Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020

Américo Junior Nunes da Silva
(Organizador)

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena
Editora
Ano 2020

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena
Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Correção: Mariane Aparecida Freitas
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizador: Américo Junior Nunes da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática [recurso eletrônico] / Organizador Américo Junior Nunes da Silva. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia.
ISBN 978-65-5706-440-5
DOI 10.22533/at.ed.405202710

1. Matemática – Pesquisa – Brasil. I. Silva, Américo Junior Nunes da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Ano 2020

APRESENTAÇÃO

Diante do cenário em que se encontra a educação brasileira, é comum a resistência à escolha da docência enquanto profissão. Os baixos salários oferecidos, as péssimas condições de trabalho, a falta de materiais diversos, o desestímulo dos estudantes e a falta de apoio familiar são alguns dos motivos que inibem a escolha por essa profissão. Os reflexos dessa realidade são percebidos pela baixa procura por alguns cursos de licenciatura no país, como por exemplo, o curso de Matemática.

Para além do que apontamos, a formação de professores que ensinam Matemática vem sofrendo, ao longo dos últimos anos, inúmeras críticas acerca das limitações apresentadas para a constituição de professores. A forma como muitos cursos se organizam curricularmente, se olharmos para algumas licenciaturas, impossibilita experiências de formação que aproximem o futuro professor das diversas e plurais realidades escolares. Somada a essas limitações está o descuido com a formação de professores reflexivos e pesquisadores.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um "novo normal"; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro "***Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática***", nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

CALIBRATION OF LOCAL VOLATILITY SURFACES WITH UNCERTAIN ASSET PRICE: AN ENKF-ENKF APPROACH

Data de aceite: 01/10/2020

Xu Yang
Universidade Federal de Alagoas

ABSTRACT: In the problem of calibrating local volatility surface, the importance of considering the uncertainty ofasset prices in the local volatility was firstly proposed in the work of Albani, et al (2017). The authors generalizedthe local volatility model by assuming that the asset prices are not certain, but not far away from the mean of theprices of the day. By applying a two-stage model, which is to calibrate the local volatility first with a given assetprice, then to correct the asset price with the estimated local volatility, and so on so forth, a better local volatilityand asset price can be obtained in the end of the algorithm. In both stages, they used Tikhonov regularizationmodel. However, in this work, we propose an EnKF-EnKF model to calibrate the local volatility model withuncertainty asset prices. The results can be compared with the Tikhonov type of models.
KEYWORDS: Local volatility. Asset price. Ensemble Kalman filter. Tikhonov regularization.

INTRODUCTION

In 1994, Dupire (1994) proposed the use of a *local volatility* model σ (t,S_t) that depends on time andthe spot priceSt, which are diffuses with risk-neutral drift μ tand local volatility σ (t,S_t) according to the equation:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(t,S_t)dZ.$$

Then Dupire's equation shows that the European vanilla option priceC (τ,K) at time twritten on thestock S_t, with maturity T=τ and strike K satisfies

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2(\tau,K)K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - bK\frac{\partial C}{\partial K}, \quad \tau > 0, K \geq 0, \tag{1}$$

with initial and boundary conditions (for calls) given by

$$\begin{aligned} C(\tau=0,K) &= (S_0-K)^+, \\ \lim_{K\to\infty} C(\tau,K) &= 0, \\ \lim_{K\to 0} C(\tau,K) &= S_0. \end{aligned} \tag{2}$$

The *forward* problem is to solve for the solution of this partial differential equation satisfying the initialand boundary conditions. However, here we are interested in finding the volatility surface, which is σ (τ,K), such that the solution of this equation is consistent with the market options prices. This kind of problem is usually called *inverse problem*. For results of calibrating local volatility surface, see Eggerand Engl (2005) and references therein.

Note that, if the parameter S0 is given, we then apply a standard transformation changing the in-dependent *variable* K to the so-called *log moneyness variabley* = ln(K/S0). This is followed by chan-ging the dependent variables of the forward and *inverse problems* tou (τ,y) = C (τ,S0exp(y))/S0 and $a(\tau,y)=\frac{1}{2}\sigma^2(\tau,K)$ (we denotea (τ,y) as local variance), respectively. We obtain the parabolic PDE with coefficients

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau}+a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+b\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \tau>0, y\in\Re, \tag{3}$$

subject to the side conditions

$$\begin{aligned} u(\tau=0,y) &= (1-\exp(y))^+, \\ \lim_{y\to\infty} u(\tau,y) &= 0, \\ \lim_{y\to-\infty} u(\tau,y) &= 1. \end{aligned}$$

We can write the above problem as

$$P\mathscr{U}(a)=d, \tag{4}$$

with the project matrix P (we will explain later), linear differential operator U depending ona and withthe right hand side d = d (S_0) as data we can observe. Thus, the forward problem involves finding u satisfying this parabolic linear differential problem for a givenlocal *variance surface* a and priceS_0.To find a numerical solution for Equation 4, we follow the same method of descritization of the partial differential equation (see Albani, et. al. (2017).

On the other hand, the uncertainty of the asset prices is also discussed in Albani, et. al. (2017) and Albani, Ascher and Zubelli (2017). In both of the works, after the estimation of the volatility surface,the asset prices shall be adjusted, and therefore, the estimated local volatility can be improved in the nextstep.

The ensemble Kalman filter (EnKF) approach (see Evensen(2003)) applies Monte Carlo approxima-tions in order to obtain cheap estimates for the error covariance matrices that appear in the Kalman filter.The distribution of the system state is represented using a collection of state vectors, called an *ensemble*,and covariance matrices are replaced by the sample covariance computed from the ensemble. In Iglesias,Law and Stuart (2013), it is suggested that EnKF can be applied to solve inverse problems of findingxgiven observations of the form

$$y=\mathscr{G}(x)+\eta,$$

where $\mathscr{G}$: X→Yis the forward operator mapping the unknownxto the observation space. Here η isassumed to be a Gaussian noise. In our context, the observations are the option *prices* d, the unknownsare the local variance (volatility) surface and $\mathscr{G}$ corresponds to $P\mathcal{U}$. Note that in our circumstances, theforward operator $P\mathcal{U}$ is non-linear. However, with the same idea as Iglesias, Law and Stuart (2013),we can take the advantage of the state augmentation approach to make the model to be linear. Once themodel is transformed to be linear, a link can be built between the EnKF and the regularized least-squares problems. Moreover, with the help of Johns and Mandel (2008) and Hoel, Law and Tempone (2016), wepropose an EnKF-EnKF model to deal with the calibration of local volatility surface with uncertain asset prices.

The problem of finding a volatility surface that explains the data is often significantly under-constrainedin practice, as is discussed in Albani, et. al. (2017). Examples are presented to show that using only realdata to calibrate local volatilities is much more efficient and accurate. Therefore, in the Equation 4, wehave a matrix *P*, which projects the data points from the regular mesh to the real data mesh. Here, we fol-low this method and will only use real data all the time. Data completion techniques are not considered here.

Outline of the work. In the next section, we propose an EnKF-EnKF model to deal with estimating S_0, as well as the local volatility surface. In the section of numerical examples, we use the options pricesof Standard & Poor index to assess our model. Some remarks are presented in conclusion section.

AN ENKF-ENKF MODEL FOR THE UNCERTAINTY IN THE ASSET PRICE

For the completeness of this work, we briefly introduce the EnKF method here. For the details ofusing EnKF model to estimate the local volatility surface and the model of estimating the uncertain asset price, see Albani, et. al. (2017). Let a be the local variance surface. We define the augmented statevector $\hat{a}=\Psi(a)$as a function of a given by

$$\hat{a} = \Psi(a) = \begin{pmatrix} a \\ P\mathscr{U}(a) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

together with the artificial dynamics (or prediction) $\hat{a}^{(n+1)}=\Psi(a^{(n)})$. Let H be a matrix given by H =(0I). So we have H $\hat{a}^{(n+1)} = P\mathcal{U}$ (a) =d(S_0), where *d* is the vector of observations. Let $L\tau$ and Ly be the discrete derivative operators for a with respect to τ and y, respectively. For the state augmentation approach , we modify them as

$$L_\tau \leftarrow \begin{pmatrix} L_\tau & 0 \end{pmatrix}, \; L_y \leftarrow \begin{pmatrix} L_y & 0 \end{pmatrix}.$$

For the initial state, we set

$$\hat{a}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ P\mathscr{U}(a_0) \end{pmatrix}$$

The Tikhonov type of calibration of local variance problem becomes

$$\begin{aligned} \min_{\hat{a}} \phi_R(\hat{a}) \quad &= \quad \|d - H\hat{a}\|^2_{\Gamma_a^{-1}} + \|\hat{a} - \hat{a}_0\|^2_{D^{-1}} + \\ & \quad\quad \|L_\tau \hat{a}_0 - L_\tau \hat{a}\|^2_{D_\tau^{-1}} + \|L_y \hat{a}_0 - L_y \hat{a}\|^2_{D_y^{-1}}, \end{aligned} \tag{6}$$

where Γ,D,Dy and $D\tau$ are positive definite matrix matrices. Since (6) is just an enlarged weighted least squares problem, it also corresponds to a Kalman smoother/filter process, and we subsequently build anapproximation for it as in Johns and Mandel (2008) by defining and solving a “three-stage” EnKF.

Now we introduce the part of estimating the uncertain asset price. The data misfit part is unchanged (only multiply by S), which is given by

$$\psi(S) = \|C - P\mathscr{U}(a) \cdot S\|_{\Gamma_S^{-1}}, \qquad (7)$$

where Cis the original option prices and Γ_S is a symmetric definite matrix. We specify regularization operator for S as well. Then the optimization problem becomes:

$$\min_S \psi(S) \quad = \quad \|C - P\mathscr{U}(a) \cdot S\|^2_{\Gamma_S^{-1}} + \|S - \widehat{S}_0\|^2_{D_S^{-1}} \qquad (8)$$

Note that this is a linear least squares problem since $P\mathcal{U}$ (a) is known, then the problem 8 is simplified as

$$\min_S \psi(S) \quad = \quad \|C - HS\|^2_{\Gamma_S^{-1}} + \|S - \widehat{S}_0\|^2_{D_S^{-1}} \qquad (9)$$

We solve this problem by using EnKF model for only one iteration. Therefore, we can omit the prediction step and only do analysis step. The algorithms are given below:

Note that, in Algorithm 3, the roles of K and N are to control the maximum steps of iterations. We can add some convergence test to end in less steps.

NUMERICAL RESULTS

In this section, we test our model using options prices of Standard & Poor (SPX) index. The datawere collected on 19-Jun-2015 and contain prices for 9 different maturities ranging from 1 day to 2 years.The parameters are given in Table 1. Note that the optimal spot price in the table refers to the optimized spot price using the method described in the last section.

Algorithm 1 EnKF-type algorithm

Draw J samples of $a^{(0)}$
for $n = 0, 1, 2, \ldots,$ **do**
  Prediction step:
  for $j = 1, \ldots, J$ **do**
    Set $\hat{a}^{(n+1,j)} = \Psi(a^{(n,j)}) = \begin{pmatrix} a^{(n,j)} \\ P\mathscr{U}(a^{(n,j)}) \end{pmatrix}.$
  end for
  Define sample mean and covariance matrix as
  $\bar{a}^{(n+1)} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \hat{a}^{(n+1,j)}$
  $D_{n+1} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} \hat{a}^{(n+1,j)}(\hat{a}^{(n+1,j)})^T - \bar{a}^{(n+1)}(\bar{a}^{(n+1)})^T$
  Analysis step (three-stage Ensemble Kalman filter):
  $A_{n+1}^{(1)} = D_{n+1}H^T(HD_{n+1}H^T + \Gamma_a)^{-1}$
  $B_{n+1}^{(1)} = (I - A_{n+1}^{(1)}H)D_{n+1}$
  $A_{n+1}^{(2)} = B_{n+1}^{(1)}L_\tau^T(L_\tau B_{n+1}^{(1)}L_\tau^T + D_\tau)^{-1}$
  $B_{n+1}^{(2)} = (I - A_{n+1}^{(2)}L_\tau)B_{n+1}^{(1)}$
  $A_{n+1}^{(3)} = B_{n+1}^{(2)}L_y^T(L_y B_{n+1}^{(2)}L_y^T + D_y)^{-1}$
  $B_{n+1}^{(3)} = (I - A_{n+1}^{(3)}L_y)B_{n+1}^{(2)}$
  for $j = 1, \ldots, J$ **do**
    Update $\bar{a}^{(n+1,j)} = \hat{a}^{(n+1,j)} + B_{n+1}^{(3)}\Big(H^T\Gamma_a^{-1}(d_{n+1}^{(j)} - H\hat{a}_h^{(n+1,j)}) +$
    $L_\tau^T D_\tau^{-1}(r_\tau^{(n+1,j)} - L_\tau\hat{a}^{(n+1,j)}) + L_y^T D_y^{-1}(r_y^{(n+1,j)} - L_y\hat{a}^{(n+1,j)})\Big)$
  end for
  for $j = 1, \ldots, J$ **do**
    $a^{(n+1,j)} = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \bar{a}^{(n+1,j)}.$
  end for
  Convergence test:
  Compute $a^{(n+1)} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} a^{(n+1,j)}$ and check for convergence.
end for
if The algorithm stops at $n = N$ **then**
  return $a^{(N)}$
end if

Algorithm 2 EnKF for updating asset price

$k = 0$
Draw $\{S_k^{(m)}\}_{m=1}^{M}$, which are M independent copies of S_k
Define sample mean and covariance matrix as
$\bar{S}_k = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} S_k^{(m)}$, $D_k = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}(S_k^{(m)})^2 - \bar{S}_k^2$.
for $m = 1, 2, \ldots, M$ **do**
  Analysis step:
  Calculate Kalman gain: $A_k = D_k H^T(HD_kH^T + \Gamma_S^{(k)})^{-1}$
  Calculate $\tilde{S}_k^{(m)} = S_k^{(m)} + A_k(C_k - HS_k^{(m)})$, where $C_k = C + \eta_k$, $\eta_k \sim \mathcal{N}(0, \Gamma_S^{(k)})$;
end for
return $S_{k+1} = \frac{1}{M}\sum_m^M \tilde{S}_k^{(m)}$

Algorithm 3 EnKF–EnKF algorithm with uncertain asset price

$S_1 = \hat{S}_0$
D_0 is an initial covariance matrix
$a^{(0)}$ is an initial local variance
for $k = 1, 2, \ldots, K$ **do**
    Draw $\{a^{(0,j)}\}_{j=1}^{J}$, which are J independent copies of $a^{(0)}$;
    Compute $P\mathscr{U}(a^{(0,j)}),\ j = 1, \ldots, J$, thus defining $\{\hat{a}^{(1,j)}\}_{j=1}^{J}$.
    Normalize data $d_k = C/S_k$
    for $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ **do** ▷ See Algorithm 1
        Algorithm 1
        Prediction step
        Analysis step
        Convergence test
    end for
    $a^{(N,k)}$ is the local variance
    do Algorithm 2 ▷ See Algorithm 2
    The updated price is $S_{k+1} = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} S_k^{(m)}$
    Update y and P:
end for
return $a^{(N,K)}, S_K$

S_0 initial spot price	2109.99
S_0 optimal spot price	2095.6
r interest rate	0.25%
the maximum maturity	2.5
Minimum y	-4.5
Maximum y	1.5
$\Delta\tau$	0.05
Δy	0.1
initial a_0	$0.14^2/2$
J	2000
K	10
M	50
N	8
$\Gamma_a = \Gamma_S$	$2 \times 10^{-4} I$
$D = D_\tau = D_y$	$1 \times 10^{-3} I$
D_S	$1 \times 10^{-5} I$

Tabela 1:Parameters for the equity data examples

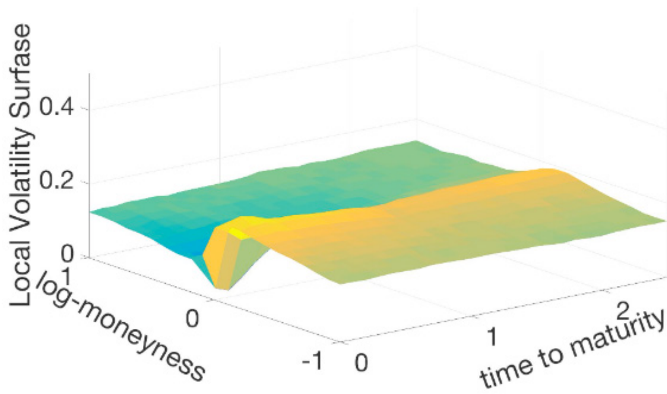
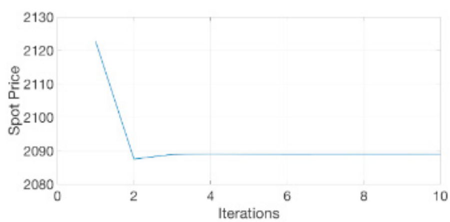


Figura 1: Local volatility surface estimated from EnKF-EnKF algorithm



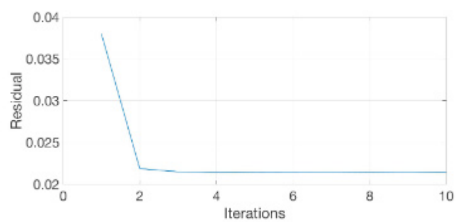


Figura 1: Local volatility surface estimated from EnKF-EnKF algorithm

Figura 2: The left figure is the estimated spot prices and the right figure is the residual of every iteration.

From Figure 2, we can see that the spot prices converge to 2095.6 and the residual converges to0.0214. Both of them converge very fast.

CONCLUSIONS

In this work, we present an EnKF-EnKF algorithm for the calibration of local volatility surface withuncertain spot prices. In this model, we make use of multilevel EnKF algorithm and generalize the firstlevel of EnKF model into a ‘three-stage’ EnKF model. From the numerical results, we can see that thealgorithm converges very fast and can achieve a small residual. The spot price is adjusted from 2109.99to 2095.6, which can improve the local volatility surface significantly.

REFERÊNCIAS

ALBANI, V., et al. Data driven recovery of local volatility surfaces.**Inverse Problems** & **Imaging**,11(5), 2017.

ALBANI, V.; ASCHER, U.; ZUBELLI, J. Local volatility models in commodity markets and onlinecalibration.**Journal of Computational Finance**, 2017.

DUPIRE, B. Pricing with a smile.**Risk**, 7(1), p.18-20, 1994.

EGGER, H.; ENGL, H. Regularization Applied to the Inverse Problem of Option Pricing: Convergenceanalysis and Rates,**Inverse Problems**, 21, p. 1027-1045, 2005

EVENSEN, G. The ensemble Kalman filter: Theoretical formulation and practical implementation.**Ocean Dynamics**, 53(4), pp.343-367, 2003.

HOEL, H., LAW, K.J. and TEMPONE, R., Multilevel ensemble Kalman filtering.**SIAM Journal onNumerical Analysis**, 54(3), pp.1813-1839, 2016.I

GLESIAS, M.; LAW, K.; STUART, A.; Ensemble Kalman methods for inverse problems,**InverseProblems**, 29, pp 045001, 2013.

JOHNS, C.; MANDEL, J., A two-stage ensemble Kalman filter for smooth data assimilation,**Environmental and Ecological Statistics**, 15(1), pp 101-110, 2008.

CAPÍTULO 2

A MATEMÁTICA AUXILIANDO NO COMBATE A OBESIDADE INFANTIL

Data de aceite: 01/10/2020

Nilton Rosini
Departamento de Análises Clínicas, CCS, UFSC, Florianópolis-SC.

RESUMO: Demonstrar a importância da matemática como ferramenta auxiliar no combate a obesidade infantil. Estudo transversal com 1813 estudantes, idade entre cinco e 15 anos, matriculados na rede pública de Botuverá, Guabiruba e Major Gercino. Aferidos peso, altura e circunferência da cintura (CC). Calculado o índice de massa corporal (IMC) e percentual do IMC (%IMC). Matemática aplicada: escalas, relação de proporção direta, expressões matemáticas, estatística e funções. Observada CC aumentada em 530 (29,2%) e IMC em 458 (25,3%) dos estudantes. Nas prevalências, o IMC em Major Gercino (30,3%), Botuverá (25,3%) e Guabiruba (24,1%), (p<0,0001 entre o primeiro e os demais) e semelhante para a CC aumentada. No %IMC, média de 61,2 ±28,8 (Botuverá), 61,0 ±29,7 (Major Gercino) e 58,0 ±29,2 (Guabiruba). Os resultados revelam a necessidade de medidas no combate e prevenção à obesidade infantil na região. A matemática contribuiu para identificar a obesidade e permitiu a análise dos grupos.
PALAVRAS-CHAVE: Relação de proporção direta, Análise estatística, Circunferência da cintura, Obesidade, Infantil.

USE OF MATHEMATICS TO FIGHT CHILDHOOD OBESITY

ABSTRACT: The aim of the current study is to show the important role played by Mathematics as auxiliary tool to fight childhood obesity. Cross-sectional study conducted with 1,813 students (in the age group 5-15 years) enrolled in the public-school network of Botuverá, Guabiruba and Major Gercino counties. Participants' weight, height and waist circumference (WC) were measured. Body mass index (BMI) and BMI percentage (BMI %) were calculated. Applied mathematics: scales, direct proportion ratio, mathematical expressions, statistics and functions. Increased WC and BMI were observed in 530 (29.2%) and 458 (25.3%) students, respectively. Increased BMI prevailed in Major Gercino (30.3%), Botuverá (25.3%) and Guabiruba (24.1%) counties, (p <0.0001 between the first and the other counties); WC recorded similar results. Mean BMI % was 61.2 ± 28.8 in Botuverá; 61.0 ± 29.7, in Major Gercino; and 58.0 ± 29.2, in Guabiruba counties. Results have indicated the need of taking measures to fight and prevent childhood obesity in the region. Mathematics has helped identifying obesity cases and enabled analyzing the experimental groups.
KEYWORDS: Direct proportion ratio, Statistical analysis, Waist circumference, Obesity, Children.

1 I INTRODUÇÃO

O Projeto Diretrizes descreve obesidade como sendo acúmulo excessivo de gordura corporal no indivíduo. É fator determinante de maior morbidade e menor longevidade estando fortemente associada à hipertensão, diabetes *mellitus*, dislipidemias e síndrome metabólica[6]. Na infância e adolescência, a obesidade aliada ao sobrepeso, vem assumindo proporções epidêmicas mundiais atingindo a taxas de 10 a 40% nos países desenvolvidos. A prevalência mundial atinge a 155 milhões (sobrepeso) e entre 30 a 40 milhões (obesidade). Nos países da América Latina e do Caribe a obesidade infantil chega a 8,2%[8], enquanto no Brasil 21,7%, meninos e 19,4%, meninas[5].

O diagnóstico pode ser realizado pelo índice de massa corporal (IMC) – sobrepeso e obesidade, no entanto a circunferência da cintura (CC) que reflete a obesidade abdominal, da mesma forma é utilizada para caracterizar sua presença[9].

O estudo avaliou a obesidade em estudantes da rede pública de Botuverá, Guabiruba e Major Gercino, utilizando a matemática como ferramenta para determinação dos valores individuais por meio do IMC e CC, bem como realizou a análise estatística dos diferentes grupos.

2 | MATERIAL E MÉTODOS

2.1 População de estudo

Estudo transversal com estudantes regularmente matriculados na rede pública dos municípios de Botuverá, Guabiruba e Major Gercino, cuja participação foi voluntária.

2.2 Metodologia analítica

Aferidos o peso (P), em kg e a altura (ALT), em metros (m), com equipamento Welmy constituído de balança com capacidade para até 200 kg e escala de 100g e estadiômetro de capacidade até 2,0 m e escala de 0,5 cm. O IMC foi estimado segundo a equação: IMC = $P(kg)/ALT(m^2)$[1]. A partir do IMC foi obtido o percentual do índice de massa corporal (%IMC) para classificação do estudante (baixo peso, ideal, sobrepeso e obesidade).

A medida da CC, em centímetro (cm), foi realizada com fita métrica flexível e inelástica, no ponto médio entre a última costela e a borda superior da crista ilíaca[9].

2.3 Cálculos estatísticos

Para a análise estatística foi verificada a prevalência de estudantes de acordo com a classificação do %IMC, além da CC aumentada e aplicado o teste Qui-Quadrado ($\chi 2$) (compara as proporções desses acontecimentos em diferentes amostras), sendo significativo quando $p < 0,05$ (a probabilidade menor do que 5% como o valor limite considera que um efeito é real, portanto não decorrente do acaso e dito “com significância estatística”). Utilizada *Odds Ratio* (OR) do inglês razão de chances, para calcular o risco relativo de um evento vir a acontecer na presença de determinado fator. Utiliza tabela 2 x 2 para o cálculo e matematicamente é a razão dos produtos cruzados.

Exemplo OR:

	DOENÇA (Hiperglicemia + dislip : ↑n-HDL-c e ↓HDL-c)		
Ter CC	sim	não	total
aumentada	42 (a)	506 (b)	548 (a+b)
normal	28 (c)	1237 (d)	1265(c+d)
	70 (a+c)	1743(b+d)	1813 (N total)

Dislip: dislipidemia; HDL-c: lipoproteína de alto peso molecular-colesterol; n-HD-c: não-HDL-c:

lipoproteína de baixa densidade-colesterol (LDL-c) + lipoproteina de muito baixa densidade-

colesterol (VLDL-c) – HDL-c. CC: circunferência da cintura.

OR = ad/bc (produtos cruzados), na real é razão entre: a/c x b/d

$$\boxed{OR = \frac{42 \times 1237}{28 \times 506} = \frac{51954}{14168} = 3{,}7 \text{ vezes}}$$

Interpretação: Crianças com CC aumentada tem 3,7 x chances de apresentarem: Hiperglicemia + Dislipidemia.

2.4 Valores de referência

Na infância e adolescência a utilização do IMC para sobrepeso e obesidade, além de peso e altura, necessita a observação de sexo e idade. O valor obtido é transportado para gráficos cujas curvas refletem a distribuição desse índice em uma população de referência[4]. Nos gráficos obtêm-se o %IMC, portanto a relação entre IMC e idade, que expressa a fase de desenvolvimento do indivíduo e indica a posição **relativa** do IMC entre crianças do mesmo sexo e idade (Figuras 1 e 2). No estudo foi utilizada calculadora para determinação do %IMC e o valor obtido classifica o individuo em: < %5 = baixo peso, entre %5 e < %85 = ideal, entre %85 e < %95 = sobrepeso e > %95 = obesidade[2].

Para a CC foi utilizada a tabela de Taylor et al[4] que considera sexo e idade (Tabela 1).

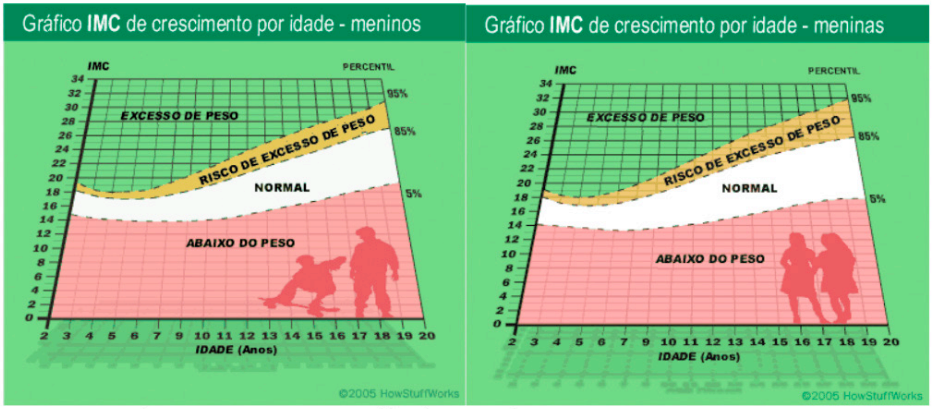


Figura 1 e 2 – Curvas para determinar o %IMC e classificar crianças e adolescentes com baixo peso, ideal, sobrepeso e obesidade.

Fonte: CDC[2].

Idade (anos)	Masculino (cm)*	Feminino (cm)
5	58,0	56,3
6	60,4	59,2
7	62,9	62,0
8	65,3	64,7
9	67,7	67,3
10	70,1	69,6
11	72,4	71,8
12	74,7	73,8
13	76,9	75,6
14	79,0	77,0
15	81,1	78,3

Tabela 1 – Linha de corte (*cutoffs*) para identificar CC aumentada em crianças e adolescentes.

Fonte: Taylor *et al*[8] *cm, centímetro.

2.5 Matemática aplicada

Escalas: kg (quilograma: massa), m (metro: altura), cm (centímetro: circunferência da cintura)

Relação de proporção direta: prevalência (porcentagem ou razão centesimal).

Expressões matemáticas: Cálculo do **IMC** (IMC = P/ALT^2); **Teste *Qui-quadrado*** $\chi 2 = \Sigma [(o-e)^2/e]$, onde o = freqüência observada para classe; e = freqüência esperada para classe. **OR = ad/bc,** razão de chances.

Estatística: comparação de grupos (prevalência): teste *Qui-quadrado*; *Odds Ratio* (razão de chances).

Funções: Simples (percentil do IMC - %IMC, para cada faixa etária e sexo).

“Elaboração de tabelas”.

3 | RESULTADOS

Participaram do estudo 1813 estudantes (53,5% do sexo feminino, média de idade de 10,1 ± 2,7 anos). No município de Botuverá foram avaliados 399 alunos (79,6% dos estudantes matriculados), Guabiruba 1153 (50,2%) e Major Gercino 261 (70,4%).

A CC aumentada esteve presente em 530 (29,2%), sendo 226 (26,8%) e 304 (31,3%), meninos e meninas, respectivamente, enquanto o IMC (sobrepeso + obesidade) em 458 (25,3%), com 231(27,4%) meninos e 227 (23,4%) meninas (não demonstrado).

A prevalência de CC aumentada estratificada segundo os municípios, foi de 30,2% em Guabiruba e Major Gercino, enquanto 25,8% em Botuverá. No IMC, Major Gercino (30,3%), seguido de Botuverá (25,3%) e Guabiruba (24,1%), p < 0,0001 entre o primeiro e os demais (Tabela 2).

Em relação ao %IMC, a média de maior valor foi do município de Botuverá (61,2 ±28,8), Major Gercino (61,0 ±29,7) seguido de Guabiruba (58,0 ±29,2), valores considerados ideais (não demonstrado).

Parâmetros	Botuverá (A)	Guabiruba (B)	Major Gercino(C)	p (A e B)	p (A e C)	p (B e C)
	n (%)	*n* (%)	*n* (%)			
CC	103 (25,8)	348 (30,2)	79 (30,2)	0,113	0,245	0,978
Sobrepeso + obesidade	101 (25,3)*	278 (24,1)†	79 (30,3)*†	0,679	<0,0001*	<0,0001†

Tabela 2 – Prevalência de estudantes de Botuverá, Guabiruba e Major Gercino com sobrepeso + obesidade e circunferência da cintura elevada

*p < 0,0001; †p < 0,0001 na comparação entre estudantes de Botuverá, Guabiruba e Major Gercino (Teste Qui-quadrado); CC: circunferência da cintura.

Fonte: autor, 2015.

4 | DISCUSSÃO

A prevalência da obesidade é crescente na população (infantil e adulta) brasileira e as projeções dos resultados obtidas das últimas três décadas tendem a um comportamento epidêmico. A relação entre a obesidade infantil e sua persistência até a vida adulta, promove complicações metabólicas que poderão ser ainda mais adversas nessa última fase [4].

O percentual de 25,3% de sobrepeso + obesidade, é superior ao observado em Florianópolis (23,2%)[3] e estratificados segundo o sexo a prevalência no estudo esta acima ao nacional (27,4% *versus* 21,4%, meninos e 23,4% *versus* 19,4, meninas) revelando uma preocupação à saúde pública na região.

Em crianças e adolescentes a visualização de sobrepeso e obesidade a partir do IMC é mais arbitrária em relação aos adultos e a determinação do limite de normalidade estabelecido por curvas de percentil do índice de massa corporal, torna-se mais complexa.

A circunferência abdominal é uma medida considerada sensível e específica do acúmulo de gordura na parte superior do corpo. Parâmetro que pode ser utilizado de forma isolada para determinação do risco de alterações metabólicas em crianças e adolescentes[1]. De fato, estudo realizado na região identificou crianças com CC aumentada associada a hiperglicemia e dislipidemias concomitantemente, com *Odds Ratio* (do inglês, razão de chances, que significa, nesse particular, a possibilidade de vir a ocorrer quando a CC está aumentada) em 11,5 vezes em relação as crianças com a medida da CC no valor recomendado [7]. Ressaltando ainda que a prevalência de 31,3% de CC aumentada nas meninas, superior ao IMC (23,4%), sugere ser essa uma medida mais sensível para identificar estudantes do sexo feminino com valor aumentado.

5 I CONCLUSÕES

Os resultados encontrados revelam à importância de implantação de medidas intervencionistas no combate e prevenção a obesidade na população infantil da região, seja utilizando o IMC ou a CC, para sua classificação. Por outro lado a CC sugere ser uma medida mais sensível para o sexo feminino.

Não menos importante surge como ferramenta auxiliar os conhecimentos matemáticos que além de identificar o indivíduo como portador de obesidade, permite o acompanhamento terapêutico (redução do perímetro da CC ou %IMC) e realizar estudos epidemiológicos de grupos ou regiões para adoção de medidas de saúde pública.

REFERÊNCIAS

1. ALVAREZ, B.R.; PAVAN, A.L. **Altura e comprimentos**. In: Petroski EL., Antropometria: técnicas e padronizações. Ed. Pallotti, Porto Alegre: p. 29-51, 2003.

2. CDC - *Center for Disease Conttrol and Prevention.* Disponível em: **http://nccd.cdc.gov/dnpabmi**.

3. de Assis MA, et al. **Central adiposity in brazilian school aged 7 – 10 years**. Br JNutr, v.97, p.799-05, 2007.

4. PELEGRINI A, et al. **Sobrepeso e obesidade em escolares brasileiros de sete a a nove anos: dados do Projeto Esporte Brasil**. Rev Paul Pediatr, v. 28, n. 3, p. 290-295, 2010.

5. POF/IBGE - Pesquisa de Orçamento Familiar/Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: http://www.ibcbrasil.com. Acessado em 06/2015.

6. PROJETO DIRETRIZES. **Obesidade: Diagnóstico e Tratamento da Criança e Adolescente**. AMB & CFF; 2005. Disponível em: http://www.projetodiretrizes.org.br/4_volume. Acessado em 06/2015.

7. ROSINI N, et al. **Simultaneous prediction of hyperglycemia and dyslipidemia in school children in Santa Catarina State, Brazil based on waist circumference measurement.** Clin Biochem, v. 46, p. 1837-41, 2013..

8. STANDING COMMITTEE ON NUTRITION. **Overweight and obesity: a new nutrition emergency?** United Nations: n.29, 2005. Disponível em: http://www.unsystem.org/scn/ Publication. Acessado em 06/2015.

9. TAYLOR, R.W.; et al. **Evaluation of waist circumference, waist-to-hip ratio, and the conicity index as screening tools for high trung fat mass, as measured by dual energy X ray absoptiometry, in children aged 3-19 y**. Am J Clin Nutr, v. 72, p. 490-95, 2000.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DO TEOREMA DE BAIRE

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 12/08/2020

Michele Martins Lopes
Universidade Estadual de Campinas
Campinas – SP
http://lattes.cnpq.br/7572795941731427

Angela Leite Moreno
Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Alfenas – MG
http://lattes.cnpq.br/5106302431642025

RESUMO: Este capítulo se dedica a apresentar os resultados obtidos em um projeto de Iniciação Científica de Análise Funcional. Neste projeto pôde-se realizar uma aplicação. Primeiramente, foram definidos: Espaço de Banach, Espaço Dual, Conjunto Nunca Denso, Conjunto de 1ª Categoria e Conjunto de 2ª Categoria. Com isso, foi possível enunciar e demonstrar o Teorema de Baire juntamente com seus corolários, que serviram como base para os dois Teoremas de Banach-Steinhauss, sendo o segundo a recíproca do primeiro, com o acréscimo da hipótese de X ser um espaço de Banach. Estes dois teoremas, por sua vez, são fundamentais para a demonstração do Princípio da Limitação Uniforme aqui apresentada. A partir disso, foi realizada uma aplicação que consta da seguinte informação: em um Espaço de Banach X, donde se tem que uma função f pertence ao seu Espaço Dual (X^*), se a imagem direta de um conjunto, dada por f (B), for um conjunto limitado, então também será limitado.

PALAVRAS-CHAVE: Análise Matemática, Espaços de Banach, Princípio da Limitação Uniforme, Teorema de Banach-Steinhauss.

APPLICATION OF THE BAIRE THEOREM

ABSTRACT: This chapter is dedicated to presenting the results obtained in a Functional Analysis Scientific Initiation project. In this project it was possible to make an application. First, the following were defined: Banach Space, Dual Space, Never Dense Set, 1st Category Set and 2nd Category Set. With that, it was possible to enunciate and demonstrate Baire's Theorem together with its corollaries, which served as the basis for the two Banach-Steinhauss Theorems, the second being the reciprocal of the first, with the addition of the hypothesis that X is a Banach space. These two theorems, in turn, are fundamental to the demonstration of the Uniform Limitation Principle presented here. From this, an application was made that consists of the following information: in a Banach X Space, where a function f belongs to its Dual Space (X^*), if the direct image of a set, given by f (B), is a limited set, then will also be limited.

KEYWORDS: Mathematical Analysis, Banach Spaces, Uniform Limitation Principle, Banach-Steinhauss Theorem.

1 I INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta alguns resultados importantes de Análise Funcional, com foco nas aplicações do Teorema de Baire.

Para a sua realização foram utilizadas as seguintes referências: Huston e Pym (1980), Kreyszig (1978) e Munkres (2000). Primeiramente seguem algumas definições e resultados necessários, incluindo o Teorema de Baire, para que possamos utilizá-lo para demonstrar o Princípio da Limitação Uniforme, e encerramos com uma aplicação.

2 | PRELIMINARES

Para começarmos as discussões, a primeira indagação é sobre o que é um Espaço de Banach? Um Espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo em relação a métrica induzida pela norma. Uma das propriedades mais interessantes de espaços vetoriais normados é que qualquer um destes pode ser imerso em um espaço de Banach.

Outro conceito importante é o de Espaço Dual, denotado por $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$, sendo este constituído de funções $f: X \to \mathbb{K}$ contínuas e lineares, em que X é um espaço vetorial normado sobre o corpo $\mathbb{K}$. Ressaltamos que o espaço $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ é um Espaço de Banach geralmente denotado por X^*.

Além destes conceitos, também precisamos compreender quando um conjunto é Nunca Denso, conceito essencial para definir conjuntos de 1ª e 2ª categoria.

Definição (Conjunto Nunca Denso): Suponhamos que (X, ρ) seja um espaço métrico. Um subconjunto *A* de *X* é dito nunca denso quando $int(\overline{A}) = \emptyset$

Observação: Notemos que ao mudarmos o espaço em que está, *ele* pode permanecer ou não nunca denso.

Observação: Se *A* for nunca denso, então $\bar{A}$ também será.
De fato, se *A* for nunca denso, temos que $int(\bar{A}) = \emptyset$.
Se *A* for fechado, então $A = \bar{A}$. Dessa forma,

$$int(\bar{A}) = int(\bar{A}) = \emptyset.$$

■

Logo, $\bar{A}$ é nunca denso.

Observação: Se *A* for nunca denso e *B* $\subset$ *A* então *B* também será nunca denso.
De fato, se *A* é nunca denso, ou seja, que $int(\bar{A}) = \emptyset$ e que *B* $\subset$ *A,* então

$$int(\bar{B}) \subset int(\bar{B}) = \emptyset.$$

Assim, $int(\bar{B}) = \emptyset$. Logo, *B* é nunca denso.

Outra caracterização de conjuntos nunca densos pode ser dada através do seguinte resultado:

Teorema 1: Suponhamos que (*X*, *p*) seja um espaço métrico compacto e que seja um subconjunto de *X*. Então *A* será nunca denso em *X* se, e somente se, $\overline{X - \bar{A}} = X$.

Demonstração: Suponhamos que (*X*, *p*) seja um espaço métrico e que $A \subset X$.

Afirmação: $X - \overline{X - \bar{A}} = int(\bar{A})$

Assim, considerando $B = \bar{A}$, provaremos que se $B \subset X$, então

$$X - \overline{X - B} = int(B).$$

De fato,

($\subset$) Podemos observar que $X - B \subset \overline{X - B}$. Assim, temos que

$$X - \overline{X - B} \subset X - (X - B) = B,$$

ou seja,

$$X - \overline{X - B} \subset B.$$

Como $\overline{X - B}$ é fechado, então $X - \overline{X - B}$ é aberto. Portanto,

$$X - \overline{X - B} \subset int(B).$$

($\supset$) Notemos que $X - B \subset X - int(B)$.

Como $X - int(B)$ é fechado, então

$$\overline{X - B} \subset X - int(B),$$

assim,

$$X - (X - int(B)) \subset X - (\overline{X - B}),$$

ou melhor,

$$int(B) \subset X - (\overline{X - B}).$$

Concluímos então que

$$X - (\overline{X - B}) = int(B),$$

ou, ainda, que

$$X - \left(\overline{X - \bar{A}}\right) = int(\bar{A}). \qquad (1)$$

Agora podemos facilmente demonstrar o que queremos.

($\Rightarrow$) Como *A* é nunca denso em *X*, então $int(\bar{A}) = \emptyset$.

Mas, pela Equação (1) temos

$$X - \left(\overline{X - \bar{A}}\right) = \emptyset.$$

Portanto,

$$X = \left(\overline{X - \bar{A}}\right).$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que $X - \left(\overline{X - \bar{A}}\right)$. Logo,

$$X - \left(\overline{X - \bar{A}}\right) = \emptyset.$$

Mas, pela Equação (1) temos

$$int(\bar{A}) = \emptyset.$$

Concluímos, então, que *A* é nunca denso em *X*.

Agora podemos apresentar as devidas definições de Conjunto de 1ª e de 2ª categoria para que seja possível demonstrar o teorema central de nosso trabalho: o Teorema de Baire.

Definição (Conjunto de 1ª Categoria): Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico e que *A* seja um subconjunto de *X*. Diremos que *A* é de 1ª Categoria em (*X,p*) quando *A* for uma união enumerável de conjuntos nunca densos.

Definição (Conjunto de 2ª Categoria): Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico e que seja um subconjunto de *X*. Diremos que *A* é de *2ª* Categoria quando não for de 1ª categoria.

Algumas das consequências imediatas dessa definição são:

- Se *A* for de *1ª* Categoria em (*X,p*) e $B \subset A$,, então *B* será de 1ª Categoria em (*X,p*).
- Se $\{A_n\}$ for uma família de conjuntos de 1ª Categoria em (*X,p*), então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ será de 1ª Categoria em (*X,p*).

3 I O TEOREMA DE BAIRE E SUAS IMPLICAÇÕES

Teorema (Teorema de Baire) Suponhamos que (*X, ρ*) seja um espaço métrico completo. Se $\{A_n\}$ for uma família de conjuntos abertos e densos de (*X, ρ*) então

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = X.$$

Demonstração: Suponhamos que (*X, ρ*) seja um espaço métrico completo, e $\{A_n\}$ uma família de conjuntos abertos e densos de (X, ρ).

Seja $x \in X$ e $r > 0$.. Devemos mostrar que

$$B(x,r) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \neq \emptyset.$$

Afirmação 1: Existe uma sequência em $\{r_n\}$ em $[0,\infty)$, com

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0,$$

e uma sequência $\{x_n\}$ em X tal que

$$B[x_{n+1}, r_{n+1}] \subset A_n \cap B(x_n, r_n)$$

para $\mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots$.

De fato, seja $x_1 = x$ e $r_1 = r.$ e . Logo $A_1 \cap B(x_1, r_1)$ é aberto e não vazio, assim existe $B[x_2, r_2]$ tal que $B[x_2, r_2] \subset A_1 \cap B(x_1, r_1)$. Assim, $A_2 \cap B(x_2, r_2)$ é aberto e não vazio, assim existe $B[x_3, r_3]$ tal que $B[x_3, r_3] \subset A_2 \cap B(x_2, r_2)$. E, assim por diante.

Afirmação 2: $\{x_n\}$ é de Cauchy em (X, ρ).

De fato, se tomarmos $j, k \geq n$ temos que

$$\rho(x_j, x_k) < 2r_n,$$

que, quando fazemos $n \to \infty$ nos leva a

$$\rho(x_j, x_k) \to 0,$$

como (X, ρ) é completo segue que

$$\rho(x_n, \mathrm{y}) \to 0,$$

para algum $\mathrm{y} \in \mathrm{X}.$

Afirmação 3: $\mathrm{y} \in B(\mathrm{x}, \mathrm{r}) \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \emptyset$.

Por construção, temos que

$$\mathrm{y} \in B(x_1, r_1) = B(\mathrm{x}, \mathrm{r}).$$

Notemos também que

$$B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B[x_{n+1}, r_{n+1}] \subset A_n \cap B(x_n, r_n)$$

e, como y está em todas as bolas, o resultado segue.

Corolário 1: Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico completo e que *A* seja um subconjunto de *X*. Se *A* for de 1ª categoria em *X*, então

$$\overline{X - A} = X$$

Demonstração: Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico completo, que *A* seja um subconjunto de *X* e que seja de 1ª categoria em *X*. Logo,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

Em que F_n é nunca denso, para $\mathrm{n} = 1,2, \ldots$ Daí,

$$X - A = X - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n).$$

Afirmação: $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X - F_n). = X.$

Notemos que $X - \overline{F_n}$ é aberto e $\overline{X - \overline{F_n}} = X,$, para $\mathrm{n} = 1, 2,3, \ldots.$, então, pelo Teorema 1, segue que

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{F_n})} = X \qquad (2)$$

mas $F_n \subset \overline{F_n}$ e, portanto,

$$X - \overline{F_n} \subset X - F_n$$

Daí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{F_n}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n)$$

assim, pela Equação (2) temos que

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{F_n}) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n) \subset X$$

Assim,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{F_n}) = X.$$

e, portanto

$$\overline{X - A} = X.$$

Segue diretamente do Teorema de Baire que todo espaço métrico completo é de 2ª categoria em x.

Corolário 2: Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico completo. Então *X*, será de 2ª categoria em *X*.

Demonstração: Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico completo e que X não seja de 2ª categoria em . Então X é de 1ª categoria em , e, pelo Corolário 1, temos que $\overline{X - X} = X$, ou seja, que $\overline{\emptyset} = X$, isto é, que $X = \emptyset$.

Absurdo!.

Corolário 3: Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico completo e que *A* seja um subconjunto fechado de *X*. Se *A* for de 1ª categoria em *X* então será nunca denso.

Demonstração: Suponhamos que (*X,p*) seja um espaço métrico completo, que seja um subconjunto fechado de e que *A* seja um conjunto de 1ª categoria em .

Pela demonstração do Teorema de Baire podemos dizer que

$$\overline{X - A} = X.$$

Como *A* é fechado, então $\overline{X - \bar{A}} = X$ e, pelo Teorema 1, segue que A é nunca denso.

4 | APLICAÇÕES DO TEOREMA DE BAIRE

Nesta seção apresentamos o Teorema de Banach-Seinhauss (#1), sendo necessária uma hipótese adicional para provar sua recíproca, enunciada como Teorema de Banach-Seinhauss (#2). Também apresentamos o Princípio da Limitação Uniforme utilizando esses primeiros resultados e finalizamos com um exemplo de aplicação desse princípio, no qual se tivermos um espaço de Banach e uma função em seu espaço dual, se a imagem direta de um conjunto for limitada teremos que este conjunto também será limitado.

Iniciaremos com o Teorema de Banach-Steinhauss (#1) que garante que, sob determinadas hipóteses, se o conjunto de pontos onde uma função é finita for de 2ª categoria, essa função será finita.

Teorema de Banach-Steinhauss (# 1): Suponhamos que $(X, \|.\|)$ e $(Y, \|.\|)$ sejam espaços vetoriais normados e que , com $T_\alpha \in \mathcal{L}(X, Y)$, com $\alpha \in \Omega$. Se

$$\{x \in X: sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty\,\}$$

for de 2ª Categoria então

$$sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty.$$

Demonstração: Primeiramente, observe que:

$$\{x \in X: sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X: sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} \leq n\}.$$

Afirmação: $\{x \in X: sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} \leq n\}$ é fechado.

Seja $A_n = \{x \in X: sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} \leq n\}$. . Tomando tal que $x_m \in A_n$ quando $\|x_m - x\| \to 0$, quando $m \to \infty$, vamos analisar se $x \in A_n$.

Podemos afirmar que

$$\|T_\alpha(x_m)\| \leq n,$$

para *m=1,2,...*, pois $x_m \in A_n$, daí,

$$\begin{aligned}\|T_\alpha(x)\| &= \|T_\alpha(x) - T_\alpha(x_m) + T_\alpha(x_m)\| \\ &\leq \|T_\alpha(x - x_m)\| + \|T_\alpha(x_m)\|\end{aligned}$$

e, pelo fato de *T* ser contínua

$$\begin{aligned}\|T_\alpha(x)\| &\leq \|T_\alpha\|\|x - x_m\| + \|T_\alpha(x_m)\| \\ &\leq \|T_\alpha\|\|x - x_m\| + n,\end{aligned}$$

que, ao passarmos o limite quando $m \to \infty$, nos leva a

$$\|T_\alpha(x)\| \leq n,$$

para todo $\alpha \in \Omega$. Assim, $sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} \leq n$, ou seja, $x \in A_n$.

Portanto, A_n é fechado.

Além disso, por hipótese temos que

$$\{x \in X: sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty\}$$

é de 2ª Categoria, assim

$$\mathrm{int}(A_m) = int\{x \in X: sup\,\{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < m\} \neq \emptyset,$$

para algum m.

Tomemos $\overline{B_r(x_0)} \subset A_m$ e seja $x \in X$, com $\|x\| \leq 1$. Então,

$$
\begin{aligned}
\|T_\alpha(x)\| &= \frac{1}{r}\|T_\alpha(rx)\| \\
&= \frac{1}{r}\|T_\alpha(rx + x_0) - T_\alpha(x_0)\| \\
&\leq \frac{1}{r}\|T_\alpha(rx + x_0)\| + \frac{1}{r}\|T_\alpha(x_0)\| \\
&\leq \frac{1}{r}m + \frac{1}{r}m \\
&\leq \frac{2}{r}m,
\end{aligned}
$$

para todo $\alpha \in \Omega$.

Agora, para garantir a validade de sua recíproca, precisaremos que *X* seja um espaço de Banach:

Teorema de Banach-Steinhauss (# 2): Suponhamos que *X* seja um espaço de Banach, que $(Y, \|.\|)$ seja um espaço vetorial normado e que $T_\alpha \in \mathcal{L}(X, Y)$, com $\alpha \in \Omega$. Se $\sup\{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty$, então

$$\{x \in X : sup\ \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\ \}$$

será de 2ª Categoria.

Demonstração: Tomando $x \in X$, como $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, podemos afirmar que:

$$\|T_\alpha(x)\| \leq \|T_\alpha\|\|x\| \leq M\|x\|,$$

com $\alpha \in \Omega$.

Em particular,

$$sup\ \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} \leq M\|x\|,$$

com $x \in X$.

Logo,

$$\{x \in X : sup\ \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\ \} = X.$$

X é um espaço completo e, portanto, é de 2ª categoria.

Portanto, $\{x \in X : sup\ \{\|T_\alpha(x)\| : \alpha \in \Omega\} < \infty\ \}$ é de 2ª categoria.

O Princípio da Limitação Uniforme, dado a seguir, utiliza as mesmas hipóteses do Teorema acima e garante que se o supremo de uma função, aplicada em um ponto do domínio, é finita, então a função é finita. Para a demonstração desse princípio os dois Teoremas de Banach-Steinhauss são utilizados. E mais, esse princípio é a base para a nossa aplicação, realizada logo após.

Princípio da Limitação Uniforme: Suponhamos que X seja um espaço de Banach, que $(Y, \|.\|)$ seja um espaço vetorial normado e que $T_\alpha \in \mathcal{L}(X,Y)$, com $\alpha \in \Omega$.

Se $sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty$ então $sup\ \{\|T_\alpha\|: \alpha \in \Omega\} < \infty$.

Demonstração: Se mostrarmos que

$$\{sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty\ \}$$

é de 2ª categoria, pelo Teorema de Banach-Steinhauss (# 1) provamos o que queremos. Como $sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty$, com $x \in X$, com, podemos dizer que

$$X = \{x \in X: sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty\}.$$

X é completo e, assim, de 2ª categoria.
Portanto, $\{sup\ \{\|T_\alpha(x)\|: \alpha \in \Omega\} < \infty\ \}$ é de 2ª categoria.

Como consequência temos que a seguinte aplicação:

Aplicação: Suponhamos que X seja um espaço de Banach, que $f \in X^*$ e $B \subset X$. Se $f(B)$. Se $f(B)$ for limitado então será limitado.

Demonstração: Para cada $b \in B$ temos que

$$\begin{aligned} T_b: X^* &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(b) \end{aligned}$$

Assim temos, para cada $T_b \in$L $(X^*, \mathbb{K})$ que $\|T_b\| = \|b\|$. Além disso, para cada $f \in X^*$, temos que $\|T_b(f)\| = \|f(b)\|$. Assim,

$$sup\ \{\|T_b(f)\|: b \in B\} = sup\ \{\|f(b)\|: b \in B\} < \infty.$$

Pelo Princípio da Limitação Uniforme segue que $sup\ \{\|T_b\|: b \in B\} < \infty$ daí

$$sup\ \{\|\mathrm{b}\|: b \in B\} < \infty,$$

donde vemos que B é limitado.

REFERÊNCIAS

HUSTON, V. PYM, J.S. **Aplications of Functional Analysis and Operator Theory**. Academic Press, 1980.

KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.

MUNKRES, J.R. **Topology**, 2 ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

Observação: Parte deste trabalho foi publicado em: LOPES, M.M; MORENO, A.L. Aplicações do Teorema de Baire. SIGMAE, v.6, 2, p. 36-45, 2017.

CAPÍTULO 4

UM RESULTADO SOBRE FUNÇÕES MENSURÁVEIS LIMITADAS EM L^p

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 12/08/2020

Michele Martins Lopes
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC,
Universidade Estadual de Campinas
Campinas – SP
http://lattes.cnpq.br/7572795941731427

Angela Leite Moreno
Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática
Alfenas – MG
http://lattes.cnpq.br/5106302431642025

RESUMO: Neste trabalho são apresentados alguns resultados sobre Teoria da Medida e Integração de Lebesgue. As funções Lebesgue integráveis são funções que se encontram em um espaço chamado Espaço L^p, com p є $[1,\infty)$. Primeiramente definimos tal espaço e, dentre resultados importantes sobre o mesmo, mostramos que ele é um espaço vetorial. Então, após definir uma norma nesse espaço, mostramos que ele é um espaço vetorial normado. Para isso, utilizamos três importantes desigualdades: Desigualdade de Young, Desigualdade de Hölder e Desigualdade de Minkowsky. Daí, definimos uma distância com essa norma e mostramos que o Espaço L^p com essa distância é um espaço métrico completo. Uma função Lebesgue integrável deve ser uma função simples, ou então deve existir uma função simples que tenha propriedades semelhantes às da função que se deseja integrar. Logo, é apresentado um teorema que garante a existência de uma função simples que possui propriedades semelhantes à de uma função presente no Espaço L^p. Com isso, temos a aplicação que diz que o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso no espaço L^p.

PALAVRAS-CHAVE: Integral de Lebesgue, Função Simples, Conjunto Denso, Espaços L^p.

A RESULT ON L^p MEASURABLE FUNCTIONS LIMITED

ABSTRACT: In this work, some results are presented on Lebesgue's Theory of Measurement and Integration. The integrable Lebesgue functions found in a space called Espaço Lp, with p є $[1,\infty)$. First, we define such a space, and, among relevant results about it, we show that it is a vector space. So, after defining a norm in this space, we show that it is a normed vector space. For this, we use three Crucial inequalities: Young's Inequality, Hölder's Inequality, and Minkowsky's Inequality. Hence, we define a distance with this standard and show that the L^p Space at that distance is a complete metric space. An integrable Lebesgue function must be a simple function, or there must be a simple function that has properties similar to the function that want to integrate. Therefore, a theorem presented that guarantees the existence of a simple function that has properties similar to that of a function present in the L^p Space. With that, we have the application that says that the set of limited measurable functions is dense in the L^p space.

KEYWORDS: Lebesgue Integral, Simple Function, Dense Set, Spaces L^p.

1 | INTRODUÇÃO

Neste trabalho, primeiramente apresentamos as definições de espaços L^1 e L^p, mostrando que estamos trabalhando em um espaço vetorial. Em seguida vemos três importantes desigualdades que são necessárias para demonstrar um teorema que mostra que L^p é espaço vetorial normado, com uma norma específica, que é finita. Definimos, com isso, uma métrica d_p, que em L^p determinam um espaço métrico completo. Por fim, esse teorema é usado para demonstrar um resultado fundamental para esse estudo. Com ele, realizamos uma aplicação: o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso em L^p.

2 | PRELIMINARES

Definição 1: Seja $p \in [1, \infty)$. Definamos $\mathcal{L}^p\ (X,\ \mu)$ o seguinte conjunto

$$\mathcal{L}^p\ (X, \mu) = \left\{ f \text{ mensurável: } \int_X \ |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Agora, suponhamos que $(X, A,\ \mu)$ seja um espaço de medida. Seja $L^p\ (X,\ \mu)$, e considere a seguinte relação:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g, \text{ quase sempre}$$

Assim, $f \sim g$ se existir $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mu(A) = 0 \quad e \quad f(x) = g(x),$$

para todo $x \in A$. Temos que ~ é uma relação de equivalência sobre L^1 (X, μ).

De fato,

i. $f \sim f$, pois $f = f$.

ii. Suponhamos que $f \sim g$, daí $f = g$ quase sempre, então $g = f$ quase sempre e, portanto, $g \sim f$.

iii. Suponhamos que $f \sim g$ e que $g \sim h$, então

- existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0\ \ e\ \ f(x) = g(x)$, para todo $x \notin A$.
- existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(B) = 0\ \ e\ \ g(x) = h(x)$, para todo $x \notin B$.

Tomando C= $A \cup B$, temos que C $\in \mathcal{A}$ e que

$\mu(C) = \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \ \mu(B) = 0,$

ou seja, $\mu(\mathrm{C}) = 0$. E mais, para todo $x \notin C$, temos que

$$f(x) = g(x) = h(x).$$

Portanto, $f \sim h$.

Definição 2: Definimos a seguinte norma sobre L^1 *(X, μ)*.

$$\|[f]\| = \int_X |f| d\mu.$$

Usaremos a notação $\mathcal{L}^1(X, \mu) = L^1(X,\mu)|_{\sim}$. Além disso, por convenção, denotaremos $[f] = f$.

Antes de continuarmos se faz necessário mostrarmos que ǁ·ǁ está bem definida.

De fato, suponhamos que $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ sejam tais que $[f] = [g]$. Queremos mostrar que $\|[f]\| = \|[g]\|$, ou seja, que

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |g| d\mu.$$

Observemos que, se $[f] = [g]$, então $f \sim g$, ou seja, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0 \;\; e \;\; f(x) = g(x)$, para todo $x \notin A$. Assim, para todo $x \notin A$, temos que

$$f^+(x) = g^+(x) \quad e \quad f^-(x) = g^-(x),$$

daí,

$$\int_X f^+ d\mu = \int_X g^+ d\mu \quad e \quad \int_X f^- d\mu = \int_X g^- d\mu,$$

logo,

$$\int_X |f| d\mu = \int_X |g| d\mu.$$

Portanto $\|[f]\| = \|[g]\|$.

Teorema 1. L^p *(X, μ)* é um espaço vetorial.

