Professor de Matemática, nº 40, 1999,* de Sérgio Alves e Mário Dalcin, que trata da pavimentação através de mosaicos respondendo ao problema de como cobrir superfícies planas com regiões poligonais.

Encontramos no material da Associação de Professores de Matemática, de Lisboa, que trata pavimentações, a fonte de inspiração para produzir o *kit* de material concreto que utilizamos no desenvolvimento deste trabalho. Esta publicação resulta do trabalho realizado no âmbito de *Um Círculo de Estudos sobre pavimentações*, do Centro de Formação da APM (Associação de Professores de Matemática), tendo sua 1ª edição publicada em janeiro de 2000.

Fizemos este levantamento para nos inteirar dos trabalhos já realizados por outros pesquisadores e que estão próximos do nosso tema de pesquisa. A associação dos polígonos regulares com as pavimentações foi feita para interligar o tema da pesquisa com o dia-a-dia do aluno.

DESCRIÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho tratará do estudo dos polígonos a partir das pavimentações, e será dividido em quatro capítulos.

No Capítulo 1, apresentaremos o tema de pesquisa, a sua justificativa, o referencial teórico, a questão de pesquisa e os procedimentos metodológicos.

No Capítulo 2, traçaremos um panorama histórico sobre os polígonos regulares e as pavimentações. Desenvolveremos esse estudo desde Euclides, passando por Clairaut, Legendre, Hadamard e Hilbert, finalizando com a análise deste conteúdo em alguns livros didáticos.

No Capítulo 3, trataremos da concepção e análise a *priori* da sequência de ensino. Serão explicitadas as razões das escolhas didáticas e analisadas as possíveis estratégias e dificuldades que os alunos poderão ter durante a realização das atividades.

No Capítulo 4, trataremos da organização e aplicação da experimentação, sucedida da análise a *posteriori* das produções dos alunos. No confronto entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori* validaremos ou não a questão de pesquisa.

Para concluir, no Capítulo 5 apresentaremos os principais resultados e conclusões da pesquisa.

REFERENCIAL TEÓRICO

Esta pesquisa será fundamentada na organização do ensino de geometria proposta por *Parzysz*, na construção do conhecimento geométrico descrito por *Machado* e nos campos conceituais de *Vergnaud*.

O Modelo de Parzysz

Levando em consideração as atividades a serem desenvolvidas pelos alunos, iremos nos apoiar no artigo de Bernard Parzysz (*Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique em PE1-2001*), o qual distingue 4 níveis no desenvolvimento do pensamento geométrico:

- **Nível 0 - (G0):** A geometria concreta, isto é, os objetos são materializados;
- **Nível 1 - (G1):** A geometria espaço-gráfica, ou seja, os objetos são representados com o uso de instrumentos (régua, compasso, *software* geométrico);
- **Nível 2 - (G2):** A geometria proto-axiomática, onde as demonstrações são feitas a partir de premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo sem a necessidade de explicitar um sistema de axiomas
- **Nível 3 - (G3):** A geometria axiomática, onde as demonstrações utilizam um sistema de axiomas.

Parzysz afirma que os níveis 0 e 1 correspondem à *geometria empírica*, onde a argumentação apoia-se essencialmente em critérios perceptivos. Os níveis 2 e 3 correspondem à *geometria teórica*, onde a única argumentação aceitável é a demonstração.

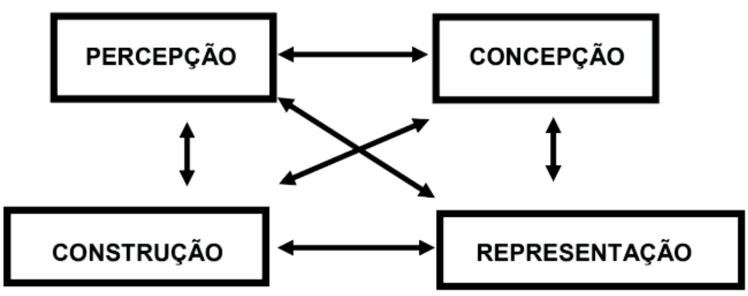
A situação pode estar esquematizada pelo diagrama abaixo:

	Geometria não axiomática		**Geometria axiomática**	
Tipos de geometria	Geometria concreta (G0)	Geometria espaço gráfica (G1)	Geometria proto-axiomática (G2)	Geometria axiomática (G3)
Objetos	Físicos		Teóricos	
Validações	Perceptivas		Dedutivas	

Sintetizando as ideias apresentadas na tabela podemos perceber que Parzysz destaca nas geometrias dois aspectos, por um lado, a natureza dos objetos, divididos em físicos ou teóricos e, por outro lado, as validações perceptivas ou dedutivas. As geometrias não axiomáticas referem-se à geometria concreta (G0) que contempla a realidade e a geometria espaço gráfica (G1) onde os objetos são representados numa folha de papel ou numa tela do computador. As geometrias axiomáticas referem-se aos níveis (G2) e (G3). Este trabalho procurará se apoiar nos níveis descritos por Parzysz.

As Quatro Dimensões de Machado

Nilson José Machado em seu livro *Epistemologia e Didática: As concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente*, 6ª edição, 2005, trata da construção do pensamento geométrico fazendo considerações sobre o processo cognitivo do conhecimento. Ele sugere para a construção do pensamento uma articulação entre 4 faces de um tetraedro: a percepção, a construção, a representação e a concepção.



(Anais -Sphem, p. 572, figura 4).

- A **percepção** refere-se à observação e a manipulação de objetos materiais. É a caracterização das formas mais frequentes presentes no mundo à nossa volta. A percepção ocorre por meio de atividades empíricas e estimula a construção.

- A **construção** refere-se à produção de materiais que possam ser manipulados, ou seja, à elaboração de objetos em sentido físico. A construção reforça a percepção.

- A **representação** refere-se à reprodução por meio de desenhos, ou objetos percebidos ou construídos. Fazemos referência ao Desenho Geométrico, bem como à Geometria Projetiva e a Geometria Descritiva. A representação favorece e é favorecida pela percepção e pela construção.

- A **concepção** refere-se à organização conceitual, à busca do conhecimento geométrico por meio do raciocínio lógico-dedutivo e da teorização. Diz respeito à sistematização do conhecimento geométrico, é onde os elementos conceituais são evidenciados, onde têm predomínio as definições formais, o enunciado preciso das propriedades, proposições e teoremas. A concepção favorece a percepção, a construção e a representação.

Em Machado destacaremos:

> [...] Com efeito, não obstante o fato da iniciação em geometria realizar-se por meio da percepção de formas e de suas propriedades características, através de atividades sensoriais, como a observação e a manipulação de materiais, desde muito cedo tais atividades relacionam-se diretamente com a construção de objetos em sentido físico, através de massas, varetas ou papéis, por exemplo, bem como com a representação de objetos, através de desenhos, onde as propriedades costumam ser parcialmente concretizadas. (Machado, 2005, p.54)

A metáfora utilizada por Machado não privilegia nenhuma das faces do tetraedro, e ao mesmo tempo distribui igualmente a importância que cada uma tem no processo de ensino/aprendizagem de geometria. O conhecimento geométrico encontra-se equilibrado em qualquer uma das características de cada face. Utilizaremos as concepções descritas por Machado no nosso trabalho.

Os Campos Conceituais de Vergnaud

Gérard Vergnaud (1996, p.155-191) defende que o conhecimento conceitual emerge de situações-problema, isto é, a partir do estabelecimento de referências que relacionam conceitos a situações e reciprocamente. Um conceito não aparece isoladamente numa situação-problema, ele é parte integrante do processo de formação. O conhecimento está organizado em *Campos Conceituais*.

Campo Conceitual é um conjunto heterogêneo de problemas e situações, conteúdos e operações do pensamento, conectados uns aos outros, que devem sofrer intervenções ao longo do processo de aquisição. A aquisição do conhecimento se dá, em geral, por meio de situações-problema com os quais o aluno tem alguma familiaridade, o que implica em dizer que a origem do conhecimento tem característica local.

Genericamente, Vergnaud considera que um conceito é formado por três conjuntos (S, I, R):

- **S** conjunto de situações que dá significado ao objeto.

- **I** conjunto de invariantes (objetos matemáticos, propriedades, situações, etc.)

que podem ser reconhecidos e utilizados pelo sujeito para análise e domínio das situações, ou seja, organização de um conceito por meio dos invariantes operatórios. Trata das propriedades e procedimentos necessários para definir o objeto;

- **R** conjunto das representações simbólicas utilizadas pelo sujeito para identificação e representação desses invariantes (representa as situações e os procedimentos para que o sujeito possa lidar com esses invariantes).

Estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito, no decurso da aprendizagem ou quando da sua utilização é, necessariamente, considerar estes três aspectos ao mesmo tempo.

Cabri Géomètre

Estamos vivendo numa época em que o acesso à rede mundial de computadores na escola pública está emergente. O uso do computador no desenvolvimento deste trabalho é um recurso importante e necessário para oferecer ao aluno um novo ambiente prazeiroso e agradável.

A utilização da informática no processo de ensino-aprendizagem trouxe mudanças positivas para a sala de aula, como mostram muitas pesquisas. O computador é uma ferramenta que permite ao aluno reproduzir na tela o que se faz com lápis e papel. No nosso caso, vamos utilizar o Cabri Géomètre II.

Este *Software* foi desenvolvido no Laboratório Leibniz (UJF e CNRS), em Grenoble na França, por Franck Bellemain e Jean-Marie Laborde. O Cabri é fruto do trabalho de uma equipe interdisciplinar em Educação Matemática e Informática.

O objetivo de trabalhar com o ambiente de geometria dinâmica é dar condições para que os alunos possam realizar construções geométricas.

O Cabri disponibiliza um conjunto de comandos necessários para o desenvolvimento de construções relativas ao manuseio de régua e compasso. Além disso, o Cabri permite ao usuário criar macro construções.

Uma macro construção é uma sequência de comandos independentes úteis para criar novas ferramentas que constroem objetos e executam tarefas repetitivas. O procedimento para criar a macro construção necessita de uma sequência de comandos ordenados. Para definir uma macro, é preciso então que a construção correspondente já tenha sido realizada. Vamos iniciar apresentando o ambiente Cabri.

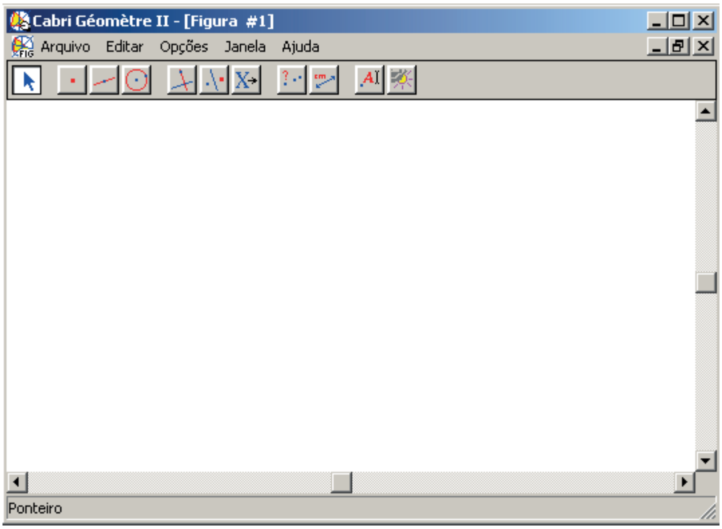


Figura 1 - Interface principal do Cabri Géomètre

Encontramos 10 ícones que podem ser utilizados e iremos descrever apenas aqueles que serão utilizados na construção “triângulo equilátero”.

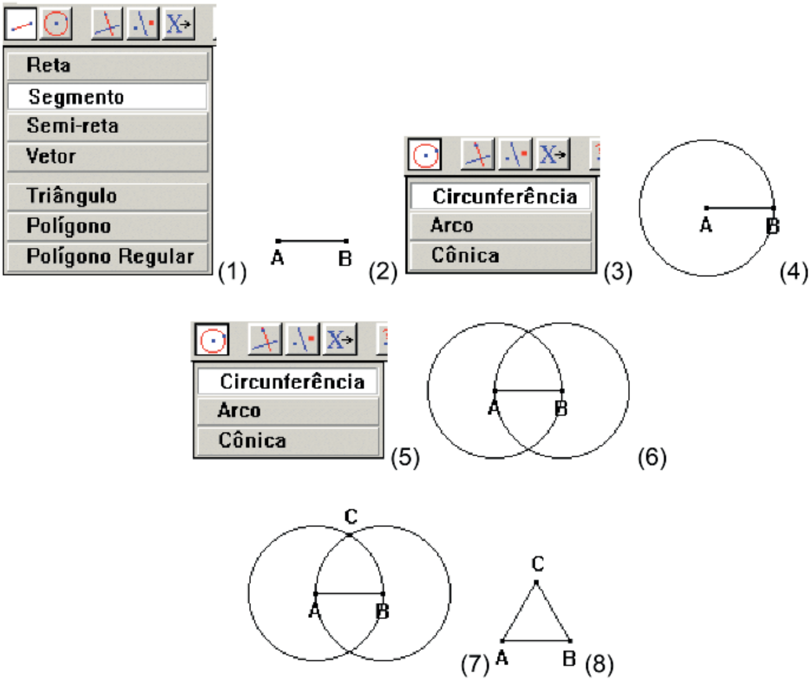
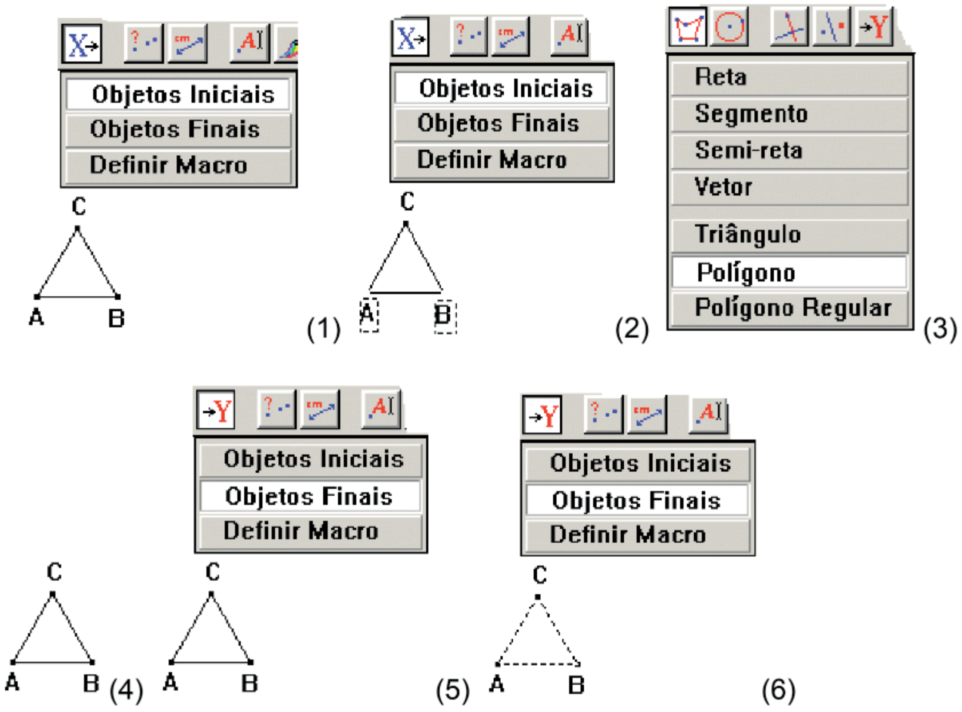
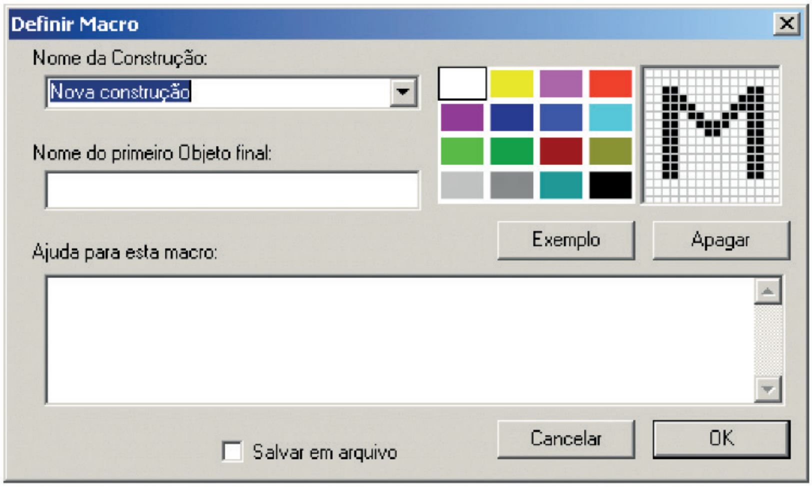


Figura 2 – Ferramentas do Cabri Géomètre

Na construção do triângulo equilátero, iniciamos com ferramenta “reta”, onde encontramos “segmentos” **(1)** e determinamos o segmento com extremidades A e B **(2)**. A seguir utilizamos a ferramenta “curvas”, onde encontramos “circunferências” **(3)** e determinamos a circunferência de centro em A e raio $\overline{AB}$ **(4)**. Utilizando a mesma ferramenta **(5)**, traçamos outra circunferência de centro em B e raio $\overline{AB}$ **(6)**, determinando o ponto de intersecção C **(7)**. Finalmente traçamos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, encontrando o triângulo equilátero ABC **(8)**.

Tendo o triângulo equilátero construído, podemos construir a macro “triângulo equilátero”.





(7)

Figura 3 - Ferramentas do Cabri Géomètre

Iniciamos acionando a ferramenta “Macro”, onde encontramos “objetos iniciais” **(1)**, a seguir clicamos no ponto A e no ponto B. Neste caso os pontos A e B ficarão em destaque (piscando) **(2)**. Para continuar, devemos acionar a ferramenta “reta”, onde encontramos polígono **(3)** e em seguida clicamos nos vértices A, B e C, formando o polígono ABC **(4)**. Agora podemos acionar a ferramenta macro novamente, onde encontramos “objetos finais” **(5)**, e clicamos no polígono ABC, agora o triângulo ABC ficará em destaque (piscando) **(6)**. Finalmente devemos definir a macro acionando a ferramenta “Definir macro” **(7)**. Podemos a seguir, salvar a macro dando nome à construção. Após a criação da macro a ferramenta *Triângulo Equilátero* aparecerá disponível no menu para ser utilizada.

Durante uma atividade, para acionar a macro *Triângulo Equilátero* basta clicar no ícone , mantendo pressionado o mouse; irá aparecer a ferramenta *Triângulo Equilátero*, conforme indicado na figura a seguir:

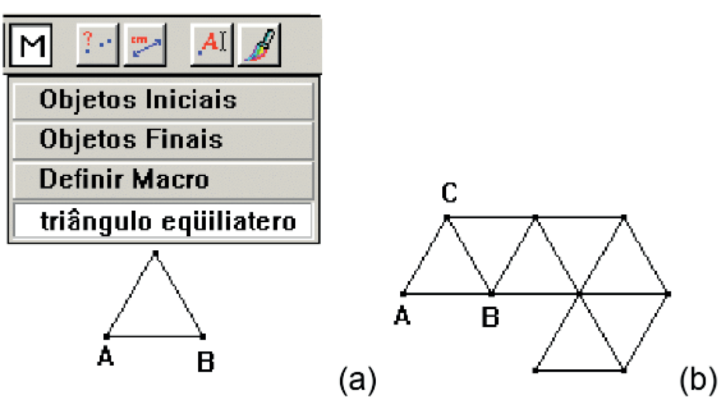


Figura 4 - Ferramenta do Cabri Géomètre

Utilizando a macro “triângulo equilátero” **(a)**, clica-se em dois pontos do triângulo ABC e aparecerá outro triângulo equilátero, e assim, sucessivamente, conforme indica **(b)**.

Com a macro disponível, o aluno necessita apenas acessar a macro desejada e clicar em dois pontos distintos no ambiente Cabri que o polígono aparece. Para continuar repetindo os procedimentos, basta clicar em dois pontos da primeira figura. Algumas macros requerem o uso da medida do ângulo interno do polígono regular desejado, como é o caso do pentágono regular e do heptágono regular.

QUESTÃO DE PESQUISA E OBJETIVO

O que pretenderemos investigar em nossa pesquisa é: **Em que medida um trabalho de exploração com as pavimentações no plano favorece o estudo das propriedades dos polígonos?**

O trabalho tem como objetivo investigar uma abordagem mais significativa para o ensino/aprendizagem do estudo dos polígonos. Com esse propósito, optaremos por elaborar, aplicar e analisar uma sequência de atividades.

METODOLOGIA

Para responder à questão de pesquisa esta sequência de atividades utilizará alguns elementos teóricos da engenharia didática desenvolvida por Michèle Artigue.

> A noção de engenharia didática emergiu em didática da matemática no início da década de 1980, com o objetivo de etiquetar uma forma de trabalho didático: aquela que era comparável ao trabalho do engenheiro que, se apóia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar. (Artigue in Brun, 1996, p. 193)

A engenharia didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se por uma sequência experimental baseada em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise da sequência de ensino. A engenharia didática é dividida em quatro fases:

- **Primeira fase - Análises prévias:** A fase de concepção apóia-se num quadro teórico didático geral, em conhecimentos didáticos já adquiridos, em estudos prévios de programas, de propostas curriculares e de livros didáticos e em estudos históricos e epistemológicos dos conteúdos visados;

- **Segunda fase - Concepção e análise *a priori* das situações didáticas:** Nesta fase o investigador faz escolhas didáticas para a concepção de sua sequência de atividades e inicia a análise *a priori* das mesmas. É uma análise matemática da situação que antecipa o funcionamento didático decorrente das escolhas feitas;

- **Terceira fase - A experimentação e aplicação da sequência:** É o momento da organização e aplicação da sequência de atividades planejadas;
- **Quarta fase - Análise *a posteriori*.** É a interpretação das informações extraídas da experimentação e da sequência de ensino e que levam a validar ou não as hipóteses de pesquisa. É uma análise baseada nos protocolos de observação, em referência à análise *a priori*. É feita para ligar os fatos observados com os objetivos definidos *a priori* na concepção das atividades. A comparação entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori* permitirá validar ou não a questão de pesquisa.

CAPÍTULO 2

ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO *POLÍGONO*

Faremos, neste capítulo, um levantamento histórico sobre os polígonos com ênfase nos polígonos regulares, desde Euclides, passando por Clairaut, Hadamard, até Hilbert. A seguir, faremos um estudo das pavimentações e, finalmente, uma análise de três coleções de livros didáticos utilizados no Ensino Fundamental e recomendados pelo programa nacional do livro didático (PNLD), no que concerne ao estudo de polígonos.

UM ESTUDO HISTÓRICO DOS POLÍGONOS

Euclides

O mais antigo texto matemático grego que nos chegou completo é o livro de Euclides (300 a.C) *Os Elementos*. Segundo Maurice Caveing, essa obra constituída de 13 livros não constitui "a soma do saber matemático da época, mas responde a uma vontade de colocar em ordem os resultados essenciais. O que a distingue das outras obras e faz a sua grandeza é a sua estrutura axiomática.

Nessa obra, Euclides define polígono regular como todo polígono equilátero e eqüiângulo. A palavra equilátero refere-se a todos os lados congruentes e eqüiângulo refere-se a todos os ângulos congruentes.

O autor, no seu livro I, na proposição 32, descreve que em um triângulo, se prolongarmos um de seus lados, encontraremos o ângulo externo igual à soma dos outros dois ângulos internos não adjacentes. A seguir, mostra que a soma dos ângulos internos desse triângulo é igual a dois retos. Esses resultados são justificados da seguinte maneira:

> Prolongando um dos lados do triângulo ABG, o lado BG encontrando o ponto D. Traça-se pelo ponto G o segmento GE paralelo ao segmento AB. Como GE é paralelo a AB, os ângulos alternos BAG e AGE são congruentes e os ângulos correspondentes ABG e EGD são congruentes. Então o ângulo externo AGD é igual à soma dos dois ângulos opostos ABG e BAG.
>
> Agora se observarmos que o ângulo AGB, os ângulos AGD e AGB juntos serão iguais aos três ângulos internos do triângulo ABG. Como os ângulos AGD e AGB são dois retos (180º), os três ângulos internos ABG, BGA e GAB também são dois retos. (Tradução nossa: do espanhol para o português). (Científicos Griegos, Recopilacion, Estudio preliminar, preambulos y notas por Francisco Vera, 1970, p.724)

Apresentamos, a seguir, a construção referente ao texto acima:

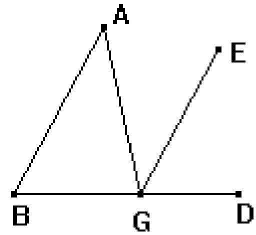


Figura 5 - Extraída do livro ***Científicos Griegos, Recopilacion, Estudio preliminar, preambulos y notas,*** por Francisco Vera, 1970, p.724

No livro I, na proposição I, descreve-se como construir um triângulo equilátero, a partir de um segmento dado, utilizando o compasso. Assim:

> **Construir um triângulo equilátero sobre um segmento dado.** Seja AB o segmento. Fazendo centro em A e em B, descrevem-se os círculos BGD e AGE, e a partir do ponto de intersecção dos círculos G, traçam-se os segmentos GA e GB. (Tradução nossa: do espanhol para o português). (Científicos Griegos, Recopilacion, Estudio preliminar, preambulos y notas por Francisco Vera, 1970, p.705)

Uma representação para este procedimento:

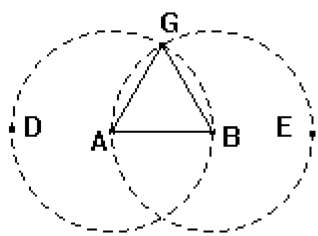


Figura 6 – Extraída do livro *Científicos Griegos, Recopilacion, Estudio preliminar, preambulos y notas,* por Francisco Vera, 1970, p.705

Ainda no livro I, proposição 46, descreve-se a construção de um quadrado a partir de um segmento AB. Assim, expõe o procedimento:

> Levantar a perpendicular AG em A. Toma-se AD sobre esta perpendicular congruente a AB, traça-se por D o segmento DE paralelo a AB e por B o segmento BE, paralelo a AD, formando o quadrado. (Tradução nossa: do espanhol para o português) (Científicos Griegos, Recopilacion, Estudio preliminar, preambulos y notas por Francisco Vera, 1970, p.732).

Apresentamos a seguir a construção:

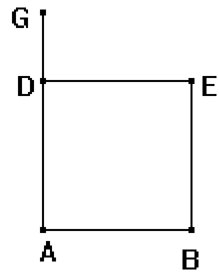


Figura 7 – Extraída do livro *Científicos Griegos, Recopilacion, Estudio preliminar, preambulos y notas,* por Francisco Vera, 1970, p.705

No livro IV, proposição 6, Euclides descreve a construção de um quadrado inscrito na circunferência. O procedimento adotado é traçar dois diâmetros perpendiculares entre si, determinando quatro pontos sobre a circunferência. Os segmentos AB, BG, GD e DA, formam o quadrado inscrito.

> Traçam-se os diâmetros AG e BD perpendiculares entre si e as retas AB, BG, GD, DA, EA, EB, EG e ED. Por ser EB igual à ED e AE comum, a reta AB é igual à AD e pela mesma razão, BG e GD serão iguais a AB e AD; logo o quadrilátero ABGD é equilátero, e como BD é diâmetro do círculo dado, BAD é um semi-círculo e, portanto, o ângulo BAD é reto e pela mesma razão são retos os ângulo ABG, BGD e GDA; logo o quadrilátero é retângulo e como demonstrou que é equilátero, o quadrado está inscrito em um círculo. (Tradução nossa: do espanhol para o português) (Científicos Griegos, Recopilacion, Estudio preliminar, preambulos y notas por Francisco Vera, 1970, p.778).

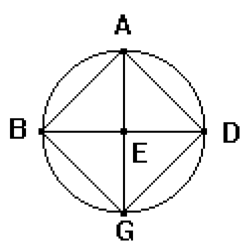


Figura 8 – Extraída do livro *Científicos Griegos, Recopilacion, Estudio preliminar, preambulos y notas,* por Francisco Vera, 1970, p.778

No livro IV, discute a construção de polígonos regulares de 5, 6 e 15 lados com régua e compasso.

Na proposição 11 do livro IV temos a construção do pentágono regular.

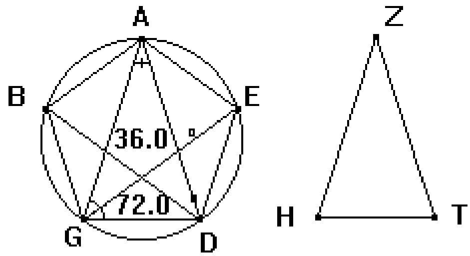


Figura 9 - Extraída do livro *Científicos Griegos, Recopilacion, Estudio preliminar, preambulos y notas,* por Francisco Vera, 1970, p.781

> ***Inscrever um pentágono equilátero e eqüiângulo em um círculo dado.*** Seja ABGDE o círculo dado. Constrói-se o triângulo isósceles ZHT com cada um dos ângulos em H e T sejam o dobro do ângulo em Z; inscreve-se no círculo dado o triângulo AGD de ângulo iguais aos do triângulo ZHT; divide-se os ângulos AGD e GDA em duas partes iguais pelas retas GE e DB e traçam-se os segmentos AB, BG, DE e EA. Por ser cada um dos ângulos AGD e GDA o dobro GAD e ter dividido em dois ângulos iguais os ângulos AGD e GDA, os cinco ângulos DAG, AGE, EGD, GDB e BDA são iguais entre si e também os cinco arcos AB, BG, GD, DE e EA e; portanto, as cinco retas AB, BG, GD, DE e EA; logo o pentágono ABGDE é equilátero. Digo que também é eqüiângulo. Por ser iguais os arcos AB e DE, se acrescentar o arco BGD, todo o arco ABGD será igual a todo o arco EDGB, o primeiro dos arcos se refere ao ângulo AED e o segundo ao ângulo BAE; logo estes ângulos são iguais, e pela mesma razão a seus ângulos ABG, BGD e GDE aos anteriores, o pentágono é eqüiângulo. (Tradução nossa: do espanhol para o português) (Científicos Griegos, Recopilacion, Estudio preliminar, preambulos y notas por Francisco Vera, 1970, p.781)

A construção do hexágono regular é apresentada na proposição 15 do livro IV.

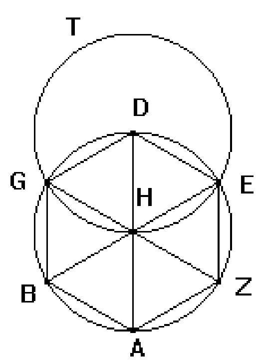


Figura 10 - Extraída do livro *Científicos Griegos, Recopilacion, Estudio preliminar, preambulos y notas,* por Francisco Vera, 1970, p.784

> ***Inscrever um hexágono equilátero e eqüiângulo em um círculo dado.*** Seja ABGDEZ o círculo dado. Traça-se o diâmetro AD; toma-se seu centro H; com centro em D e raio DH descreve-se o círculo EHGT; traça-se as retas EH e GH e prolongam-se os raios nos pontos B e Z e, traçam-se, finalmente, as retas AB, BG, GD, DE, EZ e ZA. Digo que o hexágono ABGDEZ é equilátero e eqüiângulo. (Tradução nossa: do espanhol para o português) (Científicos Griegos, Recopilacion, Estudio preliminar, preambulos y notas por Francisco Vera, 1970, p.784)

O último polígono construído é o pentadecágono regular. Não vamos descrever o procedimento por não se tratar de objeto de estudo desta dissertação.

Euclides não apresenta uma fórmula para a soma dos ângulos internos de polígonos nem tampouco a soma dos ângulos externos de polígonos com n lados, $n > 3$.

Clairaut

Uma outra obra que iremos analisar é a de Alexis Claude Clairaut (1713 -1765). Sua primeira abordagem surgiu com a obra *Elements de Géométrie*, publicada pela primeira vez em 1741. No Brasil foi traduzida por José Feliciano em 1892. Foi a primeira reação contrária à abordagem euclidiana; manisfestava sua posição contrária à introdução dos estudos geométricos com base nos elementos de Euclides, os quais, acreditava que seriam os principais responsáveis pelas dificuldades encontradas pelos estudantes. No primeiro parágrafo de seu prefácio diz que:

> Ainda que a geometria seja uma ciência abstracta, devemos confessar que as difficuldades experimentadas pelos que começam a apprende-la, procedem as mais das vezes da maneira por que é ensinada nos elementos ordinários. Logo no começo apresentam ao leitor um grande número de definições, de postulados, de axiomas e principios preliminares, que só lhe parecem annunciar um estudo arido. As proposições que em seguida vêm, não fixando o espirito sobre objectos mais interessantes, e sendo além disso difficeis de conceber, acontece commummente que os principiantes se fatigam, se aborrecem, antes de terem uma idéa clara do que se lhes queria ensinar. (Clairaut, apud José Feliciano, p.ix)

Para evidenciar ainda mais sua reação contrária, encontramos no prefácio:

> Não nos surprehende que Euclides se dê ao trabalho de demonstrar que dous circulos secantes não têm o mesmo centro, e que um triangulo encerrado em outro tem a somma de seus lados menor que a soma dos lados do triangulo exterior. Este geometra tinha de convencer sophistas obstinados, que se gloriavam de refusar as verdades mais evidentes; e então era preciso que a geometria tivesse, como a logica, o auxilio de raciocinios em forma para tapar a boca à **chicana**[1]. As cousas, porém, mudaram de face. Todo raciocinio que recae sobre o que o só bom senso de antemão decide, é hoje em pura perda: só serve para obscurecer a verdade e enfadar os leitores. (Clairaut, apud José Feliciano, p.xii).

1. **Chicana**: sutileza capciosa, insinuante.

Clairaut se preocupou em mudar a tradicional apresentação euclidiana da Geometria, utilizando métodos que pudessem despertar o interesse dos alunos e auxiliá-los na sua compreensão. No entanto, a ênfase euclidiana permaneceu por muito tempo sendo base do ensino e encontrou resistências por parte dos defensores desse tipo de ensino.