Demonstração: Sejam $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$f + \lambda g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$$

De fato, suponhamos que $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$|f + \lambda g| = |(f + \lambda g)(x)| \leq |f(x)| + |\lambda||g(x)| = |f| + |\lambda||g|,$$

Quase sempre. Daí

$$\int_X |f + \lambda g| d\mu = \int_X (|f + \lambda g|) d\mu = \int_X |f| d\mu + |\lambda| \int_X |g| d\mu.$$

Como $\int_X |f| d\mu < \infty$ e $\int_X |g| d\mu < \infty$, e então

$$\int_X |f| d\mu + |\lambda| \int_X |g| d\mu < \infty$$

portanto,

$$\int_X |f + \lambda g| d\mu < \infty$$

Como,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2\max\{|f(x)|, |g(x)|\}$$

daí

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p(\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \leq 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\},$$

logo,

$$|f(x) + \lambda g(x)|^p \leq 2^p \max\{|f(x)|^p, |\lambda|^p |g(x)|^p\}$$

que, juntamente com o fato de

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty \quad e \quad \int_X |g|^p d\mu < \infty,$$

segue que,

$$\int_X |f + \lambda g|^p d\mu < \infty$$

Portanto, L^p (X, μ) é um espaço vetorial.

Nosso objetivo agora será mostrar que o espaço L^p (X, μ), munido da norma

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço vetorial normado. Para isso, precisaremos das Desigualdades de Young, de Hölder e de Minkowsky, como seguem nos lemas abaixo:

Lema 1 (Desigualdade de Young (ou Desigualdade Elementar)). Suponhamos que *a, b, p* e *q* sejam números reais positivos e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ então

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Primeiramente observemos que,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{p+q}{pq} = 1 \;\Rightarrow p + q = pq,$$

daí

$$(p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = p + q - p - q + 1 = 1.$$

Agora, consideremos as funções

$$f(x) = x^{p-1} \qquad e \qquad g(x) = x^{q-1}.$$

Notemos que

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = (x^{q-1})^{p-1} = x^{(q-1)(p-1)} = x$$

e

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = (x^{p-1})^{q-1} = x^{(p-1)(q-1)} = x$$

ou seja, *g* é a função inversa de *f*. Agora, observe a figura abaixo

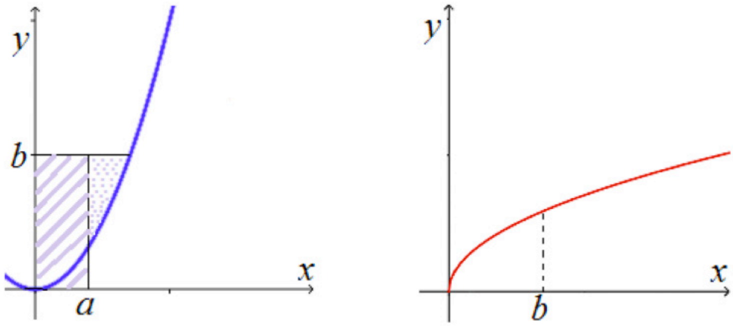


Figura 1:Gráficos das Funções Inversas: f e *g*.

Daí

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1}\,dx + \int_0^a x^{q-1}\,dx = \frac{x^p}{p}\bigg|_0^a + \frac{x^q}{q}\bigg|_0^b = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Portanto

$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Lema 2 (Desigualdade de Hölder) Sejam $p, q \in \mathbb{R}$, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$. Considere $f \in \mathcal{L}^p\,(X, \mu)$ e que $g \in \mathcal{L}^q\,(X, \mu)$ então $f \cdot g \in \mathcal{L}^1\,(X, \mu)$ e

$$\int_X |f \cdot g| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Demonstração: Se $\|f\|_p \cdot \|g\|_q = 0$ então $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ donde $|f| = 0$, quase sempre ou $|g| = 0$ quase sempre. Assim, $|f \cdot g| = |f| \cdot |g| = 0$ quase sempre.

Portanto,

$$\int_X |f \cdot g| d\mu = 0.$$

Então, suponhamos que $\|f\|_p \cdot \|g\|_q \neq 0$. Neste caso podemos reescrever a desigualdade desejada como

$$\int_X \left|\frac{f}{\|f\|_p}\right| \cdot \left|\frac{g}{\|g\|_q}\right| d\mu \leq 1.$$

Tomemos

$$\varphi = \frac{f}{\|f\|_p} \quad e \quad \psi = \frac{g}{\|g\|_q},$$

daí, basta verificarmos que

$$\int_X |\varphi \cdot \psi| d\mu \leq 1,$$

em que $\varphi \in \mathcal{L}^p\ (X, \mu)$ e $\psi \in \mathcal{L}^q\ (X, \mu)$, e

$$\|\varphi\|_p = 1 \quad e \quad \|\psi\|_1 = 1.$$

Usando a

$$\int_X |\varphi| \cdot |\psi| d\mu \leq \int_X \left(\frac{|\varphi|^p}{p} + \frac{|\psi|^q}{q}\right) d\mu \leq \int_X \left(\frac{|\varphi|^p}{p}\right) d\mu + \int_X \left(\frac{|\psi|^q}{q}\right) d\mu$$

Daí

$$\int_X |\varphi| \cdot |\psi| d\mu \leq \frac{1}{p}\left(\int_X |\varphi|^p d\mu\right) + \frac{1}{q}\left(\int_X |\psi|^q d\mu\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Lema 3 (Desigualdade de Minkowsky): Sejam $f, g \in \mathcal{L}^p\ (X, \mu)$ então

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q.$$

Demonstração: Se $p = 1$ vale a desigualdade.

Então, suponhamos que $p > 1$. Daí,

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} \cdot |f + g| \leq |f + g|^{p-1} \cdot (|f| + |g|),$$

daí,

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} \cdot |f| + |f + g|^{p-1} \cdot |g|.$$

Observemos que

$$\int_X (|f+g|^{p-1})^q d\mu = \int_X |f+g|^{p-1} d\mu < \infty,$$

o que significa que

$$|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q\ (X, \mu).$$

Dessa forma, podemos utilizar a Desigualdade de Hölder para obter que

$$\int_X |f+g|^{p-1} \cdot |f| d\mu \leq \| |f+g|^{p-1} \|_q \cdot \|f\|_p$$

e

$$\int_X |f+g|^{p-1} \cdot |g| d\mu \leq \| |f+g|^{p-1} \|_q \cdot \|g\|_p.$$

Então, temos que

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \| |f+g|^{p-1} \|_q \cdot \|f\|_p + \| |f+g|^{p-1} \|_q \cdot \|g\|_p,$$

ou seja,

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \cdot \| |f+g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \cdot \| |f+g|^{p-1} \|_q,$$

assim,

$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \| |f+g|^{p-1} \|_q,$$

Como

$$\cdot \| |f+g|^{p-1} \|_q = \left[\int_X (|f+g|^{p-1})^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\left(\int_X |f+g|^{p-1} d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{q}} = \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Então

$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$$

E, dividindo ambos os lados por $\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$, juntamente com o fato de

$$p - \frac{p}{q} = p\left(1 - \frac{1}{q}\right) = p\ \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

e, consequentemente,

$$\frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}} = \|f+g\|_p,$$

então, segue que

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \cdot$$

Observação 1 Vale a igualdade na desigualdade de Minkowsky se, e somente se,

I. Quando $p = 1$ então f e g têm o mesmo sinal quase sempre;

II. Quando $p > 1$ então existem A e B tais que $A \cdot B \neq 0$ e $A_f = A_g$ e quase sempre.

Pois, $|a+b| = |a| + |b|$ se, e somente se, a e b possuem o mesmo sinal quase sempre.

Teorema 2: $(\mathcal{L}^p\,(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado com a norma dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demonstração:

I. É claro que $\|f\|_p = 0$ se, e somente se, $f = 0$.

II. Notemos que

$$\|\lambda f\|_p = \left(\int_X |\lambda f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_X |\lambda|^p |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = (|\lambda|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

logo,

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda|.\,\|f\|_p.$$

III. *Desigualdade Triangular:* Segue diretamente da Desigualdade de Minkowsky.

Definição 3: Suponhamos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ seja um espaço de medida e que $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$, com $p \in (1, \infty)$. Sobre $(X, \mathcal{A}, \mu)$ temos a norma

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definamos então

$$d_p(f,g) = \|f-g\|_p,$$

em que $f, g \in \mathcal{L}^p\,(X, \mu)$,

Teorema 3: $\left(\mathcal{L}^p\,(X,\mu), d_p\right)$ é um espaço métrico completo.

Demonstração: Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^p\,(X,\mu)$. Tomemos a subsequência $\{f_{n_K}\}$ de $\{f_n\}$, com $n_1 \leq n_2 \leq \cdots$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right\|_p < 1.$$

Basta aplicarmos a definição de sequência de Cauchy, com $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, para $k =$ 1,2 ...

Definamos

$$g_k = \left|f_{n_1}\right| + \left|f_{n_2} - f_{n_1}\right| + \left|f_{n_3} - f_{n_2}\right| + \cdots + \left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|,$$

para k = 1,2... Notemos que g_k é mensurável, e mais,

$$g_k \geq 0$$

para k = 1,2... , daí

$$g_k \leq g_{k+1},$$

para k = 1,2... Portanto, é convergente e, daí, defina

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x).$$

Afirmação: $g \in \mathcal{L}^p\,(X,\mu)$.

Com efeito, como cada g_k é mensurável, temos que g é mensurável. Além disso,

$$\int_X g^p\,d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_k^p\,d\mu,$$

daí, pelo Teorema de Beppo-Levi, segue que

$$\int_X g^p\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_k^p\,d\mu.$$

Mas, para todo k temos que

$$\begin{aligned}\left(\int_X g_k^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &= \|g_k\|_p \\ &\leq \left\|f_{n_1}\right\|_p + \left\|f_{n_2} - f_{n_1}\right\|_p + \left\|f_{n_3} - f_{n_2}\right\|_p + \cdots + \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \\ &\leq \left\|f_{n_1}\right\|_p + 1 < \infty.\end{aligned}$$

Assim

$$\int_X g^p d\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\left\|f_{n_1}\right\|_p + 1\right) \leq \left\|f_{n_1}\right\|_p + 1 < \infty.$$

Por um teorema temos que g^p é finita quase sempre. Logo, g é finita quase sempre, ou seja,

$$\left|f_{n_1}\right| + \sum_{i=0}^{\infty}\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$$

é finita quase sempre. Daí,

$$\left|f_{n_1}\right| + \sum_{i=0}^{\infty}\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|$$

converge quase sempre e, portanto,

$$f_{n_1} + \sum_{i=0}^{\infty}\left(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right)$$

converge quase sempre. Logo, a sequência $\{f_{n_{k+1}}(x)\}$ converge quase sempre.

Agora, definamos

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_{k+1}}(x),$$

quase sempre.

Fixemos $\varepsilon > 0$ e tomemos um índice k suficientemente grande de forma que, se $m, n \geq n_k$, então

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon,$$

assim,

$$\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon,$$

para $m, n \geq n_k$ e $k > K$. Usando o Lema de Fatou, segue, para $n \geq n_k$, que

$$\int_X |f - f_n|^p d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} \inf\left|f_{n_k} - f_n\right|^p d\mu = \lim_{k\to\infty} \inf \int_X \left|f_{n_k} - f_n\right|^p d\mu$$
$$= \lim_{k\to\infty} \inf\left|f_{n_k} - f_n\right|_p = \varepsilon^p$$

Logo,

$$\|f - f_n\|_p \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq k$.

Teorema 4 Suponhamos que $p \in [1, \infty)$ e que $\varepsilon > 0$. Se $f \in \mathcal{L}^p (X, \mu)$. Se então existe uma função simples ψ tal que

$$|\psi| \leq f \quad e \quad \|f - \psi\|_p < \varepsilon.$$

Demonstração:

1° caso: $f \geq 0$.

Usando o Teorema 3 podemos afirmar que existe uma sequência $\{\psi_n\}$ de funções simples tais que $0 \leq \psi_n \leq f$ e

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n(x) = f(x), \qquad (1)$$

daí

$$|\psi_n - f| \leq 2^p(|\psi_n|^p + |f|^p) \leq 2^p(|f|^p + |f|^p) = 2^{p+1}|f|^p$$

logo

$$|\psi_n - f| \leq 2^{p+1}|f|^p$$

$$|\psi_n - f| \leq 2^{p+1}|f|^p \qquad (2)$$

Assim, com a Equação 1 juntamente com a Desigualdade 2, concluímos que

$$\lim_{n \to \infty} |\psi_n - f|^p = 0$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada segue que

$$\lim_{n \to \infty} \int_X |\psi_n - f|^p d\mu = \int_X \lim_{n \to \infty} |\psi_n - f|^p \, d\mu = \int_X 0 d\mu = 0$$

ou seja,

$$\lim_{n \to \infty} \|\psi_n - f\|_p^p = 0.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe simples tal que

$$|\psi| \leq f \quad e \quad \|f - \psi\|_p < \varepsilon.$$

2° caso: f é qualquer.

Como $f = f^+ - f^-$ onde $f^+ \geq 0$ e $f^- \geq 0$ e , podemos usar o caso anterior e afirmar que existem funções simples φ e ψ tais que

$$0 \le \varphi \le f^+ \quad e \quad 0 \le \psi \le f^-$$

e, assim,

$$\|f^+ - \varphi\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \qquad e \qquad \|f^- - \psi\|_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como φ e ψ são funções simples, então $\varphi - \psi$ também é. Além disso,

$$|\varphi - \psi| \le |\varphi| - |\psi| \le f^+ + f^- = |f|,$$

ou seja,

$$|\varphi - \psi| \le |f|,$$

e mais,

$$\|f - (\varphi - \psi)\|_p = \|f^+ - f^- - \psi + \varphi\|_p = \|(f^+ - \psi) - (f^- - \varphi)\|_p$$

daí

$$\|f - (\varphi - \psi)\|_p \le \|(f^+ - \psi)\|_p + \|(f^- - \varphi)\|_p \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Logo, existe uma função simples tal que

$$|\varphi - \psi| \le f \quad e \quad \|f - (\varphi - \psi)\|_p \le \varepsilon.$$

Teorema 5 Suponhamos que $(X,\mathcal{A},\mu)$ seja finito, isto é, que $\mu(X) < \infty$. Então

(i) Se $1 < p < q \le \infty$ então $\mathcal{L}^q\,(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p\,(X, \mu)$.

(ii) Se $f \in \mathcal{L}^\infty\,(X, \mu)$, então

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p.$$

Demonstração: Temos dois casos a considerar:

1° caso: $q = \infty$

Queremos provar que $\mathcal{L}^\infty\,(X, \mu) \subset \mathcal{L}^p\,(X, \mu)$. Seja $f \in \mathcal{L}^\infty\,(X, \mu)$. Temos que

$$|f| \le \|f\|_\infty \quad quase\ sempre,$$

daí,

$$|f|^p \le \|f\|_\infty^p \quad quase\ sempre,$$

e, por uma proposição, temos que

$$\int_X |f|^p\, d\mu \le \int_X \|f\|_\infty^p\, d\mu < \infty,$$

logo,

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(X),$$

assim,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \big(\mu(X)\big)^{\frac{1}{p}}$$

ou seja,

$$f \in \mathcal{L}^p \, (X, \mu).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^\infty \, (X, \mu) \subset \mathcal{L}^p \, (X, \mu).$$

2º caso: $q < \infty$. Assim, $1 < p < q < \infty$.

Queremos provar que $\mathcal{L}^q \, (X, \mu) \subset \mathcal{L}^p \, (X, \mu)$. Seja $f \in \mathcal{L}^q \, (X, \mu)$, tomemos $\lambda = \frac{p}{q} > 1$ pois $p < q$. Podemos escolher β de forma que

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\lambda} = 1,$$

daí, usando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \left(\int_X (|f|^p)^\lambda \, d\mu\right)^{\frac{1}{\lambda}} \cdot \left(\int_X (1)^\beta \, d\mu\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\left(\int_X |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p \cdot (\mu(X))^{\frac{1}{\beta}},$$

que nos dá

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \left(\|f\|_q\right)^p \cdot \big(\mu(X)\big)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Logo,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot \big(\mu(X)\big)^{\frac{1}{\beta p}}.$$

Assim, se $f \in \mathcal{L}^q \, (X, \mu)$ e $\mu(X) < \infty$, então $\|f\|_p < \infty$, e, com isso, $f \in \mathcal{L}^p \, (X, \mu)$ Portanto,

$$\mathcal{L}^q \, (X, \mu) \subset \mathcal{L}^p \, (X, \mu).$$

(ii) Seja $f \in \mathcal{L}^\infty \, (X, \mu)$.

Consideremos a desigualdade encontrada na demonstração do item (i):

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \big(\mu(X)\big)^{\frac{1}{p}},$$

daí,

$$\lim_{p\to\infty} \sup\|f\|_p \leq \lim_{p\to\infty} \sup\left(\|f\|_\infty\big(\mu(X)\big)^{\frac{1}{p}}\right),$$

ou melhor,

$$\lim_{p\to\infty} \sup\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \lim_{p\to\infty} \sup\big(\mu(X)\big)^{\frac{1}{p}}.$$

e, assim,

$$\lim_{p\to\infty} \sup\|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

Por outro lado, ao tomarmos $\alpha < \|f\|_\infty$ temos que

$$\mu(\{|f| > \alpha\}) > 0,$$

Daí

$$\int_X |f|^p \, d\mu \geq \int_{\{|f|>\alpha\}} |f|^p \, d\mu \geq \int_{\{|f|>\alpha\}} \alpha^p \, d\mu = \alpha^p \mu(\{|f| > \alpha\}),$$

assim,

$$\|f\|_p \geq \alpha\mu(\{|f| > \alpha\})^{\frac{1}{p}}$$

e, com isso,

$$\lim_{p\to\infty} \inf\|f\|_p \geq \left(\lim_{p\to\infty} \inf \alpha\mu(\{|f| > \alpha\})^{\frac{1}{p}}\right) = \alpha \lim_{p\to\infty} \inf \mu(\{|f| > \alpha\})^{\frac{1}{p}} = \alpha,$$

logo,

$$\lim_{p\to\infty} \inf\|f\|_p \geq \|f\|_\infty$$

$$\|f\|_\infty \leq \lim_{p\to\infty} \inf\|f\|_p \leq \lim_{p\to\infty} \sup\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

Portanto,

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

3 | APLICAÇÃO

Se $p \in [1,\infty)$ então o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso em $\mathcal{L}^p\,(X,\mu)$.

Com efeito, dada $f \in \mathcal{L}^p\,(X,\mu)$ e fixado $\varepsilon > 0$, pelo Teorema 4, existe uma função simples tal que

$$|\psi| \leq f \quad e \quad \|f - \psi\|_p < \varepsilon$$

e, como toda função simples é $\mathcal{L}^p\ (X, \mu)$, o resultado segue.

Com isso, mostramos que o conjunto das funções mensuráveis limitadas é denso em $\mathcal{L}^p\ (X, \mu)$.

REFERÊNCIAS

KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications.** New York: John Wiley & Sons, 1978.

MEDEIROS, L. A. **A Integral de Lebesgue.** 6 ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

RICOU, M. Medida e **Integração**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2009.

Observação: Trabalho publicado em: LOPES, M.M; MORENO, A.L. **Aplicações do Teorema de Baire**. SIGMAE, v.6, 2, p. 46-53, 2017.

CAPÍTULO 5

O PRINCÍPIO DO MÁXIMO E APLICAÇÕES

Data de aceite: 01/10/2020

Francisco Erisson Batista Gomes
Universidade Regional do Cariri – URCA
Juazeiro do Norte – Ceará
http://lattes.cnpq.br/8480374571657696

RESUMO: Apresentamos os Princípios do Máximo associados a operadores elípticos de segunda ordem e uma aplicação deste princípio no estudo da geometria de superfícies mínimas do espaço euclidiano.
PALAVRAS CHAVE: Operadores Elípticos; Princípios do Máximo; EDPs.

THE MAXIMUM PRINCIPLE AND APPLICATIONS

ABSTRACT: We present the Principles of Maximum associated with second order elliptical operators and an application of this principle in the study of the minimal surface geometry of Euclidean space.
KEYWORDS: Elliptic operators; Principles of the Maximum; EDPs.

1 I INTRODUÇÃO

Devido à grande importância do estudo de máximos e mínimos de funções em diversas áreas da Matemática, e da grande aplicabilidade disso no mundo real, neste trabalho será generalizado o princípio do máximo para operadores lineares de segunda ordem da forma:

$$L(u)=\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+c(x)u$$

onde $u \in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$, sendo Ω um domínio no $\mathbb{R}^n$. Perceba que o operador L é uma generalização do laplaciano, pois se considerarmos o caso particular onde $c=b_i=0$ e $a_{ij}(x)=1$ se $i=j$ e $a_{ij}(x)=0$ se $i\neq j$ e se e se encontramos que $L(u)=\Delta u$.

Nesse trabalho, apresentamos algumas definições e resultados sobre máximos e mínimos de funções reais definidas em domínios do $\mathbb{R}^n$. Estes possibilitam demonstrar o teorema conhecido como princípio do máximo forte. Como aplicação destes resultados vamos apresentar uma forma de provar que dada uma função real u definida num disco fechado e tal que $u(X)=0$ para todo X na fronteira do disco e

$$div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)=2H,$$

onde H é constante, então

$$u(x,y)\equiv 0 \text{ ou } u(x,y)=\sqrt{\frac{1}{H}-x^2-y^2}.$$

Portanto as únicas superfícies CMC compactas cujo bordo é o círculo e que são gráficos é o disco e calotas esféricas.

2 | OBJETIVO

Nosso objetivo será usar o operador L para encontrar o princípio do máximo fraco e outros resultados sobre máximos e mínimos de funções. Posteriormente, apresentar o lema de Hopf que é de fundamental importância para chegarmos no princípio do máximo forte e fazer aplicações desses resultados.

3 | METODOLOGIA

Para que fosse possível o desenvolvimento desse trabalho, o método utilizado foi o de estudos individuais, por parte do autor enquanto bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação Científica da Universidade Regional do Cariri – URCA, e de seminários ministrados pelo orientador do projeto Teoremas Clássicos da Geometria Diferencial: O Teorema de Bernstein e a desigualdade Isoparamétrica na esfera, para que assim fossem esclarecidas algumas dúvidas sobre partes das demonstrações de resultados sobre o conteúdo exposto neste trabalho.

4 | DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Iremos apresentar o princípio do máximo para o operador linear de segunda ordem

$$L(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + c(x)u \tag{1}$$

Sendo $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^0 em $\overline{\Omega}$ e de classe C^2 em $\overline{\Omega}$, onde $\overline{\Omega}$ é um domínio do $\mathbb{R}^n$.

Além disso, assuma que b_i, e a_{ij} são contínuas em $\overline{\Omega}$ e que a matriz $(a_{ij}(x))$ é simétrica. Note que assumir que esta matriz deve ser simétrica não causará nenhuma perda de generalidade quando consideramos operadores lineares de segunda ordem que atuam sobre funções de classe C^2.

Definição 1. O operador L é elíptico se $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ são respectivamente, o menor e o maior autovalor da matriz $(a_{ij}(x))$ então, dado qualquer $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0$ teremos que

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right) \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \tag{2}$$

Definição 2. O operador L é estritamente elíptico se existe um número real, $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda(x) \geq \lambda_0$ para todo $x \in \Omega$.

Serão apresentados alguns resultados sobre máximos e mínimos da função u, que serão usados, juntamente com o lema de Hopf, na demonstração do princípio do máximo forte, que possui o seguinte enunciado:

Teorema. (Princípio do Máximo Forte) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e conexo. Seja L um operador estritamente elíptico tal que c = 0. Suponha que u satisfaz $L(u) \geq 0$ $[L(u) \leq 0]$ em $\overline{\Omega}$. Se u atinge o seu máximo [mínimo] no interior de $\overline{\Omega}$, então u é constante.

Se $c \leq$ e u atinge um máximo não-negativo [mínimo não-positivo] no interior de $\overline{\Omega}$ então u é constante.

Independentemente do sinal de c, se u atinge um máximo igual a 0 [mínimo igual a 0] no interior de $\overline{\Omega}$, então u é constante.

O teorema de Weierstrass nos garante que em $\overline{\Omega}$, a função u atinge um valor máximo e um valor mínimo. Para conseguirmos chegar a uma demonstração desse resultado, primeiramente, devemos ter o princípio do máximo fraco, cujo enunciado está prescrito a seguir.

Teorema 1. (Princípio do Máximo Fraco) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Seja L um operador estritamente elíptico tal que c = 0.

$$\text{Se } L(u) \geq 0 \text{ em } \Omega\text{, então } \underset{\overline{\Omega}}{max\, u} = \underset{\partial\Omega}{max\, u}.$$

$$\text{Se } L(u) \leq 0 \text{ em } \Omega\text{, então } \underset{\overline{\Omega}}{min\, u} = \underset{\partial\Omega}{min\, u}.$$

É fácil ver que sendo L um operador estritamente em $\overline{\Omega}$, onde $\overline{\Omega}$ é um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, tal que c = 0, Se $L\,(u) > 0$ então u não atinge um valor máximo $\overline{\Omega}$. Dai, usando esse fato, podemos demonstrar este princípio do máximo fraco.

Temos, por definição, que a parte positiva da função u é u^+, e a parte negativa de u é u^- onde:

$$u^+ = \max(u, 0)$$

$$u^- = \min(u, 0)$$

Assim, podemos provar um corolário do Teorema 1 que é de fundamental importância para alcançarmos nossos objetivos.

Corolário 1.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Seja L um operador estritamente elíptico tal que $c \leq 0$.

$$\text{Se } L(u) \geq 0 \text{ em } \Omega\text{, então } \underset{\overline{\Omega}}{max\, u} \leq \underset{\partial\Omega}{max\, u^+}.$$

Se $L(u) \leq 0$ em Ω, então $\min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-$.

Se $L(u) = 0$ em Ω, então $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$.

Podemos nos perguntar se a restrição $c \leq 0$ é realmente essencial. E chegamos a conclusão que esta restrição é essencial, quando tomamos como contraexemplo a função $u(x) = e^{-|x|^2}$ para $L(u) = \Delta u + (2n - 4|x|^2)u$ com $\overline{\Omega}$ qualquer subconjunto do $\mathbb{R}^n$ que contem {0}. Se o teorema valesse para este caso, teríamos que o máximo da função seria atingido em algum ponto de $\partial\Omega$, quando na verdade, sabemos que u (0) é o maior valor que esta função atinge.

Além do corolário 1.1. Podemos demonstrar outro corolário conhecido como princípio da comparação. Este nos diz o seguinte:

Corolário 1.2. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Seja L um operador estritamente elíptico tal que $c \leq 0$. Sendo $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, teremos que:

Se

$$\begin{cases} Lu = Lv \ em \ \Omega, \\ u = v \quad em \ \partial\Omega, \end{cases}$$

Então u = v em $\overline{\Omega}$.

Se

$$\begin{cases} Lu \geq Lv \ em \ \Omega, \\ u \leq v \quad em \ \partial\Omega, \end{cases}$$

Então $u \leq v$ em $\overline{\Omega}$.

Na demonstração desse corolário, usamos o corolário 1.1. e a linearidade do operador L. Novamente, temos que a restrição $c \leq 0$ e $\overline{\Omega}$ ser limitado, são condições essenciais para que o corolário 1.2. Seja verdadeiro.

Falaremos agora sobre o lema de hopf, que é de fundamental importância para obtermos uma demonstração do princípio do máximo forte. Dizemos que $\partial\Omega$, onde $\overline{\Omega}$ é um domínio, satisfaz a condição da esfera interior num ponto x_0 se existem $R \in \mathbb{R}$ e $y \in \Omega$ tais que $B_R(y) \cap \partial\Omega = \{x_0\}$ e $B_R(y)$ está contigo em $\overline{\Omega}$.

O lema de Hopf diz o seguinte:

Teorema 2. (Lema de Hopf) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e conexo. Seja L um operador estritamente elíptico. Suponha que u satisfaz $Lu \geq 0$ em $\overline{\Omega}$. Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em x_0, u é contínua em x_0 e $u(x_0) > u(x), \forall x \in \Omega$.

Suponha que pelo menos uma das hipóteses seguintes seja válida:

$(i)\ c = 0$

$(ii)\ c \leq 0\ e\ u(x_0) \geq 0$

$(iii)\ u(x_0) = 0$

Então, se existir a derivada normal em x_0, ela deve satisfazer

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν e o vetor normal a $\partial\Omega$ apontando para fora.

O Teorema 2, é um importante resultado, que não é útil apenas na demonstração do princípio do máximo forte. Com estes resultados apresentados aqui, é possível demonstra o Princípio do máximo forte usando fortemente o lema de Hopf. Além disso, como aplicação desses resultados e do princípio do máximo forte, é possível mostrar o seguinte resultado:

Teorema 3. Dada uma função u definida num disco fechado com imagem nos reais tal que $u\ (X) = 0$ para todo X na fronteira do disco e

$$div\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 2H$$

Onde H é constante, então

$$u(x,y) \equiv 0 \text{ ou } u(x,y) = \sqrt{\frac{1}{H} - x^2 - y^2}.$$

Para verificar que este resultado é verdadeiro, devemos distribuir o divergente. Quando fazemos isso, vemos que ele é um caso particular do nosso operador L, dai podemos aplicar o princípio do máximo forte e encontramos que devido a função estar definida no disco fechado e $u(x,y) = 0$ em todos os pontos de fronteira do disco $u(x,y) \equiv 0$ ou $u(x,y) = \sqrt{\frac{1}{H} - x^2 - y^2}$..

5 I CONCLUSÃO

Os teoremas acima mostra que é possível encontrar aplicações de resultados matemáticos inicialmente definidos em domínios do , quando manipulamos convenientemente um operador elíptico. Além disso, demonstram a profundidade das informações obtidas a partir de uma equação ou inequação elíptica.

REFERENCIAS

Araújo, P. V., ***Geometria Diferencial.*** *3.ed. Rio de Janeiro: IMPA 2016*

Lima, E. L., ***Análise Real Funções de n variáveis vol. 2***. 6.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

Lima, E. L., ***Curso de análise vol. 2***. 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

TRUDINGER, N. & Gilbarg, D. ***Elliptic Partial Differential Equations of Second Order***. Springer. 1979

CAPÍTULO 6

MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO 3D DE GRÃOS AGRÍCOLAS NO PROCESSO DE ARMAZENAGEM

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 31/07/2020

Vanessa Faoro
Universidade Federal de Santa Maria, Palmeira das Missões – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/4937271243878302

Manuel Osório Binelo
Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul
Ijuí – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/9722354090220021

Rodolfo França de Lima
Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul
Ijuí – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/4840247196749087

Ricardo Klein Lorenzoni
Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul
Ijuí – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/5993020615670128

RESUMO: A qualidade e a conservação dos grãos dependem diretamente do sistema de armazenamento. Problemas e ineficiências na fase de armazenagem podem acarretar, além de perdas significativas do produto armazenado, alto gasto de energia e recursos. Para um bom sistema de aeração um modelo matemático e software foram desenvolvidos para simular a distribuição do fluxo de ar 3D no processo de aeração em sistemas reais de armazenamento de grãos, confrontando os resultados da simulação com os dados observacionais. Para avaliar a efetividade da distribuição de ar nos armazéns graneleiros, foi utilizado o critério da vazão específica local. Com os resultados, foi possível realizar a análise da pressão do ar, da vazão específica global e local em todo o domínio da massa de grãos. Foram obtidos dados da pressão em sistemas reais de armazenamento. Os dados obtidos na simulação foram validados com dados observacionais obtidos no sistema real de armazenamento, mostrando boa concordância.
PALAVRAS-CHAVE: Aeração de Grãos, Distribuição de Ar, Modelagem Computacional.

MATHEMATICAL MODELING AND 3D SIMULATION OF AGRICULTURAL GRAINS IN THE STORAGE PROCESS

ABSTRACT: The quality and conservation of the grains depends directly on the storage system. Problems and inefficiencies in the storage phase can lead, in addition to reducing the use of the stored product, high expenditure of energy and resources. For a good mathematical model and software aeration system, 3D flow distribution simulation was used in the aeration process in real grain storage systems, comparing the simulation results with observational data. To assess the effectiveness of the distribution of bulk warehouses, the local specific leakage criterion was used. With the results, it was possible to carry out an analysis of air pressure, specific global and local leakage in the whole domain of grain mass. Pressure data were recorded on real storage systems. The data captured in the

simulation were validated with observed data captured in the real storage system, showing good agreement.

KEYWORDS: Aeration of Grains, Air Distribution, Computational Modeling.

1 I INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, avanços demonstram que a agricultura está em fase de transformação, fazendo uso intensivo de equipamentos e técnicas agrícolas, permitindo maior rendimento no processo produtivo (Weber, 2005). Os grãos produzidos, depois de passarem pelos processos de limpeza e secagem, são acondicionados em grandes armazéns, que devem dispor de condições controladas para manter a qualidade do grão. A principal técnica empregada para conservar os grãos armazenados é a aeração, que tem a finalidade de conservar a massa de grãos.

Para compensar a deficiência de capacidade de armazenamento no país, é amplamente adotada a construção e a exploração de grandes armazéns graneleiros horizontais, atingindo dimensões significativas, tornando a ventilação na massa de grãos difícil e insegura. Khatchatourian et al. (2016) argumentam que a presença da não homogeneidade da massa de grãos, devido à compactação e a anisotropia, torna o problema da distribuição do fluxo de ar no armazenamento ainda mais complexo.

Para Khatchatourian e Savicki (2004), um sistema de aeração ineficiente pode causar problemas como migração de umidade, superaquecimento devido a atividade biológica e a proliferação de fungos e insetos. Nas obras de Shedd (1953), Brooker et al. (1982), Khatchatourian e Savicki (2004), Weber (2005), Crozza e Pagano (2006), Khatchatourian et al. (2006), Oliveira et al. (2007), o fluxo de ar através da massa de grãos sob a influência de algumas dessas características, foi estudado.

No período de pós-colheita, para que a produção significativa de grãos não seja danificada ou até mesmo perdida, cuidados na armazenagem são indispensáveis. O ideal é obter uma armazenagem capaz de monitorar todos os domínios de risco da massa de grãos. Além disso, é importante um sistema de aeração otimizado, adequado e eficiente, abrangendo um fluxo de ar uniforme em todo o domínio da massa de grãos.

O presente trabalho tem como objetivo modelar, matemática e computacionalmente, a distribuição do fluxo de ar durante o processo de aeração em sistemas reais de armazenamento de grãos, confrontando dados simulados e observacionais obtidos.

Os principais objetivos do presente estudo foram:

(a) Coletar informações de um sistema real de armazenagem de grãos com aeração, e medir a distribuição de pressão em diferentes profundidades da massa de grãos; *(b)* Realizar a modelagem (matemática e computacionalmente) 3D da distribuição do fluxo de ar em sistemas reais de armazenamento, objetivando a análise da pressão e vazão; *(c)* Comparar resultados da pressão simulados pelo modelo e observados pelo sistema real de

armazenagem de grãos.

2 I OBJETO DE ESTUDO E COLETA DOS DADOS OBSERVACIONAIS

Para realizar a simulação do fluxo de ar em armazéns graneleiros horizontais, foi adotado o objeto de estudo de um sistema real de armazenagem de grãos, de uma empresa privada, localizada no noroeste do estado do Rio Grande do Sul, Brasil. A Tabela 1 apresenta as características do armazém graneleiro, e a Figura 1 a estrutura do mesmo.

O armazém possui estrutura fundo V, com 121 metros de comprimento e 45 metros de largura. O sistema de aeração é composto de três sistemas de entrada de ar: 1) Aeração Central, 2) Aeração Lateral e 3) Aeração nas Extremidades (frontal e traseira). A Figura 1 mostra a localização das entradas de ar do sistema de aeração.

Tipo de grão	Soja
Tipo do armazém	Abaixo do solo, em fundo V
Capacidade do armazém	60 mil toneladas
Número de entrada da aeração central	12 8
Número de ventiladores da aeração central	14 ventiladores, 20 hp (dos 18 acessíveis)
Número de entrada da aeração lateral	8
Número de ventiladores da aeração lateral	2 ventiladores centrífugos, 40 hp
Número de entradas da aeração nas extremidades frontal e traseira	8
Número de ventiladores da aeração nas extremidades frontal e traseira	8 ventiladores centrífugos, 4hp
Valor da pressão da aeração central	1623 Pa
Valor da pressão da aeração lateral	800 Pa
Valor da pressão da aeração nas extremidades frontal e traseira	1623 Pa
Profundidade do armazém	13,4 m

Tabela 1: Característica do objeto de estudo.

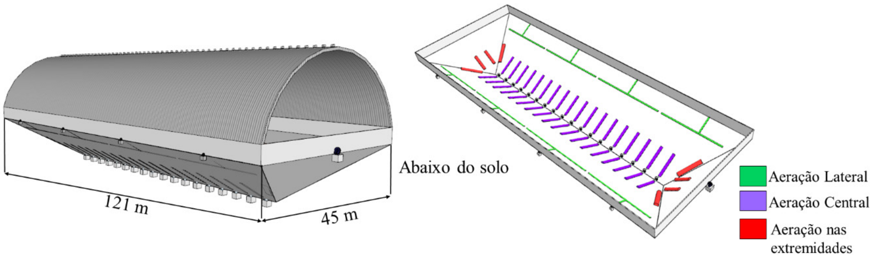


Figura 1: Esboço da estrutura do objeto de estudo.

2.1 Dados observacionais: Pressão

Os dados observacionais da distribuição da pressão estática, foram obtidos em quatro camadas da massa de grãos, com profundidade de 1, 2, 3 e 4 metros da superfície livre da massa de grãos, em 16 pontos do objeto de estudo. Os dados observacionais foram coletados juntos aos cabos da termometria. Na Figura 2A, são apresentados os pontos coletados em vista superior (círculos em preto), e a Figura 2B, a localização dos pontos em todo o armazém (pontos em vermelho).

Para realizar a simulação tridimensional do fluxo de ar no objeto de estudo e comparar com os resultados observacionais obtidos, foi necessário, nos 16 pontos da coleta de dados, encontrar a localização de coordenadas (x, y, z), referente a todo o objeto de estudo.

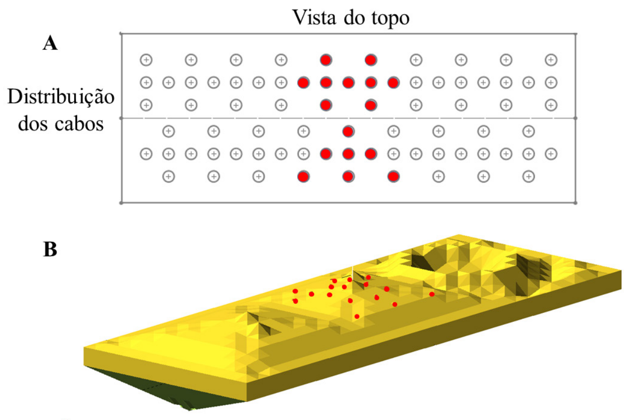


Figura 2: Distribuição dos pontos para a obtenção dos dados observacionais do objeto de estudo. A) Pontos coletados em vista superior (círculos em vermelho); B) Localização dos pontos em todo o armazém (pontos em vermelho).

Para obter a aproximação da posição dos pontos na massa de grãos, foi utilizado uma trena a laser, podendo assim, obter o mapa de altura da massa de grãos. A coleta dos dados da pressão em vários pontos e em diferentes profundidades da massa de grãos de um sistema real de armazenagem não é uma tarefa tão simples, pois além do armazém ser de grande porte, possuir toneladas de massa de grão uniforme, foi necessário auxílio de técnicos especializados, estudo de como coletar esses dados, como também equipamentos adequados, capazes de fazer a correta obtenção dos dados observacionais.

Foi construído um sensor, com orifícios para a passagem do ar e uma das extremidades pontiaguda, adaptada para mergulhar o sensor na massa de grãos. Além disso, o sensor foi fragmentado em 4 partes, para a coleta de dados em 4 etapas (4 profundidades), com rosca nas extremidades. O sensor de ferro, foi imerso na massa de grãos, nas profundidades de 1, 2, 3 e 4 metros. Dentro do sensor, foi inserido uma sonda para coletar dados da pressão, diretamente ligada ao manômetro digital. Para a obtenção dos dados da pressão, foi adotado um manômetro de pressão estática, adequado para medições de pressões pequenas.

3 | MODELO MATEMÁTICO E DESCRIÇÃO DO SOFTWARE

3.1 Modelo Matemático

Neste estudo, utilizou-se o modelo matemático do trabalho apresentado por Khatchatourian et. al (2009), no qual modela o movimento do fluxo viscoso incompressível, cuja densidade permanece constante (velocidade de aeração muito pequena), e isotérmico, consistindo em:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-K_x\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-K_y\frac{\partial P}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-K_z\frac{\partial P}{\partial z}\right)=0 \qquad (1)$$

Onde: *P* é a pressão em Pa; K_x, K_y e K_z são os coeficientes de permeabilidade nas principais direções (x, y, z) em $m^3kg^{-1}s$.

Neste trabalho, assume-se que: a) o coeficiente K_z corresponde à direção vertical; b) os coeficientes pertencentes ao plano horizontal são iguais, isto é, ; c) a relação entre os coeficientes na direção vertical e horizontal (grau de anisotropia) é constante em todos os pontos do compartimento do armazém; d) os resultados obtidos em Khatchatourian e Binelo (2008) foram utilizados para explicar a influência do fator de compactação em massa do grão no coeficiente de permeabilidade; e) a anisotropia da massa de grãos (a diferença entre K_x, K_y e K_z) foi levada em consideração de acordo com o trabalho Khatchatourian et al. (2009), obtidos experimentalmente para cada tipo de grão.

3.2 Descrição do software

O método dos elementos finitos (Segerlind, 1976) foi utilizado para resolver a Equação (1), sendo necessário estabelecer um domínio de integração de elementos menores. O software, desenvolvido em ANSI C ++ e Pascal, utiliza ferramentas de software livre sempre que possível e consiste nas seguintes etapas: a) Construção da geometria: a geometria foi construída no OpenSCAD, definindo todas as informações de contorno do objeto de estudo; b) Geração de malha com refinamento adaptativo dinâmico (Liu e Joe, 1996): A geometria foi discretizada em elementos volumétricos tetraédricos menores no software NetGen, que contém módulos para otimização e refinamento da malha; c) Geração da matriz do sistema pelo método dos elementos finitos (Segerlind, 1976); d) Solucionador de sistemas obtido a partir de equações algébricas lineares usando o método sucessivo de relaxação excessiva; e) Resultados e análise de pós-processamento usando o software Paraview.

4 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo é apresentado o resultado do fluxo de ar do sistema real de armazenamento de grãos do objeto de estudo. Serão apresentadas análises da pressão e vazão. A partir dos resultados das simulações, comparações foram feitas entre os resultados simulados e os resultados observacionais.

4.1 Análise da Distribuição do Fluxo de Ar

Foram obtidos dados da distribuição do fluxo de ar do objeto de estudo do problema formulado. A Figura 3 mostra a superfície wireframe da malha tetraédrica, usada na simulação. Para o problema considerado, foi discretizada a malha em 850 mil tetraedros, conforme o sistema real de armazenagem de grãos, baseado na estrutura do objeto e altura da massa de grãos no dia da coleta dos dados observacionais.

A Figura 4 ilustra a distribuição do fluxo de ar no objeto de estudo. Verifica-se os valores da pressão nas entradas de ar central e lateral nas extremidades (cor vermelha) e os valores da pressão na lateral (cor cinza), que modelam as condições de contorno do domínio do objeto de estudo.

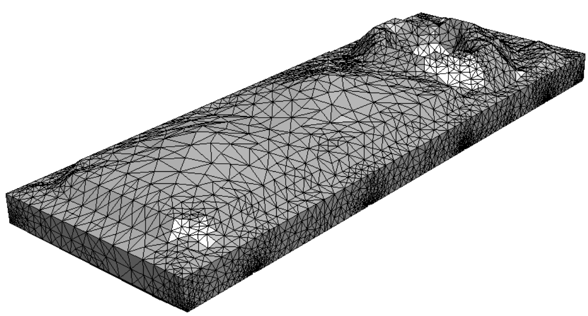


Figura 3: Wireframe da malha tetraédrica do objeto de estudo, construído no *NetGen.*

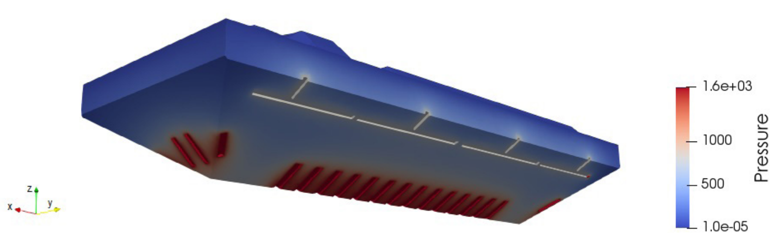


Figura 4: Simulação do fluxo de ar do sistema de aeração do objeto de estudo.

A Figura 5 demonstra a localização das superfícies isobáricas, da distribuição do fluxo de ar no armazém graneleiro investigado, nas camadas de pressões de 1500Pa, 1250Pa, 800Pa, 400Pa e 200Pa, analisando o que ocorre durante o processo de aeração do sistema. É possível perceber as diferentes camadas das pressões na massa de grãos, apresentando uma ideia da distribuição espacial da pressão de ar.

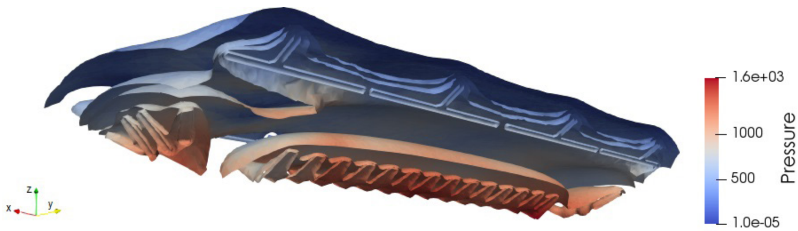


Figura 5: Simulação do fluxo de ar do sistema de aeração do objeto de estudo, superfícies isobáricas.

As linhas de fluxo no eixo longitudinal do objeto de estudo, são mostradas na Figura 6, ilustrando o movimento do fluxo de ar do armazém graneleiro, durante o escoamento no meio poroso. Nota-se que as linhas procuram o caminho mais curto da superfície livre da massa de grãos.

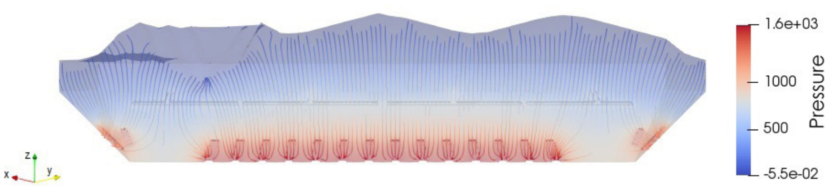


Figura 6: Simulação do fluxo de ar do sistema de aeração do objeto de estudo 03, linhas de fluxo no eixo longitudinal.

Para avaliar a eficiência do sistema de aeração em armazéns graneleiros com geometria complexa, foi utilizado o critério criado por Khatchatourian e Binelo (2008), chamado de vazão específica local. Em Khatchatourian et al. (2016) o critério mostrou-se um bom parâmetro para analisar a eficiência da aeração. A distribuição da vazão específica local (q_L) do objeto de estudo é expressa na Figura 7. Com a vazão específica local (q_L) é possível avaliar o fluxo de ar em de ar a cada hora por tonelada de grão em todos os pontos do objeto de estudo. A vazão global do fluxo de ar foi de $Q=15,5\ m^3h^{-1}t^{-1}$, o valor da q_L varia de 0 à 150 $m^3h^{-1}t^{-1}$. Essa diferença ocorre devido a estrutura do objeto de estudo, influenciado pelo valor da pressão em cada entrada de ar, como também pela altura da coluna de grãos.

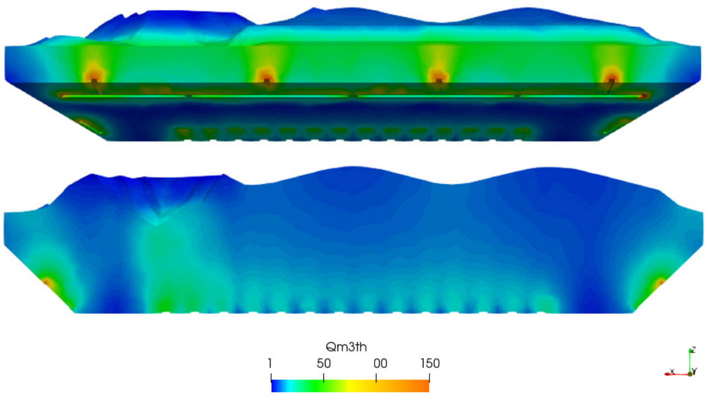


Figura 7: Distribuição da vazão específica local do objeto de estudo. Vazão específica global de $Q=15,5\ m^3h^{-1}t^{-1}$.

4.2 Análise da Pressão em Camadas

Foram obtidos dados observacionais da distribuição de pressão estática em quatro camadas da massa de grãos em 16 pontos do objeto de estudo, após, foram comparados com os resultados obtidos pelo modelo matemático. A Figura 8 representa a distribuição espacial da pressão prevista do modelo em quatro camadas (tons escuros), comparadas com todo o domínio do objeto de estudo (tons claros).

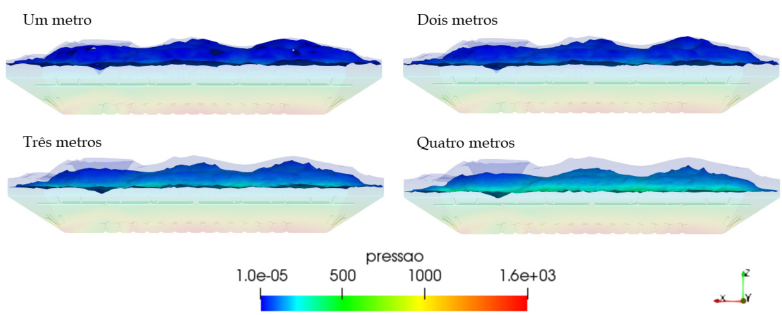


Figura 8: Simulação do fluxo de ar do sistema de aeração do objeto de estudo. Análise da pressão em camadas. Vazão específica global de $Q=15,5\ m^3h^{-1}t^{-1}$.

A discussão da obtenção dos dados medidos e simulados pelo modelo, estão apresentados nos gráficos da Figura 9. As linhas representam os dados simulados pelo sistema e os pontos os dados observacionais. Foram comparados os dados em cada secção da ordenada x, do objeto de estudo.

Verifica-se na Figura 9, que os valores da pressão variam de acordo com a profundidade da massa de grãos (já esperado). A maior diferença entre os dados observacionais e simulados, ocorre nas camadas mais próxima à superfície livre na massa de grãos (profundidade de um e dois metros). Na Figura 9, percebe-se também, que os valores da pressão aumentam nas laterais do objeto de estudo, devido ao sistema de aeração lateral e a altura da coluna de grãos.

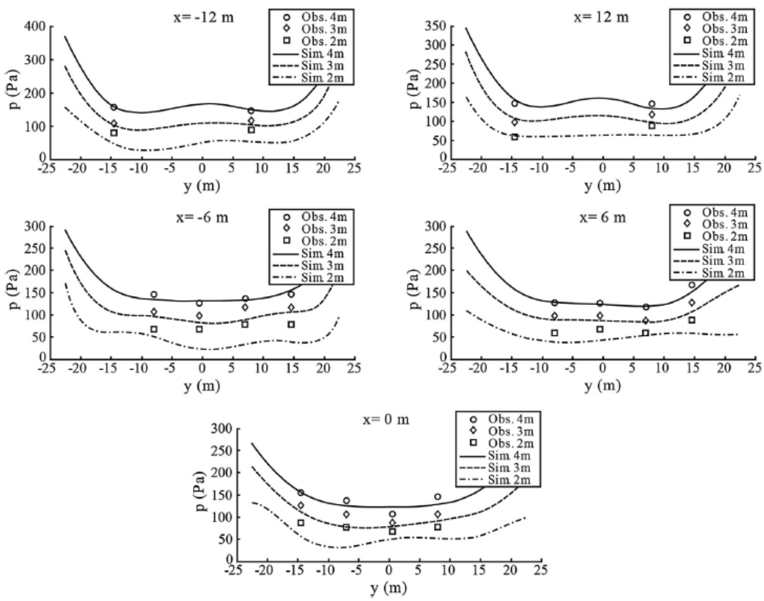


Figura 9: Distribuição da pressão em camadas de grãos do objeto de estudo. Dados observacionais (pontos) e dados simulados (linhas).

Analisando separadamente cada profundidade, foi obtida a média do erro relativo $(\overline{\sigma_r})$ para a camada de quatro metros $\overline{\sigma_r}$ = 0, 03, para três metros $\overline{\sigma_r}$ = 0,07, para dois metros $\overline{\sigma_r}$ = 0, 14. Com a redução da profundidade da camada de grãos, a pressão estática tem valor maior em pontos situados em camadas mais profundas. Por conseguinte, tem-se maior precisão no confronto dos dados na camada de quatro metros de profundidade, se comparada a profundidade de um, dois e três metros da superfície livre da massa de grãos. Foi obtido o coeficiente de determinação, no confronto entre os dados medidos e simulados, R^2 = 0,90 para a camada de quatro metros. A análise entre os dados observacionais e simulados pelo sistema indicam a precisão do modelo e do software desenvolvido.

5 I CONCLUSÃO

Neste trabalho foi realizada a modelagem (matemática e computacionalmente) da distribuição do fluxo de ar de um sistema real de armazenamento de grãos, com condições não uniformes da massa de grãos. Para obter a solução do problema formulado pelo modelo, foi criado domínios de discretização de um sistema real de armazenamento de grãos (objeto de estudo). Foi possível analisar o desempenho da distribuição desse fluxo de ar em todos os pontos do domínio da massa de grãos do objeto de estudo.

A fim de analisar a modelagem desenvolvida, dados observacionais de pressão, nas profundidades de um, dois, três e quatro metros da superfície livre da massa de grãos, foram obtidos. A comparação entre os dados observacionais e simulados do objeto de estudo, mostrou concordância satisfatória para problema em estudo.

Os resultados da simulação do objeto de estudo, através do critério da vazão específica local do ar demonstraram que o fluxo de ar pode ser otimizado fazendo que a energia gasta na aeração traga melhores benefícios para a armazenagem.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à empresa pela ajuda e disponibilidade na coleta dos dados observacionais.

REFERENCIAS

Brooker, D. B., Bakker-Arkema, F. W., Hall, C. W., 1982. **Drying cereal grains.** AVI Publishing Co, Inc, Westport, CT.

Crozza, D. E., Pagano, A. M., 2006. **Modelling resistance to airflow through beds of agropyron and corn. estimation of power ventilation.** Latin American Applied Research. l36(1), 1–14.

Khatchatourian, O. A., Savicki, D. L., 2004. **Mathematical modelling of airflow in an aerated soya bean store under non-uniform conditions.** Biosystems Engineering. 88(2), 201–211. DOI:10.1016/j.biosystemseng.2004.03.001.

Khatchatourian, O. A., Oliveira, F. A., Bihain, A., 2006. **Mathematical modelling of airflow and thermal state in large aerated grain storage.** Biosystems Engineering. 95(2), 159–169. DOI:10.1016/j.biosystemseng.2006.05.009.

Khatchatourian, O. A., Binelo, M. O., 2008. **Simulation of three-dimensional airflow in grain storage bins.** Biosystems Engineering. 101(2), 225–238. DOI:10.1016/j.biosystemseng.2008.06.001.

Khatchatourian, O. A., Toniazzo, N. A., Gortyshov, Y. F., 2009. **Simulation of airflow in grain bulks under anisotropic conditions.** Biosystems Engineering. 104(2), 205–215. DOI:10.1016/j.biosystemseng.2009.06.023.

Khatchatourian, O. A., Binelo, M. O., Faoro, V., Toniazzo, N. A., 2016. **Three-dimensional simulation and performance evaluation of air distribution in horizontal storage bins.** Biosystems Engineering. 142, 42–52. DOI:10.1016/j.biosystemseng.2015.12.009.

Liu A., Joe, B., 1996. **Quality local refinement of tetrahedral meshes based on 8-subtetrahedron subdivision.** Mathematics of Computation. 65(215), 1183–1200.

Oliveira, F., Khatchatourian, O. A., Bihain, A., 2007. **Estado térmico de produtos armazenados em silos com sistema de aeração: Estudo teórico e experimental.** Eng. Agríc. Jaboticabal. 27(1), 247–258. DOI:10.1590/S0100-69162007000100019.

Segerlind, L. J., 1976. **Applied Finite Element Analysis.** J. Wiley and Sons Inc., New York, USA.

Shedd, C. K., 1953. **Resistence of grains and seeds to air flow.** Agricultural Engineering, St Joseph, Michigan, 34-9, 616–619.

Weber, E., 2005. **Excelência em Beneficiamento e Armazenagem de Grãos.** Canoas, RS: Kepler Weber Industrial., salles edition.

CAPÍTULO 7

DETERMINAÇÃO DAS MEDIDAS DE DESEMPENHO DE UMA FILA *M/M/1* ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM BAYESIANA

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 06/07/2020

Nilson Luiz Castelucio Brito
Universidade Estadual de Montes Claros - Montes Claros (MG)
http://lattes.cnpq.br/0900347169842401

Celimar Reijane Alves Damasceno Paiva
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Norte de Minas Gerais - Januária (MG)
http://lattes.cnpq.br/0567547569121826

Pedro Humberto de Almeida Mendonca Gonzaga
Universidade Estadual de Montes Claros - Montes Claros (MG)
http://lattes.cnpq.br/9394347282117637

Rodrigo Fonseca Santana Costa
Universidade Estadual de Montes Claros - Montes Claros (MG)
http://lattes.cnpq.br/6408555911692993

RESUMO: O uso de modelos estocásticos para análise de filas reais baseia- se na premissa fundamental de que os parâmetros são desconhecidos, precisando, portanto, ser estimados. Os modelos de simulação são utilizados para determinar estes parâmetros por se apresentar como uma técnica relativamente barata e eficiente quando executadas várias vezes. Este trabalho tem por objetivo utilizar o software R para estimar os parâmetros de desempenho de filas markovianas infinitas com um único servidor *M/M/1* utilizando uma abordagem Bayesiana. Sob o enfoque Bayesiano, deve-se obter distribuições a priori e a posteriori para os parâmetros de interesse. Foram simulados dados do número de clientes no sistema no momento da partida e feitas 5000 replicações Monte Carlo com amostras de tamanhos n=10, 100 e 200 para valores da intensidade de tráfego ρ=0.2, 0.5 e 0.9. O algoritmo mostrou-se robusto, pois foram obtidas estimativas muito próximas dos valores teóricos, principalmente quando se aumenta o tamanho da amostra.

PALAVRAS-CHAVE: Filas, Inferência Bayesiana,Simulação.

DETERMINATION OF PERFORMANCE MEASURES IN A QUEUE *M / M /1* THROUGH A BAYESIAN APPROACH

ABSTRACT: The use of stochastic models for the analysis of real queues is based on the fundamental premise that the parameters are unknown, and therefore need to be estimated. Simulation models are used to determine these parameters because they are presented as a relatively inexpensive and efficient technique when executed several times. The purpose of this work is to use R software to estimate the performance parameters of infinite Markovian queues with a single *M/M/1* server using a Bayesian approach. Under the Bayesian approach, one must obtain a priori and a posteriori distributions for the parameters of interest. We simulated data on the number of clients in the system at the time of departure and made 5000 Monte Carlo replicates with samples of sizes n = 10, 100 and 200 for

traffic intensity values ρ = 0.2, 0.5 and 0.9. The algorithm was robust, since estimates were obtained very close to the theoretical values, especially when the sample size was increased
KEYWORDS: Queues, Bayesian Inference, Simulation.

INTRODUÇÃO

Um sistema de filas pode ser resumidamente descrito como usuários chegando para receber um serviço e, devido à impossibilidade de atendimento imediato, são alocados em uma fila de espera. Uma fila não precisa ser necessariamente formada por pessoas, como em uma fila de banco, por exemplo. Ela pode ser formada por estações de trabalho tentando acessar uma rede de computadores. As principais características de uma fila são: o *processo de chegada*, que descreve como os usuários procuram o serviço; o *tempo de serviço*, a *disciplina de atendimento*, referente à maneira como os usuários recebem o serviço, sendo no caso mais comum o regime *FCFS,* first come, first served e a *capacidade do sistema*, que está associada à limitação física da "sala de espera", ou seja, diz respeito ao número de usuários que podem ali permanecer. Uma forma simples de descrever um modelo de fila é através da notação de Kendall [8], cujo padrão é *A/B/X/Y/Z*, em que *A* indica a distribuição dos tempos entre chegadas, *B* indica a distribuição do tempo de serviço, *X* é o número de servidores em paralelo, *Y* é a restrição na capacidade do sistema e *Z*, a disciplina de atendimento. Por exemplo, a notação *M/D/2/∞/FCFS* indica um processo de fila com tempo entre chegadas exponencial, tempo de serviço determinístico, dois servidores em paralelo, sem restrição no tamanho máximo da capacidade do sistema e disciplina de fila "primeiro a chegar, primeiro a ser atendido". Quando são omitidos os símbolos *Y* e *Z* na notação de Kendall, entende-se que a fila tem capacidade infinita e disciplina *FCFS*. Por exemplo, a fila *M/M/1* tem chegadas exponenciais, serviço com distribuição exponencial, um único servidor, não há limite na capacidade do sistema e o atendimento é por ordem de chegada. Pode parecer estranho utilizar o símbolo *M* para a distribuição exponencial, em vez do usual *E*. A razão é para evitar confusão com E_k, símbolo utilizado para a distribuição *Erlang-k.* O símbolo *M* utilizado para designar a distribuição exponencial tem origem na falta de memória (memoryless) dessa distribuição.

OBJETIVO

Utilizar o software R para estimar os parâmetros de desempenho de uma fila *M/M/1*, através de uma abordagem bayesiana.

MATERIAL E MÉTODOS

1. **Filas *M/M/*1:** Serão utilizadas distribuições exponenciais com parâmetros λ e μ para a taxa de chegada e taxa de atendimento, respectivamente. Considerando

que a fila esteja em equilíbrio, a intensidade de tráfego $\rho=\lambda/\mu$ é menor do que 1, o que implica a condição $\lambda<\mu$. Caso contrário, a fila "explode", isto é, o tamanho da fila cresce continuamente. Nestas condições, a distribuição do número de usuários no sistema é dada pela equação 1:

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{N = n}) = \boldsymbol{p_n} = \boldsymbol{\rho^n(1-\rho), 0} < \rho < 1, n \geq 0. \qquad (1)$$

A equação (1) é a função de probabilidade de uma variável aleatória com distribuição geométrica.

2. **<u>Inferência bayesiana:</u>** O esquema de geração de dados é consistente com a distribuição definida pela equação (1). Suponha uma amostra do número de usuários no sistema dada por $x_1,..., x_n$ A função de verossimilhança é

$$\boldsymbol{L(\tilde{\bar{x}}|\rho) = \prod_{i=1}^{n} \rho^{x_i}(1-\rho) = (1-\rho)^n \rho^{\sum x_i}}. \qquad (2)$$

O núcleo da função de verossimilhança é uma beta $\boldsymbol{(n+1; \sum_i x_i + 1)}$

2.1 - <u>Distribuições a priori e a posteriori:</u> Neste ponto, temos duas possibilidades de escolha para a distribuição a priori do parâmetro p A primeira é a priori conjugada natural beta (a,b), visto que 0 < p < 1 Neste caso, a posteriori tem função de probabilidade dada por:

$$\boldsymbol{\pi_{NC}(\rho|dados) = \frac{1}{B(a+\sum_i x_i; n+b)} \rho^{a+\sum_i x_i - 1}(1-\rho)^{n+b-1}, 0} < \rho < 1 \qquad (3)$$

ou seja, $\boldsymbol{\pi_{NC}(\rho|dados) \sim beta(a+\sum_i x_i; n+b).,}$

A segunda priori possível para p é uma uniforme. Como p Є (0,1), pode-se pensar em uma priori não informativa uniforme (0,1). Entretanto, em muitas situações práticas, verifica-se que $c < p < d$ com 0 < c < d < 1 Assim, pode-se trabalhar com a distribuição a priori uniforme truncada no intervalo (c, d) Neste caso, a posteriori tem função de probabilidade dada por:

$$\boldsymbol{\pi_{TU}(\rho|dados) = \frac{1}{B(c;d;\sum_i x_i + 1; n+1)} \rho^{\sum_i x_i}(1-\rho)^n, 0} < \rho < 1, \qquad (4)$$

ou seja, $\boldsymbol{\pi_{NC}(\rho|dados) \sim beta(a+\sum_i x_i; n+b).,}$

A partir daí, todas as estimativas podem ser encontradas. Tomando-se a função de perda quadrática, temos que o estimador de Bayes (EB) é a esperança das distribuições. Temos, então, os seguintes estimadores de Bayes para a intensidade de tráfego p

$$\boldsymbol{\hat{\rho}_{NC} = \frac{a+\sum_i x_i}{a+\sum_i x_i + n + b}} \quad (5) \qquad \boldsymbol{\hat{\rho}_{TU} = \frac{B(c;d;\sum_i x_i + 2; n+1)}{B(c;d;\sum_i x_i + 1; n+1)}} \quad (6)$$

2.2 Medidas de desempenho: A partir da distribuição estacionária do número total de usuários dada pela equação (1), podemos obter as medidas de desempenho da fila. Sejam N o número de usuários no sistema e $\boldsymbol{L = E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n.p_n}$ sua média. Temos:

$$\boldsymbol{L = \frac{\rho}{1-\rho}} \qquad (7)$$

Sejam Nq o número de usuários na fila e $\boldsymbol{L_q = E(N_q) = 0.p_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1).p_n}$ sua média. Temos:

$$\boldsymbol{L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}} \qquad (8)$$

Os estimadores bayesianos para L e L q são:

1) Utilizando a distribuição conjugada natural $\boldsymbol{beta(a+\sum_i x_i; n+b)}$, obtemos:

$$\boldsymbol{\hat{L}_{NC} = \frac{a+\sum_i x_i}{n+b}} \quad (9) \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\hat{L}_{q_{NC}} = \frac{(a+\sum_i x_i)^2}{(a+\sum_i x_i+n+b)(n+b)}} \quad (10)$$

2) Utilizando a distribuição não informativa $\boldsymbol{beta\ incompleta(c; d; \sum_i x_i + 1; n+1)}$ obtemos:

$$\boldsymbol{\hat{L}_{TU} = \frac{B(c; d; \sum_i x_i + 2; n)}{B(c; d; \sum_i x_i + 1; n+1)} = \hat{\rho}_{TU}} \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{\hat{L}_{q_{TU}} = \left[\frac{B(c; d; \sum_i x_i + 2; n)}{B(c; d; \sum_i x_i + 1; n+1)}\right]^2 = \hat{\rho}^2_{TU}} \qquad (12)$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foi utilizado o software R Studio para simular dados do número de clientes no sistema no momento da partida, com base na equação (1) e foram feitas 5000 replicações Monte Carlo, com amostras de tamanho $n = 10, 100, 200$ para $\rho = 0.2, 0.5, 0.9$. As distribuições a priori escolhidas foram $\boldsymbol{beta(0.6, 1.7)}$ **e** $\boldsymbol{uniforme\ truncada(0.05, 0.95)}$, de acordo com a sugestão por Choudhury e Borthakur [2]. A figura 1 mostra as densidades a priori beta e uniforme truncada.

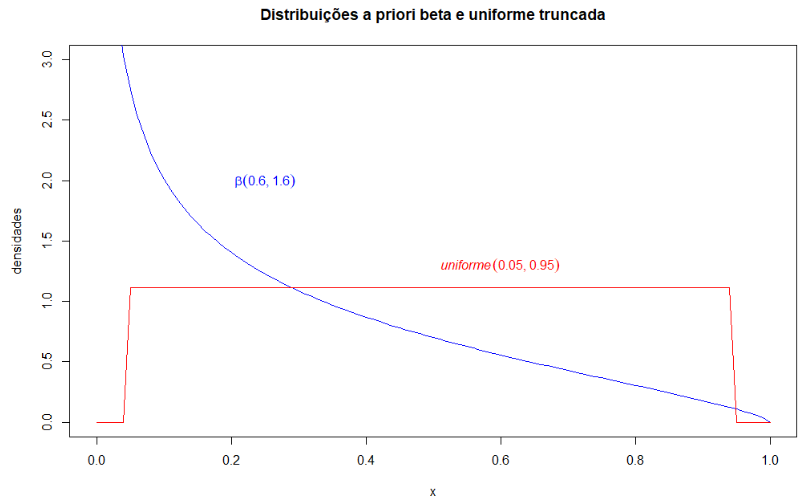


Figura 1: Distribuições a priori beta (0.6,1.7) e uniforme truncada (0.05,0.95) para a intensidade de tráfego.

A título de exemplificação, a figura 2 mostra os histogramas para a $\boldsymbol{beta(0.6, 1, 7)}$ e $\boldsymbol{uniforme\ truncada(0.05, 0.95)}$ para $\boldsymbol{\rho = 0.2.}$.

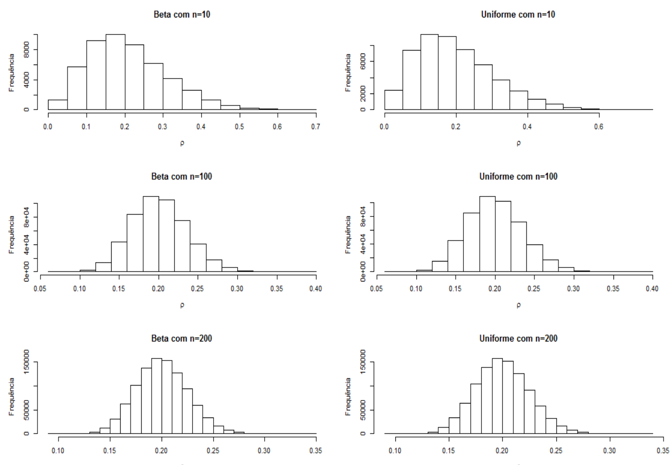


Figura 2: Histogramas para a *beta* (0.6, 1.7) e uniforme truncada (0.05, 0.95) considerando p = 0.2.

Posteriormente, foram obtidas as estimativas para L e L q.

A tabela 2 mostra os valores teóricos e os resultados obtidos com amostras de tamanhos $n = 10, 100, 200$ para $\boldsymbol{\rho = 0.2, 0.5, 0.9}$ para L e L q.

ρ	L	L_q	Distribuição	$n = 10$		$n = 100$		$n = 200$	
				$\hat{L}$	$\hat{L}_q$	$\hat{L}$	L_q	$\hat{L}$	$\hat{L}_q$
0,2	0,25	0,05	Beta	0,2669	0,0562	0,2522	0,0508	0,2503	0,0501
			Uniforme	0,3523	0,1097	0,2605	0,0555	0,2545	0,0524
0,5	1,00	0,50	Beta	0,9047	0,4297	0,9877	0,4908	0,9937	0,4953
			Uniforme	1,0985	0,5089	1,0085	0,5089	1,0042	0,5044
0,9	9,00	8,10	Beta	7,7592	6,8733	8,8559	7,9573	8,9247	8,0255
			Uniforme	9,1182	8,2259	9,0104	8,1112	9,0026	8,1030

Tabela 2: Valores exatos e estimativas para o número de clientes no sistema e tamanho da fila

O algoritmo utilizado:

```
####################################
##rho = 0.2
##########################################
##CASO 1A: BETA(0.6,1.7)
##########################################
##amostras de tamanho 10
#########################
##posteriori beta(0.6+soma(dados);1.7+10)
##amostra1 recebe uma matriz de geometricas rho=0.2
##de tamanho 10
amostra10<-matrix(nrow=5000,ncol=10)
for(i in 1:5000){
amostra10[i,1:10]<- rgeom(10,0.8)}
##matriz que recebe a soma das 5000 amostras de tamanho 10
somamostra10<-matrix(nrow=10,ncol=1)
for(i in 1:5000){
somamostra10[i]<-sum(amostra10[i,1:10])}
mean(somamostra10)
##numero de clientes no sistema
lhatncA<-(0.6+mean(somamostra10))/(10+1.7)
lhatncA
##tamanho da fila
lqhatncA<-((0.6+mean(somamostra10))^2)
((0.6+mean(somamostra10)+10+1.7)*(10+1.7))
lqhatncA
```

```
########################################
##########################################
##CASO 1B: BETA(0.6,1.7)
##########################################
##amostras de tamanho 100
#########################
##posteriori beta(0.6+soma(dados);1.7+100)
##amostra1 recebe uma matriz de geometricas rho=0.2
##de tamanho 100
amostra100<-matrix(nrow=5000,ncol=100)
for(i in 1:5000){
amostra100[i,1:100]<- rgeom(100,0.8)}
##matriz que recebe a soma das 5000 amostras de tamanho 10
somamostra100<-matrix(nrow=100,ncol=1)
for(i in 1:5000){
somamostra100[i]<-sum(amostra100[i,1:100])}
mean(somamostra100)
##numero de clientes no sistema
lhatncB<-(0.6+mean(somamostra100))/(100+1.7)
lhatncB
##tamanho da fila
lqhatncB<-((0.6+mean(somamostra100))^2)/
((0.6+mean(somamostra100)+100+1.7)*(100+1.7))
lqhatncB
##########################################
##CASO 1C: BETA(0.6,1.7)
##########################################
##amostras de tamanho 200
#########################
##posteriori beta(0.6+soma(dados);1.7+200)
##amostra1 recebe uma matriz de geometricas rho=0.2
##de tamanho 200
amostra200<-matrix(nrow=5000,ncol=200)
for(i in 1:5000){
amostra200[i,1:200]<- rgeom(200,0.8)}
##matriz que recebe a soma das 5000 amostras de tamanho 10
somamostra200<-matrix(nrow=200,ncol=1)
for(i in 1:5000){
somamostra200[i]<-sum(amostra200[i,1:200])}
```

```
mean(somamostra200)
##numero de clientes no sistema
lhatncC<-(0.6+mean(somamostra200))/(200+1.7)
lhatncC
##tamanho da fila
lqhatncC<-((0.6+mean(somamostra200))^2)/
((0.6+mean(somamostra200)+200+1.7)*(200+1.7))
lqhatncC
###################
round(lhatncA,4)
round(lqhatncA,4)
round(lhatncB,4)
round(lqhatncB,4)
round(lhatncC,4)
round(lqhatncC,4)
########################################
##########################
##CASO 2: posteriori beta(soma;10)
##########################
##amostras de tamanho 10
##########################
#numero de clientes no sistema
lhattu<-(mean(somamostra10)+1)/(10)
lhattu
#tamanho da fila
lqhattu<-((mean(somamostra10)+2)*(mean(somamostra10)+1))/
(mean(somamostra10+12)*10)
lqhattu
##########################################
##amostras de tamanho 100
##########################################
#numero de cientes no sistema
lhattu100<-(mean(somamostra100)+1)/(100)
lhattu100
##tamanho da fila
lqhattu100<-((mean(somamostra100)+2)*(mean(somamostra100)+1))/
(mean(somamostra100+102)*100)
lqhattu100
######################################
```

```
##amostras de tamanho 200
############################################
#numero de clientes no sistema
lhattu200<-(mean(somamostra200)+1)/(200)
lhattu200
##tamanho da fila
lqhattu200<-((mean(somamostra200)+2)*(mean(somamostra200)+1))/(mean(somamostra200+202)*200)
lqhattu200
round(lhattu,4)
round(lqhattu,4)
round(lhattu100,4)
round(lqhattu100,4)
round(lhattu200,4)
round(lqhattu200,4)
```

A partir daí, o algoritmo é recompilado substituindo rho pelos outros dois valores, quais sejam: 0.5 e 0.9.

CONCLUSÃO

Foram utilizados métodos inferenciais sob uma abordagem bayesiana para estimar as medidas de desempenho de uma fila *M/M/1*. O modelo apresentado mostrou-se robusto para fazer predição, visto que o usuário pode atribuir seu conhecimento prévio sobre a operação de um sistema simples de filas. Mesmo sem o conhecimento dos valores da taxa de chegada e do tempo de serviço é possível inferir sobre o número de clientes no sistema no momento da partida, bem como do tamanho da fila. Através de simulação e utilizando duas formas de informação *a priori* foram obtidas estimativas bastante próximas dos valores teóricos, sobretudo quando se aumenta o tamanho da amostra. Probabilidades preditivas a posteriori do número de clientes no sistema e fator de Bayes estão em fase de estudo. Como recomendação para trabalhos futuros podem-se utilizar outras distribuições de probabilidade *a priori*, outros tipos de dados, bem como sistemas de filas mais gerais, tais como *M/G/1*.

REFERÊNCIAS

[1] C. Armero and M.J.Bayarri, **Bayesian prediction in *MM/1* queues**. Queueing Systems, vol. 14,401-417, (1994).

[2] A. Choudhury and A.C.Borthakur, **Bayesian inference and prediction in the single server Markovian queue**, Metrika, vol.67, 371-383,(2008).

[3] A.B. Clarke, **Maximum likelihhod estimates in a simple queue**. The Annals of Mathematical Statistics, vol.28, 1036-1040, (1957).

[4] F.R.B. Cruz and M. Almeida, **Análise de Desempenho em Filas *M/M/1* Usando uma Abordagem Bayesiana**. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, vol. 2, N.2,(2015).

[5] D. Gamerman and H.F.Lopes, **Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference**, Chapman and Hall/CRC, London,UK, 2 ed.,(2006).

[6] Gross, D., Shortle and J.F. & Harris, C.M. **Fundamentals of Queueing Theory**, 4^{th} ed, Wiley-Interscience, New York, USA. (2009)

[7] H. Jeffreys, **The Theory of Probability**, Oxford University Press, Oxford (1998).

[8] D.G. Kendall, **Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of embedded Marlov chains**. *Annals Mathematical Statistics* 24: 338-354,(1953).

[9] C. D. Paulino, M. A. A. Turkman e B. Murteira, **Estatística Bayesiana,** Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, (2003).

CAPÍTULO 8

DERIVABILIDADE E DIFERENCIABILIDADE NO ENSINO DO CÁLCULO

Data de aceite: 01/10/2020

Pedro Pablo Durand Lazo
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE
http://lattes.cnpq.br/6562031070856171

RESUMO: Discute-se o uso dos termos *derivada de uma função num ponto, diferencial* de uma função num ponto, função derivada e função diferencial no contexto das disciplinas de Cálculo. Constata-se que as definições nem sempre correspondem ao quadro teórico que a Análise oferece e como os abusos de linguagem e de notação escondem ou distorcem a verdadeira natureza destes objetos.
PALAVRAS - CHAVE: Cálculo, Derivabilidade, Diferenciabilidade.

DERIVABILITY AND DIFFERENTIABILITY IN THE TEACHING OF CALCULUS

ABSTRACT: The use of the terms *derivative of a function at a point, differential of a function* at a point, derived function and differential function is discussed in the context of Calculus disciplines. It turns out that the definitions do not always correspond to the theoretical framework that the Analysis offers and how abuses of language and of notation hide or distort the true nature of these objects.
KEYWORDS: Calculus; Derivability; Differentiability.

1 I INTRODUÇÃO

Nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral ministradas nos cursos de graduação de Ciência e Tecnologia estudam-se os conceitos, propriedades e aplicações das derivadas de funções reais de variável real. Pretende-se, através da leitura de alguns textos de frequênte uso, se constatar se as definições se correspondem com as dadas nos textos de Análise. A Seção 1 trata dos conceitos de *Derivada e Diferencial*. A Seção 2 trata acerca da *derivada de uma função num ponto* e da *função derivada*. Finalmente, na Seção 3, define-se a *diferencial de uma função num ponto* e a *diferencial de uma função*.

2 I DERIVADA E DIFERENCIAL

A *derivabilidade* e a *diferenciabilidade*, são conceitos fundamentais no Cálculo e por isso formam parte do conteúdo das disciplinas do Cálculo Diferencial e Integral ministradas nos cursos de graduação de Ciências e Engenharia. Trata-se então de verificar se as definições dadas no ensino, particularmente nos textos, se correspondem com as dadas num marco teórico de um nível aceitável na matemática. Iniciemos esta tarefa comentando definições encontradas em dois textos.

1.3 A Derivada

> Suponha que uma curva seja o gráfico de uma função $f\,(x)$. Geralmente é possível obter a fórmula que fornece a inclinação da curva y = $f\,(x)$ em cada ponto. Esta fórmula para a inclinação é chamada de ***derivada*** de $f\,(x)$ e é escrita . Para cada valor de ***x***, $f\,'\,(x)$ fornece a inclinação da curva $f\,'\,(x)$ no ponto com primeira coordenada ***x***. (...). O processo de obter $f\,'\,(x)$ para uma dada função $f\,(x)$ é chamado de ***diferenciação***.
>
> (GOLDSTEIN, 2000, P.70)

Aqui, **derivada é uma fórmula para a inclinação** (da curva y = $f(x)$) e **diferenciação** (talvez deviesse se disser *derivação*) **é o processo de obter $f\,'(x)$**, isto é, de aplicar a fórmula. É compreensível a necessidade de orientar-se pelo desejo de uma aplicação “prática” imediata do conceito, porém isto não deveria fazer-se dando definições que não caracterizam de forma precisa os objetos. A seguir extraímos também de um texto de cálculo a definição de diferencial. Neste texto define-se primeiro a **diferencial da variável dependente** e logo a **diferencial da variável independente**.

> 4.20.2 Diferencial.
>
> Sejam y = $f\,(x)$ uma função derivável e Δx um acréscimo de x. Definimos:
>
> (a) a diferencial da variável independente x, denotada por dx, como $dx = \Delta x$
>
> (b) a diferencial da variável dependente y, denotada por dy, como
>
> $$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$
>
> De acordo com a definição anterior, podemos escrever
>
> $$dy = f'(x) \cdot dx \;\; ou \;\; \frac{dy}{dx} = f'(x).$$
>
> Assim, a notação $\frac{dy}{dx}$ já usada para $f\,'\,(x)$, pode agora ser considerada um quociente de diferenciais.
>
> (FLEMMING, 2006, p.174).

Das definições dadas, se deduz a interpretação de derivada como quociente de diferenciais. Isto é, **derivada é quociente de diferenciais**.

Se considerarmos que a Análise, de alguma forma, é fundamentação do Cálculo, registremos algumas definições dadas em textos desta disciplina. Vejamos primeiro a seguinte definição de **função diferenciável num ponto**.

Definition.

On dit qu'une fonction *f* est **différentiable** au point x_0 s'il existe une application linéaire $h \to lh$ et une fonction $h \to a\ (h)$ définie sur une intervalle I de centre zéro telles que

$$(\forall h \in I): f(x_0 + h) = f(x_0) + lh + h\alpha(h) \qquad (1)$$

$$avec \ \lim_{h \to 0} \alpha.$$

L'application: $h \to lh$ est alors appelée **fonction linéaire tangente** à la fontion *f* au point x_0 ou encore **différentielle** de *f* au point x_0. On la note df_{x0}. Le nombre *l* s'appelle le coefficient de la différentielle de *f* au point x_0.

On a donc pour tout *h* reel, $df_{x0}(h) = lh$.

GOURION, 1971, p.50).

Observe-se que é a função a que tem diferencial num ponto e não a sua variável dependente e a sua variável independente. Observe também que a **diferencial de uma função num ponto é uma função linear e não um número**.

Definição 1. *f é diferenciável no ponto* x_0 se existe uma função linear $\mathbb{R} \to \mathbb{R}; h \to ah$ e uma função $h \to \varphi\ (h)$) definida num intervalo *I* de centro 0 tais que

$$\forall h \in I : f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)\ com\ \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$$

A função linear $h \to ah$ chama-se a *diferencial da função* f *no ponto* x_o, denota-se df_{x0}. Assim,

$$df_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ df_{x_0}(h) = ah$$

Théorème et définitions

Dire que f est différentiable au point x_0 est équivalent à dire que la fonction:

$$h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a une limite au point $h = 0$. Cette limite, quand elle existe, est le coefficient de la differentielle de f au point x_o. Cette limite, quand elle existe, s'appelle **dérivée** de f au point x_o et on dit que f est **dérivable** au point x_o. (GOURION, 1971, p.50).

Definição 2. f é *derivável no ponto* x_o se a função $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ definida num intervalo I de centro 0 tem limite em $h = 0$. Isto é,

$$\exists a \in \mathbb{R}: \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$$

O número real a chama-se a *derivada da função* f *no ponto* x_o e denota-se $f'(x_o)$. Assim,

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Teorema 3. *Sejam* f *uma função definida num Intervalo aberto I e* x_o*. Então*

$$f \text{ é } derivável\ em\ x_0 \Leftrightarrow f \text{ é } deferenciável\ em\ x_0$$

Demonstração.

($\Longleftarrow$) f é derivável em x_o. Então

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a\right) = 0$$

Fazendo $\varphi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a$. Temos que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)\ \ com\ \ \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$$

Logo, f é diferenciável em x_o.

($\Longleftarrow$) f é diferenciável em x_o. Então

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)\ \ com\ \ \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$$

Donde,

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - a\ \ e\ \ \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$$

Assim,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$$

Logo f é derivável em x_o.

3 I DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO E FUNÇÃO DERIVADA.

No texto citado a seguir definem-se *função derivável num ponto, função derivável num intervalo e função derivada*.

DÉFINITION 16.1

- Soient I un intervalle ouvert, x_o un élément de I et f une application définie sur I. On dit que f est dérivable en x_o si la quantité

$$\Delta_{x_0}(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite quand h tend vers 0. Cette limite, note $f'(x_0)$, est appelée dérivée de f en x_0.

- On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert $J \subset I$ si pour tout $x \in J$, f est dérivable en x. On appelle dans ce cas dérivée de f et on note f' l'application de J dans $\mathbb{R}$ qui à $x \in J$ associe $f'(x)$ la dérivée de f en x.

(BALAC, 2009, p.747)

A seguir se enuncia o teorema que liga os conceitos de *função derivável num ponto* e *função diferenciável num ponto*. Nele afirma-se também sua equivalência.

Le théorème fondamental de la dérivation en un point

a) Le téorème:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I. Les énoncés suivants sont équivalents :

1. Pour tout h tel que $x_0 + h$ appartienne à I, on peut écrire :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h) \;\; com \;\; \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

2. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a$

(le taux d'accroissement de f au point x_0 admet a por limite en zéro).(...).

b) Définitions :

Pour exprimer qu'une fonction satisfait 1. ou 2. du théorème fondamental, on dit que f *est dérivable au point* x_0 De plus, le nombre réel a est appelé nombre

> dérive de f au point x_0. L'écriture $f(x_0 + h)$ = f $(x_0) + ah + h\varphi(h)$ est appelée développement limité à l'ordre 1 de f au point .
>
> (TERRACHER, 1987, p.285)

Demonstração[1]. Seja a um número real qualquer. Consideremos a função φ definida por:

$$\varphi(0) = 0 \;\; e \;\; \varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a \;\; quando \; x_0 + h \in I \;\; e \;\; h \neq 0$$

Então, para todo h tal que x_0 (incluindo h = 0):

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)$$

Da definição de limite de uma função em zero segue que

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

Anotemos aqui algumas observações:

1. $f'(x_0) \in \mathbb{R} \;\; e \;\; df_{x_0} \in \; \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. O teorema fundamental diz que

$$f \text{ é } derivável\ no\ ponto\ x_0 \;\; \Leftrightarrow f\text{é } diferenciável\ no\ ponto\ x_0$$

3. Pode-se observar que **ser derivável num ponto** não é o mesmo que **ser diferenciável num ponto**. São sim **equivalentes**. De forma natural, **a derivabilidade** deveria significar a **existência da derivada** enquanto que a **diferenciabilidade** teria que significar a **existência da diferencial**.

4. Também a derivada de f no ponto x, $f'(x)$, é o coeficiente da diferencial de f no ponto x:

$$df_x\colon \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}; df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

5. A escrita $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varphi(h)$ chama-se **desenvolvimento limite de ordem 1 de f no ponto x_0**.

Em muitos textos de cálculo os autores associam a diferenciabilidade com a existência da derivada. Além dos citados anteriormente, temos, por exemplo:

> We recall that a function f is *differentiable* at a point x_0 if it has a derivative at x_0. When we say that f is *differentiable*, we mean that it has a derivative at every

1 Traduzido pelo autor deste artigo do texto original de TERRACHER.

point of its domain.

(MOISE, 1972, p.89)

Aqui, o autor lembra definições dadas: uma função f é **diferenciável** em um ponto x_0 se tiver **derivada** em x_0. Quando dizemos que f é **diferenciável**, queremos dizer que ela tem **derivada** em cada ponto de seu domínio.[2]

A seguir uma definição de *função derivada* f':

Para qualquer função f, definimos a função derivada f' por

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

desde que este limite exista. Dizemos que a função é **diferenciável** ou **derivável** em qualquer ponto a em que a função derivada exista. (HUGHES-HALLETT, 1999, p.109)

Nesta definição resulta pouco claro qual é o domínio da função derivada f'. Tentemos reescrever esta definição:

Seja $A = Dom f' \cap \{a \mid f'(a) \text{ existe}\}$, então, definimos f' como sendo $f' : A \mapsto \mathbb{R}; a \mapsto f'(a)$

Finalmente, damos uma definição de *função derivada de uma função* f.

Definição 4. Seja f uma função definida num intervalo I. Diz-se que f é *derivável num intervalo* $J \subset I$, quando é derivável em todo ponto deste intervalo. A função de J em $\mathbb{R}$ que a todo número real x de J associa a derivada de f no ponto x, chama-se derivada de f e denota-se f'. Assim,

$$f' : J \mapsto \mathbb{R};\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

4 I DIFERENCIAL DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO E DIFERENCIAL

O primeiro parágrafo da seguinte citação textual merece um comentário. Nele se observa o fato que a definição da derivada dada não permite generalizar de forma natural a noção de derivada às funções de varias variáveis. Para verificar este fato é suficiente constatar que a expressão

$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, não tem sentido para $h \in \mathbb{R}^n$, se $n > 1$.

La définition de la dérivée donnée à la définition 16.1, page 747, ne permet pas de généraliser de manière naturelle la notion de dérivée aux fonctions de

2 O sublimado e a tradução são do autor deste artigo.

plusieurs variables. Cette généralisation passe par la notion de ***différentielle*** que nous allons étudier dans le cas des fonctions d'une variable réelle.(...)

DÉFINITION 16.3 Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est **différentiable en** $x_0 \in I$ s'il existe une application Є définie dans un voisinage V de 0 et un réel α tel que

$$(\forall h \in V): f(x_0 + h) - f(x_0) = \alpha h + h\epsilon(h) \; avec \; \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$$

L'application linéaire $df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$df_{x_0}: h \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha h$$

est appelée différentielle de f en x_0. (BALAC, 2009, p.758)

Para superar esta limitação, podemos tomar em consideração que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - ah|}{|h|} = 0$$

Donde

$$\lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - a \cdot h|}{|h|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - \alpha(h)|}{|h|} = 0 \; com \; \alpha(h) = a \cdot h$$

Aparece assim a diferencial de f no ponto x_0 como a função linear α definida por α (h) =α · h. No caso de uma função $f: A \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$ poderia considerar-se as normas e a expressão:

$$\lim_{\mathrm{h} \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \alpha(h)\|}{\|h\|} = 0 \; onde \; \alpha(h) = a \cdot h \; com \; a \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m, n).$$

A seguinte citação textual enuncia a equivalência de s*er derivável num ponto e ser diferenciável num ponto* e que a *diferencial de f em x_0 é a função* $h \mapsto f'(x_0)h$.

PROPOSITION 16.6 Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un élément de I et f une fonction application de I dans $\mathbb{R}$. f est différentiable en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0. De plus, la différentielle de f en x_0 est

$$df_{x_0}: h \in \mathbb{R} \mapsto f'(x_0) \cdot h$$

(BALAC, 2009, p.759)

A seguinte definição, extraída de um texto de Análise, assim como a definição citada acima, não revela de forma imediata a natureza da diferencial de uma função num ponto. Só mais na frente fala da função linear correspondente e a define como a diferencial da função no ponto.

> 6°) **Différentielle.**-a) On dit que la fonction f définie sur **C** est différentiable au point x_0 de C s'il existe un nombre α tel que la fonction ϵ définie, pour $h \neq 0$, par la formule
>
> $$(3) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = \alpha \cdot h + |h| \cdot \epsilon(h)$$
>
> admette la limite 0 quand h tend vers 0. (On suppose $|h|$ assez petit pour que $x_0 + h \in$ C).
>
> (CANAG, 1972, p.120).

Observe-se que nesta definição, assim como na definição 16.3 citada anteriormente, se diz que **existe um número** a e na expressão (3) aparece o termo $a \cdot h$. Pode-se de uma forma natural identificar o numero real a com a função linear $h \to a \cdot h$. Esta identificação é possível pela bijeção:

$$\mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ \alpha \mapsto \psi_\alpha, onde\ \psi_\alpha :\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R};\ \alpha \mapsto \psi_\alpha(h) = \alpha \cdot h.$$

Proposição 5. *Uma função ψ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é linear se, e somente se, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\psi(h) = \alpha \cdot h.$$

Demonstração. Seja α um número real e seja a função ψ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\psi(h) = a \cdot h$. Temos que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{R} :\ \psi(h + k) = \alpha(h + k) = \alpha h + \alpha k = \psi(h) + \psi(k)$$

Também,

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R} :\ \psi(\lambda \cdot h) = \alpha \cdot (\lambda \cdot h) = \lambda \cdot (\alpha \cdot h) = \lambda \cdot \psi(h)$$

Logo ψ é linear. Suponhamos agora que ψ: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é linear. Então

$$\forall h \in \mathbb{R} :\ \psi(h) = \psi(h \cdot 1) = h \cdot \psi(1) = \psi(1) \cdot h$$

Fazendo $a = \psi$ (1), temos que existe a tal que ψ (h) = $a \cdot h$.

Donde, pode-se expressar a definição acima da forma seguinte: a função f definida sobre C é diferenciável num ponto x_0 de C se existe uma função linear ψ definida por ψ (h)= $a \cdot h$ tal que a função є definida para $h \neq 0$, pela fórmula

$$(3) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = \psi(h) + \lfloor h \rfloor \cdot \epsilon(h)$$

admite limite 0 quando h tende para 0.

Prova-se que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha = f'(x_0)$$

Finalmente, dizer que uma função f é diferenciável em x_0 equivale a dizer que existe uma função linear ψ definida por ψ (h) = f ' (x_0)$\cdot h$. Esta função linear ψ é a diferencial da função f no ponto x_0 que pode ser denotado por df_{x0} para envolver na notação a função f e o ponto x_0, isto é, $\psi = df_{x0}$.

> b) La forme linéaire $\mathfrak{L}$, sur $\mathbb{R}$, telle que $\mathfrak{L}$ (h) = f '(x)$\cdot h$ est dite *application différentielle de f au point x*. De la même façon que l'on designe par ***y*** l'image par f de l'élément générique de C, on désigne par ***dy*** l'image par l'application linéaire $\mathfrak{L}$ de l'élément générique de $\mathbb{R}$, que l'on conveint d'écrire ***dx*** au lieu de ***h***. On a ainsi, au point considéré x de C
>
> $$(4) \qquad dy = f'(x)dx$$
>
> Par abus de langage, on dit que ***dy*** est la différentielle de f au point ***x***.
>
> On peut écrire aussi $d[f(x)] = f'(x)\ dx$, ou, par abus d'écriture, $d f = f'(x)\ dx$.
>
> (CANAG, 1972, p.120).

A forma linear $\mathfrak{L}$, sobre $\mathbb{R}$, tal que $\mathfrak{L}$ (h) = $f'(x) \cdot h$ diz-se *aplicação diferencial de f no ponto x*. Do mesmo modo que se designa por y a imagem por f do elemento genérico de C, se designa por dy a imagem pela aplicação linear $\mathfrak{L}$ do elemento genérico de $\mathbb{R}$, resulta conveniente escrever dx em lugar de h. Se tem assim que no ponto considerado x de C:

$$(4) \qquad dy = f'(x)dx.$$

Por abuso de linguagem, se diz que dy é a diferencial de f no ponto x.

Pode-se escrever também $d[f(x)] = f'(x)dx$, ou, por abuso de escrita, $d f = f'(x)\ dx$.[3]

Aqui se caracteriza a **diferencial de uma função f num ponto** x como uma aplicação linear $\mathfrak{L}$ sobre $\mathbb{R}$. Assim,

$$\mathfrak{L}: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto \mathfrak{L}(h) = f'(x) \cdot h$$

3 $y = f$ (x), x Є C com x Є C (Intervalo de definição de f).Traduzido do texto original em francês pelo autor deste artigo.

Das definições dadas na seção anterior e do Teorema Fundamental, temos que

$$\mathfrak{L} = df_x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto df_x(h) = f'(x) \cdot h$$

A notação proposta nos diz que $dy = f'(x) \cdot h$, isto é, a imagem de h pela aplicação linear df_x. Aplicando a própria definição à função $id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; id_{\mathbb{R}}(x) = x$, temos que

$$d[id_{\mathbb{R}}]_x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; h \mapsto id'_{\mathbb{R}}(x) \cdot h = 1 \cdot h = h = id_{\mathbb{R}}(h)$$

Assim, $d[id_{\mathbb{R}}]_x = id_{\mathbb{R}}$. Fazendo o abuso de notação pelo qual se identifica uma função g com sua imagem $g(x)$, temos $id_{\mathbb{R}}(x) = x$ e $id_{\mathbb{R}}(h) = h$. Logo, por detrás da expressão de que resulta convenente escrever dx em lugar de h, se esconde um abuso de notação, $dx = h$. Isto justifica também a notação $dy = f'(x)dx$.

Examinemos as definições de diferencial dadas em alguns textos de cálculo freqüentemente usados nos cursos de graduação.

> 4.9.1. DEFINIÇÃO
>
> Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de** y, denotada por dy, será dada por
>
> $$dy = f'(x)\Delta x \qquad (3)$$
>
> onde x está no domínio de f' e Δx é um incremento arbitrário de x. (...).
>
> 4.9.2. DEFINIÇÃO
>
> Se a função f for definida por $y = f(x)$, então a **diferencial de** x, denotada por dx, será dada por $dx = \Delta x$, onde Δx é um incremento arbitrário de x e x é qualquer número no domínio de f'.
>
> Das definições 4.9.1 e 4.9.2,
>
> $$dy = f'(x)\mathrm{d}x \qquad (5)$$
>
> Dividindo ambos os membros de (5) por dx, temos
>
> $$\frac{dy}{dx} = f'(x) \; se \; dx \neq 0$$
>
> Essa relação expressa à derivada como o quociente de dois diferenciais.
>
> (LEITHOLD, 1994, p.269-270).

Aqui se define primeiro **a diferencial de y** em seguida **a diferencial de x**, deduz que $dy = f'(x)\mathrm{d}x$, finalmente que esta relação expressa à *derivada como o quociente de dois diferenciais*. Aceitando os abusos de linguagem e de notação contidos nesta definição, a definição da "diferencial da variável dependente" se faz desnecessária, pois se pode obter a partir da definição da "difenrencial da variável independente": pondo $g(x) = x$, temos $g'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então

$$dx = g'(x)\Delta x = 1\Delta x = \Delta x.$$

> Até aquí $\frac{dy}{dx}$ tem sido visto como uma simples notação para a derivada de $y = f(x)$. O que faremos a seguir é interpretar $\frac{dy}{dx}$ como um quociente de dois acréscimos. Inicialmente, vamos olhar dx como um acréscimo em x e, em seguida, procuraremos uma interpretação para o acréscimo dy. (...).
>
> Fixado x, podemos olhar para ***a função linear*** que a cada $dx \in \mathbb{R}$, associa $dy \in \mathbb{R}$, onde
>
> $$dy = f'(x)\Delta x.$$
>
> Tal função denomina-se ***diferencial de f em x***, ou, simplesmente, ***diferencial de $y = f(x)$***.
>
> (GUIDORIZZI, 2008, p.192)

O último parágrafo do texto acima citado menciona o fato de que a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$;

$$dx \mapsto dy = f'(x)\mathrm{d}x$$

é linear e define como *diferencial de f em x*. Não se explica como é que dx resulta variável independente.

> 8.1 DERIVADA DE UNA FUNCION. Sea $y = f(x)$, una función definida en cada punto del intervalo abierto I. Decimos que $f(x)$ es diferenciable (o derivable) en un punto x de I si existe
>
> $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
>
> En este caso, dicho límite se designa por $\frac{dy}{dx}, f'(x), \frac{df}{dx}(x)$ o $D_x f(x)$ y se llama la derivada de $f(x)$ en el punto x. (KONG, 2001, p.199)

A definição citada acima, eliminando os abusos de notação, diz: Seja f uma função definida por $y = f(x)$ em cada ponto x do intervalo I. Diz-se que f é diferenciável **(ou**

derivável) num ponto x de I se existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Assim, se associa a derivabilidade com a existência da derivada.

Tratando-se da diferencial, temos:

> 9.8 DIFERENCIALES.
>
> 9.8.1 DEFINICIÓN
>
> Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en el punto x. La diferencial de y (en el punto x, y para un incremento Δx) es dada por
>
> $$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$
>
> donde Δx es un incremento arbitrario de x.
>
> 9.8.2 OBSERVACIONES. (...).
>
> 2) La diferencial df es una función de las dos variables xy Δx, donde x es cualquier punto donde existe $f'(x)$ y Δx es un número real arbitrario. Así, con propiedad debería escribirse
>
> $$dy = df(x, \Delta x) = f'(x) \cdot \Delta\mathrm{x}.$$
>
> (KONG, 2001, p.310).

Nesta definição destacamos a expressão "diferencial de *y* (**no ponto** x**,** y **para um acréscimo** Δx**)** é dada por $dy = f'(x) \cdot \Delta x$". Aqui, podemos entender de forma implícita que há uma função que mantém constante x, considera Δx variável e cujo valor funcional (imagem) é dada por $f\,'(x) \cdot \Delta x$. A segunda observação do texto acima citado é importante pois caracteriza a diferencial df da função f como uma função de duas variáveis: $df: (x, y) \mapsto f'(x) \cdot \Delta x$. Como Δx é arbitrário, pode-se escrever $df: (x, h) \mapsto f'(x) \cdot \mathrm{h}$. Fixando x temos $df(x, h) = df_x(h) = f'(x) \cdot \mathrm{h}$. Assim, chegamos facilmente ao conceito de *diferencial da função* f *no ponto* x.

Examinemos agora como o autor obtém a diferencial *dx* a partir da definição 9.8.1:

> 9.8.4 LA DIFERENCIAL dx
>
> (1) Para la función $I(x) = x$ la diferencial es, de acuerdo a la definición 9.8.1,

$$dx = \frac{d}{dx}(x) \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$
$$dx = \Delta x$$

Donde Δx es un incremento arbitrario de x.

(2) Si $y = f(x)$ es una función diferenciable en el punto x, entonces df se expresa como un múltiplo de la diferencial dx. En efecto,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx \quad (pues\ dx = \Delta x\ por\ (1))$$
$$dy = f'(x) \cdot dx$$

(3) Observemos que tenemos $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ en la notación de derivada) si y sólo si $dy = f'(x)$ (en la notación de diferenciales). (KONG, 2001, p.312)

De forma natural aparece $dx = \Delta x$ no caso particular da diferencial da função definida por $I(x) = x$. Donde também deduz que a derivada $f'(x)$ é o quociente dos **valores** das diferenciais correspondentes.

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable sobre el segmento $[a,b]$ la derivada de esta función se determina por la igualdad

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a um número determinado $f'(x)$ y, por tanto, se diferencia de la derivada $f'(x)$ en una magnitud infinitamente pequeña:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

donde $a \to 0$, cuando $\Delta x \to 0$.

Multiplicando todos los términos de la ultima igualdad por Δx, obtenemos:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x \qquad (1)$$

Dado que en el caso general $f'(x) \neq 0$, entonces, cuando x es constante y $\Delta x \to 0$, el producto $f'(x)\ \Delta x$ es una magnitud infinitamente pequeña de primer orden respecto $a\ \Delta x$. El producto $a\ \Delta x$ es siempre una magnitud infinitamente pequeña de orden superior a Δx ya que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Así, pues, el incremento Δy de la función se compone de dos sumandos, de los cuales el primero recibe el nonbre [cuando $f'(x) \neq 0$] de parte *principal* del incremento, que es *lineal* con relación a Δx. El producto $f'(x)\ \Delta x$) se denomina *diferencial* de la función y se designa por dy ou $df(x)$. (PISKUNOV, 1977, p.115)

O parágrafo final desta citação, a partir da igualdade (1) que caracteriza a diferenciabilidade, diz que Δy está composto como soma de dois termos, o primeiro dos quais é linear com relação a Δx e se denomina a diferencial da função. Como em outros, o conceito de diferencial de uma função num ponto não se explicita e fica escondida detrás dos abusos de linguagem e de notação.

DIFERENCIAIS

Os símbolos dy e dx que apareceram na derivada são chamados **diferenciais**, e nosso próximo objetivo é definir estes símbolos, de tal forma que se possa tratar dy/dx como uma razão. Com esta finalidade, vamos considerar x como fixo e definir como uma variável independente, para a qual possa ser atribuido um valor arbitrário. Se f for diferenciável em x, então *definimos* pela fórmula:

$$dy = f'(x)dx$$

Se $dx \neq 0$, então podemos dividir ambos os lados de (5) por *dx* para obter

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Assim sendo atingimos a nossa meta definindo dy e dx de tal forma que sua razão seja $f'(x)$.

(HOWARD, 2000, p.212)

Segundo isto, dx e dy são símbolos que apareceram na derivada. Para tratar a derivada $\frac{dy}{dx}$ como uma razão, fixa x e define dx como variável independente (muito difícil de explicar!). Na seqüência define dy pela fórmula $dy = f'(x)\,dx$. Assim, dx e dy são números e se $dx \neq 0$, tem-se que dy/dx é uma razão (quociente). Tentemos reescrever esta definição: se x é fixo e f é derivável em x, $f'(x)$ é fixo (constante). Logo temos uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: $h \mapsto f'(x) \cdot h$. Se f é definida por $y = f(x)$, denotemos $dy = f'(x) \cdot h$. Para a função definida por $g(x) = x$, tem-se $dx = g'(x) \cdot h$. Assim, $dx = h$, daí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x) \cdot h}{h} = f'(x) \ \ se\ h \neq 0.$$

Finalmente, vejamos a definição de **diferencial de uma função**:

DÉFINITION 16.4 Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$ admettant une différentielle df_{x0} en tout $x_0 \in I$. On appelle différentielle de f, et on note df, I'application de I dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par

$$df: x_0 \in I \mapsto df_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

(BALAC, 2009, p.760)

Conforme a definição acima citada a *diferencial de uma função* f, df, é uma aplicação de I em $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, isto é, $df \in F(I, \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$. Assim,

$$\begin{aligned} df: I &\mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \\ x &\mapsto [df](x) = df_x : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; \\ &\qquad\qquad h \mapsto df_x(h) = f'(x) \cdot h \end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

BALAC,S.; STURN, F. **Algèbre et analyse**. 2^e edition revue et augmentée. Presses polytechniques et universitaires romandes: Lyon, 2009.

CANAG, G.; RAMIS, E. and COMMEAU, J. **Traité de Mathématiques Spéciales: 2 Analyse**. Masson et C^{ie} Éditeurs: Paris, 1972.

FLEMMING, D.M.; GONÇALVES, M.B. **Cálculo A**. Pearson Prentice Hall: São Paulo, 2006.

GOLDSTEIN, L.J.; LAY, D.C.; SCHNEIDER, D.I. **Matemática Aplicada**. 8^a edição. Bookman: Porto Alegre, 2000.

GOURION, M. **Analyse** Collection Queysanne-Revuz: Mathématique Tome 2. Fernand Nathan Editeur: Paris 1971.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Volume 1 -5^a edição. LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.: Rio de Janeiro, 2008.

HOWARD, A. **Cálculo: um novo horizonte**. Vólume 1- 6^a edição. Bookman: São Paulo, 2000.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A.M. et al. **Cálculo e Aplicações**. Editora Edgard Blücher Ltda.: São Paulo, 1999.

KONG, Maynard. **Cálculo Diferencial**. Cuarta Edición. Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica: Lima, 2001.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1 - 3^{ra} edição. Editora Harbra ltda.: São Paulo, 1994.

MOISE, E. **Calculus**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.Wesley Publishing Company, Inc.: United States of America, 1972.

PISKUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**. Tomo 1 3^a edição. Editorial MIR: Moscú, 1977.

TERRACHER, P. et all. **Mathématiques 1e. S et E Analyse**. Hacchete: France, 1987.

CAPÍTULO 9

A MATEMÁTICA NA SUSTENTABILIDADE

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 22/07/2020

Silvana Grimes
Secretaria Municipal de Educação de Blumenau
Centro de Educação Infantil Paulo Tallmann.
Blumenau – Santa Catarina
https://lattes.cnpq.br/0806688167027359

Daiana Lana
Secretaria Municipal de Educação de Blumenau
Centro de Educação Infantil Paulo Tallmann.
Blumenau – Santa Catarina

Janete Bizatto Ferreira
Secretaria Municipal de Educação de Blumenau
Centro de Educação Infantil Paulo Tallmann.
Blumenau – Santa Catarina

RESUMO: O objetivo deste trabalho é relacionar a matemática no cotidiano das crianças, aprendendo ludicamente conceitos de classificação, seriação, contagem, formas geométricas, cores, valores e o cuidado com o meio em que vive. Além de separar o lixo, criamos uma fábrica de reciclados, na qual confeccionamos objetos, jogos e brinquedos. As crianças que trabalham na construção ganham “seu pagamento”. Durante o projeto e as propostas desenvolvidas, o “dinheiro” é guardado “numa poupança” e no final do mesmo será oportunizada uma feira, onde com o seu “dinheiro” poderão adquirir o que mais lhe agrada. A partir de uma proposta não formal iremos permitir que as crianças criem, explorem e inventem seus próprios modos de expressão e de relação com o mundo. Queremos que as crianças descubram a importância da utilização do dinheiro e da sustentabilidade para um mundo melhor, consumir menos, reciclar e reutilizar em prol de um futuro melhor.

PALAVRAS - CHAVE: Sustentabilidade; Matemática; lúdico.

MATHEMATICS IN SUSTAINABILITY

ABSTRACT: The objective of this work is to relate mathematics in the daily lives of children, learning concepts of classification, serialization, counting, geometric shapes, colors, values and care for the environment in which they live. In addition to separating garbage, we created a recycled factory, in which we make objects, games and toys. Children who work in construction earn “their pay”. During the project and the proposals developed, the “money” is saved “in savings” and at the end of it, a fair will be offered, where with your “money” they will be able to purchase what they like best. Based on a non-formal proposal, we will allow children to create, explore and invent their own ways of expressing themselves and relating to the world. We want children to discover the importance of using money and sustainability for a better world, consuming less, recycling and reusing for a better future.

KEYWORDS: Sustainability; Mathematics; Ludic

INTRODUÇÃO

Desde pequena a criança já se depara com alguns conceitos matemáticos nas suas brincadeiras e interações em grupos. Essa percepção natural é desenvolvida através das mais variadas formas e maneiras sob muitos aspectos como: grande, pequeno, leve, pesado, curto, longo e tantas outras pequenas noções que a criança vai adquirindo gradativamente conforme seus estímulos e amadurecimento.

O relacionamento da humanidade com a natureza, que teve início com um mínimo de interferência nos ecossistemas, tem hoje culminado numa forte pressão exercida sobre os recursos naturais. Dentro deste contexto, é clara a necessidade de mudar o comportamento do homem em relação à natureza e ao mesmo tempo atender as necessidades das gerações atuais.

Para as DCM`s (2012, p. 74) “a criança, desde que nasce, começa a diferenciar-se na relação eu, outro, pela linguagem, mediada pela cultura dos adultos e de outras crianças, constrói conhecimentos [...]”. Assim, a sua formação remete a relação entre pensamento e a linguagem simbólica, onde constrói e reconstrói conhecimento espontaneamente.

Ao ser inserido no espaço de Educação Infantil, a criança passa a compartilhar e adquirir novas aprendizagens, construindo seu pensamento lógico sobre determinadas coisas e objetos. Compreende que nesse espaço a criança aprende através de suas brincadeiras, interações em grupos e experiências trazidas por ela, de uma forma tranquila e natural, sem forçar seu amadurecimento, suas limitações, gradativamente ela cria sua independência, como também seu conhecimento prévio sobre números, letras e cores.

Além de brincar, ouvir história, pintar, dobrar, cantar, jogar... São algumas atividades que fazem parte do universo infantil. Mas, onde entra à matemática? Em todos os momentos de interações entre eles, seja contar, calcular, resolver problemas, são ações realizadas de forma natural e intuitiva pelas crianças em seu dia a dia.

O objetivo deste trabalho foi de relacionar a matemática no cotidiano das crianças, aprendendo ludicamente conceitos de classificação, seriação, contagem, formas geométricas, cores, valores e o cuidado com o meio em que vive assim como o conhecimento da utilização do dinheiro e da sustentabilidade para um mundo melhor.

O tema permite um trabalho interdisciplinar e percebemos que as crianças em interações e brincadeiras utilizam à matemática. Então, viemos a pensar em propostas para o Pré I B, onde pudéssemos fazer uma ligação com o projeto de “Sustentabilidade” e a Matemática. Foi onde surgiu à ideia de criar uma fábrica de reciclados, na qual confeccionamos objetos, jogos e brinquedos com materiais reciclados. Antes de construir é preciso classificar o material e separá-lo: O que vamos precisar para criar? Quais materiais? Quantos serão necessários? E assim por diante. As crianças que trabalham na construção ganham “seu pagamento”, pois, de modo geral, o conhecimento prévio das crianças sobre como se ganha dinheiro é o Trabalho, quem trabalha recebe. Quem recebe pode comprar o jogo ou o brinquedo que mais gostou, ou seja, de forma lúdica desenvolvemos um trabalho focado na sustentabilidade e na educação fiscal, onde a criança aprende o valor da natureza, de onde tiramos à matéria prima, aprende o verdadeiro sentido de praticar a sustentabilidade e aprende a ser um cidadão consciente, consumir somente o necessário.

MATERIAIS E MÉTODOS

O projeto aplicado está acontecendo no Centro de Educação Infantil Paulo Tallmann, com a turma de Pré I B, durante todo o ano de 2016, sendo este desenvolvido pelas professoras Daiana Lana, Juliana Carneiro, Elizete Tomio Lemos e Ivoni M. L. Conti, tendo como coordenadora do projeto Silvana Grimes.

A matemática está em todas as propostas e movimentos não só da Educação Infantil, como também no nosso cotidiano, no CEI a linguagem matemática está presente na roda de conversa, na chamada, na arte, na música, nas brincadeiras, nos cantos temáticos, em histórias, nos jogos e na forma que organizamos nosso pensamento.

As crianças sozinhas aprendem muito da linguagem matemática, descobrem formas, coisas iguais e diferentes, leves e pesadas, grandes e pequenas, conseguem organizar, classificar, criam conjuntos, estabelecem relações... É de suma importância o olhar atento do professor, o qual deve disponibilizar diversos materiais para as crianças a fim de possibilitar-lhes tais descobertas.

Nos professores oportunizamos diversas situações que permitem as crianças a desenvolver este processo de aprendizagem, tais como: chamada por crachá – quantas meninas e meninos, a leitura do calendário diariamente, músicas com relações matemáticas, propostas voltadas à organização e estímulos de pensamentos, culinária, brincadeiras com blocos de madeira e peças de encaixe, além de jogos e histórias.

A turma do Pré I B, vem demonstrando grande interesse por alguns conceitos matemáticos, situação na qual nós professoras observamos que através desse meio podemos resolver alguns conflitos que acontecem, sendo trabalhadas com as crianças nas rodas de conversa algumas regras para o bom convívio em sala. Acreditamos que a partir de uma proposta não formal – de apresentar graficamente o número e traçá-lo – iremos permitir que as crianças criem, explorem e inventem seus próprios modos de expressão e de relação com o outro e com o mundo.

Assim, é importante criarmos condições para que a matemática seja descoberta, oferecendo estímulos e estando atentas às descobertas das crianças.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este projeto iniciou-se através do projeto de sustentabilidade do CEI, onde apresentamos a reciclagem, mas como podíamos ajudar, além de separar o lixo? Além do projeto macro, através de observações, percebemos que as crianças em interações e brincadeiras utilizam à matemática. Então, viemos a pensar em propostas, onde pudéssemos fazer uma ligação com o projeto macro do CEI sobre "Sustentabilidade" e a Matemática.

Primeiramente em roda de conversa, esboçamos o conhecimento prévio das crianças sobre: Lixo, reciclagem, natureza, meio ambiente e planeta... Conversamos sobre todos os itens mencionados e suas importâncias. Apresentamos as lixeiras seletivas e seus respectivos lixos, oportunizamos diversas propostas referente a isto: selecionamos os lixos, recortamos de revistas, assistimos vídeos sobre os mesmos, criamos alguns objetos com os lixos, foi onde percebemos o interesse das crianças em matemática: sempre estavam contando, separando e ordenando por tamanho e formas; Foi onde surgiu a ideia de construir a fábrica do reciclado.

Na fábrica, muitas coisas foram confeccionadas: Chocalho, bilboquê, vai e vem, bonecos, jogos de memória, quebra cabeça, jogos de quantidades, concentração e raciocínio lógico. Mas, antes de construir é preciso classificar o material e separá-lo: O que vamos precisar para criar? Quais materiais? Quantos serão necessários? E assim por diante. As crianças que trabalham na construção ganham "seu pagamento", pois, de modo geral, o conhecimento prévio das crianças sobre como se ganha dinheiro é o Trabalho, quem trabalha recebe, ou seja, durante alguns meses iremos arrecadar "dinheiro", os quais são guardados em "poupanças".

Conforme as crianças vão trabalhando, vão juntando seu dinheiro e no final do ano faremos uma feira do reciclado, onde cada um poderá comprar o que mais lhe agradou, utilizando o seu "dinheiro" adquirido com a construção dos jogos e brinquedos. Enfim todos estão aprendendo e brincando com a matemática.

Os jogos e brinquedos ficam a disposição das crianças na sala para que em qualquer momento possam brincar e jogar. Além de criar os jogos e brinquedos, propomos a conscientização de alguns animais em extinção ou não como a tartaruga e a abelha, "estudamos" sobre elas e no fim um jogo relacionados a elas foi confeccionado.

Além de participarem no CEI das propostas as famílias também estão envolvidas no projeto, confeccionando objetos utilizando apenas materiais reciclados.

Assim, se dará continuidade para o 2° semestre na construção de novos jogos, brinquedos e aprendizagens.

CONCLUSÃO

Relacionamos a matemática no cotidiano das crianças, aprendendo ludicamente conceitos de classificação, seriação, contagem, pequenas contas de adição, formas geométricas, fazendo ligação com o projeto de Sustentabilidade. Sendo assim, justifica-se a escolha deste tema pelo fato da matemática estar presente no cotidiano das crianças, porém na Educação Infantil a aprendizagem acontece espontaneamente, partindo do interesse de cada um. Dessa forma, o estudo realizado contribuiu para que a criança elaborasse suas hipóteses, num contexto norteado de significados.

REFERÊNCIAS

BLUMENAU. **Diretrizes Curriculares Municipais para a Educação Básica**. Prefeitura. Secretaria Municipal de Educação. Educação Infantil. Blumenau: Prefeitura Municipal/SEMED, 2012. 108 p.