Vamos apresentar a contribuição do estudioso matemático na questão dos polígonos regulares.

Clairaut descreve as figuras retilíneas, dentre elas os polígonos regulares. Para ele, *polygonos regulares são figuras terminadas por lados iguais e igualmente inclinados uns sobre outros*. Preocupa-se em definir condições que possam dar mais clareza para um principiante adquirir o conhecimento da geometria, a partir da observação, da experiência e de desenvolver, por meio de problemas bem escolhidos, os métodos de raciocínio que lhe permitam progredir.

Observa que para dividir um polígono em partes iguais, devemos inscrevê-lo em uma *circunferência*. Sendo assim, teremos polígonos com nomenclaturas de *pentágono, hexágono, heptágono, octógono, eneágono ou decágono*, etc., conforme o número de lados que desejar.

Antes de abordar as construções, Clairaut, na primeira parte de seu livro *Elementos de Geometria* proposição LXIV, escreve genericamente que *a soma dos três ângulos de um triângulo conserva-se constantemente a mesma e é igual a dois ângulos retos ou a 180 graus*, ou seja, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Destaca que um triângulo equilátero além de ser isósceles, possui três ângulos iguais a 60 graus.

O triângulo equilátero é a figura mais simples de todos os polígonos. Clairaut constrói o triângulo equilátero, sem recorrer ao recurso da divisão do círculo e utilizando a mesma maneira de Euclides.

Clairaut constrói o quadrado dividindo o círculo em quatro partes iguais. Não descreve a construção do pentágono por achar que polígonos com mais de quatro lados só podem ser descritos por meio do cálculo algébrico e deixou para publicar algo a respeito em uma outra obra escrita em 1746.

A construção do hexágono regular é equivalente à de Euclides.

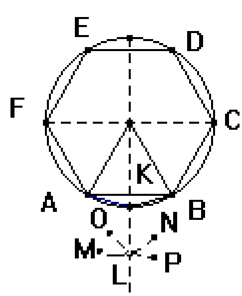


Figura 11 - Extraída do livro *Elementos de Geometria,* Clairaut, 1909, p. 56

Descrito o hexágono ABCDEF, podemos traçar facilmente o dodecágono ou polígono de doze lados. Para isso, dividiremos o arco AKB em dois arcos iguais AK e KB depois distribuiremos a medida do arco AK por todo o círculo obtendo assim o polígono regular de 12 lados. Seguindo o mesmo método podemos dividir o arco AK em duas partes iguais e teremos o polígono de 24 lados e, desta forma, podemos obter polígonos de 48 lados, de 96, de 192 etc.

Notamos que Clairaut também utiliza a bissecção de ângulos do mesmo modo que Euclides.

Para descrever o octógono, polígono de oito lados, é preciso primeiro encontrar um quadrado dentro do círculo. A figura abaixo representa a construção de um quadrado e de um octógono regular.

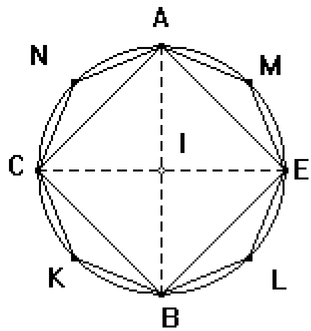


Figura 12 – Extraída do livro *Elementos de Geometria,* Clairaut, 1909, p. 57

Dividindo do mesmo modo cada um dos arcos CK, KB, BL e LE teremos o polígono regular de 16 lados, e assim por diante teremos polígonos de 32 lados, 64 lados, 128, etc. Clairaut não faz mais referências a outros polígonos regulares.

Assim como Euclides, Clairaut não fornece uma fórmula para a soma das medidas dos ângulos internos de polígonos de n lados, com n>3 nem tão pouco para a soma das medidas dos ângulos externos.

Legendre

Legendre (1752 – 1833), publicou o livro *Elementos de Geometria* em 1794, que foi traduzida em mais de trinta idiomas.

No seu primeiro livro, proposição XVII, define a *figura plana* como um plano inteiramente fechado por linhas.

Segundo o autor ,se as linhas são retas, o espaço que elas limitam chama-se *figura retilínea* ou *polígono*, e as linhas, consideradas no seu conjunto, formam o contorno ou ***perímetro***[2] do polígono. Ainda continua na proposição XVIII: O polígono de três lados é, de todos, o mais simples, e denomina-se *triângulo*; o de quatro lados chama-se *quadrilátero*, o de cinco, *pentágono* o de seis *hexágono*, etc.

2 **Perímetro**: Linha de contorno de uma figura plana. Soma dos lados de um polígono.

Legendre ainda afirma que *a soma dos três ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos,* e prova de uma maneira diferente daquela que foi descrita por Euclides.

> Traça-se AE paralela a BC, e prolonga-se AC, os ângulos ACB e EAD são iguais como correspondentes, em relação às paralelas BC e AE, cortadas pela transversal AC. Os ângulos CBA e BAE são tambem iguais como ângulos alternos internos em relação às paralelas BC e AE e a secante AB. Logo, a soma dos ângulos do triângulo é igual a soma dos três ângulos CAB, BAE e EAD formados em torno do ponto A, do mesmo lado da AC. Esta última soma é igual a dois retos, logo, a primeira tambem é igual a dois retos, ou seja, $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$. (Tradução nossa: do espanhol para o português) (Legendre, 1909, livro I, p. 27)

Apresentamos a seguir a construção:

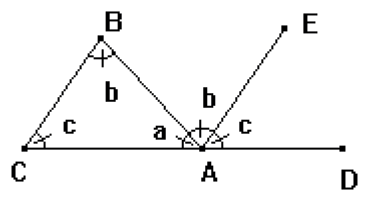


Figura 13 – Extraída do livro *Elementos de Geometria,* Legendre, 1909, livro I, p. 27

Legendre escreve sobre a soma dos ângulos internos e externos de um polígono convexo. Na proposição XXX, escreve o teorema:

> *A somma dos angulos internos de um polygono convexo é egual a tantas vezes dous angulos rectos quantos são os lados, menos dous.* (Legendre, 1909, livro I, p. 28)

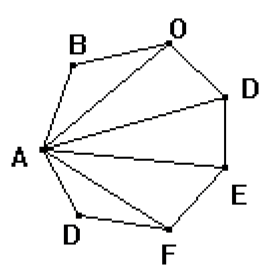


Figura 14 - Construção a partir da figura do livro *Elementos de Geometria,* Legendre 1909, livro I, p. 28

> Pelo vértice A, tracemos diagonais para todos os vértices não adjacentes a ele. O polígono ficará decomposto em tantos triângulos quantos são os lados menos dois, porque esses diferentes triângulos podem se considerados como tendo-se por vértice comum o ponto A, excetuando os dois triângulos extremos que contém cada um dois lados do polígono, ou seja, o triângulo ABO possui dois lados do polígono, o mesmo acontece com o triângulo ADF. Vê-se também que a soma dos ângulos desses triângulos é igual a soma dos ângulos do polígono, logo esta última soma é igual a tantas vezes dois retos quantos são os lados menos dois. Se representarmos por n o número dos lados do polígono, a soma dos ângulos será: 2.(n - 2) ou 2n – 4 (Tradução nossa: do espanhol o para o português) (Legendre, 1909, livro I, p. 27).

Ele teve o cuidado de escrever também na proposição XXXI sobre a soma dos ângulos externos de um polígonos convexo:

> Se prolongarmos no mesmo sentido todos os lados de um polygono convexo, a somma de todos os angulos externos assim formado, é egual a quatro rectos. (Legendre, 1909, livro I, p. 28)

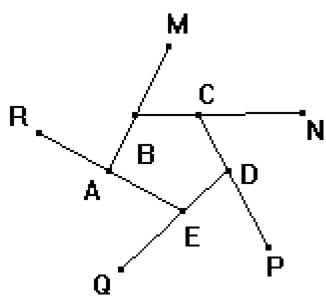


Figura 15 - Construção a partir da figura do livro *Elementos de Geometria,* Legendre, 1909, livro I, p.28

> A soma do ângulo externo MBN e do ângulo interno adjacente ABN é igual a dois retos. A soma de todos os ângulos internos e externos do polígono é, pois, igual a 2n retos (chamando n o número dos lados do polígono). Se, portanto, desta soma se tira a soma dos angulos internos, que é igual a 2n – 4 retos, restam quatro ângulos retos para a soma dos ângulos externos. (Tradução nossa: do espanhol para o portugês) (Legendre, 1909, livro I, p. 28)

Legendre descreve do mesmo modo que Euclides a construção do quadrado, triângulo equilátero e hexágono regular.

Na proposição V, faz referências a como inscrever um decágono, a partir do pentágono regular.

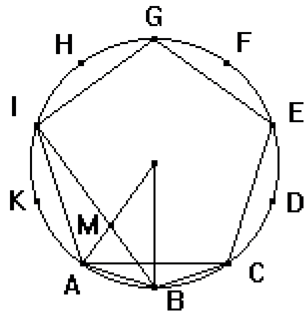


Figura 16 - Construção a partir da figura do livro *Elementos de Geometria,* Legendre, livro IV, p. 123

> Inscrever um decagono regular em um círculo. Suponha-se resolvido o problema, e seja AB um lado do decágono inscrito. O ângulo no centro $A\hat{O}B$ é igual a $\frac{1}{10}$ de 360º ou $\frac{1}{5}$ da sua soma com os ângulos $O\hat{B}A$ e $O\hat{A}B$. Os ângulos $O\hat{B}A$ e $O\hat{A}B$ é igual a 1- $\frac{1}{5}$ ou $\frac{4}{5}$ e por conseguinte cada um deles valem $\frac{2}{5}$. Tiremos a bissetriz BM do angulo $O\hat{B}A$: o triângulo MOB é isósceles, porque os ângulos $M\hat{O}B$ e $O\hat{B}M$, valem cada um 36º onde se conclui que OM=MB. O triangulo BAM é isósceles também, porque, sendo o ângulo $M\hat{B}A$ igual a $\frac{1}{5}$ e o ângulo BAM igual a $\frac{2}{5}$, o terceiro angulo AMB vale necessariamente $\frac{2}{5}$. Deste modo AB=BM=MO. Por último tem-se que $\frac{BO}{BA} = \frac{OM}{AM}$ ou $\frac{AO}{OM} = \frac{OM}{AM}$. Resultado que precede que o raio AO fica dividido no ponto M em média e extrema razão, e que o maior segmento OM é igual ao lado do decagono inscrito. (Tradução nossa: do espanhol para o português) (Legendre, 1909, livro IV, p. 123)

Para descrever o procedimento do pentágono regular inscrito na circunferência, Legendre percebeu que, a partir do decágono ABCDEFGHIK, unindo alternadamente os pontos e traçando os segmentos AC, EC, EG, GI e IA, encontramos o pentágono regular inscrito. O ângulo central é $\frac{1}{10}$ de 360º. Utilizou ainda o triângulo isóscele AOB para escrever o ângulo central $A\hat{O}B$ como sendo múltiplo de 36º, ou seja, $\frac{1}{5}$ de 180º. Assim, concluiu que o lado AB é o lado do decágono regular inscrito na circunferência.

Para os polígonos regulares inscritos: heptágono, eneágono e o dodecágono, não faz a construção, apenas deixa claro que existe a possibilidade de construí-los.

Utiliza as argumentações de Euclides e escreve:

> Um polígono que é, ao mesmo tempo, eqüiângulo e equilátero, chama-se polígono regular. Há polígonos regulares de qualquer número de lados. (Tradução nossa: do espanhol para o português) (Legendre, 1909, livro IV, p. 117)

Hadamard

Um outro matemático que tambem tratou da geometria foi Jacques Hadamard (1865-

1963). Publicou o livro *Leçons de Géométrie élémentaire (Géométrie plane)* em 1937 em dois volumes, na França.

No capítulo II escreve:

> Nomeia-se polígono uma porção de plano limitada por porções de linhas direitas (fig. 18) denominadas de lados do polígono. Suas extremidades são os vértices do polígono. Contudo daremos, em geral, o nome de polígono apenas a porções do plano limitadas por um contorno único que pode ser descrito de só um traço contínuo assim a porção de plano que não obedece esta descrição (fig. 19) não representa um polígono. (Tradução nossa: do francês para o português) (Hadamard, 1937, vol 1, p.22)

Apresenta as seguintes figuras:

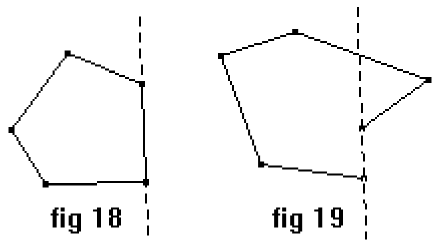


Figura 17 - Construção feita a partir do texto p. 22

A seguir define polígono côncavo e convexo.

> Um polígono se diz convexo se, prolongando cada lado indefinidamente nenhuma das retas assim obtidas atravessa o polígono. No caso contrário é côncavo. Classificam-se os polígonos de acordo com o número de lados. Assim, os mais simples dos polígonos são: o polígono de 3 lados ou triângulo, o polígono de 4 lados ou quadrilátero, o polígono de 5 lados ou pentágono, o polígono de 6 lados ou hexágono. Teremos ainda a considerar os polígonos de 8, 10, 12, 15 lados, nomeados respectivamente, octógono, decágono, dodecágono, pentadecágono. (Tradução nossa: do francês para o português) (Hadamard, 1937, vol 1, p.22)

Para a soma dos ângulos internos em um triângulo, e o ângulo externo, escreve por um teorema: *A soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois retos*. A prova é a mesma que se encontra em Legendre.

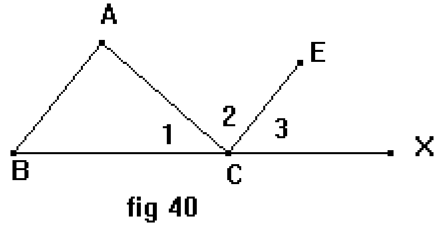


Figura 18 – Extraída do livro *Leçons de Géométrie élémentaire - Géométrie plane, Hadamard, 1937, vol 1,* p. 43

Para o ângulo externo de um triângulo apresenta o seguinte corolário: *O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.*

Hadamard preocupou-se em aplicar o teorema da soma dos ângulos internos do triângulo para polígonos convexos escrevendo outro teorema: *A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é igual à tantas vezes dois retos que há de lados menos dois.* A prova é a mesma da de Legendre.

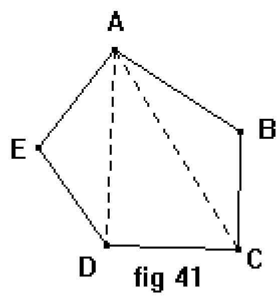


Figura 19 - Extraída do livro *Leçons de Géométrie élémentaire - Géométrie plane, Hadamard, 1937, vol 1,* p. 44

A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é obtida como corolário. Seu valor é 4 retos.

No primeiro volume, capítulo VII, define que um polígono é convexo e regular quando todos os lados são iguais e todos os ângulos são iguais. Define que linha quebrada regular é uma linha quebrada cujos lados são iguais, todos os ângulos são iguais e do mesmo modo e sentido. Referindo-se aos lados dos polígonos regulares.

Na construção dos polígonos regulares, triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular, hexágono regular e decágono regular utiliza o mesmo procedimento descrito por Legendre.

Outro polígono regular tratado por Hadamard é o pentadecágono regular, mas não vamos descrever a sua construção por não ser objeto de estudo desta pesquisa.

Hilbert

Hilbert (1862–1943) apresenta, em 1899 um sistema completo de axiomas para o ensino da geometria.

Em seu primeiro capítulo descreve os cinco axiomas, no parágafo 4, define polígono da seguinte maneira:

> Um sistema de segmentos AB, BC, CD, ..., KL recebe o nome de linha quebrada, a qual une, entre si, os pontos A e L; esta linha quebrada é designada brevemente ABCD...KL. Os pontos interiores dos segmentos AB, BC, CD, ..., KL e os A, B, C, D, ..., K, L se chamam, em conjunto, pontos da linha quebrada. E no caso especial que o ponto L coincida com o ponto A, a linha quebrada recebe o nome de **polígono** e se designa como polígono ABCD, ..., K. Os segmentos AB, BC, CD, ..., KA recebem o nome de lados do polígono. Os polígonos com 3, 4, ..., n vértices tem por nome trivértices, quadrivértices, ..., enevértices. (Tradução nossa: do espanhol para o português) (Hilbert, 1953, p.11)

Apresenta o teorema *os ângulos de um triângulo somam dois retos* sem demonstração.

Hilbert não aborda a soma dos ângulos internos de um polígono, apenas cita que um polígono pode ser decomposto em um número finito de triângulos, considerando a possibilidade do triângulo apresentar vértice no interior do polígono. Não trata de fórmulas para encontrar a soma dos ângulos internos e externos de um polígono, nem tampouco a construção de polígonos regulares.

PAVIMENTAÇÕES

> Recobrir uma superfície plana com peças poligonais constitui uma das atividades mais antigas realizadas pelo homem. Kepler foi o primeiro a estudar pavimentações do plano utilizando polígonos regulares. Em seus estudos, observou que polígonos regulares idênticos pavimentam perfeitamente um plano apenas se seus ângulos internos forem um divisor de 360º. O triângulo equilátero pode realizar uma pavimentação porque cada um de seus ângulos internos mede 60º (divisor de 360º). O quadrado e o hexágono regular também pavimentam um plano porque possuem ângulos internos respectivamente iguais a 90º e a 120º. Pentágonos regulares não pavimentam um plano sem sobreposições ou cortes porque seus ângulos internos medem 108º, que não é um divisor de 360º. Roger Penrose, um importante físico-matemático, criou uma curiosa pavimentação aperiódica (não repete padrões) que envolve polígonos batizados de “pipa” e “seta”. Como nem sempre o conhecimento é usado para o bem, a pavimentação de Penrose foi utilizada recentemente como padrão de textura em rolos de papel higiênico de uma conhecida marca. Uma vez que a pavimentação de Penrose não repete padrão, a ideia do fabricante era produzir um rolo de papel higiênico em que nunca houvesse sobreposição de perfurações. (José Luiz Pastore Mello da Folha de S.Paulo – 06/06/2002)

O triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular são os únicos polígonos regulares capazes de pavimentar o plano. Pavimentações como essas são chamadas de periódicas uma vez que recobrem o plano repetindo um mesmo padrão.

A pavimentação de um plano consiste cobri-lo com figuras planas, de modo a não existirem espaços entre elas e nem sobreposições. Dadas certas figuras geométricas, poder-se-á utilizar a matemática para decidir previamente se será possível a pavimentação. Para isso é necessário ter presente que a amplitude angular da circunferência é de 360º. Todas as pavimentações tratadas neste trabalho são pavimentações lado-lado, ou seja, os lados dos polígonos utilizados se encaixam perfeitamente.

Podemos dizer que todos os triângulos pavimentam o plano desde que sejam congruentes entre si. Para isso devemos reunir em torno de um vértice do triângulo todos os ângulos internos do triângulo. Todos os quadriláteros pavimentam o plano, desde que sejam congruentes entre si, podemos comprovar isso em um artigo de Alves (RPM 51, p.7). Assim, deve-se colocar em torno de um vértice do polígono os quatro ângulos internos do quadrilátero e repetir o procedimento para pavimentar o plano. Segue-se a descrição do procedimento.

A ideia é colocar em volta de um vértice os quatro ângulos do quadrilátero a fim de que a soma desses ângulos seja 360º. Observando a figura:

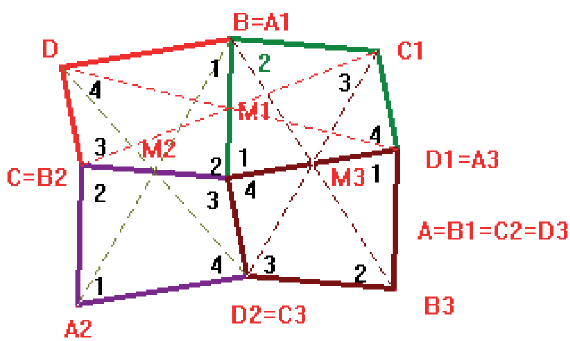


Figura 20 – Extraída da *Revista do Professor de Matemática,* Alves, S. 51

Seja M_1 o ponto médio do lado $\overline{AB}$, refletimos em torno de M_1 o quadrilátero dado ABCD, obtendo outro quadrilátero congruente $A_1B_1C_1D_1$ com A_1=B e B_1=A.

Essa construção faz com que tenhamos em volta do vértice A os ângulos do quadrilátero 1 e 2. Repetimos a operação determinando o simétrico de $A_1B_1C_1D_1$ em relação a M_2, onde M_2 é o ponto médio do lado $\overline{B_1C}$. O resultado obtido é outro quadrilátero congruente $A_2B_2C_2D_2$, como B_2=C, C_2=B_1. Temos agora em torno de A os ângulos 1,2 e 3. Finalmente, sendo M_3 o ponto médio de $\overline{D_1B_1}$, reflete em torno de M_3, obtendo uma cópia congruente $A_3B_3C_3D_3$, com C_3=D_2, D_3=C_2.

Como a soma das medidas dos ângulos do quadrilátero é 360º, temos que a medida *de $D_2\hat{A}D_1$ é igual à do ângulo indicado por 4. Além disso, temos $BD=AD_1=B_1A_3=A_2D_2$ e então segue que $A_3=D_1$.*

Conseguimos, dessa maneira, colocar em torno de A os quatro ângulos do quadrilátero e, repetindo o argumento para outros vértices, obtemos uma pavimentação como a da figura anterior.

Para que ocorra a pavimentação, devemos procurar um padrão. Chamamos de pavimentação padrão toda pavimentação possível com polígonos regulares ou não, lado a lado, ao redor de um ponto e que seja possível se repetir sobre a superfície plana, a fim de cobrir todo o plano.

Analisaremos a seguir os casos possíveis de se obter a pavimentação verificando os polígonos regulares utilizados ao redor do ponto. Seja k o número de polígonos regulares utilizados e i a medida do ângulo interno de cada polígono regular.

Utilizando triângulos equiláteros.

Seja P_0 o ponto central da pavimentação. Podemos dispor ao redor de um ponto 6 triângulos equiláteros, como mostra a figura 21:

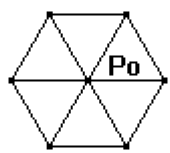


Figura 21

Verificamos que k = 6 e i = 60º, temos 6.60º = 360º. Este padrão de pavimentação determinou 6 novos pontos onde devemos verificar que é possível continuar a sequência de pavimentações com triângulos equiláteros.

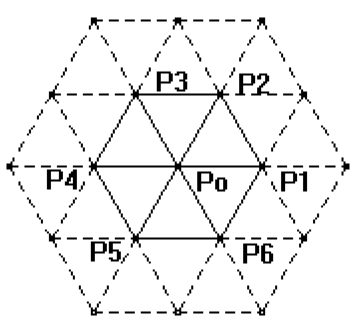


Figura 22

Sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 os pontos exteriores da figura 22. Examinando a figura

21, em P_1 temos 2 triângulos equiláteros, então podemos colocar 4 triângulos para formar novamente o padrão de pavimentação. Em P_2 colocamos 3 triângulos, o mesmo ocorre em P_3, P_4 e P_5. Em P_6 colocamos apenas 2 triângulos para completar a volta. A conclusão é que o triângulo equilátero pavimenta o plano.

Utilizando quadrados:

Verificamos que é possível colocar perfeitamente 4 quadrados ao redor de P_0, conforme indica a figura 23.

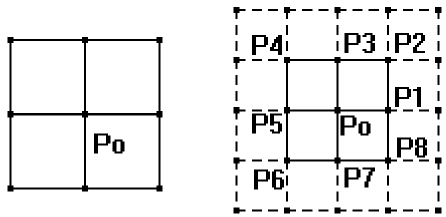


Figura 23

Na figura 23 temos k = 4 e i = 90º, neste caso 4.90º = 360º. O padrão de pavimentação gerou mais 8 pontos onde podemos acrescentar novos quadrados a fim de repetir o padrão de pavimentação.

Sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 e P_8 os pontos exteriores gerados pela pavimentação da figura 23. Em P_1 temos 2 quadrados, então podemos acrescentar mais 2 quadrados para formar um novo padrão de pavimentação, em P_2 colocamos 2 quadrados que atingem P_3; em P_3 colocamos 1 quadrado; em P_4 colocamos 2 quadrados que atingem P_5; em P_5 colocamos 1 quadrado; em $P_{6,}$ 2 quadrados que atingem $P_{7;}$ e em P_7 e P_8 colocamos 1 quadrado para completar a volta. Notamos que em cada ponto há um novo padrão de pavimentação. Podemos concluir que o quadrado pavimenta o plano.

Utilizando pentágonos regulares:

Verificamos que é possível colocar 3 pentágonos regulares ao redor de um ponto, mas não conseguimos colocar mais um pentágono regular sem que haja sobreposição, conforme indica a figura 24.

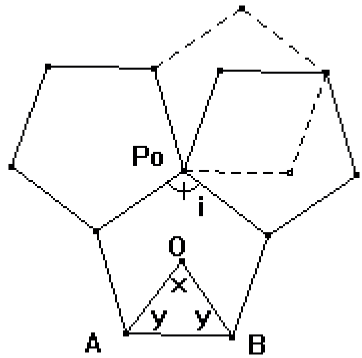


Figura 24

Para encontrar o valor de x, devemos dividir 360º por 5 e, assim, obtemos x = 72º. O triângulo AOB é isósceles, pois AO e OB são raios da circunferência que circunscreve o pentágono regular. Para determinar o valor de y, devemos fazer: $\hat{x}+\hat{y}+\hat{y}=180^0 \therefore 72^0+2\hat{y}=180 \therefore \hat{y}=54^0$.

Certificamos para isso que: se k = 3 e i = 108º, temos 3.108º =324º que é menor que 360º, se k = 4, temos 4.108º = 432º havendo sobreposição de 72º. Se utilizarmos apenas 3 pentágonos regulares, faltarão 36º para completar a pavimentação e como não existe um polígono regular com 36º de ângulo interno, o pentágono regular não pavimenta o plano.

Utilizando hexágono regular:

Podemos colocar três hexágonos regulares perfeitamente ao redor de um ponto P_0, como mostra a figura a seguir:

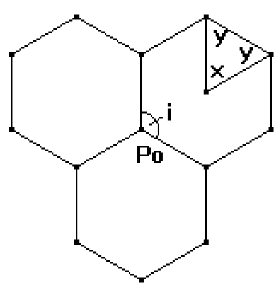


Figura 25

Verificamos que k = 3 e i = 120º, assim 3.120º = 360º. A figura 25 é um padrão de pavimentação e gerou 12 novos pontos onde podemos verificar se é possível formar novo padrão de pavimentação. Para isso, vamos observar a figura 26:

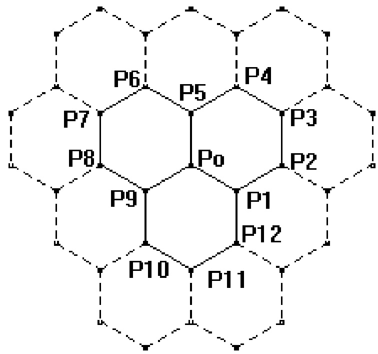


Figura 26

Sejam P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11} e P_{12} pontos gerados pela pavimentação da figura 26. Em P_1 temos dois hexágonos regulares; colocando mais um, fica P_2 com 2 hexágonos regulares, podendo ser colocado apenas mais um em P_2. O mesmo ocorre em P_3 e P_4, mas este hexágono atingirá P_5 e P_6. Colocamos mais 1 em P_6, P_7 e P_8, que atingirá P_9 e P_{10}, colocando mais 1 em P_{10} e P_{11} atingirá P_{12} completando a volta, como indica a figura 26. Percebemos que o padrão de pavimentação foi repetido em cada ponto considerado. Concluímos que o hexágono regular pavimenta o plano.

Novos experimentos com os polígonos: heptágono regular, octógono regular, eneágono regular, decágono regular, dodecágono regular, etc., indicam que não pavimentam o plano, pois analisando com mais detalhe a 4ª situação explicada, o ângulo interno do hexágono é 120º, e foram utilizados 3 polígonos na pavimentação. Quanto maior o número de lados maior é o ângulo interno. Assim, não é possível pavimentar o plano, pois juntando 3 polígonos ao redor de um ponto ultrapassa 360º. Como provar que somente 3 polígonos regulares pavimentam o plano?

Temos visto que se o polígono regular tem **n** lados, o ângulo central é $x = \frac{360^o}{n}$, portanto o ângulo interno **i** será dado por: $2y + x = 180^o$ ou ainda, $i + x = 180^o$ ou $i = 180^0 - \frac{360^0}{n}$, concluímos então que $i = \frac{(n-2).180^0}{n}$.

Supondo que k polígonos regulares congruentes se ajustam ao redor de um ponto, devemos ter $k.i = 360^o$ ou $k = \frac{360^o}{i}$;

Ou ainda $k.i = k.\frac{(n-2).180^0}{n} = 360^o \therefore k = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$.

Os divisores positivos de 4 são 1,2 e 4. Logo $n - 2 = 1$, $n - 2 = 2$ ou $n - 2 = 4$. Daí decorre que $n = 3$ ou $n = 4$ ou $n = 6$.

Percebemos que somente o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular podem pavimentar sozinhos o plano. Mas podem existir combinações possíveis com polígonos regulares que pavimentam o plano? Vamos descobrir metodicamente as possíveis pavimentações apoiando-nos no texto de Ruy Madsen Babosa.

Seja k o número de polígonos regulares ao redor de um ponto. Sendo 60º o menor ângulo interno de um polígono regular, então o maior valor de k é dado por $\frac{360^o}{60^o}$, que corresponde a 6 triângulos equiláteros. Por outro lado, $k > 2$, portanto resulta o intervalo de restrição para o inteiro k: $3 \le k \le 6$. Vamos analisar cada caso:

1º caso: k = 3 (3 polígonos regulares)

Consideremos os polígonos regulares com número de lados n, p e q, com $n \le p \le q$. A soma dos ângulos internos dos respectivos polígonos ao redor de um ponto é $180^0 - \frac{360^0}{n} + 180^0 - \frac{360^0}{p} + 180^0 - \frac{360^0}{q} = 360^0$, onde obtemos $\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$.

a) Iniciando com **n = 3**, então: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{6}$.

p e q são números inteiros positivos e qualquer deles superiores a 6, pois tanto $\frac{1}{p}$ quanto $\frac{1}{q}$ são inferiores a $\frac{1}{6}$. Como a sua soma é $\frac{1}{6}$, então o menor dos dois, digamos $\frac{1}{q}$ é inferior à metade de $\frac{1}{6}$, ou seja, $\frac{1}{12}$ onde temos que $q \ge 12$. E o outro $\frac{1}{p}$ é maior que $\frac{1}{12}$, onde obtemos $p \le 12$.

Resumindo: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{q}=\frac{p-6}{6p} \therefore q=\frac{6p}{p-6}$, com $7 \le p \le 12$.

Representando em uma tabela, temos:

p	7	8	9	10	11	12
$q=\frac{6p}{p-6}$	42	24	18	15	13,2	12

As pavimentações (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18) e (3, 10, 15) não pavimentam o plano, pois não são padrões de pavimentação, ou seja, não é possível continuar a pavimentação sem que haja falhas ou sobreposição. Apenas a pavimentação (3, 12, 12) é possível continuar, onde podemos certificar a seguir:

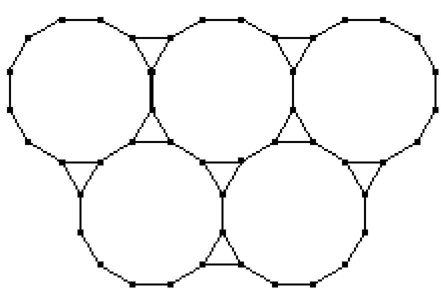


Figura 27

b) Verificando para **n = 4**, então: $\frac{1}{4}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{4}$.

Como p e q são números inteiros positivos, qualquer um deles é superior a 4, pois, tanto $\frac{1}{p}$ quanto $\frac{1}{q}$ são inferiores $\frac{1}{4}$. Como a sua soma é $\frac{1}{4}$, então o menor dos valores, digamos $\frac{1}{q}$ é inferior a metade de $\frac{1}{4}$, ou seja, $\frac{1}{8}$. Onde obtemos $q \geq 8$. E o outro $\frac{1}{p}$ é maior que $\frac{1}{8}$, onde decorre que $p \leq 8$.

Resumindo: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{4} \Rightarrow q=\frac{4p}{p-4}$, com $5 \leq p \leq 8$.

Representando em uma tabela, temos:

p	5	6	7	8
$q=\frac{4p}{p-4}$	20	12	$\frac{28}{3}$	8

A pavimentação (4, 5, 20) não é uma pavimentação padrão, pois provoca uma abertura entre polígonos regulares de 72º, havendo falhas ou sobreposição e a configuração (4, 7, $\frac{28}{3}$) não é pavimentação, pois $\frac{28}{3}$ não é inteiro. Apenas as pavimentações (4, 6, 12) e (4, 8, 8) formam um padrão de pavimentação, como representamos a seguir:

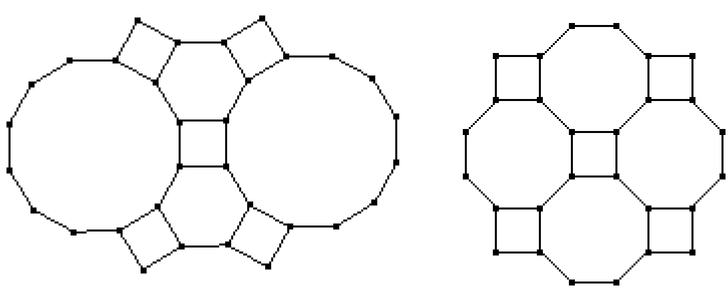


Figura 28

c) Verificando para **n = 5**, então: $\frac{1}{5}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{3}{10}$

Como p e q são números inteiros positivos, qualquer um deles é superior a 5, pois tanto $\frac{1}{p}$ quanto $\frac{1}{q}$ são inferiores a $\frac{1}{5}$. Como a sua soma é $\frac{3}{10}$, então o menor dos valores de $\frac{1}{q}$ é inferior a metade de $\frac{3}{10}$, ou seja, $\frac{3}{20}$. Onde decorre que $q \geq \frac{20}{3}$. O outro $\frac{1}{p}$ é maior que $\frac{3}{20}$, onde obtemos $p \leq \frac{20}{3}$.