CAPÍTULO 10

INFLUÊNCIA DA PARTICIPAÇÃO DA FAMÍLIA NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 07/07/2020

Diane Saraiva Fronza
Instituto Federal Farroupilha – Campus Santa Rosa
Horizontina-RS
http://lattes.cnpq.br/3191053323135302

Guilherme Schildt Duarte
Universidade Federal de Santa Maria - Campus Santa Maria
Santa Maria-RS
http://lattes.cnpq.br/6441529216133050

Lara Rafaela Menezes
Universidade Anhanguera
Santa Rosa-RS
http://lattes.cnpq.br/7907117688279949

Marcelo Eder Lamb
Instituto Federal Farroupilha - Campus Santa Rosa
Santa Rosa – RS
http://lattes.cnpq.br/4733298775947401

RESUMO: O presente trabalho foi desenvolvido visando analisar a influência da participação da família no processo de ensino-aprendizagem da Matemática nos anos finais do ensino fundamental, e para isso procedeu-se essa investigação numa comunidade carente de um município do interior do Rio Grande do Sul. Para a realização desta sondagem, foi realizado o estudo de caso em uma escola da rede municipal, na qual foram coletadas informações por meio de três tipos de questionários. Dois questionários com questões fechadas para alunos e familiares e questionário com perguntas abertas para o professor da área de matemática. Estes questionários tiveram por objetivo analisar a situação socioeconômica das famílias, sua composição, a escolaridade dos responsáveis, como ocorre o auxílio aos filhos nas tarefas de casa, além da incidência de estudo extraclasse pelos alunos. Com as questões relacionadas aos discentes, buscou-se compreender o posicionamento dos professores frente essa realidade, bem como suas percepções. O referencial teórico versou sobre a importância da educação, do ensino da matemática nesta fase da carreira estudantil e do diálogo entre família e escola na sociedade através de autores como Paulo Freire, Vygotsky, Skovsmose, Winnicott com apoio de documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais, Lei de Diretrizes e Bases e Estatuto da Criança e do Adolescente. Embora o retorno dos questionários por parte dos familiares seja pouco significativo, a análise realizada a partir das respostas dos discentes constatou-se que as famílias se encontram distante do processo de ensino, participando esporadicamente dos chamados da escola. Há uma pequena parcela de famílias que tentam auxiliar os filhos, porém não conseguem ajudar nas dúvidas e dificuldades apresentadas nas tarefas que competem a disciplina de Matemática. Frente a essa realidade, o professor acaba sentindo reflexo no rendimento dos alunos e busca fazer o possível no tempo que lhe é atribuído em sala de aula.

PALAVRAS-CHAVE: Família. Professor. Ensino. Aprendizagem. Matemática.

INFLUENCE OF FAMILY PARTICIPATION IN THE MATHEMATICS TEACHING-LEARNING PROCESS IN THE FINAL YEARS OF ELEMENTARY SCHOOL

ABSTRACT: The present work was developed aiming to analyze the influence of family participation in the teaching-learning process of Mathematics in the final years of elementary school, and for that purpose, this investigation was carried out in a poor community in a city in the interior of Rio Grande do Sul. To conduct this survey, a case study was carried out at a school in the municipal network, in which information was collected through three types of questionnaires. Two questionnaires with closed questions for students and relatives and a questionnaire with open questions for the teacher in the area of mathematics. The purpose of these questionnaires was to analyze the socioeconomic situation of the families, their composition, the education of those responsible, how they help their children with homework, in addition to the incidence of extra-class study by students. With the questions related to students, we sought to understand the position of teachers in face of this reality, as well as their perceptions. The theoretical framework was about the importance of education, of teaching mathematics at this stage of the student career and of the dialogue between family and school in society through authors, such as Paulo Freire, Vygotsky, Skovsmose, Winnicott with the support of official documents such as the Curriculum Parameters National Laws, Law of Guidelines and Bases and Statute of Children and Adolescents. Although the return of the questionnaires by the family members is negligible, the analysis carried out based on the responses of the students found that the families are distant from the teaching process, sporadically participating in school calls. There is a small portion of families that try to help their children, but they are unable to help with the doubts and difficulties presented in the tasks that compete in the discipline of Mathematics. Faced with this reality, the teacher ends up feeling reflected in the students' performance and seeks to do everything possible in the time allotted to him in the classroom.
KEYWORDS: Family. Teacher. Teaching. Learning. Mathematics.

1 | INTRODUÇÃO

O presente trabalho de pesquisa parte do desejo de investigar como a participação da família influencia no processo de ensino-aprendizagem da matemática nos anos finais de uma comunidade carente do município de Horizontina-RS. Para tanto, foi verificado a importância da família na aquisição de conhecimentos matemáticos pelos educandos nos anos finais da Escola Municipal São José Operário, situada em uma comunidade carente do município de Horizontina-RS.

A análise ocorreu com os alunos do Ensino Fundamental II, o momento do caminho estudantil em que se retoma habilidades aprendidas nos anos iniciais e prepara-se para o Ensino Médio. Considerou-se todos os envolvidos no processo de ensino, de modo que, foram aplicados questionários aos alunos, professores e familiares. Para os alunos objetivou-se conhecer a realidade do cotidiano e ocorreu a análise das condições socioeconômicas dos integrantes que constituem a família dos educandos. A partir disso, foi possível investigar se ocorre a participação efetiva da instituição familiar na aprendizagem dos conteúdos matemáticos do estudante, bem como perceber a visão do professor de matemática sobre a participação dos pais no processo de ensino-aprendizagem do educando para então identificar formas de interferências do professor frente a possíveis defasagens causadas pela ausência das famílias dos discentes no processo de ensino.

Neste sentido, a averiguação permitiu a reflexão a fim de levantar possibilidades de atuação do docente, podendo auxiliar na compreensão deste contexto educacional, visto que o incentivo a educação, por parte da família, possibilita que a criança estabeleça um futuro profissional de qualidade e trace novos rumos a sua história enquanto sujeito inserido em uma realidade com poucas oportunidades.

A seguir será apresentada a revisão bibliográfica abordando a diferença entre educação e ensino, o ensino da matemática, a instituição familiar e a relação entre família e escola. Em seguida será apresentada a metodologia utilizada no estudo de campo, bem como as análises dos dados e informações coletadas e conclusões.

2 I REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Educação e Ensino

Durante a vida, uma pessoa integra vários grupos em diferentes contextos. Todos os grupos oferecem estímulo e orientação e, para tanto, são cruciais em seu desenvolvimento, pois são capazes de influenciar no seu processo de amadurecimento, processo esse que se complementa com a educação e o ensino. Para tanto, Nérici (1895, p. 7) conceitua a educação como:

> [...] o processo que visa capacitar o indivíduo a agir conscientemente diante de situações novas de vida, com aproveitamento da experiência anterior, tendo em vista a integração, a continuidade e o progresso sociais, segundo a realidade de cada um, para serem atendidas necessidades individuais e coletivas.

Assim, percebe-se que a educação para a vida do sujeito é abrangente, devendo servir de suporte para o crescimento pessoal e integral. Pensando na criança incorporando um meio social, Vygotsky (apud ABREU, 2006) defende uma abordagem histórico cultural, propondo “a construção de uma nova psicologia, fundamentada no materialismo histórico e dialético, que não reduz o ser humano, entendendo-o como uma unidade da totalidade”. Desta forma, o meio cultural e histórico é forte contribuinte para seu crescimento pessoal, pois o aluno não está isolado, mas em contato com outros sujeitos dentro de grupos sociais, o que lhe permite uma gama de aprendizagens.

O ser humano nasce totalmente dependente, deste modo, a primeira instituição que deve dar suporte é a família. Esta, por sua vez, é responsável por uma educação que faça com que o indivíduo se desenvolva, assegurando seus direitos e cumprindo seus deveres, além de fornecer-lhe suporte psicológico. A escola é um lugar onde a interação e convivência com outros pares pode auxiliar na aprendizagem de novas habilidades que não são naturais, como a escrita, a leitura e o domínio do cálculo. Seu principal foco é o ensino, pois é um espaço que está organizado para garantir esse fim, aproximando o aluno de conhecimentos que ainda não possui. Nesta perspectiva Paulo Freire reflete o papel do professor enquanto educador na perspectiva de sua responsabilidade social:

> Você, eu, um sem-número de educadores sabemos todos que a educação não é a chave das transformações do mundo, mas sabemos também que as mudanças do mundo são um quefazer educativo em si mesmas. Sabemos que a educação não pode tudo, mas pode alguma coisa. Sua força reside exatamente na sua fraqueza. Cabe a nós pôr sua força a serviço de nossos sonhos (FREIRE, 1991, p. 126).

Portanto, a educação em si ocorre desde os primeiros dias de vida, onde a família é a única referência até que o sujeito comece a frequentar a escola. Neste segundo ambiente, surgem novos conceitos e habilidades para aprender, sendo desta forma que ocorre o ensino. Ainda que, diante das diversidades de pessoas, situações e contextos, os conhecimentos não estão prontos e acabados, mas em constante construção dentro e fora da escola, o que comprova a estreita ligação com o meio social.

2.1.1 Ensino Fundamental, o desenvolvimento integral e o ensino da matemática

No Brasil, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (1996, p. 7) prevê que a finalidade da educação é "o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho". Diante destes nortes predispostos para a educação, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's (1996) destacam que a escola conheça sua demanda a fim de acolhê-la devidamente para evitar a evasão escolar que, obviamente, acarretará em danos ao indivíduo, como a exclusão social por diversos fatores. Esse acolhimento é essencial, com vistas a garantir a constituição de um cidadão íntegro e atuante no mercado de trabalho.

Outro fator que os PCN's preveem é o da interação entre a escola e a comunidade, esperando-se que haja contato entre ambos, visando uma formação completa e de qualidade. Essa relação permite que se conheça a realidade do aluno, tornando possível um trabalho contextualizado, até porque, é impossível "separar o que o aluno aprende na escola e o que ele traz para escola" (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 1996, p. 43).

Com enfoque na matemática, os PCN's abordam que no ensino pode-se destacar dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Assim, o trabalho com representações faz com que o aluno aprenda como organizar e trabalhar com dados que partem de um contexto que convive. A matemática é responsável pelo exercício e formação da capacidade intelectual, estruturação do pensamento e agilização do raciocínio lógico-dedutivo no aluno. Isso deve ocorrer no Ensino Fundamental, criando ali um alicerce que o sustentará para as próximas etapas de sua aprendizagem.

Para Skovsmose (apud OGLIARI, 2007, p.3), o ensino da matemática deve ser democrático, voltado aos interesses das comunidades, a fim de alcançar todas as classes sociais, para a formação do cidadão crítico, apto a participar, discutir e refletir sobre os aspectos da realidade que vivencia.

Para tanto, o professor precisa saber o histórico de seus alunos, suas condições sociológicas, psicológicas, culturais e o modo como cada um deles tem de ver e conceber a matemática, por isso a necessidade do envolvimento com a família desse aluno, pois isso lhe ajudará a demonstrar a presença da matemática no dia a dia.

2.2 Instituição familiar e escola

Como citado anteriormente, a família é a primeira instituição pela qual a criança fará parte e, sobre ela, segundo o art. 4º do Estatuto da Criança e do Adolescente, (Lei n.8.069, de 13 de julho de 1990) o poder público juntamente com a sociedade devem "assegurar, com absoluta prioridade, a efetivação dos direitos referentes à vida, à saúde, à alimentação, à educação, ao esporte, ao lazer, à profissionalização, à cultura, à dignidade, ao respeito, à liberdade e à convivência familiar e comunitária" .

Winnicott (apud GARCIA, 2000) sempre julgou de extrema importância o auxílio da família em qualquer dificuldade, cuja qual o filho poderia estar enfrentando, dizendo que o lugar em que a criança vive, quando bem estruturado, é o melhor lugar para o desenvolvimento da mesma. Quando se trata de educação, os pais ou responsáveis pela criança são os maiores influenciadores. Tendo em vista que, nem sempre a família é composta por pai e mãe biológicos, Winnicott (apud GARCIA, 2000) afirma que a criança precisará ainda mais de cuidados e, para esse cuidado, deveria prover de pessoas capacitadas para o exercer.

É necessário que a família esteja vinculada a escola, pois assim é possível suprir necessidades psíquicas e sociais. A relação entre essas instituições deve ser dialógica e aberta, sendo importante destacar um dos objetivos para esta etapa citado pela Lei de Diretrizes e Bases (LDB), o qual supõe uma responsabilidade social para a escola, "o fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social". Nesta perspectiva, fica nítido que ambas instituições são de grande valia, visto que são incumbidas da formação que prepara o sujeito para a vida e atuação na sociedade, bem como para a independência.

Com base nisso, é nítido que a escola sozinha não consegue contribuir de forma efetiva para um bom rendimento do aluno, e que para garantir uma formação integral e de qualidade, o envolvimento e o comprometimento da família com o aprendizado do aluno se faz necessário.

3 I METODOLOGIA

Quanto à tipologia de pesquisa, a estratégia de abordagem dos dados adotada foi quanti-qualitativa, desenvolvida com caráter exploratório da participação familiar no processo de ensino da matemática, realizando, quanto aos procedimentos metodológicos, um estudo de caso, que se deu numa escola da rede municipal de Horizontina-RS com alunos, professora de Matemática e com os pais de alunos (GIL, 2010).

A população selecionada estava localizada em um dos bairros mais carentes e alguns na zona rural do município de Horizontina-RS. A amostra foi composta de 95 questionários respondidos pelos alunos matriculados do 5° ao 9° ano, numa faixa etária de 10 a 14 anos. Ainda, dos 95 questionários enviados aos pais por intermédio dos alunos, 29 retornaram respondidos. Os alunos e os pais responderam questionários com perguntas fechadas, enquanto a professora respondeu um questionário que continha perguntas abertas.

A análise dos questionários dos alunos e de seus familiares foi feita através de análise quantitativa para identificar a incidência dos dados, já o questionário dos professores recebeu análise qualitativa e sua interpretação ocorreu de forma global e individual.

4 I ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

4.1 Análise Socioeconômica dos Alunos e suas Famílias

Conforme os dados do questionário, podemos ver a condição socioeconômica de cada família, para pressupor se há condições de aquisição de meios que permitem acessar a internet, visto que, o ensino dado apenas em sala de aula não é suficiente para que haja um bom rendimento na aprendizagem. Sendo que, das 29 famílias, apenas três não possuem renda, as quais acreditamos que recebem incentivo do programa Bolsa Família do governo e cerca de metade das famílias consultadas recebem entre um e três salários mínimos.

Em relação a composição das famílias, a maioria tem 4 ou mais pessoas (20 famílias) entre os dependentes da renda familiar. Dado que, comparado com a renda familiar encontrada, pode demonstrar a dificuldade da família em prover subsídios básicos diários e, consequentemente, no oferecimento de materiais escolares, além de outros materiais alternativos, como: jogos, livros, etc. Principalmente, considerando que através das respostas do questionário percebeu-se que em doze famílias uma pessoa trabalha, e em outras doze que duas pessoas da família trabalham.

Em relação à escolaridade, observou-se que, na maioria dos casos, o pai e a mãe possuem apenas o Ensino Fundamental concluído, quatorze concluíram a educação básica e apenas um realizou Ensino Técnico. Não encontramos nenhum caso em que os responsáveis tenham Ensino Superior, o que pode representar uma dificuldade de auxiliar os filhos nas tarefas escolares e ajudá-los com suas dúvidas.

4.2 Participação da família no processo ensino-aprendizagem da matemática

Ao questionar os alunos se recebem ajuda dos pais nas tarefas de casa, percebeu-se que menos de um terço das famílias (25 alunos) estão presentes na realização das tarefas de casa. Como consequência, o rendimento dos alunos é afetado, pois como a professora mencionou “se os pais olham os cadernos de seus filhos todos os dias, eles iriam se comprometer muito mais e, consequentemente, a aprendizagem melhoraria”.

No que se refere a esta participação, os alunos foram questionados se quando têm dúvidas nos temas de casa de matemática pedem ajuda ou não, 71% dos que participaram da pesquisa buscam ajuda e os demais não pedem ajuda.

Nestas condições, sondou-se quem é o familiar que auxilia dentro dos casos que recebem ajuda todos os dias ou às vezes. Sobre a perspectiva do Gráfico 01 percebeu-se uma maior incidência da figura materna, a qual acompanha a figura paterna quando aparece.

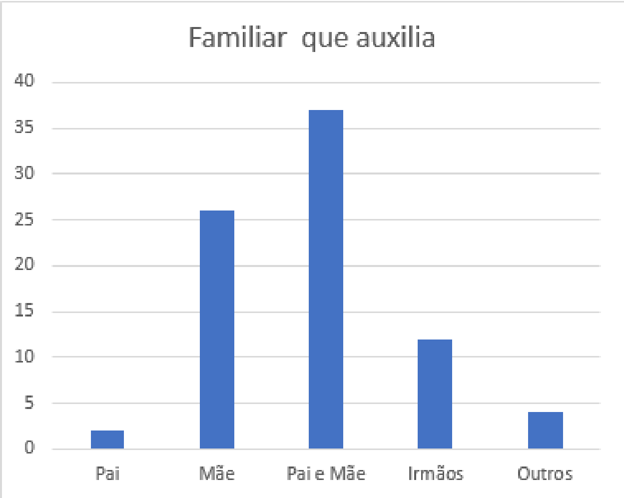


Gráfico 01: Familiar que auxilia nas tarefas

Apesar disso, 100% dos pais acham importante auxiliar o(a) filho(a) nos temas de casa, demonstrando consciência de que ajudar o aluno nas tarefas de casa é dar continuidade ao trabalho que se desenvolve na escola.

Sobre os temas de matemática, conforme análise, 55,17% conseguem auxiliar nos temas de matemática e 10,34% somente às vezes. A professora percebe isso quando diz que “em uma minoria sim, quando o aluno faz o tema e comenta sobre a atuação dos pais e quando os pais vêm para a escola e comentam sobre a preocupação em relação ao seu filho”, porém quando questionada se os pais aparecem nas reuniões quando solicitados, a mesma disse “nem sempre”.

Quanto a estudar e revisar a matéria da aula em casa, a maioria estuda somente antes da prova, e essa porcentagem coincide com a dos alunos que recebem ajuda na realização das tarefas às vezes. Conclui-se que se houver aumento na participação dos familiares, apenas uma pequena parcela estará desamparada.

5 | CONCLUSÃO

Frente ao estudo realizado sobre a influência da família na participação do processo de ensino aprendizagem e da sondagem feita em uma comunidade carente, foi possível perceber que a família e escola devem andar juntas pelo bem comum do desenvolvimento do cidadão em formação.

O estudo permitiu notar que poucos alunos possuem a participação efetiva da família, a qual mesmo não conseguindo auxiliar nas dificuldades de matemática do aluno está presente incentivando. Além disso, aquelas que não retornaram apontam para um cenário de descaso com a educação do aluno.

Diante da realidade que diagnosticamos, não foi possível identificar formas de como o professor deve agir diante as defasagens causadas pela ausência das famílias dos discentes no processo de ensino, pois se os pais comparecem à escola apenas quando solicitados, torna-se difícil atuar além da sala de aula estabelecendo um vínculo com a família. Então, o que resta é aproveitar a carga horária destinada a disciplina em sala de aula, priorizando metodologias dinâmicas, atrativas e que motivem o gosto pela matemática. Fica assim como mais uma atribuição do professor transmitir aos alunos que o professor é um amigo, alguém para confiar e desenvolver o espírito de curiosidade para que o sujeito em formação possa almejar novas oportunidades.

Frente aos dados coletados, a família não tem participação efetiva no ensino e aprendizagem de matemática dos alunos, sendo ainda que poucos comparecem a escola. Ainda que, na visão da professora frente ao contexto conturbado de seus alunos, a presença dos familiares estimularia os alunos a estudarem. Isso desencadearia momentos de diálogo e, se bem conduzidos, uma relação de troca, confiança e apoio entre os envolvidos. Portanto, o modo que a família participa na vida escolar dos seus educandos influência em todo o processo de desenvolvimento, sendo ele biológico, psicológico e cognitivo.

REFERÊNCIAS

ABREU, A. **A psicologia Histórico Cultural de Vygotsky**. Disponível em <https://albertoabreu.wordpress.com/2006/07/18/a-psicologia-historico-cultural-de-vygotsky> Acesso em: nov. 01 2017.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** *(PCNs).* Matemática. Ensino Fundamental. Terceiro e Quarto Ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Lei no 8.069, de 13 de julho de 1990. Dispõe sobre o Estatuto da Criança e do Adolescente e dá outras providências. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 16 jul. 1990. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L8069.htm#art266>. Acesso em : nov 01 2017

FREIRE. P. **A Educação na Cidade**. São Paulo: Cortez; 1991.

GARCIA, R. M.. **O tratamento de crianças afastadas do convívio familiar**. 2009. Disponível em: http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1679-432X2009000100005 . Acesso em: set. 29 2017.

GIL, A. C. ***Como elaborar projetos de pesquisa.*** 5.ed. São Paulo: Atlas, 2010.

NÉRICI, I. **Educação e Ensino**. São Paulo: Livros que constroem, 1985.

CAPÍTULO 11

OPERAÇÕES E SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: UM RELATO DE EXPERIÊNCIA

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 05/08/2020

Leniedson Guedes dos Santos
Universidade Federal do Goiás - UFG.
Goiânia-Go.
http://lattes.cnpq.br/6600988344119120

Rodrigo Ferreira dos Santos
Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB
Barreiras-Ba
http://lattes.cnpq.br/9517424846611868

Ulisses Suriano da Silva Neto
Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB
Barreiras-Ba
http://lattes.cnpq.br/9042020181161276

Maurílio Messias Bomfim Alves
Educandário Municipal Eloy Barbosa Guedes - EMEBG
Santa Rita de Cássia-Ba

RESUMO: Este trabalho relata a realização de um minicurso no que teve como tema o estudo dos algoritmos das operações fundamentais da aritmética e como objetivo promover uma reflexão sobre a importância da estrutura dos sistemas de numeração na concepção dos algoritmos dessas operações fundamentais. A metodologia consistiu no estudo das operações realizadas com números representados no sistema de numeração decimal, bem como, de sistemas de numeração com outras bases, diferentes de dez, para verificar como os algoritmos das operações fundamentais funcionam com números representados nessas bases. Essa atividade teve como público professores da educação básica e estudantes de graduação e pós graduação em Matemática e em Pedagogia. Esta experiência mostrou a importância do sistema de numeração para a realização das operações fundamentais, assim como, promoveu uma frutífera discussão sobre a realização de operações matemáticas de forma automática.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas de Numeração. Operações. Algoritmos.

OPERATIONS AND NUMBERING SYSTEMS: AN EXPERIENCE REPORT

ABSTRACT: This work relates the realization of a short course that had as its theme the study of fundamental operations algorithms in arithmetic and as the objective to promote a reflection on the importance of the structure of numbering systems in the fundamental approaches algorithm. The methodology consists of studying the operations performed with numbers represented in the decimal numbering system, as well as, numbering systems with other bases, different ten, to verify how the algorithm of fundamental operations with the numbers represented in those bases. This activity was aimed at teachers of basic and post-graduate education in mathematics and pedagogy. This experience demonstrated the importance of the numbering system for the performance of fundamental operations, such as, for example, promoting a fruitful discussion about performing mathematical operations

automatically.

KEYWORDS: Numbering Systems. Operations. Algorithms.

1 I INTRODUÇÃO

Expressões como “pegar emprestado” ou “vai um” revelam as diferentes maneiras que as pessoas utilizam para realizar as quatro operações. Os livros didáticos têm apresentado algoritmos diferentes para a realização dessas operações. Porém, mais do que simplesmente executá-los, entender o funcionamento desses algoritmos nos parece fundamental para compreender as dificuldades que que alguns alunos têm em realizar as operações básicas da aritmética.

“Ensinar matemática tem sido frequentemente, uma tarefa difícil. Às dificuldades intrínsecas, somam-se as decorrentes de uma visão distorcida da matéria, estabelecida, muitas vezes, desde os primeiros contatos” (MACHADO, 2005, p.9).

Dessa maneira, o exercício da docência em matemática nas séries iniciais da educação básica promove naturalmente alguns questionamentos: de que maneira as pessoas realizam as quatro operações? Por que as operações fundamentais são realizadas de tal maneira? Como funcionam os algoritmos mais utilizados para essas operações?

Tendo em vista esses questionamentos, foi realizada uma pesquisa bibliográfica e nela foi observada que para entender o funcionamento dos algoritmos das operações fundamentais se faz necessário conhecer o sistema de numeração decimal.

Considerando que “o papel desempenhado pelo 10 em nosso sistema de numeração é apenas uma opção ou uma circunstância” (DOMINGUES, 1991, p.34), Surgem naturalmente outros questionamentos: Como funciona os sistemas de numeração diferentes da decimal (numeração binária, ternária, sexagesimal e etc.)? os algoritmos utilizados para resolver as operações no sistema decimal também funcionariam com sistemas de numeração com base diferente de dez?

Diante de tais estudos, viu-se a necessidade de elaborar um minicurso voltado para professores da educação básica, estudantes de licenciatura em Matemática e licenciatura em Pedagogia (tendo em vista que é durante séries iniciais que os estudantes começam a aprender as quatro operações.), com o objetivo de discutir as questões acerca dos algoritmos das quatro operações.

O minicurso aqui relatado teve como objetivo geral promover uma discussão sobre a importância da estrutura do sistema de numeração na concepção dos algoritmos das operações fundamentais, e como objetivos específicos: Discutir sobre o funcionamento dos algoritmos das operações com números naturais e verificar a utilização desses algoritmos em sistemas de numeração diferentes da decimal.

2 | METODOLOGIA

O presente relato de experiência refere-se ao minicurso realizado no XVIII Encontro Baiano de Educação Matemática – EBEM realizado em Ilhéus-Ba, entre os dias 03 e 06 de Julho de 2019, intitulado “Operações e Sistemas de Numeração”, em dois encontros de 4 hs cada. Teve por volta de 30 participantes.

A metodologia consistiu num primeiro momento na proposição da resolução e discussão de uma lista de exercícios que continham questões acerca das operações de adição e subtração no sistema de numeração decimal e suas propriedades.

No segundo encontro foi proposto um estudo dos sistemas de numeração diferentes da decimal por meio da discussão de uma apostila e em seguida foi proposta a resolução de exercícios que consistiam na conversão de números de um sistema de numeração para o outro e a realização de operações nos diferentes sistemas de numeração.

3 | REFERENCIAL TEÓRICO E DISCUSSÃO

Partindo do pressuposto de que a matemática é uma área de conhecimento acessível a todos e que aprender matemática é um direito fundamental para o exercício da cidadania, percebe-se que o mínimo que se pode esperar de um egresso do ensino básico é o conhecimento das quatro operações fundamentais da aritmética.

Neste sentido, a Base Nacional Comum Curricular (2017), ao se referir sobre os anos iniciais do Ensino fundamental diz:

> Nessa fase espera-se também o desenvolvimento de habilidades no que se refere à leitura, escrita e ordenação de números naturais e números racionais por meio da identificação e compreensão de características do sistema de numeração decimal, sobretudo o valor posicional dos algarismos. (BRASIL, 2017, p. 224 - 225).

Dessa forma, nos parece que compreender como funciona os algoritmos dessas operações é algo muito importante e que passa despercebido pela maioria das pessoas que fazem as operações de forma automática.

Assim, as questões utilizadas na primeira etapa do minicurso mostram a íntima relação entre o sistema de numeração decimal e o algoritmo da operação de adição. Dentre as questões utilizadas destacamos a seguinte:

> Vamos tentar decifrar os criptogramas abaixo? Cada letra indica um algarismo. Letras iguais representam algarismos iguais, e letras diferentes representam algarismos diferentes. Use o raciocínio lógico e descubra o valor de cada letra em cada criptograma. Depois, refaça as operações para conferi-las. a) d) A AAA + B BBB + C CCC = BA AAC (DANTE, 2012, p.37)

O que chamou a atenção durante a execução desta tarefa foi o grande tempo utilizado para a resolução das atividades (cerca 40 min só com a questão acima), bem como o reconhecimento por parte dos participantes de que é necessário um bom conhecimento sobre o sistema decimal de numeração para descobrir quais são os algarismos representados pelas letras.

No estudo, partir do sistema de numeração decimal, de como funciona os sistemas numeração com bases diferentes, tivemos a sorte da colaboração de dois participantes (um mestrando em Educação Matemática e um mestre em Matemática) que têm a teoria de números como tema de pesquisa. Eles nos ajudaram com as discussões sobre o rigor das definições dadas e também sobre o ensino desses conceitos, bem como com informações que extrapolavam o objetivo do minicurso, o que enriqueceu ainda mais nosso trabalho.

Nos exercícios sobre a conversão de bases dos sistemas de numeração e sobre a realização das operações fundamentais nessas bases, observamos que os participantes conseguiram realizar de maneira efetiva a tarefa proposta.

A realização das operações com números representados em sistemas de numeração diferentes, indica para nós o desenvolvimento uma aprendizagem significativa, pois a não-literalidade citada por Ausbel na definição de aprendizagem significativa (apud MOREIRA 2009) se associa, no caso das operações, ao aprendiz saber realizar as operações independentemente do sistema de numeração.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetivos propostos pelo minicurso foram alcançados, pois, além de promovermos um debate sobre um conteúdo bastante relevante para o estudante e professor de matemática, buscando sempre a compreensão de como os algoritmos funcionam, ainda aproveitamos a oportunidade de aproximar o estudante e profissional de pedagogia dos conteúdos matemáticos que são muito importantes para a sua atuação profissional.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. MEC. Brasília, DF: 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática: 6º ano**.3 ed. São Paulo: Editora Ática, 2012.

DOMINGUES, Higino H. **Fundamentos da Aritmética**. São Paulo: Atual,1991.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Realidade**. 6 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

MOREIRA, M. A. **Subsídios teóricos para o professor pesquisador em ensino de ciências a teoria da aprendizagem significativa.** Porto Alegre, 2009.

CAPÍTULO 12

TEM ÂNGULO EM TODO LUGAR

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 07/07/2020

Alessandra dos Santos Fernandes
Escola de Ensino Fundamental Professor Emir Ropelato
Timbó – SC
http://lattes.cnpq.br/7425727092172999

RESUMO: O artigo Tem Ângulo em Todo Lugar descreve um trabalho realizado com alunos do 7º ano, numa escola pública estadual em Timbó/SC. A ideia de ângulo está presente em todo lugar. Para construir casas, prédios, móveis e muitas outras invenções humanas, esse conceito é utilizado. A partir dessa ideia, os alunos analisaram situações em que o ângulo está presente. Observaram a escola, sua casa e outros lugares onde vivem. Foi realizada uma visita no Parque Henry Paul em Timbó, Santa Catarina. Estudaram o conceito que aparece nos livros e desenvolveram atividades. O transferidor, instrumento de medida foi utilizado pela primeira vez. Aprenderam a medir ângulos. Algumas oficinas foram desenvolvidas para compreender a diferença entre volta completa, meia volta e ângulo reto. Foi medida a abertura máxima da porta da sala de aula. Através das divisões das horas no relógio, foi possível trabalhar medida de ângulos, reconhecendo ângulos agudos, obtusos e reto. E também foi trabalhado ângulo em gráficos de setores.
PALAVRAS - CHAVE: Ângulo. Medida. Transferidor.

HAS ANGLE EVERYWHERE

ABSTRACT: The article The angle in Everywhere describes a work with 7th grade students, carried out in a state public school in Timbó / SC. The idea of angle is present everywhere. To build houses, buildings, furniture and many other human inventions, this concept is used. Based on this idea, students analyzed situations in which the angle is present. They observed the school, their home and other places where they live. A visit was made to Henry Paul Park in Timbó, Santa Catarina. They studied the concept that appears in books and developed activities. The protractor, a measuring instrument, was used for the first time. They learned to measure angles. Some workshops were developed to understand the difference between full turn, half turn and straight angle. The maximum opening of the classroom door was measured. Through the divisions of the hours on the clock, it was possible to work measuring angles, recognizing acute, obtuse and straight angles. And angle charts were also worked on.
KEYWORDS: Angle. Measure. Protractor.

1 I INTRODUÇÃO

Os alunos ainda não conheciam o conceito ângulo, percebeu-se a necessidade de trabalhar esse tema. O objetivo principal do trabalho é partir de situações práticas, observar objetos e formas por toda parte que contenham o conceito de ângulo. Reconhecer que tem ângulo em todo lugar.

A saída dos alunos do ambiente escolar para reconhecer ângulo em diversos lugares é uma ação para incentivar o aluno a identificar ângulos no mundo em que vive. Compreender que este conceito vai além da escola.

Outro objetivo desse trabalho é reconhecer o ângulo como uma simples abertura, a ideia de um giro ou rotação, ou ainda como uma região limitada por duas semirretas com mesma origem.

Ao compreender o conceito de ângulo, o aluno está pronto para aprender a medir, utilizar o transferidor como instrumento de medição. E a partir dessa etapa, classificar alguns ângulos pela medida.

E por fim construir gráfico de setores, relacionar ângulos, frações e porcentagem com temas de se cotidiano.

2 | MATERIAL E MÉTODOS

O trabalho teve início em março deste ano (2016), quando em sala de aula houve um diálogo sobre o tema ângulo e cada aluno pode colocar o que sabia sobre o assunto. Partindo desses comentários, foi preparado uns slides sobre as principais considerações sobre ângulos e exemplos do dia a dia. Nessa aula, o que chamou muita atenção dos alunos foi a presença de ângulos para aplicar injeção e construções fora dos padrões, que não formam ângulos retos com o chão.

Dando continuação, uma vez por semana, os alunos tinham uma aula sobre o projeto. A primeira atividade realizada, foi uma oficina, onde cada aluno desenhou um círculo, com auxílio do compasso, recortou e fez dobraduras, ao meio e em quatro partes. Desse modo pode reconhecer o ângulo de volta completa (360°), o ângulo de meia volta (180°) e ângulo reto (90°). De maneira superficial começaram a ter as primeiras noções de medidas.

Na semana seguinte, foi solicitado aos alunos que trouxessem esquadros para a aula, neste momento eles reconheceram as medidas contidas nos esquadros. Em um esquadro 45°, 45° e 90°, e no outro 30°, 60° e 90°.

Após essas primeiras considerações, a definição de ângulo que aparecem em livros foi apresentada: ângulo é a união de duas semirretas de mesma origem em um plano com umas das regiões determinadas por elas. Apresentado aos alunos uma região convexa e outra não convexa. Também destacou-se os elementos de um ângulo, como vértice e lados, assim como também nomear um ângulo.

Foi solicitado com antecedência para cada aluno providenciar um transferidor. Então, na aula onde quase todos trouxeram, o tema medida de ângulos foi trabalhado. Para começar a falar em medidas, buscou-se a história dos ângulos. Segundo o professor Marcos Noé, da equipe Brasil Escola, A Matemática apresenta nos estudos relacionados a ângulos, que a medida completa de uma circunferência corresponde a 360º (graus). A utilização dessa medida não está ligada a algum estudo específico, ela possui conexões com os povos babilônicos, nos assuntos ligados à Astronomia. Os babilônios tinham uma grande admiração pela Astronomia, a qual estava condicionada à religião e ao calendário. Essa união permitia que os babilônios constituíssem um roteiro identificando as estações do ano, no intuito de objetivarem o momento certo para a preparação da terra e plantio, construção e expansão das cidades e rentabilidade na comercialização de produtos. Portanto, os babilônios baseavam sua maneira de viver através da produtividade no calendário apoiado na Astronomia.

O sistema de numeração sexagesimal (base 60) é fundamental na utilização da medida de 360º. Esse valor indica que a circunferência está dividida em 360 partes, valor aproximado dos 365 dias de um ano, giro da terra. Dessa forma, quando dividimos as unidades por 10 na base decimal, obtemos os décimos. Assim, se dividirmos as unidades por 60 no sistema sexagesimal, formamos os sexagésimos. Dando sequência, temos que, se queremos encontrar os centésimos na base 10, basta dividirmos a unidade por 100. Partindo-se desse pressuposto, a possibilidade de dividirmos a circunferência em 360 partes, permite a ideia da fração 1/360, ter relação com a medida denominada "grau".

Compreendendo a origem do grau, tudo ficou mais fácil, pois a história sempre foi um fator motivador. Assim, os alunos viram que existem transferidores que medem ângulos até 180° e existem outros que medem até 360°.

Eles compreenderam que se coloca o centro do transferidor no vértice do ângulo e o zero grau alinhado a um dos lados do ângulo. Desse modo, obtém-se a medida do ângulo através da indicação do outro lado. Muitas atividades foram propostas sobre medições de ângulos. Atividades do livro didático e também de xerox complementando.

Após a compreensão de medida de ângulo, foi feita a classificação: ângulo agudo, ângulo obtuso e ângulo reto.

Já com bastante conhecimento sobre o assunto, os alunos tiveram uma aula diferente, foram ao parque Henry Paul em Timbó/SC, para identificar ângulos em diversos lugares, inclusive nas áreas esportivas. Essa saída da escola aconteceu no dia 31 de maio de 2016, a professora de educação física trabalhou junto nessa aula, promovendo um momento interdisciplinar, entre matemática e educação física. Nesta saída de campo, os alunos registraram os ângulos reconhecidos através de desenhos. Além da aprendizagem que obtiveram, eles aproveitaram uma área linda da cidade de Timbó.

Aproveitando esse estudo de reconhecer ângulo em todo lugar, os alunos tiveram que fazer uma atividade, com uma foto. Nessa foto, o ângulo deveria ser destacado e medido.

Outra exploração de ângulos foi no relógio. Através do relógio, foi possível relacionar ângulos e frações. Um aluno confeccionou um relógio de madeira, e nesse relógio, vimos que quando os ponteiros marcam 1 hora, o ângulo formado por eles mede 30°. Pois 360°:12

resulta em 30°. A partir dessa observação outros cálculos foram explorados.

Ideias envolvendo álgebra foram propostas, como um ângulo mais 36° resulta em 360°, calcular o valor desse ângulo. Da mesma forma, através de desenhos, descobrir quanto falta para chegar a 180°.

Os ângulos fracionários foram trabalhados e assim os alunos compreenderam que 1° equivale a 60 minutos e um minuto equivale a 60 segundos.

E por fim, a elaboração de gráficos, através de pesquisas na escola. Uma das pesquisas foi referente ao Bullying, projeto interdisciplinar da escola. Em duplas, os alunos tiveram que organizar as informações em gráficos de setores. Com isso, foi possível relacionar ângulos, frações, gráficos e porcentagens.

Tudo foi organizado para expor na feira de matemática.

3 I RESULTADO E DISCUSSÃO

Considerando que no início desse projeto, os alunos sabiam quase nada de ângulos, se obteve um bom resultado. Hoje eles observam ângulos em todos os lugares e ainda comentam, olha professora tem ângulo aqui!

Todos já conseguem medir com bastante precisão, já adquiriram uma linguagem mais cientifica do assunto. Fazendo com que, ao ler sobre o assunto, tudo passa a ser mais simples.

O conhecimento sobre ângulo é base para toda a geometria, assim eles já estão mais preparados para estudar os demais conteúdos.

Trabalhando o projeto uma vez por semana foi válido, pois não houve esquecimento, e se tornava interessante.

Além de todo o saber adquirido, também foi possível perceber que a autoestima dos alunos melhorou com a participação e premiação nas feiras de matemática. Os alunos dessa turma de sétimo ano foram premiados nas feiras municipal, regional e estadual catarinense, com o título destaque, trazendo assim muito orgulho para os pais e para a escola.

Algumas fotos registram parte desse projeto:

Figura 1: ângulos na pista de skate

Fonte: arquivos da E.E.F. Prof. Emir Ropelato

Figura 2: ângulos no parque

Fonte: arquivos da E.E.F. Prof. Emir Ropelato

Figura 3: medindo ângulos

Fonte: arquivos da E.E.F. Prof. Emir Rope

Figura 4: ângulos na cancha de bocha

Fonte: arquivos da E.E.F. Prof. Emir Rope

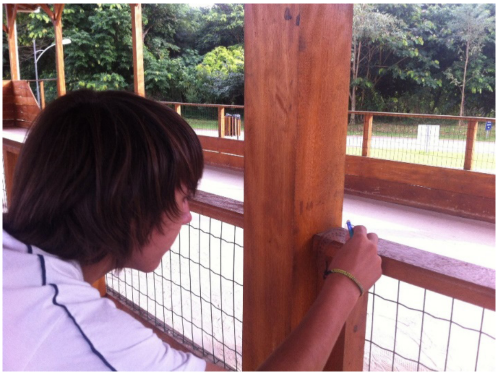


Figura 5: Aula no parque Henry Paul

Fonte: arquivos da E.E.F. Professor Emir Ropelato

4 I CONCLUSÃO

Os principais objetivos do trabalho foram atingidos. Os alunos reconhecem ângulos em diversos lugares, medem ângulos e sabem construir gráficos. O trabalho ainda está em desenvolvimento, com uma aula por semana, até o fim do ano.

Muitas informações foram novidades para os alunos. Percebendo-se um enriquecimento científico e cultural para cada um deles. Compreenderam a necessidade desse conceito para diversas situações no cotidiano, como ângulos fracionários na aviação por exemplo.

Desde as primeiras aulas com slides, diálogos, desenhos, uso de instrumentos, saída da escola, trouxeram motivação. Foram aulas diferentes e significativas.

Compreender o conceito, conseguir medir e produzir atividades envolvendo ângulos já faz parte da rotina desses alunos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. ***Parâmetros Curriculares Nacionais:* matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CENTÚRION, Marília. **Matemática Teoria e Contexto**.1ª edição. São Paulo. Saraiva, 2012.

Projeto Araribá Matemática. Obra coletiva. 3ª edição. São Paulo. Moderna, 2013.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **"História do Ângulo de uma Volta ";** Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/historia-Angulo-uma-volta.htm. Acesso em 16 de maio de 2016.

SOUZA, Joamir. PATARO, Patrícia Moreno. **Vontade de Saber Matemática**. 2ªedição. São Paulo. FTD, 2012

CAPÍTULO 13

INVESTIGANDO AS POTENCIALIDADES DO YOUTUBE: UMA PRÁTICA COM MODELAGEM

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 03/08/2020

João Carlos Lemos Junior
Universidade Estadual do Centro-Oeste – Unicentro, Guarapuava - Paraná
http://lattes.cnpq.br/3439582391975031

Martinho Wojdylo
Universidade Estadual do Centro-Oeste – Unicentro, Guarapuava - Paraná
http://lattes.cnpq.br/9894178386476413

Ronaldo Jacumazo
Universidade Estadual do Centro-Oeste – Unicentro, Guarapuava - Paraná
http://lattes.cnpq.br/5533527422667867

Dionísio Burak
Universidade Estadual do Centro-Oeste – Unicentro, Guarapuava - Paraná
http://lattes.cnpq.br/3096837034284131

RESUMO: Este trabalho apresenta uma prática de Modelagem Matemática, desenvolvida a partir da disciplina de Métodos e Tópicos em Educação e Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, da Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO). Esta prática, foi mediada pelo professor Dionísio Burak, uma vez que os autores tiveram o intuito de observar as inúmeras possiblidades positivas de tal metodologia, sob perspectiva de Burak (1992). A partir do tema escolhido, que foi o "*YouTube*", buscou-se discutir sobre as variáveis que influenciam na geração de receita de vídeos em um canal; a estimativa de rendimento mensal de um *youtuber*, e os impactos desta rede social na sociedade. A metodologia nessa investigação é de natureza qualitativa/interpretativa. Dessa forma, seguiram-se as etapas propostas para a metodologia na perspectiva de Burak (1992). Os resultados encontrados ao finalizar a prática, evidenciam que a Modelagem Matemática na concepção da Educação Matemática, vai além da valorização do interesse dos participantes, com base na escolha do tema de interesse do grupo, pois envolveu uma motivação ampla no sentido de buscar soluções para os problemas levantados e assim, tornar seus participantes protagonistas na produção dos saberes, além de haver contato com outras áreas do conhecimento, proporcionando a interdisciplinaridade, e com isso, capaz de possibilitar uma aprendizagem mais significativa.
PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática. Ensino e Aprendizagem. *YouTube.*

INVESTIGATING THE POTENTIAL OF YOUTUBE: A PRACTICE WITH MODELING

ABSTRACT: This work presents a practice of Mathematical Modeling, developed from the discipline of Methods and Topics in Education and Mathematics, from the Postgraduate Program in Teaching Natural Sciences and Mathematics, at the State University of the Midwest (UNICENTRO). This practice was mediated by teacher Dionísio Burak, since the authors had the intention of observing the countless positive possibilities of

such methodology, under Burak's perspective (1992). Based on the chosen theme, which was "YouTube", we sought to discuss the variables that influence the generation of video revenue on a channel; the estimated monthly income of a youtuber, and the impacts of this social network on society. The methodology in this investigation is qualitative / interpretative nature. Thus, the steps proposed for the methodology were followed from the perspective of Burak (1992). The results found at the end of the practice, show that Mathematical Modeling in the conception of Mathematics Education, goes beyond valuing the interest of the participants, based on the interest group choice of the theme, as it involved a broad motivation in the sense of seeking solutions for the raised problems and thus make its participants protagonists in the knowledge production, in addition to having contact with other knowledge areas, providing interdisciplinarity, and with this, capable of enabling more meaningful learning.
KEYWORDS: Mathematical Modeling. Teaching and learning. YouTube.

INTRODUÇÃO

É evidente que muitos dos encaminhamentos metodológicos, não tem se concretizado de forma satisfatória nas salas de aula, visto que, muitas vezes, não levam em consideração o interesse do estudante, sua cultura, seus gostos e habilidades. A motivação é um dos fatores fundamentais, que refletirá diretamente no ensino e aprendizagem dos estudantes. Diante deste cenário, se faz necessário aos docentes, recorrer a metodologias de ensino que atendam as expectativas destes e ainda, se torne possível efetivar uma aprendizagem mais significativa, de acordo com o ambiente em que estão inseridos.

A sala de aula precisa ser um espaço de diálogo, e não mais um espaço onde o professor seja o centro do processo. De acordo com Tardif (2014, p. 167) "ensinar é entrar numa sala de aula e colocar-se diante de um grupo de alunos, esforçando-se para estabelecer as relações e desencadear com eles um processo de formação mediano por uma grande variedade de informações. " Nesta linha de pensamento, dá-se enfoque aqui, que o estudante deve ser protagonista no processo de ensino e aprendizagem, participando de modo ativo deste percurso, deixando de ser apenas um mero espectador e reprodutor de conhecimentos através de processos mecânicos, característicos de metodologias tradicionais.

Na escola, os conteúdos disciplinares, devem estar contextualizados, havendo entre eles uma interdisciplinaridade. Esses conhecimentos, devem contribuir para a crítica às contradições sociais, políticas e econômicas presentes nas estruturas da sociedade contemporânea e propiciar compreender a produção científica, a reflexão filosófica, a criação artística, nos contextos em que elas se apresentam (PARANÁ, 2008).

Nesta perspectiva, acreditamos que a Modelagem Matemática, enquanto encaminhamento metodológico, torna a aprendizagem mais atrativa e significativa.

> A modelagem matemática tem como pressuposto a problematização de situações do cotidiano. Ao mesmo tempo em que propõe a valorização

> do aluno no contexto social, procura levantar problemas que sugerem questionamentos sobre situações de vida (PARANÁ, 2008, p. 64).

Não obstante o fato de não haver somente uma forma de conceber a Modelagem Matemática no âmbito do ensino, este trabalho adotou a concepção de Burak (1992), seguindo integralmente as etapas propostas. É notório que esta metodologia, a partir da concepção escolhida proporciona como ponto de partida, estudar temas de interesse do coletivo, o que certamente facilita e interação e motivação destes, pois estudarão aquilo que está mais próximo da sua realidade.

A proposta idealizada neste trabalho, foi conduzida a partir da realização de uma prática de Modelagem conduzidas de forma conjunta pelos autores. Almejou-se em especial, vivenciar e conhecer mais a fundo os impactos e possibilidades da Modelagem enquanto encaminhamento metodológico, na disciplina de Matemática, bem como, compreender as etapas propostas por Burak (1992) para que em um futuro próximo, possam ser utilizadas em aulas de matemática na Educação Básica.

A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A partir da década de 1970, a preocupação com o ensino e a aprendizagem da Matemática, ficou mais evidente, com o declínio do Movimento Matemática Moderna, que pretendia solucionar os problemas do ensino e da aprendizagem da Matemática por meio de uma visão internalista, não havendo preocupação com o sujeito que aprende, e sim com a apresentação da Matemática. De outro lado, temos o Movimento Educação Matemática, que considera outros aspectos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, como, por exemplo, a capacidade cognitiva do sujeito que aprende, sua cultura e outros (BURAK; KLUBER, 2008).

No âmbito da Educação Matemática, e com base na consideração de outros aspectos envolvidos no ensino e aprendizagem da Matemática, como citado acima, Burak e Kluber (2008), apresentam um modelo como mostra a figura 01, que pode caracterizar a Educação Matemática, contemplando as diversas áreas que a ela se incorporam, relacionando a Matemática com outras áreas da Educação, podendo ser epistemologicamente orientado pelas Ciências Humanas e Sociais, evidentemente, sem desconsiderar o objeto de estudo, a Matemática.

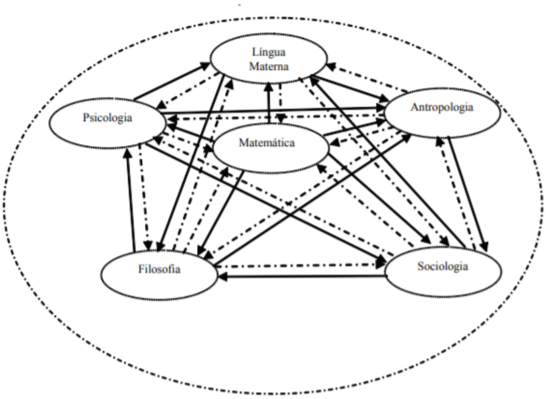


Figura 01. Educação Matemática

Fonte: Burak e Kluber (2008)

No que se refere a Modelagem Matemática, há mais de uma forma de concebê-la, sendo que não são todas as que se preocupam de fato com o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, algumas se concentram na Matemática Aplicada com aplicações em outras áreas. No Brasil, as concepções de Modelagem Matemática mais conhecidas, são Burak (1992, 2004, 2010, 2012), Bassanezi (2015), Biembengut (1999, 2009), Biembengut e Hein (2019) e Meyer, Caldeira e Malheiros (2018), dentre outros. Destes, no que tange a preocupação da concepção enquanto metodologia de ensino e aprendizagem, para a Educação Básica, podemos citar Burak (1992, 2004, 2010, 2012) e Meyer, Caldeira e Malheiros (2018), já os demais adotam concepções voltadas para a Matemática Aplicada.

A Modelagem proveniente e originária do Movimento da Educação Matemática, que se originou como um contra o Movimento da Matemática Moderna, onde essas duas formas de conceber o Modelagem, determinam diferenças epistemológicas em relação: a natureza da Educação Matemática, ao método e ao seu objeto.

No âmbito da Matemática Aplicada, a Modelagem Matemática, consiste na criação de modelos onde existem estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, especificamente sobre a sua realidade, carregando interpretações e subjetividades próprias de cada modelador (BASSANEZI, 2015). Ainda de acordo com este autor:

> A utilização da modelagem na educação matemática valoriza o "saber fazer" do cursista e desenvolve sua capacidade de avaliar o processo de construção de modelos matemáticos em seus diferentes contextos e aplicações, a partir da realidade de seu ambiente (BASSANEZI, 2015, p. 15).

Ainda nesta linha de pensamento, de acordo com Biembengut e Hein (2013), esta metodologia é uma arte, uma vez que permite formular problemas e expressões que valham não somente para uma situação particular, mas que também possam alicerçar outras aplicações e teorias. Para estes autores, a Modelagem é trabalhada com base nas seguintes etapas: i) Interação: onde reconhece-se a situação-problema e se busca familiarizar com o assunto; ii) Matematização: onde ocorre a formulação do modelo (hipótese) e resolução do problema em termos do modelo e, iii) Modelo matemático: que é a etapa em que se interpreta e se valida o modelo estudado.

Agora, trazendo as concepções da Modelagem Matemática, no âmbito da Educação Matemática, onde, em sua tese, Burak (1992), discorre que:

> A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões, e será nesta definição que estará fundamentado o presente trabalho (BURAK, 1992, p. 62).

Na Modelagem, segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2018, p. 24) "não se deve mais assistir os objetos matemáticos, mas manipulá-los, porque rompemos com a concepção de que o professor ensina e passamos a acreditar na ideia de que o conhecimento não está somente nem no sujeito nem no objeto, mas na sua interação. "

Na linha de pensamento de Burak (2010) as etapas sugeridas para o trabalho com a Modelagem Matemática, são as seguintes: i) escolha de uma tema: deve ser um tema de interesse do grupo; ii) pesquisa exploratória: busca do referencial para nortear a elaboração das questões; iii) levantamento do(s) problema(s): formulação de problemas com base nas pesquisas; iv) resolução dos problemas e desenvolvimento dos conteúdos no contexto do tema: utilização da matemática necessária e significativa para solucionar os problemas; v) análise crítica da(s) solução(ões): verificação da consistência e validade das respostas obtidas para os problemas inicialmente propostos. Vale ressaltar, que estas etapas podem ser alteradas, não se tratando assim, de um processo com etapas rígidas.

Dentre tais concepções para a Modelagem Matemática na Educação Matemática, este trabalho adotou as etapas propostas na perspectiva de Burak (1992).

DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA

A prática que é descrita a seguir, foi realizada pelos autores, buscando entender as etapas da Modelagem Matemática, sob a perspectiva de Burak (1992), seguindo as cinco etapas propostas, tendo assim a oportunidade de compreender de maneira mais ampla, por meio da vivência na prática, as potencialidades e as possibilidades do uso da Modelagem Matemática, na sala de aula do Educação Básica

I) Escolha do tema (primeira etapa):

A primeira etapa da Modelagem Matemática, de acordo com a concepção de Burak (1992) é a escolha do tema. Etapa essa, que assume vasta importância, visto que tal escolha parte do interesse do grupo que está realizando a prática. De acordo com a discussão do grupo, reconhecemos o alto potencial que a internet proporciona, seja pela facilidade de transmitir informações, ou se comunicar de qualquer lugar do mundo. Dessa forma, levantou-se uma certa curiosidade pelo tema "*YouTube*", já que tem sido explorado amplamente nas mais diversas áreas do conhecimento, além de tornar-se fonte de renda para muitos. Com o tema definido, percebeu-se que havia motivação para se buscar informações que convergissem para questões relacionadas ao *YouTube*, e daí, partiu-se para a segunda etapa da metodologia, que se trata da pesquisa exploratória.

II) Pesquisa exploratória (segunda etapa):

Nesta segunda etapa da pesquisa, almejou-se levantar o máximo de informações possíveis a respeito do tema escolhido, buscando assim, se familiarizar com o assunto, e tornar possível o levantamento de problemas. A seguir, foram elencadas algumas informações que nortearam a formulação dos problemas, consistindo nesta, a terceira etapa da Modelagem na perspectiva adotada.

O *YouTube* foi fundado por Chad Hurley, Steve Chen e Jawed Karim, sendo estes, funcionários do comércio *online PayPal*, uma vez que foi lançado oficialmente de forma discreta em junho de 2005. O *YouTube* era um dos serviços concorrentes que tentava eliminar as barreiras técnicas para maior compartilhamento de vídeos na internet. A partir deste, era possível realizar *upload,* publicar e assistir vídeos em streaming sem necessidade de altos níveis de conhecimento técnico, dentro das restrições tecnológicas (BURGESS; GREEN, 2009).

> O momento de sucesso chegou em outubro de 2006, quando o Google pagou 1,65 bilhão de dólares pelo YouTube. Em novembro de 2007, ele já era o site de entretenimento mais popular do Reino Unido, com o site da BBC ficando em segundo. No começo de 2008, de acordo com vários serviços de medição de tráfego da web, já figurava de maneira consistente entre os dez sites mais visitados do mundo. Em abril de 2008, o YouTube já hospedava algo em torno de 85 milhões de vídeos, um número que representa um aumento dez vezes maior em comparação ao ano anterior e que continua a crescer exponencialmente. A comScore, empresa de pesquisa de mercado da internet, divulgou que o serviço respondia por 37% de todos os vídeos assistidos nos Estados Unidos, com o segundo maior serviço do tipo, a Fox Interactive Media, ficando com apenas 4,2%. Como uma comunidade de conteúdo gerado por usuários, seu tamanho gigantesco e sua popularidade entre as massas eram sem precedentes (BURGESS; GREEN, 2009, p. 18).

É um serviço online de vídeos que, dá possibilidade de compartilhar, produzir e publicar vídeos em formato digital. Permite também participar de comunidades e canais, nos quais os usuários podem se inscrever e obter vídeos de seu interesse. O ambiente é de fácil navegação, pois a barra de ferramentas é bem intuitiva aos objetivos desejados, possui também um sistema de ajuda bastante eficiente e o acesso é imediato (PELLEGRINI et al, s.d.).

Percebe-se que o *YouTube* vem ganhando cada vez mais seu espaço, visto que muitas pessoas têm utilizado este recurso como forma de geração de renda, onde investem neste ramo. Podemos encontrar nesta plataforma, uma gama bem ampla de vídeos, nas mais diversas categorias possíveis.

As estatísticas do *YouTube* no que diz respeito ao número de visualizações em vídeos, ou na questão do número de inscritos em canais, revelam números astronômicos, números estes, que estão em constante mudanças. Em uma matéria do site TecMundo (2018), são expostos dez vídeos mais acessados, confira no quadro 01, em este traz os números de visualizações citados pelo site, com adaptações.

TÍTULO DO VÍDEO	NÚMERO DE ACESSOS
"Despacito", Luis Fonsi e Daddy Yankee	6.761.548.448
"Shape of You", Ed Sheeran	4.776.436.723
"See You Again", Wiz Khalifa e Charlie Puth	4.543.798.248
"Masha and the Bear: Receita para o desastre", Get Movies	4.269.008.781
"Uptown Funk", Mark Ronson e Bruno Mars	3.842.456.100
"Gangnam Style", Psy	3.612.998.803
"Sorry", Justin Biber	3.284.334.756
"Sugar", Maroon 5	3.188.656.326
"Roar", Katy Perry	3.070.875.904
"Shake It Off", Taylor Swift	2.913.390.801

Quadro 01. Os 10 vídeos mais acessados do *YouTube.*

Fonte (adaptado): Site TecMundo (2018).

Desta forma, torna-se evidente que os vídeos mais acessados, são vídeos que se referem ao gênero musical, visto que todos os citados no Quadro 01, são do mundo musical. Buscando investigar ainda mais, o Quadro 02 traz os dez maiores canais do mundo, sendo estes, os que possuem a maior quantidade de inscritos, ainda, o quadro traz a quantidade de vídeos que há até o momento no canal.

CANAL	NÚMERO DE INSCRITOS	QUANTIDADE DE VÍDEOS
T-Series	Aprox. 138 milhões	14.289
PewDiePie	Aprox. 104 milhões	4.140
Cocomelon	Aprox. 81,5 milhões	527
SET India	Aprox. 72,1 milhões	37.166
5-Minute Crafts	Aprox. 65,5 milhões	4.146
WWE	Aprox. 59,9 milhões	47.592

KondZilla	Aprox. 57,6 milhões	1.416
Justin Bieber	Aprox. 54 milhões	172
Dude Perfect	Aprox. 51 milhões	233
Badabun	Aprox. 43 milhões	5.741

Quadro 01. Os 10 maiores canais do *YouTube.*

Fonte (adaptado): Site Neipatel (2019).

Vale ressaltar, que dentre os maiores canais do mundo, um deles é brasileiro. O canal KondZilla, que além de ser o maior do Brasil, é também, o maior da América Latina, sendo este, destinado a publicação de clipes de música do gênero “funk”. Surgiu por intermédio de Konrad Cunha Dantas, a partir de seu desejo de produzir arte que comunicasse para jovens da periferia. Foi o primeiro brasileiro a alcançar a marca de um bilhão de visualizações em um único vídeo (SITE REVERB, 2019).

III) Levantamento dos problemas (terceira etapa):

Os problemas levantados foram os seguintes:

- Quais são as variáveis envolvidas para o cálculo do lucro de cada vídeo de um canal do *YouTube*?
- Quanto à questão econômica, é possível estimar qual é o rendimento mensal de um *youtuber* renomado do Brasil?
- Quais as contribuições e os impactos que o *YouTube* traz para a sociedade?

IV) Resolução dos problemas levantados (quarta etapa):

A seguir, apresentam-se os resultados e /ou justificativas obtidos para os problemas propostos na etapa anterior.

Variáveis envolvidas no lucro por vídeo:

Com base nas pesquisas para solucionar este problema, analisou-se que o *YouTube* não fornece informações detalhadas sobre o algoritmo usado na monetização. Sendo que, a monetização trata-se de um aproveitamento de algo como fonte de lucro, visando transformar algo em dinheiro. Inicialmente, de acordo com o próprio site do *YouTube* (2020), para entrar no Programa de Parcerias, o proprietário do canal deverá seguir todas as políticas de monetização estabelecidas; ter 4.000 horas de exibição pública nos últimos 12 meses; ter no mínimo 1.000 inscritos; ter uma conta no *Google AdSense* e morar em um país onde tal programa está disponível.

O sucesso de um canal do Programa de Parcerias, depende do interesse dos anunciantes, que poderão associar suas marcas ao conteúdo do vídeo. Caso eles percam a confiança na plataforma, os ganhos dos criadores de conteúdo são afetados de forma negativa (YOUTUBE, 2020).

Com base nos sites Remessa Online (2020) e Hotmart (2019), acredita-se que monetização do *YouTube* depende da quantidade de cliques nos anúncios e do tempo de publicidade assistida, é feita em dólares onde, nesta regra, a cada 1.000 visualizações, o *youtuber* ganha certo valor que não é divulgado pela plataforma, mas que já foi estimado como algo entre U$ 0,60 e U$ 5,00. Porém, de acordo com um dos *youtubers* renomados no Brasil, Felipe Neto, relata-se que segundo Andrade (2019), o próprio, revelou em um de seus vídeos o seu lucro, no valor de U$ 147.000,00 por 212.000.000 visualizações, pagos por estes, U$ 687,00 a cada um milhão de visualizações no mês de junho.

Sendo assim, fizemos o cálculo para um vídeo com base nestas informações dadas por Andrade (2019). Escolhemos o vídeo mais acessado do Brasil, que é o vídeo intitulado de: "MC Fioti – Bum bum tam tam (KondZilla) ", presente no canal KondZilla, maior canal brasileiro, tendo este no momento, o total de 1.012.252.632 visualizações. Dessa forma, dividindo este valor por 1.000.000 e multiplicando por U$ 687,00, obtemos o total de U$ 695.417,55. Tendo em vista as variações do dólar nos últimos anos, para converter este valor em reais (moeda brasileira), optamos por realizar uma média anual do valor do dólar em real desde 2017 até o momento, visto que o vídeo foi publicação em março de 2017. No cálculo desta média, obteve-se o valor de aproximadamente R$ 3,93, que realizando a conversão de U$ 695.417,55 em reais, nestas condições, obtemos R$ 2.726.029,74. Dessa forma, pode-se dizer que este vídeo pode ter gerado uma receita de R$ 2.726.029,74, porém sabe-se que este valor é apenas uma estimativa, e não representa de fato o valor real já obtido pelo proprietário do canal.

Estimativa do lucro mensal de *youtubers* renomados:

Para chegar a um número procurado, no cálculo do lucro mensal de um *youtuber* renomado, buscaram-se fontes na internet, no entanto como existem valores pagos diferentes para o cálculo a cada um milhão de visualizações, e além disso existem outras fontes de rendimentos, que agregam os valores mensais. Para efeitos dos cálculos, partiu-se a conclusão da pergunta com alguns dados de visualizações encontrados, considerando inclusos todas as publicidades contidas nos vídeos do *YouTube*, a exemplo, produtos próprios e de empresas privadas. Assim, diante disto, organizou-se um quadro, os quais indicam o valor médio para os rendimentos de algumas das principais personalidades dos canais de entretenimento no Brasil, de acordo com o seu número de visualizações (SOCIAL BLADE, 2020).

Os valores apresentados no Quadro 03 abaixo tem como referência o rendimento mensal do *youtuber* de codinome F.N. Segundo Andrade (2019), o próprio, revelou em um de seus vídeos o seu lucro, no valor de U$ 147.000,00 por 212.000.000 visualizações, pagos por estes, R$ 687,00 (CPM) no mês de junho. Diante deste número, formou-se o quadro abaixo com alguns codinomes de sucesso, para estimar o lucro do mês de junho, dos proprietários de canais desse ramo, cálculos estes, somente com postagens no *YouTube*, os quais podem dar uma noção, de quanto é possível ganhar com essa atividade.

A estimativa do lucro em reais se fez com base no preço médio do dólar em junho de 2019, cotado a R$ 3,86, logo, sendo L o lucro: L = (Número de visualização x 687) x 3,86.

CODINOME	VISUALIZAÇÕES EM MILHÕES	LUCRO EM R$
K. Z	421	1.116.416,22
L.N	396	1.050.120,72
G.P	302	800.849,64
GR. E	268	710.687,76
T.K	180	477.327,60

Quadro 03. Lucro de acordo com as visualizações em junho 2019.

Fonte (adaptado): Site Social Blade (2020).

Impactos Sociais

Observamos que o *YouTube* é um grande influenciador a nível social, e está cada vez mais presente na vida das pessoas, sendo desde um instrumento para expressão pessoal à um instrumento de educação e de politização.

Podemos perceber isso fazendo uma visita ao site TecMundo, que toma como base os relatórios do *YouTube Insights*, um site que fornece matéria-prima para o planejamento de agências e marcas, ele nos mostra que no Brasil o site *YouTube* é acessado por 95% da população online pelo menos uma vez ao mês, ou seja, das pessoas que tem acesso à internet, 95% delas acessam o *YouTube.*

Segundo a matéria do site TecMundo (2017), encontramos e elencamos aqui alguns dados que nos mostram o potencial dessa rede social e o quanto ela pode ser influenciadora.:

> 96% dos jovens de 18 a 35 anos acessam o YouTube.
>
> 63% dos consumidores de afinidades no YouTube dizem que não conseguiriam viver sem a plataforma.
>
> 87% concordam que é uma plataforma que permite o consumo de qualquer tipo de conteúdo, quando e onde quiser.
>
> Quem assiste a afinidades é 1,3 vez mais propenso a comprar alguma novidade.
>
> Quase metade dos usuários de YouTube tem filhos: 46%.
>
> 50% dos usuários de afinidades curtem/avaliam um vídeo assim que assistem.

> 96% dos consumidores de afinidades no YouTube acessam a internet todos os dias, principalmente por meio do smartphone (82%) e do computador (66%).
>
> 4 em cada 10 consumidores de YouTube se conectam à plataforma entre 17h e 00h (TECMUNDO, 2017).

Ainda segundo o site TecMundo (2017), 79% dos pesquisados preferem assistir tutoriais em vídeo do que ler instruções escritas, 59% afirmam que preferem se atualizar pelo *YouTube* do que ver noticiários e 31% consideram a plataforma uma fonte de aprendizado. Percebemos que essa rede social passa de apenas um site de vídeos para uma fonte de informação, de educação e de politização da sociedade em geral.

Outro ponto relevante e que nos leva a crer em um novo cenário para o futuro é o de que crianças são um dos principais públicos desta plataforma, segundo dados de uma matéria da revista Veja (2018), dos 100 canais mais vistos no Brasil, 36 deles são direcionados ou consumidos pelo público infantil entre crianças de 0 a 12 anos de idade, totalizando a casa de mais de 17 bilhões de visualizações. Segundo Veja (2018), diante desse cenário surgem os *youtubers* mirins, quais passam de expectadores a ídolos digitais, podendo ter milhares de seguidores e ganharem dinheiro por meio de canais na plataforma.

> As crianças saíram da posição de espectadoras para apresentar seus próprios canais, dando origem a uma nova onda de ídolos digitais: os **youtubers mirins**. Hoje, esses jovens – alguns com apenas três anos de idade – acumulam milhões de seguidores e ganham dinheiro por meio do canal na plataforma, no qual compartilham sua rotina e exibem brinquedos novos para outras crianças. (VEJA, 2018).

Diante disso, pode surgir a profissão do futuro, segundo Veja (2018) dados do Fórum Econômico Mundial, 65% das crianças de hoje vão trabalhar em profissões que, ainda nem existem, e no caso, acredita-se que ser um *youtuber* poderá ser também uma profissão. Mas como toda profissão, ser um youtuber deverá se enquadrar em regras e leis vigentes, no caso de menores de idade, o ECA (Estatuto da Criança e do Adolescente) deverá ser seguido.

Para termos uma ideia do dimensionamento que o *YouTube* vem causando, elencamos que já existem escolas especializadas em cursos para a formação de um *youtuber,* cada instituição tem suas próprias regras e limites de idade, fornecendo uma especialização tanto com uma visão empreendedora, quanto com aspectos sociais e técnicos (VEJA, 2018).

Mas como toda profissão tem seus prós e contras, ser um *youtuber* também merece cuidados, pois o desenvolvimento social e psicológico pode ser afetado.

> Ainda que muitas crianças sonhem em conquistar a fama por meio do YouTube, especialistas alertam que é preciso ficar atento para que isso não prejudique o desenvolvimento dos pequenos. Segundo o psicólogo e pesquisador Cristian Nabuco, do Instituto de Psiquiatria (IPq) do Hospital

> das Clínicas da Universidade de São Paulo, estudos em animais indicam que a exposição leva ao desenvolvimento de uma consciência social precoce. Na prática, isso significa que a fama pode forçar as crianças a amadurecer mais rápido, além de tornar o ambiente mais propício para a sexualização e a exposição a conteúdos violentos (VEJA, 2018).

Com isso é preciso ter cautela e bom senso dos pais para lidar com esse tipo de exposição e de fama, respeitando sempre as vontades de cada um e as leis vigentes.

V) Análise crítica das soluções:

É neste momento do trabalho que, de acordo com Burak (2004), se pode validar o que foi realizado na etapa anterior, que se concentrou nas resoluções, e partir de aí propor novos desafios no âmbito do tema do trabalho, buscando estimular o pensamento para que se busquem hipóteses, testagens e assim, conduzir para as conclusões.

Diante do primeiro problema: "Quais são as variáveis envolvidas para o cálculo do lucro de cada vídeo de um canal do *YouTube?",* pode-se dizer que a solução é razoável, visto que não foi encontrado nenhum documento propriamente dito, fornecido pelo *YouTube*, que concentre as informações como gostaríamos de saber. Diante do cálculo aproximado da receita gerado pelo vídeo selecionado, acredita-se que esses valores sejam estimuladores para que os *youtubers* realizem investimentos em seus canais, esperando um futuro retorno, talvez não nesta proporção, visto que o vídeo é do maior canal do Brasil, mas que, de alguma forma, gerem algum tipo de renda.

Quanto à questão, na qual estimou-se o lucro de um determinado mês do proprietário de um canal do *YouTube*, nota-se que atividade é muito rentável, visto que as estimativas aqui feitas, são para apenas um canal do proprietário no Brasil, esclarecendo que, em muitos casos as empresas possuem outros canais dentro e fora do país. A importância numérica, feita para justificar a questão de pesquisa, pode ser considerada parcial, visto que, os rendimentos das celebridades desse ramo são bem superiores que os apresentados, pois pode-se agregar aos seus lucros fontes externas ao *YouTube*, a exemplo, a venda de outros produtos da própria marca em sites especializados, palestras e até doções vinda de fãs. Entende-se então que, devido ao crescimento desse setor, o trabalho nessa área para o momento é viável. Ressalta-se ainda, para iniciantes interessados nessa atividade, que o caminho não é fácil para o sucesso, pois a cada dia nasce centenas de milhares de vídeos, esperando serem visualizados, e somente aqueles que cumprirem todas as imposições colocadas pelo *YouTube*, começarão a ter algum tipo de renda.

Quanto à questão que relaciona o impacto social que essa rede social traz a sociedade, podemos notar que ela impacta diretamente ao público online, podendo influenciar nas questões de consumo de produtos e mercadorias, bem como, questões psicológicas e profissionais. Notamos que diante do avanço da tecnologia, o *YouTube* contribui para que uma nova concepção de profissão surja em um futuro próximo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta prática com a Modelagem Matemática, fica evidente o quando a metodologia proporciona interações com outras áreas do conhecimento, sem ficar diretamente preso aos tópicos da Matemática, em um primeiro momento. Percebe-se que os tópicos de Matemática, surgem de forma natural durante a resolução dos problemas, e que são explorados de acordo com a necessidade do grupo para com cada questão trabalhada.

Ainda, é manifesto o quão a metodologia estimula a motivação e desperta o interesse, visto que a escolha do tema é uma das etapas mais importantes, já que parte do interesse propriamente dito de cada grupo, estando assim, mais próximo da realidade em que está inserido, ou da área que se tenha curiosidade em investigar.

A Modelagem, no âmbito da Educação Matemática, pode sem dúvidas ser utilizada pelo professor em suas aulas, mesmo que ofereça resistência por parte de alguns estudantes, resistência essa, que poderá ser melhorada de acordo com a familiarização com a metodologia no decorrer das práticas, já que se trata de uma metodologia em que estes não estão integralmente acostumados, por ainda termos um amplo uso de abordagens mais tradicionais.

O educador de hoje, precisa estar constantemente instigado a pesquisar e buscar sempre alternativas metodológicas, visando atingir a todos os estudantes, de modo que estimule a criatividade e o senso crítico destes. Dessa forma, acredita-se que a Modelagem Matemática na Educação Matemática, mostra como uma possibilidade viável.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática:** teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino.** 5. ed., 5. reimp. São Paulo: Contexto, 2019.

BURAK, D. **Modelagem Matemática:** ações e interações no processo de ensino aprendizagem. Campinas. 1992. 460f. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

__________. Modelagem Matemática e a sala de aula. Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 2004. Londrina. **Anais do I EPMEM.** Londrina: UEL, 2004.

_________ . Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática.** 2010, vol. 1, n. 1. p. 10-27.

_________ **. A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa.** Curitiba: CRV, 2012.

BURAK, D.; KLUBER, T. E. Educação matemática: contribuições para a compreensão da sua natureza. **Acta Scientiae**, 2010, vol. 10, n. 2, jul./dez. p. 93-106.

BURGESS, J.; GREEN, J. **YouTube e a Revolução Digital:** como o maior fenômeno da cultura participativa transformou a mídia e a sociedade. Tradução Ricardo Giassetti – São Paulo: Aleph, 2009.

Crianças agora buscam 'carreira' de youtuber. Disponível em: <https://veja.abril.com.br/especiais/criancas-agora-buscam-carreira-de-youtuber/>. Acesso em: 09 de Maio de 2020.

Maioria pula anúncios em vídeos online. Disponível em: < https://www.meioemensagem.com.br/home/midia/2013/04/17/maioria-pula-anuncios-em-videos-online.html>. Acesso em: 09 de Maio de 2020.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática.** 3. ed., 2. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

Os 10 Maiores Canais do Youtube no Brasil e no Mundo em 2019. Disponível em: <https://neilpatel.com/br/blog/maiores-canais-do-youtube/>. Acesso em: 09 de Maio de 2020.

Os 10 vídeos mais vistos no YouTube de todos os tempos. Disponível em: <https://www.tecmundo.com.br/internet/135949-youtube-10-videos-mais-vistos-todos-os-tempos.htm>. Acesso em: 09 de Maio de 2020.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Curitiba: Secretaria de Estado de Educação, 2008.

PELLEGRINI, D. P.; REIS, D. D.; MONÇÃO, P. C.; OLIVEIRA, R. **YouTube: Uma nova fonte de discursos.** Disponível em: <http://www.bocc.ubi.pt/~boccmirror/pag/bocc-pelegrini-cibercultura.pdf>. Acesso em 09 de Maio de 2020.

Políticas de monetização para canais do YouTube. Disponível em: < https://support.google.com/youtube/answer/1311392>. Acesso em: 09 de Maio de 2020.

Quanto ganha Felipe Neto? Youtuber revela quanto faturou no último mês Disponível em: <https://viciados.net/quanto-ganha-felipe-neto-youtuber-revela-quanto-faturou-no-ultimo-mes/>. Acesso em: 09 de Maio de 2020.

Huminutinho: conheça a história de KondZilla, fundador do canal de música mais popular do mundo. Disponível em: <https://reverb.com.br/artigo/huminutinho-conheca-a-historia-de-kondzilla-fundador-do-canal-de-musica-mais-popular-do-mundo>. Acesso em: 09 de Maio de 2020.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional.** 17. Ed. 3. Reimp. Petropólis – RJ: Vozes, 2014.

Top 250 youtubers in Brazil sorted by sb rank. Disponível em: <https://socialblade.com/ youtube/top/country/br>. Acesso em: 09 de Maio de 2020.

YouTube é acessado por 95% população online brasileira, mostra relatório. Disponível em: <https://www.tecmundo.com.br/internet/119776-youtube-insights-brasil.htm>. Acesso em: 09 de Maio de 2020.

CAPÍTULO 14

ASPECTOS PRÁTICOS NA FORMAÇÃO DO DOCENTE EM PEDAGOGIA A PARTIR DO TRABALHO COM MAPAS CONCEITUAIS COMO ESTRATÉGIA NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 16/07/2020

André Ricardo Lucas Vieira
Instituto Federal do Sertão Pernambucano – IF Sertão PE
Pernambuco-PE
http://lattes.cnpq.br/6446960779517778

RESUMO: Este artigo trata da formação inicial ou continuada de professores a fim de apresentar possibilidades para que os mesmos possam mediar o processo ensino-aprendizagem em suas aulas a partir de estratégias inovadoras. Fundamentado na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, o recurso aos mapas conceituais constitui uma eficiente estratégia para que o professor acesse informações acerca de como o estudante organiza e relaciona os diversos conceitos em sua estrutura cognitiva. Nesse sentido, o objetivo geral deste trabalho foi pesquisar a aceitação dos mapas conceituais como estratégia de ensino e aprendizagem, dos graduandos do sétimo semestre do curso de Pedagogia da Universidade do Estado da Bahia em Senhor do Bonfim, na disciplina de Fundamentos Teóricos Metodológicos do Ensino de Matemática. O método utilizado foi à construção de mapas conceituais por meio de uma oficina. Os discentes perceberam que foi significativo o uso dos mapas conceituais tanto para descobrir os conceitos prévios que o estudante possui sobre o tema proposto, quanto para, a partir destes, preparar o planejamento de aula e, por fim, para diagnosticar onde é necessário rever conceitos de forma a alcançar os objetivos propostos, ou seja, para alcançar uma aprendizagem significativa. Assim, mostraram aceitação dos mapas conceituais enquanto estratégia de ensino, pois ao final do processo já conseguiam fazer a interação entre os conceitos e apresentaram mapas mais estruturados e de fácil compreensão.

PALAVRAS-CHAVE: Mapas conceituais; Aprendizagem significativa; Formação de professores.

PRACTICAL ASPECTS IN TEACHER TRAINING IN PEDAGOGY FROM WORK WITH CONCEPTUAL MAPS AS A STRATEGY IN THE PROCESS OF TEACHING AND LEARNING IN MATHEMATICS

ABSTRACT: This article deals with the initial or continuing education of teachers in order to present possibilities for them to mediate the teaching-learning process in their classes based on innovative strategies. Based on Ausubel’s Theory of Meaningful Learning, the use of concept maps is an efficient strategy for the teacher to access information about how the student organizes and relates the various concepts in his cognitive structure. In this sense, the general objective of this work was to research the acceptance of concept maps as a teaching and learning strategy for undergraduate students in the seventh semester of the Pedagogy course at the University of the State of Bahia in Senhor do Bonfim, in the discipline of Methodological

Theoretical Foundations of Teaching of math. The method used was to build concept maps through a workshop. The students realized that the use of concept maps was significant both to discover the previous concepts that the student has on the proposed theme, and to prepare the lesson planning based on them and, finally, to diagnose where it is necessary to review concepts. in order to achieve the proposed objectives, that is, to achieve meaningful learning. Thus, they showed acceptance of concept maps as a teaching strategy, as at the end of the process they were already able to make the interaction between concepts and presented more structured and easy to understand maps.
KEYWORDS: Concept maps; Meaningful learning; Teacher training.

1 I INTRODUÇÃO

Os conceitos apresentados comumente no ensino de matemática sempre foram de difícil entendimento pelos alunos, pois agregam nomenclaturas específicas do conhecimento lógico matemático. Assim sendo, existe a necessidade de didáticas que auxiliem o professor na mediação da apropriação desse conhecimento.

Sensibilizados pelo déficit de estratégias didáticas utilizadas pelos professores no ensino de matemática em particular, percebe-se que a não apropriação de conceitos por alunos das séries iniciais e finais do Ensino Fundamental parece ser sobremaneira afetada.

Ao nosso ver, como bem fundamenta Freire (2015), ensinar exige apreensão da realidade de como o sujeito aprende. Neste sentido, temos percebido que nossos alunos representam as relações entre os conhecimentos mecanicamente, sem a condição de demonstrarem como os sentidos se configuravam de forma positiva, a fim de garantir que a aprendizagem ocupasse uma dimensão significativa.

Para Ausubel (1982), aprender significativamente é ampliar e reconfigurar ideias já existentes na estrutura mental e com isso ser capaz de relacionar e acessar novos conteúdos. Quanto maior o número de links feitos, mais consolidado estará o conhecimento. Os materiais de aprendizagem devem ser bem organizados, as novas ideias e conceitos devem ser "potencialmente significativos" para o aluno. Ao fixar novos conceitos, nas já existentes estruturas cognitivas, o aluno fará com que estes sejam relembrados, transformando o conhecimento sistematizado, constituindo ligações deste novo conhecimento com os conceitos relevantes que ele já possui.

Para que a aprendizagem significativa ocorra é preciso entender o processo de construção do conhecimento que o aluno deve fazer apoiando-se na sagacidade do professor de produzir estratégias metodológicas que favoreçam o estabelecimento de novos links com aquilo que já se sabe em busca de produzir novos saberes e novos conhecimentos. Defendemos que essa modalidade de educação deve como afirmou Paulo Freire (2005), colocar o oprimido como sujeito ativo e central da sua aprendizagem e da transformação da sua própria realidade, segundo o processo que o autor caracterizou como conscientização: a transformação da consciência ingênua em consciência crítica.

Baseado em tal marco teórico, o pressuposto que defendemos é que a qualidade da relação que se concebe entre sujeito e objeto depende da qualidade da mediação do professor através das atividades pedagógicas desenvolvidas em sala de aula.

Dessa forma, é necessário que o professor busque novas estratégias para que o aluno aprenda significativamente. Entre essas, aponta-se para o uso de mapas conceituais, uma espécie de hierarquização conceitual que, atendendo a determinadas regras de construção, oferece ganhos em relação a tempo de execução, revisão da literatura, avaliação da aprendizagem, demonstração da análise, síntese e criatividade espacial que o aluno pode executar a partir de um conteúdo dado.

Com base nessa situação, bem como pensando no modo que o professor pode inserir-se num processo de formação a fim de construir mecanismos que auxiliem na tarefa de ensinar, passamos a buscar compreender uma estratégia que favorecesse a produção de um ensino significativo, bem como de uma aprendizagem também significativa.

Nesse sentido, o objetivo geral deste trabalho foi pesquisar a aceitação dos mapas conceituais como estratégia de ensino e aprendizagem, dos graduandos do sétimo semestre do curso de Licenciatura em Pedagogia da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), campus VII em Senhor do Bonfim, na disciplina de Fundamentos Teóricos Metodológicos do Ensino de Matemática.

O método utilizado foi à construção de mapas conceituais, proposto por Novak (1998) e Novak e Gowin (1999), que considera este como uma estruturação hierárquica dos conceitos fundamentada na teoria da aprendizagem significativa de Ausubel.

2 | APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA EM MATEMÁTICA E AS IMPLICAÇÕES METODOLÓGICAS DOS MAPAS CONCEITUAIS

A aprendizagem de novos conteúdos requer mudanças de conceitos similares àquelas observadas na produção do conhecimento científico, cujos conceitos ou proposições anteriormente vigentes são reformulados ou substituídos. Assim, segundo Ramos (2009), durante o processo de aprendizagem, espera-se que o aluno abandone concepções inadequadas e as substitua por concepções aceitas cientificamente, de maneira significativa.

Para que isso aconteça é importante apontar meios de auxiliar o aluno na apropriação dos conhecimentos discutidos no ensino de matemática através da uma nova estratégia de ensino que são os Mapas Conceituais, aplicação da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, desenvolvida por Novak.

Mapas conceituais estão fortemente relacionados à Teoria da Aprendizagem Significativa – uma teoria cognitivista de aprendizagem proposta por David Ausubel. Esta teoria foi proposta num contexto histórico de hegemonia construtivista na Psicologia, contrapondo a influência da Escola Comportamentalista, que defendia a aprendizagem escolar como compreendida e explicada a partir de leis estabelecidas, por meio de pesquisas realizadas em laboratórios, reduzindo a aprendizagem a cadeias de estímulos e respostas.

Para Ausubel (1982), aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, neste processo a nova informação interage com uma estrutura do conhecimento específica, a qual Ausubel define como subsunçor, existente na estrutura cognitiva do indivíduo.

Portanto o conhecimento prévio é a variável mais importante, isto é, que mais influencia a aprendizagem. Obviamente, neste contexto é primordial que exista uma pré-disposição do aprendiz em aprender.

Desta maneira, a aprendizagem significativa acontece quando o aluno se dispõe a fazer interações substanciais entre os novos conhecimentos a serem aprendidos e os conhecimentos relacionados a estes já existentes em sua estrutura cognitiva.

Na organização do ensino, Sala e Goni (2000, p. 236) compreendem que Ausubel considera a estrutura cognitiva do aprendiz e sua manipulação por meio da maneira de apresentar e organizar o conteúdo de ensino como relevante para que ocorra a aprendizagem significativa e apresenta como propostas para delinear e planejar o ensino a utilização dos organizadores prévios, estabelecendo hierarquias conceituais.

No ensino de matemática, tornam-se necessários os organizadores prévios, ou seja, conteúdos ou conceitos básicos necessários para criar e/ou mobilizar os subsunçores necessários para aprendizagem do novo material.

Os mapas conceituais foram introduzidos pelo norte americano Joseph Novak, por volta da década de 70. Mais precisamente, em 1972 o professor Novak utilizou pela primeira vez esta ferramenta, que tinha como objetivo representar graficamente a compreensão de conceitos de crianças, a fim de que a evolução do conhecimento pudesse ser acompanhada e entendida. Os mapas conceituais têm sido indicados para uma diversidade de atividades. Por exemplo, como: estratégia de estudo, estratégia de apresentação dos itens curriculares e instrumento para a avaliação de aprendizagem escolar.

Nesse sentido, enquanto recurso para aprendizagem de um novo tópico, a construção de mapas conceituais pode elucidar para o aluno novas formas de produzir reflexões e desenvolver aprendizagens singnificativas, vez que é capaz de organizar o pensamento em uma estrutura relacional, em que um conceito leva ao outro. Isso faz ampliar a condição de reflexão e tem como consequência melhor qualidade de aprendizagem em se considerando a complexidade dos conteúdos de Matemática

Enquanto ferramenta de ensino, os mapas conceituais podem ser elaborados para um curso, uma disciplina, um conteúdo ou um tópico específico. Sob este aspecto, a utilização de mapas pelos docentes para explorar determinado conteúdo ou ilustrar o programa do componente curricular Matemática, por exemplo, pode auxiliar os alunos a perceberem que os conceitos envolvidos não estão desvinculados uns dos outros, ao contrário, em geral se conectam e se complementam.

É importante destacar que a interação entre professor e alunos nesse processo de ensino e aprendizagem, assim como a relação desses sujeitos com o conhecimento pode ser alicerçada com a utilização desta ferramenta, pois um novo conceito pode ser introduzido dentro de um diagrama visual organizado, a partir de discussões e conclusões obtidas em sala, em conjunto, durante o processo educativo.

O mapa conceitual que será construído pelo aluno será também seu norte orientador durante a evolução do seu conhecimento. Para Tavares (2007, p. 74), “quando um aprendiz utiliza o mapa durante seu processo de aprendizagem de determinado tema, vai ficando claro para si as suas dificuldades de entendimento deste tema”.

Tavares (2007, p. 81) salienta ainda que

> A função mais importante da escola é dotar o ser humano de uma capacidade de estruturar internamente a informação e transformá-la em conhecimento. A escola deve propiciar o acesso à meta-aprendizagem, o saber aprender a aprender. Nesse sentido, o mapa conceitual é uma estratégia facilitadora da tarefa de aprender a aprender.

Portanto ao se fazer e refazer um mapa conceitual o aluno frequentemente reflete sobre seus processos cognitivos (Moreira, 2010). Dessa forma, justifica-se o trabalho com os mapas conceituais, pois os mesmos podem servir como um mecanismo de tomada de consciência, tanto a professores quanto aos alunos, a fim de acompanhar como está se dando a evolução do aprendizado e demonstrar como os conteúdos matemáticos referentes ao componente estão conectados, numa relação de forte dependência, ancorados na teoria da aprendizagem significativa.

3 I FORMAÇÃO INICIAL: OFICINA DE MAPAS CONCEITUAIS PARA LICENCIANDOS DO CURSO DE PEDAGOGIA

A metodologia adotada teve a abordagem qualitativa, usando como fonte de dados os mapas conceituais construídos pelos 28 alunos do 7º semestre do curso de Licenciatura em Pedagogia da Universidade do Estado da Bahia, UNEB campus VII em Senhor do Bonfim, sendo que desses 22 já atuam como professores na rede pública e privada de educação. A pesquisa constituiu-se de quatro etapas.

A fim de desenvolver o estudo em questão, a partir da compreensão da realidade social, aqui também entendida como a realidade educacional, desenvolvemos uma perspectiva de pesquisa qualitativa, defendida por Minayo (1994, p. 15), ao dizer que:

> A realidade social é o próprio dinamismo da vida individual e coletiva com toda riqueza de significados dela transbordante. Essa mesma realidade é mais rica que qualquer pensamento e qualquer discurso que possamos elaborar sobre ela.

Garnica (2004) define pesquisa qualitativa como aquela que apresentam algumas características, tais como as descritas a seguir: (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re) configuradas; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (p. 86).

Ressalte-se que tais características não devem ser vistas como regras, visto que as compreensões do que seja a pesquisa qualitativa está em constante movimento, inclusive na área de matemática. Assim, em consonância com tais características, os autores Araújo e Borba (2004) defendem que pesquisa qualitativa deve ter por trás uma visão de conhecimento que esteja em sintonia com procedimentos metodológicos de que o pesquisar deverá lançar mão para realizar seu estudo. De fato, o que se convencionou identificar de pesquisa qualitativa, é aquela que prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva. Desta forma, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado. Isso não quer dizer que se deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo. Bogdan e Biklen (1994, p. 195) abordam essa questão de maneira bem interessante:

> Embora os dados quantitativos recolhidos por outras pessoas (avaliadores, administradores e outros investigadores) possam ser convencionalmente úteis tal como foram descritos, os investigadores qualitativos dispõem-se à recolha de dados quantitativos de forma crítica. Não é que os números por si não tenham valor. Em vez disso, o investigador qualitativo tende a virar o processo de compilação na sua cabeça perguntando-se o que os números dizem acerca das suposições das pessoas que os usam e os compilam. Os investigadores qualitativos são inflexíveis em não tomar os dados quantitativos por seu valor facial.

Diante do exposto, no primeiro encontro da oficina discutiu-se com os alunos o que é um mapa conceitual e sua estrutura, explicando como os mesmos deveriam construí-lo. Um texto sobre o tema família foi apresentado e em seguida os alunos identificaram no texto os conceitos-chave e após construíram seu mapa conceitual individual sobre o tema.

Após cada um apresentar seu mapa conceitual construído acerca do texto sobre família, retomamos a discussão sobre o conceito de mapas conceituais, sua estrutura, em que teoria se fundamenta e as impressões que cada um teve ao montar o seu próprio mapa conceitual. Na sequência apresentamos os objetivos da oficina de mapas conceituas na disciplina de Fundamentos Teóricos Metodológicos do Ensino de Matemática, como uma estratégia facilitadora da aprendizagem significativa, ou seja, como uma alternativa didática para suas aulas, principalmente no ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para Petrucci e Batiston (2006), a palavra estratégia esteve, historicamente, vinculada à arte militar no planejamento das ações a serem executadas nas guerras, e, atualmente, largamente utilizada no ambiente empresarial. Porém, os autores admitem que:

> [...] a palavra 'estratégia' possui estreita ligação com o ensino. Ensinar requer arte por parte do docente, que precisa envolver o aluno e fazer com ele se encante com o saber. O professor precisa promover a curiosidade, a segurança e a criatividade para que o principal objetivo educacional, a aprendizagem do aluno, seja alcançada (PETRUCCI E BATISTON, 2006, p. 263).

Desse modo, o uso do termo "estratégias de ensino" refere-se aos meios utilizados pelos docentes na articulação do processo de ensino, de acordo com cada atividade e os resultados esperados. Anastasiou e Alves advertem que:

> As estratégias visam à consecução de objetivos, portanto, há que ter clareza sobre aonde se pretende chegar naquele momento com o processo de ensinagem. Por isso, os objetivos que norteiam devem estar claros para os sujeitos envolvidos – professores e alunos – e estar presentes no contrato didático, registrado no Programa de Aprendizagem correspondente ao módulo, fase, curso, etc... (ANASTASIOU E ALVES, 2004, p.71)

Neste primeiro encontro, observamos a dificuldade na construção do mapa conceitual inicial sobre o texto família, pois segundo identificado, 19 dos 28 discentes nunca haviam construído. Esta etapa serviu para fazer um diagnóstico de como os alunos entendiam o mapa conceitual.

Pimenta e Anastasiou (2002, p. 214) entendem que "ao aprender um conteúdo, apreende-se também determinada forma de pensá-lo e de elaborá-lo, motivo pelo qual cada área exige formas de ensinar e de aprender específicas, que explicitem as respectivas lógicas".

O segundo encontro iniciou-se com a construção coletiva, em grupos de quatro integrantes, de mapas conceituais sobre o tema resolução de problemas, relativos ao conteúdo programático do ensino de matemática a partir do conhecimento prévio que os alunos do curso de pedagogia possuem sobre esse determinado tema.

Nessa oportunidade tínhamos por objetivo avaliar os conhecimentos prévios sobre o conteúdo programático (resolução de problemas) no ensino de matemática. Foi necessário apresentar o mapa conceitual como um instrumento que ajuda o professor a identificar aquilo que o aluno já sabe e a partir disso fazer a mediação com novas informações.

Nesta etapa, os mapas construídos apresentaram-se muito restritos a poucos conceitos interligados de forma linear e sem palavras de ligação e ainda observou-se muita dificuldade dos discentes na construção desses mapas, principalmente na identificação dos conceitos.

Abordou-se em seguida, a origem dos mapas conceituais e a fundamentação teórica sobre o qual seu precursor Novak se baseia, a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel. Discutiram-se alternativas de utilização dos mapas conceituais como instrumentos de avaliação do conhecimento prévio, apresentação dos conteúdos e avaliação da evolução na apropriação do conhecimento.

Vale ressaltar que alguns elementos discutidos quando da elaboração dos mapas em grupo foram bem pertinentes principalmente quando estes são utilizados no que se refere a avaliação da aprendizagem. É de sua importância esclarecer aos alunos quais serão as etapas de avaliação e como esses mapas poderão ser avaliados.

Quanto ao professor, esse necessita ter bem claro de que forma esses mapas se constituem como uma possibilidade de avaliação dessa aprendizagem, tendo como norte: as características desse instrumento; raciocínio pedagógico para sua instrumentalização; os aspectos positivos; os limites; orientações que precisam ser fornecidas ao aluno antes de sua realização; as competências de aprendizagem desejadas que o aluno desenvolva; critérios de correção e a forma mais adequada de apresentar os resultados obtidos pelo estudante.

O terceiro encontro constituiu-se pela leitura de textos relativos ao tema. O objetivo desta etapa era a de que os discentes, após a leitura, pudessem construir um novo mapa conceitual com conceitos hierarquizados ou reformular o mapa anteriormente construído, observando os critérios de construção dos mapas conceituais e utilizando seus conhecimentos prévios.

Todos os grupos de alunos entenderam após a leitura dos textos que poderiam reestruturar seus mapas iniciais a partir da internalização de novas informações.

A discussão promovida pelo grupo após a leitura do texto proporcionou uma rica troca de informações entre todos. Vygotsky (1984) salienta que o caráter sociocultural do ensino e da aprendizagem se faz presente na mediação, onde o aprendiz depende inevitavelmente de outros atores, como colegas e professores principalmente.

Pode-se dizer que as atividades desenvolvidas em grupo e com o professor fazendo parte do processo promoveu esta interação social favorecendo a aprendizagem significativa.

Este tipo de trabalho em grupo estimula a participação, facilita a circulação de informações, a argumentação e sugestões, permite a troca de ideias e opiniões, possibilitando a prática da cooperação para a consecução de um fim comum. Dessa forma, segundo Ramos (2009), as atividades em grupo proporcionam a socialização das pessoas.

A quarta e última etapa baseou-se na apresentação final dos mapas construídos pelas equipes e pelo apontamento de dificuldades encontradas pelos discentes na construção dos mapas conceituais e possibilidades de utilização dos mesmos, como estratégias de ensino e aprendizagem.

Analisamos a estrutura dos mapas conceituais construídos inicialmente e depois das discussões, ou seja, do tratamento e avaliamos segundo as características descritas por Moreira (2006, p. 43), com o objetivo de se confirmar que se está tratando desse instrumento tal como ele foi proposto.

Dessa forma os mapas conceituais finais se apresentaram mais estruturados com relação aos mapas iniciais, ou seja, maior hierarquia conceitual, evidenciando que o discente foi capaz de distinguir os conceitos mais inclusivos dos subordinados.

Moreira (1988) acredita que os mapas conceituais são instrumentos que podem demonstrar as mudanças na compreensão conceitual de um educando ou grupo de educandos.

Por meio dessa análise, notou-se uma evolução significativa com relação aos primeiros mapas, já que todos os grupos utilizaram em seus mapas palavras de ligação entre conceitos e mapas mais elaborados, com mais conceitos interligados, mostrando que conseguiram estruturar a aprendizagem corretamente.

Para Moreira (1980), os mapas podem ser utilizados para ter uma imagem da organização conceitual – relações hierárquicas entre conceitos – que o aluno estabelece para um dado conteúdo. Assim, além de o mapa conceitual poder ser utilizado para observação da evolução de conceitos, é um importante atributo para o *feedback* sobre a prática pedagógica do professor.

Ainda como critério de avaliação dos mapas, procuramos analisar se a aprendizagem de acordo com a estrutura conceitual dos discentes, apresentava indícios de aprendizagem significativa ou de aprendizagem mecânica, o que evidenciou os mapas finais muito mais estruturados nesse sentido, levando-nos a concluir e tal estratégia didática de fato favorece a aprendizagem significativa.

As dificuldades e possibilidades advindas após as etapas de atividades com os mapas conceituais e nas discussões e reflexões promovidas pelas equipes foram expostas nas apresentações finais. Citaram-se como dificuldades, por exemplo, a falta de cursos/oficinas sobre essas novas estratégias didáticas, tais como os mapas conceituais.

Os alunos pontuaram que, haviam observado em livros didáticos, mapas conceituais a serem preenchidos como atividades, porém não identificavam os mesmos como possíveis instrumentos de avaliação. Também apontaram como dificuldade, definir o conceito principal e conceitos específicos (menos inclusivos) e organizá-los.

Citaram de forma positiva, os mapas conceituais como instrumento de identificação das dificuldades dos alunos, perante um conteúdo e possível organização de estratégias para superar as mesmas. Como instrumento capaz de favorecer a reelaboração de conceitos, um método avaliativo, considerado importante para que o professor identifique sua prática pedagógica, além de auxiliar na síntese de conteúdos complexos.

Dessa forma, os alunos perceberam que foi significativo o uso dos mapas conceituais tanto para descobrir os conceitos prévios que o aluno possui sobre o tema proposto, quanto para, a partir destes, preparar o planejamento de aula e, por fim, para diagnosticar onde é necessário rever conceitos de forma a alcançar os objetivos propostos, ou seja, para alcançar uma aprendizagem significativa.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino da matemática precisa ser atrativo e prazeroso, neste sentido, a ação docente se torna desafiadora, uma vez que deve atender as expectativas dos discentes e fundamentar o conhecimento científico. Cabe ao professor buscar alternativas didáticas capazes de atrair a atenção, despertar o interesse, estimar o ensino, mostrando a utilidade dos conceitos matemáticos numa relação teoria e prática.

Esta experiência foi de suma importância para estudantes de graduação, visto que proporcionou uma bagagem de informações muito importantes para a formação dos mesmos. O trabalho caracterizou-se por uma maior interação dos discentes com o conteúdo, contribuindo, desta forma, para a aprendizagem.

Aparentemente simples e às vezes confundidos com esquemas ou diagramas organizacionais, mapas conceituais são instrumentos que podem levar a profundas modificações na maneira de ensinar, de avaliar e de aprender. Procuram promover a aprendizagem significativa e entram em choque com técnicas voltadas para aprendizagem mecânica. Utilizá-los em toda sua potencialidade implica atribuir novos significados aos conceitos de ensino, aprendizagem e avaliação.

São uma alternativa ainda pouco conhecida pelos professores como instrumentos de identificação do conhecimento que o aluno traz consigo, de representação visual e de forma sintética de um dado conteúdo, como um instrumento de avaliação. Essa estratégia didática se mostrou eficiente no trabalho proposto para as aulas da disciplina Fundamentos Teóricos Metodológicos do Ensino de Matemática.

Entretanto, muitas dessas práticas, de acordo com Ramos (2009), ainda são pouco difundidas, diante disso, poucas mudanças são observadas, persistindo velhas práticas.

Verificou-se a evolução do conhecimento dos alunos, professores pedagogos em formação inicial, sobre o tema resolução de problemas, referentes ao conteúdo programático do ensino de matemática. Foi possível observar que os mesmos conseguiram interligar conceitos e estruturá-los de maneira ordenada, se apropriando significativamente do conhecimento, o que não ocorreu no primeiro mapa construído.

Os discentes mostraram aceitação dos mapas conceituais enquanto estratégia de ensino, pois ao final do processo já conseguiam fazer a interação entre os conceitos e apresentaram mapas mais estruturados e de fácil compreensão.

Para Ramos (2009), pode-se inferir que a partir do momento que os alunos realmente conhecem os constituintes de um mapa, aprendem a importância deles e exercitam, conseguem evoluir progressivamente, construindo mapas cada vez mais bem estruturados e complexos, sendo que o professor é responsável por tal fato, tanto no que diz respeito à apresentação da sua ferramenta de trabalho (mapas) como também em exercer o seu papel mediador, tornando-se fundamental para o progresso de qualquer metodologia implantada em sua prática na sala de aula.

A oficina sobre mapas conceituais foi significativa, pois os mesmos são mais uma alternativa para a prática pedagógica do professor, já que é uma estratégia de ensino e aprendizagem importante que o professor tem em mãos para fazer um diagnóstico do que os alunos sabem sobre o assunto que será estudado, verificar suas dificuldades e ajudá-los na evolução dos conceitos, ou seja, do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ANASTASIOU, L. das G. C.; ALVES, L. P. Estratégias de ensinagem. In: ANASTASIOU, L. das G. C.; ALVES, L. P. (Orgs.). **Processos de ensinagem na universidade**. 3ª ed. Joinville: Univille, 2004.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**, Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa**. São Paulo: Moraes, 1982.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos:** uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 42ª ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** saberes necessários à prática educativa. 52ª ed. Rio de Janeiro: Ed. Paz e Terra, 2015.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MINAYO, M.C.S. **Pesquisa Social. Teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 1994.

MOREIRA, M.A. **Mapas conceituais como instrumentos para promover a diferenciação conceitual progressiva e a reconciliação integrativa**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1980.

MOREIRA, M. A.; NOVAK, J. D**.** Investigacíon em enseñanza de lãs ciências em La Universidade de Cornell: esquemas teóricos, cuestiones centrales y abordes metodológicos. In: **Enseñanza de Lãs Ciências**, Barcelona, v. 6, n. 1, p. 3-18, 1988.

MOREIRA, M. A. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2006.

MOREIRA, M. A. Aprendizaje Significativo Crítico. **Boletín de Estúdios e Investigación**, 2ª ed, nº 6, p. 83-101, 2010.

NOVAK, J. D. **Conocimiento e Aprendizaje:** Los mapas conceptuales como herramientas facilitadoras para escuelas y empresas. Madrid: editorial Alianza, 1998.

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. **Aprender a Aprender.** Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1999.

PETRUCCI, V. B. C.; BATISTON, R. R. Estratégias de ensino e avaliação de aprendizagem em contabilidade. In: PELEIAS, Ivam Ricardo. (Org.) **Didática do ensino da contabilidade**. São Paulo: Saraiva, 2006.

PIMENTA, S. G.; ANASTASIOU, L. das G. C. **Docência no ensino superior.** São Paulo: Cortez, 2002.

RAMOS, L. **Um olhar comprometido com o ensino de ciências.** 1ª ed. Belo Horizonte: Editora FAPI, 2009.

SALA, E. M.; GONI, J. O. As Teorias da Aprendizagem Escolar. In Salvador, C. C. [et all]. **Psicologia do Ensino**. Porto Alegre: Editora: Artes Médicas, 2000.

TAVARES, R. **Ciências & Cognição**. Vol. 12, p.72-85, 2007. Disponível em: http://www.cienciasecognicao.org. Acessado em maio de 2017.

VYGOTSKY, L. S. **A Formação Social da Mente:** o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes Editora, 1984.

CAPÍTULO 15

AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E A APROPRIAÇÃO DO WEB CURRÍCULO PELOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA COMO O "X" DA QUESTÃO

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 07/07/2020

Vera Lúcia de Oliveira Freitas Ruas
Universidade Estadual de Montes Claros – PPGE Unimontes
Montes Claros – Minas Gerais
http://orcid.org/0000-0003-0626-7497

Josué Antunes de Macêdo
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais - IFNMG Campus Januária e Universidade Estadual de Montes Claros
PPGE Unimontes
Montes Claros – Minas Gerais
http://orcid.org/0000- 0001-7737-7509

Edson Crisostomo dos Santos
Universidade Estadual de Montes Claros – PPGE Unimontes
Montes Claros – Minas Gerais
http://orcid.org/0000-0001-7078-243X

RESUMO: Este estudo é parte de uma pesquisa que tem como finalidade investigar as concepções de professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, das escolas públicas Montesclarense, acerca do nível de cultura digital e do uso das Tecnologias Digitais (TD) imbricadas no currículo escolar. O ponto de partida consiste em captar, a partir de narrativas docentes, quais são as práticas e saberes mobilizados para a integração destas duas vertentes. Os procedimentos metodológicos estão baseados em estudos bibliográficos e empíricos, por meio dos quais procuramos identificar os possíveis diálogos que os docentes conseguem estabelecer com o uso de tecnologias nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Os resultados da pesquisa apontam no sentido de que os aspectos relacionados à *web,* currículo, formação inicial e continuada de professores, dentre outros, influenciam na prática pedagógica dos professores pesquisados e permitem vislumbrar outras perspectivas na discussão dessa temática.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Tecnologias Digitais. *Web* Currículo.

DIGITAL TECHNOLOGIES AND WEB CURRICULUM APPROPRIATION BY MATHEMATICS TEACHERS AS THE “X” OF THE QUESTION

ABSTRACT: This study is part of a research that aims to investigate the conceptions of mathematics teachers from the final years of elementary and high school, from Montesclarense public schools, about the level of digital culture and the use of Digital Technologies (TD) intertwined in the school curriculum. The starting point consists of capturing, from teaching narratives, what are the practices and knowledge mobilized for the integration of these two aspects. The methodological procedures are based on bibliographic and empirical studies, through which we seek to identify the possible dialogues that teachers are able to establish with the use of technologies in the teaching and learning processes of Mathematics. The results of the research point out that the aspects related to the web, curriculum, initial and continuing teacher

education, among others, influence the pedagogical practice of the surveyed teachers and allow to glimpse other perspectives in the discussion of this theme.
KEYWORDS: Mathematical Education. Digital Technologies. Web Curriculum.

1 I INTRODUÇÃO

O presente estudo foi idealizado na linha de pesquisa Multiletramentos e Práticas Educativas, com foco na Educação Matemática, do Programa de Estudos de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Montes Claros - UNIMONTES.

A discussão que permeará esta pesquisa está inserida na vertente investigativa, que possibilita analisar os diferentes processos educacionais e práticas pedagógicas, problematizando as ações educativas voltadas para o desenvolvimento do pensamento matemático como ferramentas essenciais à democratização do acesso aos bens culturais historicamente produzidos, ao seu usufruto pelos sujeitos e ao exercício pleno da cidadania.

É sabido que a potencialidade pedagógica das tecnologias digitais e sua aplicação no cotidiano escolar, especialmente do ensino da Matemática, tem se constituído, nas últimas décadas, em foco de pesquisas e debates tanto pelo entusiasmo quanto pela inevitabilidade de discutir sobre essa temática. Sendo assim, este estudo fundamenta-se a partir de reflexões oportunizadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC/2017) - Ensino Fundamental e seus desmembramentos nos currículos Mineiro e Montesclarense, nos quais identificaram-se o enfoque desta prática pedagógica não mais como recurso, mas como objeto de conhecimento para atender à necessidade da sociedade altamente tecnológica do século XXI.

Este estudo tem como finalidade investigar as concepções de professores de Matemática, dos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, de escolas públicas Montesclarenses, acerca do nível de cultura digital e do uso das Tecnologias Digitais (TD) imbricadas no currículo escolar - *Web* currículo, com o intuito de compreender os possíveis diálogos que os docentes conseguem estabelecer com o uso de tecnologias digitais nos processos de ensino e de aprendizagem em Matemática.

2 I BREVE DISCUSSÃO SOBRE CURRÍCULO, CULTURA DIGITAL E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta seção buscar-se-á estabelecer os vínculos entre cultura digital, currículo e Educação Matemática. Nesse sentido, inicia-se pelas discussões de Kenski (2013), que concebe às tecnologias o status de indissociável à espécie humana e à educação, argumentando que em todos os tempos e espaços a engenhosidade humana fez surgir inovações tecnológicas quer sejam digitais ou não e, à escola, atribui a função da socialização dessas novas ideias. Assim, entende-se que essa cultura deve estar expressa no currículo de Matemática da Educação Básica.

O currículo se constitui, segundo D'Ambrósio (2009, p. 88) como a "[...] estratégia para a ação educativa". Esse autor é enfático ao afirmar que o ponto crítico do trabalho com o currículo de Matemática na atualidade "[...] é a passagem de um currículo cartesiano, estruturado previamente à prática educativa, a um currículo dinâmico, que reflete o momento sociocultural e a prática educativa nele inserida".

Ignorar a urgência da apropriação, pelos professores, de um currículo de Matemática que atenda às reais necessidades dos alunos, se constitui, sobremaneira, na falta de compreensão de que no ambiente educativo há uma enorme diversidade de sujeitos que possuem desejos, concepções de mundo, vivências, culturas e conhecimentos. Isso constitui identidades singulares que devem ser respeitas de maneira que nenhuma cultura deve ser mais valorizada em detrimento de outras.

Esta afirmação coaduna com as propostas da Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) e seus desdobramentos no Currículo de Referência de Minas Gerais (MINAS GERAIS, 2018), bem como no Programa Curricular do Município de Montes Claros, que se constituem em documentos norteadores da prática dos professores, por conterem os conteúdos mínimos a que o estudante tem direito de aprender e contemplarem, como principal objetivo, promover a equidade na educação sobretudo porque

> [...] a relação que determina sociedade-cultura-currículo-prática explica que a atualidade do currículo se vê estimulada nos momentos de mudança nos sistemas educativos, como reflexo da pressão que a instituição escolar sofre de diversas frentes para adequar seus conteúdos à própria evolução da cultura e economia da sociedade. (SACRISTÁN, 2007, p. 22, tradução nossa)

A sociedade está cada vez mais imersa em tecnologias e a estruturação curricular reflete as relações de poder que existem num determinado espaço/tempo, tanto estabelecendo quanto intensificando essas relações. Nesse contexto, torna-se necessário o domínio de conhecimentos matemáticos permeados por saberes tecnológicos necessários para exercer a cidadania; este fator é o que determinará possuir um poder nesse tipo de sociedade (SKOVSMOSE, 2015).

As ideias anteriormente expostas requerem dos profissionais da área de educação a necessidade de apreendizagem do real sentido que está expresso nas orientações curriculares, uma vez que, segundo afirmam Moreira e Silva (2008, p. 7), "[...] não é um elemento inocente e neutro de transmissão desinteressada do conhecimento social".

Neste contexto, justifica-se o desenvolvimento deste estudo, em conformidade com o disposto na BNCC ao estabelecer que "[...] o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea ou suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais" (BRASIL, 2018, p. 265).

Corroborando essa afirmação, conduz-se a reflexão no sentido de analisar os cenários atuais brasileiro e mundial, altamente tecnológicos, digitais e imprevisíveis, buscando elementos para a compreensão de como esses aspectos têm contribuído para a urgência na modificação do fazer pedagógico na sala de aula, especialmente relacionado ao ensino da Matemática.

Isso leva à indagação de uma questão a ser respondida e vivenciada, no sentido proposto por Abranches (2014):

> Século XXI. Sociedade da Informação. Tecnologias da Informação e Comunicação. Aprendizagem móvel. *Web* currículo. Tecnologias digitais [...]. Como juntar tudo isso no espaço/tempo da educação, espaço este historicamente construído, campo de disputas diversas e de atores em busca de significado para o seu fazer? Muito mais que a pergunta a ser respondida é uma questão a ser vivenciada (p. 9).

Para contribuir com essas discussões sobre as grandes transformações trazidas pela era digital à educação, Almeida (2014, *on-line*) declarou que “[...] é preciso trabalhar com a convergência, procurando explorar os benefícios dessa convergência de mídias e tecnologias no uso pedagógico. O aluno leva a tecnologia para todos os espaços, dentro e fora da escola".

Nesse sentido, Almeida (2010) afirma que web currículo

> [...] é o currículo que se desenvolve por meio das tecnologias digitais de informação e comunicação, especialmente mediado pela *internet*. [...] implica apropriar-se dessas tecnologias em prol da interação, do trabalho colaborativo e do protagonismo entre todas as pessoas para o desenvolvimento do currículo. [...] Não se trata mais do uso eventual da tecnologia, mas de uma forma integrada com as atividades em sala de aula (ALMEIDA, 2010, *on-line*).

No entanto, a autora é taxativa ao afirmar, a partir dos estudos realizados, que com a inserção das tecnologias alinhadas ao currículo percebeu-se que "[...] quando se começou a trabalhar em tecnologias móveis – *laptops, tablets, smartphones* – veio a grande mudança, mas até agora essa revolução ainda não foi entendida e trabalhada como deveria" (ALMEIDA, 2010, *on-line*).

Nesse sentido, entende-se que o currículo sempre vem anteposto a uma teoria ou discussão sobre suas bases conceituais, as quais funcionam não apenas para defini-lo, mas como um refletor de suas características intrínsecas e de seus efeitos na realidade, e ao apresentá-lo se torna um artefato da sua invenção. O cerne de todo currículo consiste em que tipo de cidadão se quer formar para determinada sociedade, o que implica na seleção de conteúdos, cuja escolha criteriosa envolve o que e para que ensinar, num exercício de poder. É permeado por teorias/discussões com enfoque tradicional, crítico e pós-crítico (SILVA, 2010), cujos elementos estão sintetizados por meio do Quadro 1.

Teorias tradicionais	Teorias Críticas	Teorias Pós-críticas
ensino, aprendizagem, avaliação, metodologia, didática, organização, planejamento, eficiência e objetivos; presentes na organização metodológica das escolas e nos cursos de formação de professores ao longo dos anos.	ideologia, reprodução cultural e social, poder, classe social, capitalismo, relações sociais de produção, conscientização, emancipação e libertação, currículo oculto e resistência.	identidade, alteridade, diferença, subjetividade, significação e discurso, saber-poder, e representação, cultura, gênero, raça, etnia, sexualidade e multiculturalismo.

Quadro 01: Elementos que são privilegiados nas Teorias tradicionais, críticas e Pós-críticas de Currículo

Fonte: Adaptado de Silva (2010, p. 17) e Souza e Fazenda (2017, p. 711).

Ao observar o Quadro 1, pode-se inferir que de acordo com o tipo de cidadão que se quer formar, o discurso da comunidade escolar, geralmente reflexo das políticas públicas proporcionadas pelo governo, se pautará nessas propostas e determinará os elementos da teoria do currículo que serão o alicerce dos processos de ensino e de aprendizagem. Enquanto as teorias conservadoras questionariam o que ensinar, os princípios críticos e pós-críticos, em constante reflexão, preocupariam com o porquê ensinar enfatizando os vínculos existentes entre saber, identidade e poder.

Neste enquadramento, é indubitável como a imersão dos indivíduos pertencentes à sociedade contemporânea e à cultura digital traz imbuída a necessidade de discursos que compreenderam a não neutralidade da educação Matemática e do currículo, pois

> [...] existe uma luta de superação de um currículo conteudista que inviabiliza mudanças significativas na qualidade de ensino na escola. [...] é necessário um currículo com bases multiculturais e interdisciplinares, para a transformação social, apresentando a escola, como o espaço em que se aprende a aprender, a conviver e a ser com e para os outros, contrariando um tipo de currículo que segrega. Pois **é na escola que o currículo se torna terra fértil para propor mudanças ou simplesmente manter o *status quo* das relações microfísicas de poder que se estabelecem cotidianamente.** (SANTOS, 2018, p. 138, grifo nosso)

Isso leva a refletir sobre o aspecto de que a natureza ideológica da instituição de ensino, manifestada por meio do poder geralmente camuflado, determinaria a viabilidade ou não da incorporação das tecnologias digitais ao currículo da Matemática, de acordo com o posicionamento de seus atores acerca de como compreendem seu papel social no território educativo que esteja inserida.

3 I E POR FALAR EM TECNOLOGIAS DIGITAIS...

Hodiernamente, as abordagens sobre o currículo escolar de Matemática expõem uma multiplicidade de perspectivas de análise, devido à complexidade da temática, por ser um território com construção histórica e cultural indo além de uma simples enumeração de conteúdos conceituais que o professor precisa ensinar aos seus alunos. Todavia, ainda existe um paradoxo no fazer pedagógico dos professores na Educação Básica, contemplando, de um lado, os alunos, nativos digitais, que de acordo com Prensky (2001) é aquele que nasceu e cresceu com as tecnologias digitais presentes em sua vivência, que enxergam as tecnologias como possibilidade de realizar coisas inovadoras (constituindo-se em alicerce para sustentação de tudo que realizam). Do outro lado encontram-se os professores, imigrantes digitais que para Prensky (2001) são aqueles que não nasceram no mundo digital, mas em alguma época de suas vidas, ficaram fascinados e adotaram muitos ou a maioria dos aspectos das novas tecnologias, utilizando-as como um modo de (re)fazer coisas antigas (como uma ferramenta, um recurso didático).

Ademais, Macêdo; Dickman e Andrade (2012, p. 564) afirmam que "[...] se, de um lado, encontram-se os estudantes atraídos e até mesmo seduzidos pela tecnologia, de outro lado, encontram-se os professores e as suas dificuldades para acompanhar o atual processo evolutivo". Desde esta perspectiva, a adequada formação inicial e continuada do professor de Matemática se constitui em um divisor de águas, determinando o nível de sensibilidade desse profissional para a compreensão do cotidiano altamente tecnológico e do tipo de indivíduo que se pretende formar para esta sociedade.

Na BNCC (BRASIL, 2018) o termo **cultura digital** caracteriza-se pela cultura nascida pela era digital, originária do ciberespaço e da linguagem da *internet* que busca integrar a realidade com o mundo virtual.

Neste sentido, Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 39), apresentam quatro fases das tecnologias digitais na Educação Matemática, desde a fase da inserção dos computadores, calculadoras simples e científicas até a atualidade, com as tecnologias móveis, como telefones celulares, *laptops, tablets e internet* banda larga.

Na quarta fase das tecnologias em Educação Matemática, em que se evidencia seus aparatos tecnológicos móveis, urge a necessidade de ressignificar a cultura da escola da Educação Básica, com os novos pensamentos, valores e sentidos advindos do uso das tecnologias, pois a sua presença nas escolas pode oferecer oportunidades equitativas de interação com as tecnologias e de participação na cultura digital.

Entretanto, devemos ter consciência de que os telefones celulares já são amplamente acessíveis e oferecem muitas possibilidades didáticas, constituindo-se em uma atitude retrógrada vetar sua utilização pelos estudantes. Ao contrário, o *web*currículo prevê o uso integrado da tecnologia, possibilitando aos alunos fazerem o registro daquilo que encontram numa pesquisa de campo, trabalharem textos e fotos e prepararem pequenos documentários em vídeo, etc. Por meio do celular. Isso precisa estar integrado ao conteúdo (ALMEIDA, 2010),

De acordo com Nóvoa (1995, p. 16), a identidade profissional não é um dado adquirido, não é uma propriedade, não é um produto, mas constitui-se como um lugar de lutas e conflitos, espaço de construção, maneiras de ser e estar na profissão docente.