Resumindo: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{3}{10} \Rightarrow q = \frac{10p}{3p-10}$, com $\frac{10}{3} \leq p \leq \frac{20}{3}$.

Representando em uma tabela, temos:

p	4	5	6
$q = \frac{10p}{3p-10}$	20	10	$\frac{15}{2}$

Notamos que restou apenas a pavimentação (5, 5, 10). Esta configuração não é um padrão de pavimentação, pois provoca uma abertura de 36º havendo falhas ou sobreposição, como podemos verificar na figura:

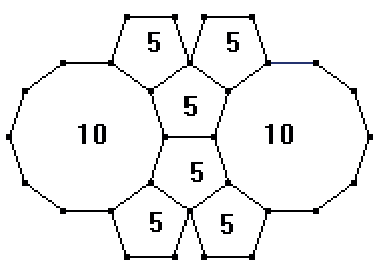


Figura 29

d) Verificando **n = 6**, temos: $\frac{1}{6}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{3}$

(i) Como p e q são números inteiros positivos, qualquer um deles é superior a 6, pois tanto $\frac{1}{p}$ quanto $\frac{1}{q}$ são inferiores a $\frac{1}{6}$. Como a sua soma é $\frac{1}{3}$, então o menor dos valores de $\frac{1}{q}$ é inferior a metade de $\frac{1}{3}$, ou seja, $\frac{1}{6}$. De onde temos que $q \geq 6$. O outro $\frac{1}{p}$ é maior que $\frac{1}{6}$, de onde obtemos $p \leq 6$.

Resumindo: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{3} \Rightarrow q=\frac{3p}{p-3}$, com $4 \leq p \leq 6$.

Representando em uma tabela, temos:

p	4	5	6
$q = \dfrac{3p}{p-3}$	12	$\dfrac{15}{2}$	6

Podemos verificar que resta apenas a pavimentação (6, 6, 6) que é uma pavimentação padrão, pois a pavimentação (6, 4, 12) se encontra na figura 28. Este caso já foi estudado, como mostra a figura:

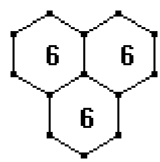


Figura 30

2º caso: k = 4 (quatro polígonos regulares)

Agora vamos considerar os polígonos regulares com o número de lados m, n, p e q, com $m \le n \le p \le q$. A soma dos respectivos ângulos internos ao redor de um ponto é:

$$180^0 - \frac{360^0}{m} + 180^0 - \frac{360^0}{n} + 180^0 - \frac{360^0}{p} + 180^0 - \frac{360^0}{q} = 360^0,$$

onde obtemos: $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

a) Iniciando com **m = 3** e **n = 3**, temos: $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{3}$.

Analogamente a **(i)**, vem: $q = \dfrac{3p}{p-3}$, com $4 \le p \le 6$.

Representando em uma tabela, temos:

p	4	5	6
$q = \dfrac{3p}{p-3}$	12	$\dfrac{15}{2}$	6

Observamos que as pavimentações (3, 3, 4, 12) e (3, 3, 6, 6) são pavimentações padrões. O que podemos verificar a seguir:

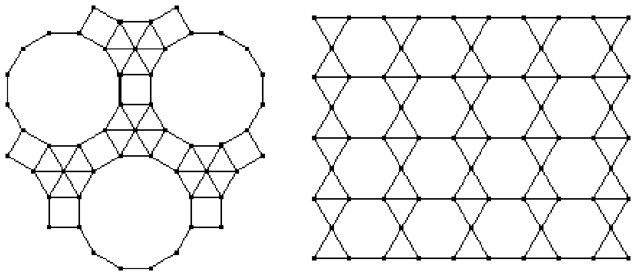


Figura 31

A configuração (3, 3, 5, $\frac{15}{2}$) não é uma pavimentação padrão, pois $\frac{15}{2}$ não é inteiro.

b) Para **m = 3** e **n = 4**, temos:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{5}{12}.$$

Como p e q são números inteiros positivos, qualquer um deles é superior a 4, pois tanto $\frac{1}{p}$ quanto $\frac{1}{q}$ são inferiores a $\frac{5}{12}$. Como a sua soma é $\frac{5}{12}$, então o menor dos valores $\frac{1}{q}$ é inferior à metade de $\frac{5}{12}$, ou seja, $\frac{5}{24}$. De onde temos que q ≥ $\frac{24}{5}$. O outro $\frac{1}{p}$ é maior que $\frac{5}{24}$, de onde obtemos p ≤ $\frac{5}{24}$.

Resumindo: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{5}{12} \Rightarrow q=\frac{12p}{5p-12}$, com $\frac{12}{5} \le p \le \frac{24}{5}$.
Representamos na tabela as possibilidades de pavimentação:

p	3	4
$q=\frac{12p}{5p-12}$	12	6

A pavimentação (3, 4, 3, 12) foi indicada no item anterior e a pavimentação (3, 4, 4, 6) é padrão, pois pode dar continuidade a preenchimento do plano, como podemos observar a seguir:

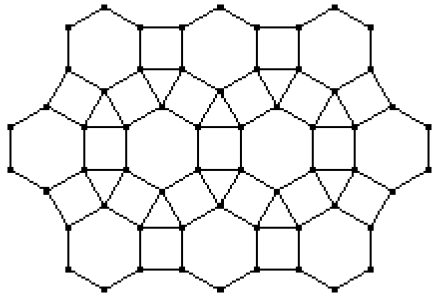


Figura 32

c) Para **m = 4** e **n = 4**, temos:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$$

(ii) Como p e q são números inteiros positivos e qualquer um deles é superior a 2, tanto $\frac{1}{p}$ quanto $\frac{1}{q}$ são inferiores a $\frac{1}{2}$. Como a sua soma é $\frac{1}{2}$, então o menor $\frac{1}{q}$ é inferior à metade de $\frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{1}{4}$. Onde temos que $q \geq 4$. O outro $\frac{1}{p}$ é maior que $\frac{1}{4}$, onde obtemos $p \leq 4$.

Resumindo: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2} \Rightarrow q=\frac{2p}{p-2}$, com $2 \leq p \leq 4$.

p	3	4
$q=\frac{2p}{p-2}$	6	4

A pavimentação (4, 4, 3, 6) foi indicada no item anterior, restando apenas a pavimentação (4, 4, 4, 4) que é uma pavimentação padrão, como indicada a seguir:

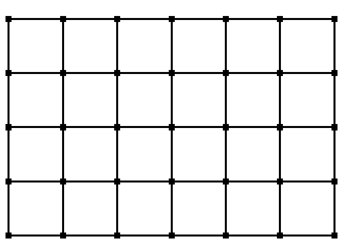


Figura 33

3º caso: k = 5 (5 polígonos regulares)

Considerando os polígonos regulares com número de lados l, m, n, p e q, com l ≤ m ≤ n ≤ p ≤ q. A soma dos ângulos internos dos respectivos polígonos ao redor de um ponto é:

$$180^0 - \frac{360^0}{j} + 180^0 - \frac{360^0}{m} + 180^0 - \frac{360^0}{n} + 180^0 - \frac{360^0}{p} + 180^0 - \frac{360^0}{q} = 360^0,$$

onde obtemos: $\frac{1}{j} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{3}{2}$.

Iniciando com **j = m = n = 3**, temos: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$.

Analogamente a **(ii)**, obtemos:

Resumindo: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{2p}{p-2}$, com $2 \leq p \leq 4$.

p	3	4
$q = \frac{2p}{p-2}$	6	4

As pavimentações (3, 3, 3, 3, 6) e (3, 3, 3, 4, 4) são pavimentações padrões, pois é possível dar continuidade à pavimentação, conforme indicada a seguir:

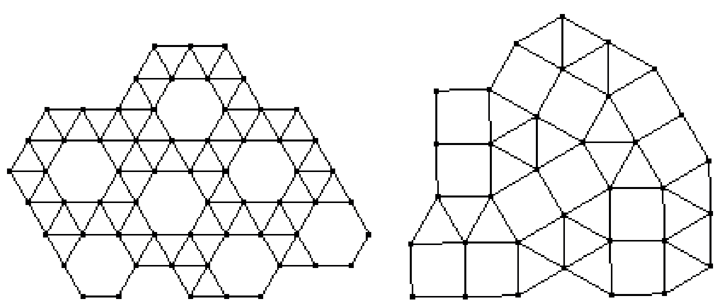


Figura 34

4º caso: k = 6 (6 polígonos regulares)

Como vimos, esta é a situação de 6 triângulos equiláteros, portanto só há um tipo. Este caso já foi estudado, conforme a figura a seguir:

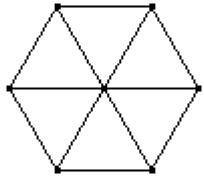


Figura 35

Concluímos, então, que das 14 possibilidades de pavimentações com mais de um polígono regular, 6 não pavimentam, restando apenas 8 pavimentações.

A descrição detalhada de todos os casos de pavimentações com polígonos regulares traz uma importante sustentação para a concepção das atividades proposta na pesquisa sobre as propriedades dos polígonos, em particular, dos polígonos regulares.

DESCRIÇÃO DOS CONTEÚDOS GEOMÉTRICOS DE ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS

Antes de apresentar a descrição dos conteúdos geométricos de alguns livros escolhidos do programa nacional do livro didático recentemente recomendados pelo PNLD, vamos reproduzir algumas informações sobre a escolha dos livros didáticos para as escolas públicas em todo o Brasil, encontrado no guia PNLD 2004.

> Entre o PNLD1997 e o PNLD 2004, a avaliação do livro didático teve muitos avanços decorrentes não só da experiência acumulada nos processos anteriores, mas também de uma análise criteriosa desses processos. Um deles foi a decisão de que os livros não seriam mais avaliados por série, mas por coleção, para o conjunto das quatro séries. O objetivo dessa modificação foi oferecer ao Professor um material cujo conteúdo e metodologia fossem articulados entre si, nas várias séries ou ciclos. (Guia PNLD 2004, p.10, 12, 14).

Como podemos verificar, a escolha do livro é feita por coleção. Vamos analisar o tema abordado neste trabalho em três coleções: **Matemática e Realidade**, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, da Atual editora; **Tudo é Matemática**, de Luis Roberto Dante da editora Ática; e **Aprendendo MATEMÁTICA,** de José Rui Giovanni e Eduardo Parente da editora FTD. A escolha dessas coleções deve-se ao fato de que as mesmas são amplamente utilizadas por professores da rede pública estadual, sendo por isso, alvo de freqüentes revisões e atualizações por parte dos autores e editoras. Ressalte-se ainda, que uma das coleções (Aprendendo Matemática) é adotada pelo professor pesquisador.

Vamos iniciar pela apresentação da coleção **Matemática e Realidade**. No livro da 5ª série a geometria está dividida em dois tópicos: “primeiros passos” abordando as formas geométricas e, “medidas” a qual aborda a definição de polígonos e a nomenclatura em função do números de lados e número de vértices.

No livro da 6ª série a geometria está dividida em doiss tópicos: “ângulos” e “áreas”.

Não aborda pavimentações, apenas áreas de figuras planas prevalecendo quadriláteros e triângulos.

No livro da 7ª série o autor dedica 3 tópicos para a geometria, fazendo, então, um estudo aprofundado a respeito dos triângulos, quadriláteros e círculos. Apresenta vários exercícios de geometria ligados com a álgebra que podem ser resolvidos com o uso de régua e compasso. Cita também as propriedades do paralelogramo sem omitir o postulado de Euclides. Formaliza a geometria, definindo conceitos, colocando as proposições em termos de enunciado, hipótese, tese e demonstrações. Optou por apresentar gradualmente os conceitos e proposições, reduzindo ao número mínimo necessário. Trabalha desafios onde utiliza triângulos equiláteros na forma de pavimentação para que o aluno conte a quantidade de triângulos. No que se refere aos polígonos, faz uma grande referência aos triângulos e suas propriedades, comenta sobre a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo e escreve sobre a propriedade do ângulo externo. Para o triângulo equilátero, utiliza a definição de Euclides. Faz construções de triângulos e quadriláteros, acrescenta textos complementares sobre geometria, apresenta as definições de polígonos convexos e não convexos e destaca os quadriláteros notáveis.

No livro destinado à 8ª série, define polígonos regulares e não regulares, faz referências às diagonais de um polígono de n lados, escreve sobre a soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígonos convexo de n lados e novamente destaca que *um polígono regular é e*quilátero e eqüângulo, como Euclides. Expõe como encontrar a medida de um ângulo interno e de um ângulo externo de um polígono regular e faz construções de polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência. Divide um triângulo equilátero em quatro peças e desafia o aluno a montar um triângulo e um quadrado a partir figuras. Um outro desafio foi propor ao aluno ladrilhar pisos com hexágono regular, octógono regular, retângulo, pentágono regular, triângulo equilátero e quadrado, indicando uma forma de pavimentação.

A segunda coleção que será apresentada é **Tudo é Matemática**. Segundo o autor, o objetivo desta obra é fazer o aluno pensar, desenvolver o raciocínio lógico, enfrentar situações novas, conhecer as primeiras aplicações da matemática e tornar as aulas interessantes e motivadoras. Comenta sobre polígonos convexos, faz referências com as diagonais, utiliza esta ideia para expor a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular, faz referências sobre a medida do ângulo externo e como o aluno pode encontrar este valor.

Apresenta o preenchimento do plano utilizando a argumentação de ladrilhamento e trabalha com os polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado, hexágono regular e octógono regular com o objetivo de encontrar a medida do ângulo interno desses polígonos e calcular a medida de cada ângulo interno dos polígonos utilizados no ladrilhamento, mostrando diretamente ao aluno as figuras montadas.

No livro da 5ª série divide a geometria em dois tópicos. O primeiro tópico, *Ângulos, Polígonos e Circunferências*, aborda polígonos e a nomenclatura dos polígonos regulares, mostrando imagens do cotidiano evidenciando as formas geométricas. O segundo tópico, *Perímetros e Áreas*, utiliza algumas formas de pavimentação com polígonos. Na parte de aprofundamento relaciona a geometria com a arte, destacando Maurits Cornelis Escher

(1898-1972).

Na livro da 6ª série, apresenta situações de pavimentação e utiliza a palavra *forrar* o plano com triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular, referindo-se à soma dos ângulos ao redor de um ponto igual a 360º. Faz, no entanto pouca referência às construções de polígonos regulares inscritos na circunferência, mas destaca as propriedades dos polígonos regulares e apresenta-os aos alunos para que possam conhecer e tirar suas próprias conclusões.

No livro da 7ª série, apresenta a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo e a medida do ângulo externo do triângulo. Define a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero e a estende para polígonos convexos. Define polígonos regulares de n lados, a soma das medidas dos ângulos internos e como encontrar a medida de um ângulo externo do polígono regular. Faz uma rápida referência sobre o ângulo externo de um polígono.

O livro da 8ª série apresenta polígonos regulares inscritos na circunferência com a finalidade de encontrar a área em função do raio e em função do lado deste polígono; trata, também, de polígonos semelhantes. No tópico que aborda circunferências e círculos, é sugrida uma oficina de matemática intitulada *Fazendo a gente aprender* e mostra mosaicos construídos com hexágonos regulares. No tópico sobre perímetros, áreas e volumes volta a apresentar um mosaico de Escher hexagonal em um dos exercícios propostos.

A terceira coleção a ser apresentada é **Aprendendo MATEMÁTICA**. Os volumes de 7ª e 8ª séries foram utilizados pelo professor pesquisador. O autor distribui o conteúdo referente à geometria ao longo da coleção. No volume da 5ª série, apresenta conceitos fundamentais e construções com régua e compasso, apresenta também polígonos e seus principais elementos, a nomenclatura associada ao número de lados, estuda os triângulos e quadriláteros. Em um dos exercícios apresenta figuras de mosaicos como recursos para a identificação dos polígonos utilizados.

Na 6ª série utiliza dois tópicos para a geometria. O primeiro tópico, *Formas Geométricas: medidas e construções*, apresenta as forma geométricas a fim de trabalhar com ângulos. Mostra figuras com agrupamento de triângulos em forma de hexágono. No segundo tópico, *Equações, sistemas e Geometria*, trabalha com a soma das medidas dos ângulos internos de quadriláteros e destaca uma pavimentação com quadriláteros a fim de mostrar que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º. Trata da diagonal de polígonos mostrando a divisão em triângulos a partir de um só vértice.

Na 7ª série divide a geometria em quatro tópicos: medidas e construções com triângulos; quadriláteros; circunferência e ângulos. O primeiro trata da classificação de triângulos, de segmentos notáveis, da relação entre elementos de um triângulo, e da congruência de triângulos, faz construções, comenta sobre a soma das medidas dos ângulos internos, a soma das medidas dos ângulos externos, aproveita para trazer curiosidades da geometria com a arte destacando *os flocos de neve* de Koch. O segundo tópico refere-se aos quadriláteros, paralelogramos e trapézios, trata da soma das medidas dos ângulos internos, das propriedades do quadrado, do paralelogramo, do losango e do trapézio. Novamente remete à geometria com a arte através da pirogravura, centrada no eixo de simetrias. O terceiro tópico refere-se à circunferência e seus elementos possíveis de trabalhar nesta série. Trabalha com construção da circunferência, corda, posições relativas entre reta e circunferência como noções intuitivas, sem se preocupar com os cálculos das medidas das distâncias, comenta as relações entre cordas na circunferência e escreve sobre a posição relativa entre duas circunferências, sem aprofundar em detalhes como pontos de intersecção e ponto de tangências entre elas. Faz referências entre a geometria e a natureza.

No quarto tópico, faz referências a polígonos regulares, à soma das medidas dos ângulos internos, à soma das medidas dos ângulos externos, utiliza a nomenclatura, diferencia polígonos regulares de não regulares, destaca como encontrar a medida de um ângulo interno e do ângulo externo de um polígono regular. Faz algumas aplicações com polígonos regulares, apresentando um mosaico pronto para encontrar a medida de ângulos para uma volta completa. Não se preocupa com a construção de polígonos regulares inscritos nem circunscritos à circunferência.

No livro da 8ª série trata de polígonos inscritos e circunscritos à circunferência, mas não aborda a construção e sim suas propriedades para definir área de figuras planas. Coloca em toda a coleção textos complementares para auxiliar a compreensão do conteúdo trabalhado na unidade, destacando alguns fatos históricos, lançando desafios ou relações da geometria com a natureza. Ainda no volume da 8ª série trata de triângulos e circunferências, de polígonos inscritos e circunscritos à circunferência e das relações métricas desses polígonos. Apresenta uma unidade para tratar de área de polígonos, destacando a área de polígonos regulares.

Essa síntese histórica sobre os polígonos regulares, sobre a pavimentação e a descrição de conteúdos geométricos de alguns livros didáticos, foi apresentado para trazer subsídios para a concepção de nossa sequência de atividades.

> A arte de desenhar pavimentações e padrões, é claramente muito antiga e bem desenvolvida. Em contraste, a ciência das pavimentações e padrões, o que para nós significa o estudo das suas propriedades matemáticas, é comparativamente recente e muitas partes deste tema permanecem ainda por explorar. (Shepard e Grunbaum em Tilings and Patterns) (http://www.prof2000.pt/users/coimbracom/formacao/matb/1/geom/pavim_frisos.doc)

CAPÍTULO 3

CONCEPÇÃO DAS ATIVIDADES E ANÁLISE *A PRIORI*

CONCEPÇÃO DAS ATIVIDADES

Esta sequência de atividades foi aplicada a alunos da 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública estadual de São Paulo. Escolhemos trabalhar com o tema *Polígonos*, conteúdo geralmente trabalhado na 7ª série do Ensino Fundamental, visto que vários aspectos desse tema permanecem sem serem compreendidos pelos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental conforme verificamos no questionário aplicado.

Elaboramos uma sequência de atividades procurando utilizar a pavimentação com o intuito de tornar o conceito de polígono mais significativo para o aluno.

A primeira ideia para esse estudo era a utilização de mosaicos, mas esta possibilidade nos remetia a uma atividade muito abrangente, pois a construção dos mosaicos não utiliza apenas polígonos, mas pode envolver outros tipos de figuras planas. Partimos então da pavimentação do plano que utiliza somente polígonos.

Foi a partir da análise do material da "*Associação de Professores de Matemática* – Lisboa" sobre *Pavimentações* que iniciamos a concepção das atividades. A elaboração das atividades foi baseada nas atividades sugeridas pela mesma Associação e adaptadas para o nosso contexto.

As pesquisas de Machado, Parsysz e Vergnaud constituíram o alicerce para a concepção e análise de nossas atividades. Lembramos que Machado sugere que para a apropriação de um conceito geométrico é desejável uma articulação entre 4 dimensões: percepção, construção, representação e organização conceitual. Parsysz, por sua vez, sugere uma articulação entre a geometria concreta, a geometria de representação e a geometria dedutiva. Vergnaud sugere trabalhar com um conjunto variado de situações, com seus invariantes e seus significantes.

Essas sugestões foram motivadoras para a divisão da sequência de atividades em três blocos, descritos a seguir:

- Bloco I: A exploração dos polígonos via manipulação do material concreto;
- Bloco II: A exploração dos polígonos com o uso de *software* Cabri;
- Bloco III: O estudo das propriedades dos polígonos.

- **Bloco I:**

O Bloco I foi concebido para investigar empiricamente o grau de conhecimento do aluno em relação aos polígonos, como os alunos reagem com a apresentação do material concreto, quais atitudes podem ter e como irão incorporar tais conhecimentos.

Criamos seis *kits* de peças entre polígonos regulares e não regulares com cores diferentes. Dos polígonos regulares, foram confeccionados *quarenta e dois* triângulos equiláteros, *vinte e cinco* quadrados, *dez* pentágonos, *quatorze* hexágonos, *sete* heptágonos, *nove* octógonos, *seis* eneágonos, *quatro* decágonos e *seis* dodecágonos. Para cada polígono regular citado, com exceção do triângulo equilátero e do quadrado, colocamos um polígono não regular de mesmo número de lados. Além disso, construímos *dezesseis* triângulos retângulos, *oito* triângulos escalenos, *oito* retângulos, *oito* quadriláteros em forma de trapézio escaleno. Cada dupla utiliza um kit na atividade.

Esse bloco foi dividido em duas atividades: a primeira, para diferenciar polígonos regulares e não regulares, bem como formalizar a nomenclatura em relação ao número de lados do polígono; a segunda, para explorar o conceito de pavimentação, visto que tal conceito coloca em funcionamento propriedades dos polígonos.

- **Bloco II:**

O principal objetivo deste bloco é fazer com que o aluno possa confirmar as situações construídas no primeiro bloco e confrontar com recursos do Cabri as ideias que foram conjecturadas na manipulação do material concreto.

Para desenvolver a atividade o aluno será levado para a sala de informática onde poderá utilizar o *software* Cabri Géomètre II. Nesse bloco o aluno irá construir pavimentações com polígonos regulares. Estarão disponíveis as macros, isto é, construções dos polígonos regulares, apresentados no *kit* do bloco 1.

Nesse bloco os alunos deverão construir virtualmente as pavimentações elementares com triângulo equiláteros, quadrados e hexágonos regulares e procurar todas as combinações possíveis com dois ou mais tipos de polígonos regulares. As ferramentas “macro construção”, “medida de ângulo” e “preencher” serão utilizadas.

Esperamos que esse bloco leve o aluno a uma verificação de algumas propriedades dos polígonos, tais como: a congruência das medidas dos ângulos internos de cada polígono regular e das medidas dos seus lados.

- **Bloco III:**

O terceiro bloco foi concebido para explicitar os invariantes relacionados aos polígonos. O aluno irá aplicar os conhecimentos adquiridos nos dois primeiros blocos para construir o conceito de polígono regular e para generalizar resultados obtidos empiricamente nos blocos anteriores. As principais propriedades dos polígonos que serão estabelecidas são: a soma das medidas dos ângulos internos e externos de um polígono e as medidas dos ângulos internos e externos dos polígonos regulares.

ELEMENTOS DE UMA ANÁLISE *A PRIORI*

BLOCO I: Manipulando polígonos

A atividade 1 será apresentada aos alunos da seguinte maneira:

Escolher um *kit*.

1) Classificar os polígonos em dois grupos. Que critério você utilizou para classificar os polígonos? Descreva-o.

2) Junte sobre a mesa polígonos com o mesmo número de lados de modo que a mesa seja preenchida com as peças do *kit*, não havendo falhas (espaço entre as peças) nem sobreposição de polígonos. Repita a atividade utilizando triângulos congruentes entre si (não regulares).

O que você acabou de fazer recebe o nome de *Pavimentação*.

Pavimentar é combinar as formas geométricas de modo a cobrir toda a superfície sem falhas e sem sobreposições.

A primeira parte da atividade foi elaborada para dar aos alunos a oportunidade de diferenciar polígonos regulares e não regulares. A segunda parte da atividade tem por finalidade a apropriação do conceito de pavimentação. Os alunos deverão descobrir empiricamente polígonos que pavimentam o plano. No caso dos polígonos serem regulares, temos 3 pavimentações possíveis com polígonos de um só tipo.

Apresentamos abaixo as pavimentações com polígonos regulares de um só tipo: triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares.

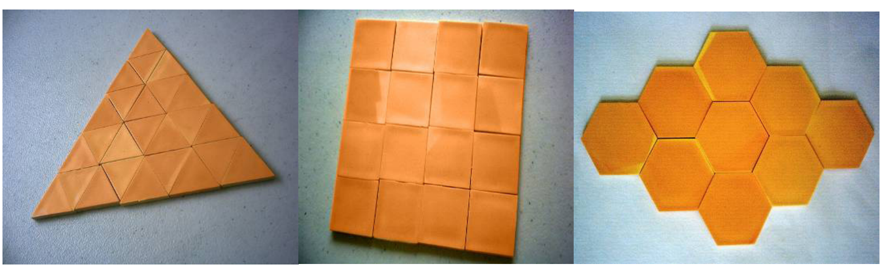


Figura 36

Quaisquer dos triângulos sempre podem pavimentar o plano desde que sejam todos congruentes entre si. Apresentamos duas pavimentações com triângulos não regulares e congruentes entre si.

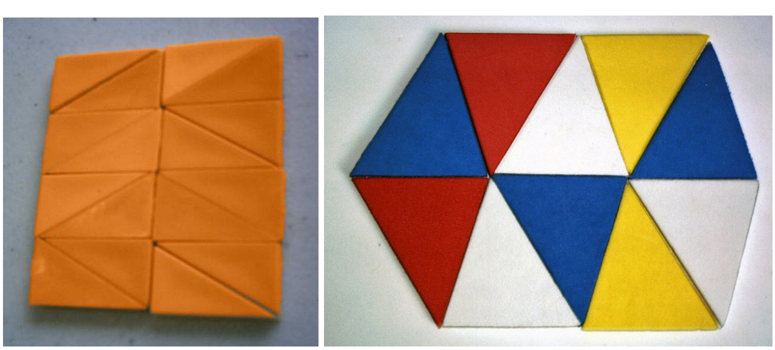


Figura 37

Quaisquer quadriláteros pavimentam o plano desde que sejam congruentes entre si. Seja ABCD um quadrilátero qualquer. Basta escolher o ponto médio M de um lado (por exemplo, DC) e obter os simétricos B’ e A’ dos pontos B e A em relação ao ponto médio. O quadrilátero DCA’B’ será justaposto ao quadrilátero ABCD conforme indica a figura abaixo.

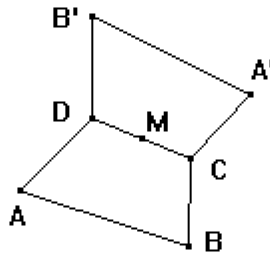


Figura 38

Apresentamos 2 pavimentações com quadriláteros congruentes entre si.

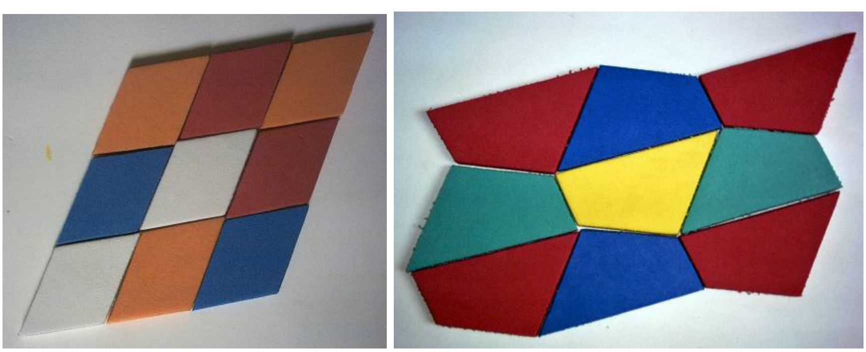


Figura 39

Durante o desenvolvimento da atividade, poderão surgir dificuldades em função da nomenclatura dos polígonos. Neste caso, o professor pesquisador poderá orientar como atribuir a nomenclatura para os polígonos regulares e não regulares.

Após a atividade haverá uma teorização por parte do professor pesquisador. Será dada a definição de polígono regular e a nomenclatura associada a cada polígono (vértice, lado, ângulo interno e ângulo externo). Além disso, alguns comentários sobre as pavimentações obtidas com polígonos não regulares pertencentes ao kit.

A atividade 2 será apresentada ao aluno da seguinte maneira:

Utilize o kit da atividade 1.

Fazer uma pavimentação utilizando apenas triângulos equiláteros. Verifique se é possível.

Fazer uma pavimentação utilizando apenas quadrados. Verifique se é possível.

Fazer uma pavimentação utilizando apenas pentágonos regulares. Verifique se é possível.

Fazer uma pavimentação utilizando apenas hexágonos regulares. Verifique se é possível.

É possível fazer uma pavimentação com polígonos regulares com o número de lados maior que seis? Se sim, quais? Se não, tente dar uma explicação.

Descubra algumas pavimentações possíveis utilizando somente dois polígonos regulares. Quais polígonos você utilizou em cada pavimentação?

Descubra algumas pavimentações possíveis utilizando mais de dois polígonos regulares. Quais polígonos você utilizou em cada pavimentação?

O objetivo da atividade é desenvolver nos alunos a habilidade e percepção com o manuseio de polígonos regulares de mesma forma e de formas diferentes.

Nos itens **(a)** e **(b)**, as pavimentações são de fácil compreensão pelos alunos, pois já foram realizadas anteriormente. No item **(c)** ao colocar os pentágonos regulares em torno de um ponto, o aluno pode perceber que é possível colocar até três pentágonos um ao lado do outro, sem sobreposição. Ao colocar o quarto pentágono regular haverá sobreposição. Não se espera nesse bloco que o aluno dê uma justificativa teórica para a sobreposição. Mas pode acontecer que alguns alunos justifiquem a sobreposição pela utilização da fórmula que fornece a medida de um ângulo interno de um polígono regular que é $\frac{(n-2).180^0}{n}$. Para n =5, encontramos 108º. Ao utilizar três pentágonos regulares ao redor de um ponto, obtém-se 3.108º = 324º, faltando 36º para completar 360º. Acrescentando mais um pentágono regular, temos 4.108º = 432º, concluindo-se que ficam sobrepostos. Neste caso, não é possível pavimentar somente com pentágonos regulares. Representamos a seguir a tentativa de pavimentação com pentágonos regulares utilizando 10 peças, o interior da figura é uma estrela de cinco pontas.

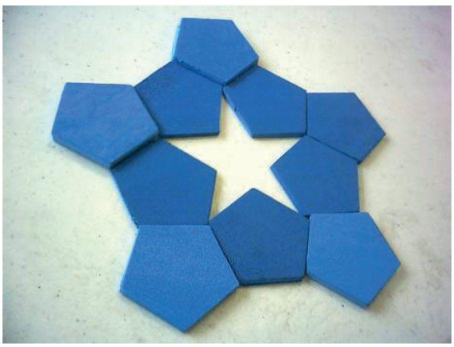


Figura 40

A pavimentação do item **(d)** não apresentará dificuldades aos alunos, pois é considerada de fácil compreensão, já que necessita apenas de 3 hexágonos regulares. Para desenvolver o item **(e)** o aluno deve notar que não será possível realizar a pavimentação com um só polígono regular de lado maior que 6. Tais polígonos apresentam medida do ângulo interno maior que 120º o que mostra que não pavimentam o plano, pois haverá sobreposição. A seguir vamos mostrar possíveis tentativas.