Essa abordagem educacional deve possibilitar a colaboração e a personalização, procurando atender às reais necessidades dos alunos e serem implementadas nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática na Educação Básica com o intuito de obter respostas, ainda que parciais, para as inquietações docentes, mesmo que conduzam a outros questionamentos.

4 | SABERES E PRÁTICAS DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE TECNOLOGIAS DIGITAIS: O *LÓCUS* DAS NARRATIVAS

Este estudo consiste em um fragmento de uma pesquisa mais ampla, em desenvolvimento no âmbito do PPGE. Para dar respostas ao problema e atender aos objetivos propostos estamos realizando uma pesquisa qualitativa, que tem como finalidade interpretar experiências individuais e acontecimentos, com foco na busca de significados sociais dos fatos e da maneira como foram construídos historicamente, sob o ponto de vista do pesquisador que irá procurar entender as relações que se estabelecem entre eles (CRESWELL, 2007).

Quanto ao procedimento investigativo, prioriza-se a abordagem Narrativa, entendida por Bastos e Biar (2015, p. 99) como "[...] discurso construído na ação de se contar histórias em contextos cotidianos ou institucionais, em situações ditas espontâneas ou em situação de entrevista para pesquisa social [...]". Possui como tarefa central compreender que as pessoas estão vivenciando suas histórias em um contexto experiencial contínuo e, contando-as com palavras enquanto refletem sobre suas experiências, o que pode provocar transformações na visão que os indivíduos possuem sobre si e os outros.

Outro diferencial é que se pode utilizar vários métodos de coleta de dados e transcrições de entrevistas, em ações de contar histórias, de produzir escritos autobiográficos ou através de princípios, imagens, metáforas e filosofias pessoais, dentre outros (CONNELLY; CLANDININ, 1995; CLANDININ; CONNELLY, 2011).

Corroborando a importância de utilização de narrativas orais ou escritas na pesquisa educacional e a sua utilidade na compreensão da prática pedagógica dos professores de Matemática, optou-se por constituir o *corpus* da pesquisa com as experiências que esses profissionais vivenciaram, até o momento, a partir de sua formação inicial e continuada sobre tecnologias digitais.

Considera-se necessário as alertas de Nacarato, Passos e Silva (2014), no sentido de alguns cuidados a serem adotados pelos pesquisadores que se propõem a abordar a história de vida de profissionais da educação, para não criarem estereótipos dos personagens e lugares em que trabalham ou da instituição de ensino superior em que se formaram, além de não silenciarem as vozes desses professores ou utilizarem de moralismos ao tratarem dos assuntos relativos às narrativas que serão construídas para atenderem aos propósitos da pesquisa.

Os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem à prova de fatos, pois os dados analisados são não-métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens.

Neste sentido, a pesquisa será delimitada a professores de Matemática que atuam em escolas públicas municipais e estaduais do município de Montes Claros, zona urbana, Anos Finais do Ensino Fundamental. A amostra se constitui por vinte professores de Matemática, sendo dez de escolas municipais e dez de escolas estaduais. Como instrumento de coleta de dados, decidiu-se por entrevista semiestruturada, que de acordo com Flick (2013), intitula como um conjunto de questões formuladas previamente, que podem ser indagadas em uma sequência variável e talvez levemente reformuladas durante a entrevista para permitirem que os entrevistados emitam suas opiniões sobre algumas questões. As entrevistas serão gravadas em áudio e vídeo, com autorização dos participantes.

Após a coleta de dados, a próxima etapa se constitui no mapeamento dos tópicos recorrentes nas entrevistas, identificação dos momentos narrativos, análise das narrativas e, por fim, na sua interpretação, levando-se em consideração as orientações seguintes:

> [...] a discussão do plano de análise dos dados deve ter diversos componentes. O processo de análise de dados consiste em extrair sentido dos dados de texto e imagem. Envolve preparar os dados para análise, conduzir análises diferentes, aprofundar-se cada vez mais no entendimento dos dados, fazer representação dos dados e fazer uma interpretação do significado mais amplo dos dados. (CRESWELL, 2007, p. 194)

Para validar as narrativas dos professores considerar-se-á aspectos teórico-metodológicas da Análise de Conteúdo, que de acordo com Bardin (2011, p.15) consiste em "[...] um conjunto de instrumentos de cunho metodológico em constante aperfeiçoamento, que se aplicam a discursos extremamente diversificados [...]". O estudo servirá das orientações tendo como foco a aplicação da técnica descrita pela autora como análise temática ou análise categórica. Tal técnica consiste na decomposição de narrativas em unidades e depois classificá-las por reagrupamento. Esse método prevê três etapas de execução: (1) análise prévia, que consiste na organização do material, operacionalização e sistematização, escolha dos documentos, formulação de hipóteses, objetivos e elaboração de indicadores e leitura flutuante; (2) análise exploratória, que consiste em codificações e classificações; (3) tratamento dos resultados obtidos e interpretação, que consiste na tabulação e aplicação de técnicas descritivas de análise.

5 | CONSIDERAÇÕES

Em um mundo cada vez mais globalizado, a escola e os professores de Matemática terão que lidar com os seguintes desafios: refletir sobre a sua formação inicial e continuada enquanto processo de preparação para o uso de tecnologias digitais; inserir na sala de aula o uso de ferramentas digitais; proporcionar aos alunos *feedback* das atividades em tempo real e ter um planejamento condizente com as necessidades e expectativas dos discentes.

Por isso, uma proposta de estudo que se centra em uma reflexão por parte dos professores, quando estarão narrando as experiências que adquiriram ou que ainda precisam obter em tecnologias digitais e a capacidade de transpô-las para a prática pedagógica na sala de aula, se constitui em um importante aspecto para ser analisado, discutido e interpretado no contexto das pesquisas educacionais desenvolvidas centradas na formação de professores que ensinam matemática na Educação Básica.

Almeja-se verificar quais são as possíveis narrativas que os professores Montesclarense que atuam nas escolas públicas municipais e estaduais conseguiram estabelecer a partir de sua formação inicial e continuada, bem como das práticas pedagógicas, buscando contrastá-las com os saberes necessários e/ou adquiridos por meio do uso das tecnologias digitais na sala de aula durante a implementação dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Em suma, a expectativa dos pesquisadores consiste em reconhecer que nos espaços escolares, encontram-se profissionais com diversas visões sobre a formação inicial e continuada para inserção das TD□s nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Alguns podem considerar que não se importam com o processo formativo para melhoria das suas ações pedagógicas, como se já estivessem prontos para suplantarem quaisquer desafios e/ou adversidades que surgirem no exercício de suas atividades docentes em uma sociedade em constantes mutações e adaptações ao mundo globalizado e em contínuas transformações. Outros poderão estar ávidos por contínuas aprendizagens para darem respostas eficazes às demandas educacionais atuais e futuras. Entretanto, considera-se relevante ter em conta as políticas públicas e como elas afetam as práticas pedagógicas dos professores que ensinam matemática, de seus reflexos na atuação desses profissionais e de como foram educados para a utilização das tecnologias digitais e dos aparatos tecnológicos.

Entende-se que é necessário romper com a visão simplista de atribuir responsabilidades pela problemática relativa à não incorporação das tecnologias digitais na sala de aula somente ao (des)interesse do professor. Nesse sentido, esta pesquisa poderá contribuir com a compreensão de como os professores vivenciam essa problemática e (re)constroem suas histórias, possibilitando interpretar e descrever *como* e *por que* suas práticas docentes ocorrem atualmente nos ambientes/espaços escolares, bem como suas perspectivas futuras.

REFERÊNCIAS

ABRANCHES, Sílvio. A educação nas trilhas do mundo digital. Prefácio. In.: ALMEIDA, Elizabeth Bianconcini; ALVES, Dom Robson Medeiros; LEMOS, Silvana Donadio Vilela (org.). **Web currículo: aprendizagem, pesquisa e conhecimento com o uso de tecnologias digitais.** 1. ed. Rio de Janeiro: Letra Capital, 2014. p. 09-14.

ALMEIDA, Maria Elizabeth Biancocini. **Maria Elizabeth de Almeida fala sobre tecnologia na sala de aula.** [Entrevista concedida a Elisângela Fernandes]. Gestão Escolar. 01 de junho, 2010. Disponível em: <https://gestaoescolar.org.br/conteudo/627/maria-elizabeth-de-almeida-fala-sobre-tecnologia-na-sala-de-aula>. Acesso: 05 jul. 2020.

ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcini. **Web currículo: a convergência digital é o futuro** [Entrevista concedida a Ivani Cardoso - CONTEC Brasil]. Associação Brasileira de Editores e Produtores de Conteúdo e Tecnologia Educacional - Abrelivros. 17 de abril, 2014. Disponível em: <http://www.abrelivros.org.br/home/index.php/noticia%20s/5597-web-curriculo-a-convergencia-digital-e-o-futuro>. Acesso: 05 jul. 2020.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo.** São Paulo: Edições 70, 2011.

BASTOS, Liliana Cabral; BIAR, Liana de Andrade. Análise de narrativa e práticas de entendimento da vida social. **DELTA: Documentação e Estudos em Linguística Teórica e Aplicada.** v. 31, n. 4, 2015.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia R.; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2014. p. 17-40.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental.** Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. P. 265-320.

CLANDININ, D. Jean; CONNELLY, F. Michael. **Pesquisa narrativa: experiência e história em pesquisa qualitativa.** Tradução: Grupo de Pesquisa Narrativa e Educação de Professores ILEEI/UFU. Uberlândia: EDUFU, 2011.

CONNELLY, F. Michael.; CLANDININ, D. Jean. Relatos de experiencia e investigación narrativa. In: LARROSA, Jorge et al. (Org.). **Déjame que te cuente: ensayos sobre narrativa y educación.** Tradução María Romanillos y Jorge Larrosa. 1. ed. Barcelona: Alertes, 1995. p. 11-59

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução Luciana de Oliveira da Rocha. 2. ed. - Porto Alegre: Artmed, 2007.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática.** 17 ed. Campinas, SP: Papirus, 2009. p. 79-88.

FLICK, Uwe. **Introdução à metodologia de pesquisa: um guia para iniciantes.** Tradução Magda Lopes. Porto Alegre: Penso, 2013. p. 235-240.

KENSKI, Vani Moreira. **Tecnologias e tempo docente**. Campinas, SP: Papirus, 2013. p. 15-26

MACÊDO, Josué Antunes; DICKMAN, Adriana Gomes; ANDRADE, Isabela Silva Faleiro. Simulações computacionais como ferramentas para o ensino de conceitos básico de eletricidade. **Cad. Bras. Ens. Fís**., v. 29, n. Especial 1: p. 562-613, set. 2012.

MINAS GERAIS. **Currículo Referência de Minas Gerais**. Secretaria de Estado de Educação. Belo Horizonte, 2018.

MOREIRA, Antônio Flávio; SILVA, Tomaz. Tadeu (Org.). **Currículo, cultura e Sociedade.** Traduzido por Maria Aparecida Baptista. 10. ed. São Paulo: Cortez, 2008.

NACARATO, Adair Mendes; PASSOS, Carmen Lúcia Brancaglion; SILVA, Heloísa. Narrativas na pesquisa em Educação Matemática: caleidoscópio teórico e metodológico. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 49, p. 701-716, ago. 2014.

NÓVOA, Antonio (Org.). **Vidas de professores.** Porto Alegre: Porto, 1995. p. 34

PRENSKY, Marc. Digital Natives, Digital Immigrants**. On the Horizon**, Bradford, v. 9, n. 5, p. 2-6, out. 2001.

SACRISTÁN, José Gimeno. **El Curriculum: una reflexión sobre la práctica.** Novena Edición. Madrid, España: Ediciones Morata, 2007. p. 13-43

SANTOS, Maria José Costa. O currículo de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental na Base Nacional Comum Curricular (BNCC): os subalternos falam? **Horizontes**, v. 36, n. 1, p. 132-143, jan./abr. 2018.

SILVA, Tomaz Tadeu. **Documentos de identidade: uma introdução às teorias do currículo**. 3. ed. 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. p. 11-17

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática crítica: a questão da democracia.** Campinas: Papirus, 2015, Coleção Perspectivas em Educação Matemática, SBEM, 160 p.

SOUZA, Mariana Aranha; FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. Interdisciplinaridade, currículo e tecnologia: um estudo sobre práticas pedagógicas no Ensino Fundamental. **RIAEE - Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação**, v. 12, n. 2, p. 708-721, 2017.

CAPÍTULO 16

A PASSAGEM DO 3D ↔ 2D NOS ANOS INICIAIS: UMA PROPOSTA POSSÍVEL

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 06/07/2020

Julio Silva de Pontes
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Duque de Caxias - RJ
http://lattes.cnpq.br/8830608061432625

Celso Ribeiro Campos
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
São Paulo - SP
http://lattes.cnpq.br/2456415045021832

RESUMO: O presente trabalho é um recorte da tese que está sendo escrita pelo primeiro autor em relação ao conhecimento do professor que ensina matemática nos anos iniciais quanto ao ensino e aprendizagem da geometria no ensino fundamental. A proposta é contribuir com a formação do docente que atua nesta etapa em relação a passagem da exploração das figuras espaciais para a plana. Entre os objetivos investigados se refere a como ocorre o processo da visualização de figuras tridimensionais em representações bidimensionais, e vice-versa. Foi levantada e uma revisão de literatura de pesquisas bibliográficas em relação a esse tema. Utilizamos a metodologia do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele para buscar estratégias e sugestões de como esse processo poderá ser feito, focando em seu primeiro nível (Visualização). Concluímos com as propostas ofertadas neste trabalho que são possíveis para os professores no desenvolvimento do processo de visualização tão importante na vida escolar dos alunos.

PALAVRAS-CHAVE: Visualização; Desenhos; Representação; Objetos.

THE PASSAGE OF 3D ↔ 2D IN THE EARLY YEARS: POSSIBLE PROPOSAL

ABSTRACT: The present work is an excerpt of the thesis that is being written by the first author in relation to the knowledge of the teacher who teaches mathematics in the early years regarding the teaching and learning of geometry in elementary school. The proposal is to contribute to the training of the teacher who works at this stage in relation to the transition from the exploration of spatial figures to the plane. Among the objectives investigated, it refers to how the process of visualizing three-dimensional figures in two-dimensional representations occurs, and vice versa. It was raised and a literature review of bibliographic research in relation to this topic. We use Van Hiele's methodology for the development of geometric thinking to seek strategies and suggestions for how this process can be done, focusing on its first level (Visualization). We conclude with the proposals offered in this work that are possible for teachers in the development of the visualization process so important in the students' school life.

KEYWORDS: Visualization; Graphics; Representation; Objects.

1 I INTRODUÇÃO

A ideia deste trabalho surgiu por conta

de conversas informais entre o primeiro autor, que foi o formador, com os professores dos anos iniciais, em formação do Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) em Angra dos Reis no ano de 2016. Foram observadas várias dúvidas pertinentes ao uso de objetos geométricos e a metodologia utilizada, além do anseio de uma formação específica para esta área.

> [...] muitos professores, principalmente das primeiras séries, declaram ter duas razões para não se sentirem à vontade para aplicar tais materiais em suas salas de aula. A primeira é por não estarem familiarizados com os procedimentos didáticos requeridos por estes tipos de recursos manipulativos, e a segunda, por não terem conhecimento de como reproduzi-los por meio de materiais de baixo custo (KALEFF, 2008, p. 10).

Assim sendo, nas aulas de Geometria os professores costumam usar muitas figuras, desenhos e objetos geométricos, por conta da facilidade que eles normalmente têm para apresentá-los. Porém, nem sempre o aluno consegue entender aquilo que o professor está ensinando, muitas vezes por não estar visualizando as características importantes do objeto em questão.

Para conduzir uma boa interpretação do objeto é preciso que se faça uso de estímulos, segregação visual das partes do objeto, a unificação destas partes, assim como reconhecer a continuidade de uma figura com traçados, seu fechamento mesmo com partes faltando, associação com outras figuras, além de considerar semelhanças associadas com o agrupamento de suas partes.

Desta forma, segundo a Teoria de Piaget as primeiras transformações são através dos aspectos topológicos dos objetos, e só mais tarde é possível transferir os atributos geométricos Euclidianos dos objetos para sua representação do espaço.

> [...] o espaço mais elementar, que se define através das relações mais abertas entre objetos, é o espaço topológico. As relações definidas pelas transformações operadas sobre os objetos, nesse espaço, são as de manutenção de vizinhança e fronteira entre dois ou mais pontos contidos no objeto (BECKER, 2002, p.78).

Segundo Murakami e Franco (2008, p. 4), as relações topológicas são as mais elementares, "nas quais a criança constrói a noção de conservação de formas e grandezas, noção esta que é condição para a construção das relações espaciais posteriores".

Para por em prática esse processo, utilizamos o modelo Van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, mas precisamente o seu primeiro Nível, que é o da Visualização. Segundo Gutiérrez (1996b) os níveis de van Hiele de raciocínio nos dão possibilidade de completar o modelo de visualização e incorporar a avaliação de atividades de visualização para o contexto da avaliação em matemática.

2 I MATERIAIS E DESENHOS

Os materiais e os desenhos muito utilizados nas aulas de matemática e são, segundo Fischbein (1993), como modelos materializados pelas entidades mentais. Não existe em nosso dia a dia cópia fiel dos objetos geométricos, e isso só acontece no campo conceitual.

> Uma figura geométrica pode, então, ser descrita como tendo propriedades intrinsecamente conceitual. No entanto, uma figura geométrica não é um mero conceito. É uma imagem, uma imagem visual. Possui uma propriedade que os conceitos usuais não possuem, isto é, inclui a representação mental da propriedade espacial. (FISCHBEIN, 1993, p. 141)

Qualquer figura geométrica é uma representação com propriedades que definem o conceito. Um bom exemplo é imaginarmos um paralelepípedo. Não importa a massa, a cor e o tamanho, ele será definido por um conceito, incluindo em sua representação as suas propriedades que auxiliarão no raciocínio matemático.

Assim sendo, é por meio do uso de figuras manipulativas, que o aluno pode fazer a experimentação, observação, indução, comparação e generalização, permitindo que ocorra um processo mental entre os conceitos e a imagem. Um dos grandes obstáculos no raciocínio geométrico é, segundo Fischbein (1993), do aluno em manipular conceitos figurativos, negligenciando a definição.

3 I IMAGENS MENTAIS

A imagem mental é “qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais” (GUTIÉRREZ, 1996a, p. 7). A primeira imagem mental é involuntária, e vai se formando através dos estímulos cultural, experiência pessoal, e através da associação entre a figura e a linguagem verbal.

> O núcleo psicológico do entendimento, eu devo assumir, consiste em ter um "modelo de trabalho" do fenômeno em sua mente. Se você entende a inflação, uma prova matemática, o modo como funciona um computador, DNA ou o divórcio, então você tem uma representação mental que serve como um modelo de uma entidade, da mesma forma que, por exemplo, um relógio funciona como um modelo da rotação da Terra. (JOHNSON-LAIRD, 1995, p. 2, tradução nossa)

Pode ocorrer de haver uma concepção errada de um conceito, gerando um conflito ao se deparar com outra imagem do mesmo conceito. Exemplo disso é o aluno considerar errada a imagem de um quadrado transladado cuja diagonal se apresenta da vertical.

Esse conflito mental ocorre geralmente pelo fato de os professores e livros didáticos apresentarem figuras sempre da mesma forma. Quando isso ocorre, segundo (D’AMORE, 2007), temos uma *misconception*, ou seja, uma concepção errada do conceito. Esses conflitos mentais fazem com que o aluno vá construindo novas imagens mentais do conceito em estudo. Porém, vai chegar um momento em que para todos os estímulos feitos a imagem mental será a mesma. Nesse caso, ainda segundo D'Amore, (2007), temos um *modelo* do conceito, ou seja, a imagem que melhor define todas as informações em relação às solicitações ulteriores.

Assim sendo, o processo de geração de imagens mentais de Gutiérrez (1996a), na qual o aluno, ao se deparar com a figura espacial, realiza a associação com outras imagens mentais, como ver um paralelepípedo e chamá-lo de caixa, ver um cubo e chamá-lo de dado, etc., ou iniciar o processo de construção da imagem mental de um objeto novo cujas representações ainda não foram construídas.

Desta forma, o processo de construção das imagens mentais da figura geométrica se iniciaria antes mesmo da exploração da visualização, que corresponde ao primeiro nível do desenvolvimento do pensamento geométrico segundo van Hiele.

4 I MODELO VAN HIELE

Trata-se de um modelo criado pelo casal Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geoldof, na década de 1950, a partir das dificuldades que seus alunos do curso secundário da Holanda apresentavam sobre a geometria.

Esse modelo do pensamento geométrico consiste em desenvolver a aprendizagem da geometria por meio de 5 níveis hierárquicos independentes e sequenciais. Para facilitar esse desenvolvimento cognitivo pode-se utilizar 5 fases didáticas, não hierárquicas e não obrigatórias, e o uso de cada uma dela dependerá muito do tipo da atividade, do material utilizado e do nível cognitivo em que se encontra o aluno.

O primeiro nível de van Hiele é chamado de visualização ou básico ou de reconhecimento, dependendo do autor a que se refere. É o foco principal deste trabalho, pois permitirá reconhecer a figura em qualquer representação. Por esse motivo explicitaremos apenas esse nível, que corresponde a fornecer ao aluno, os materiais manipulativos para que possam fazer a investigação visual.

> O aluno consegue aprender um vocabulário geométrico, identificar formas específicas e reproduzir um desenho com papel quadriculado. Por exemplo, pode reconhecer um dado, chamá-lo de cubo, mas não é capaz de reconhecer as seis faces quadradas. (VIANA, 2014, p. 24)

Para desenvolver cada nível utilizamos linguagens específicas, o que significa que a linguagem vai mudando na medida em que o processo vai avançando para o nível seguinte. Assim, com o refino das propriedades de um conceito e para que essa progressão ocorra, "as estratégias metodológicas, os materiais didáticos, o conteúdo e o vocabulário devem ser adequados ao nível de pensamento geométrico que o aluno está" (UTIMURA, 2015, p. 41).

As fases didáticas que facilitarão essa progressão são:

- Fase 1 – Informação ou Questionamento: há um diálogo entre o professor e o aluno, sobre o material a ser utilizado, o problema a ser resolvido, e as observações levantadas;

- Fase 2 – Orientação Rígida ou Orientação Direta: os alunos exploram o material;

- Fase 3 – Explicitação: os alunos expressam verbalmente suas opiniões;

- Fase 4 – Orientação Livre: o professor deve incentivar os alunos a resolverem problemas de diversas formas;

- Fase 5 – Integração ou Fechamento: uma revisão do que foi estudado.

5 I VISUALIZAÇÃO

A observação de um objeto e a obtenção de suas características aparentemente óbvias pelo processo visual não é tão simples assim, pois é preciso que essa habilidade cognitiva esteja desenvolvida. A visualização é uma habilidade importante para a pessoa ser capaz de pensar naquilo que não está diante dos olhos. Segundo Gutiérrez (1996a), a visualização em Matemática é um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos mentais ou físicos para resolver problemas ou provar propriedades visuais ou espaciais. Desta forma, promover a visualização em Matemática e, nas ciências, se justifica, segundo Bloom (1988), tanto na importância de se ensinar Geometria, assim como,no seu papel nas atividades do dia a dia.

> Apesar da utilidade da visualização e das representações geométricas no ensino da Matemática ser reconhecida pela maioria dos educadores matemáticos e também por professores de Matemática, além de ser apontada como fundamental para a formação matemática dos estudantes nos guias curriculares e nas propostas de ensino, há pouca ênfase a esse respeito na sala de aula. (PASSOS, 2000, p. 95)

O processo de visualização é a habilidade de ver aquilo que não está em nossa frente. Esse processo “[...] precisa de um bom tipo de gatilho ou estímulo, então diferentes tarefas estimularão imagens diferentes” (BISHOP, 1988, p. 190). Segundo Catalá, Flamarich e Aymemmi (1995), os estímulos visuais para obter uma adequada percepção espacial no desenvolvimento desse processo poderão ser feito por meio do uso de modelos concretos, desenhos, dobraduras ou imagens na telado computador.

> Os diferentes tipos de visualização de que os estudantes necessitam, tanto em contextos matemáticos, quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais; de visualizar informação espacial e quantitativa e interpretar visualmente informação que lhes seja apresentada; de rever e analisar situações anteriores com objetos manipuláveis. (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 78)

Alguns autores defendem que alguns alunos não têm um suporte visual necessário para realização das atividades propostas, e os outros apresentam essa habilidade desenvolvida pelo contexto onde está inserida. Exemplo disso é que o filho de um pedreiro que costuma ajudar seu pai tem uma noção de simetria maior do que os outros alunos.

> De estudos como esses, há algumas evidências de que uma aprendizagem ambiente em que materiais estruturados e manipuladores predominar pode ajudar a incentivar a criação de visualizações e, portanto, o próprio processo de visualização. (BISHOP, 1988, p. 191)

Desta forma, surgiu o interesse na investigação deste trabalho e na busca de uma proposta que auxilie os professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental na melhor prática da matemática escolar.

6 I PROPOSTA PARA TRANSPOR DO 3D ↔ 2D

É comum alunos terem dificuldades para desenhar no plano objetos tridimensionais, por conta da incapacidade de reconhecer e identificar os elementos do objeto. Mesmo assim, muitos professores continuam insistindo em desenhar as figuras no quadro (quando sabem desenhar), pois é a forma mais confortável para eles no preparo de sua aula. Alternativamente, muitas vezes eles recorrem aos livros didáticos, nos quais normalmente a figura é apresentada sempre da mesma forma, evitando o estímulo da *misconception*.

> Nossa vida comum oferece muitas interações entre plano e espaço, e a maioria deles implicam na disseminação de algum tipo de informação espacial por meio de certas figuras planas (desenhos, esquemas, imagens, figuras, etc.). E as que aparecem nos livros didáticos são planas! Esta questão é particularmente importante para Geometria Espacial, pois qualquer tipo de representação plana de objetos espaciais tem alguma perda de informação. Portanto, uma pessoa que lê uma representação plana de um sólido precisa recuperar o máximo de informações perdidas. (GUTIÉRREZ, 1996b, p. 34)

Tendo em vista esse tipo de comportamento, deixamos a seguir algumas sugestões de como esse processo poderá ser empregado pelos professores dos anos iniciais ao abordar em sala de aula cada novo conceito geométrico.

Ao iniciar qualquer atividade em geometria na qual seja necessária a utilização de sua representação, e seguindo o primeiro nível de van Hiele, que é o da Visualização, devemos apresentar aos alunos os objetos manipulativos. Para entender esse processo, escolhemos como exemplo a aprendizagem do conceito de pirâmide. Primeiramente devemos mostrar para aos alunos as diversas formas de pirâmides através dos objetos concretos, para que os alunos possam manipula-los.

Ao mostrar as diferentes pirâmides aos alunos, de diferentes bases, oblíquas ou não, e depois que os mesmos puderam manipula-las, o professor deve dialogar com alunos levantando questionamentos (fase 1), tais como: “Todas as figuras são iguais?”, “Quais são as semelhanças e diferenças entre elas?", "Quais as figuras que se encontram em cada uma de suas fases (lados)?". A nomenclatura *fase* já poderá ser introduzida, mas não será um erro mencionar *lado* nessa fase inicial. Mas é sempre bom mostrar a diferença entre ambos os nomes[1].

Após esse momento deve-se deixar que os alunos expressem livremente as observações levantadas (fase 3). Os nomes errados não serão considerados erros, e sim uma âncora para introduzir a nomenclatura correta.

Se necessário, o professor poderá pedir que os alunos coloquem todas as pirâmides na mesa, primeiramente com a fase triangular apoiada na mesa e depois com a fase que não é triangular, ou seja, a base (fase 2). Assim, o professor pode continuar o questionamento aos alunos (fase 1): "Em qual posição as pirâmides ficaram mais confortáveis para serem vistas? Se os alunos responderem a primeira, o professor deve repetir o processo anterior; mas caso eles considerem a segunda, isso gera uma oportunidade de informar que o polígono que está apoiado na mesa é a base da pirâmide e seus diferentes nomes dependerá da figura que se encontra em sua base. Pirâmide de base...

O fechamento (fase 5) se dará após os alunos reconhecerem as figuras pelo nome, quando o professor mostra cada uma das pirâmides para eles. Será normal se os alunos não souberem alguns dos nomes dos polígonos, é uma oportunidade de o professor comentar ou relembrar seus nomes. Além disso os alunos ainda precisam desenvolver a habilidade de reconhecer uma pirâmide qualquer no meio de outros sólidos. Para tal, o professor poderá mostrar vários sólidos e perguntar aos alunos quais deles são pirâmides.

Numa segunda aula para desenvolver esse processo visual de reconhecer a pirâmide também representado em 2D, é interessante mostrar sua figura pela tela do computador. Um programa que permite fazer isso é o Poly Pro, no qual os alunos além de visualizar os objetos, eles também podem manipulá-los. Esse é o primeiro passo para introduzir ao aluno a representação bidimensional de um objeto tridimensional.

> De uma perspectiva didática, o conhecimento das potencialidades do ambiente computacional constitui-se em um importante fator na formação inicial e continuada do professor. Os estudantes podem usar diferentes estratégias de solução de problemas e, nesse sentido, se um estilo particular de ensino for usado pelo professor, como única metodologia de ensino, poderá estar contribuindo para se tornar em mais um obstáculo à aprendizagem dos estudantes. (NACARATO; PASSOS, 2003, p. 129)

Somente após esses processos que se poderia abordar os desenhos, mas sem que os alunos o façam. O professor poderia recorrer aos desenhos dos livros, ou até mesmo feitos no quadro, mas este último será somente se o professor souber desenhar a figura. Um desenho mal feito poderá atrapalhar a aprendizagem e criar nos alunos falsas imagens mentais. Os alunos reconheceriam assim que aquela imagem é apenas um ponto de vista daquele objeto, pois já teriam a imagem mental da pirâmide.

1 Lado é linha que limita uma figura plana e Face é qualquer um dos polígonos que limitam um poliedro.

> [...] resultados obtidos mostram uma grande variedade de formas de representação de sólidos que, independentemente da sua correção e qualidade, vão do totalmente gráfico para o totalmente verbal, com um grupo variado de representações misturadas em que desenhos e textos têm mais ou menos o mesmo peso na descrição. Além disso, a diversidade das formas de representação que surgem em uma experiência específica, e a frequência de cada um, tem muito a ver com a forma como o exercício foi planejado [...]. (GUTIÉRREZ, 1998, p. 202)

Com a representação bidimensional de um objeto tridimensional, por meio do desenho ou figuras variadas, é preciso fazer com que os alunos as analisem para encontrar relações e informações através de termos visuais. Muitas vezes é necessário para facilitar esse processo, também apresentar o objeto real do desenho ou figura analisada.

Nessa última etapa voltariam os questionamentos e orientação direta (fase 1 e 2 respectivamente). “Qual é a base do objeto?”, “Onde se encontra a base no desenho ou figura?”. Sempre deixando os alunos explicitarem suas opiniões (fase 3), assim como perguntar à turma o que acham da opinião do colega.

O desenho propriamente dito do objeto tridimensional não é recomendável para essa fase de ensino, pois os alunos ainda estão em processo inicial do desenvolvimento do pensamento geométrico, além de não estar com a coordenação motora fina desenvolvida. Além do mais, o aluno que não conseguir reproduzir o desenho se sentirá frustrado, e esse é um sentimento que não combina com o processo de ensino e aprendizagem.

A construção do desenho de uma figura tridimensional é um processo ainda em pesquisa pelo primeiro autor deste trabalho. Muitas leituras e pesquisas ainda devem ser feitas para se aprofundar mais nesta temática.

7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os professores que lecionam nos anos iniciais, vêm apresentando dificuldades de trabalhar com a geometria, com os materiais geométricos, e muitas vezes repetem a metodologia adotada por seus professores quando alunos, ou por colegas de trabalho. Além disso, tem professores que preferem não ensinar esta parte do conteúdo ou quando o faz, ensinam muito superficialmente, dando preferência a nomenclatura, construção e reconhecimento sem seguir uma estratégia específica.

Em relação à metodologia adotada por esses professores, muitos seguem o livro didático que apresentam as figuras geralmente da mesma forma, ou por meio de desenhos mal feitos ou mal interpretados.

Quanto ao uso dos materiais concretos, existem aqueles que não contribuem com a aprendizagem, e às vezes até mesmo dificultam. Exemplo disso são os blocos geométricos, nos quais um quadrado tem espessura significativa, construindo uma imagem mental errada nos alunos. Por isso muitas vezes um cubo é um quadrado para os alunos, pois a imagem mental formada foi apenas de uma das faces laterais.

Ainda é preciso mais pesquisa de trabalhos que explorem o desenvolvimento da visualização, principalmente nos anos iniciais, formação adequadas aos profissionais que atuam nesta fase de ensino, materiais geométricos adequados, livros didáticos que se preocupam com essa temática e um sistema de ensino que propicie todos os aspectos mencionados anteriormente.

8 | REFERÊNCIAS

BECKER, Fernando; FRANCO, Sérgio. *Revisitando Piaget*. 3ª ed. Porto Alegre: Mediação, 2002.

BISHOP, Alan J. A review of research on visualisation in mathematics education. In: PROCEEDINGS OF THE ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 12th, 1988, Veszprem, Hungary. *Anais…*Hungary: To the educational resources information center, 1988. 1 v. pp. 187 – 193.

CATALÁ, C. A., FLAMARICH, C. B. e AYMEMMI, J. M. F. *Invitacion a la Didactica de la Geometria*. Madrid: Editorial Sintesis. 1995.

D'AMORE, Bruno. *Elementos de didática da matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

FISCHBEIN, Efraim. The theory of figural concepts. *Springer,* Netherlands, 1993. Educational Studies in Mathematics, vol. 24, n. 2, pp. 139-162

GUTIÉRREZ, Angel. Children´s Ability for Using Different Plane Representations of Space Figures. In A. R. BATTURO (ed.). *New Directions in Geometry Education*. Brisbane, Australia: Centre for Math. And Sc. Education, Q.U.T, 1996b, pp. 33-42

GUTIÉRREZ, Angel. Las Representaciones Planas de Cuerpos 3-Dimensionales en la Enseñanza de La Geometria Espacial. Separata de: *Revista Ema*, vol. 3, n.3, pp. 193-220, 1998.

GUTIÉRREZ, Angel. Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L. PUIG y A. GUTIÉRREZ (eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference*. Spain: University of Valencia, July, v.1, 1996a, pp. 3-19

JOHNSON-LAIRD, Philip N. *Mental Models*. 6 ed. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1995. 234 p.

KALEFF, Ana Maria Martensen Roland. *Novas tecnologias no ensino da matemática:* tópicos em ensino de geometria. Rio de Janeiro: UFF, 2008. 223 p.

MURAKAMI, Cristiane; FRANCO, Valdeni S. *Relações Topológicas na educação infantil: o que conhece o professor?* EBRAPEM, Unesp: Rio Claro, 2008.

NACARATO, Adair Mendes; PASSOS, Cármen Lucia Brancaglion; *A Geometria nas Séries Iniciais:* uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos: UDUFSCAR, 2003. 151 p.

PASSOS, Cármen Lúcia B. *Representações, interpretações e prática pedagógica*: a geometria na sala de aula. Campinas, 2000. 364 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

UTIMURA, Grace Z. *Docência compartilhada na perspectiva de estudos de aula (lesson study):* um trabalho com as figuras geométricas espaciais no 5º ano. São Paulo, 2015. 191 f. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2015.

VIANA, Odalea A.; Figuras Planas e Espaciais: como trabalhar com elas nos anos iniciais do ensino fundamental. Salto para o futuro: *Geometria no Ciclo de Alfabetização*. TV Escola/MEC, Boletim 7, pp. 23-30, set. 2014.

CAPÍTULO 17

CONCEPÇÕES DE LICENCIANDOS DE PEDAGOGIA SOBRE A QUALIDADE DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO INICIAL

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 05/07/2020

Michela Caroline Macêdo
Faculdade de Ciências Aplicadas de Limoeiro - FACAL, Recife
https://orcid.org/0000-0002-0671-1191
http://lattes.cnpq.br/9914529363403176

Carlos Eduardo Ferreira Monteiro
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Recife
https://orcid.org/0000-0003-4355-0793
http://lattes.cnpq.br/8396243868031773

RESUMO: Este capítulo apresenta aspectos de uma pesquisa que teve como objetivo analisar as concepções de qualidade relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem de Matemática que permeiam a formação inicial em Pedagogia. Mais especificamente a pesquisa objetivou identificar em publicações científicas quais as discussões sobre qualidade em relação a esses objetos de estudo; identificar o que pensam professores e coordenadores, que atuam em cursos de licenciatura de Pedagogia sobre qualidade para o ensino de Matemática; apontar o que pensam os licenciandos em Pedagogia a respeito da qualidade de sua formação no que se refere ao ensino de Matemática recebido e às aprendizagens desenvolvidas para ensinar Matemática; elencar quais as aprendizagens para o ensino da Matemática são desenvolvidas nas disciplinas que envolvem Matemática nos cursos de Pedagogia das instituições selecionadas para o campo de pesquisa. O desenho metodológico da pesquisa contemplou a Revisão Sistemática da Literatura (RSL), a análise documental, e a pesquisa de campo que envolveu a aplicação de questionário presencial com licenciados de Pedagogia, observação de aulas de disciplinas que abordam Matemática, entrevistas semiestruturadas com alunos e professores das disciplinas em que foram feitas as observações e entrevistas com coordenadores dos cursos de Pedagogia que fazem parte do campo de pesquisa. Neste capítulo, são apresentadas algumas análises dos dados referentes aos questionários aplicados com discentes das instituições que foram o campo de pesquisa. Os resultados sugerem que, em sua maioria, os discentes possuem concepções sobre a qualidade da Educação que estão vinculadas ao discurso social de que uma Educação de qualidade deve ser uma educação crítica e libertadora que forme cidadãos para atuar na sociedade.

PALAVRAS-CHAVE: Qualidade em Educação. Educação Matemática. Formação inicial de Professores. Curso de Pedagogia.

UNDERGRADUATE PEDAGOGY STUDENTS' CONCEPTIONS ON THE QUALITY OF MATHEMATICS EDUCATION IN PRE-SERVICE TEACHER EDUCATION

ABSTRACT: This chapter presents aspects of a research study that aimed to analyze the conceptions of quality related to the teaching and learning processes of mathematics that permeate pre-service pedagogy teacher education. The

study also aimed to identify in scientific publications discussions about quality in relation to these objects of study; identify the perspective of lecturers and coordinators who work in Pedagogy undergraduate courses on quality for the teaching of mathematics; to point out what the undergraduates in pedagogy think about the quality of their teacher education in what concerns the teaching of mathematics received and the learning developed to teach mathematics; identify what learning for the teaching of Mathematics is developed in disciplines that involve mathematics in the pedagogy undergraduate courses of institutions selected for the research field. The methodological design of research included Systematic Literature Review (RSL), document analysis, and field research that involved the application of a face-to-face questionnaire with pedagogy graduates, observation of classes of disciplines that address mathematics, semi-structured interviews with students and teachers of disciplines clases were observed, and interviews were made with coordinators of pedagogy undergraduate courses that were part of research field. This chapter presents data analyzes referring to the questionnaires applied with students from the institutions that were the field of research. The results suggested that most students have conceptions about the quality of education that are associated with the social discourse that a quality education must be a critical and liberating education that trains citizens to act in society.
KEYWORDS: Quality in education. Mathematics Education. Pre-service teacher education. Pedagogy undergraduate course.

INTRODUÇÃO

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de doutorado concluída em 2019, a qual investigou a concepção de qualidade entre atores (docentes, discentes e coordenadores de cursos) envolvidos no ensino de Matemática em cursos de Pedagogia. O estudo foi baseado em premissas sobre a Educação, dentre as quais a de que todo conhecimento teórico sobre a Educação converge para as ideias de que processo educativo pode aprisionar ou libertar as pessoas de um país (FREIRE, 2003). Além disso, a Educação pode também fazer crescer ou embotar as dimensões sociais, culturais e econômicas de uma sociedade. Entretanto, partiu-se também de premissas mais específicas, nas quais, para se ter Educação, tem que se ter qualidade, visto que grande parte das discussões que transitam na sociedade sobre Educação convergem e mencionam a busca por uma "Educação de Qualidade".

Sobre o termo qualidade, de modo geral, pode-se construir a linha de argumentação de que, quando se pensa sobre qualidade, tende-se a evocar uma ideia de avaliar algo como "de qualidade" ou "sem qualidade". Nesta avaliação, busca-se mensurar o que seria "bom" ou "ruim" em um objeto ou processo. Pode-se perceber também que esse tipo de avaliação faz parte de uma concepção mercadológica de quem busca mensurar algo tangível.

O termo qualidade e sua eventual avaliação adquirem dimensão polissêmica, pois, apesar de muito utilizados, esses termos ainda não apresentam conceituações consensuais para a área educacional. Assim, apesar de, no início da pesquisa, ter-se buscado um conceito específico de Qualidade da Educação para se amparar, identificou-se uma complexa polissemia de conceituação, que está mais voltada para a importância de não tratar esse termo de forma reducionista (MOROSINI, 2009) do que de fechar um conceito.

Sobre a qualidade do Ensino Superior, sabe-se que essa modalidade passa por processos de avaliação externa (Lei dos Sinais, nº 10.861/2004) e que as Instituições de Ensino Superior (IES) são avaliadas por indicadores próprios dos órgãos envolvidos e que são organizadas num *ranking* de acordo com as notas obtidas. Entretanto, pensando em como se constitui o parâmetro de qualidade nessas avaliações, questiona-se: será que ter uma licenciatura de alta qualidade em Pedagogia é tê-la alocada na posição mais alta do *ranking* das avaliações externas dos cursos superiores? Será que apenas o processo de avaliação externa permite analisar a qualidade educacional ofertada nesses cursos? Como os contextos culturais e sociais das instituições, que são consideradas no *ranking* como sendo de alta qualidade, implicam nesses indicadores? Como "ser uma instituição de qualidade" pode garantir/contribuir para um ensino de Matemática de qualidade?

Propondo a discussão sobre o ensino de Matemática e cursos de licenciatura de Pedagogia, tencionando reconhecer elementos da qualidade, avalia-se ser importante uma análise dos processos de ensino e aprendizagem em cursos de Pedagogia em instituições reconhecidas com qualidade pelas avaliações externas.

Neste texto, buscar-se-á apresentar o panorama desta pesquisa, com o intuito de oferecer indícios sobre escolhas teóricas, aspectos metodológicos e das análises dos dados.

ESCOLHAS TEÓRICAS: A TEIA DO CONHECIMENTO

Considerando que não há uma teoria que aborde especificamente a qualidade no Ensino Superior em relação à Educação Matemática em licenciaturas de Pedagogia, as escolhas teóricas foram organizadas para formar uma teia de conhecimentos em que se entrelaçam e perpassam a Qualidade da Educação, o Ensino Superior e suas dinâmicas avaliativas, as discussões de currículo e saberes docentes, bem como o ensino e aprendizagem de Matemática e suas nuances.

Uma vez que não é possível explicitar neste texto todas as reflexões feitas sobre a questão, apenas serão oferecidos alguns subsídios para delinear brevemente o percurso teórico escolhido. Por exemplo, para compreender a polissemia do termo Qualidade vinculado à Educação, foram selecionados autores que teorizavam sobre qualidade e estabeleciam concepções próprias a respeito do termo e por outros que realizaram pesquisas sobre qualidade em dimensões vinculadas à Educação (GADOTTI, 2010; MOROSINI, 2009; MACHADO, 2013; FRANCO, 2011).

Gadotti (2010, p. 07) convida a refletir sobre como esse termo é difundido até mesmo fora do Brasil, pois, segundo ele, qualidade “é a categoria central deste novo paradigma da Educação sustentável na visão das Nações Unidas (ONU), mas ela não está separada de quantidade”. O autor utiliza as palavras de Freire para afirmar que é preciso construir uma nova qualidade que consiga acolher a todos. Ele destaca ainda que a Qualidade na Educação depende da qualidade do professor, do aluno e da comunidade. Gadotti destaca também que discutir qualidade é muito complexo, porque não basta melhorar um aspecto da Educação, mas deve-se melhorar a Educação como um todo. (GADOTTI, 2010).

Quando se refere à Qualidade do Ensino Superior, faz-se necessário especificar qual a instituição está responsável pelo seu desenvolvimento. Dias Sobrinho (2010) argumenta que a Educação Superior é uma expressão um tanto quanto elástico que engloba um conjunto amplo de instituições educacionais. A formação de professores em cursos de Pedagogia habita permite que o egresso atue em espaços escolares e não escolares. Neste texto, destacam-se as ideias de Tardif (2014) sobre como os saberes profissionais dos professores são plurais e heterogêneos e trazem à tona no próprio exercício do trabalho conhecimentos do saber fazer e do saber ser. Assim, compreender a formação de professores e seus saberes torna-se relevante, especialmente quando se predispõe a discutir qualidade da formação.

Leite e Fernandes (2014) comentam que para a formação ter efeitos no desenvolvimento profissional de professores, é necessário que se preste mais atenção aos aspectos que, nas instituições do Ensino Superior, facilitam e/ou dificultam a edificação de práticas formativas promotoras da aprendizagem profissionais e de mudanças no interior das próprias instituições. Essas autoras realizam alguns questionamentos a respeito disto: Que práticas formativas têm existido? Qual tem sido o sentido que lhes tem sido atribuído? Que relação têm as práticas profissionais com a oferta de formação institucionalizada? Estarão os professores no Ensino Superior mobilizados para investirem em processos de desenvolvimento profissional? Para as autoras, a reflexão sobre essas questões dependerá das características de cada uma das instituições e das prioridades que estabelecem, reconhecendo que a criação de condições que promovem o desenvolvimento profissional não pode ser ignorada pelas organizações (LEITE; FERNANDES, 2013).

Cruz e Monteiro (2010) destacam que embora sejam diversos os desafios da formação inicial e continuada dos professores, valoriza-se o professor que se reconheça como sujeito histórico que compreenda as relações entre Educação e os projetos da sociedade. Os autores convidam a refletir sobre qual o sentido de qualidade é defendido para a formação de professores. Eles afirmam que essa Educação de Qualidade não significa apenas a garantia de uma formação técnica, mas que é necessário um olhar partilhado com quem faz e vive a prática, destacando como importante que durante a formação existem espaços para socializar as dúvidas e discutir os encaminhamentos.

A concepção de qualidade adotada na pesquisa que discutimos neste capítulo compreende a construção dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática para os cursos de Pedagogia, como um movimento que envolve a análise crítica das diretrizes propostas, das concepções de currículos envolvidas, numa dinâmica constante que não depende apenas da carga horária da disciplina, mas que está imbricada na construção do perfil do egresso do curso e da identidade que o professor precisa criar com a Educação Matemática.

APRESENTANDO A PESQUISA NOS SEUS ASPECTOS METODOLÓGICOS

O objetivo geral desta pesquisa que abordamos neste capítulo foi analisar as concepções de qualidade a respeito dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática que permeiam a formação inicial dos professores em cursos de Pedagogia socialmente reconhecidos como de qualidade.

Mais especificamente, pretendeu-se:

- Identificar as concepções de qualidade em relação à formação inicial de pedagogos e ao ensino de Matemática a partir da produção científica no período de 2006 a 2016;
- Identificar o que pensam professores e coordenadores de cursos de Pedagogia sobre qualidade para o ensino de Matemática na formação inicial;
- Apontar o que pensam os licenciandos a respeito da qualidade de sua formação, do ensino de Matemática recebido e das aprendizagens desenvolvidas para ensinar Matemática;
- Elencar quais as aprendizagens para o ensino da Matemática são desenvolvidas nas disciplinas que envolvem Matemática nos cursos de Pedagogia.

Para atender aos objetivos, decidiu-se pelo uso de procedimentos metodológicos qualitativos e quantitativos (SANTOS FILHO, 2001), por compreender a importância desses dois paradigmas para responder às questões da pesquisa proposta. Assim, optou-se pela pesquisa de Revisão Sistemática da Literatura (RSL), análise documental dos projetos pedagógicos e matrizes dos cursos de licenciatura em Pedagogia que fariam parte do estudo, pesquisa de campo com aplicação de questionários abertos com discentes do último período do curso e com discentes das disciplinas que abordavam Matemática, entrevistas com discentes dessas disciplinas e observações das aulas em que eram ministrados os conteúdos de Matemática. Fez parte também da pesquisa de campo a entrevista semiestruturada com professores das disciplinas que abordam conteúdos de Matemática e coordenadores dos cursos que fariam parte da pesquisa de campo.

Destaque-se que o uso da RSL tentou atingir o objetivo específico de identificar os sentidos e significados de qualidade em relação à formação inicial de pedagogos e ao ensino de Matemática, buscando-se na produção científica de determinado período como estava sendo tratado o conceito de Qualidade. Esta é uma abordagem de pesquisa que utiliza como fonte de dados a literatura sobre determinado tema. Esse tipo de investigação disponibiliza um resumo das evidências relacionadas a uma estratégia de intervenção específica mediante utilização de métodos explícitos e sistematizados de busca, apreciação crítica e síntese da informação.

Para atingir o objetivo da RSL, foram analisadas publicações científicas das bases selecionadas: Portal Capes, a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), a SciELO - *Scientific Electronic Library Online*, com o propósito de extrair subsídios, para compreender como os temas vinculados à qualidade na formação de pedagogos em relação ao ensino e aprendizagem de Matemática vinham sendo abordados nas publicações de dissertações, teses e artigos científicos.

Estabeleceu-se um período de busca para as produções científicas de 2006 a 2016. Esse período foi considerado importante para compreender como o termo qualidade emergia nas publicações num prazo de 10 anos que antecederam esta pesquisa.

Sobre a escolha das palavras-chaves, considerando que se buscou a qualidade no ensino de Matemática na formação de professores em cursos de Pedagogia, definiu-se que seria importante criar agrupamentos de palavras-chaves a partir da interseção da palavra qualidade com outros termos vinculados ao objeto de estudo. Assim, estabeleceu-se descritores vinculados às palavras Ensino Superior, Curso de Pedagogia, Formação Inicial, Qualidade, Ensino, Matemática, Ensino de Matemática. Definiu-se também a opção pelos idiomas português, inglês e espanhol, para dessa maneira ampliar as possibilidades de discussão sobre qualidade.

Na conclusão da RSL, todos os arquivos foram fichados a partir dos seguintes aspectos: referência, palavras-chave, resumo, objetivos, questão problema, delineamento, local, participantes, principais resultados, conclusão dos resultados. Para organização dos arquivos que seriam lidos de maneira mais aprofundada, optou-se pela organização dos mesmos através do *Mendeley*, que é um programa de *desktop* e *web* produzido pela *Elsevier* para gerenciar e compartilhar documentos, descobrir dados de pesquisa e compartilhá-lo, objetivando a colaboração online.

Sobre a Pesquisa de Campo, considerando o objeto de estudo a qualidade no ensino de Matemática nos cursos de Pedagogia, foi escolhido um campo que seria vinculado às instituições que oferecem o Curso de Pedagogia no estado de Pernambuco e que tivessem uma qualidade socialmente reconhecida através das avaliações externas do órgão responsável. Para selecionar as mesmas, tomou-se como critério o Conceito Preliminar de Curso (CPC) que é um indicador do Ministério da Educação (Mec), o qual possui escores de 1 a 5, para mensurar e estabelecer *ranking* dos cursos de graduação do país a partir de três dimensões que se destinam a avaliar a qualidade: (a) desempenho dos estudantes, (b) corpo docente e (c) condições oferecidas para o desenvolvimento do processo formativo.

Os cursos superiores são avaliados trienalmente, posterior à realização do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (Enade), que avalia o desempenho dos estudantes. Elucida-se que o curso de licenciatura em Pedagogia faz parte do grupo azul, no qual foi realizado o Enade nos anos de 2014, 2017 e 2020. Assim, quando se iniciou a pesquisa, o resultado do Enade 2017 não tinha sido publicado, fazendo-se, portanto, a opção pelos resultados publicizados em 2014.

Conforme a tabela com os resultados do CPC 2014 disponibilizada no site do INEP (http://portal.inep.gov.br/conceito-preliminar-de-curso-cpc), os resultados apontavam que havia 31 Instituições em Pernambuco que ofereciam o curso de Pedagogia, sendo 20 privadas e 11 públicas, ficando assim a escolha pelas instituições que obtiveram nota quatro, nota máxima obtida naquele ano. Totalizavam quatro instituições, duas públicas e duas privadas, no entanto, por questões éticas da pesquisa, não serão mencionados os nomes das instituições. Também é importante destacar que foi necessário fazer a exclusão de uma delas, já que ela não estava com turmas regulares em curso de licenciatura em Pedagogia quando se iniciou a pesquisa.

Sobre os participantes da pesquisa, estabeleceu-se que fossem selecionados: discentes do curso de Pedagogia, exclusivamente os do último período (por terem cursado as disciplinas vinculadas a Matemática) e dos períodos em que acontecem as disciplinas que abordavam o ensino de Matemática. Optou-se pelos turnos vinculados às turmas em funcionamento das instituições selecionadas. Foi feita também a escolha pela participação dos professores que ministram aulas das disciplinas vinculadas a Matemática, bem como coordenadores de cursos das instituições envolvidas.

Sobre as observações em sala de aula, utilizou-se um instrumento com roteiro preestabelecido, no qual se estudou a metodologia utilizada por Reis (2011). A justificativa para essa escolha diz respeito à busca por um roteiro que permitisse apreender aspectos importantes dos processos de ensino através dos indicadores avaliativos. Neste roteiro de observação, encontrou-se uma proposta com elementos para desenvolver esse olhar sobre o ensino em sala de aula. No instrumento adaptado permaneceram oito indicadores: 1. Os conteúdos matemáticos e sua presença na planificação das aulas; 2. O professor e o conhecimento aprofundado dos conceitos e dos conteúdos matemáticos; 3. O professor e as estratégias para o ensino do conteúdo matemático abordado; 4. O professor e suas ações e reflexões sobre o ensino de Matemática; 5. O professor e o uso de recursos para o ensino de Matemática; 6. Os alunos e a compreensão dos conteúdos matemáticos abordados; 7. Os alunos e a reflexão crítica sobre os conteúdos abordados e os aspectos metodológicos para ensinar Matemática; 8. Os alunos e os recursos para apoiar a aprendizagem.

Para a análise dos dados qualitativos, oriundos dos questionários aplicados com os estudantes e entrevistas realizadas com professores e coordenadores de curso, elegeu-se a análise de conteúdo, pois representa um conjunto de técnicas de análise nas comunicações que utilizam procedimentos sistêmicos e descrição de conteúdos de mensagens (BARDIN, 2008). A intenção dessa análise é produzir inferências de conhecimento relativo às condições de produção do material, inferências essas baseadas em dados qualitativos ou não. Assim, a autora afirma que esse tipo de análise reside na articulação entre a superfície dos textos, descritos e analisados, e os fatores que irão determinar o tipo de análise. A autora propõe que a análise de conteúdo seja feita a partir de uma pré-análise, exploração do material, o tratamento dos resultados, a ingerência e interpretação.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA E BREVE APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

A pesquisa de campo foi iniciada em 2017, quando foram realizados os contatos com as quatro instituições para levantamento sobre andamento de cronogramas dos cursos de Licenciatura em Pedagogia. Importante destacar que, entre as quatro IES, apenas três atendiam ao critério de ter turmas com disciplinas que abordam Matemática em funcionamento no período de desenvolvimento da Pesquisa. Assim, ficaram três IES, sendo duas públicas e uma privada.

Em cada instituição participante da pesquisa, desenvolveu-se o seguinte percurso de procedimentos: agendar as observações com os professores envolvidos (não foi determinado um conteúdo específico de Matemática), aplicar o questionário aberto *in loco* e fazer a recolha dos mesmos no dia da aplicação, observar quatro aulas por turma, das disciplinas que abordavam Matemática e, no final, realizar entrevistas com cinco alunos de cada turma, com professores envolvidos nas disciplinas das aulas observadas e coordenadores de curso.

Para preservar o sigilo sobre as instituições, os nomes foram substituídos por *Instituição 1* (47 anos de credenciamento, 12 anos do curso de Pedagogia), *Instituição 2* (*campus* com 9 anos de credenciamento e 9 anos de funcionamento do curso) e *Instituição 3* (72 anos de credenciamento, 12 anos do curso de Pedagogia).

Esclareça-se que, nas análises, essas instituições não serão comparadas, mas cada uma delas será compreendida em seu contexto. Entretanto, ressalta-se que cada contexto traz peculiaridades que devem ser levadas em consideração, como por exemplo, os aspectos apresentados acima que fazem menção à tipologia da disciplina e a distribuição da carga horária. Infere-se que, durante as análises mais aprofundadas, alguns pontos sobre a qualidade do ensino de Matemática nas licenciaturas de Pedagogia dessas instituições irão transversalizar, mas destaca-se que neste texto não há como tratar desse aprofundamento.

O questionário aplicado era composto por cinco questões: 1. Para você, o que significa o termo qualidade?; 2. Para você, o que significa o termo “Educação de Qualidade”?; 3. Para você, o que seria ter “um processo de ensino de Matemática com qualidade” nas escolas?; 4. Para você, o que é importante para haver qualidade em relação ao ensino de Matemática durante o processo de formação do curso de Pedagogia?; 5. Quais os conteúdos matemáticos que você se sentiria mais confiante em ensinar e que você avaliaria que seria com boa qualidade? Por quê?. Os questionários, depois de coletados, foram inseridos num formulário do *Google Forms,* geralmente utilizado também para analisar dados.

Neste capítulo, trazemos aspectos da análise de apenas um dos itens do questionário aberto aplicado aos discentes das três IES. A partir das análises das respostas dos discentes sobre o que seria ter uma Educação de Qualidade, estabeleceram-se as seguintes categorias: *Concepção relacionada ao Discurso Social* (cidadania, formar profissionais conscientes, políticas públicas, etc.); *Concepção Relacionada a processo de ensino* (professor, recursos, didática etc.); e *Concepção Relacionada a processo de aprendizagem* (alunos, recursos etc.).

Acerca das amostras analisadas para este texto, na *Instituição 1*, foram aplicados 18 questionários com alunos do 4º período. Na *Instituição 2*, foram aplicados 24 questionários com alunos do 5º período. Na *Instituição 3*, foram aplicados 20 questionários com alunos do 6º período.

Na Tabela 1, será apresentada a distribuição das concepções por categorias.

CATEGORIAS	Instituição 1	Instituição 2	Instituição 3
Concepção relacionada ao Discurso Social	61,1%	50%	40%
Concepção Relacionada a processo de ensino	22,2%	25%	15%
Concepção Relacionada a processo de aprendizagem	16,7%	25%	45%

Tabela 1 - Distribuição por categoria das respostas dos licenciandos à questão: *para você, o que significa o termo "Educação de Qualidade"?*

Fonte: Elaboração dos autores

Quando se analisam as respostas dos discentes dessas instituições, verifica-se que mais frequentemente as concepções convergem para a ideia de que uma Educação de Qualidade é uma Educação que forme para a cidadania, numa dimensão mais ampla a respeito da função social da própria Educação. Essas respostas parecem estarem congruentes com os discursos que transitam nos meios de formação inicial de professores os quais ter uma "Educação de Qualidade" não é algo que se tenha sem uma mobilização social. Esse aspecto que emerge nas respostas dos discentes, parece vincular-se a uma dinâmica da formação superior que considere a necessidade de preparar o discente para a autonomia intelectual e leitura crítica do mundo. Assim, esse discurso está sugere que está relacionado com um dos objetivos da formação, bem como com o contexto político e social nos qual esses discentes estão inseridos.

Concepções vinculando a relação da qualidade com o processo de ensino e o professor também foram encontradas. Ao analisar essas respostas dos discentes, avaliou-se que, ancorada a essa categoria, estava o fato de que a qualidade da formação do professor e a qualidade do processo de ensino dele referendavam a qualidade da educação. Encontraram-se também respostas que sugeriram que os discentes, enquanto protagonistas do processo de ensino, indicavam qualidade da educação. A polissemia do conceito de qualidade faz afirmar que realizar este estudo foi um mergulho na qualidade da formação. Importante analisar a prática e compreender as relações que se estabelecem em sala de aula nos momentos de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** 5. ed. Revisão Atualizada. Lisboa: edições 70, 2008.