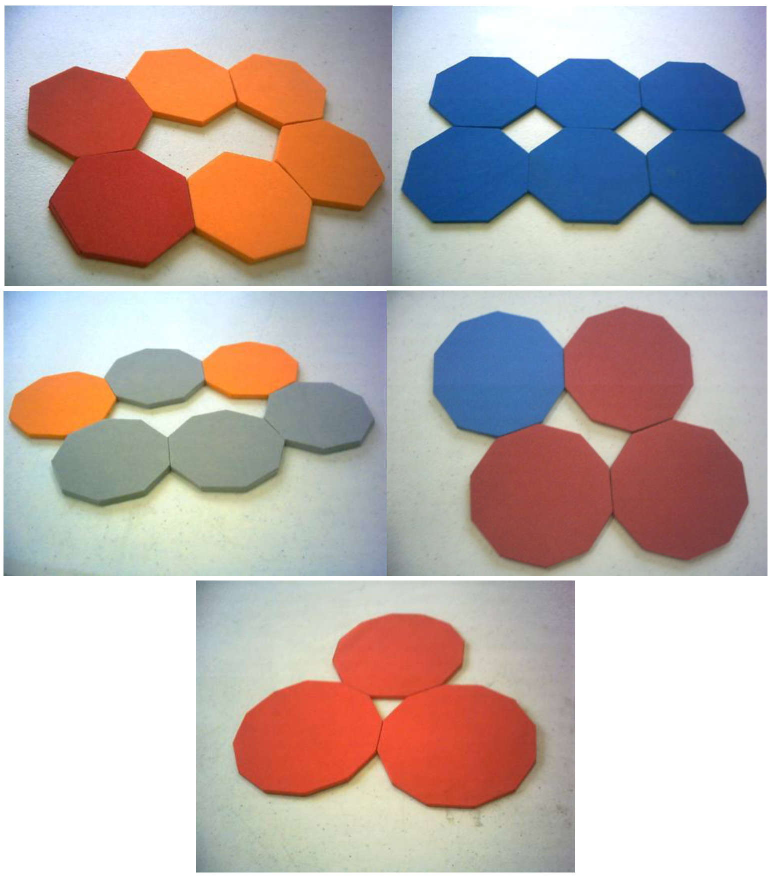


Figura 41

Agora, vamos verificar a possibilidade de pavimentação com dois polígonos regulares, como está descrito no item **(f)**. Primeiro vamos encontrar as pavimentações mais simples depois tentar fazer as demais combinações. Pretende-se que o aluno inicie com triângulos equiláteros e quadrados.

Acreditamos que os alunos, por tentativa e erro, terão sucesso nesta atividade, mas sem ter a percepção de que a soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos em torno de um ponto é 360º, pois refere-se a uma atividade empírica.

Pretendemos levar os alunos a perceber que estão encontrando valores inteiros **m** e **n** de modo que m.60º + n.90º = 360º, sendo **m** o número de triângulos equiláteros e **n** o número de quadrados que podem ser utilizados para pavimentar o plano. Assim, temos: m.60º + n.90º = 360º, dividindo a equação por 30º, obtemos: m.2 + n.3 = 12.

Três triângulos equiláteros e dois quadrados pavimentam a superfície. Existem mais de uma posição para combinar estes polígonos regulares. Apresentamos a seguir uma delas.

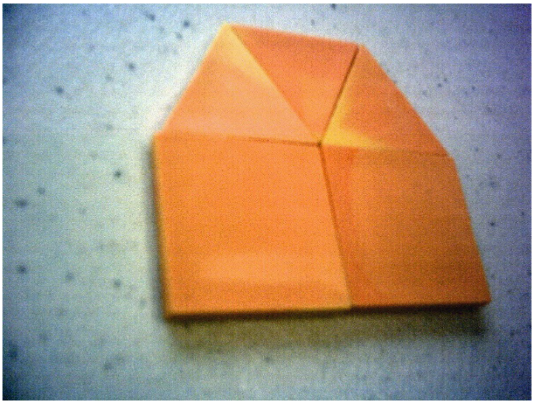


Figura 42

Prosseguindo, vamos reunir triângulos equiláteros e o hexágonos regulares de modo que m.60º + n.120º = 360º. Neste caso, podemos fazer m = 2 e n = 2 ou m = 4 e n = 1. Vamos apresentar uma das pavimentações.

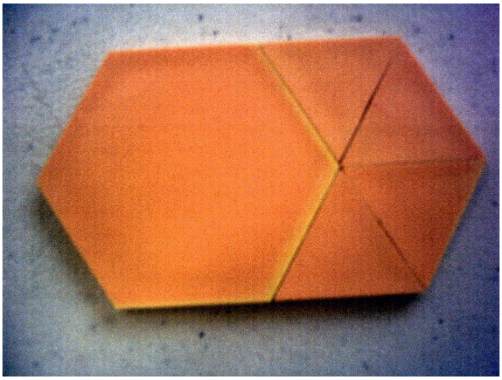


Figura 43

Outra forma de pavimentar o plano é com triângulos equiláteros e dodecágonos regulares. Para isso, devemos ter m.60º + n.150º = 360º o que se verifica fazendo m = 1 e n = 2, portanto é possível pavimentar o plano com triângulos equiláteros e dodecágonos regulares. A seguir indicamos a pavimentação possível.

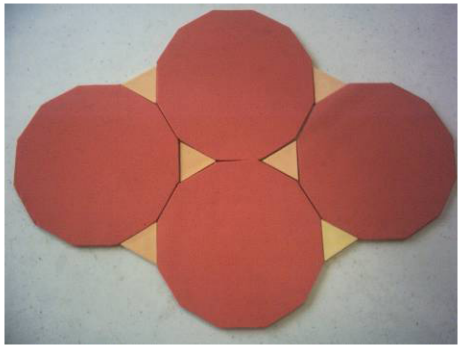


Figura 44

A pavimentação poderá ser feita também com quadrado e o octógonos regulares, ou seja, devemos ter m.90º + n.135º = 360º, basta fazer m = 1 e n = 2. Logo é possível pavimentar o plano com esses polígonos regulares. Segue a representação da pavimentação.

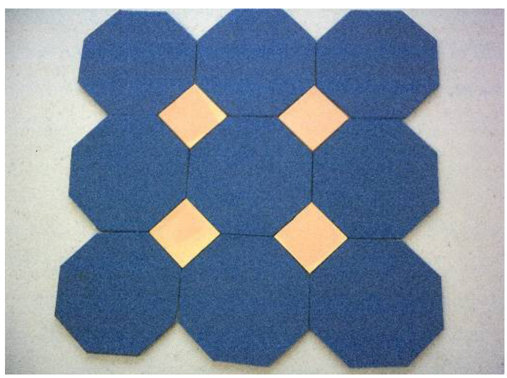


Figura 45

Esperamos que os alunos respondam o item **(g)** por tentativa e erro. Vamos descrever as possibilidades de pavimentação com três polígonos regulares. Podemos ter uma pavimentação do tipo (3, 4, 4, 6) com estes polígonos, o quadrado será utilizado duas vezes; (3, 3, 4, 12) neste caso, o triângulo equilátero será utilizado duas vezes e uma pavimentação do tipo (4, 6, 12).

Para pavimentar o plano com o triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular deveremos ter m.60º + n.90º + p.120º = 360º, com isso devemos ter m = 1, n = 2 e p = 1. Outra pavimentação é do triângulo equilátero, quadrado e dodecágono, ou seja, devemos ter m.60º + n.90º + p.150º = 360º para isso devemos atribuir m = 2, n = 1 e p = 1. A última pavimentação utiliza o quadrado, hexágono regular e o dodecágono regular, assim m.90º + n.120º + p.150º = 360º para isso devemos ter m = 1, n = 1 e p = 1. Segue a representação das pavimentações citadas; não é, porém, a única possibilidade.

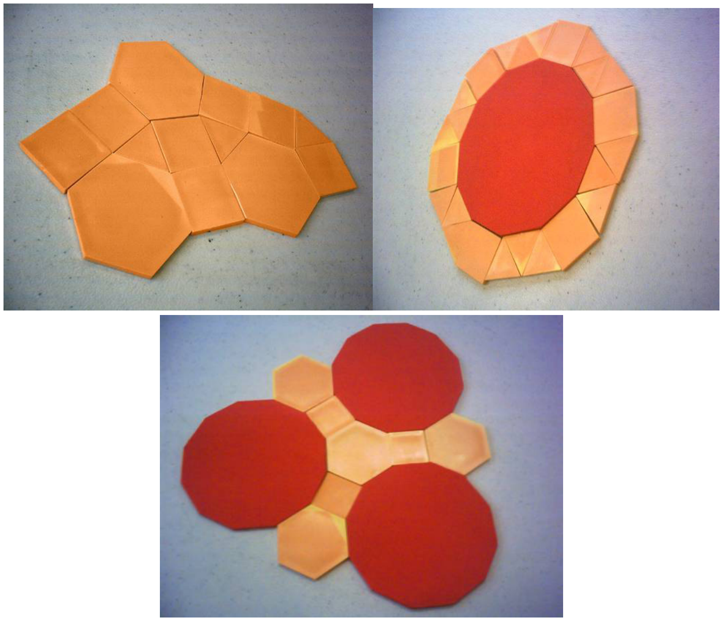


Figura 46

Há a possibilidade de os alunos não conseguirem visualizar a junção das peças em torno de um só vértice. Nesse caso, será necessária a intervenção do professor pesquisador.

BLOCO II - Construções no Cabri

A atividade 1 será apresentada ao aluno da seguinte maneira:

1a) Utilizando a barra de ferramenta “macro construção” construa um triângulo equilátero clicando nas duas extremidades de um segmento. A seguir meça o “ângulo interno” com a ferramenta “ângulo”.

1b) É possível pavimentar o plano utilizando somente triângulos equiláteros?
1c) Se possível, pinte a pavimentação utilizando cores e a ferramenta “preencher”.

2a) Utilizando a barra de ferramenta “macro construção” construa um quadrado clicando nas duas extremidades de um segmento. A seguir meça o “ângulo interno” com a ferramenta “ângulo”.
2b) É possível pavimentar o plano utilizando somente quadrados?
2c) Se possível, pinte a pavimentação utilizando cores e ferramenta “preencher”.

3a) Utilizando a barra de ferramenta “macro construção” construa um pentágono regular clicando nas duas extremidades de um segmento e no ângulo dado. A seguir meça o “ângulo interno” com a ferramenta “ângulo”.
3b) É possível pavimentar o plano utilizando somente pentágonos regulares?
3c) Se possível, pinte a pavimentação com a ferramenta “preencher”.

4a) Utilizando a barra de ferramenta “macro construção” construa um hexágono regular clicando nas duas extremidades de um segmento. A seguir meça o “ângulo interno” com a ferramenta “ângulo”.
4b) É possível pavimentar o plano utilizando somente hexágonos regulares?
4c) Se possível, pinte a pavimentação com a ferramenta “preencher”.

5) Verifique se é possível pavimentar o plano com um polígono regular presente na barra de ferramentas e cujo número de lados seja maior que 6. Justifique a sua resposta.

O objetivo da atividade é fazer com que os alunos confirmem os resultados do bloco 1 com a utilização de um *software*. Além disso, queremos que os alunos obtenham empiricamente as medidas dos ângulos internos dos polígonos utilizados. Serão fornecidos na barra de macro construção, os seguintes polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado, pentágono regular, hexágono regular, heptágono regular, octógono regular, decágono regular e dodecágono regular.

Nessa atividade os alunos serão levados a perceber que as pavimentações possíveis realizadas com a manipulação dos polígonos regulares ocorrem porque a soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos em torno de um só ponto é 360º. No desenvolvimento com o *software* Cabri esta informação será verificada a cada construção das atividades programadas. Para o desenvolvimento da questão **1**, o aluno deverá ativar a macro “triângulo equilátero”. Ela deverá ser acionada a partir de 2 pontos que são as extremidades do lado de um triângulo equilátero. No final da atividade devemos ter uma representação do tipo:

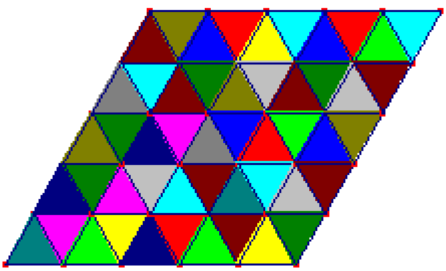


Figura 47

Na questão **2** os alunos não terão dificuldades, pois é de fácil entendimento. Basta ativar a ferramenta *quadrado*, clicar em 2 pontos distintos e fazer a pavimentação. A tarefa pede ao aluno para medir os ângulos em torno de um só ponto. No final da atividade teremos uma representação do tipo:

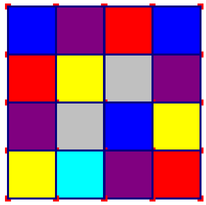


Figura 48

Na questão **3** o aluno deverá recorrer à ferramenta “pentágono regular” para pavimentar o plano e perceber que não é possível. Será acionada a macro clicando em dois pontos distintos e utilizando o ângulo interno 108º por intermédio da ferramenta “edição numérica”. Irão utilizar a ferramenta “ângulo” para verificar que faltam 36º para completar 360º ao redor de um ponto. A representação a seguir foi feita utilizando o recurso citado.

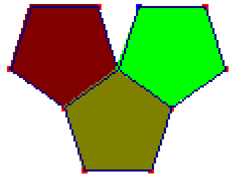


Figura 49

Os alunos deverão desenvolver a questão **4** utilizando a macro “hexágono regular” e clicando em dois pontos distintos. Irão utilizar a ferramenta “ângulo” para medir os ângulos internos dos polígonos regulares utilizados ao redor do vértice de um deles. No final teremos uma representação do tipo:

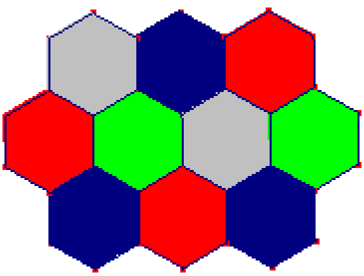


Figura 50

Na questão **5** a ferramenta “medida de um ângulo” do Cabri contribui para a verificação de que nenhum polígono regular de um só tipo com *n* lados, $n > 6$, pode pavimentar o plano.

Espera-se que os alunos consigam utilizar as macro construções fornecidas previamente para construir os polígonos e tenham familiaridade com o uso do computador. Para reconhecer a possibilidade da pavimentação, os alunos deverão medir cada ângulo interno dos polígonos utilizados em torno de um só ponto, com a finalidade de verificar que a soma das medidas dos ângulos é igual a 360º.

A atividade 2 será apresentada ao aluno da seguinte maneira:

Existem apenas quatro pavimentações do plano que utilizam em torno de um ponto apenas dois tipos de polígonos regulares. Descubra-as.

O objetivo desta atividade é desenvolver no aluno o espírito de investigação e desafiá-lo a procurar os tipos de pavimentação com dois polígonos possíveis de serem realizadas. Possivelmente os alunos iniciarão a atividade com triângulos equiláteros e quadrados, a seguir trocarão o quadrado pelo pentágono regular, depois pelo hexágono regular e assim por diante até o dodecágono regular.

A próxima dupla de polígonos que o aluno provavelmente utilizará são o quadrado e o hexágono regular, substituindo depois o hexágono pelo heptágono regular, o octógono regular até o dodecágono regular. Com isso encontrará todas as pavimentações possíveis, ou seja, quadrado e triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular, quadrado e octógono regular e, finalmente, triângulo equilátero e dodecágono regular. Deverá perceber que não encontrará mais possibilidades, pois as medidas dos ângulos internos dos polígonos regulares com maior número de lados possuem menor possibilidade de pavimentação.

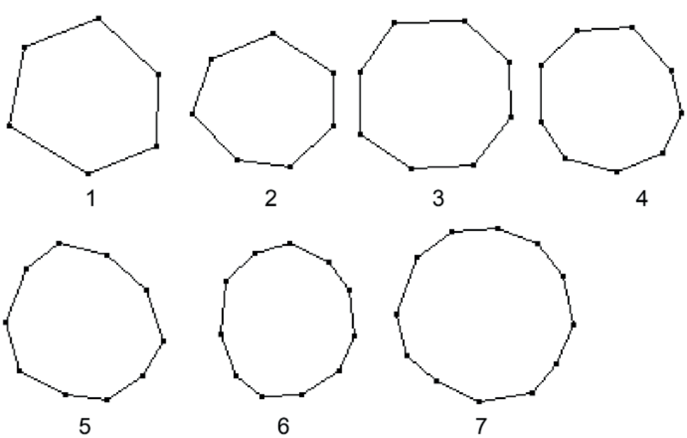
Espera-se que os alunos tenham menos dificuldade, pois na atividade 1, verificaram com o Cabri as medidas de cada ângulo interno dos polígonos regulares. Os alunos terão à disposição o *software* Cabri e o material concreto.

Caso os alunos apresentem dificuldades, o professor deverá orientá-los para que utilizem o material concreto a fim de encontrar as possibilidades de pavimentação e depois confirmar no *software* Cabri.

BLOCO III – Dedução

A atividade 1 será apresentada ao aluno da seguinte maneira:

Considerando os polígonos a seguir:



a) Em quantos triângulos podemos decompor cada um dos polígonos acima, a partir de um dos vértices?
b) Em quantos triângulos podemos decompor um polígono de **n** lados, a partir de um dos vértices?
c) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de 100 lados?
d) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de **n** lados?
e) Qual é a medida de um ângulo interno do polígono regular de 36 lados?
f) Qual é a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados?

O objetivo desta atividade é levar os alunos a generalizar resultados relativos a polígonos.

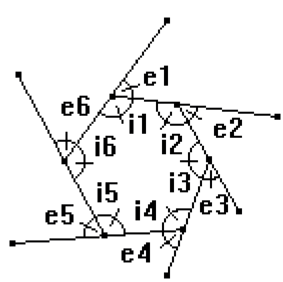
No item **(a)** o aluno deve escolher um vértice em cada polígono e traçar as diagonais. Irá observar que sobrarão dois vértices do polígono que não serão ligados por diagonais. Ao final contará os triângulos formados e notará que a quantidade é o número de lados menos dois. O polígono (1) possui seis lados e será dividido em quatro triângulos; o polígono (2) possui sete lados e será dividido em cinco triângulos; o polígono (3) possui oito lados e será dividido em seis triângulos; o polígono (4) possui nove lados e será dividido em sete triângulos; o polígono (5) possui dez lados e será dividido em oito triângulos; o polígono (6) possui onze lados e será dividido em nove triângulos; finalmente polígono (7) possui doze lados e será dividido em dez triângulos.

No item **(b)** o aluno deverá concluir que um polígono de *n* lados será dividido em (n – 2) triângulos. No item **(c)** o aluno deverá perceber que a soma das medidas dos ângulos internos do polígono de 100 lados é (100 – 2).180º. O item **(d)** é uma generalização dos resultados acima. A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de *n* lados é igual a (n – 2).180º.

Para desenvolver o item **(e)**, o aluno deverá perceber que um polígono regular de 36 lados possui todas as medidas dos ângulos internos iguais. Sendo assim, encontrará a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono e dividirá o resultado por 36. Neste caso, encontrará o ângulo 170º. No item **(f)** deverá apresentar uma fórmula para a medida do ângulo interno de um polígono regular, ou seja, $i = \frac{(n-2).180^0}{n}$.

A atividade 2 será apresentada aos alunos da seguinte maneira:\

a) Qual é a soma das medidas dos ângulos externos do hexágono abaixo?
b) Obter uma fórmula para a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados.
c) Se um polígono de 10 lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?
d) Se um polígono de n lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?



O objetivo da atividade é levar o aluno a perceber que independentemente do polígono ser regular ou não, a soma das medidas dos ângulos externos é 360º.

O item **(a)** será desenvolvido com a observação de que a soma da medida de um ângulo interno e do seu ângulo suplementar externo é igual a 180º. Escrevendo para cada vértice uma equação, teremos seis equações, ou seja:

$$i_1 + e_1 = 180^0$$
$$i_2 + e_2 = 180^0$$
$$i_3 + e_3 = 180^0$$
$$i_4 + e_4 = 180^0$$
$$i_5 + e_5 = 180^0$$
$$i_6 + e_6 = 180^0$$

Somando em ambos os lados da equação:

$$(i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6) + (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6) = 6.180^0 .$$

A soma das medidas dos ângulos internos do polígono é: $S_6 = (6-2).180^0 = 4.180^0$. Logo,

$$4.180^0 + (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6) = 6.180^0.$$

O aluno deve encontrar que a soma das medidas dos ângulos externos para o polígono apresentado é 360º. De fato,

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 = 6.180^0 - 4.180^0 = 360^0$$

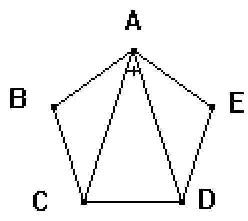
Para o item **(b)** o aluno deverá notar que:

$S_i + S_e = n.180^0$. Logo $S_e = n.180^0 - (n-2).180^0$. Portanto $S_e = 360^0$.

O objetivo do item **(c)** é fazer com que o aluno perceba que no polígono regular os ângulos externos são congruentes. Portanto, basta dividir a soma das medidas dos ângulos externos por 10. Finalmente no item **(d)** o aluno deverá generalizar e escrever a fórmula que representa a medida do ângulo externo, ou seja, $S_n = \dfrac{360^0}{n}$.

A atividade 3 será apresentada ao aluno da seguinte maneira:

Determinar a medida do ângulo $C\hat{A}D$ sabendo que a figura ABCDE é um polígono regular. Descrever o processo.



O objetivo dessa atividade é verificar se os alunos se apropriaram do conceito de polígono regular e das suas propriedades. No item **(a)** os alunos poderão apresentar a seguinte estratégia de resolução: o pentágono regular tem lados congruentes e ângulos congruentes, conclui-se que os triângulos ABC e AED são isósceles. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é (n - 2).180^0, conclui-se que a soma das medidas dos ângulos internos de um pentágono é 540º. Como o pentágono é regular então a medida do ângulo $A\hat{B}C$ é $\frac{540^0}{5} = 108^0$. O triângulo ABC sendo isósceles teremos que os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$ medem 36º. De maneira análoga, conclui-se que a medida do ângulo $A\hat{E}D$ é 108º e as medidas dos ângulos $E\hat{A}D$ e $E\hat{D}A$ medem 36º. Finalmente, o ângulo $C\hat{A}D$ mede 108º - (36º + 36º) = 36º. O professor pesquisador deve orientar os alunos a observar que as diagonais AC e AD são congruentes. Acreditamos que uma dificuldade para a correta resolução seja perceber que os triângulos ABC e AED são isósceles.

A atividade 4 será apresentada ao aluno da seguinte maneira:

a) Um retângulo é um polígono regular? Escreva sua resposta.
b) Um losango é um polígono regular? Escreva sua resposta.

Essa atividade foi elaborada para dar ao aluno a oportunidade de lidar com polígonos não regulares que apresentam apenas uma das duas condições dos regulares.

A intenção da atividade é verificar se os alunos se apropriaram das duas condições da definição de polígono regular. O retângulo tem apenas 4 ângulos congruentes e o losango tem apenas 4 lados congruentes. De acordo com a definição de polígono regular eles não satisfazem uma das duas condições (lados congruentes e ângulos congruentes respectivamente).

A atividade 5 será apresentada ao aluno da seguinte maneira:

Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

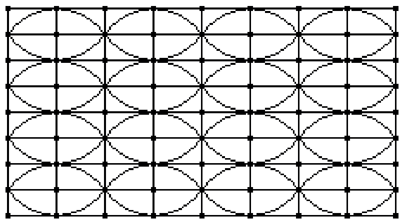


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano.

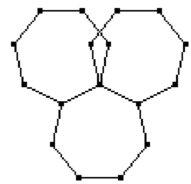
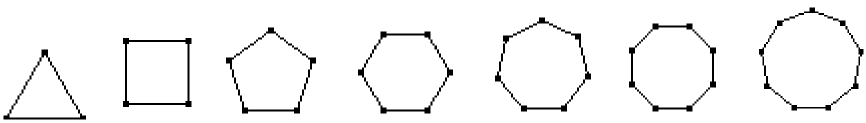


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano

A seguir uma relação de alguns polígonos regulares.



Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos regulares acima, sendo um deles octogonal, qual deverá ser a forma do outro polígono escolhido?

O objetivo da atividade é aplicar as propriedades estabelecidas na atividade 1. Os alunos poderão apresentar a seguinte estratégia de resolução: O ângulo interno de um octógono regular mede $\frac{(8-2).180^0}{8} = 135^o$. Portanto há necessidade de dois octógonos regulares e de um quadrado ($135^o + 135^o + 90^o = 360^o$) em torno de um ponto para poder cobrir o plano sem falhas ou sobreposições, como indica a figura a seguir:

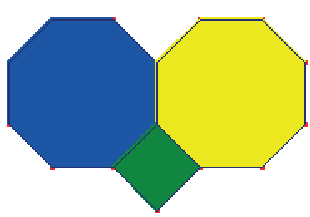
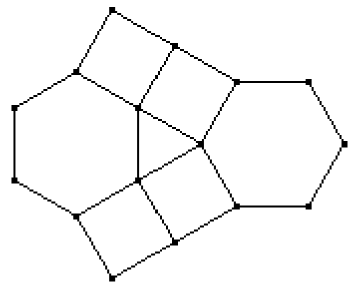


Figura 51

Nessa atividade**,** o aluno deverá calcular as medidas dos ângulos internos de cada um dos polígonos apresentados e tentar relacionar tais medidas com o valor 360º.

A atividade 6 será apresentada ao aluno da seguinte maneira:

Você acabou de fazer algumas pavimentações com dois tipos de polígonos regulares. Outras pavimentações podem ser feitas com dois ou mais de polígonos regulares. Uma delas é a pavimentação (3-4-4-6), que está indicada a seguir. Trata-se de um triângulo equilátero (3 lados), de dois quadrados (4 lados) e de um hexágono regular (6 lados). Existem 8 combinações possíveis de polígonos regulares para pavimentar o plano. Tente encontrar as outras 7 pavimentações.



Essa atividade foi elaborada para ser realizada no ambiente papel e lápis e sem o recurso do *software* Cabri. A intenção era provocar no aluno o uso das fórmulas para encontrar as medidas dos ângulos internos de vários polígonos regulares e combiná-las para dar 360º. A atividade poderá apresentar dificuldades para os alunos, pois são necessárias várias combinações para obter tais pavimentações. Em cada tentativa o aluno deverá descrever o procedimento utilizado. Apresentamos a seguir as 8 possíveis pavimentações:

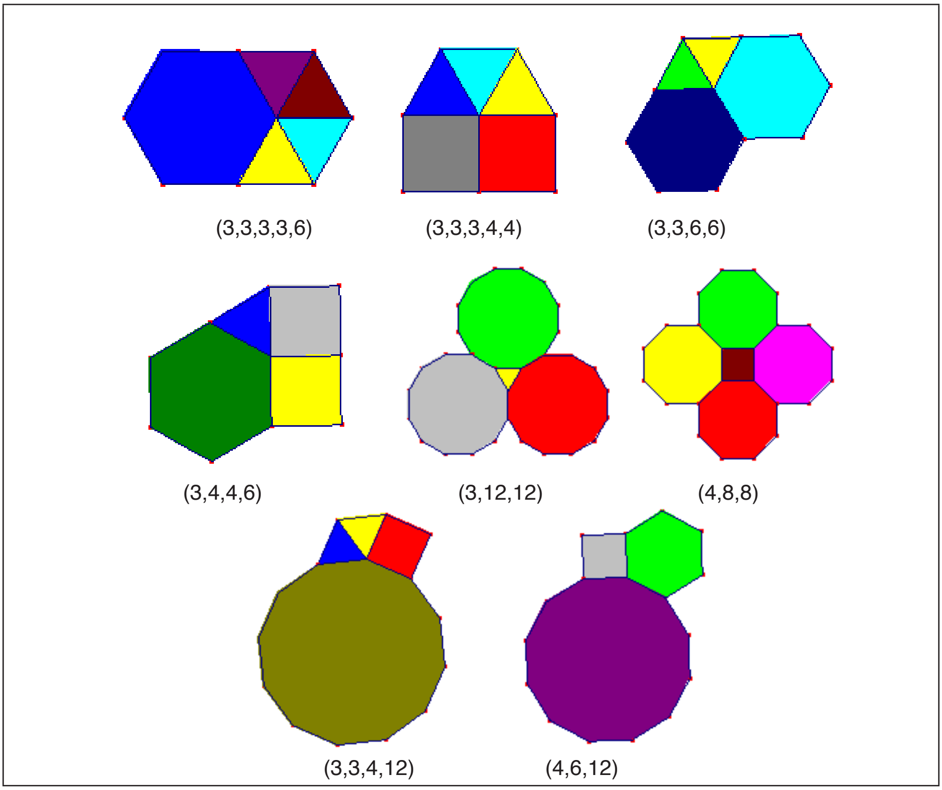


Figura 52

Esses são os padrões de pavimentação com a possibilidade de cobrir o plano. Os alunos deverão compreender que não há mais possibilidades de utilização dos polígonos regulares que possam pavimentar o plano, mesmo tendo verificado outras combinações, pois há combinações de polígonos regulares que formam um padrão de pavimentação, porém não conseguem pavimentar todo o plano, é o caso da utilização de dois pentágonos regulares e um decágono regular.

CAPÍTULO 4

EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE *A POSTERIORI*

ORGANIZAÇÃO

Apresentamos a seguir a organização e aplicação da sequência de atividades. Analisaremos, então, as produções dos alunos e faremos a comparação entre o que esperávamos a *priori* com os resultados obtidos, fundamentados na teoria presente no *Capítulo 1*. Serão estas discussões que constituirão a análise a *posteriori*.

Esta análise buscará respostas para a questão de pesquisa, formulada no Capítulo1: “Em que medida um trabalho de exploração com as pavimentações no plano, favorece o estudo das propriedades dos polígonos?”

Fizemos um convite (anexo 1) aos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola estadual, da Diretoria de Ensino da Região de Santo André, sendo que 8 alunos, com idades entre 14 e 16 anos, matriculados no período da manhã se comprometeram a participar.

A aplicação da sequência foi dividida em 3 blocos, sendo o primeiro bloco aplicado no dia 11/12/2006, o segundo bloco no dia 12/12/2006 e o terceiro bloco no dia 13/12/2006. Cada encontro durou em média uma hora e meia. As atividades foram desenvolvidas em duplas na sala de informática, a qual possui três mesas grandes suficientes para o trabalho das 4 duplas. As duas primeiras duplas ocuparam duas mesas e a terceira e quarta utilizaram a mesma mesa.

Auxiliando o professor-pesquisador, estava presente uma professora, que observava uma dupla, escolhida aleatoriamente. A observadora anotava todas as dúvidas, conclusões, perguntas e comentários pertinentes da dupla em questão, sem em nenhum momento participar e responder às dúvidas. Preparamos um questionário para ser preenchido pela observadora, para nortear as observações e fazê-la prestar atenção aos elementos que o professor-pesquisador considerava mais importantes. Também procedemos à gravação dos diálogos da dupla de alunos anteriormente citada. Como a professora-observadora também é a professora de matemática dos alunos envolvidos, não foi preciso fazer uma identificação de voz durante a gravação, a fim de reconhecer os elementos da dupla.

Paralelamente ao trabalho da observadora, o professor-pesquisador dividia seu tempo observando as outras 3 duplas, preocupando-se em limitar o máximo possível a interferência perante aos alunos no sentido de responder dúvidas ou dar dicas solucionadoras. A sua postura era a de observar o comportamento das duplas com relação às reações diante dos problemas, das dúvidas e das conjecturas apresentadas para solucionar os desafios propostos.

Em cada encontro as duplas recebiam o material da atividade a ser respondido e discutido. Ao seu término, todo o material era devolvido para o professor-pesquisador para servir de suporte à análise a *posteriori*.

O primeiro encontro iniciou-se às 14 horas com duração de uma hora e 18 minutos. No final da atividade, o professor-pesquisador fez uma sistematização dos polígonos apresentados em relação à nomenclatura e à forma das peças do *kit*, definindo polígonos regulares e não regulares. Para os polígonos não regulares, as pavimentações realizadas pelos alunos com os quadriláteros não regulares e os triângulos quaisquer foram justificadas pelo professor-pesquisador. Ao final do primeiro bloco foi apresentado o *software* Cabri. Todos os alunos presentes tinham um prévio conhecimento desse programa.

O segundo encontro foi realizado também às 14 horas com duração de uma hora e 18 minutos. Para o desenvolvimento foi necessário o uso de um computador para cada dupla. Antes do início das atividades o professor-pesquisador colocou em cada computador as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da atividade.

O terceiro bloco, por ser mais extenso, foi realizado no período da manhã, a partir das 10 horas, com duração de uma hora e 27 minutos.

Para realizar as atividades, os alunos responderam às questões propostas em todos os blocos, procurando descrever ou relatar as técnicas e procedimentos utilizados.

O material utilizado para a análise e interpretação deste trabalho foram as respostas das questões escritas pelos alunos nos blocos I, II e II, as gravações dos relatos transcritos das duplas 1 e 2, e o relatório da professora-observadora.

ANÁLISE A *POSTERIORI* DAS ATIVIDADES

Vamos utilizar as letras A, B, C, D, E, F, G e H para nomear os alunos participantes e os números 1 a 4 para indicar as duplas. A seguir as análises a *posteriori* de cada uma das atividades.

BLOCO I: Manipulando polígonos

Os alunos escolheram um kit de peças com polígonos e iniciaram a investigação. A princípio percebemos uma instabilidade dos mesmos em relação à identificação dos polígonos. Aos poucos foram percebendo que os polígonos eram familiares e que sabiam o nome de alguns. Em relação à primeira atividade, houve diferenciação de classificação pelas duplas, pois o foco principal era a manipulação das peças do *kit*, evidenciando o conhecimento empírico.

A princípio, os alunos mostraram-se pouco à vontade com a manipulação do material, mas com o desenvolvimento das atividades, percebemos através dos seus diálogos uma adaptação ao material.

Ao ouvir as gravações, observamos que no primeiro encontro os alunos conversavam entre si dificultando o entendimento das falas, o que não ocorreu nos demais encontros, em que verificamos que a discussão se deu inter-duplas.

A seguir faremos uma descrição dos resultados apresentados durante o desenvolvimento deste bloco.

- **Atividade 1:**

Para a **primeira questão**:

Classificar os polígonos em dois grupos. Que critério você utilizou para classificar os polígonos?

a **dupla 1** não estava conseguindo compreender como seria a classificação em dois grupos. O professor-pesquisador orientou os alunos a estabelecer um critério para iniciar a classificação sugerindo um exemplo: "*Você tem que ter um critério, como por exemplo, para classificar um grupo de pessoas podemos dispor os homens de um lado e as mulheres do outro*."

A dupla não fez uma classificação conforme havíamos previsto na análise a *priori.* No primeiro grupo colocaram os polígonos grandes e, no segundo grupo colocaram os polígonos pequenos. Não descreveram a justificativa da classificação. A resposta para a primeira questão foi: *Polígonos grandes e polígonos pequenos. Os grandes de um lado e os pequenos do outro*. Essa resposta reflete que a dupla não compreendeu o esclarecimento do professor-pesquisador com relação ao modo como fazer a classificação. Nota-se, que os alunos utilizaram as expressões "de um lado" e "do outro" da mesma forma que o pesquisador. A figura a seguir indica a divisão feita pela dupla 1.

Figura 53 – Dupla 1

A **dupla 2**, utilizou um critério de acordo com o número de lados. Colocaram como resposta: *Separamos por número de lados. De um lado colocamos os polígonos que tem até seis lados e do outro separamos os polígonos com mais de seis lados*.

Figura 54 – Dupla 2

A **dupla 3** se preocupou com a cor dos polígonos e fez a classificação em função da cor. Descreveram assim: *Por cor e tamanho*.

A **dupla 4** apresentou uma classificação diferente de todas as outras. Organizou os polígonos pelo número de lados pares e ímpares. Descreveram: *Um grupo tem lados pares e o outro grupo tem lados ímpares. Calculamos o número de lados de cada um e efetuamos o processo*.

Não houve a classificação de acordo com o que foi previsto, em função do número de lados de cada polígono. Os alunos não se preocuparam com as propriedades dos polígonos, embora tenham percebido, empiricamente, que havia uma diferenciação entre eles. Nessa primeira atividade, vimos que o desempenho dos alunos ficou aquém do esperado.

Na resolução da **segunda questão**:

Junte sobre a mesa polígonos com o mesmo número de lados de modo que a mesa seja preenchida com as peças do kit, não havendo falhas (espaço entre as peças) nem sobreposição de polígonos. Repita a atividade utilizando triângulos congruentes entre si (não regulares).,

a **dupla 1** conseguiu realizar as pavimentações com os polígonos de mesmo número de lados, mas não conseguiu descrever o processo de forma a justificar suas atitudes. Escreveu como resposta: *"Juntou" os polígonos de lados iguais e depois "juntei" as figuras formadas*. A figura a seguir representa a pavimentação com triângulos equiláteros:

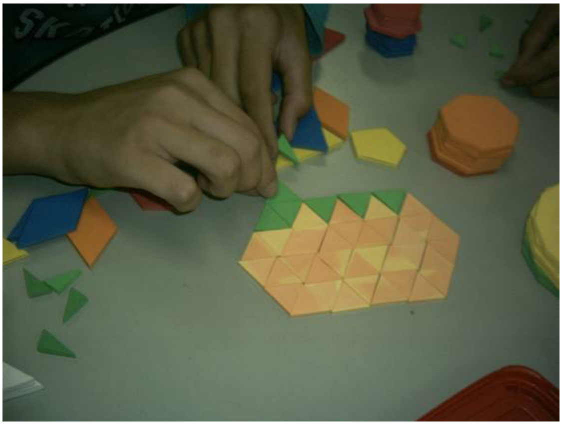


Figura 55 – Confecção da atividade 1 – dupla 1

A professora-observadora apresentou o seguinte comentário sobre o desempenho da dupla 1: *Os alunos organizaram os polígonos utilizando triângulos, quadrados, retângulos, hexágonos e losangos. Começaram utilizando polígonos com o mesmo número de lados e logo perceberam que poderiam combinar polígonos com quantidade de lados diferente*.

As pavimentações apresentadas pela dupla observada foram obtidas pela junção de polígonos regulares e não regulares, reunindo dois quadrados com um retângulo. Esta pavimentação foi possível porque as dimensões do retângulo são 5 cm por 3 cm, sendo assim, juntando dois quadrados com 2,5 cm lado a lado, encontramos exatamente 5 cm. Não fizeram nenhum comentário sobre as propriedades dos polígonos regulares.

Figura 56 – Atividade 1 – 2ª questão – dupla 1

Ao repetir a atividade com triângulos não regulares, a dupla 1, apresentou dificuldades para perceber como seriam as pavimentações, pois os polígonos regulares não se encaixavam nesses triângulos, conforme mostra a figura abaixo:

Figura 57 – Pavimentação com polígonos não regulares – Dupla 1

Notamos que, ao realizarem a pavimentação com os polígonos não regulares do *kit* (losango, triângulo escaleno e retângulo), não se preocuparam com as propriedades dos mesmos, desenvolvendo a atividade empiricamente, ou seja, dispunham as peças lado a lado e, se elas se encaixassem, davam o problema por encerrado. Essa atitude reflete o fato que essa dupla está no nível G0 do pensamento geométrico de Parzysz.

A **dupla 2** conseguiu fazer a junção de algumas peças conforme solicitado. Fizeram duas pavimentações, uma com triângulo equilátero e outra com o hexágono regular. Descreveram o processo e justificaram da seguinte maneira: *Com triângulos equiláteros formamos um hexágono utilizando apenas seis triângulos equiláteros. E juntando sete hexágonos formamos uma flor. "Se" encaixam uma peça na outra porque tem o mesmo ângulo, a mesma medida e o mesmo número de lados*. Os alunos não notaram que a pavimentação foi possível porque ao redor de um vértice a junção das peças resulta em 360º.

A **dupla 3** pavimentou o plano com triângulos, losangos, quadrados, retângulos e hexágonos. Os alunos não justificaram e nem escreveram o processo utilizado.

A **dupla 4** também realizou a junção das peças com polígonos, mas não descreveu o processo utilizado. Escreveram: *Foi possível a pavimentação com quadrados, losangos, triângulos, hexágonos e retângulos*.

Notamos que as duplas procuraram encaixar as peças dos polígonos utilizados sem a preocupação com as medidas dos ângulos internos.

Criamos uma tabela de resultados para comparação das respostas:

DUPLA	ATIVIDADE 1	
	Questão 1: Forma de classificação escolhida	**Questão 2:**
1	Tamanho dos polígonos.	Satisfatório.
2	Número de lados: *até 6* e *mais que 6*.	Satisfatório.

3	Cor e tamanho.	Satisfatório.
4	Número de lados pares e ímpares.	Satisfatório.

Tabela 1

OBS: A palavra **Satisfatório** significa que a questão foi resolvida pela dupla sem a percepção das propriedades inerentes aos polígonos.

- **Atividade 2:**

Esta atividade era composta por 7 itens, descritos a seguir:

a. *Fazer uma pavimentação utilizando apenas triângulos equiláteros;*

b. *Fazer uma pavimentação utilizando apenas quadrados;*

c. *Fazer uma pavimentação utilizando apenas pentágonos regulares;*

d. *Fazer uma pavimentação utilizando apenas hexágonos regulares;*

e. *É possível fazer uma pavimentação com polígonos regulares com um número de lados maior de seis? Se sim, quais? Se não, justifique;*

f. *Descubra algumas possíveis pavimentações utilizando somente dois polígonos regulares. Escreva os polígonos que você utilizou em cada pavimentação;*

g. *Descubra algumas pavimentações possíveis utilizando mais de dois polígonos regulares. Escreva os polígonos que você utilizou em cada pavimentação.*

Nesta atividade, os alunos da **dupla 1**, com relação ao item (a), perceberam que estavam prontas as pavimentações solicitadas na primeira questão, pois já haviam verificado experimentalmente esta pavimentação na atividade anterior, e apenas responderam: *Sim, é possível porque ele tem três lados iguai*s.

A pavimentação do item (b) foi a mais simples, e a dupla revelou bastante segurança ao responder: "*Sim é possível porque ele tem os lados iguais e assim se encaixam perfeitamente*".

No item (c), a dupla percebeu que não pode pavimentar porque sobra um espaço entre as peças e que não há outra peça que se encaixe perfeitamente naquela falha, respondendo: "*Não é possível porque quando juntar ficará um espaço entre eles*".

Na resolução do item (d), o aluno B fez o seguinte comentário: "*Pronto, uma flor!*" referindo-se ao decágono regular circulado por pentágonos regulares constante na Figura 56 (canto superior esquerdo), e o aluno A disse "*O 'bagulho' de abelha, de mel*", fazendo referência ao hexágono regular. A resposta dada foi: "*Sim, porque juntos formam um encaixe perfeito*".

No item (e) perceberam que ao agrupar as peças com número de lados maior que

6, não se encaixavam corretamente, e escreveram: "*Não porque juntos não formam um encaixe*".

Para o item (f) a dupla conseguiu montar duas pavimentações: a *primeira* utilizou triângulos equiláteros e quadrados e a *segunda* utilizou hexágonos regulares e triângulos equiláteros.

No item (g), a dupla conseguiu duas pavimentações com três polígonos regulares diferentes. Os alunos escreveram: "*1º hexágono, quadrado e triângulo, 2º dodecágono, triângulo e quadrado*". Notamos que não utilizaram explicitamente a palavra regular, mas, notamos que, empiricamente, a propriedade foi compreendida ao conseguir encontrar duas pavimentações diferentes.

A **dupla 2**, no item (a), fez a junção das peças do triângulo equilátero e escreveu: É possível sim! Pois formamos uma pirâmide com 9 triângulos *equiláteros. Eles se pavimentam porque têm a mesma medida, o mesmo ângulo e o mesmo número de lados*.

Já no item (b), a mais simples das pavimentações, os alunos escreveram: *É possível* form*ar um retângulo com 6 quadrados porque eles têm o mesmo lado, o mesmo ângulo e o mesmo número de lados*.

No item (c), escreveram: *Não é possível fazer uma pavimentação com o pentágono, mas ele tem o mesmo número de lados o mesmo ângulo e o mesmo lado*, sendo *mesmo lado* uma referência à medida do lado do polígono.

No item (d) fizeram a junção das peças formando uma flor e escreveram: *É possível fazer uma pavimentação, com 7 hexágonos formamos uma flor, pois o hexágono tem o mesmo lado o mesmo ângulo e o mesmo número de lados*.

No item (e) os alunos não encontraram junção possível e escreveram: *Não é possível fazer uma pavimentação porque eles não se juntam e deixam espaços*.

Para o item (f) a dupla encontrou uma junção com dois polígonos regulares e escreveu: *Com hexágonos e triângulos equiláteros formamos uma pirâmide*. Como a forma dessa pavimentação é um triângulo, entendemos que os alunos usaram a palavra pirâmide para se referir ao formato triangular que corresponderia a uma face de uma pirâmide.

No item (g) os alunos formaram uma junção com três polígonos regulares, escreveram: *Formamos uma pirâmide utilizando hexágonos quadrados e triângulos equiláteros*.

A **dupla 3**, no item (a), fez a junção dos triângulos equiláteros e escreveu: *Sim é possível. Porque tem a mesma medida, então dá para encaixar um no outro*.

No item (b) os alunos apresentaram maior facilidade na organização dos quadrados, e escreveram: *Sim é possível porque tem o mesmo lado e o mesmo tamanho*, referindo-se a lados com a mesma medida.

No item (c) os alunos escreveram: *Não é possível por causa do ângulo interior*, atingindo o nosso objetivo esperado, que era a percepção dos ângulos internos como uma das condições para a pavimentação.

A resposta do item (d): *É possível, porque tem a mesma medida de lados tem o mesmo tamanho*, demonstra que não tiveram dificuldades.

Com relação ao item (e) não conseguiram juntar peças com mais de seis lados, sem relatarem uma justificativa para isso. Era esperado que os alunos apresentassem uma prova para a não realização desta pavimentação.

No item (f) fizeram apenas uma tentativa com três polígonos diferentes, e não conseguiram juntar as peças de forma adequada. Não perceberam que deveriam utilizar somente dois polígonos de número de lados diferentes.

No item (g) os alunos utilizaram as mesmas peças do item anterior e conseguiram fazer a junção. Escreveram: *É possível com hexágono, triângulo e retângulo*. Esta pavimentação foi possível em virtude do retângulo apresentar dimensões de 5 cm e 3 cm. Notaram que o lado maior do retângulo se encaixa com a junção de dois polígonos regulares.

A **dupla 4**, nos itens (a) e (b) apresentou bastante facilidade, narrando que: *É possível, pois os lados se encaixam perfeitamente* – item (a), e *É possível, pois não sobra espaço nenhum* – item (b).

No item (c) os alunos não encontraram a junção e escreveram: *não é p*ossível*, pois sobra espaço entre os pentágonos.*

No item (d) a dupla conseguiu juntar as peças e escreveu: *sim é possível, pois eles se encaixam corretamente, sem sobrar espaço.*

Para o item (e) os alunos não conseguiram juntar peças com mais de seis lados e escreveram: não*, pois a partir de 7 lados, os polígonos não conseguem encaixar.*

No item (f) fizeram duas junções de polígonos e escreveram: *Retângulos e quadrados, triângulos escalenos e losangos.* A utilização do retângulo foi possível porque apresenta o lado maior com 5 cm. Os polígonos regulares possuem medida de 2,5 cm, possibilitando assim a junção de dois quadrados com um retângulo conforme citado pela dupla.

No item (g) os alunos conseguiram fazer a junção de 3 peças e escreveram: *É possível com hexágono, triângulo e retângulo*. A dupla percebeu que foi possível em virtude do maior lado do retângulo ter medida 5 cm e se encaixar perfeitamente com os outros dois polígonos.

Criamos uma tabela de resultados para comparação das respostas:

DUPLA	**ATIVIDADE 2**						
	a	**b**	**C**	**d**	**e**	**f**	**g**
1	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
2	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim
3	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Não	Sim
4	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim	Sim

Tabela 2

OBS: A palavra **Sim** significa que o item foi resolvido pela dupla satisfatoriamente.

Conclusão do Bloco I

Durante o desenvolvimento das atividades deste bloco, percebemos que os alunos manipularam as peças e desenvolveram a habilidade de agrupá-las em blocos contíguos. Notamos que os alunos conseguiram organizar as peças de acordo com o que foi proposto e fazendo até agrupamentos que não foram previstos na análise a *priori* por tentativa e erro, conforme relato da professora-observadora: *No início os alunos estavam um pouco inseguros, mas logo se envolveram com a atividade e se sentiram* à *vontade para criar e desenvolver novas pavimentações*.

Após a descrição das respostas dos alunos podemos dizer que o desempenho e a aceitação das técnicas e procedimentos solicitados foram satisfatórios e revelaram que o objetivo das atividades foi atingido.

A diversificação das peças com cores diferentes foi um atrativo para que os alunos pudessem criar as junções empiricamente. Percebemos que ao término do bloco I as estratégias dos alunos na resolução das atividades estavam situadas no nível G0 de Parzysz. Segundo Machado, os alunos estão na fase de observação e manipulação de objetos. Diante da diversidade de situações propostas por Vergnaud, os alunos se preparando, lentamente, na busca dos invariantes relacionados ao estudo dos polígonos.

Verificamos que a maioria das duplas respondeu às atividades utilizando argumentações convincentes em suas respostas. Apenas a dupla 3 não encontrou junções utilizando somente dois polígonos regulares. Este fato ocorreu por falta de empenho da dupla por achar que estavam muito atrasadas em relação às demais.

Notamos que a pequena diferença entre os lados de algumas peças do kit, levaram alguns alunos, erroneamente, a considerar a junção das mesmas como uma pavimentação. Para futuros trabalhos é necessária uma maior diferenciação entre os lados de cada polígono.

Fazendo referência à análise a *priori*, notamos que as propriedades dos polígonos regulares: lados congruentes e ângulos internos congruentes, não foram explicitados pelos alunos, nem nos diálogos, nem tampouco na escrita.

BLOCO II: Construções no Cabri Géomètre

O segundo encontro para a realização da sequência de atividades foi num ambiente computacional, com a utilização do *software* Cabri Géomètre. O professor-pesquisador tomou o cuidado de colocar as duplas em computadores bem afastados um do outro, a fim de conseguir melhor gravação das duplas.

Em todos os computadores utilizados estavam disponíveis, na barra de ferramentas do *software* Cabri Géomètre, as macros necessárias para o desenvolvimento das construções dos polígonos regulares. No início, os alunos estavam com dificuldades em utilizar o *mouse* e acessar o ícone correto para construir os polígonos regulares. Com o tempo as duplas foram se harmonizando e se adaptando.

Descrevemos a seguir os resultados obtidos na construção realizada por cada dupla.

- **Atividade 1:**

Esta atividade foi dividida em cinco questões para que os alunos pudessem acessar e explorar todas as macros disponibilizadas na barra de ferramentas.

A questão 1 foi dividida em três itens, como vimos a seguir:

1a) *Utilizando a barra de ferramenta "macro construção" construa um triângulo equilátero clicando nas duas extremidades de um segmento. A seguir meça o "ângulo interno" com a ferramenta "ângulo".*

1b) *É possível pavimentar o plano utilizando somente triângulos equiláteros?*

1c) *Se possível, pinte a pavimentação utilizando cores e a ferramenta "preencher".*

Nas figuras apresentadas, a medida do ângulo digitado em cada figura refere-se à medida do ângulo interno do polígono regular considerado.

A **dupla 1** utilizou a ferramenta macro construção adequadamente, medindo somente um ângulo da construção e percebendo que os demais teriam as mesmas medidas. No momento de clicar nos pontos foi necessário a orientação do professor-pesquisador para que pudessem clicar no vértice do polígono regular.

No primeiro item desta atividade, a pavimentação foi notada com a contagem da quantidade de ângulos de 60º que aparecem ao redor de um dos três vértices do primeiro triângulo da Figura 57. Os alunos perceberam que 6.60º é igual a 360º.

No item (1b), a resposta da dupla foi: *Sim, porque o ângulo interno dá uma volta de 360º*. O aluno A disse: *Porque se der a volta inteira dá o ângulo de 360º.*

No item (1c), o preenchimento dos polígonos regulares foi realizado sem dificuldades, como mostra a seguinte ilustração:

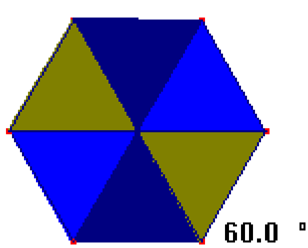


Figura 58 – Construção com o triângulo equilátero – Dupla 1

A **dupla 2** clicou corretamente nos lugares indicados do item (1a), realizando-a adequadamente.

Como resposta ao item (1b), escreveram: *Sim, utilizando a ferramenta triângulo equilátero podemos clicar em dois pontos de outro triângulo e eles se pavimentam.*

No item (1c) não apresentaram dificuldades para utilizar a ferramenta "preencher" para dar cores aos triângulos. Indicamos, a seguir, uma parte da pavimentação realizada pela dupla.

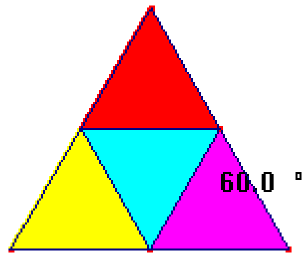


Figura 59 – Construção com o triângulo equilátero – Dupla 2

A **dupla 3** acessou a ferramenta corretamente no item (1a). Os alunos construíram o polígono regular, mediram o ângulo interno e perceberam a pavimentação realizada.

No item (1b), responderam da seguinte maneira: *É possível, porque tem mesma medida, então dá para encaixar um no outro e o ângulo interno tem a mesma medida (60.0º).*

No item (1c) conseguiram preencher corretamente a pavimentação.

A **dupla 4** manipulou com facilidade a ferramenta, pois o aluno G tem conhecimento da utilização do *software* Cabri Géomètre, pois já foi aluno monitor voluntário da escola. A dupla respondeu no item (1a) que: *O ângulo mede 60.0º*.

No item (1b) foi realizada a pavimentação e responderam: *Sim, são possíveis, os triângulos equiláteros se encaixam perfeitamente*.

No item (1c) utilizaram a ferramenta "preencher" corretamente para pintar a construção.

A questão 2 também foi dividida em três itens, que são:

2a) *Utilizando a barra de ferramenta "macro construção" construa um quadrado clicando nas duas extremidades de um segmento. A seguir meça o "ângulo interno" com a ferramenta "ângulo".*

2b) *É possível pavimentar o plano utilizando somente quadrados?*

2c) *Se possível, pinte a pavimentação utilizando cores e ferramenta "preencher".*

O desenvolvimento da construção do item (2a) para a **dupla 1** foi simples, porém, no que tange à medição do ângulo interno, apresentaram dificuldades: clicaram em pontos alternados, encontrando, erroneamente, a medida do ângulo interno, como 45º. Logo em seguida, solicitaram a ajuda do professor-pesquisador, que interferiu pedindo que refizessem o procedimento para encontrar a medida do ângulo interno. Feito isto, os alunos constataram que o ângulo estava errado, corrigindo-o para 90º.

A resposta dada pela dupla para o item (2b) foi: *Sim porque o ângulo interno dá uma volta de 360º*. A construção feita por eles está representada na figura 59.

Para o item (2c), a dupla conseguiu pintar a pavimentação conforme mostra a ilustração a seguir.

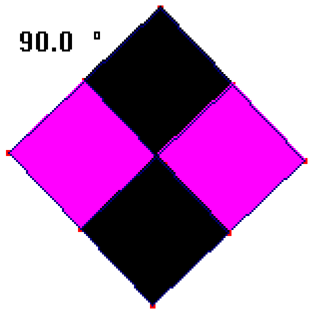


Figura 60 – Construção – Dupla 1

Para responder o item (2a), a **dupla 2** acessou a ferramenta “quadrado” com facilidade. Os alunos mediram um ângulo do quadrado e encontraram 90º, e, a partir daí, perceberam que a pavimentação está associada a juntar os quadrados.

A resposta do item (2b) foi: *Sim, utilizando outro quadrado eles podem se pavimentar.*

Utilizaram a ferramenta “preencher”, referente ao item (2c), sem nenhuma dificuldade para pintar as figuras.

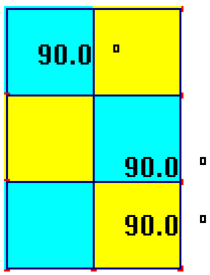


Figura 61 – Construção – Dupla 2

A **dupla 3**, no item (2a) conseguiu aplicar corretamente a utilização da ferramenta “quadrado” e os alunos mediram o ângulo interno do quadrado, encontrando 90º. Para o item (2b) responderam: *É possível, pois tem a mesma medida, assim como o ângulo* *interno (90.0º)*. O item (2c) foi realizado corretamente.

Para a **dupla 4**, no item (2a), o acesso à ferramenta “quadrado” foi simples. Os alunos conseguiram medir o ângulo interno do quadrado e responderam: *O ângulo mede 90º*. No item (2b) foi realizada a pavimentação; a resposta dada pela dupla foi: *Sim, é possível*. O item (2c) que sugere a utilização da ferramenta “preencher”, foi manipulado com facilidade.

A questão 3 foi subdividida em três partes, conforme os itens a seguir:

3a) *Utilizando a barra de ferramenta “macro construção” construa um pentágono regular clicando nas duas extremidades de um segmento e no ângulo dado. A seguir meça o “ângulo interno” com a ferramenta “ângulo”.*

3b) *É possível pavimentar o plano utilizando somente pentágonos regulares?*

3c) *Se possível, pinte a pavimentação com a ferramenta “preencher”.*

A **dupla 1**, no item (3a) utilizou o ângulo 108º na macro construção. (O número 108º refere-se à ferramenta “edição numérica” utilizada na macro construção.) Os alunos dispuseram 3 pentágonos regulares e perceberam que não foi possível pavimentar o plano. Os alunos não conseguiram escrever porque não foi possível a pavimentação. Pensaram, então, em colocar um triângulo regular e notaram que não seria possível, como ratifica o depoimento do aluno B: *Com as peças eu encaixei um triângulo ali, mas não dá*. Foi necessária a orientação do professor-pesquisador para que medissem o ângulo que estava faltando, encontrando 36º.

O item (3b) foi respondido da seguinte maneira: *Não porque sobra 36º*, como comprova a ilustração a seguir:

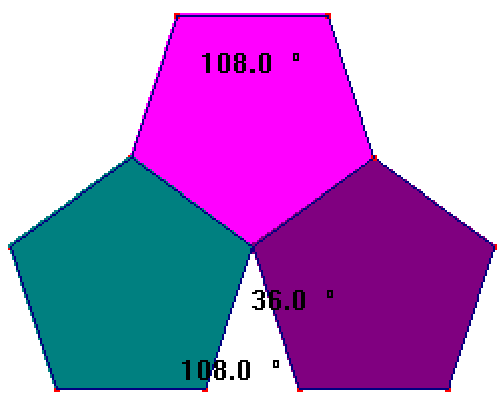


Figura 62 – Construção – Dupla 1

A resposta do item (3c) está representada na figura acima.

A **dupla 2**, na questão (3a), fez a tentativa de pavimentação com três pentágonos regulares e percebeu que não pavimentava. Os alunos responderam o item (3b) da seguinte maneira: *Não, pois ângulos internos são de 108º e não se pavimentam.* Nessa linguagem pode-se perceber a intenção de dizer que múltiplos de 108º não atingem o valor de 360º. No item (3c) não utilizaram a ferramenta "preencher" para pintar a figura. Segue a construção realizada pela dupla:

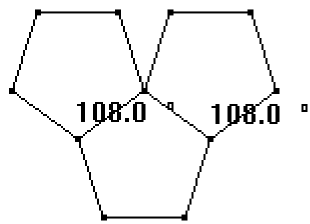


Figura 63 – Construção – Dupla 2

A **dupla 3** utilizou corretamente a ferramenta para a construção do pentágono regular no item (3a), medindo o ângulo interno com a ferramenta "ângulo". No item (3b) a dupla não conseguiu pavimentar o plano com o pentágono regular. Os alunos responderam: *Não é possível, por causa do ângulo interno.* No item (3c), os alunos fizeram a pintura da construção que conseguiram realizar com a ferramenta "preencher".

A **dupla 4**, no item (3a) realizou a construção e conseguiu medir o ângulo interno do pentágono com a ferramenta "ângulo". Os alunos responderam: *O ângulo interno mede 108º*. Para o item (3b) a dupla tentou pavimentar o plano com o pentágono regular e não conseguiu, assim respondeu: *Não, não são possíveis, os pentágonos não se encaixam.* No item (3c), a dupla pintou a disposição apresentada com a ferramenta "preencher".

A questão 4 foi subdividida em três itens, conforme veremos a seguir:

4a) *Utilizando a barra de ferramenta "macro construção" construa um hexágono regular clicando nas duas extremidades de um segmento. A seguir meça o "ângulo interno" com a ferramenta "ângulo".*

4b) *É possível pavimentar o plano utilizando somente hexágonos regulares?*

4c) *Se possível, pinte a pavimentação com a ferramenta "preencher".*

No item (4a), a **dupla 1** associou a pavimentação com a atividade realizada no primeiro bloco e os alunos não encontraram dificuldades para agrupar os hexágonos regulares.

No item (4b), a dupla respondeu: *Sim, porque eles se encaixam perfeitamente*.

Realizada a pavimentação, no item (4c), a dupla não apresentou dificuldades para pintar a construção, conforme mostra a ilustração abaixo:

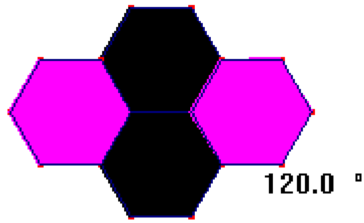


Figura 64 – Construção – Dupla 1

A **dupla 2** utilizou corretamente a ferramenta macro no item (4a) e mediu o ângulo interno de um hexágono regular encontrando 120º. No item (4b) conseguiu realizar a pavimentação e respondeu: *Sim eles se pavimentam porque os ângulos internos são de 120º. Tem o mesmo lado e os mesmos ângulos.* No item (4c) utilizou a ferramenta preencher e pintou a pavimentação, conforme indica a ilustração:

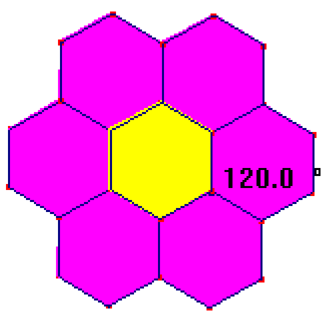


Figura 65 – Construção – Dupla 2

A **dupla 3** realizou a construção do item (4a) e mediu corretamente o ângulo interno. Conseguiu pavimentar o plano no item (4b) e respondeu da seguinte maneira: *É possível porque tem a mesma medida e o ângulo interior é 120.0º*. No item (4c) os alunos fizeram a pavimentação corretamente, manipulando a ferramenta "preencher" para pintar a figura.

A **dupla 4**, no item (4a), realizou todo o procedimento, utilizou a macro e mediu o ângulo interno. Respondeu: *O ângulo interno mede 120º.* No item (4b) pavimentou o plano e respondeu: *Sim, é possível.* Também, utilizou corretamente a ferramenta do item (4c) para pintar a figura.

A questão 5 era assim enunciada:

Verifique se é possível pavimentar o plano com um polígono regular presente na barra de ferramenta e cujo número de lados seja maior que 6. Justifique a sua resposta.

Para esta questão a **dupla 1** fez a tentativa de pavimentação com o heptágono regular, constante na barra de ferramentas. Os alunos notaram que não foi possível pavimentar com 3 heptágonos regulares, pois havia sobreposição. Os alunos mediram o ângulo da sobreposição e encontraram 25,6º sobrepostos. O valor 128.71, encontrado na Figura 64, é parte integrante da macro construção do heptágono regular. A resposta foi: *O heptágono não é possível pavimentar porque ele se sobrepõe aos outros*. Apresentamos, a seguir, a ilustração feita pela dupla:

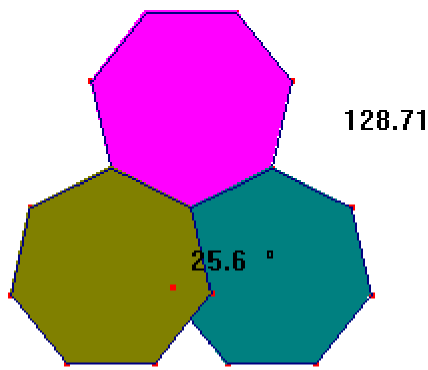


Figura 66 – Construção – Dupla 1

Com os demais polígonos regulares constantes na barra de ferramentas (octógono regular, eneágono regular e dodecágono regular), a dupla não tentou fazer a pavimentação porque percebeu que não seria possível.

A **dupla 2** concluiu que não é possível pavimentar com polígonos que apresentem número de lados maiores que 6 e justificou a resposta: *Eles não se pavimentam por que têm mais de 6 lados e medem 140º.* O valor 140º se refere ao ângulo interno do eneágono. Notamos que a estratégia de resolução dessa dupla se encontra no nível G1 do pensamento geométrico de Parzysz.

A **dupla 3** apenas relatou que não seria possível a pavimentação, não tentando montar pavimentações com polígonos regulares com mais de 6 lados. A sua resposta foi: *não é possível*.

A **dupla 4** tentou pavimentar com polígonos regulares com mais de 6 lados e concluiu que não era possível, respondendo: *Não é possível pavimentar com polígonos regulares de número de lados maiores que 6 porque a soma dos lados ultrapassa 180º, assim não vai ser possível.* A dupla quis dizer que a soma dos ângulos ultrapassa 360º, havendo, assim, sobreposição.

Para organizar o desempenho das duplas no desenvolvimento desta atividade apresentamos a tabela a seguir.

		Dupla 1		Dupla 2		Dupla 3		Dupla 4	
		Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda
Atividade 1	1a		X		X		X		X
	1b		X		X		X		X
	1c		X		X		X		X
	2a		X		X		X		X
	2b		X		X		X		X
	2c		X		X		X		X
	3a	X		X		X		X	
	3b		X		X		X		X
	3c		X		X		X		X
	4a		X		X		X		X
	4b		X		X		X		X
	4c		X		X		X		X
	5	X		X			X[1]	X	

Tabela 3

Obs.: A ajuda oferecida pelo professor-pesquisador às duplas resume-se em iniciar a utilização da ferramenta macro construção, em explicar em que ponto deveria clicar para continuar as pavimentações, ou até mesmo, em dar dicas nos ajustes finais para concluir as pavimentações.

- **Atividade 2**

A atividade 2 era assim enunciada:

Existem quatro pavimentações do plano utilizando em torno de um ponto apenas dois tipos de polígonos regulares. Descubra-as.

A primeira pavimentação percebida pela **dupla 1** foi a do quadrado com o triângulo equilátero. Os alunos, mais uma vez, apresentaram dificuldades em clicar no ponto adequado, mas, mesmo assim, conseguiram realizar a pavimentação, conforme Figura 66.

1 A dupla não respondeu satisfatoriamente **à** atividade proposta, pois, não justificou sua resposta. Quanto às demais duplas, todas relataram suas justificativas.

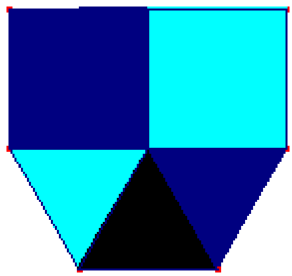


Figura 67 – Primeira pavimentação – Dupla 1

Na segunda pavimentação encontrada, a dupla analisada utilizou o hexágono regular, o quadrado e o triângulo equilátero, porém, o enunciado exigia somente dois polígonos regulares.

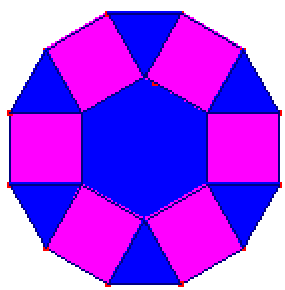


Figura 68 – Segunda pavimentação – Dupla 1

Os alunos foram orientados a procurar as outras três pavimentações. Com a procura, encontraram as demais pavimentações. Vale destacar a insistência do aluno B em tentar utilizar o pentágono regular, ele sempre dizia: *Pega o pentágono!*. Esta fala deixa claro que o aluno B não compreendeu que não é possível utilizar o pentágono regular com outro polígono numa pavimentação.