CRUZ, F. M. L.; MONTEIRO, C. E. F. **A Formação Do Professor que Ensina Matemática e a Educação de Qualidade. Temas em Educação** (UFPB), v. 18-19, p. 220-244, 2010.

DIAS SOBRINHO, J**. Dilemas da Educação Superior no Mundo Globalizado**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2010.

FRANCO, M. E. D. P. F.; MOROSINI, M. C. **Qualidade na educação superior:** dimensões e indicadores. Série Qualidade da Educação Superior Observatório da Edu**c**ação CAPES/INEP. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2011.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia:** Saberes Necessários à Prática Educativa. 25. ed. São Paulo: PAZ E TERRA, 2003.

GADOTTI, M. **Qualidade na educação.** São Paulo: Instituto Paulo Freire, 2010.

LEITE, C.; FERNANDES, P. Avaliação, qualidade e equidade. **Avaliação: Revista da Avaliação da Educação Superior**, v. 19, n. 2, p. 421-438, 2014.

MACHADO, N. J. **Matemática e Realidade:** das Concepções as ações docentes. 8. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

MOROSINI, Marília Costa. Qualidade na educação superior: tendências do século. **Estudos em avaliação educacional**, v. 20, n. 43, p. 165-186, 2009.

REIS, P. **Observação de aulas e avaliação do desempenho docente**. Ministério da Educação e Cultura – Conselho Científico para a Avaliação de Professores. Lisboa, 2011, p. 72.

SANTOS FILHO, J. C. **Pesquisa Quantitativa versus Pesquisa Qualitativa:** O desafio paradigmático. In: SANTOS FILHO, J. C; GAMBOA, S. S. Pesquisa Educacional: quantidade-qualidade, 4. ed. São Paulo, Cortez, p.13-59, 2001

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2014.

CAPÍTULO 18

LEITURA, INTERPRETAÇÃO E ESCRITA MATEMÁTICA: UM OLHAR PARA AS VIVÊNCIAS EM UMA TURMA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA NO SEMIÁRIDO BAIANO

Data de aceite: 01/10/2020

Eliane Ferreira de Santana
Universidade do Estado da Bahia (UNEB)

Américo Junior Nunes da Silva
Universidade do Estado da Bahia (UNEB)

RESUMO: Este artigo é recorte de um trabalho de conclusão de curso de graduação, resultado de uma pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso, e apresenta como objetivos: i) entender como os estudantes leem e interpretam alguns problemas matemáticos; e ii) analisar como acontece a escrita matemática durante a resolução dos problemas. A pesquisa foi realizada com estudantes do 9° ano de uma escola pública no município de Filadélfia-BA. Para a produção de dados utilizou-se um questionário com duas questões, sendo uma no estilo "arme e efetue" e a segunda apresentando uma situação problema. A partir das respostas apresentadas ao instrumento de produção de dados, perceberam-se dificuldades em ler e interpretar situações problemas, o que reverbera para dificuldades, também na escrita Matemática. Com este estudo, esperamos contribuir no estabelecimento de ações que visem aproximar a Matemática de situações reais do cotidiano, fortalecendo as questões de leitura e escrita Matemática e, consequentemente, para o processo de letramento matemático.

PALAVRAS - CHAVE: Contextualização. Interdisciplinaridade. Letramento Matemático. Resolução de Problemas. Educação Matemática.

READING, INTERPRETATION AND MATHEMATICAL WRITING: A LOOK AT EXPERIENCES IN A CLASS FROM THE 9TH YEAR OF FUNDAMENTAL EDUCATION OF A SCHOOL IN THE BAHIA'S SEMIARID

ABSTRACT: This article is an excerpt from an undergraduate course conclusion work, the result of a qualitative research, of the case study type, and aims to: i) understand how students read and interpret some mathematical problems; and ii) analyze how mathematical writing happens during problem solving. The research was carried out with 9th grade students from a public school in the city of Filadélfia-BA. For the production of data, a questionnaire with two questions was used, one in the "arm and effect" style and the second presenting a problem situation. From the responses presented to the data production instrument, difficulties were perceived in reading and interpreting problem situations, which reverberates to difficulties, also in mathematical writing. With this study, we hope to contribute to the establishment of actions that aim to bring Mathematics closer to real everyday situations, strengthening Mathematical reading and writing issues and, consequently, for the mathematical literacy process.

KEYWORDS: Contextualization. Interdisciplinarity. Mathematical Literacy. Problem solving. Mathematical Education.

1 I INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência, vista por muitos, de maneira arbitrária, com procedimentos de resolução fixos, e sem o entendimento do por que dos resultados encontrados. Ensiná-la tradicionalmente, baseando-se em decorar fórmulas e seguir modelos sem relação com a realidade do aluno e sem abrir espaço para o prazer da descoberta, como destaca D'Ambrósio (1993), tem contribuído para este cenário de construção de uma imagem de ciência desconecta da realidade. Desconstruir essa imagem, ainda segundo a autora, é um dos principais desafios dos educadores matemáticos.

Diante das atuais transformações sociais e das problemáticas demandadas pela contemporaneidade, não é prudente basear o ensino de Matemática em situações que não levem os estudantes a se posicionarem crítica e reflexivamente. Nessa direção, a própria Matemática, deve ser vista como instrumento de transformação social. As tendências em Educação Matemática, por exemplo, conduzem para uma redefinição de propostas de ensino, conteúdos, métodos e avaliação.

Nesse ínterim, percebemos que há possibilidade de conexão da Matemática com outras diferentes áreas do conhecimento. Para que esse conectar aconteça efetivamente, podemos fazer uso, por exemplo, da contextualização, que na concepção de Tomaz e David (2008), é descrita como parte de um processo sociocultural que compreende todo o conhecimento cotidiano, científico ou tecnológico, como resultado da construção humana, inserida em um processo histórico e social. Podemos então, compreender a contextualização no ensino da Matemática articulada com as diversas práticas, as circunstâncias que o rodeia e as necessidades sociais que possibilitem a compreensão de diversas situações cotidianas.

Diante o exposto, entendemos que o grande desafio dos professores, como assevera D'Ambrósio (1993), é desenvolver uma Matemática dinâmica, que priorize as diferentes formas de matematizar e que foque em problemas atuais, ligados à realidade e de interesse do estudante. De forma geral, essa contextualização vincula o conhecimento à sua origem e à sua aplicação para que haja uma intencionalidade didática. Para Almouloud (2014), as situações devem ser concebidas para permitir aos alunos agirem, se expressarem, refletirem, evoluírem e construírem novos conhecimentos. Não adianta ter conhecimento do conteúdo se não somos capazes de resolver problemas ou situações que surgem no dia a dia.

Nessa direção, apresentaremos o que destacam os documentos curriculares e/ou oficiais a esse respeito. O Documento Curricular Referencial da Bahia (DCRB) [BAHIA, 2019] apresenta como proposta no ensino da Matemática, oportunizar a compreensão da necessidade de continuarem estudando Matemática além dos muros da escola; e uma formação para sujeitos alfabetizados matematicamente, capazes de fazer uso social das habilidades e competências construídas no Ensino Fundamental.

Nesse contexto, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [BRASIL, 2017], determina ações para assegurarem as aprendizagens essenciais, são elas: contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas. Essas ações, em conformidade com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) [BRASIL, 1998], trazem implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando o aluno têm situações desafiadoras para resolver e trabalha para desenvolver estratégias de resolução. Essa prática contém ideias fundamentais na construção do conhecimento e no desenvolvimento integral do aluno, considerando o papel investigativo da aprendizagem matemática.

Apesar do saber matemático envolver noções de regras e teoremas para resolver problemas e interpretá-los, essas noções são ferramentas para construção de conceitos e formulação de possíveis soluções, em uma dinâmica que extrapola a simples memorização. Nesse sentido, a BNCC aponta como proposta para garantir que o aluno desenvolva a capacidade de identificar oportunidades de utilização da Matemática para resolver problemas, aplicando conceitos e procedimentos para obter soluções e interpretá-los em diversos contextos e situações (BRASIL, 2017); ou seja, fazer uma leitura além da utilização de regras. Nessa direção, conceituamos o letramento matemático, ainda segundo Brasil (2017), como as competências e habilidades de pensar, representar e argumentar fazendo uso da linguagem matemática, estabelecendo conjecturas na formulação e resolução de problemas em diferentes contextos e fazendo uso dos conceitos e procedimentos matemáticos.

Uma das dificuldades de muitos professores de Matemática é associar os conceitos matemáticos à proposta de contextualização. Algumas avaliações escritas nem sempre tem o compromisso em contextualizar as questões e, quando vivenciadas, os alunos não conseguem resolver sozinhos, e surgem alguns questionamentos, como: “Professor, qual a operação que tenho que aplicar nessa questão”? “É para fazer o que”? “É para somar ou diminuir”? “É de multiplicar ou dividir”? Os alunos entendem o conteúdo, mas não conseguem resolvê-los, porque tem dificuldade na resolução das operações básicas, dificuldade que reside na leitura e interpretação.

Diante dessas inquietudes, surge a nossa problemática de pesquisa: Os alunos, no movimento de resolver problemas matemáticos, ou mais precisamente nas dificuldades que surgem durante a resolução, não sabem o conteúdo matemático ou não conseguem ler e interpretar as questões? Partindo dessa indagação, buscou-se entender como os alunos leem e interpretam os enunciados; e analisar como fazem a escrita matemática durante a resolução de problemas, nos anos finais do Ensino Fundamental. Para isso, portanto, escolheu-se uma turma do 9º ano de uma escola municipal localizada na cidade de Filadélfia-BA. Entendemos que este trabalho poderá contribuir para outros pesquisadores e professores, atuantes na Educação Básica, na identificação das dificuldades e na resolução de problemas dos alunos para desenvolver estratégias que melhorem o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Este texto encontra-se estruturado, para melhor ser compreendido, da seguinte forma: i) introdução sobre a temática e os conceitos que circunscrevem este texto; ii) breve caminhar teórico, que reúne estudos de autores que ajudaram no fundamentar da pesquisa; iii) percurso metodológico; iv) resultados da pesquisa; e por fim, v) apresentamos as considerações de fim de texto.

2 I BREVE CAMINHAR TEÓRICO

Desde a formação da humanidade e a evolução da espécie humana surgiram movimentos, ações e avanços associados à necessidade de sobrevivência. A Matemática, quanto a isso, ocupa um lugar de destaque pelas inúmeras contribuições que permitiram o alcance de algumas conquistas. D’Ambrósio (2005), nessa direção, acredita que as raízes da Matemática se confundem com a própria história da humanidade; e que se manifesta de maneiras diferentes em grupos sociais, culturais e regionais. A origem da Matemática, ainda segundo D’Ambrósio (2005)

> Tem seu conhecimento alimentado pela aquisição de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modo de técnica, de artes, de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com a realidade natural e social na qual o homem, está inserido (D’AMBRÓSIO, 2005, p. 99).

Nesse ínterim, partindo do excerto anteriormente apresentado e das conjecturas construídas pelo autor, cabe-nos destacar que a Matemática surge de ações e práticas sociais que ocorrem no cotidiano. A ideia é que os conceitos matemáticos desenvolvam saberes próprios, articulados às diferentes práticas sociais, construindo uma percepção de Matemática com significado e que promova o interesse do aluno, mantendo o prazer da descoberta. D’Ambrósio (2005) propõe que o fazer matemático deve ser algo vivo, lidando com situações reais no tempo [agora] e no espaço [aqui]. Essas reflexões nos inquietam a pensar que mudanças no ensino da Matemática escolar são necessárias, sobretudo se considerarmos o atual cenário educacional; e que precisamos não esquecer que o foco da Educação Matemática é formar cidadãos matematicamente alfabetizados e aptos para o convívio em sociedade. Assumimos, enquanto docente, ou docente em formação, esse desafio.

A Matemática, portanto, não deve ser vista como um componente isolado, pelo contrário, liga-se aos demais e, portanto, mais próxima dos processos de utilização em diversas áreas do conhecimento. Do ponto de vista da escola, a interdisciplinaridade pode ser tomada numa concepção ampla, como “(...) qualquer forma de combinação entre duas ou mais disciplinas com vista à compreensão de um objeto a partir da confluência e tendo como objetivo final a elaboração de uma síntese relativamente ao objeto comum" (POMPO; GUIMARÃES; LEVY, 1994, p. 13). Nessa perspectiva, a abordagem interdisciplinar dos conteúdos, traduziria um diálogo entre as demais disciplinas, intercruzando os conhecimentos, possibilitando a construção de uma aprendizagem com significado.

Nessa direção, Tomaz e David (2008, p. 61) caracterizam a interdisciplinaridade como a "(...) integração de ideias, ferramentas, linguagens, regras e conceitos das diferentes disciplinas envolvidas, feita pelo sujeito na sua relação dialética com o objeto de estudo". A Matemática não deve ser vista como uma disciplina isolada; há um diálogo entre ela e as diferentes áreas que a constitui, bem como com outras áreas do conhecimento. O trabalho em sala de aula deve, acima de tudo, considerar os diferentes contextos e realidades dos estudantes. A forma como esse conhecimento é tratado, muitas vezes de maneira fragmentada, acaba acarretando a perda de interesse e estímulo dos estudantes.

Nesse ínterim, partindo das discussões empreendidas até aqui, compreendemos que aos educadores cabe entender a importância que a contextualização tem para o processo de construção do conhecimento matemático. Como afirma Fonseca (1995), contextualizar não é ab-rogar a técnica e a compreensão, mas ultrapassar esses aspectos e entender elementos externos aos que normalmente são revelados na escola, de modo que, os conteúdos matemáticos sejam aprendidos dentro do panorama histórico, social e cultural que o constituíram. Dessa forma, entendemos que a técnica do "arme e efetue", por exemplo, também é considerada válida, mas não a única forma de construção dos conceitos matemáticos ou avaliação. Fonseca (1995), quanto a isso, destaca que não se pode negar a importância da compreensão, nem tão pouco desprezar o uso de técnicas, mas busca-se ampliar a repercussão que o aprendizado daquele conhecimento possa ter na vida social, nas escolhas, na produção e nos projetos de quem aprende.

A contextualização busca aproximar conteúdo e realidade. A soma desses elementos, propostas apresentadas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [BRASIL, 2017], espera dos alunos o desenvolvimento da capacidade de identificar oportunidades de utilização da Matemática para resolver problemas diuturnos, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. Isso implica na construção de um sujeito ativo, que além de dominar o conceito matemático consegue compreender e reconhecer a importância do que foi aprendido em sua realidade social.

Muitas das dificuldades com a Matemática, apresentadas pelos estudantes, resulta da falta de entusiasmo dos alunos com a disciplina, pela injusta associação dos problemas matemáticos às técnicas de fazer contas utilizando procedimentos sem significado. Para mudar essa realidade, as práticas pedagógicas não podem centrar-se, unicamente, na reprodução e repetição de conteúdo sem significado. É preciso reconhecer, contudo, que os alunos aprendem mais o que para eles têm significado, o que implica que as atividades de sala de aula devem despertar o encanto pelo fazer e compreender a Matemática.

O uso de técnicas pode ser um importante aliado no movimento de construção do conhecimento matemático, mas não deve ser único e exclusivo meio de avaliação, por exemplo. Defende-se a ideia da contextualização como forma de estimular a criatividade do aluno, a investigação, o raciocínio e a curiosidade. Conforme o pensamento de Bassanezi (2002)

> O objetivo fundamental do "uso" de Matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem. Dessa forma, a Matemática pode ser vista como um instrumento intelectual capaz de sintetizar ideias concebidas em situações empíricas que estão quase sempre camufladas num emaranhado de variáveis de menor importância (BASSANEZI, 2002, p. 18).

A contextualização quando utilizada torna-se uma ferramenta capaz de aproximar a Matemática da realidade, e em conjunto com a interdisciplinaridade permite um passeio pelas demais ciências contribuindo para a formação integral dos sujeitos. Tomaz e David (2008) ressaltam que essa abordagem interdisciplinar dos conteúdos ajudaria a construir novos instrumentos cognitivos e dar novos significados, extraindo da interdisciplinaridade um conteúdo construído do cruzamento de saberes que dialogam ultrapassando as fronteiras entre as disciplinas. Uma questão de Matemática pode abordar uma temática da Geografia, sem gerar conflitos, uma vez que os conhecimentos são cumulativos e a atividade deve fazer uma reflexão do sujeito sobre sua realidade.

3 I PERCURSO METODOLÓGICO

A metodologia utilizada nesta pesquisa é de caráter qualitativo. Como destaca Duarte (2002), esse tipo de pesquisa sugere maior reflexão para os resultados a partir de uma perspectiva de entender, debater e solucionar um problema; além de considerar as vivências e práticas em sala de aula nos anos finais do Ensino Fundamental, que é o espaço de atuação da primeira autora deste texto, que, embora em movimento de formação inicial, é professora de Matemática na Educação Básica, um importante lugar de constituição do perfil do professor pesquisador, como asseveram Silva e Oliveira (2020).

Quanto ao movimento de pesquisar sobre a própria prática, vale destacar uma inquietude que acompanhava a primeira autora durante as suas vivências em sala de aula com turmas do 9° ano, com o componente curricular de Matemática. Havia uma insatisfação, e isso se aplica a outros colegas professores, com o ensino que vinha sendo desenvolvimento e, consequentemente, com a aprendizagem dos estudantes.

Nessa direção, a partir de observações, conversas informais com alunos e colegas professores, foi possível perceber que existia, do senso comum e das percepções cotidianas, uma dificuldade com a leitura e interpretação de situações problemas. Isso provocou uma inquietude que nos levou a perceber na pesquisa, um caminho possível para alcançar respostas, construir reflexões e análises e, sobretudo, traçar possíveis mudanças no ensino e aprendizagem.

No processo de ensino e aprendizagem, a escuta é importante, e o trabalho com texto é necessário, principalmente nas aulas de Matemática. A rotina das aulas pode ser configurada nos elementos de vivência de desafios, jogos, atividades individuais e em grupo, o que possibilita maior envolvimento, investigação, descoberta e participação.

Sendo assim, o professor atua como mediador, colaborador e contribui na construção de um aluno que lê, interpreta e escreve matematicamente (LIRA, 2016). Para o Documento Referencial da Bahia (DCRB) [BAHIA, 2019, p. 323], é "(...) papel do(da) professor(a) propor atividades que gerem conflitos para que os alunos compreendam as ligações entre os conteúdos, valorizando sempre a construção do conhecimento significativo". Ou seja, o modo de agir dos professores se deve pela aprendizagem em ação.

Foi partindo dos princípios apresentados anteriormente que esta investigação, entendendo a dinâmica da pesquisa e da ação pedagógica, imersa em um contexto real de sala de aula, objetiva: i) entender como os estudantes leem e interpretam alguns problemas matemáticos; e ii) analisar como acontece a escrita matemática durante a resolução dos problemas. De uma forma geral, ambicionamos compreender como a contextualização e a interdisciplinaridade influenciam no movimento de letramento matemático dos estudantes.

Participaram deste estudo, além dos professores pesquisadores, autores deste texto, estudantes de uma escola municipal da cidade de Filadélfia-BA. A escola atende a população da sede e de outras localidades da zona rural do município. São em torno de 428 alunos que estudam nos anos finais do Ensino Fundamental. A turma escolhida para esta investigação foi o 9° ano, com um total de 27 alunos regularmente matriculados e presentes no período da aplicação do instrumento de produção de dados. A escolha por essa turma se deve principalmente por ser o último ano do Ensino Fundamental e apresentar requisito básico para a aplicação da atividade que é resolver operações com números inteiros.

Para a produção de dados foi utilizado um questionário. A atividade foi desenvolvida em dois momentos: no primeiro, os alunos receberam questões com números e operações para armar e efetuar; a habilidade da questão envolveu a resolução de cálculos com operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com números naturais. No segundo momento, os alunos receberam a cópia do texto "30 Anos De Alice: Características Físicas", contendo informações sobre a quantidade de alunos matriculados entre os períodos de 1989, ano de fundação da escola, até 2019 que corresponde ao ano de realização da pesquisa.

Nessa segunda atividade, a proposta era ler o texto e responder questões a partir das informações inseridas nele. A atividade teve duração de um tempo de aula, 45 minutos. Algumas regras foram adotadas, como a proibição de qualquer tipo de consulta, não utilização de objetos eletrônicos como calculadora ou celular, e, ao final do tempo, a atividade deveria ser entregue ao aplicador.

Em cada atividade vivenciada, propôs-se o registro do conhecimento do aluno, que serviu de aparato para o resultado da pesquisa. Esses dados fazem-se necessários para analisar como a turma desenvolve o cálculo e a leitura de situações problemas. É importante que o aluno não só aplique o cálculo mecanicamente, mas compreenda e possa encontrar diferentes procedimentos para alcançar os resultados.

4 I ANÁLISE DOS DADOS PRODUZIDOS: AMPLIANDO O OLHAR ACERCA DA PROBLEMÁTICA DE PESQUISA

Na primeira etapa foi entregue aos alunos a atividade na forma “armar e efetuar”, objetivando verificar a compreensão em relação aos procedimentos envolvidos nos algoritmos convencionais como somar, subtrair, multiplicar e dividir. Nessa atividade, os alunos precisavam conhecer o sistema decimal considerando a ordem da classe da unidade, dezena e centena. Embora o uso de conhecimento de procedimentos e técnicas seja importante para a construção da aprendizagem, limita os conhecimentos, deixando de lado, muitas vezes, o processo investigativo da Matemática. Vejamos a seguir, a questão vivenciada com os estudantes:

ATIVIDADE 01

Arme e efetue:

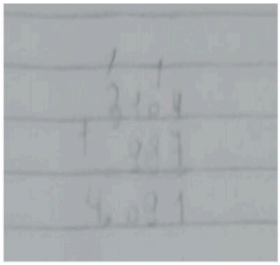
I) 3104 + 987 =	III) 874 x 68 =
II) 17.244 : 12 =	IV) 6.783 – 4.596 =

Quadro 1 - Atividade vivenciada com os estudantes durante a realização da pesquisa

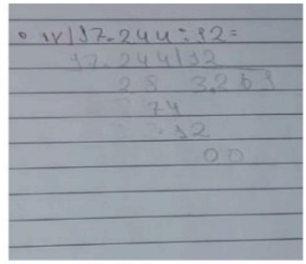
Fonte: arquivo pessoal dos pesquisadores

A partir da aplicação da atividade foi possível observar alguns procedimentos utilizados pelos alunos na resolução de cálculo quanto à compreensão dos algoritmos. Observemos:

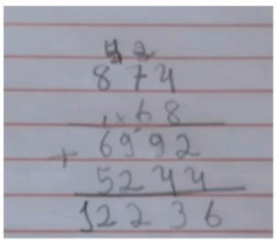
I) 3.104 + 987=



II) 17.244 : 12=



III) 874 x 68=



IV) 6.783-4.596=

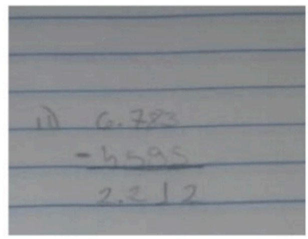


Figura 1- Resolução dos cálculos

Fonte: arquivo pessoal dos pesquisadores.

A análise e os procedimentos que foram utilizados na resolução das questões, serão ponto de partida para entender como os alunos realizam a escrita matemática fazendo uso correto dos algoritmos formais e da realização dos cálculos. Algumas situações nos ajudaram a refletir como os alunos realizam a escrita matemática e, para, além disso, entender o movimento de insubordinação e criação matemática, rompendo com a lógica de atender a um algoritmo formal apenas.

Percebeu-se, partindo dos registros escritos deixados pelos estudantes, que nos cálculos pouco se ampliava o olhar acerca da criação de outras estratégias de resolução. Via-se, claramente, uma tentativa de atender a um algoritmo formal conhecido e apresentado ao longo da vida escolar e que pouco espaço era dado a criação e a descoberta de outros mecanismos, mesmo quando se observava dificuldade em resolver (SILVA; NASCIMENTO; MUNIZ, 2017).

Na adição, eles fizeram uso correto dos algoritmos formais, o que nos revela não haver maiores dificuldades quando se trata dessa operação e do uso particular desse algoritmo. Já no que tange a subtração, identificou-se algumas incoerências no procedimento e na inversão do minuendo e subtraendo; o que pode estar associado à dificuldade dos estudantes com subtração com reserva. Na multiplicação, os alunos armaram corretamente, no que tange ao uso do algoritmo formal conhecido, e efetuar o cálculo; isso implica no uso correto do mecanismo lógico da multiplicação. O erro apresentado, por boa parte dos participantes do estudo, foi em pular a casa da unidade na multiplicação da dezena. Isso implica que, o aluno construiu o conceito de multiplicação, mas isso não foi suficiente para chegar à resposta correta.

Ao dividir, os alunos reconhecem o divisor e dividendo, mas mostram pouco conhecimento no que se refere ao uso do algoritmo formal e, sobretudo, da ideia de que divisão é a partilha em partes iguais, fazendo uso de procedimentos desconhecidos e que vão de encontro aos princípios da divisão. Nessas situações, percebia-se a tentativa de criar estratégias de resolução, mas, por conta de dificuldades para tratar os conceitos da divisão, a tentativa não tinha sucesso.

O professor precisa ficar atento a esses sinais de dificuldades para conseguir orientar os estudantes. Os algoritmos convencionais estão condicionados a procedimentos e regras que dependem de uma organização dos números, a formação de coluna, preocupação em recordar os procedimentos para realização do cálculo, como o reagrupamento de “vai um”, “pedir emprestado” e o olhar atento do professor pode ajudá-los a sanar as dificuldades que surgem no caminho e, quando possível, como evidencia Brasil (2017) e Bahia (2019), relacioná-las às situações cotidianas.

Tais observações, que apresentamos anteriormente, reafirmam a nossa hipótese de que muitos alunos conhecem os conceitos operacionais e que foram apresentados ao longo da vida escolar de alguma forma, no entanto, somam dificuldades que se avolumaram ao longo dos anos da Educação Básica e, por isso, mesmo no último ano do Ensino Fundamental, apresentam alguns erros. Pelas respostas apresentadas ficou evidente, também, que alguns estudantes nem chegaram a tentar resolver e outros desistiram durante o processo, principalmente na divisão e multiplicação que consideram mais difícil. Na adição e na subtração ocorreu maior número de acertos.

A aplicação da segunda etapa da pesquisa se deu com a vivência de questões com base nas informações contidas no texto, previamente entregue aos alunos, que fizeram a leitura e puderam sinalizar informações importantes como o período de ocorrência de maior e menor número de alunos matriculados, em que período houve uma incidência de matrículas com relação ao último ano da pesquisa, quais fatores poderiam ser atribuídos a essas variações, levantando questões políticas e sociais que influenciaram os resultados dos dados apresentados no texto.

ATIVIDADE 02

30 ANOS DE ALICE: CARACTERÍSTICAS

O colégio Municipal Professora Alice Lopes Maia localiza-se na sede da cidade de Filadélfia, Bahia, na Avenida Antônio Carlos Magalhães, 647 – Centro, Filadélfia-Bahia, CEP 447775-000. É uma Instituição Pública mantida pela Prefeitura Municipal de Filadélfia. Oferece o Ensino Fundamental II – Anos Finais - 6º, 7º, 8º e 9º - um total de 18 turmas: 09 no turno matutino e 09 turmas no vespertino, atendendo 440 alunos da zona rural e urbana, de camadas socioeconômicas diversificadas. Possui 43 funcionários.

A Instituição foi fundada em 1989 com 78 alunos matriculados, para atender às necessidades da comunidade, sobretudo, para oferecer o Curso de Habilitação em Magistério, pois, os estudantes precisavam se deslocar à cidade de Senhor do Bonfim para cursar o Ensino Médio. A Instituição oferecia também o Ensino Fundamental I no ano de 1994 passando para 515 alunos regulamente matriculados na instituição.

Entretanto, em virtude de cumprir às determinações da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 9.394/96, em 1999, o Curso de Magistério foi extinto na rede municipal, o Colégio Alice deixou de ofertar o Ensino Médio, passando a ser responsabilidade do Governo do Estado e dos Institutos Federais.

Em virtude do crescimento da população de Filadélfia e da criação de outras escolas de Ensino Fundamental I, o Colégio Alice, desde 1999, oferece exclusivamente o Ensino Fundamental II, tendo em vista atender a grande demanda do município que chegou ao número de 1638 alunos, embora seja legalmente autorizado para funcionar com toda Educação Básica. O município construiu novas escolas para atender as necessidades dos alunos e diminuir a demanda da escola, que possui estrutura ainda precária para atender à comunidade. Isso levou a uma queda no número de alunos matriculados, que no último censo de 2014 registrou 743 alunos matriculados na Instituição.

Fonte: Projeto 30 Anos do Alice, 2019.

I) Neste texto, são apresentados dados referentes ao número de alunos matriculados nos anos de 1987 a 2019 no Colégio Municipal Pª Alice Lopes Maia. Considerando os principais aspectos que influenciaram essa demanda, de 1999 para 2014, houve uma diminuição de matrículas. Essa afirmativa é correta? Qual o valor que representa essa diferença?

II) O Ministério da Educação (MEC) em 2009 anunciou o reajuste para o pagamento da merenda escolar. Esse valor de R$ 0,30 é pago ao dia por aluno regulamente matriculado na rede municipal de ensino. Considerando essas informações, quanto por dia do orçamento foi gasto no ano de 2014 na aquisição da merenda escolar da escola?

Quadro 2 - Atividade vivenciada com os estudantes durante a realização da pesquisa

Fonte: arquivo pessoal dos pesquisadores

Após os alunos responderem a segunda atividade, construída em uma perspectiva contextualizada e com abordagem interdisciplinar, como nos evidenciou Fonseca (1995) e Tomaz e David (2008), iremos nos atentar para alguns dos procedimentos e a leitura que os alunos utilizaram e a escrita matemática registrada.

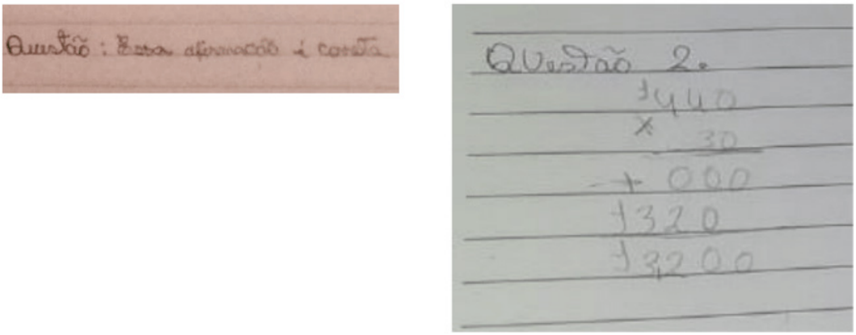


Figura 2- Questão I

Fonte: arquivo pessoal dos pesquisadores.

Alguns alunos não realizaram o cálculo, fazendo uso de estratégias próprias para encontrar a possível solução para o problema, sendo alguns deles: análise, comparação e dedução. A verificação é uma das formas que alguns utilizaram para justificar o pensamento estratégico. Para isso, fizeram uso da decodificação para representar matematicamente a solução do problema. Isso possibilitou a ampliação do repertório resolutivo.

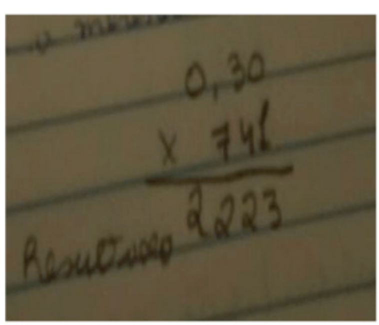


Figura 3- Questão II

Fonte: arquivo pessoal dos pesquisadores.

Os alunos demonstraram que compreendem os termos matemáticos ou expressões presentes nos enunciados o que possibilitou traçar estratégia para a resolução. Ou seja, decodificaram os termos que surgiram no texto que aparecem no enunciado, fizeram uso do conceito matemático, desenvolveram estratégias de resolução e realizaram a escrita matemática.

A interdisciplinaridade permite um passeio pelas demais ciências, e nessa direção, Tomaz e David (2008) ressaltam que essa abordagem interdisciplinar dos conteúdos ajudaria a construir novos instrumentos cognitivos e dar novos significados extraindo da interdisciplinaridade um conteúdo construído do cruzamento de saberes que dialogam ultrapassando as fronteiras entre as disciplinas. Uma questão de Matemática pode abordar uma temática da Geografia, sem gerar conflitos, uma vez que os conhecimentos são cumulativos e a atividade deve fazer uma reflexão do sujeito sobre sua realidade.

No primeiro momento foi possível perceber certa dificuldade dos alunos em compreender e retirar as informações que estavam explícitas no texto para responder as questões. Como o texto indicava o número de alunos matriculados na instituição em cada ano, os alunos realizaram uma interpretação dos dados e transformaram a escrita em linguagem matemática. Nesse momento, foi solicitada uma segunda leitura mais atenciosa e investigativa. Essa é uma das propostas da Modelagem Matemática, aliar teoria à prática, para motivar o aluno na busca por entender a realidade que o cerca, o que Bassanezi (2002) denominou como um processo dinâmico para validar os modelos matemáticos.

Na vivência da atividade, percebeu-se um movimento dinâmico que envolveu leitura, análise de dados, interpretação dos resultados e formulação de hipótese, desenvolvendo o processo de investigação e resolução, fazendo uso da linguagem matemática, o pensar matematicamente. Como afirma Bassanezi (2002), o processo de ensino e aprendizagem não se dá mais no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno no ambiente natural. O indivíduo constrói seu conhecimento ao mesmo tempo em que observa a realidade a sua volta.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora surgindo algumas resistências, por falta de conhecimento, aversão à disciplina, dificuldades que são comuns e atribuídas à Matemática, percebemos que os estudantes que participaram da pesquisa se envolveram com o que foi proposto. Na comparação entre as questões para a produção de dados que foram adotados na pesquisa, observamos que as questões que envolveram o contexto escolar ao qual a turma faz parte oportunizou aos alunos questionar e construir sua aprendizagem fazendo uso da leitura e escrita matemática. Enquanto que, nas questões que exigiam procedimentos técnicos, os alunos se limitaram a fórmulas e cálculos sem nenhuma relação com sua aplicação e sem considerar outras estratégias, como se elas não fossem permitidas nesse tipo de situação.

Nesta pesquisa, o principal foco de investigação foi a contextualização da Matemática como instrumento na aprendizagem com significado na resolução de situações problemas e no ato de criação e descoberta no matematizar. Isso não quer dizer, que se deve deixar de lado os algoritmos formais, porém, se o objetivo é formar cidadãos ativos, não podemos reduzir o currículo da disciplina somente a tópicos sem nenhuma relação com o contexto ao qual fazem parte. Os estudantes precisam decidir o melhor momento de utilizar determinados procedimentos.

Se o professor insiste em manter um ensino mecânico baseado em técnicas e modelos prontos, não permitindo que o aluno desenvolva diferentes estratégias, isso permite que o aluno veja a disciplina isolada das demais áreas, sem levar em consideração que a Matemática se faz presente em diversos ambientes do conhecimento. Então, acreditamos que a contextualização e a interdisciplinaridade, alinhadas aos objetivos e conteúdo educacionais, torna-se uma possiblidade de melhorar o ensino e aprendizagem dando sentido aos conceitos matemáticos.

Diante desse breve estudo acerca da contextualização na elaboração de questões e sua importância na construção do conhecimento, faz-se necessário perceber que o ensino da Matemática deve estar atrelado as demais área do conhecimento como parte integrante no processo ensino e aprendizagem e não isolada com algoritmos, regras e técnicas sem nenhum significado (SILVA et al. 2014). É essencial essa mudança no planejamento e modelo avaliativo, dando ênfase ao raciocínio, permitindo ao aluno percorrer diferentes caminhos para alcançar o resultado. Esse percurso até o resultado final permite a construção de novos conhecimentos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Contexto e contextualização nos processos de ensino e aprendizagem da matemática. In: **Revista Nova Escola**, 2014. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/567/contexto-e-contextualizacao-nos-processos-de-ensino-e-aprendizagem-da-matematica. Acesso: 27 jul. 2020.

BAHIA. **Documento Curricular Referencial da Bahia (DCRB) para Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Área de Matemática- Texto Introdutório. Bahia. Secretária de Educação, 2019.

BASSANEZI, R. **Modelagem matemática**- uma investigação. Campinas, Maio, 2002. Disponível em: https://www.academia.edu/33662311/Modelagem_Matematica_uma_investiga%C3%A7%C3%A3o_BASSANEZI_2002_. Acesso: 23 jun. 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC) Educação É A Base**. A etapa do ensino fundamental- Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais: unidades temáticas, objetos de conhecimento e habilidades. Ministério da Educação, 2017.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Matemática. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade/ 2. ed. Autêntica, 2005.

D'AMBRÓSIO, B. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. In: **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, 1993.

DUARTE, R. Pesquisa qualitativa: reflexões sobre o trabalho de campo. In: **Cadernos de Pesquisa**, n. 115, 2002, p. 139-154. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/cp/n115/a05n115.pdf. Acesso em: 03 set. 2020.

FONSECA, M. C. F. R. **Por que ensinar matemática**. Presença Pedagógica, Belo Horizonte, v.1, n. 6, mar/abril, 1995.

LIRA, J. A. Ensinar e aprender matemática nas séries iniciais do ensino fundamental. In: **Encontro Paraibano de Educação Matemática**, 2016. Disponível em: http://www.editorarealize.com.br/editora/anais/epbem/2016/TRABALHO_EV065_MD1_SA3_ID636_30102016123832.pdf. Acesso em: 03 set. 2020.

POMBO, O., GUIMARÃES, H. M., LEVY, T. **A interdisciplinaridade**: reflexão e experiência. 2. Ed. Lisboa: texto, 1994.

SILVA, A. J. N. DA; OLIVEIRA, C. M. DE. A pesquisa na formação do professor de matemática. In: **Revista Internacional de Formação de Professores**, v. 5, 8 jul. 2020. Disponível em: https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/rifp/article/view/41. Acesso em: 03 set. 2020.

SILVA, A. J. N.; NASCIMENTO, A. M. P.; MUNIZ, C. A. O necessário olhar do professor sobre a produção matemática das crianças nos anos iniciais. In: **Educação Matemática em Revista** (São Paulo), v. 22, 2017, p. 48-55. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/article/view/627. Acesso em 10 set. 2020.

SILVA, A. J. N.; SOUZA, I. S. ; BARROS, S. S. ; ALMEIDA, J. D. S.. O professor de matemática e o ato de planejar: há unicidade entre dimensão política e dimensão pedagógica?. In: Américo Junior Nunes da Silva; Ilvanete dos Santos de Souza. (Org.). **A formação do professor de matemática em questão**: reflexões para um ensino com significado. 1ed. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 39-52.

TOMAZ, V. S.; DAVID, M. M. M. S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

CAPÍTULO 19

APLICATIVO EDUCACIONAL ARTE AQUI!: UMA PROPOSTA BASEADA NA CARTOGRAFIA DOS SENTIDOS

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 06/07/2020

Kelen Ricardo dos Reis
Universidade de Caxias do Sul
Caxias do Sul – Rio Grande do Sul – Brasil
http://lattes.cnpq.br/4370153418623966

Carine Geltrudes Webber
Universidade de Caxias do Sul – Programa
Caxias do Sul – Rio Grande do Sul – Brasil
http://lattes.cnpq.br/0887721217165252

Roberta Dall Agnese da Costa
Universidade de Caxias do Sul
Caxias do Sul – Rio Grande do Sul – Brasil
http://lattes.cnpq.br/2255021148936169

Isolda Gianni de Lima
Universidade de Caxias do Sul
Caxias do Sul – Rio Grande do Sul – Brasil
http://lattes.cnpq.br/6722724060113247

Laurete Teresinha Zanol Sauer
Universidade de Caxias do Sul
Caxias do Sul – Rio Grande do Sul – Brasil
http://lattes.cnpq.br/1363917462693264

RESUMO: Nesse artigo, discutem-se relações entre Arte e tecnologia, mediadas pelas interações com os espaços e territórios da cidade, com o ensino e a aprendizagem em Arte. Para tanto, foi desenvolvido um aplicativo para dispositivos móveis denominado ArteAqui!. O aplicati- vo educacional Arte Aqui! foi concebido como estudo de caso através da plataforma MIT App Inventor2. O aplicativo propõe aproximação da Arte com os usuários através dos percursos pelas linhas cartográficas do mapa de Caxias do Sul. A finalidade do aplicativo é de instigar a interação com a arte local, assim como a reflexão e a produção de criações artísticas de arte digital na modalidade Mobile Art. Ampliam-se as possibilidades pedagógicas por meio da cartografia dos sentidos e das experiências estéticas que podem ser propiciadas pelo uso do aplicativo, tanto no Ensino da Arte como em outras áreas do conhecimento.

PALAVRAS-CHAVE: Arte, Aplicativo, Cartografia, Sentidos, Mobile Art

EDUCATIONAL APP ARTE AQUI!: A PROPOSAL BASED ON THE CARTOGRAPHY OF THE SENSES

ABSTRACT: This article deals with the close relations between art and technology fields through the interactions in the local venues and territories along with Art teaching and learning. The Educational Application Software Art here! has been de- signed as a case study through the MIT App Inventor2 platform. The Educational Software purpose and function is to en- courage the interaction alongside the local art as well as a reflection of artistic digital works in the Mobile Art modality. This Educational Application Software there is a broadening of the possibilities for knowledge by the cartography of senses and aesthetic experiences both in the teaching of Art and in other areas of knowledge.

KEYWORDS: Art, APP, Cartography, Senses, Mobile Art

1 I INTRODUÇÃO

A Arte pode propor ressignificações poéticas a partir do uso e da criação de tecnologias. Historicamente, eventos como o uso de meios de transportes rápidos, o desenvolvi- mento da fotografia, do cinema, a criação dos computadores, da internet, da inteligência artificial, da robótica e das tecnologias em dispositivos móveis influenciam as produções artísticas e provocam novas percepções do homem no seu tempo e espaço.

Considera-se, portanto, que as tecnologias modificam-se constantemente e a Arte pode apropriar-se e criar a partir delas. De acordo com Santaella apud Domingues (2002), a Arte será eterna enquanto o ser humano o for, mas os meios que o artista dispõe são históricos. Por isso, embora sejam históricas, as obras de Arte não envelhecem, apesar de serem datadas. Observa-se, portanto, que cada período histórico é marcado pelos meios que lhe são próprios. Isso significa que, embora a influência da Arte possa ser historicamente muito longa, ela reflete o tempo que o artista vive, as influências que segue e os materiais que dispunha na época.

Este fato pode justificar a grande influência que as tecnologias digitais têm exercido sobre os modos de produção de Arte, de significação e ressignificação artísticas e, principalmente, de difusão das artes. Observa-se, por portanto que, os recursos digitais podem aproximar a Arte do cotidiano das pessoas, possibilitando interações e o acesso às produções artísticas de todo mundo. Versões digitais de passeios em alguns dos mais famosos museus do mundo, interações digitais com obras e simulações em realidade aumentada são exemplos dessa prática.

Assim, permite que o interlocutor atue nessas experiências tecnológicas e sensoriais, conforme Domingues (2003) salienta, o corpo é ator, não somente o suporte ou sua representação, ou seja, o corpo atua, cria e protagoniza a partir das experiências tecnológicas que lhe são propiciadas.

Considera-se a incorporação da Arte no contexto escolar, e observa-se que ela está presente no cotidiano social e cultural dos estudantes e é compreendida como uma das manifestações culturais da humanidade. De acordo com Barbosa (1984) a interdisciplinaridade como abordagem pedagógica é essencial para o ensino de arte. A arte contemporânea é caracterizada pelo rompimento de barreiras entre o visual, o gestual e o sonoro. Observa-se essa tendência apontada por Barbosa (1984) como um inter-relacionamento de diversas linguagens representativas e expressivas para refletir sobre a exploração de diferentes linguagens no ensino da arte medi- adas pelas experiencias propiciadas pelas tecnologias.

Buoro (2001), aponta que a maioria dos estudantes têm pouco contato com obras de arte (original ou em reproduções), para tanto observa-se a realidade para pensar em experiências educativas que evidenciem: o desenvolvimento da percepção visual e da imaginação criadora, a ampliação do repertório imagético e a aquisição de conhecimentos em arte (2001). Para tanto, propõe-se a exploração de recursos visuais para ampliar o contato com obras de arte e manifestações de diferentes linguagens artísticas.

As proposições sobre o ensino da Arte tiveram grandes modificações com a aprovação da BNCC (Base Nacional Comum Curricular), implicando, inclusive na necessidade de reestruturação dos currículos e dos projetos político-pedagógicos das escolas. Atualmente, a BNCC propõe, para o ensino de arte, seis dimensões de conhecimento: criação, crítica, fruição, estesia, expressão e reflexão. Estas dimensões se articulam durante todo o processo de ensino e devem preconizar a ideia de que o processo de criação da arte é de tal forma importantes quanto o produto final (BRASIL, 2017).

Assim, considera-se que o ensino de Arte envolve ações educativas que mobilizam os estudantes para novas aprendizagens, considerando o seu nível cognitivo e de desenvolvi- mento estético. Conforme Rossi (2003), o professor tem o direito (e o dever) de reconhecer os aspectos do desenvolvimento estético dos estudantes, da mesma forma que reconhece o desenvolvimento motor, cognitivo, emocional, social, moral, lógico-matemático, linguístico ou gráfico-plástico. Além disso, destaca que a especificidade do conhecimento estético merece ser identificada e tratada com o mesmo rigor que as outras formas de conhecimento (ROSSI, 2003).

Nesse sentido, justifica-se o ensino de Arte para desenvolvimento integral do estudante, visando propor articulações entre as competências e habilidades a serem alcançadas em cada ano escolar, de maneira a contribuir para a leitura de mundo de cada um. Esta justificativa encontra reforço, inclusive na atual BNCC, em que, nas suas competências gerais elabora sobre o desenvolvimento do senso estético dos estudantes com o objetivo de reconhecer, valorizar e fruir as diferentes manifestações artísticas e culturais participar destas criações (BRASIL, 2017).

Nesse contexto, considera-se que as ambiências, os per- cursos e territórios da cidade também são espaços de aprendizagem. Espaços de reconhecimento, identidade cultural, sentimentos, pertencimento ou até mesmo de um não pertencer. Pensar nas relações e interações com o espaço é proporcionar um novo olhar sobre si, sobre a cidade e sobre os per- cursos cotidianos. Sobre o tema, Cartaxo (2009), afirma que a arte realizada nos espaços públicos se converte em estratégia de aproximação com a realidade e com o público.

Nessa perspectiva, desenvolveu-se o aplicativo Arte Aqui!, que tem por objetivo a aproximação da Arte com os usuários através dos percursos pelas linhas cartográficas do mapa de Caxias do Sul. Por meio do aplicativo, o usuário cria seu mapa e suas produções digitais, além da possibilidade de compartilhamento e interação com outros usuários.

Conforme Costa (1995), as tecnologias digitais, integradas pelas possibilidades abertas pela informática, criam um verdadeiro e próprio evento antropológico. Evento este, capaz de reconfigurar radicalmente a vida do homem e a sua experiência estética. Essas transformações antropológicas, oriundas das tecnologias, modifica as concepções de comunicação, relações de tempo, espaço e percepção da realidade. Diante disso, a partir utilização de mapas e cartografias digitais pode-se constituir uma estratégia de aprendizagem através da Cartografia dos Sentidos (MENEZES, 2016).

Além disso, justifica-se este estudo pela importância do conhecimento da história da Arte e cultura local, previstas, inclusive em uma das competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que reitera a importância de ampliar o repertório cultural, ressaltando a valorização e o fruir das diversas manifestações culturais, das comunidades locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural mundial (BRASIL, 2017).

Desta forma, o presente trabalho visa responder a seguinte questão problema norteadora: como aproximar a Arte e a cultura local dos estudantes por meio de criações artísticas digitais? Para respondê-la, propôs-se um estudo de caso, a partir da aplicação de uma proposta didática com o uso do aplicativo Arte Aqui!, detalhada nas seções seguintes.

2 | REFERENCIAL TEÓRICO

A reconfiguração no mundo da Arte, oportunizada pelas tecnologias, proporciona uma maior interatividade e o diálogo entre Arte e expectador por meio das imagens, nas quais praticamente tudo é baseado na dominância da tela (“scree- nology”) (DOMINGUES, 2002). Couchout (2003) analisa como a imagem transita entre o regime figurativo da representação e o da simulação, intervindo nos modos de produção percepção.

Couchout (2003) salienta ainda que a imagem é uma atividade que coloca em jogo técnicas e um sujeito. Sujeito esse que controla e manipula técnicas para viver uma experiência que transforma sua percepção de mundo: a experiência conhecida como “tecnestésica”. Essas experiências singulares podem ser vivenciadas, nas quais o sujeito está ausente. Diante disso, as reflexões sobre o ensinar e aprender em Arte implicam em propiciar vivências de Arte, que geral- mente o objeto de Arte estudado está ausente. Portanto, o uso de imagens como representação do objeto de estudo torna-se fundamental no ensino da arte. Menezes (2016) pondera que, desta maneira, aprender é como um ato que envolve relações de criação, adaptação, transcriação, e tradução em um sistema de agenciamento complexo. Compreende, portanto, as condições da ambiência, dos sentidos da cultura e das infinitas possibilidades do pensamento.

Conforme Menezes (2016) uma reflexão no campo da arte in- dica a cartografia dos sentidos como uma possibilidade de um saber captar e simbolizar percursos do movimento, potencializar a reflexão e crítica, através da especulação artística, produção simbólica e amplificação da própria experiência. Esses sentidos manifestam-se encadeados nos fragmentos da escrita simbólica, no acúmulo das marcas residuais dos deslocamentos que se presentificam no processo e produzem uma experiência estética com possibilidade de acoplamento e aprendizagem.

A Cartografia dos Sentidos, explorada como um meio poético, constitui-se em experiências estéticas e dialoga com os modos de fazer, oriundos das traduções das vivências e suas conexões sensoriais. Esses atravessamentos, entre os diferentes espaços e modos de aprender, constituem o caráter interdisciplinar dessa aprendizagem, seja pela exploração dos sentidos ou pela aproximação da arte e tecnologia.

O conceito de cartografia aplicado a este artigo é uma apropriação do conceito geográfico aplicado na Arte. Conforme Menezes (2016), a Cartografia dos Sentidos envolve os processos de aprendizagem nos modos do fazer, a experiência estética em um sistema de inter-relação de signos em conexão, que faça sentido para os sujeitos da experiência, que envolve também a matéria e a ambiência.

Assim, Menezes (2016) salienta que a Cartografia dos Senti- dos, além de possibilitar a reflexão, crítica e construção de um modo do fazer estético, implicado nas necessidades dos sujeitos da experiência, constitui-se como uma estratégia de abordagem, um modo de captar sentidos e problematizar, contextos sociais diversos, nos processos do ensino-aprendizagem em arte. Nesta proposta, a aprendizagem por meio da Cartografia dos Sentidos caracteriza-se como multidisciplinar, pois constrói-se entre o ensino da arte, a geografia e a tecnologia nas suas produções em Mobile Art.

3 | PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Elaborou-se o aplicativo Arte Aqui! durante os encontros da disciplina de Tópicos de Informática Aplicada ao Ensino, do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Caxias do Sul. Para tanto, utilizou-se como ferramenta para a programação o software MIT App Inventor2, no primeiro semestre de 2018. As estratégias pedagógicas para a sua utilização foram concebidas durante a disciplina de Planejamento em Ensino de Ciências e Matemática, também no âmbito do Mestrado Profissional.

Para o desenvolvimento do aplicativo, utiliza-se o labora- tório de informática, notebooks, tablets, celulares da Universidade de Caxias do Sul e equipamentos pessoais. A partir deste espaço e dos artefatos tecnológicos, inicia-se o processo de desenvolvimento, programação e testes durante os encontros.

A partir da construção do aplicativo, discute-se planeja- mentos pedagógicos e formas de utilização no contexto escolar. Diante disso, esta pesquisa em Ensino apoia-se nas reflexões de Moreira (2006) e caracteriza-se como qualitativa aplicada. Este termo pode ser utilizado em várias abordagens à pesquisa em Ensino, tais como pesquisa etnográfica, participativa observacional, estudo de caso, fenomenológica construtivista, interpretativa, antropológica cognitiva. Moreira (2011) salienta que o interesse central da pesquisa na questão dos significados que as pessoas atribuem a eventos e objetos, em suas ações e interações dentro de um contexto social e na elucidação e exposição desses significados pelo pesquisador.

Quanto aos objetivos, a pesquisa caracteriza-se como descritiva. Na pesquisa descritiva, o pesquisador tem interesse em verificar como o problema se manifesta nas atividades realizadas pelos sujeitos, nos procedimentos e nas suas interações. Assim, a partir das observações e registros, buscou- se capturar os significados que os estudantes deram ao objeto desta pesquisa, o aplicativo (1986).

Esta investigação em Ensino caracteriza-se quanto aos procedimentos como estudo de caso. O estudo de caso conta com a observação direta dos eventos estudados e das entre- vistas das pessoas envolvidas no evento, articulando documentos, artefatos, entrevistas e observações (YIN, 2010). O estudo de caso é um instrumento muito utilizado em pesquisas educacionais, pois conforme Yin (2010), ele é uma investigação empírica de um fenômeno contemporâneo em profundidade e em contexto de vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não são claramente evidentes. Assim, considera-se que este aplicativo foi desenvolvido durante um processo de formação profissional e como pro- duto educacional. Portanto, tanto a etapa de programação quanto a etapa de planejamento pedagógico conduziram a um exercício de construção, análise e reconstrução de pro- postas, conceitos e experiências profissionais que corroboram com a escrita do presente artigo.

Os dados serão coletados e documentados através de registros textuais, desenhos, colagens e produções digitais. Também através das observações das interações e experimentações dos estudantes e seus registros das experiências com a proposta educacional aplicada.

4 I DESENVOLVIMENTO

A partir da Cartografia dos Sentidos e de discussões sobre Mobile Art, aplica-se a proposta de ação de didática com o intuito de analisar as possibilidades pedagógicas a partir da utilização do aplicativo Arte Aqui!, envolvendo arte local, tecnologias e as poéticas do espaço baseada na cartografia dos sentidos.

Planejado para ser utilizado nas aulas de Arte, a partir do quarto ano do Ensino Fundamental, também pode ser uma ferramenta educacional em propostas interdisciplinares e outros contextos de ensino e aprendizagem. O aplicativo poderá ser utilizado por qualquer pessoa que tenha interesse em conhecer e interagir com obras de arte da cidade de Caxias do Sul. O aplicativo possibilita fácil acesso à identificação de obras de Arte e artistas locais, além de incentivo a valorização e reconhecimento dos espaços culturais locais, sensibiliza a observação e transformação dos espaços por meio da Arte.

O aplicativo Arte Aqui! enquanto produto educacional foi desenvolvido para estudantes intensificarem conhecimentos relacionados a Arte, como ilustrado na Figura 1.O objetivo com a utilização do recurso é oportunizar a interação com obras de Arte do contexto da cidade de Caxias do Sul, por meio de desafios, que são propostos aos usuários e se relacionam com a produção artística local, possibilitando um fácil acesso e identificação de obras de Arte e artistas locais.

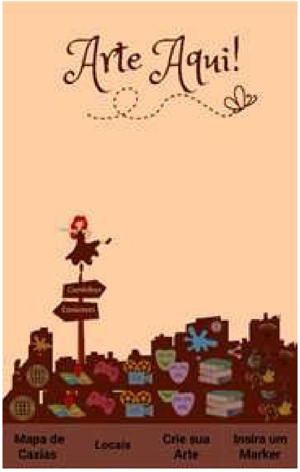


Figura 1: Captura de tela do App ArteAqui!.

Desta forma, o usuário poderá acessar através do botão “Mapa de Caxias”, o mapa completo da cidade de Caxias do Sul com marcações dos lugares que ele já transitou e histórico pessoal. O botão “Locais”, direciona o usuário para outra tela, na qual o estudante visualiza marcadores no mapa da cidade, cada marcador indica que ali tem algum tipo de obra ou manifestação artística. Nesta tela o usuário também pode pesquisar sobre um artista ou obra de arte específica.

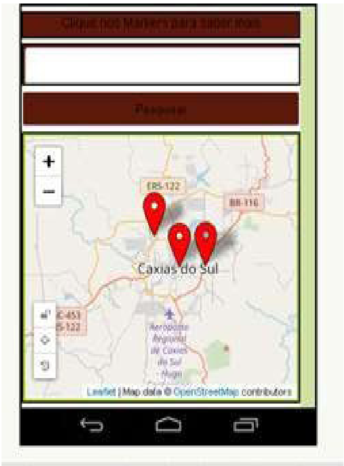


Figura 2: Tela “Locais”

Quando o usuário clica sobre um marcador, é direcionado para outra tela, na qual encontra fotografias da obra de arte e informações sobre o artista, material utilizado, técnica,… Nesta tela, ele pode sinalizar sua chegada (check-in) caso ele esteja no local da obra, e também pode criar uma produção artística, a partir do botão “Crie sua arte”. Neste botão, direciona-se o usuário para outra tela, na qual conta com ferra- mentas de edição de imagens e textos, filtros, emoticons,... A intenção é poder compartilhar as criações em Mobile Art com outros usuários e mídias sociais, conforme interesse do usuário.

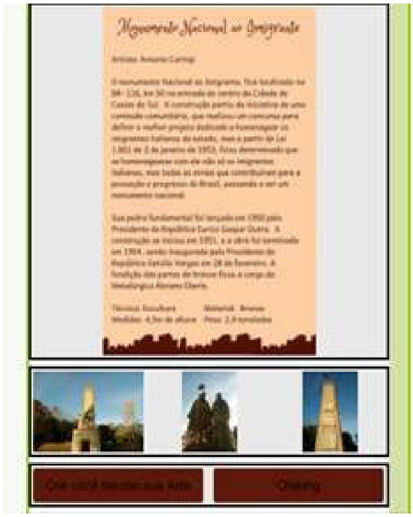


Figura 3: Tela “Obras de Arte”

No botão “Insira um Marker” (figura 4) o usuário pode adicionar algum local ou obra de arte que ainda não constaM no aplicativo. Para adicionar ele precisa fornecer o endereço e podem ser anexadas fotografias.

Figura 4: Tela Insira um Marker

A execução do planejamento pedagógico compreende as atividades desenvolvidas durante três encontros, sendo cada encontro com dois períodos de aula conjugados, de cinquenta minutos cada. A aplicação foi realizada em escola pública, com uma turma de quarto ano do Ensino Fundamental I, com 22 estudantes na cidade de Caxias do Sul- RS.

A escola, possui um amplo pátio com área verde, dispõe de uma sala de vídeo, uma biblioteca, um laboratório de informática, sala de Arte e laboratório de ciências (conjugado), salas com computador, projetor e acesso à internet nas salas do 6º ao 9º ano e dois tablets para uso comum. No primeiro encontro (aula 1), questiona-se os estudantes em uma roda de conversa sobre o percurso realizado por eles de suas casas até à escola. Eles relatam sobre suas observações como: os pontos comerciais, o salão da comunidade, a praça, o cemitério, o parque de rodeio, os animais, a vegetação.

Após a escuta dos relatos apresenta-se a localização geográfica da escola através dos recursos do Google Earth e Google Maps. Para isso os estudantes foram direcionados ao laboratório de informática da escola para visualizar e interagir primeiramente através de projeção no projetor e a contextualização da professora. Para tanto, parte-se do continente, adentrando no país, estado, município até o local da escola, em Caxias do Sul. Após, foram localizadas e visualizadas algumas residências dos estudantes e pontos conhecidos por eles.

Posteriormente identificam-se as suas residências nos computadores da escola utilizando a mesma ferramenta individualmente. Em seguida, parte-se das imagens, para reconstruir o conceito de mapa, na perspectiva dos estudantes. Os estudantes externalizam que os mapas são uma representação visual de um local de maneira reduzida. Os mapas relacionam-se aos espaços e comunicam uma representação gráfica seja ela por desenho, fotografia ou outro recurso. Segundo Oliveira (2010) “o mapa ocupa um lugar de destaque na Geografia, porque é ao mesmo tempo instrumento de trabalho, registro e armazenamento de informação, além de um modo de expressão e comunicação, uma linguagem gráfica”.