Houve a interferência do professor-pesquisador no sentido de orientar a dupla para fazer as outras três pavimentações. As dicas dadas eram com relação ao número de cada polígono utilizado. Deste modo, os alunos descobriram as seguintes pavimentações: quadrado e triângulo equilátero, hexágono regular e triângulo equilátero, octógono regular e quadrado, e a última foi dodecágono regular e triângulo equilátero. Apresentamos a seguir as três últimas pavimentações produzidas pela dupla 1:

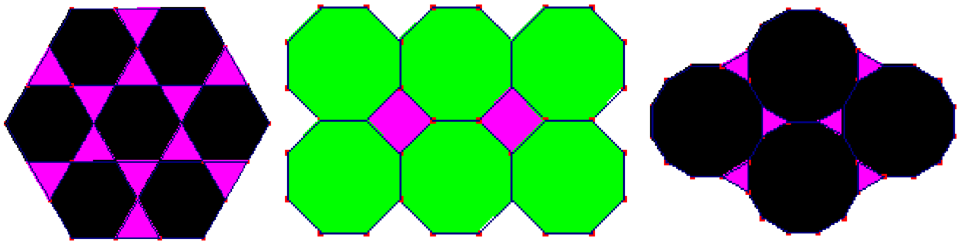


Figura 69 – Pavimentações – Dupla 1

A **dupla 2** organizou adequadamente e conseguiu formar as pavimentações. O professor-pesquisador orientou-os na pavimentação do quadrado e octógono regular e na do dodecágono regular e triângulo equilátero. A orientação foi apenas na posição do polígono para que percebessem a pavimentação. Descobriram as seguintes pavimentações: hexágono regular e triângulo equilátero, quadrado e triângulo equilátero, octógono regular e quadrado, e dodecágono regular e triângulo equilátero.

A pavimentação (1) não foi adequadamente realizada pela dupla, pois não notaram que deveriam reunir ao redor de um vértice os polígonos regulares, a fim de formar 360º.

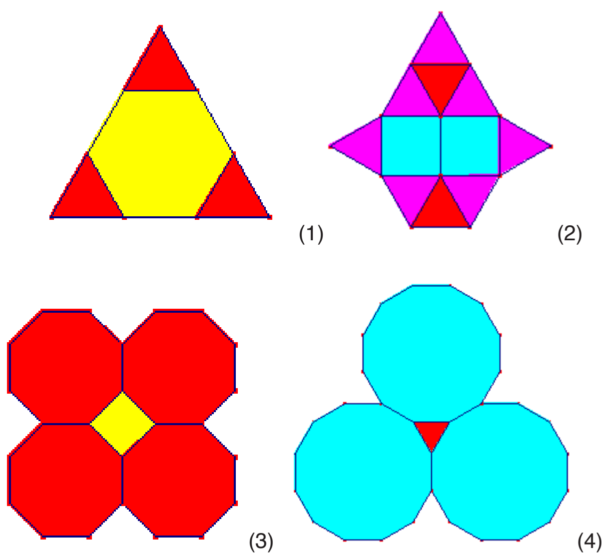


Figura 70 – Pavimentações – Dupla 2

A **dupla 3** não descreveu os tipos de pavimentações que conseguiu realizar, apenas descreveu quais polígonos regulares foram utilizados para efetuar as pavimentações, sendo citados o hexágono regular, o triângulo equilátero e o quadrado.

A **dupla 4** conseguiu encontrar as quatro pavimentações possíveis, não apresentando dificuldades e não necessitando da ajuda do professor-pesquisador.

Para verificar o desempenho das duplas na realização da atividade 2, organizamos a seguinte tabela:

Atividade 2	Dupla 1	Dupla 2	Dupla 3	Dupla 4
	Encontrou 4 pavimentações.	Encontrou 4 pavimentações.	Não descreveu a pavimentação.	Encontrou 4 pavimentações.

Tabela 4

Conclusão do Bloco II

O *software* Cabri Géomètre foi utilizado, pelos alunos nessa atividade para encontrar a medida do ângulo interno do polígono regular e para agrupar vários polígonos em torno de um ponto. Percebemos que as atividades do bloco anterior funcionaram como facilitador para o desenvolvimento das atividades no ambiente computacional.

Notamos que os alunos gostaram de desenvolver as atividades usufruindo da ferramenta informática, em especial, com a utilização do *software* de geometria dinâmica empregado, que permitia ao aluno movimentar as figuras sem que as mesmas perdessem suas propriedades.

As estratégias dos alunos na resolução das atividades desse bloco situam-se no nível G1 de Parzysz e estão inseridas na face “representação” do tetraedro de Machado. O uso da ferramenta “medida” do *software* Cabri no cálculo das medidas dos lados e dos ângulos dos polígonos regulares pode favorecer a busca dos invariantes associados a esses polígonos nas atividades do bloco III.

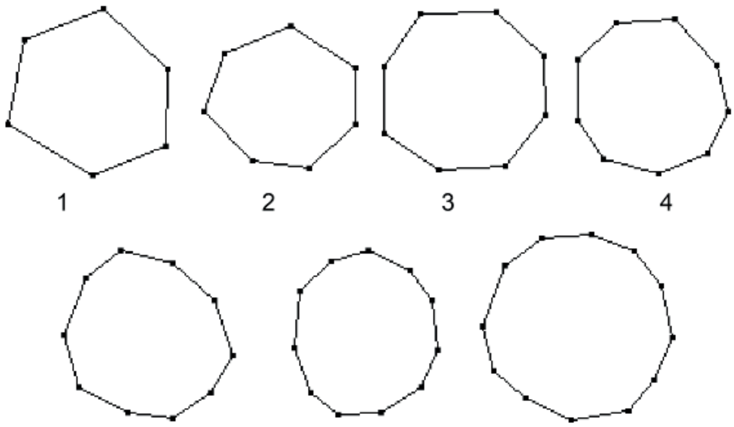
BLOCO III: Dedução

As atividades deste bloco foram realizadas na sala de informática, porém, sem a utilização dos computadores, usufruindo de papel e lápis, estando à disposição o *kit* de material concreto para ser usado caso os alunos não consigam realizar a atividade no plano dedutivo.

O objetivo deste bloco é levar os alunos a generalizaram todos os conhecimentos construídos ao longo das atividades dos Blocos I e II.

- **Atividade 1:**

Considerando os polígonos a seguir



a) Em quantos triângulos podemos decompor cada um dos polígonos acima, a partir de um dos vértices?
b) Em quantos triângulos podemos decompor um polígono de n lados, a partir de um dos vértices?
c) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de 100 lados?
d) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados?
e) Qual é a medida de um ângulo interno do polígono regular de 36 lados?
f) Qual é a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados?

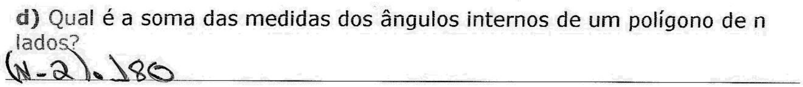
Na decomposição dos polígonos em triângulos há a necessidade da utilização de diagonais para decompor. Sendo assim, o professor-pesquisador reforçou a definição de diagonais de um polígono para que os alunos pudessem desenvolver a atividade.

Considerando os polígonos dados, a **dupla 1** no item (a) não apresentou dificuldades para traçar as diagonais a partir de um vértice e contar o número de triângulos. A dupla percebeu que a diferença entre o número de lados e o número de triângulos era 2, como podemos comprovar pela resposta do aluno A*: Dois a menos*, fazendo uma referência à quantidade de número de lados e de triângulos. A resposta da dupla para este item foi: *(1) 4 triângulos; (2) 5 triângulos; (3) 6 triângulos; (4) 7 triângulos; (5) 8 triângulos; (6) 9 triângulos; (7) 10 triângulos*.

Observando a sequência no item anterior que relaciona o número de lados com o número de triângulos, deram como resposta, no item (b), *(n – 2) triângulos*. A dupla conseguiu compreender a generalização. De acordo com o relatório da professora observadora: *Tiveram um pouco de dificuldade para generalizar. Demoraram um pouco para entender o que era o "n" e como trabalhar com ele*.

Na resposta do item (c), os alunos resolveram depois que a professor-observador chamou a atenção da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Como estavam trabalhando com número conhecido, chegaram em 17.640º.

A generalização do item (d) foi realizada em função do procedimento utilizado no item anterior. Salvo notação de parênteses para indicar a multiplicação, o aluno A compreendeu a generalização, porém estava esquecendo de escrever a expressão n – 2 entre parênteses. Com a orientação do professor-pesquisador, percebeu a forma correta conforme mostra o seguinte protocolo:



d) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados?

(N-2). 180

Figura 71 – Atividade 1 – Bloco III - Dupla 1

Para a resolução do item (e), a dupla utilizou o procedimento do item anterior e dividiu pelo número de lados. A resolução foi simples, porém o aluno B dividiu por 180. Foi necessária a interferência do professor-pesquisador para alertar que a divisão é feita pelo número de lados, já que é um polígono regular, encontrando, assim, *170º*.

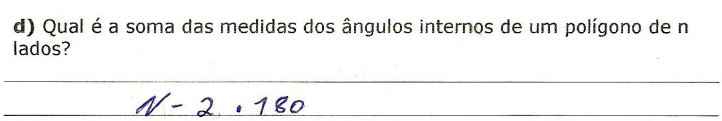
Finalmente, na generalização do item (f), a dupla escreveu a divisão euclidiana, utilizando o algoritmo da chave. Responderam*:* (n-2). 180 ÷ n, mas ela esqueceu de mencionar o grau. Esta expressão foi facilitada em função da compreensão do item anterior. No relatório da professora observadora está escrito: *Tiveram dificuldades com a generalização, pois acreditavam que a resposta deveria ser um número*.

A **dupla 2** traçou as diagonais nos polígonos e respondeu o item (a) satisfatoriamente, contando nos polígonos o número de triângulos.

No item (b) observando o item anterior responderam: *n – 2 triângulos*.

Quanto ao item (c), para encontrar a soma das medidas dos ângulos do polígono de 100 lados utilizaram a informação do item anterior (n – 2) e multiplicaram pela soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, que é 180º. A resposta foi: *A soma dos ângulos internos de um polígono de 100 lados é 17.640º, porque um polígono de 100 lados pode decompor em 98 triângulos, então multiplicando por 180º, que é a soma dos ângulos internos de um triângulo, dá 17.640º.*

Na generalização do item (d) conseguiram compreender o procedimento, porém, não escreveram adequadamente, deixando de colocar os parênteses na expressão n – 2, conforme protocolo:

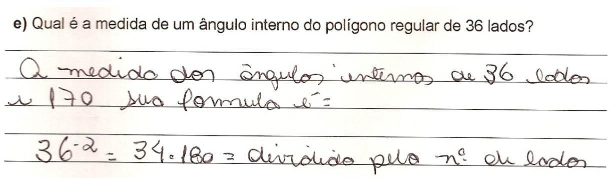


d) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados?

N - 2 . 180

Figura 72 – Atividade 1 – Bloco III – Dupla 2

Para responder o item (e), encontraram a soma das medidas dos ângulos internos do polígono regular de 36 lados e dividiram pelo número de lados. Responderam: *A medida* *dos ângulos internos de 36 lados é 170º. Sua fórmula é: 36 – 2= 34.180, dividido pelo número de lados*. Observamos que os alunos se enganaram ao igualar a diferença 36 – 2 com o produto de 34.180^0, refletindo um erro algébrico, em que o fator 180 surge em um membro da expressão sem ter sido mencionado anteriormente. Segue o protocolo escrito pela dupla:

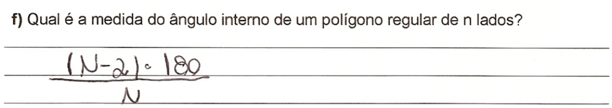

e) Qual é a medida de um ângulo interno do polígono regular de 36 lados?

A medida dos ângulos internos de 36 lados é 170 sua formula é:

36-2 = 34.180 = dividido pelo nº de lados

Figura 73 – Atividade 1 – Bloco III – Dupla 2

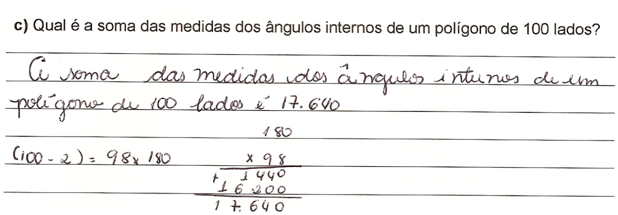
No item (f) escreveram a generalização do procedimento anterior, da seguinte forma:


f) Qual é a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados?

$$\frac{(N-2)\cdot 180}{N}$$

Figura 74 – Atividade 1 – Bloco III – Dupla 2

Os alunos da **dupla 3**, no item (a), compreenderam a forma de contagem dos triângulos após a orientação do professor-pesquisador. No item (b) responderam a partir da compreensão do item anterior, fazendo uma indução de raciocínio. Sendo assim, responderam: *Figura 1 – são 6 lados e 4 triângulos; 2 – são 7 lados e 5 triângulos; 3 – são 8 lados e 6 triângulos; 4 – são 9 lados e 7 triângulos; 5 – são 10 lados e 8 triângulos; 6 – são 11 lados e 8 triângulos; 7 – são 12 lados e 10 triângulos; assim, n – 2 triângulos*. No item (c) utilizaram o que compreenderam e substituíram n por 100, encontrando o número de triângulos e multiplicaram o resultado por 180º. Deixaram a conta feita na atividade, porém apresentaram o mesmo erro da dupla anterior, conforme protocolo a seguir:


c) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de 100 lados?

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de 100 lados é 17.640

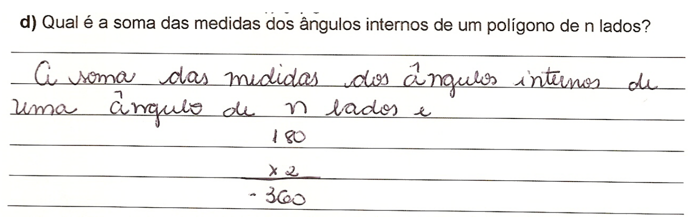
(100 - 2) = 98x180

$$\begin{array}{r} 180 \\ \times\ 98 \\ \hline +\ 1440 \\ 16200 \\ \hline 17.640 \end{array}$$

Figura 75 – Atividade 1 – Bloco III – Dupla 3

No item (d) não conseguiram responder corretamente, fizeram a multiplicação de

180º por 2 encontrando 360º. Responderam: *a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados é 180.2 = 360*. Notamos que a dupla confundiu a palavra ângulo com polígono.

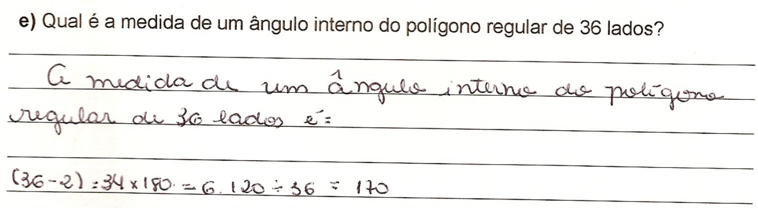

d) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados?

A soma das medidas dos ângulos internos de uma ângulo de n lados é

180
x 2
= 360

Figura 76 – Atividade 1 – Bloco III – Dupla 3

Os alunos responderam satisfatoriamente o item (e) após a orientação do professor-pesquisador, porém, cometeram erro ao formalizar o procedimento conforme verificamos em:

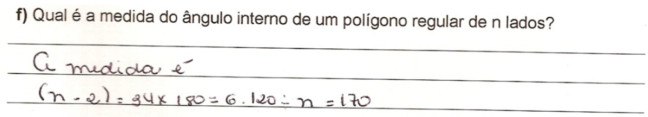

e) Qual é a medida de um ângulo interno do polígono regular de 36 lados?

A medida de um ângulo interno do polígono regular de 36 lados é:

(36 - 2) = 34 x 180 = 6.120 ÷ 36 = 170

Figura 77 – Atividade 1 – Bloco III – Dupla 3

No item (f) não apresentaram a generalização do raciocínio empregado na resolução do item (e), apenas repetiram o procedimento do item anterior. Assim sendo, não realizaram a generalização solicitada. Segue protocolo:


f) Qual é a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados?

A medida é

(n - 2) = 34 x 180 = 6.120 ÷ n = 170

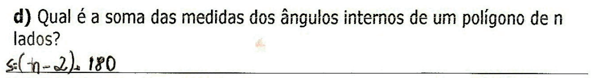
Figura 78 – Atividade 1 – Bloco III – Dupla 3

A **dupla 4**, após traçar as diagonais partindo de um só vértice em cada polígono apresentado, respondeu o item (a) satisfatoriamente, associando ao número de triângulos o número de lados.

No item (b) responderam corretamente *n – 2 triângulos*.

Para o item (c) substituíram n por 100 e concluíram escrevendo a resposta: *(100 – 2).180 = 98.180 = 17.640*.

O item (d) é uma generalização para encontrar a fórmula da soma das medidas dos ângulos internos do polígono, *S = (n – 2).180*. Notamos que a dupla utilizou corretamente os parênteses. Segue protocolo:

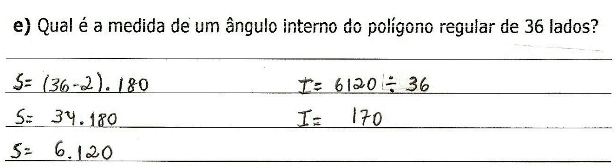


d) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados?

S=(n-2). 180

Figura 79 – Atividade 1 – Bloco III – Dupla 4

No item (e) os alunos tiveram a percepção de que, para encontrar a medida de um ângulo do polígono regular, teriam que encontrar a soma das medidas dos ângulos internos e depois dividir pelo número de lados. Assim, utilizaram a resposta anterior e substituíram *n* por 36, encontrando a soma das medidas dos ângulos de um polígono regular de 36 lados. Para encontrar a medida de um ângulo, dividiram a soma das medidas dos ângulos internos por 36, encontrando 170º. Podemos notar que a dupla escreveu corretamente todas as etapas do registro numérico ao encontrar o ângulo interno. Segue protocolo:



e) Qual é a medida de um ângulo interno do polígono regular de 36 lados?

S= (36-2). 180   I= 6120 ÷ 36

S= 34.180   I= 170

S= 6.120

Figura 80 – Atividade 1 – Bloco III – Dupla 4

No item (f) generalizaram o procedimento realizado no item (e), escrevendo a fórmula: $i = \frac{(n-2).180^0}{n}$.

Notamos que as duplas apresentaram certa dificuldade durante a realização desta atividade. Percebemos que o tema envolvendo cálculo do número de diagonais, número de triângulos e soma dos ângulos internos e externos de polígonos regulares foram desenvolvidos nesta sequência com certa dificuldade. Acreditamos que, essas dificuldades foram originadas, em parte, devido ao fato do conceito de diagonal não ter sido trabalhado nos blocos empíricos anteriores.

Segue uma tabela de resultados do desenvolvimento dessa atividade:

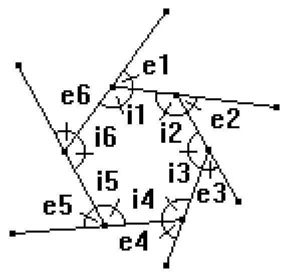
Atividade 1	Dupla 1		Dupla 2		Dupla 3		Dupla 4	
	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda
	X		X		X		X	

Tabela 5

OBS: A ajuda oferecida para as duplas foi em função da compreensão da atividade.

- **Atividade 2:**

A. Qual é a soma das medidas dos ângulos externos do hexágono abaixo?
B. Obter uma fórmula para a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados.
C. Se um polígono de 10 lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?
D. Se um polígono de n lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?



Esta atividade não foi realizada de acordo com a análise a *priori* descrita no capítulo 3. A **dupla 1** não percebeu que a figura proposta tratava de um hexágono não regular e não observou que em cada vértice do polígono apresentado a soma das medidas do ângulo interno com o ângulo externo adjacente é 180º. A dupla visualizou o ângulo externo com o auxílio de duas peças do *kit* e uma régua e a partir daí, os alunos encontraram a soma das medidas dos ângulos externos de dois polígonos e perceberam que a soma é 360º. Segue protocolo:

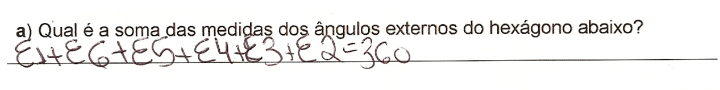

a) Qual é a soma das medidas dos ângulos externos do hexágono abaixo?
E1+E6+E5+E4+E3+E2=360

Figura 81 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 1

No item (b) a dupla compreendeu que a soma das medidas dos ângulos externos é 360º, porém, não conseguiu se expressar algebricamente, conforme protocolo:

b) Obter uma fórmula para a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados.

E1+E2+E3+E4... EN= soma igual a 360.

Figura 82 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 1

Para a resolução do item (c) a dupla notou que polígonos regulares possuem ângulos externos com a mesma medida, então dividiram 360º por 10.

A generalização do item (d) foi facilitada pelo item anterior, pois os alunos perceberam que para encontrar a medida de um ângulo externo é suficiente dividir 360º pelo número de lados. Responderam: $\frac{360}{n}$, conforme protocolo:

d) Se um polígono de n lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?

$360 \div N$

Figura 83 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 1

A **dupla 2** resolveu o item (a) utilizando fórmula da atividade anterior e encontrou a soma das medidas dos ângulos externos do hexágono regular, conforme protocolo:

a) Qual é a soma das medidas dos ângulos externos do hexágono abaixo?

$\frac{(6-2)\cdot 180}{6} = 120 \qquad 60 \cdot 6 = 360$

Figura 84 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 2

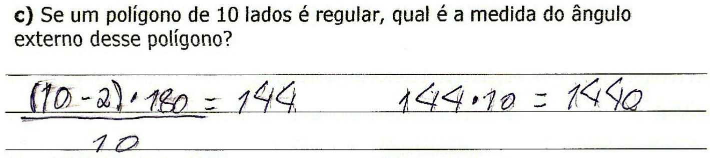
No item (b) apresentou a generalização correta para a soma das medidas dos ângulos externos, porém não escreveu que esta soma é 360º, conforme ratifica o protocolo:

b) Obter uma fórmula para a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados.

$e1 + e2 + e3 + e4 \ldots + en$

Figura 85 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 2

No item (c), a dupla encontrou a soma das medidas dos ângulos internos para o polígono de 10 lados, mas não chegou à medida do ângulo externo. Segue protocolo:

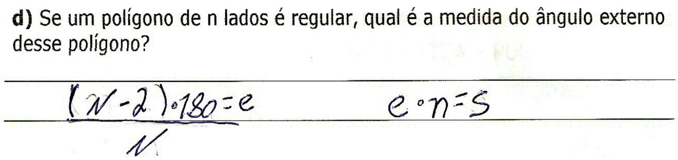


c) Se um polígono de 10 lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?

$\frac{(10-2)\cdot 180}{10} = 144$ $\quad 144\cdot 10 = 1440$

Figura 86 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 2

No item (d) não encontrou a generalização da medida do ângulo externo. A dupla cometeu erros ao escrever que a medida de um ângulo interno do polígono regular seja igual ao ângulo externo e ao anotar que o produto do número de lados pelo ângulo externo é a generalização da medida do ângulo externo.



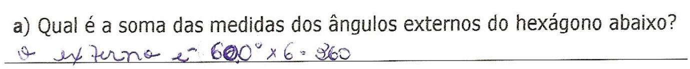
d) Se um polígono de n lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?

$\frac{(N-2)\cdot 180}{N} = e$ $\quad e\cdot n = S$

Figura 87 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 2

Tudo indica que a **dupla 2** confundiu ângulo externo com ângulo interno em toda a atividade com exceção do item (a).

A **dupla 3**, para responder o item (a), considerou o hexágono da atividade proposta como regular. Segue protocolo:

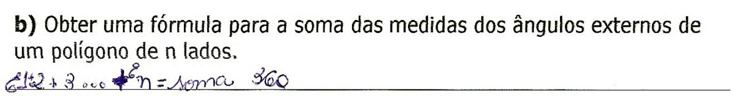


a) Qual é a soma das medidas dos ângulos externos do hexágono abaixo?

o externo é 60° x 6 = 360

Figura 88 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 3

No item (b) fez a generalização, porém não escreveu corretamente a expressão, conforme protocolo:

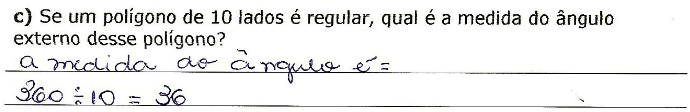


b) Obter uma fórmula para a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados.

1 + 2 + 3 ... + n = soma 360

Figura 89 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 3

No item (c) deduziu corretamente que para encontrar a medida do ângulo externo do polígono regular de 10 lados é só dividir 360º por 10, encontrando 36º. Como vimos em:

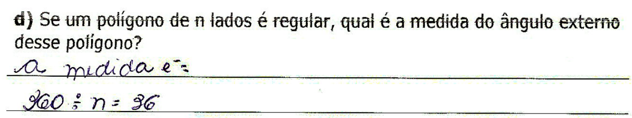

c) Se um polígono de 10 lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?

a medida do ângulo é =

360 ÷ 10 = 36

Figura 90 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 3

Para o item (d) os alunos perceberam que deveriam dividir 360º pelo número de lados, mas cometeram um erro ao escrever $\frac{360}{n}$ e igualar a 36º, revelando que não se desvincularam do item anterior que dizia que n era igual a 10, conforme protocolo a seguir:


d) Se um polígono de n lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?

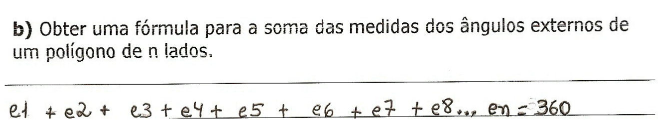
a medida é =

360 ÷ n = 36

Figura 91 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 3

A **dupla 4** compreendeu a figura dada. No item (a) respondeu: $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 = 360°$ sem nenhuma justificativa.

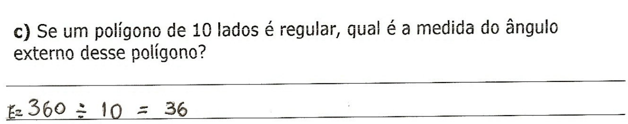
No item (b) escreveu que a soma é 360º sem nenhuma justificativa explícita, porém, quando se utilizaram das reticências, revelaram que compreenderam o processo dedutivo para a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados.


b) Obter uma fórmula para a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados.

e1 + e2 + e3 + e4 + e5 + e6 + e7 + e8... en = 360

Figura 92 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 4

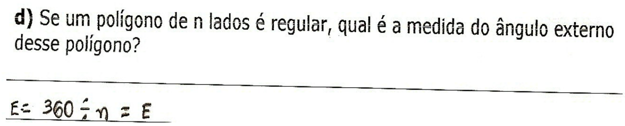
No item (c), a dupla respondeu com facilidade que a medida do ângulo externo do polígono regular de 10 lados é 36º.


c) Se um polígono de 10 lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?

E= 360 ÷ 10 = 36

Figura 93 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 4

No item (d) não teve problemas para escrever a generalização do procedimento aplicado no item anterior. Segue protocolo:


d) Se um polígono de n lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?

E= 360 ÷ n = E

Figura 94 – Atividade 2 – Bloco III – Dupla 4

Notamos que a dupla 4 compreendeu mais efetivamente o processo dedutivo do que as outras duplas. Mostra-se, então, dentro da geometria proto-axiomática de Parzysz.

A tabela a seguir indica o resultado das duplas nessa atividade:

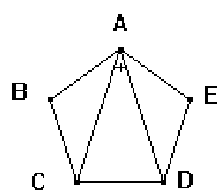
Atividade 2	**Dupla 1**		**Dupla 2**		**Dupla 3**		**Dupla 4**	
	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda
	X		X			X		X

Tabela 6

Obs.: A ajuda oferecida às duplas foi em função da compreensão da atividade.

- **Atividade 3:**

Determinar a medida do ângulo $C\hat{A}D$ sabendo que a figura é um polígono regular. Descrever o processo.



Esta atividade foi proposta com o objetivo de fazer com que as duplas percebessem que na figura apresentada existem triângulos isósceles de bases iguais, porém, este fato não foi observado.

A **dupla 1** percebeu que se tratava de um pentágono regular e encontrou a medida do ângulo interno. Com o depoimento do aluno B: *Não tem que dividir depois?*, notamos que os alunos perceberam que não haviam encontrado a medida do ângulo CÂD conforme solicitado, porém, não voltaram para verificar. Nota-se, aqui, um *contrato didático*, onde os alunos sabem que tem fazer alguma coisa, mas não sabem por quê. Esta atividade não atingiu o objetivo, pois, percepções simples, como notar a presença dos triângulos isósceles, não ocorreram.

5-2=3.180=540|5
640 108
0

Figura 95 – Atividade 3 – Bloco III – Dupla 1

A **dupla 2** apenas encontrou a medida do ângulo interno do pentágono regular através da fórmula deduzida na atividade anterior. Primeiro descobriu a soma das medidas dos ângulos internos, 540º, e depois, dividiu por 5 para encontrar a medida do ângulo interno do pentágono regular. O aluno C solicitou a presença do professor-pesquisador e afirmou: *Tenho que fazer (5 – 2) vezes 180 e dividir por 5 e depois tenho que dividir por 3.* Notamos que, ao resolver o exercício, a dupla, apesar de saber qual seria o procedimento, que anteriormente foi narrado ao professor-pesquisador pelo aluno C, não realizou o último cálculo: a divisão por 3. Outro engano observamos quando a dupla anota que 540 : 6 = 108, que é o resultado de 540 : 5; este lapso nos faz perceber uma grande falta de atenção com relação à escrita matemática.

$\frac{(5-2)\cdot 180}{5} = 540$ $\quad 540 : 6 = 108$

Figura 96 – Atividade 3 – Bloco III – Dupla 2

Novamente os alunos não perceberam e existência de triângulos isósceles na figura apresentada.

A **dupla 3** solicitou a ajuda do professor e encontrou a medida do ângulo CÂD solicitado. Para chegar a este valor encontrou a soma das medidas dos ângulos internos do pentágono regular, dividiu por 5, encontrando 108º. Os alunos observaram que se tratava de um polígono regular. A partir daí notaram, empiricamente, sem justificar, que no vértice A os três ângulos são congruentes, então dividiram 3, encontrando 36º. Segue protocolo:

$(n-2) \times 180 \div n$
$3 \times 180 \div 5 =$
$540 \div 5$
$108 \div 3 = 36$

Figura 97 – Atividade 3 – Bloco III – Dupla 3

A **dupla 4** recorreu à medida do ângulo interno encontrado na atividade do bloco I e utilizou a medida do ângulo interno BÂC do pentágono regular que é 108º. Notaram, empiricamente, que no vértice A encontram-se três ângulos com a mesma medida, então, dividiram 108º por 3, encontrando 36º.

A tabela a seguir indica o desempenho das duplas nessa atividade:

Atividade 3	Dupla 1		Dupla 2		Dupla 3		Dupla 4	
	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda
		X		X	X			X

Tabela 7

Obs.: A ajuda oferecida às duplas foi em função da compreensão da atividade.

- **Atividade 4:**

Esta atividade foi dividida em dois itens:

a. *Um retângulo é um polígono regular? Escreva sua resposta.*

b. *Um losango é um polígono regular? Escreva sua resposta.*

O desenvolvimento desta atividade pela **dupla 1** foi completamente satisfatório, os alunos afirmaram, no item (a), que o retângulo não atende uma das propriedades dos polígonos regulares, ou seja, lados congruentes. Vale destacar as respostas dadas pelo aluno A: *Porque não tem todos os lados iguais*, e do aluno B: *Porque se ele fosse regular seria um quadrado*.

Para o item (b), a dupla iniciou afirmando que é regular, porém, numa discussão com o professor-pesquisador, a dupla percebeu o não atendimento às propriedades dos polígonos regulares, ou seja, o losango não possui ângulos internos congruentes.

A **dupla 2** pensou corretamente o item (a), mas escreveu a palavra *sim*, ao invés de não. Justificou como se o retângulo não fosse regular e assim justificou: *Porque os lados são de medidas diferentes e os ângulos de medidas iguais*.

No item (b) compreenderam que o losango não é polígono regular, pois apresenta ângulos diferentes. A princípio, a dupla não sabia como era a forma do losango, então o aluno C encontrou uma peça no *kit* em forma de losango e mostrou para o aluno D. Então, responderam: *Não, porque eles têm dois ângulos diferentes*.

A **dupla 3**, com relação ao item (a), respondeu: *Ele é polígono, porque ele tem 4 ângulos iguais, mas seus lados não são iguais*. Notamos que a classificação “não regular” ficou implícita após a palavra “polígono”, bem como, a ideia de que o retângulo não é regular.

No item (b), perceberam através de uma peça do *kit*, que o losango não tem ângulos congruentes. Responderam: *Não porque ele não tem 4 ângulos iguais*. O apoio às peças do *kit* demonstra uma dificuldade da dupla em reconhecer a forma do losango.

A **dupla 4** respondeu corretamente o item (a). Escreveram: *Não, pois seus lados não são iguais, mas seus ângulos são*. Para o item (b) os alunos notaram que não é um polígono regular, respondendo: *Não, pois seus ângulos têm medidas diferentes*.

A seguir uma tabela de resultados obtidos pelas duplas:

Atividade 4	**Dupla 1**		**Dupla 2**		**Dupla 3**		**Dupla 4**	
	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda
	X		X		X			X

Tabela 8

Obs: A ajuda oferecida às duplas foi em função da compreensão da atividade. Também consideramos como ajuda o apoio às peças do kit de material concreto.

- **Atividade 5:**

Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se presta a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

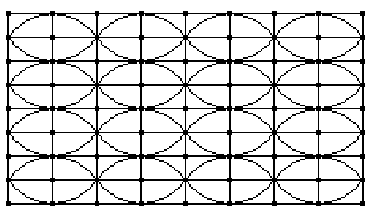


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano.

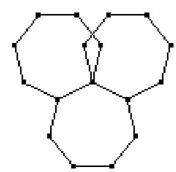
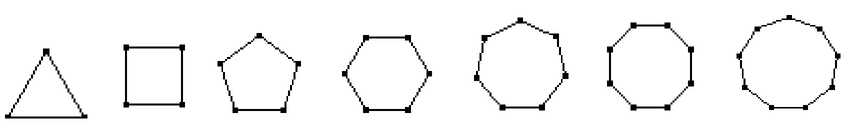


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano

A seguir uma relação de alguns polígonos regulares.



Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos regulares acima, sendo um deles octogonal, qual deverá ser a forma do outro polígono escolhido?

Esta atividade refere-se à aplicação dos conhecimentos adquiridos pelos alunos sobre os polígonos regulares e suas propriedades.

Nenhuma dupla apresentou dificuldade na compreensão e na resolução, pois somente com a leitura da atividade os alunos perceberam que se tratava de uma pavimentação já realizada anteriormente e responderam corretamente que o polígono procurado é o quadrado.

Contrariando a análise a *priori*, em que afirmamos necessária a utilização das medidas dos ângulos internos dos polígonos, verificamos, nesta atividade que a recursão, de maneira subjetiva, às lembranças de construções em blocos anteriores fez com que todas as duplas respondessem a esta atividade, de forma pontual e direta, que a figura a ser utilizada deveria ser o quadrado. Nota-se, aqui, a construção de conceitos, segundo Vergnaud, uma vez que, os alunos conseguiram abstrair conceitos e aplicá-los em situação problema.

Segue uma tabela de resultados que indica o desempenho das duplas.

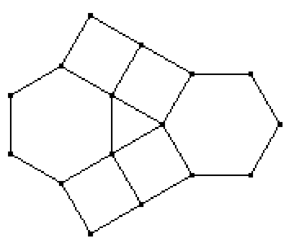
Atividade 5	Dupla 1		Dupla 2		Dupla 3		Dupla 4	
	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda
		X		X		X		X

Tabela 9

Obs.: A ajuda oferecida às duplas foi em função da compreensão da atividade.

- **Atividade 6:**

Você acabou de fazer algumas pavimentações com dois tipos de polígonos regulares. Outras pavimentações podem ser feitas com dois ou mais polígonos regulares. Uma delas é a pavimentação (3-4-4-6), que está indicada a seguir. Trata-se de um triângulo equilátero (3 lados), de dois quadrados (4 lados) e de um hexágono regular (6 lados). Existem 8 combinações possíveis de polígonos regulares para pavimentar o plano. Tente encontrar as outras 7 pavimentações.



Esta atividade foi a mais demorada porque explorava e sintetizava todo o conhecimento adquirido pelas duplas durante o desenrolar das atividades dos blocos anteriores. Nesta atividade os alunos tinham que remeter à soma dos ângulos internos de um polígono e fazer combinações entre eles de modo que, a soma dos ângulos internos de cada polígono utilizado na pavimentação, resulte em 360º. Porém, o que percebemos foi que nenhuma dupla ocupou-se de usar esta propriedade da pavimentação. Vimos que, o retorno das duplas aos blocos anteriores mostrou que eles não conseguiram se situar na geometria dedutiva, permanecendo numa transição da geometria concreta e espaço-gráfica.

Outro fato que pode ter ocasionado a dificuldade de realização desta atividade é a complexidade do enunciado da mesma. Após a aplicação da atividade e mediante os resultados obtidos, concluímos que seria melhor dividir esta questão em itens para ter um grau crescente de dificuldade e não atrapalhar o processo dedutivo que estamos desenvolvendo até o momento. Um dado que ratifica esta afirmação é o desempenho da dupla 4, que mostrou, nas últimas atividades, excetuando esta, que está compreendendo muito bem o que é pedido e respondendo corretamente às generalizações, sem a interferência do professor-pesquisador.

Diante dos fatos e dificuldades acima expostos, as duplas só conseguiram caminhar nesta atividade com o auxílio do *kit*.

A **dupla 1** conseguiu compor 360º utilizando polígonos regulares com a manipulação das peças, retornando à geometria concreta.

A primeira pavimentação utilizou 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros, e foi conseguida com facilidade. Em seguida, fizeram, rapidamente, a pavimentação com 2 quadrados e 3 triângulos equiláteros.

A terceira pavimentação foi obtida com 3 hexágonos regulares, 8 quadrados e 4 triângulos equiláteros. Não perceberam que a pavimentação foi apresentada no início da atividade, e mesmo assim a fizeram com dificuldade.

A quarta pavimentação realizada foi idêntica à primeira, com 4 hexágonos regulares e 4 triângulos equiláteros, mantiveram a mesma quantidade de polígonos regulares utilizados.

A quinta pavimentação, foi com 4 octógonos regulares e 1 quadrado. A dupla não encontrou dificuldades para realizar a pavimentação, pois durante as atividades anteriores montaram esta pavimentação com facilidade.

A sexta pavimentação foi com 1 triângulo equilátero e 3 dodecágonos regulares. Os alunos apresentaram dificuldades para encontrar essa pavimentação e foi necessário o auxílio do professor-pesquisador para perceber a disposição na montagem das pavimentações.

Na sétima e última pavimentação a dupla não estava conseguindo visualizar. Foi necessária, mais uma vez, a interferência do professor-pesquisador para dar dicas sobre quais peças seriam utilizadas. Fizeram a pavimentação com 4 triângulos equiláteros, 1 quadrado e 4 dodecágonos regulares. Observa-se que a pavimentação é a mesma apresentada no enunciado da atividade proposta, portanto a dupla repetiu uma pavimentação, deixando de realizar a pavimentação com quadrados, hexágonos regulares e dodecágonos regulares.

A **dupla 2** não conseguia iniciar as pavimentações e solicitou a orientação do professor-pesquisador. (Fica evidente que o primeiro empecilho desta atividade veio a ser a interpretação do enunciado) O professor orientou a dupla para atentar aos ângulos.

A primeira pavimentação realizada foi com octógonos regulares e os quadrados. Esta pavimentação foi semelhante à resposta da atividade anterior. A segunda pavimentação foi com hexágonos regulares, quadrados e triângulos equiláteros; a terceira pavimentação realizada foi com dodecágonos regulares e triângulos equiláteros; a quarta foi com o quadrado e triângulo equilátero; a quinta com hexágonos regulares e triângulos equiláteros; a sexta, com dodecágonos regulares, quadrados e hexágonos regulares e a sétima pavimentação com dodecágonos regulares, quadrados e triângulos equiláteros.

Observa-se que a segunda pavimentação é semelhante à pavimentação apresentada no enunciado da atividade proposta, portanto, a dupla deixou de realizar a pavimentação com dois hexágonos regulares e dois triângulos equiláteros e não indicou o número de polígonos regulares utilizados em cada pavimentação.

A **dupla 3** teve dificuldade para encontrar as pavimentações. Solicitaram, então, a orientação do professor pesquisador, que, tal como na dupla 2, pediu para que observassem os ângulos dos polígonos.

A primeira pavimentação foi com hexágonos regulares, quadrados e triângulos equiláteros; a segunda pavimentação foi realizada com quadrados e triângulos equiláteros; a terceira indicada pela dupla foi com eneágonos regulares, quadrados e heptágonos regulares. Com estas últimas peças não é possível formar uma pavimentação; a dupla não notou que houve falhas na colocação das peças lado a lado, denotando que o seu entendimento não estava ligado à soma dos ângulos internos de um polígono, e sim, apenas ao material concreto.

A quarta pavimentação foi com hexágonos regulares e triângulos equiláteros; a quinta foi com dodecágonos regulares, hexágonos regulares e quadrados. A sexta pavimentação foi com dodecágonos regulares, quadrados e heptágonos regulares. Novamente, não foi possível realizar esta pavimentação pelo mesmo motivo do parágrafo anterior.

A sétima pavimentação foi com eneágonos regulares e quadrados. Mais uma vez esta é uma pavimentação que deixa falhas em sua disposição, portanto, não pavimenta.

A dupla deixou de realizar três pavimentações com polígonos regulares, que são: triângulos regulares, quadrados e dodecágonos regulares; octógonos regulares e quadrados; dodecágonos regulares, quadrados e hexágonos regulares.

A primeira pavimentação realizada é a mesma que foi apresentada na atividade proposta 6, portanto, a dupla 3 deixou de realizar a pavimentação com dois triângulos equiláteros e dois hexágonos regulares.

A dupla também não informou o número de polígonos regulares que utilizaram em cada uma das pavimentações.

A **dupla 4** iniciou a pavimentação com o hexágono regular e triângulo equilátero; a segunda pavimentação foi com os 2 triângulos equiláteros, 1 quadrado e 1 dodecágono regular; a terceira pavimentação foi com triângulos equiláteros e quadrados; a quarta pavimentação foi com hexágonos regulares, dodecágonos regulares e quadrados; a quinta pavimentação foi com octógonos regulares e quadrados; a sexta pavimentação foi com triângulos equiláteros, quadrados e dodecágonos e a sétima e última apresentada pela dupla foi com triângulos equiláteros e hexágonos regulares.

A segunda pavimentação e a sexta pavimentação são semelhantes, portanto, a dupla deixou de realizar a pavimentação com hexágonos regulares e triângulos equiláteros. A dupla informou o número de polígonos regulares utilizados somente na segunda pavimentação.

A tabela a seguir resumirá o desempenho das duplas nesta atividade.

Atividade 6	Dupla 1		Dupla 2		Dupla 3		Dupla 4	
	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda	Com ajuda	Sem ajuda
(3,3,3,3,6)	X		X		X			X
(3,3,3,4,4)	X		X		X			X
(3,3,6,6)	X		-	-	-	-		X
(3,4,4,6)	X		X		X			X
(3,12,12)	X		X		-	-	-	-
(4,8,8)	X		X		-	-		X
(3,3,4,12)	X		X		-	-		X
(4,6,12)	-	-	X		X			X

Tabela 10

Obs.: A ajuda oferecida às duplas foi em função da compreensão da atividade. Todas as duplas utilizaram o *kit* como ajuda à confecção das pavimentações.

Conclusão do Bloco III

Os resultados do bloco III mostram que os alunos conseguem fazer induções e generalizações (atividades 1b, 1d, 1f) a partir de casos particulares (atividades 1a, 1c, 1e). Mas quando submetidos às atividades 3 e 6, que necessitam usar propriedades anteriores, as dificuldades foram grandes. Além disso, notamos que nas atividades que requerem um bom domínio algébrico (atividades 2a e 2b) as dificuldades persistem. Em situações que necessitavam do domínio do conceito de polígono regular (atividade 4), as respostas dos alunos indicam que tal conceito foi bem compreendido por eles.

Perante esses resultados, podemos concluir que este bloco posicionou as duplas numa transição dos níveis G0/G1 para o nível G2. Se observarmos o desempenho dos alunos até a atividade 5, notamos um crescimento que reforça esta transição, porém, na atividade 6, percebe-se um retorno aos níveis G0 e G1, quando deveríamos estar efetivando a nossa permanência no nível G2. Desta forma, e numa postura mediadora, concluímos que estamos nesta transição entre o concreto/espaço-gráfico e o proto-axiomático. Segundo Machado, o abstrato e o concreto caminham juntos sem ter um posicionamento de qual será o primeiro ou o último na construção do pensamento geométrico. Estas dualidades: facilidade/dificuldade, acertos/erros, concreto/abstrato, colaboram na construção de conceitos significativos, como aconteceu nessa sequência de atividades.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa é fruto de uma inquietação sobre o ensino e aprendizagem dos polígonos, mais precisamente dos polígonos regulares. A escolha do tema foi motivada pela preocupação com a apresentação tradicional dos polígonos a alunos do Ensino Fundamental dos ciclos I e II (5ª a 8ª série). Essa apresentação clássica tem a seguinte estrutura: definições, provas, exercícios resolvidos e exercícios propostos. A nossa intenção era quebrar esse modelo introduzindo os polígonos a partir de situações do dia a dia dos alunos.

Procurando algo que tornasse atrativo e prazeroso o estudo dos polígonos, encontramos as pavimentações. De fato, a utilização de ladrilhos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes é uma situação muito interessante para a construção do conceito de polígonos e está muito próxima do cotidiano de nossos alunos. É um assunto também que provoca uma articulação com a disciplina educação artística. Esse tópico permite a criação de atividades lúdicas que podem provocar uma aproximação do aluno com conceitos teóricos da matemática.

Diante disso, lançamos a seguinte questão de pesquisa *Em que medida um trabalho de exploração com as pavimentações no plano, favorece o estudo das propriedades dos polígonos?*

Para responder a essa questão a pesquisa se apoiou em alguns princípios da metodologia da engenharia didática proposta por Michèle Artigue. Foi concebida uma sequências de ensino dividida em três blocos. O primeiro bloco, de caráter exploratório e manipulativo, foi criado para que os alunos verificassem empiricamente diferenças entre polígonos regulares e não regulares e se apropriassem do conceito de pavimentação. O segundo bloco, criado dentro de um ambiente de geometria dinâmica, oferecia a ferramenta “medida” que permitia aos alunos obter empiricamente os valores das medidas dos ângulos e dos lados dos polígonos. O terceiro bloco, de caráter dedutivo, foi concebido para que os alunos validassem propriedades dos polígonos obtidas nos blocos anteriores, de uma maneira dedutiva.

Fundamentamos a pesquisa no modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico de Parsysz que sugere atividades concretas, atividades representadas no ambiente papel e lápis ou no ambiente informatizado e atividades dedutivas. Apoiamo-nos também na articulação entre as quatro dimensões defendida por Machado na construção do conhecimento geométrico. Utilizamos também a teoria dos campos conceituais de Vergnaud que defende para a apropriação de um conceito trabalhar com três conjuntos simultaneamente: as situações que dão sentido ao conceito, os invariantes sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, e os significantes, isto é, um conjunto de representações simbólicas.

Participaram da pesquisa oito alunos da 8ª série do Ensino Fundamental da rede estadual de ensino, divididos em duplas, das quais somente as duplas 1 e 2, constituídas pelos alunos A, B, C e D respectivamente foram gravadas durante a realização da sequência de atividades. A dupla 1 foi acompanhada por uma professora observadora.

Responderemos à questão de pesquisa analisando as produções dos alunos nos blocos I, II e III.

O bloco I convidava os alunos a classificar os polígonos e a introduzir de maneira empírica o conceito de pavimentação. Pelas respostas apresentadas, observamos que os alunos classificaram os polígonos quanto à cor, o tamanho e número de lados. Nenhuma dupla separou o conjunto de objetos em polígonos regulares e não regulares conforme previsão feita na análise a priori. Acreditávamos que a simetria nos polígonos regulares pudesse ser realçada pelos alunos. No entanto nada do previsto foi observado pelas 4 duplas. Uma das possíveis razões desse fato pode ter sido a formulação do enunciado “Classificar os polígonos em dois grupos”, enunciado que permite qualquer tipo de interpretação. Mas na institucionalização, essa atividade permitiu ao professor pesquisador introduzir toda a nomenclatura associada aos polígonos. Quanto ao segundo objetivo do bloco que era da apropriação do conceito de pavimentação, o trabalho dos alunos foi além do esperado. Todos se envolveram, explorando e manipulando as peças do *kit* e perceberam claramente quando havia falhas ou superposição. Acreditamos que os alunos iniciaram o segundo bloco com uma boa ideia do que seja pavimentar o plano.

No bloco II, os alunos utilizaram o *software* Cabri-Géomètre, para pavimentar a tela do monitor. A atividade pedia que calculassem o ângulo interno dos polígonos. Todos usaram a ferramenta “medir” e construíram inúmeras pavimentações do plano com os polígonos indicados nas atividades. Um fato que chama a atenção é que a justificativa dada pelos alunos para afirmar que a situação era de fato de pavimentação eram comentários do tipo “se der a volta inteira dá o ângulo de 360º” (dupla 1) ou “sim porque o ângulo interno dá uma volta de 360º” (dupla 4). Tais comentários indicam que os alunos tinham em mente da importância de se saber qual a medida do ângulo interno de um polígono, pois que a soma dos ângulos deveria dar 360º. De fato, saber a medida do ângulo interno de um polígono regular é determinante para verificar a possibilidade ou não de pavimentar um plano. A atividade pedia também para pintar a pavimentação usando a ferramenta “Cores” do Cabri. As produções dos alunos mostraram o encantamento dos alunos com as figuras produzidas.

No bloco III, as atividades foram propostas de modo que os alunos fizessem induções a partir de casos particulares. Observamos nos itens 1b, 1d, 1f deduções de fórmulas a partir da observação de casos particulares (ver itens 1a,1c,1e). Mas quando os alunos foram submetidos às atividades 3 e 6 que necessitavam do uso de propriedades já deduzidas, as dificuldades foram grandes. Percebe-se que quando não há nenhuma indicação ou sugestão fornecida pelo professor na resolução de uma atividade, ou quando é preciso achar nos conhecimentos anteriores elementos que favorecem a resolução, o aluno interrompe a sua tentativa de resolução à espera da ajuda do professor. Notamos também que nas atividades que requerem um bom domínio algébrico (atividades 2a e

2b) as dificuldades persistem. Na situação (atividade 4) que necessitava do domínio do conceito de polígono regular as respostas dos alunos indicaram que tal conceito foi bem incorporado por eles.

Voltando à nossa questão de pesquisa, podemos dizer que o trabalho de exploração com as pavimentações no plano tanto no concreto quanto com o uso do *software* Cabri foi insuficiente para atingir a etapa que Parsysz denomina de geometria proto-axiomática, onde os alunos começam a deduzir resultados a partir de outros tomados como ponto de partida. Mas nesse trabalho, ela foi importante para solidificar conceitos nos alunos tais o de polígono regular e o de pavimentação.

Concluindo, podemos dizer que, apesar de todas as dificuldades ocorridas durante a realização das atividades, a sequência permitiu aos alunos um avanço lento de validações empíricas para validações dedutivas. Segundo Vergnaud (1990), é através de situações e de atividades de exploração, formulação de hipótese e verificação, aplicadas durante um longo período de tempo que um conceito adquire sentido para o aluno. Daí a importância de se investigar cada vez mais situações que podem contribuir a dar sentido a um conceito e de estar atento ao fato que um conceito leva tempo para ser apropriado. Acreditamos que a aprendizagem das propriedades de um conceito é um processo lento que necessita de um ensino específico. Mas julgamos que a fase heurística de observação e manipulação, considerada nesta pesquisa, é necessária para atingir esse objetivo.

Esperamos que esse trabalho, centrado no estudo dos polígonos via pavimentação estimule novas abordagens e que a perseguição ao tema demonstração, um dos mais delicados no ensino, seja sempre levado em consideração em qualquer tópico que venha a ser ensinado.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, S. T, Dissertação de Mestrado, *Um estudo de pavimentação do plano utilizando caleidoscópios e software Cabri géomètre II.* Rio Claro – São Paulo, 2003.

ALVES, Sérgio – IME – USP. *Ladrilhando o plano com quadriláteros*. Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, nº 51, 2004.

ALVES, Sérgio, Mário Dalcin – IME – USP Montevidéu – Uruguay. *Mosaicos do plano.* Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, nº 40, 1999.

ARTIGUE, Michèle. *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 9/3, 281-308, Grenoble, La Pensée Sauvage Éditions, 1988.

ASSOCIAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA, Rua Dr. João do Couto, 27 A – 1500 – 236, Lisboa, Portugal.

BANCO de Questões, 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – OBMEP 2006.

BARBEDO, Judite, Pavimentações arquimedanas, 06/11/2002. http://www.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/pdf/activ_judite.pdf, acessado em 17/04/2006.

BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo Padrões em Mosaicos – São Paulo*: Atual, 1993.

BRAVO, Juan. *Científicos griegos* – Aguilar, S. A. Ediciones, 38, Madrid – España – 1970.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Parâmetros Curriculares Nacionais do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental: matemática, Brasília: MEC, 1998.

______, Secretaria da Educação Média e Tecnologia. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília, MEC, 2000.

BRUN, Jean. Didática das matemáticas. Tradução: Maria José Figueiredo. Horizontes pedagógicos. Lisboa – Portugal. 1996.

CIENTIFICOS GRIEGOS, Recopilacion, estudio preliminar, preambulos y notas por Francisco Vera. Euclides. P.689-979.

CLAIRAUT, Alexis Claude. *Elementos de Geometria*; tradução: José Feliciano. 9ª edição corrigida. São Paulo – 1909.

DANTE, Luiz Roberto. Tudo é matemática, Coleção: Ensino Fundamental; PNLD/2005; ed. Ática.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*; tradução: Hygino H. Domingues – Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

EUCLID: The Thirteen Books of Elements, Vols. 1, 2 Transl Sir Thomas Heath, Dover (1956).

GIOVANNI, José Ruy; Eduardo Parente: aprendendo MATEMÁTICA; Coleção: Ensino Fundamental; PNLD/2005. Editora FTD.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Mini Aurélio: o minidicionário da língua portuguesa.* Curitiba: Posigraf, 2004. 6ª ed.

HADAMARD, Jacques. Leçons de Géométrie élémentaire II. Chapitre VII, p157-184. Tome I. Paris Armand Colin & C[ie], Éditeurs. 1898.

HENRY, Michel. Curs de Analyses des situations didactiques. PUC-SP. Junho 2006- IREM de Besançon (France*)*.

HILBERT, David, Fundamentos de la Geometria, Coleccion de textos clasicos I; publicaciones del instituto "Jorge Juan" de matemáticas – Madrid – 1953.

IEZZI, Gelson et. al. *Matemática: volume único*. São Paulo: Atual Editora, 2005. 3ª ed.

IEZZI, Gelson; Osvaldo Dolce; Antonio Machado: Matemática e realidade: Coleção – Ensino Fundamental. PNLD/2005, editora atual.

IMENES, Luiz Márcio, Marcelo Lellis. *Geometria dos Mosaicos*. Coleção Vivendo a Matemática – Ed. Scipione, 2000. Escola de cara nova.

LAURO, Maira Mendias. *A perspectiva de Clairaut para o ensino de geometria no século XVIII.* Anais, 1º Seminário Paulista de História e Educação Matemática, p. 569 – 586.

LEGENDRE. A. M. Éléments de Géométrie, traduzido por José Feliciano tradução da quinta edição francesa. (1909).

LIMA, Elon Lages. *Qual é a soma dos ângulos (internos ou externos) de um polígono (convexo ou não).* Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, nº 19, 1991.

LIMA, Elon Lages. *Qual é mesmo a definição do polígono convexo?* Revista do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, nº 21, 1992.

MACHADO, Nilson José. *Epistemologia e Didática.* São Paulo: Cortez Editoria, 2005. 6ª ed.

MACHADO, Nilson José, Marisa O. Cunha. *Linguagem, Conhecimento, Ação.* Coleção de ensaios TRANSVERSAIS 23 - São Paulo: Escrituras Editora, 2003.

MAGINA, S., CAMPOS, T. M. M., NUNES, T. & GITIRANA, V. *Repensando Adição e Subtração*. -1ª ed.- São Paulo: PROEM, 2001.

MARTINS, R. M, Dissertação de Mestrado, *Ensino-aprendizagem de geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais.* Rio Claro – São Paulo, 2003.

MOISE, Edwin E**. e DOWNS** F. JR. Geometria Moderna, ed. Edgard Blücher Ltda - SP ,1971.

PAIS, Luiz Carlos. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.* Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 2ª ed.

PARZYSZ, Bernard. Artigo: Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique em PE1 (2001). Extrait du Colloque COPIRELEM – Tours – 2001.

PESCUNA, Derna: Referências bibliográficas: um guia para documentar suas pesquisas – São Paulo: Olho d'Água – 2003.

SILVA, V. C. Dissertação de Mestrado. *Ensino de geometria através de ornamentos.*

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In Lesh, R. and Landau, M. (Eds.) Acquisition of Mathemtics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc. pp 127-174, 1983.

VERGNAUD, Gérard. O Campo Conceitual da Multiplicação. Seminário Internacional da Matemática. GEEMPA. Setembro de 2001, São Paulo e Porto Alegre.

VERGNAUD, Gerard. La theórie des champs conceptuels. Recherches em Didactique de Mathématiques, 1990, vol. 10, nº 2, pp 133-170.

ANEXOS

ANEXO 1: CONVITE AOS ALUNOS

ESCOLA ESTADUAL PROFESSORA INAH DE MELLO

CONVITE

É com grande satisfação que Amarildo Aparecido dos Santos, professor efetivo desta unidade escolar, convida o aluno (a) ___________________________ da 8ª série a participar de três encontros de geometria, onde serão desenvolvidas atividades relacionadas com polígonos e suas propriedades.

Essas atividades são parte integrante da dissertação de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Solicito aos pais dos alunos a autorização para que seus filhos participem do desenvolvimento desta pesquisa.

As atividades serão desenvolvidas na escola nos dias 11, 12 e 13 de dezembro no período da tarde a partir das 13 horas, com duração de duas horas. Eventualmente serão marcados encontros no período da manhã caso seja necessário.

Gostaria de chamar a atenção dos pais para que os alunos não faltem nos dias de realização das atividades para não prejudicar o andamento do projeto. Desde já agradeço a compreensão.

Santo André, 11 de dezembro de 2006.

___________________________ ___________________________

Amarildo Aparecido dos Santos — Assinatura do pai ou responsável

Professor-Pesquisador

ANEXO 2: TERMO DE COMPROMISSO

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

TERMO DE COMPROMISSO

Este termo tem como objetivo esclarecer os procedimentos de nossa pesquisa, realizada na E. E. Prof$^{a.}$ Inah de Mello em novembro de 2006, principalmente no que tange à utilização dos dados nela coletados.

O material coletado – as atividades realizadas, as transcrições, os registros escritos, as fotografias – servirá de base para pesquisas que procuram entender melhor o processo de produção e significados relativo às pesquisas sobre *Polígonos via pavimentação*. As transcrições, os registros escritos e as fotografias terão seus nomes trocados por pseudônimos preservando a identidade dos sujeitos em sigilo.

As informações provenientes da análise desse material poderão ainda ser utilizadas pelos pesquisadores em publicações e eventos específicos.

Santo André, 11 de dezembro de 2006.

_________________________	_____________________
Amarildo Aparecido dos Santos Professor-Pesquisador	Responsável pelo aluno
_____________________________	_____________________
Hélio Pinto Diretor da E. E. Prof$^{a.}$ Inah de Mello	(nome legível do aluno)

ANEXO 3: AUTORIZAÇÃO PARA DIVULGAÇÃO DA IMAGEM DO ALUNO

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
Centro das Ciências Exatas e Tecnologia
Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

<u>AUTORIZAÇÃO</u>

Eu, Amarildo Aparecido dos Santos, professor efetivo, PEB II de Matemática da E. E. Prof[a.] Inah de Mello, aluno do programa de mestrado da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) solicito aos senhores pais do ALUNO(A): ___________________ _____________________ autorização para divulgação da imagem de sua filha no trabalho de pesquisa para a aquisição do título de mestre profissional em matemática. A aplicação da sequência de atividades foi realizada nos dias 11, 12 e 13 de dezembro de 2006.

Santo André, 13 de junho de 2007.

_________________________ ______________________

Amarildo Aparecido dos Santos — Responsável pelo aluno

Professor-Pesquisador

____

(nome legível do aluno)

ANEXO 4: ATIVIDADES DO BLOCO I E QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR

BLOCO I - Manipulando Polígonos – Atividade 1

NOME:_________________________

NOME:_________________________ DATA ___/___/___.

Escolher um kit

1) Classificar os polígonos em dois grupos. Que critério você utilizou para classificar os polígonos? Descreva-o.

2) Junte sobre a mesa polígonos com o mesmo número de lados de modo que a mesa seja preenchida com as peças do kit, não havendo falhas (espaço entre as peças) ou sobreposição de polígonos. Repita a atividade utilizando triângulo. O que você acabou de fazer recebe o nome de Pavimentação. Descrever todo o processo, destacando as suas atitudes e justificando. (O que você acabou de fazer recebe o nome de Pavimentação).

Pavimentar é combinar as formas geométricas de modo a cobrir toda a superfície sem falhas e sem sobreposições.

BLOCO I - Manipulando Polígonos – Atividade 2

NOME:_________________________

NOME:_________________________ DATA ___/___/___.

Utilize o *kit* da atividade 1

a) Fazer uma pavimentação utilizando apenas triângulos equiláteros. Verifique se é possível.

b) Fazer uma pavimentação utilizando apenas quadrados. Verifique se é possível.

c) Fazer uma pavimentação utilizando apenas pentágonos regulares. Verifique se é possível.

d) Fazer uma pavimentação utilizando apenas hexágonos regulares. Verifique se é possível.

e) É possível fazer uma pavimentação com polígonos regulares com o número de lados maior que seis? Se sim, quais? Se não, justifique.

f) Descubra algumas pavimentações possíveis utilizando somente dois polígonos regulares. Escreva os polígonos que você utilizou em cada pavimentação

g) Descubra algumas pavimentações possíveis utilizando mais de dois polígonos regulares. Escreva os polígonos que você utilizou em cada pavimentação

BLOCO I – Manipulando polígonos (Tempo de duração ____)

ATIVIDADE-1: QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR

NOME:_________________________ DATA ___/___/___.

1) Os alunos classificaram os polígonos em função da cor ou do número de lados? Conseguiram dividir os polígonos em dois grupos? Comentar.

2) A dupla conseguiu organizar os polígonos sobre a mesa conforme recomenda a atividade? Quais foram as peças utilizadas em cada uma? Comentar.

3) Conseguiram repetir a atividade com os triângulos diferentes das anteriores? Perceberam algumas diferenças? Comentar.

4) Precisaram da ajuda do professor pesquisador? Quais?

5) Faça um relato do que você observou na realização da atividade se achar necessário.

ANEXO 5: ATIVIDADES DO BLOCO II E QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR

BLOCO II - Construções no Cabri Geomètre II – Atividade 1

NOME:_________________________

NOME:_________________________ DATA ___/___/___.

1a) Utilizando a ferramenta "macro construção" construa um triângulo equilátero clicando nas duas extremidades de um segmento. A seguir meça o "ângulo interno" com a ferramenta "ângulo".

1b) É possível pavimentar o plano utilizando somente triângulos equiláteros?

1c) Se possível, pinte a pavimentação utilizando cores e a ferramenta "preencher".

2a) Utilizando a ferramenta "macro construção" construa um quadrado clicando nas duas extremidades de um segmento. A seguir meça o "ângulo interno" com a ferramenta "ângulo".

2b) É possível pavimentar o plano utilizando somente quadrados?

2c) Se possível, pinte a pavimentação utilizando cores e ferramenta "preencher".

3a) Utilizando a ferramenta "macro construção" construa um pentágono regular clicando nas duas extremidades de um segmento e no ângulo dado (108º). A seguir meça o "ângulo interno" com a ferramenta "ângulo".

3b) É possível pavimentar o plano utilizando somente pentágonos regulares?

3c) Se possível, pinte a pavimentação com a ferramenta "preencher".

4a) Utilizando a ferramenta "macro construção" construa um hexágono regular clicando nas duas extremidades de um segmento. A seguir meça o "ângulo interno" com a ferramenta "ângulo".

4b) É possível pavimentar o plano utilizando somente hexágonos regulares?

4c) Se possível, pinte a pavimentação com a ferramenta "preencher".

5) Verifique se é possível pavimentar o plano com um polígono regular presente na barra de ferramenta e cujo número de lados seja maior que 6? Justifique a sua resposta.

BLOCO II - Construções no Cabri Geomètre II – Atividade 2

NOME:_________________________

NOME:_________________________ DATA ___/___/___.

Existem apenas quatro pavimentações do plano utilizando em torno de um ponto apenas dois polígonos regulares. Descubra-as.

BLOCO II – Construções no Cabri (Tempo de duração ____)

ATIVIDADE-1: **QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR**

NOME:__________________________ DATA ___/___/___.

1) A dupla conseguiu utilizar a macro construção do triângulo equilátero? Conseguiram pintar a pavimentação? Quais foram as dificuldades apresentadas?

2) Conseguiram utilizar a ferramenta “quadrado”? Que dificuldades encontraram? Comente.

3) Utilizaram a macro do pentágono regular? Pediram ajuda do pesquisador? Como justificaram? Comente.

4) Perceberam que a macro do hexágono regular é de simples utilização? Fizeram associação com o material concreto? Quais dificuldades tiveram? Comente.

5) Conseguiram fazer tentativas de pavimentação com polígonos regulares com número de lados maior que 6? Quais dificuldades encontraram? Pediram ajuda ao professor pesquisador? Comente.

6) Pediram ajuda ao professor pesquisador? Quais?

7) Faça um relato de como foi o desenvolvimento da atividade, o tempo foi suficiente?

BLOCO II – Manipulando polígonos (Tempo de duração: ____)

ATIVIDADE 2 - **QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR**

NOME:_______________________________DATA __/__/__.

1) A dupla conseguiu perceber que algumas pavimentações com dois polígonos regulares já foram feitas? Tiveram dificuldades? Comentar.

2) Pediram ajuda ao professor pesquisador? Quais?

3) A institucionalização feita pelo professor ajudou nas atividades? Como? Comentar.

BLOCO I – Manipulando polígonos (Tempo de duração: ____)

ATIVIDADE 2 - **QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR**

NOME:________________________________DATA __/__/__.

1) A dupla conseguiu fazer as pavimentações com triângulos equiláteros? Conseguiram justificar?

2) Conseguiram preencher o plano com quadrados? Justificaram? Comentar.

3) A dupla conseguir perceber que o pentágono não pavimenta? Que problemas foram levantados pela dupla? Comentar.

4) A pavimentação com hexágono regular foi realizada? Que problemas ocorreram? Comentar.

5) Precisaram da ajuda do professor observador? Quais?

6) Conseguiram fazer quantas pavimentações com dois polígonos regulares? Quais polígonos utilizaram?

7) A dupla montou pavimentações com mais de dois polígonos regulares? Quais foram utilizados? Tiveram dificuldades?

8) Faça um relato do que você observou na realização da atividade.

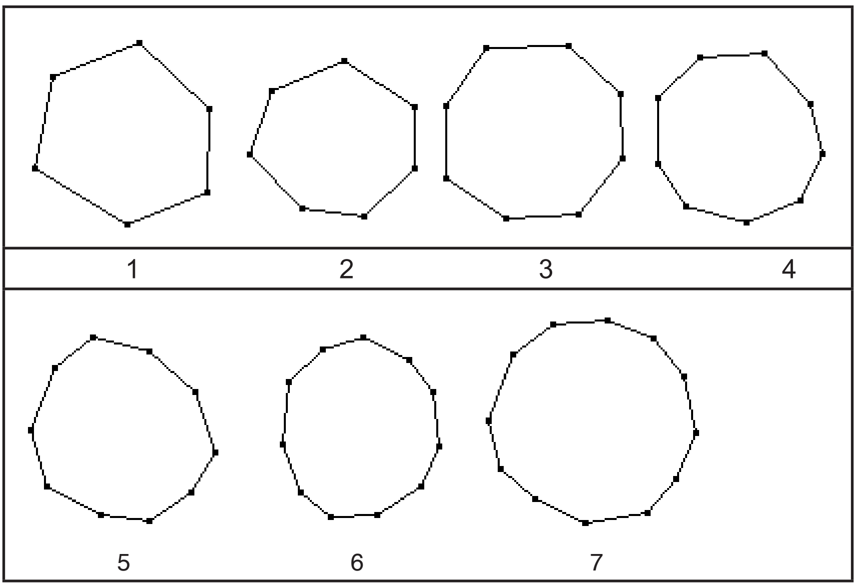
ANEXO 6: ATIVIDADES DO BLOCO III E QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR

Dedução – Atividade 1 – BLOCO III

NOME:_________________________

NOME:_________________________ DATA ___/___/___.

Considerando os polígonos a seguir:



a) Em quantos triângulos podemos decompor cada um dos polígonos acima, a partir de um dos vértices?

b) Em quantos triângulos podemos decompor um polígono de n lados, a partir de um dos vértices?

c) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de 100 lados?

d) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados?

e) Qual é a medida de um ângulo interno do polígono regular de 36 lados?

f) Qual é a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados?

Dedução – Atividade 2 – BLOCO III

NOME:_________________________

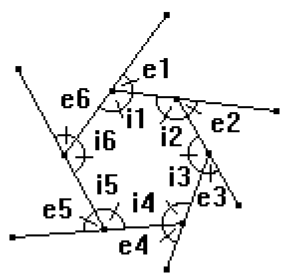
NOME:_________________________ DATA ___/___/___.

a) Qual é a soma das medidas dos ângulos externos do hexágono abaixo?

b) Obter uma fórmula para a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados.

c) Se um polígono de 10 lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?

d) Se um polígono de n lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?

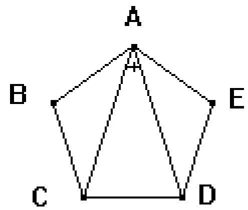


Dedução – Atividade 3 – BLOCO III

NOME:_________________________

NOME:_________________________ DATA ___/___/___.

Determinar a medida do ângulo $C\hat{A}D$ sabendo que a figura é um polígono regular. Descrever o processo.



Dedução – Atividade 4 – BLOCO III

NOME:________________________

NOME:________________________ DATA ___/___/___.

a) Um retângulo é um polígono regular? Escreva sua resposta.

b) Um losango é um polígono regular? Escreva sua resposta.

Dedução – Atividade 5 – BLOCO III

NOME:_________________________

NOME:_________________________ DATA ___/___/___.

Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se presta a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

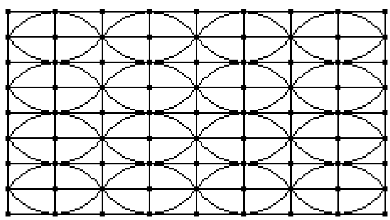


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano.

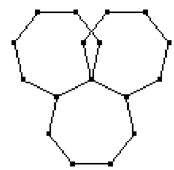
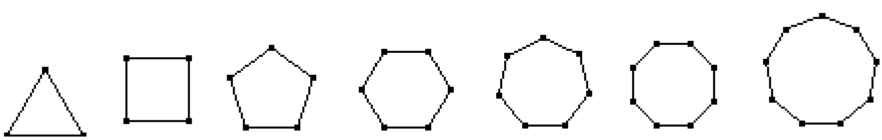


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano

A seguir uma relação de alguns polígonos regulares.



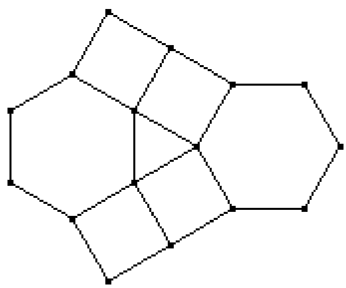
Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos regulares acima, sendo um deles octogonal, qual deverá ser a forma do outro polígono escolhido?

Dedução – Atividade 6 – BLOCO III

NOME:_________________________

NOME:_________________________ DATA ___/___/___.

Você acabou de fazer algumas pavimentações com dois tipos de polígonos regulares. Outras pavimentações podem ser feitas com dois ou mais polígonos regulares. Uma delas é a pavimentação (3-4-4-6), que está indicada a seguir. Trata-se de um triângulo equilátero (3 lados), de dois quadrados (4 lados) e de um hexágono regular (6 lados). Existem 8 combinações possíveis de polígonos regulares para pavimentar o plano. Tente encontrar as outras 7 pavimentações.



BLOCO III – Dedução (Tempo de duração ____)

ATIVIDADE-1: **QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR**

NOME:__________________________ DATA ___/___/___.

1) A dupla conseguiu traçar todas as diagonais que partem de um só vértice? Conseguiram contar os triângulos, após traçar as diagonais? Tiveram dificuldades? Quais?

2) Nas generalizações deduziram corretamente? Quais foram as dificuldades? Pediram ajuda do pesquisador? Comente.

3) Fizeram associação com as atividades anteriores? Quais? Comente.

4) Faça um relato de como foi o desenvolvimento da atividade, o tempo foi suficiente?

BLOCO III – Dedução (Tempo de duração: ____)

ATIVIDADE 2 - **QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR**

NOME:_______________________________DATA __/__/__.

1) A dupla conseguiu perceber que o polígono é um hexágono não regular?

Tiveram dificuldades? Comentar.

2) Conseguiram escrever as seis equações para a dedução? Pediram ajuda ao professor pesquisador? Quais?

3) Na generalização da fórmula, conseguiram sem a ajuda do pesquisador? Tiveram dificuldades? Quais? Comentar.

4) Faça um relato da atividade se necessário.

BLOCO III – Dedução (Tempo de duração: ____)

ATIVIDADE 3 - **QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR**

NOME:_______________________________DATA __/__/__.

1) Conseguiram perceber que os triângulos são isósceles? Quais foram as dificuldades? Comentar.

2) Encontraram com facilidade a medida do ângulo interno do pentágono regular? Tiveram dificuldades? Quais?

3) Pediram ajuda ao professor pesquisador? Quais?

4) Faça um relato da atividade se necessário.

BLOCO III – Dedução (Tempo de duração: ____)

ATIVIDADE 4 - **QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR**

NOME:________________________________DATA __/__/__.

1) A dupla conseguiu perceber que o retângulo não é um polígono regular? Apresentaram dificuldades para chegar a essa conclusão? Quais?

2) Conseguiram notar que o losango não é um polígono regular? Apresentaram dificuldades para chegar a essa conclusão? Quais?

3) Pediram ajuda ao professor pesquisador? Quais?

4) Faça um relato da atividade se necessário.

BLOCO III – Dedução (Tempo de duração: ____)

ATIVIDADE 5 - **QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR**

NOME:________________________________DATA __/__/__.

1) Conseguiram interpretar a questão com facilidade? Quais os problemas levantados? Comentar.

2) Fizeram associação as atividades realizadas anteriormente? Quais foram as dificuldades?

3) Pediram ajuda ao professor pesquisador? Quais?

4) Faça um relato da atividade se necessário.

BLOCO III – Dedução (Tempo de duração: ____)

ATIVIDADE 6 - **QUESTIONÁRIO DO OBSERVADOR**

NOME:________________________________DATA __/__/__.

1) A dupla associou esta atividade às realizadas anteriormente? Notaram que já fizeram situações semelhantes? Tiveram dificuldades? Quais?

2) Conseguiram montar todas as pavimentações possíveis? Quais foram feitas? Comentar.

3) Pediram ajuda ao professor pesquisador? Quais? Comentar.

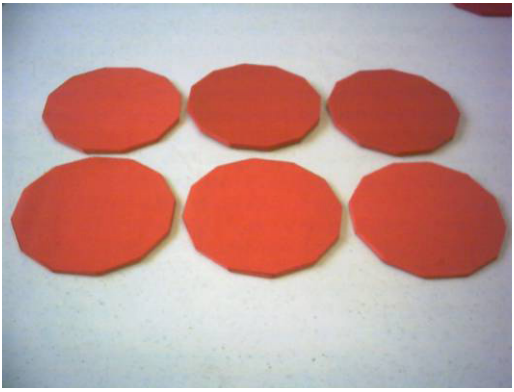
4) Utilizaram o material concreto na dedução?

5) Faça um relato da atividade, se necessário.

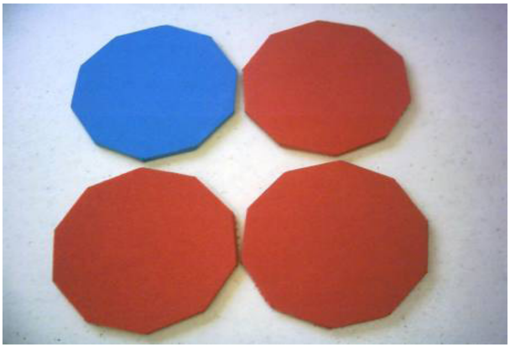
ANEXO 7: MATERIAL UTILIZADO NAS ATIVIDADES

Criamos as peças dos polígonos regulares e não regulares com cores diferentes das quais contêm: *quarenta e dois* triângulos equiláteros, *vinte e cinco* quadrados. Dos outros polígonos regulares, temos *dez* pentágonos, *quatorze* hexágonos, *sete* heptágonos, *nove* octógonos, *seis* eneágonos, *quatro* decágonos e *seis* dodecágonos. Além desses, *dezesseis* triângulos retângulos. Os lados das peças dos polígonos regulares e da hipotenusa do triângulo retângulo têm medida de 2,5 cm. Para cada polígono regular, a partir do pentágono foi colocado um polígono não regular. Há também polígonos não regulares com medidas de lados diferentes, ou seja, *oito* retângulos de dimensões 3 cm e 5 cm congruentes entre si; *oito* quadriláteros de dimensões 2,5 cm; 4,24 cm; 5 cm e 7,49 cm congruentes entre si; *oito* triângulos escalenos de medidas 6,41 cm; 5,0 cm e 5,73 cm congruentes entre si, e por último, *oito* losangos de lado 3,3 cm congruentes entre si. Foi utilizada a ferramenta "polígono regular" no Cabri Gèométre na confecção das peças, para que pudessem manter os lados dos polígonos regulares com a mesma medida. As dimensões das peças dos polígonos não regulares foram projetadas a fim de que fossem utilizadas sem a possibilidade da junção com os polígonos regulares. Este *kit* foi apresentado aos alunos no Bloco I na primeira atividade. As peças dos polígonos criados foram feitas de recortes de E.V.A. *(Estileno, Acetato de Vinila) com espessura entre 4 mm a 5 mm e* recortados com estilete. Alguns polígonos foram adquiridos prontos (*material acrílico colorido*), é o caso dos triângulos retângulos, triângulos equiláteros, os quadrados e a maioria dos hexágonos regulares.

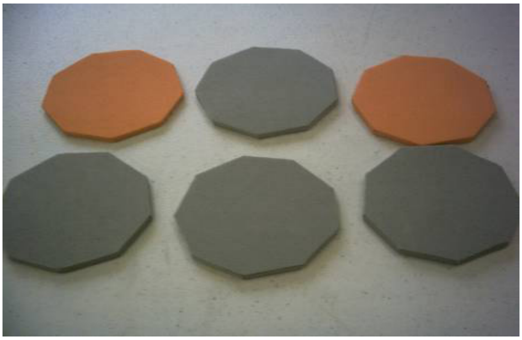
- Seis dodecágonos regulares de cores diferentes com 2,5 cm de lado:



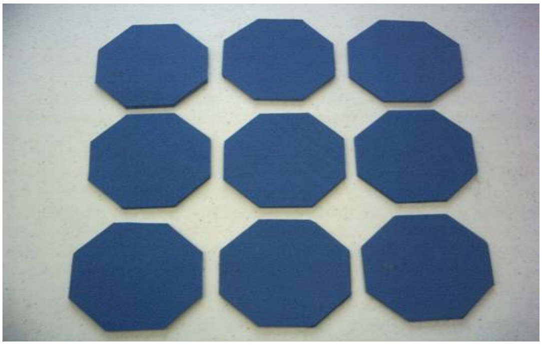
- Quatro decágonos regulares de cores diferentes com 2,5 cm de lado:



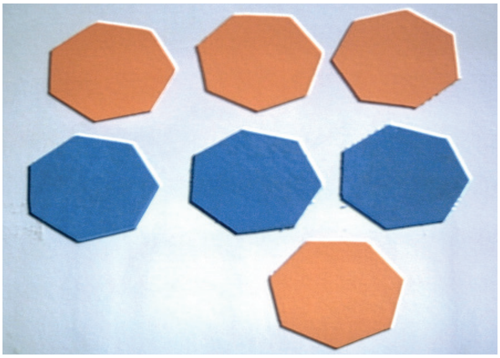
- Seis eneágonos regulares de cores diferentes com 2,5 cm de lado:



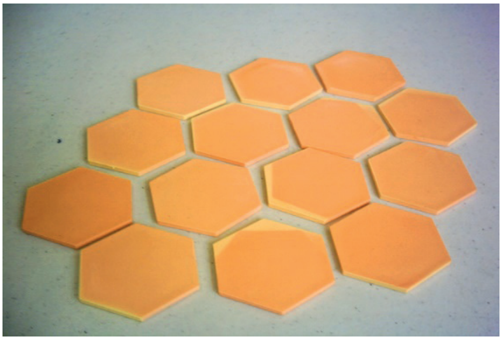
- Nove octógonos regulares de cores diferentes com 2,5 cm de lado:



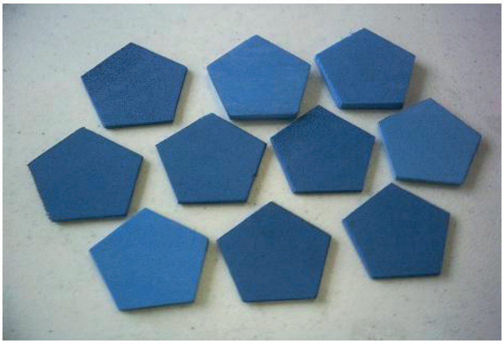
- Sete heptágonos regulares de cores diferentes com 2,5 cm de lado:



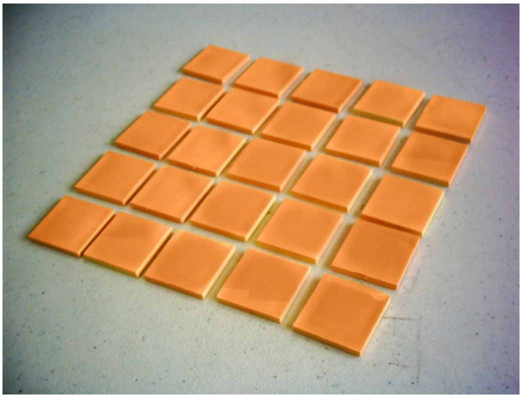
- Quatorze hexágonos regulares de cores diferentes com 2,5 cm de lado:



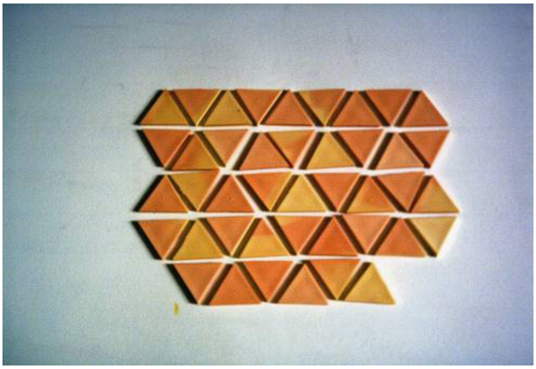
- Dez pentágonos regulares de cores deferentes com 2,5 com de lado:



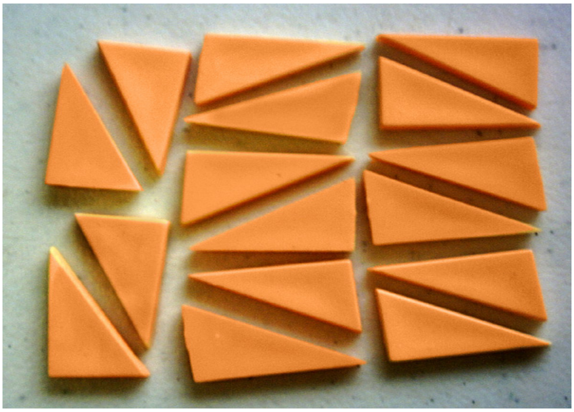
- Vinte e cinco quadrados de mesma cor, alguns com cores diferentes com 2,5 cm de lado:



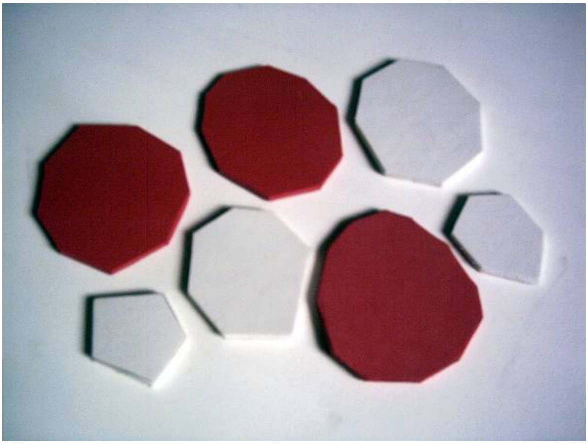
- Quarenta e dois triângulos equiláteros de mesma cor com 2,5 cm de lado:



- Dezesseis triângulos retângulos com ângulos agudos de 30º e 60º de mesma cor com 2,5 com de lado:



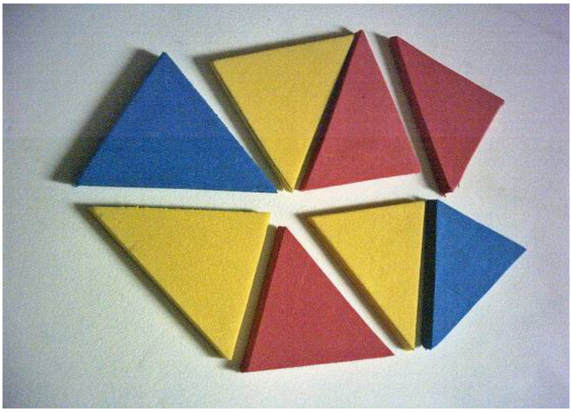
- Sete polígonos não regulares com cores diferentes e medida dos lados diferentes:



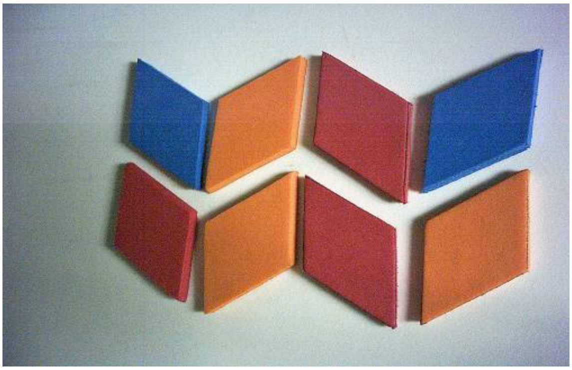
- Oito retângulos de lados 5 cm e 3 cm com cores diferentes:

- Oito quadriláteros em forma de trapézio com cores diferentes de dimensões: 2,5 cm; 4,24 cm; 5 cm e 7,49 cm.

- Oito triângulos escalenos com todos os ângulos agudos, cores diferentes e cujas medidas dos lados são: 6,41 cm; 5,0 cm e 5,73 cm.



- Oito losangos de cores diferentes de lados 3,3 cm.



ANEXO 8: ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELA DUPLA 1

Uma seqüência de atividades para o estudo das propriedades dos polígonos via pavimentação – I

ATIVIDADE DE PESQUISA PARA A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA – PUC-SP 2006.

Manipulando Polígonos – Atividade 1 - BLOCO I

NOME: ALUNO A

NOME: ALUNO B DATA 11 /12/06.

Escolher um *kit*

1) Classificar os polígonos em dois grupos. Que critério você utilizou para classificar os polígonos? Descrever.

Polígonos grandes e polígonos pequenos. Os grandes de um lado e os pequenos do outro.

2) Junte sobre a mesa polígonos com o mesmo número de lados de modo que a mesa seja preenchida com as peças do *kit*, não havendo falhas (espaço entre as peças) ou sobreposição de polígonos. Repita a atividade utilizando triângulo. O que você acabou de fazer recebe o nome de Pavimentação. Descrever todo o processo, destacando as suas atitudes e justificando. O que você acabou de fazer recebe o nome de Pavimentação.

Juntamos os polígonos do lado iguais e depois juntamos as figuras formadas.

Pavimentar é combinar as formas geométricas de modo a cobrir toda a superfície sem falhas e sem sobreposições.

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: amarosja@terra.com.br
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

ATIVIDADE DE PESQUISA PARA A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA – PUC-SP 2006.

Manipulando Polígonos – Atividade 2 - BLOCO I

NOME ALUNO A

NOME ALUNO B DATA 11/12/06.

Utilize o kit da atividade 1

a) Fazer uma pavimentação utilizando apenas triângulos eqüiláteros. Verifique se é possível.

Sim é possível por que eles tem os lados iguais.

b) Fazer uma pavimentação utilizando apenas quadrados. Verifique se é possível.

Sim é possível por que eles tem os lados iguais e assim se encaixam perfeitamente

c) Fazer uma pavimentação utilizando apenas pentágonos regulares. Verifique se é possível.

Não é possível por que quando junta fica um espaço entre eles.

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: amarosja@terra.com.br
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

d) Fazer uma pavimentação utilizando apenas hexágonos regulares. Verifique se é possível.

Sim por que juntos formam uma encaixe perfeito.

e) É possível fazer uma pavimentação com polígonos regulares com o número de lados maior que seis? Se sim, quais? Se não, justifique.

Não por que juntos não formam um encaixe

f) Descubra algumas pavimentações possíveis utilizando somente dois polígonos regulares. Escreva os polígonos que você utilizou em cada pavimentação

1º triangulo e quadrado
2º hexagono e triangulo

g) Descubra algumas pavimentações possíveis utilizando mais de dois polígonos regulares. Escreva os polígonos que você utilizou em cada pavimentação

1 hexagono, quadrado e triangulo.
2º dodecagono, triangulo e quadrado.

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: **amarosja@terra.com.br**
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

ATIVIDADE DE PESQUISA PARAA A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA – PUC-SP 2006.

Construções no Cabri Geomètre II – Atividade 1 - BLOCO II

NOME: ALUNO A

NOME: ALUNO B DATA 12/12/06.

1a) Utilizando a barra de ferramenta "macro construção" construa um triângulo eqüilátero clicando nas duas extremidades de um segmento. A seguir meça o "ângulo interno" com a ferramenta "ângulo".

1b) É possível pavimentar o plano utilizando somente triângulos eqüiláteros?

Sim por que o angulo interno da uma volta de 360°.

1c) Se possível, pinte a pavimentação utilizando cores e a ferramenta "preencher".

2a) Utilizando a barra de ferramenta "macro construção" construa um quadrado clicando nas duas extremidades de um segmento. A seguir meça o "ângulo interno" com a ferramenta "ângulo".

2b) É possível pavimentar o plano utilizando somente quadrados?

Sim por que o angulo interno da uma volta de 360°

2c) Se possível, pinte a pavimentação utilizando cores e ferramenta "preencher".

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: **amarosja@terra.com.br**
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

3a) Utilizando a barra de ferramenta "macro construção" construa um pentágono regular clicando nas duas extremidades de um segmento e no ângulo dado. A seguir meça o "ângulo interno" com a ferramenta "ângulo".

3b) É possível pavimentar o plano utilizando somente pentágonos regulares?

Não por que sobra 36°.

3c) Se possível, pinte a pavimentação com a ferramenta "preencher".

4a) Utilizando a barra de ferramenta "macro construção" construa um hexágono regular clicando nas duas extremidades de um segmento. A seguir meça o "ângulo interno" com a ferramenta "ângulo".

4b) É possível pavimentar o plano utilizando somente hexágonos regulares?

Sim por que eles se encaixam perfeitamente.

4c) Se possível, pinte a pavimentação com a ferramenta "preencher".

5) Verifique se é possível pavimentar o plano com um polígono regular presente na barra de ferramenta e cujo número de lados seja maior que 6? Justifique a sua resposta.

O heptagono não é possível pavimentar por que ele se sobrepõe aos outros.

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: **amarosja@terra.com.br**
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

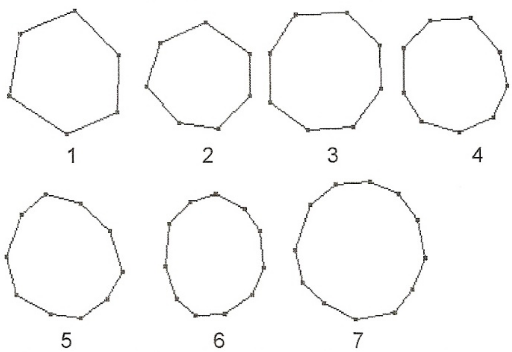
ATIVIDADE DE PESQUISA PARA A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA – PUC-ST 2006

Dedução – Atividade 1 – BLOCO III

NOME: ALUNO A

NOME: ALUNO B DATA 13/12/06.

Considerando os polígonos regulares a seguir:



a) Em quantos triângulos podemos decompor cada um dos polígonos acima?

1-4 triangulos
2-5 triangulos 7-10 triangulos
3-6 triangulos
4-7 triangulos
5-8 triangulos
6-9 triangulos

b) Em quantos triângulos podemos decompor um polígono de n lados?

n-2

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: **amarosja@terra.com.br**
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

c) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de 100 lados?

17.640

d) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados?

$(n-2) \cdot 180$

e) Qual é a medida de um ângulo interno do polígono regular de 36 lados?

170

f) Qual é a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados?

$(n-2) \times 180/N$

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: **amarosja@terra.com.br**
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

ATIVIDADE DE PESQUISA PARA A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA – PUC-SP 2006.

Dedução – Atividade 2 – BLOCO III

NOME ALUNO A

NOME ALUNO B DATA 13 /12/06

a) Qual é a soma das medidas dos ângulos externos do hexágono abaixo?

E1+E6+E5+E4+E3+E2=360

b) Obter uma fórmula para a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados.

E1+E2+E3+E4... EN=soma igual a 360.

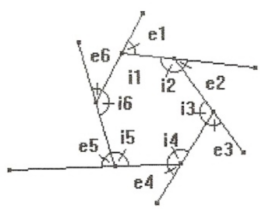
c) Se um polígono de 10 lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?

360÷10=36

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: **amarosja@terra.com.br**
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

d) Se um polígono de n lados é regular, qual é a medida do ângulo externo desse polígono?

360 ÷ N



Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: **amarosja@terra.com.br**
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

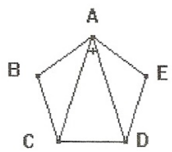
ATIVIDADE DE PESQUISA PARA A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA – PUC-SP 2006.

Dedução – Atividade 3 – BLOCO III

NOME ALUNO A

NOME: ALUNO B _ DATA 13/12/06.

Determinar a medida do ângulo $\hat{CAD}$ sabendo que a figura é um polígono regular. Descrever o processo.



5-2=3 . 180 = 540|5
040 108
0

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: **amarosja@terra.com.br**
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

ATIVIDADE DE PESQUISA PARA A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA – PUC-SP 2006.

Dedução – Atividade 4 – BLOCO III

NOME: ALUNO A

NOME: ALUNO B _ DATA 13/12/06

a) Um retângulo é um polígono regular? Escrever sua resposta.

Não. Por que ele não tem todos os lados iguais

b) Um losango é um polígono regular? Escrever sua resposta.

Não. Por que seus angulos não são iguais.

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: amarosja@terra.com.br
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

ATIVIDADE DE PESQUISA PARA A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA – PUC-SP 2006.

Dedução – Atividade 5 – BLOCO III

NOME ALUNO A

NOME: ALUNO B __DATA 13/12/06

Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se presta a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

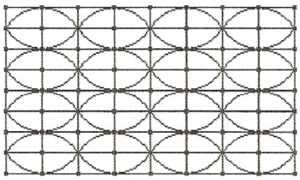


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano.

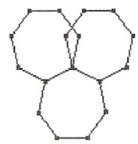
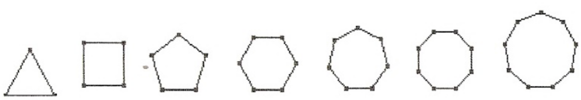


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam p plano (há falhas ou superposição)

A seguir uma relação de alguns polígonos regulares.



Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos regulares acima, sendo um deles octogonal, qual deverá ser a forma do outro polígono escolhido?

Quadrado

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: amarosja@terra.com.br
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

ATIVIDADE DE PESQUISA PARA A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA – PUC-SP 2006.

Dedução – Atividade 5 – BLOCO III

NOME ALUNO A

NOME: ALUNO B DATA 13/12/06

Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se presta a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

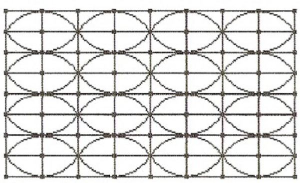


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano.

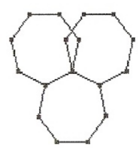
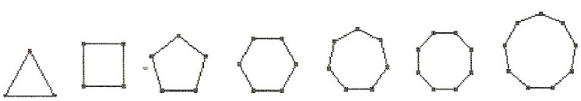


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam p plano (há falhas ou superposição)

A seguir uma relação de alguns polígonos regulares.



Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos regulares acima, sendo um deles octogonal, qual deverá ser a forma do outro polígono escolhido?

Quadrado

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: **amarosja@terra.com.br**
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

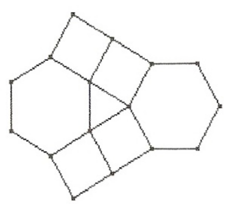
ATIVIDADE DE PESQUISA PARA A DISSERTAÇÃO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DA MATEMÁTICA – PUC-SP 2006.

Dedução – Atividade 6 – BLOCO III

NOME: ALUNO A

NOME: ALUNO B DATA 13/12/06.

Você acabou de fazer algumas pavimentações com dois tipos de polígonos regulares. Outras pavimentações podem ser feitas com dois ou mais polígonos regulares. Uma delas é a pavimentação (3-4-4-6), que está indicada a seguir. Trata-se de um triângulo eqüilátero (3 lados), de dois quadrados (4 lados) e de um hexágono regular (6 lados). Existem 8 combinações possíveis de polígonos regulares para pavimentar o plano. Tente encontrar as outras 7 pavimentações.



hexagono (4) triangulo (4)
quadrado (2) triangulo (3)
hexagono (3) quadrado (8) triangulo (4)
hexagono (4) triangulo (4)
octogono (4) quadrado (1)
triangulo (1) dodecagono (3)
triangulo (4) quadrado (1) dodecagono (4)

Amarildo Aparecido dos Santos – e-mail: **amarosja@terra.com.br**
Aluno do MESTRADO PROFISSIONAL – PUC-SP – dezembro de 2006.

SOBRE O AUTOR

AMARILDO APARECIDO DOS SANTOS - Possui DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA pela Universidade Católica de São Paulo–PUC/SP, concluído em 2016; MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA, pela mesma instituição, concluído em 2007; pós-graduação em Educação Matemática pela Universidade Santana – UNISANTANA–SP, concluído em 1998; graduação em Licenciatura Plena em Pedagogia com Habilitação em Administração Escolar pela Universidade do Grande ABC–UNIABC, concluído em 1/2003; Supervisão de Ensino, pela mesma instituição, concluído também em 2/2003; Licenciatura Plena em Matemática, pela Universidade Estadual de Maringá–UEM/PR, concluído em 1989. Atuou professor adjunto da Universidade Paulista–UNIP, de 2007 a 2017, ministrando aula para o curso de Administração. Atualmente é: professor de matemática do Colégio Dr. Clóvis Bevilácqua, para todos os cursos técnicos; professor do Ensino Fundamental, anos finais e do Médio, como PEB II efetivo na SEE–SP; professor do Colégio Objetivo, Unidade PRIME–Schoolmark desde 2018. A TESE DE DOUTORADO foi desenvolvida em Geometria Espacial para o cálculo de medida de volume de poliedros regulares convexos, com ênfase na medida de volume do dodecaedro e do icosaedro regulares. Está cadastrado como Pesquisador Doutor Colaborador na Pró–Reitoria de Pesquisa da Universidade Federal do ABC no pós doutorado, com participação em dois grupos de pesquisa: GRUPO DE PESQUISAS EM TENDÊNCIAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA–GPTEMa e Grupo de Pesquisa em Educação Especial e Inclusiva – GPEEI, ambos cadastrados no CNPQ. Publicou, como co-autor, dois capítulos do livro “A formação docente em contexto colaborativo no PIBID/UFABC”, 2013. Publicou também, como autor, o livro “MEDIDA DE VOLUME DO DODECAEDRO E DO ICOSAEDRO: novos desafios e estratégias inovadoras”, 2019, pela editora Appris.

UM ESTUDO DAS PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS VIA PAVIMENTAÇÃO

Atena
Editora
Ano 2020

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena
Editora
Ano 2020

UM ESTUDO DAS PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS VIA PAVIMENTAÇÃO

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br