Além disso, apresenta-se o mapa físico de Caxias do Sul, e aponta-se os bairros e distritos. Os estudantes identificam alguns locais conhecidos por eles, interagem com colocações e apontamentos, pois já havia estudo anteriormente com a professora referência da turma.

Após esse momento, os estudantes registram um desenho de memória, a partir da sua leitura do espaço e do entendi- mento do conceito de mapa, o caminho que eles percorrem de casa até a escola. Nesse desenho eles apontam os locais que mais chamam a sua atenção no percurso, percepções de espaço e interpretações individuais. As produções dos estudantes evidenciam a construção do conceito de mapa conforme exemplos ilustrados nas Figura 5 e 6.

Figura 5: Mapa do percurso de casa até a escola

Figura 6: Mapa do percurso de casa até a escola

No segundo encontro (aula 2), os estudantes exploram criações artísticas a partir do conceito de mapa. Para isso, realiza-se a contextualização com leitura de imagens das obras dos artistas Arthur Bispo do Rosário, Jasper Johnss, Jazzberry Blue, Maya Lin dentre outros. As obras foram exibidas em slides, e durante a contextualização os estudantes interagiam com apontamentos e questionamentos sobre as obras apresentadas.

Observa-se as referências das produções artísticas cujos artistas revelam mapas poéticos, e propõe-se a construção de um mapa poético individual. Para tanto, utiliza-se elementos que consideram importantes em suas histórias e caminhos percorridos. Essa proposta visa aproximar a Arte dos estudantes, assinalando que eles podem não ser apenas consumi- dores dela, mas também produtores de manifestações que tenham significado para si e, talvez, para os colegas.

No processo de criação dos mapas poéticos, cada estudante utiliza como suporte e ponto de partida, um recorte do mapa do local onde localiza-se a escola retirado do Google Maps.

Nesse recorte, os estudantes identificam e reconhecem as linhas cartográficas como uma representação da realidade e como possibilidade de expressão e comunicação artística. Nessa proposta os estudantes reconstroem o conceito de mapa a partir das suas interpretações e composições artísticas.

Os estudantes utilizam recortes, colagens, desenhos e pintura nas suas produções. Abaixo seguem exemplos dessas produções nas figuras 7 e 8.

Figura 7: Mapa poético

Figura 8: Mapa poético

O terceiro encontro (aula 3) iniciou-se com uma conversa sobre códigos QR. Os códigos QR ou QR Code (Quick Response Code) é um código de resposta rápida, de duas dimensões (2D), composto por vários módulos de cor preta, dispostos em diferentes lugares sobre um fundo branco, formando um quadrado. Questiona-se os estudantes sobre onde encontram os códigos QR e para que servem. Eles relataram que observam em embalagens, propagandas, estabelecimentos comerciais, entre outros. Alguns estudantes disseram não saber sobre a sua funcionalidade. Após a conversa inicial, foram colocados sobre as mesas diversos códigos QR e explicado com demonstrações como é feita a leitura por meio de um aplicativo instalado em um dispositivo móvel, veja exemplo na figura 9.

Os códigos QR foram criados com imagens de obras de ar- te de artistas caxienses e alguns foram trazidos pelos estudantes, que coletaram de locais diversos a partir de solicitação no encontro anterior. A utilização de códigos QR serve para exemplificar uma função do aplicativo Arte Aqui!, na qual permite o usuário a acessar informações sobre o artista e sobre a obra de arte, a partir da leitura do código QR no local da obra de forma rápida e eficiente. Os estudantes utilizam tablets pertencentes ao acervo da escola para fazer a leitura dos códigos QR. Durante essa atividade, os estudantes conversam sobre as imagens que descobrem, indicam quais obras e artistas eles conheciam, indicando curiosidade e interesse.

Após a interação com os códigos QR, os estudantes fazem registros textuais sobre a experiência. A exploração dos códigos QR como ferramenta didática foi elaborada para chamar a atenção para os espaços, objetos e ambiências. Nas exposições de arte contemporâneas é uma prática comum o uso de códigos QR como forma de interação com as obras de arte e de acesso a dados. Para uma versão mais atualizada do aplicativo Arte Aqui! Propõe-se uma identificação através de códigos QR nas obras e locais de arte, com o intuito de facilitar o acesso as informações e interações com os espaços.

Figura 9: Interação com códigos QR

Após essa conversa, apresenta-se o App Arte Aqui! e soli- cita-se que identifiquem obras no aplicativo na sua versão preliminar. Em um primeiro momento, eles utilizam o App de forma intuitiva, e interagem livremente. O aplicativo Arte Aqui! é ainda um processo de construção, e exemplifica possibilidades a partir do software MIT App Inventor2 e de como utilizar essa produção tecnológica a partir de uma proposta educacional. Por esse motivo, não estão disponibilizadas todas as funções pretendidas no aplicativo e buscou-se subsídios alternativos para simulações.

Na sequência, fotografam-se os estudantes e solicita-se a criação de uma produção artística digital (Mobile Art) a partir das suas fotos. Nesta etapa, utiliza-se editores de fotos dos celulares dos estudantes e tablets da escola. As imagens das produções foram manipuladas para preservar a identidade e o direito de uso das imagens dos estudantes. Nessa experiência, os estudantes fazem intervenções nas suas imagens e utilizam elementos do seu interesse, como emoticons, frases, palavras, dentre outros. Esta produção, por fim, compartilha-se entre os pares. Diante todo o processo, os estudantes participam ativamente através de questionamentos e apontamentos. Percebe-se que o envolvimento com a atividade proposta gerou motivação, interesse e despertou diferentes percepções sobre si mesmo, sobre os outros e os espaços fotografados.

Menezes (2016) pondera que "o lugar da experiência como possibilidade da prática poética e interação entre o sujeito e o mundo, invoca o ensino-aprendizagem em arte como meio de atualizar o pensamento dos modos do fazer estético implicados nas necessidades que constituem a correlação da experiência cultural, nos diversos espaço-tempo, com os processos do fazer artesanal no contemporâneo e faz mover experiências nas práticas culturais"

Em novas versões do aplicativo pretende-se disponibilizar produções coletivas (Mobile Art), assim como histórico e compartilhamento dos locais já percorridos, no intuito de aproximar tal produto do software com as propostas de interação com a arte local de forma virtual, criativa e artística. Como uma proposta educacional baseada na Cartografia dos sentidos, investiga-se através de vivências que consistiram em encontros de ensino-aprendizagem, mediados pelas tecnologias entre os estudantes, a matéria e a técnica, correspondendo a camadas da experiência dos diversos sujeitos e seus modos do fazer em diversos espaços-tempos (2016).

Mediada pela Cartografia dos sentidos, a proposta foi ancorada a partir da abordagem triangular, proposta por Barbosa (1998) que compreende as ações básicas componentes do ensino/aprendizagem em arte: criação (fazer artístico), leitura de imagens e contextualização. Por meio da Cartografia dos Sentidos, busca-se ressignificar experiências do fazer arte através das leituras dos espaços, territórios e de reafirmação da identidade de cada estudante. Menezes [8] salienta que a Cartografia dos Sentidos aponta indícios de um lugar aberto à subjetivação e à liberdade, capaz de criar elos, religar sentidos e suscitar novas abordagens para as relações ensino-aprendizagem.

5 | RESULTADOS

Parte-se da proposta de desenvolvimento de um aplicativo educacional decorrente de um processo de formação profissional. Esse processo envolve repensar sobre as formas de ensinar e aprender, principalmente mediadas pelas tecnologias. As poéticas e leituras de espaços influenciam nos modos de fazer estéticos de maneira a fazer sentido aos sujeitos e aos demais envolvidos.

A utilização do Aplicativo Arte Aqui! em dispositivos móveis para criações poéticas pode contribuir em abordagens no ensino da arte no âmbito da leitura, do fazer e do contextualizar, conforme Barbosa (1998). A utilização de recursos digitais pode contribuir para o desenvolvimento do senso estético e crítico em Arte e enquanto competência de aprendizagem, dialoga com o ensino de Arte.

Para a avaliação das potencialidades do App, realizou-se uma aplicação experimental do aplicativo Arte Aqui! com estudantes do quarto ano do Ensino Fundamental I, conforme descrito na seção anterior. A partir da incorporação aplicativo Arte Aqui! às atividades de ensino e aprendizagem, reconstruíram-se conceitos e oportunizam-se reflexões em conjunto com os estudantes. Nestas atividades, torna-se possível identificar as percepções dos espaços, ambiências e os seus modos de fazer, conforme abordagem proposta de planejamento ancorada na Cartografia dos Sentidos.

A aplicação da proposta educacional evidencia que mesmo com muitos recursos e tecnologias disponíveis, existe um distanciamento do conhecimento dos estudantes sobre a utilização de artefatos tecnológicos e recursos digitais no ensino da arte.

Os estudantes exploraram o App Arte Aqui! diante da pro- posta de interagir com a primeira versão produzida do app. Nesta versão, é possível acessar o mapa de Caxias do Sul e identificar locais onde encontram-se obras de Arte, museus, grafites, dentre outras manifestações artísticas. Também é possível inserir um local ou obra de Arte que ainda não esteja disponível no aplicativo. Na tela denominada ´´Crie sua Arte´´ é possível realizar uma produção digital pessoal, a partir de fotografias e ferramentas de edição de fotos. Essa etapa não foi realizada no aplicativo Arte Aqui! Em função da versão preliminar não estar preparada com todos os recursos e funcionalidades disponíveis conforme planejamento da aplicação.

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Destaca-se que a cartografia é, ao mesmo tempo, ciência e arte, evidenciada nos mapas de alta qualidade, especialmente em velhos mapas históricos, nos quais o desenhista preenchia os oceanos com Figuras de dragões, velhos barcos a vela, e outros tipos de desenhos. A arte na cartografia inclui o "lay-out" ou esquema de desenho, que influi na aparência estética do mapa como um todo. Também inclui o desenho técnico de cada linha e cada ponto que, em conjunto formarão a mensagem para o leitor.

A Cartografia dos Sentidos possibilita a construção de saberes por meio das ambiências, dos modos de fazer, da matéria e percepções individuais e coletivas dos espaços.

Os diferentes modos do fazer, utilizado com técnicas, suportes e tecnologias variadas, promovem a reflexão e atribuição de sentidos. E, de fato, isso ocorreu na medida em que os estudantes descobrem mais sobre si e sobre os ambientes em que transitam e fazem parte.

Durante o processo da investigação, percebe-se o engaja- mento dos estudantes diante das propostas realizadas. Os estudantes destacam que gostariam de aprender a fazer aplicativos e que poderiam utilizar o aplicativo Arte Aqui! nas aulas de Arte. Alguns estudantes relatam que tem interesse em aprender mais sobre edição de fotografias. Como sugestão de melhoria para o aplicativo Arte Aqui!, ele sugerem uma opção que ensine a desenhar com exemplos e espaço para criarem seus próprios desenhos. Também sugerem que o aplicativo tivesse uma opção de dublagem, para que eles pudessem gravar vídeos e editar as falas com outros colegas criando histórias inventadas sobre a cena.

Destacam-se, a motivação para o uso dos recursos digitais, considerado pelos próprios estudantes como uma experiência pertinente e destacam que gostam de aprender utilizando tecnologias diferenciadas. Por fim, este processo evidencia a ampliação das possibilidades de criações artísticas, conceitos e percepções sobre seus percursos cotidianos, ambiências, sobre a cidade, sobre si mesmos e os outros mediadas pelas tecnologias e poéticas digitais.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos organizadores do VII SE- CIMSEG pelo espaço de

discussão e reflexão disponibilizado e aos professores do PPGECiMa pelas sugestões e orientações.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ana Mae Tavares Bastos. Arte-educação: conflitos/acertos. Editora Max Limonad, 1984.

BARBOSA, Anna Mae Tavares Bastos. Tópicos Utópicos. Belo Horizonte: C/Arte, 1998a. p.35.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasilia: MEC, 2017. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Versão final homologada da Educação Infantil ao Ensino Fundamental em 20/12/2017. Acesso em: mar. de 2019.

BUORO, Anamelia Bueno. O olhar em construção–uma experiência de ensino e aprendizagem na ante da escola. São Paulo: Cortez, 2001.

CARTAXO, Zalinda. 1. ARTE NOS ESPAÇOS PÚBLICOS: a cidade como realidade. O percevejo online, v. 1, n. 1, 2009.

COSTA, Mario. O Sublime tecnológico. São Paulo: Experimentos, 1995.

COUCHOT, Edmond. **A tecnologia na arte: da fotografia à realidade virtual**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2003.

DOMINGUES, Diana. Arte e vida no século XXI: tecnologia, ciência e criatividade. Unesp, 2003.

DOMINGUES, Diana. Criação e interatividade na ciberarte. São Paulo: Experimento, p. 13, 2002.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli EDA. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. **Em Aberto**, v. 5, n. 31, 2011.

MENEZES, Marlette Aparecida Rezende de. Cartografia dos sentidos: modos do fazer, experiência estética e aprendizagem. 2015. Cartografia dos Sentidos Modos do fazer, Experiência Estética e Aprendizagem. 2016. 116 f. Dissertação (Mestrado em Artes – Ensino de Artes) – Universidade Federal de Minas Gerais – Belo Horizonte, Minas Gerais.

MOREIRA, Marco Antonio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Editora Universidade de Brasília, 2006.

OLIVEIRA, L. de. Estudo Cognitivo do mapa. In: ALMEIDA, R. D. Cartografia Escolar. 2 ed. São Paulo: Contexto, 2010, p. 15-42.

R. K. Yin. Estudo de caso: planejamento e métodos. 4. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ROSSI, Maria Helena Wagner. Imagens que falam: leitura da arte na escola. Porto Alegre: Mediação, 2009.

CAPÍTULO 20

MODELAGEM E ALIMENTAÇÃO SAUDÁVEL: POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Data de aceite: 01/10/2020

Felipe Manoel Cabral
Programa de Engenharia Civil/COPPE-UFRRJ

Marcela Lima Santos
Instituto Multidisciplinar/UFRRJ

Claudia Mazza Dias
Instituto Multidisciplinar/UFRRJ

RESUMO: O ensino da matemática é desafiador tanto para um professor da Educação Básica, quanto do Ensino Superior. A possibilidade de trabalhar o conteúdo matemático relacionado ao cotidiano do aluno pode ser um grande facilitador do processo ensino-aprendizagem, mas exige que o professor faça uso de técnicas/ferramentas de ensino para tornar o processo dinâmico e natural. Nessa perspectiva, o presente trabalho apresenta a Modelagem Matemática como uma ferramenta para o ensino de matemática, por meio de duas atividades voltadas para questões de alimentação. Uma atividade aplicada a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, explorando os conceitos de operações com valores em unidades de medidas distintas, para números decimais. E a segunda atividade aplicada a alunos do curso de Graduação em Matemática, explorando conceitos de sistemas lineares com inequações. Verificou-se, diretamente da aplicação das atividades, que a Modelagem Matemática se diferencia da maioria das ferramentas de ensino por estimular o instinto questionador no aluno, permitindo que o mesmo compreenda como a matemática pode estar presente no dia a dia.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática; Ferramenta de Ensino; Números Decimais; Sistemas Lineares.

MODELING AND HEALTHY EATING: POSSIBILITIES FOR TEACHING MATHEMATICS

ABSTRACT: Mathematics teaching is challenging for both a basic education teacher and a Higher Education teacher. The possibility of working with mathematical content related to the student's daily life can be a great facilitator of the teaching-learning process, but it requires the teacher to use teaching techniques / tools to make the dynamic and natural process. From this perspective, the present work presents Mathematical Modeling as a tool for mathematics teaching through two examples of approaches to food issues. The first activity was performed with students of the Grade 6 in Basic School, exploring the concepts of operations with values in a different unit of measurement and numbers in the decimal form. The second activity was performed with undergraduate students in Mathematics, exploring concepts of linear systems with inequalities. It was found, directly from the application of the activities, that Mathematical Modeling differs from most part of teaching tools by stimulating the questioning instinct in the student, allowing him to understand how mathematics can be present in daily life.

KEYWORDS: Mathematical Modeling; Teaching Tool; Decimal Number; Linear Systems.

1 I INTRODUÇÃO

A matemática frequentemente faz o papel de vilã na vida dos alunos, por motivos diversos. Um deles é o fato dos alunos precisarem fazer inúmeros exercícios para poder "pegar a prática" ou se familiarizar com os métodos. Outro motivo frequente é que eles consideram os professores "chatos", que se preocupam demais com "detalhes" nas avaliações. Mas, sem dúvida, dentre os principais fatores que contribuem para esta situação estão: a falta de dinamismo ao se ensinar a matéria e a dificuldade em despertar o interesse dos alunos para o que está sendo ensinado. A preocupação em cumprir o conteúdo programático previsto para cada turma, faz com que os professores sintam dificuldade em tornar suas aulas mais atrativas, recorrendo a aulas tradicionais, em que o conteúdo é ensinado de forma desconexa com a aplicação prática. Além disso, alguns sobrecarregam os alunos com um grande volume de conteúdo, mas sem despertar o interesse pela disciplina. Ubiratan D'Ambrósio expressa de uma forma clara, sua preocupação com relação ao ensino desconectado do cotidiano do aluno:

> "Particularmente em matemática, parece que há uma fixação na ideia de haver necessidade de um conhecimento hierarquizado, em que cada degrau é galgado numa fase da vida, com atenção exclusiva durante horas de aula, como um canal de televisão que se sintoniza para as disciplinas e se desliga acabada a aula. Como se fossem duas realidades disjuntas, a da aula e a de fora da aula." (D'AMBROSIO, 2005. p. 83)

Uma alternativa para modificar esse cenário seria o desenvolvimento de aulas ou atividades em que o aluno veja a matemática inserida em situações práticas, próximas à sua realidade de vida, explorando conjuntamente conteúdos matemáticos. Para tal seria necessário que o professor desenvolvesse pesquisas/estudos, para elaborar aulas dinâmicas e interativas voltadas para o cotidiano do aluno, que englobem e modifiquem a forma de ensinar a teoria.

Nestes moldes, buscando ilustrar como a Modelagem Matemática pode ser usada como uma ferramenta de ensino, o presente trabalho apresenta duas propostas de atividade de Modelagem Matemática, uma aplicada a uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental e outra a graduandos do curso de Matemática, ambas voltadas para questões de alimentação. Cabe observar, entretanto, que estas atividades apresentam objetivos específicos distintos. Na primeira atividade, contrapondo as estratégias e observações realizadas por ROZAL (2007), é desenvolvido um modelo que representa a distribuição da massa de um indivíduo (o Índice de Massa Corporal – IMC), objetivando compreender as operações utilizadas, as unidades de medidas e proporcionar um estímulo à boa alimentação, além de debates sobre saúde. Na segunda, é tratado o problema da dieta em termos de valores nutricionais dos alimentos, recaindo sobre o estudo de sistemas lineares. Esta atividade teve dois objetivos: apresentar a Modelagem Matemática de uma forma prática; e mostrar que a mesma pode ser uma boa ferramenta para o ensino de matemática quando aplicada a alunos do Ensino

Médio, tendo em vista que o público presente na atividade era majoritariamente composto por licenciandos em Matemática.

2 | MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO

A modelagem é o processo de produção de um modelo capaz de descrever como uma situação/fenômeno/sistema de interesse se comporta. Entende-se por modelo a representação do objeto sob estudo, ainda que de forma simples. Um modelo deve apresentar similaridade com a realidade, incorporando suas principais características, consistindo na descrição em alguma "linguagem" usada para ajudar a entender ou visualizar alguma questão de interesse. E a "linguagem" usada para representar o modelo determina o tipo de modelagem. A aplicação da Modelagem Matemática como instrumento de ensino favorece a relação de ensino-aprendizagem da disciplina, dado que se faz necessária a adequação ao sistema educacional e ao contexto sociocultural no qual os alunos estão inseridos, possibilitando aplicar o conteúdo teórico de modo a desenvolver a capacidade de exploração dos estudantes e habilidade na resolução de problemas. Segundo Bassanezi (2002, p. 44) "a atividade de aplicar matemática é tão antiga quanto à própria matemática.", o que leva a notar que as atividades de matemática de natureza aplicada abrem espaço para transformar situações complexas em modelos matemáticos, em que possa ser encontrada uma solução para uma releitura da situação original.

A Modelagem Matemática consiste em um processo no qual as características pertinentes de uma situação-problema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras. O modelo criado por esse processo é sempre aberto a críticas e ao aperfeiçoamento (BEAN, 2001). Embora, não seja vista como uma ferramenta engessada, suas estratégias de desenvolvimento podem ser sequenciadas em etapas, como pode ser verificado na Figura 1.

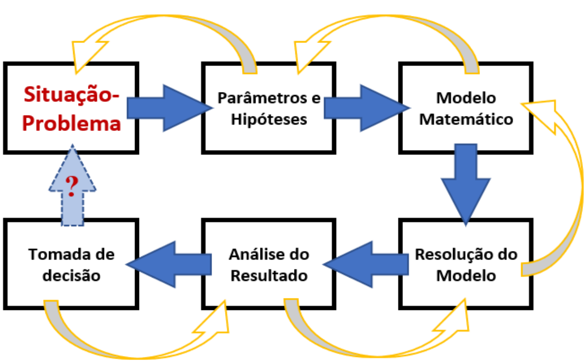


Figura 1 – Esquema de Etapas para Elaboração e Resolução da Modelagem Matemática.

Fonte: adaptado de (BEAN, 2001).

A primeira etapa consiste em definir a uma simplificação da condição real, para tanto é preciso conhecer a situação-problema sob estudo, saber quais os conceitos não matemáticos envolvidos, compreender os fatores preponderantes para o estudo, de modo a permitir se estabelecer parâmetros e hipóteses/considerações relevantes ou não para geração dos modelos. A segunda etapa focaliza a obtenção de um modelo matemático passível de ser solucionado e a elaboração do modelo matemático depende diretamente da etapa anterior, buscando identificar uma relação entre os parâmetros por meio das informações ou dados conhecidos. A terceira etapa consiste na resolução do modelo, por meio de técnicas e metodologias que melhor se adequarem. O modelo empregado só será considerado pertinente ou apropriado se os resultados obtidos forem satisfatórios ou representativos, isto é, se condizem com a situação-problema sob estudo e com as simplificações estabelecidas, e esta é a etapa de análise dos resultados. Caso haja algum conflito, será necessário retomar o estudo da situação-problema reiniciando o ciclo, a fim de rever todo o processo buscando identificar brechas, falhas ou ajustes necessários.

Como dito anteriormente, o processo de modelagem não é engessado, portanto, em alguns casos não é preciso chegar ao fim de todo o ciclo para aperfeiçoar o modelo, a qualquer momento que se verifique uma inconsistência é possível parar e retornar a alguma etapa anterior. Essas formulações e reformulações do modelo requerem do aluno um instinto de pesquisador. Muitas vezes as hipóteses estão implícitas, ou não estão sendo apresentadas, exigindo que o aluno busque por informações em fontes complementares.

As duas seções subsequentes apresentam duas experiências em sala de aula que podem ajudar não só no entendimento sobre o uso da modelagem matemática como ferramenta de ensino, mas também podem ser úteis como exemplos de atividades para aqueles professores que pretendem se aventurar a usá-la.

3 | ATIVIDADE PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Esta primeira atividade foi desenvolvida em uma turma do 6º ano de uma escola particular no município de Nova Iguaçu/RJ, utilizando de duas aulas de 1h30min. A atividade foi pensada buscando desenvolver as habilidades de realizar operações com números fracionários (decimais). Além disso, buscou-se estimular o senso crítico e investigativo do aluno, promovendo uma maior interação da Matemática vista em sala de aula e o cotidiano do aluno, como é próprio da Modelagem Matemática. Esse pensamento permitiu sequenciar a atividade da seguinte forma: no dia 1, foi trabalhada a construção do modelo; e, no dia 2, foi feito o levantamento do cenário da turma.

Iniciou-se a atividade com a introdução da temática, promovendo uma reflexão acerca da importância de se ter uma alimentação saudável, trazendo a informação de que cuidados com o sobrepeso e a desnutrição são fundamentais, principalmente, nessa fase do crescimento. Em seguida, os alunos foram divididos em grupo para discutir sobre como eles fazem para identificar se uma pessoa está: abaixo do peso; acima do peso; ou no peso ideal. Alguns cenários foram apresentados com o objetivo de fortalecer o debate, permitindo que estes identificassem que só a massa da pessoa não determina a condição em que ela se encontra (acima do peso, abaixo do peso ou no peso ideal). Portanto, seria necessário quantificar uma distribuição de massa.

O "método" para cálculo desta distribuição foi construindo com base em medidas de altura e massa para 5 pessoas fictícias, pensados de forma a explorar a percepção dos alunos. A partir dos dados, os alunos foram estimulados a buscar uma relação matemática que fosse coerente, trabalhando com as operações matemáticas que conheciam (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação). De posse destes resultados, foram realizadas diversas discussões e considerações que permitiram estabelecer um modelo matemático capaz de quantificar a distribuição de massa de uma pessoa, expresso como a razão entre a massa da pessoa e a potência quadrática de sua altura, isto é, distribuição de massa = massa/(altura^2).

Para um melhor entendimento das hipóteses adotadas, observamos que para desenvolver o "método de cálculo", não foram considerados parâmetros como gênero e idade. Após essa etapa, introduziu-se o conceito de Índice de Massa Corporal (IMC), que corresponde ao mesmo modelo matemático construído por eles, apresentando informações de referência segundo gênero e idade. A descoberta da relação entre a expressão obtida através das discussões descritas acima e a "fórmula" do IMC, por si só é estimulante para os alunos, mostrando que eles foram capazes de desenvolver uma expressão muito conhecida, importante e, recorrentemente, utilizada.

No segundo dia de atividade, os alunos foram convidados a calcular seu próprio IMC e suas informações foram anotadas de forma não identificada. Esta parte da atividade, permitiu que outros conceitos matemáticos fossem trabalhados como a representação de dados em tabelas, gráficos e proporções.

Cabe observar que os alunos não foram apresentados ao processo de desenvolvimento da Modelagem Matemática, uma vez que objetivamos desenvolver atividade naturalmente sem que os mesmos fossem influenciados pela metodologia. Maiores detalhes acerca do desenvolvimento desta atividade podem ser consultados no trabalho de CABRAL *et. al.* (2019).

4 | DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE PARA GRADUANDOS DO CURSO DE MATEMÁTICA

Esta segunda atividade foi desenvolvida em formato de oficina com 3h de duração, durante a Semana Acadêmica do curso de Matemática no IM/UFRRJ. Cabe observar que esta atividade foi desenvolvida objetivando ampliar a perspectiva do aluno quanto a aplicabilidade da matemática no cotidiano, bem como ilustrar as possibilidades da

Modelagem Matemática quanto recurso para o ensino.

A fim de atender os objetivos da atividade, foram apresentados aos participantes o cenário atual do ensino de matemática e as estratégias de desenvolvimento da Modelagem Matemática. Apresentamos o significado das palavras modelo e modelar, do próprio dicionário, mostrando que o processo de modelagem é natural e intuitivo, fundamentado na representação matemática de uma situação-problema. Esta introdução inicial, evidenciou a necessidade em definir uma situação-problema para dar início ao processo de modelagem matemática, para tanto apresentamos aos participantes dois fragmentos de textos informativos sobre alimentação saudável, e aberto um debate sobre como se pode conduzi-la de modo favorável. Os participantes observaram que é preciso controlar as "calorias" consumidas, bem como carboidratos, açúcares, entres outros nutrientes. Conjuntamente, concluíram que uma alimentação é considerada correta quando se ingere todos os nutrientes necessários para o organismo, e na quantidade necessária, isto é, sem grandes excessos ou escassez.

Questionamos como deveríamos ser realizar esse controle e obtivemos como resposta que para isso *"seria preciso controlar os alimentos ingeridos, pois um alimento tem vários nutrientes"*. Após isso, questionamos aos participantes sobre como eles poderiam avaliar o valor nutricional de um alimento. Os mesmos responderam que: *"produtos industrializados devem apresentar tabelas informativas em suas embalagens"*. Levantamos mais uma questão: ***"E para os produtos não industrializados, ou que sofrem mudança de valores nutricionais quando cozidos ou fritos?"*** Adicionalmente, questionamos: ***"Qual é a quantidade correta de consumo diário para cada nutriente necessário para um ser humano?"*** Alguns alunos responderam: *"Basta consultar um nutricionista"*. Outros responderam: *"Devem haver estudos"*. Concordamos com as respostas e apresentamos uma tabela com informações de consumo diário de alguns nutrientes para um adulto (Tabela 1).

Nutrientes	Valores diários
Energia (Ener.)	2000 kcal
Proteína (Prot.)	75 gramas
Carboidratos (Carb.)	300 gramas
Lipídeos (Lip.)	55 gramas

Tabela 1 – Consumo diário de alguns nutrientes (valores para adultos)

Fonte:http://portal.anvisa.gov.br/documents/33880/2568070/res0360_23_12_2003.pdf/5d4fc713-9c66-4512-b3c1-afee57e7d9bc - Acesso em outubro de 2017

Questionamos aos participantes: ***"Com base nessas informações (da tabela)***

como podemos estabelecer um Modelo Matemático, associado ao controle destes nutrientes?" E alguns participantes responderam: *"Precisamos consumir os alimentos até atender estes valores."* Continuamos a estimular a participação: ***"Mas, como representamos isso matematicamente?"*** E sugerimos que eles escrevessem como fariam isso. Caminhamos pela sala e verificamos que alguns participantes tiveram dificuldade, mas a maioria identificou que o somatório do consumo de cada um destes nutrientes precisa ser maior ou igual ao seu valor máximo diário necessário.

$$\sum Cons.Energia \geq 2000kcal$$

$$\sum Cons.Proteína \geq 75g$$

$$\sum Cons.Carboidratos \geq 300g$$

$$\sum Cons.Lipídeos \geq 55g$$

Concluída esta consideração, questionamos: ***"Se um mesmo alimento pode conter mais de um tipo de nutriente, qual a implicação disso no nosso modelo?"*** Para este questionamento, os participantes observaram que ao consumir um alimento, este irá contribuir em mais de uma inequação, resultando em um sistema de 4 inequações.

$$\begin{cases} \sum Cons.Energia \geq 2000kcal \\ \sum Cons.Proteína \geq 75g \\ \sum Cons.Carboidratos \geq 300g \\ \sum Cons.Lipídeos \geq 55g \end{cases}$$

Para explicitar os somatórios presentes nestas inequações, fez-se necessário estabelecer como os alimentos serão considerados na dieta e os valores nutricionais associados a estes. Para tanto, consideramos 4 grupos de alimentos: Cereais, Pães e Massas; Leite e Derivados; Frutas, Leguminosas, Verduras, Hortaliças e Derivados; Carnes e Pescados. Estabelecendo os valores nutricionais como a média dentre os alimentos do grupo, conforme apresentado na Tabela 2.

Grupo de Alimentos	Ener.	Prot.	Carb.	Lip.
Cereais, Pães e Massas	332,2kcal	7,0g	58,8g	7,9g
Leite e Derivados	340,9kcal	24,0g	15,0g	21,0g
Frutas, Leguminosas, Verduras, Hortaliças e Derivados	79,3kcal	2,1g	15,0	2,2g
Carnes e Pescados	232,4kcal	25,2g	2,6g	12,6g

Tabela 2 – Valores nutricionais por grupo de alimentos

Obs.: Valores obtidos para porções de 100g/100mL, considerando a média dentre os alimentos do grupo. Fonte: Disponível em: http://www.cfn.org.br/wp-content/uploads/2017/03/taco_4_edicao_ampliada_e_revisada.pdf - Acessado em setembro de 2017

E o modelo matemático resultante é um sistema composto por 4 inequações e 4 incógnitas.

$$\begin{cases} 332{,}2x_1 + 340{,}9x_2 + 79{,}3x_3 + 232{,}4x_4 \geq 2000kcal \\ 7x_1 + 24x_2 + 2{,}1x_3 + 25{,}2x_4 \geq 75g \\ 58{,}8x_1 + 15x_2 + 15x_3 + 2{,}6x_4 \geq 300g \\ 7{,}9x_1 + 21x_2 + 2{,}2x_3 + 12{,}6 \geq 55g \end{cases}$$

Na forma matricial, este sistema pode ser expresso como:

$$\begin{bmatrix} 332{,}2 & 340{,}9 & 79{,}3 & 232{,}4 \\ 7{,}0 & 24{,}0 & 2{,}1 & 25{,}2 \\ 58{,}8 & 15{,}0 & 15{,}0 & 2{,}6 \\ 7{,}9 & 21{,}0 & 2{,}2 & 12{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2000 \\ 75 \\ 300 \\ 55 \end{bmatrix}$$

Perguntamos se os participantes sabiam como resolver um sistema de inequações. E eles responderam que *"não, só para equações".* Questionamos se algo poderia ser feito. E eles sugeriram tentar resolver *"considerando uma igualdade, pois isso não mudaria o sistema"*.

Um sistema linear de equações pode ser resolvido por diferentes técnicas (como Eliminação de Gauss, ou Regra de Cramer) ou Métodos Numéricos quando dispomos de computador, e todas elas podem ser exploradas. Durante a atividade foi utilizada o Método de Eliminação de Gauss. Resolvido o sistema, obtivemos o número de porções necessárias para consumo:

$$\begin{bmatrix} \text{Cereais, Pães e Massas} \\ \text{Leite e Derivados} \\ \text{Frutas, Leguminosas, Verduras, Hortaliças e Derivados} \\ \text{Carnes e Pescados} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}07 \\ \mathbf{-0,58} \\ 0{,}35 \\ 2{,}09 \end{bmatrix}$$

Neste ponto estamos numa etapa muito importante da Modelagem Matemática, a avaliação dos resultados, é nesta etapa que verificamos se a solução é pertinente, ou se alguma adaptação precisa ser feita.

Observando a solução, verificamos a presença de um valor negativo, o que não é pertinente na situação-problema estudada, uma vez que não há como ingerir uma quantidade negativa de um determinado alimento. Questionamos aos participantes o que poderíamos fazer para eliminar o número negativo. Um aluno sugeriu torná-lo positivo, para isso bastava somarmos 1 em todas a variáveis e isto iria preservar a desigualdade. De fato, esta sugestão era plausível e apropriada neste caso. Contudo, optamos por outra sugestão, que consistiu em adotar 0, no lugar no número negativo.

Adicionalmente, observamos que os números mais simples para representação das porções consistem em inteiros e frações de meia porção, dificilmente uma dieta contem frações inferiores a ½. Com isso, todas as frações foram aproximadas considerando essa hipótese. Para verificar se estas adaptações eram pertinentes, fez-se necessário substituir estes valores, no sistema de inequações e verificar se as desigualdades eram satisfeitas:

$$\begin{bmatrix} 332,2 & 340,9 & 79,3 & 232,4 \\ 7,0 & 24,0 & 2,1 & 25,2 \\ 58,8 & 15,0 & 15,0 & 2,6 \\ 7,9 & 21,0 & 2,2 & 12,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2164,45 \\ 86,45 \\ 306,7 \\ 65,8 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2000 \\ 75 \\ 300 \\ 55 \end{bmatrix}$$

Concluímos, portanto, que a solução adaptada é uma solução adequada.

Neste ponto foi preciso realizar uma tomada de decisão. Paramos aqui ou retomamos a situação-problema? Uma segunda avaliação da solução, permitiu observar outros aspectos referentes à ideia de alimentação saudável, por exemplo, o consumo alimentos do grupo Leite e Derivados é muito importante para reposição de Cálcio no organismo (essencial na formação de ossos e dentes). Além disso, tem-se um grande consumo do grupo de Cereais, Pães e Massas, que em geral está associado a elevados valores de Sódio, que consumido em excesso pode acarretar em problemas de hipertensão. Então, outros nutrientes precisavam ser considerados e incluímos outros 4 nutrientes para um novo estudo (Tabela 3). Conduzindo a inclusão de novas inequações, referentes a estes novos valores nutricionais a serem avaliados. Preservando as hipóteses estabelecidas anteriormente, resultando num novo sistema composto por 8 inequações.

Nutrientes	Valores diários
Ferro (Fer.)	14 gramas
Cálcio (Cálc.)	1.000 miligramas
Sódio (Sód.)	2.400 miligramas
Colesterol (Coles.)	22 gramas

Tabela 3 – Consumo diário de novos nutrientes (valores para adultos)

Fonte:http://portal.anvisa.gov.br/documents/33880/2568070/res0360_23_12_2003.pdf/5d4fc713-9c66-4512-b3c1-afee57e7d9bc - Acesso em outubro de 2017

Novamente, para explicitar os somatórios presentes nestas inequações, fez-se necessário estabelecer como os alimentos deverão ser considerados na dieta e os valores nutricionais associados a estes. Uma observação detalhada permitiu concluir que os grupos de alimentares definidos anteriormente, eram muito abrangentes. Isto é, os valores nutricionais associados a (subgrupos de) alimentos contidos no mesmo grupo podem ser peculiares, devendo ser considerados separadamente, como apresentado na Tabela 4.

Grupo	Ener.	Prot.	Carb.	Lip.	Fer.	Cálc.	Sód.	Coles.
Pão e Massas	364,3kcal	7,6g	56,2g	12,5g	2,1mg	57,8mg	439,6mg	39,9mg
Frutas	76,8kcal	1,0g	17,0g	1,8g	0,3mg	16,8mg	3,0mg	0mg
Leite e Derivados	340,9kcal	24,0g	15g	21,0g	0,5mg	825mg	570mg	72mg
Cereais	279,6kcal	6,0g	60,3g	1,5g	4,5mg	71,2mg	229,1mg	6mg
Leguminosas	78,5kcal	5,0g	14g	0,5g	1,5mg	25mg	1,5mg	0mg
Verduras, Hortaliças	64,4kcal	2,0g	11,4g	2,0g	2,0mg	65,8mg	66,2mg	0mg
Carnes e Pescados	232,4kcal	25,2g	2,6g	12,6g	1,6mg	84,0mg	314,3mg	105,6mg

Tabela 4 – Valores nutricionais por grupo de alimentos

Obs.: Valores obtidos para porções de 100g/100mL, considerando a média dentre os alimentos do grupo.

Fonte: Disponível em: http://www.cfn.org.br/wp-content/uploads/2017/03/taco_4_edicao_ampliada_e_revisada.pdf - Acessado em setembro de 2017

Esta adaptação resultou num sistema contendo 8 inequações e 7 incógnitas. Para representarmos um sistema de inequações na forma matricial é necessário que todas as inequações sejam semelhantes. Contudo, os valores de Sódio e Colesterol correspondem ao consumo diário máximo, isto é, não devem ser excedidos. A fim de solucionar este complicador foi sugerido multiplicar as duas últimas inequações do sistema por (-1):

$$\begin{bmatrix} 364,3 & 76,8 & 340,9 & 279,6 & 78,5 & 64,4 & 232,4 \\ 7,6 & 1,0 & 24,0 & 6,0 & 5,0 & 2,0 & 25,2 \\ 56,2 & 17,0 & 15,5 & 60,3 & 14,0 & 11,4 & 2,6 \\ 12,5 & 1,8 & 21,0 & 1,5 & 0,2 & 2,0 & 12,6 \\ 2,1 & 0,3 & 0,5 & 4,5 & 1,5 & 2,0 & 1,6 \\ 57,8 & 16,8 & 825,0 & 71,2 & 25,0 & 65,8 & 84,0 \\ -439,6 & -3,0 & -570,0 & -229,1 & -1,5 & -66,2 & -314,3 \\ -39,9 & 0,0 & -72,0 & -6,0 & 0,0 & 0,0 & -105,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2000 \\ 75 \\ 300 \\ 55 \\ 14 \\ 1000 \\ -2400 \\ -22000 \end{bmatrix}$$

Novamente, o sistema a ser resolvido considera apenas as igualdades. Além disso, os participantes observaram que o sistema não era quadrado. Portanto, a alternativa seria eliminar uma inequação, que não seria usada na busca de solução, mas que seria considerada na verificação. Devido ao alto valor de consumo diário associado ao Colesterol, esta inequação foi escolhida para ser retirada. Ao resolver o sistema linear, novamente verificamos a presença de valores negativos, o que não é pertinente na situação-problema estudada, como discutido anteriormente. Adotando as hipóteses de adaptação da solução aplicadas anteriormente, obtivemos:

$$\begin{bmatrix} \text{Pães e Massas} \\ \text{Frutas} \\ \text{Leite e Derivados} \\ \text{Cereais} \\ \text{Leguminosas} \\ \text{Verduras, Hortaliças e Derivados} \\ \text{Carnes e Pescados} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-0,18} \\ 4,58 \\ 0,80 \\ 5,98 \\ \mathbf{-8,64} \\ \mathbf{-2,30} \\ 2,56 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 4+1/2 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 2+1/2 \end{bmatrix}$$

Observamos que se adotássemos a sugestão de tornar os números negativos em números positivos seria necessário somar 9 em todas as variáveis o que não seria interessante, dado que desejávamos minimizar o consumo de alguns nutrientes.

Ao aplicar a solução adaptada no nosso sistema linear de inequações, desenvolvemos um conjunto de análises. A quantidade de Sódio consumido, considerando a distribuição apresentada, excede o máximo esperado (), portanto, a solução precisa de nova adaptação. Observamos que os grupos que apresentam maior contribuição nesta inequação é o grupo de Leite e Derivados, Pães e Massas e Carnes e Pescados, avaliando: o grupo de Leite e Derivados é o que apresenta maior contribuição na inequação referente ao Cálcio, e como só está sendo consumida 1 porção, não é interessante anular o seu consumo, reduzindo a porção; o grupo de Pães e Massas tem contribuição nula; como alternativa, resta reduzir o consumo do grupo de Carnes e Pescados. Adicionalmente, incluímos duas hipóteses: diariamente deverá ser consumido no mínimo ½ porção de cada grupo, isto é, , dado que existem nutrientes que não estávamos observando e que poderiam vir de algum grupo especifico; e o consumo de Cereais não poderá exceder em 5 poções, isto é, , que seria correspondente a 0,5kg. Sabendo que uma pessoa consome em média 2,0kg de alimento por dia, está hipótese se mostra pertinente. Dessa forma, verificando a nova adaptação, obtivemos o sistema abaixo que conduz a um resultado satisfatório.

$$\begin{bmatrix} 364{,}3 & 76{,}8 & 340{,}9 & 279{,}6 & 78{,}5 & 64{,}4 & 232{,}4 \\ 7{,}6 & 1{,}0 & 24{,}0 & 6{,}0 & 5{,}0 & 2{,}0 & 25{,}2 \\ 56{,}2 & 17{,}0 & 15{,}5 & 60{,}3 & 14{,}0 & 11{,}4 & 2{,}6 \\ 12{,}5 & 1{,}8 & 21{,}0 & 1{,}5 & 0{,}2 & 2{,}0 & 12{,}6 \\ 2{,}1 & 0{,}3 & 0{,}5 & 4{,}5 & 1{,}5 & 2{,}0 & 1{,}6 \\ 57{,}8 & 16{,}8 & 825{,}0 & 71{,}2 & 25{,}0 & 65{,}8 & 84{,}0 \\ -439{,}6 & -3{,}0 & -570{,}0 & -229{,}1 & -1{,}5 & -66{,}2 & -314{,}3 \\ -39{,}9 & 0{,}0 & -72{,}0 & -6{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 & -105{,}6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 4+1/2 \\ 1/2 \\ 5 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2632{,}5 \\ 104{,}2 \\ 431{,}5 \\ 58{,}8 \\ 30{,}10 \\ 1086{,}4 \\ \mathbf{-2326{,}3} \\ -297{,}2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2000 \\ 75 \\ 300 \\ 55 \\ 14 \\ 1000 \\ -2400 \\ -22000 \end{bmatrix}$$

4.1 Alternativas de tratamento para elaboração de dietas

Durante a realização da atividade, foi possível verificar que as relações e conceitos matemáticos, necessários para desenvolvimento da modelagem matemática, surgiam naturalmente durante o processo, evidenciando a naturalidade e a importância em utilizar este ferramental como alternativa para o ensino da matemática. Para finalizar a atividade apresentamos outras perspectivas de tratamento do problema da dieta.

4.1.1 Dietas mais detalhadas

Observamos que em alguns casos, quando uma pessoa apresenta alguma doença causada por uma "má alimentação", faz-se necessário realizar uma dieta mais específica, sendo necessário determinar a quantidade exata de cada tipo de alimento a ser consumido. Por exemplo, consideramos a listagem de alguns alimentos, incluindo algumas bebidas, conforme apresentado na Tabela 5.

A consideração destes alimentos conduzirá a um sistema contendo 8 inequações e 22 incógnitas. Os participantes visivelmente ficaram impressionados com o "tamanho" do sistema a ser resolvido e observaram que se tratava de um sistema complicado para resolver, consequência do grande número de incógnitas comparativamente ao número de inequações. Esta condição caracteriza o sistema como possível e indeterminado, resultando em um conjunto de soluções, isto é, sem solução única. Neste momento, identificamos a importância de um médico ou nutricionista para orientar a dieta, uma vez que a escolha da solução ideal dependerá das condições de saúde do paciente.

Na tentativa de facilitar a determinação de uma solução para o sistema, apresentamos uma proposta: desacoplar as inequações, formando dois novos sistemas de 8 inequações. Um sistema referente ao consumo das refeições leves (café da manhã/lanches), composto pelos alimentos: Pão; Queijo; Ovo; Maçã; Banana; Laranja; Leite; Café; Cereal; Chá. E um segundo sistema para as refeições pesadas (almoço/jantar), composto pelos alimentos: Refrigerante; Arroz; Feijão; Espinafre; Brócolis; Tomate; Couve; Grão-de-bico; Fígado B; Frango; Carne; Sardinha. Para que as soluções destes dois novos sistemas sejam compatíveis com a solução do sistema original , é preciso multiplicar os termos independentes (consumos nutricionais diários) por fatores de ponderação, que serão responsáveis por particionar a quantidade de nutriente a ser consumido em cada tipo de refeição (leve – L, ou pesada – P), de modo que $CN_L + CN_P$,= 1 em que N é o nutriente. Cabe observa que estes fatores podem ser diferentes para cada tipo de nutriente. A utilização desta hipótese torna-se natural quando observado que, por exemplo, o Queijo e Leite são alimentos ricos em Cálcio e estes são comumente consumidos em refeições leves. Em contrapartida, as Carnes (vermelhas e brancas) são ricas em Proteína e são consumidas em refeições pesadas.

Alimentos	Ener.	Prot.	Carb.	Lip.	Fer.	Cálc.	Sód.	Coles.
Pão[1]	300kcal	8g	58,6g	3,1g	1,0mg	16mg	648mg	0mg
Queijo	264kcal	17,4g	3,2g	20,2g	0,9mg	579mg	31mg	62mg
Ovo	146kcal	13,3g	0,6g	9,5g	1,5mg	49mg	146mg	397mg
Refrigerante	34kcal	0g	8,7g	0g	0mg*	1g	7mg	0mg
Maçã	56kcal	0,3g	15,2g	0g*	0,1mg	2mg	0mg*	0mg
Banana	98kcal	1,3g	26g	0,1g	0,4mg	8mg	0mg*	0mg
Laranja	46kcal	1,1g	11,5g	0,1g	0,1mg	31mg	1mg	0mg
Leite	497kcal	25,4g	39,2g	26,9g	0,5mg	890mg	323mg	85mg
Café	9kcal	0,7g	1,5g	0,1g	0mg*	3mg	1mg	0mg
Cereal	377kcal	4,7g	88,8g	0,7g	3,9mg	56mg	405mg	0mg
Arroz	128kcal	2,5g	28,1g	0,2g	0,1mg	4mg	1mg	0mg
Feijão	77kcal	4,5g	14g	0,5g	1,5mg	29mg	2mg	0mg
Espinafre	67kcal	2,7g	4,2g	5,4g	0,6mg	112mg	47mg	0mg
Brócolis	25kcal	2,1g	4,4g	0,5g	0,5mg	51mg	2mg	0mg
Tomate	15kcal	1,1g	3,1g	0,2g	0,2mg	7mg	1mg	0mg
Couve	90kcal	1,7g	8,7g	6,6g	0,5mg	177mg	11mg	0mg
Grão-de-Bico	355kcal	21,2g	57,9g	5,4g	5,4mg	114mg	5mg	0mg
Chá	2kcal	0g*	0,6g	0g*	0mg*	0mg	0mg*	0mg
Fígado B	225kcal	29,9g	4,2g	9g	5,8mg	6mg	82mg	601mg
Frango	159kcal	32g	0g	2,5g	0,3mg	5mg	50mg	89mg
Carne	278kcal	32,4g	0g	15,5g	2,4mg	4mg	57mg	144mg
Sardinha	257kcal	33,4g	0g	12,7g	1,1mg	482mg	60mg	103mg

Tabela 5 – Valores nutricionais por alimento

Obs.: Valores obtidos para porções de 100g/100mL.

Fonte: Disponível em: http://www.cfn.org.br/wp-content/uploads/2017/03/taco_4_edicao_ampliada_e_revisada.pdf - Acessado em setembro de 2017

Para que a solução seja coerente, passível a aplicação numa dieta, é preciso incluir a condição que $x_i \geq 0$, valores não negativos. Além disso, podem ser adotadas condições adicionais, como: o consumo de um tipo de alimento não poderá exceder em 5 poções, isto é, $x_i \leq 5$; o consumo diário não pode ser excessivo, considerando uma limitação satisfatória e sabendo que cada porção corresponde a 100g, temos: $\sum x_i \leq 30 = 3kg$.

Adicionalmente, observamos que foram analisados apenas 8 nutrientes, embora seja de nosso conhecimento que existem muitos outros. Ampliando ainda mais o "tamanho" do sistema a ser resolvido.

4.1.2 O problema da Dieta e a Otimização Linear

Esta atividade foi aplicada para um grupo misto de graduandos, parte cursava a Licenciatura em Matemática e outra parte cursava Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional. Dessa forma, buscamos desenvolver a mesma sem recorrer diretamente conceito de Otimização Linear. Todavia, devido à natureza do problema em questão, tornou-se indispensável apresentar alguns aspectos de Otimização Linear.

Em nenhum momento da atividade foi abordado o custo da alimentação, deixamos esta abordagem para o fim da atividade. Neste ponto da atividade, observamos que é fundamental garantir uma alimentação saudável sem, com isso, despender gastos excessivos. Esse entendimento fundamenta a perspectiva da função objetivo em Otimização Linear. Isto é, para o problema da dieta, a função objetivo é minimizar o custo da alimentação, definido pelo somatório do custo de cada alimento nas porções consumidas, interpretadas como um somatório de variáveis ponderadas.

Definida a função objetivo, identificamos que as restrições correspondem as inequações do sistema. Essa relação se torna clara quando se compreende que os valores nutricionais estão limitados – inferiormente ou superiormente – restringindo as possibilidades de valores para as porções dos alimentos a serem consumidas, isto é, as variáveis do sistema. Um segundo grupo de restrições são definidas a partir de hipóteses complementares, como a limitação do número de porções de cada tipo de alimento, limitado a no máximo 5 porções, e o somatório de porções, limitado a no máximo 30. Cabe destacar que devido a limitação de tempo para desenvolvimento da atividade, os aspectos discutidos nesta seção foram apenas apresentados aos participantes da atividade, sem realizar aprofundamentos nos conceitos de Otimização Linear.

4.1.3 Uso de Tecnologias

Concluímos a atividade identificando que o uso de tecnologias poderá tornar mais simples o tratamento do problema em questão. Começamos a atividade com um sistema quadrado de ordem 4, que pode ser resolvido manualmente, embora, para alguns, possa ser desagradável. Contudo, no decorrer da atividade expandimos para um sistema 8x9 e posteriormente 8x22. As dificuldades em obter uma solução para sistemas maiores podem ser facilmente contornadas utilizando softwares e planilhas eletrônicas como recurso.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscando vincular a matemática com a realidade, desenvolvemos e implementamos duas atividades na qual o aluno tem um papel fundamental, como desenvolvedor do processo, atuando diretamente em todas as etapas da atividade. Já o professor será o interlocutor, atuando, quando necessário, como uma ponte entre as informações e a modelagem. Acreditamos que, com isso, a relação ensino-aprendizagem seja um caminho de duas vias, tanto o professor quanto o aluno irão, ao longo da atividade, interferir e construir o conhecimento um do outro. Despertando no aluno a busca por novos conhecimentos.

Entendemos que estas atividades auxiliarão o professor, contribuindo para sua formação contínua, e despertará a curiosidade dos alunos sobre a importância do conceito e aplicações da matemática em situações-problema que surgirão no seu cotidiano. As atividades de Modelagem Matemática permitem que além do estudo da matemática em si poderá ocorrer uma integração com outras disciplinas idealizando um projeto maior que possa envolver toda a escola.

As atividades desenvolvidas constituem um estudo piloto como parte do projeto de extensão coordenado pelas professoras Marcela Lima Santos e Claudia Mazza Dias, implementado de 2017 a 2020.

REFERÊNCIAS

BEAN, Dale. O que é modelagem matemática? *Educação Matemática em Revista*, São Paulo, ano 8, n 9, p.49-61, 2001.

BASSANEZI, Rodney. *Ensino – aprendizagem com Modelagem matemática*. Editora Contexto, São Paulo, 2002.

CABRAL, Felipe Manoel; SANTOS, Marcela Lima; DIAS, Claudia Mazza. Uma atividade de matemática para o ensino fundamental: O IMC para o estudo da obesidade/desnutrição. In: GONÇALVES, Felipe Antonio Machado Fagundes (org.); *Ensino de Ciências e Educação Matemática.* 3. ed. Ponta Grossa: Atena Editora. p. 106-114, 2019

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática da teoria à prática*. 12ª edição. **São Paulo: Papirus, 2005.**

ROZAL, Edilene Farias. *Modelagem matemática e os temas transversais na educação de jovens e adultos.* 2007. 164f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Cientifico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

CAPÍTULO 21

O SABOR DA MATEMÁTICA – O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL ATRAVÉS DAS HISTÓRIAS E RECEITAS CULINÁRIAS

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 05/07/2020

Domingos Antonio Lopes
Serviço Nacional da Industria / Secretaria Municipal de Educação
Rio Grande – RS
https://orcid.org/0000-0002-2640-0120

Cristiana Andrade Poffal
Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande
Rio Grande – RS
https://orcid.org/0000-0002-0108-7051

Cinthya Maria Schneider Meneghetti
Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande
Rio Grande – RS
https://orcid.org/0000-0002-8750-2462

RESUMO: O projeto busca despertar no aluno do 6º ano do Ensino Fundamental um novo olhar sobre a disciplina de matemática, alicerçado no novo fazer proposto pela Base Nacional Comum Curricular, a partir da unidade temática Números. Traz como objetivo, ajudar o aluno a entender e resolver questões matemáticas utilizando a interatividade com livros de histórias matemáticas, dinâmicas e situações cotidianas, como a elaboração de receitas culinárias e orçamento familiar. As atividades foram divididas nas seguintes etapas: revisão de conteúdos matemáticos através da leitura, criação de mascote e receitas por estação, visita a um supermercado, elaboração e degustação das delicias e elaboração do livro de receitas. O projeto promoveu uma reflexão, tanto para o estudante quanto para o docente, dando significado ao processo de ensino e aprendizagem, a possibilidade de transformar uma sala de aula tradicional num ambiente riquíssimo com a utilização de material concreto. Nesse ambiente de metodologia ativa de aprendizagem o docente transforma-se em mediador e o aluno protagonista.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática; BNCC; Educação Básica; Lúdico; Metodologia Ativa.

THE TASTE OF MATH - THE PROCESS OF BUILDING MATHEMATICAL KNOWLEDGE IN 6TH GRADE THROUGH CULINARY STORIES AND RECIPES

ABSTRACT: This project seeks to awaken in the 6th grade student a new look at the subject of mathematics, based on the new approach proposed by the Common National Curriculum Base, from the thematic unit Numbers. Its objective is to help the student to understand and solve mathematical issues using interactivity with mathematical storybooks, dynamics and daily situations, such as the elaboration of cooking recipes and family budget. The activities were divided into the following stages: review of mathematical content through reading, creation of a mascot and recipes per seasons, visit to a supermarket, preparation and tasting of delicacies and development of the cookbook. This project promoted a reflection, for both the student and the teacher, giving meaning to the process of teaching and learning, the possibility of turning a

traditional classroom into a very rich environment with the use of concrete material. In this environment of active learning methodology the teacher becomes a mediator and the student the protagonist.
KEYWORDS: Mathematics; BNCC; Basic Education; Ludic; Active Methodology.

1 I INTRODUÇÃO

Como forma de transformar a percepção que os estudantes têm da disciplina de matemática, muitas vezes desassociando das práticas cotidianas, propõe-se, como forma de estimular os alunos no processo de ensino e aprendizagem, um novo olhar para o conteúdo, de forma muito saborosa e lúdica, usando de uma metodologia ativa de aprendizagem.

O projeto busca despertar no aluno do sexto ano um novo olhar sobre a disciplina de matemática, especialmente com relação às operações fundamentais, máximo divisor comum (MDC) e mínimo múltiplo comum (MMC), os números fracionários, a porcentagem e os números decimais, de uma forma onde ele possa fazer a construção deste conhecimento utilizando-se de situações e práticas do dia a dia, tais como uma ida ao supermercado ou a experiência de produzir uma gostosura na cozinha, além da imersão no universo dos livros de histórias matemáticas.

O objetivo principal é ajudar o aluno a entender e resolver questões matemáticas utilizando a interatividade com livros de histórias matemáticas, dinâmicas e situações cotidianas, como a elaboração de receitas culinárias e orçamento familiar.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) Brasil (2017) traz um novo fazer do processo de aprendizagem, é preciso que os alunos desenvolvam competências, através das unidades temáticas e seus objetos e habilidades de conhecimento, o estudante deve desenvolver habilidades e atitudes para compreender e relacionar o conteúdo com as aplicações práticas.

> A unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar atributos de objetos e de julgar e interpretar argumentos baseados em quantidades. No processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações. (BRASIL, 2018, p. 268)

A citação acima justifica a importância do projeto na alfabetização matemática, onde o aluno é protagonista na realização das atividades, e os conhecimentos são construídos e associados com atividades cotidianas.

> No contexto escolar, a criatividade pode transformar a relação do sujeito com o conhecimento. As atitudes e as ações criativas correspondem a meios para a compreensão e alteração da realidade. Todo ato criativo expressa a percepção que alguém tem acerca do mundo, acerca de uma ideia ou situação. O Individuo necessariamente usa o seu entendimento da dimensão real para criar algo novo. (HAETINGER, 2012, p.93)

A citação retrata o quanto uma sala de aula lúdica pode promover no aluno o despertar e a promoção de sua criatividade, estimulando um protagonismo que busca relacionar os conhecimentos com as situações cotidianas. Segundo Silva e Haetinger (2013) é possível compreender a criatividade como a base do ato de liberdade, ou melhor, da ação libertadora, pois a criação associa-se à formação do senso crítico. Esse protagonismo, autonomia, criticidade, pensamento científico vai ao encontro da BNCC, através das suas competências gerais e específicas por área de conhecimento.

A seguir será apresentado o planejamento, método e materiais para a construção dessa pesquisa, trazendo os resultados e as conclusões, buscando a relação da teoria com a prática em uma nova proposta de ensino e aprendizagem.

2 | METODOLOGIA

O planejamento proposto por essa pesquisa baseia-se na implantação da BNCC, mas também na nova realidade do espaço da sala de aula, uma sala de aula invertida através de uma metodologia ativa de aprendizagem, onde o aluno passa a atuar como protagonista do seu próprio conhecimento e o professor torna-se o mediador do processo, com estratégias, histórias e receitas, num universo lúdico de ensino e aprendizagem.

> Quanto mais se problematizam os educandos, como seres no mundo e com o mundo, tanto mais se sentirão desafiados. Tão mais desafiados, quanto mais obrigados a responder ao desafio. Desafiados, compreendem o desafio na própria ação de captá-lo. Mas, precisamente porque captam o desafio como um problema em suas conexões com outros, num plano de totalidade e não como algo petrificado, a compreensão resultante tende a tornar-se crescentemente crítica, por isto, cada vez mais desalienada. (Freire, 1987, p. 40 apud Pereira e Silva, 2018, p.64)

A citação atribui significado ao que foi proposto e realizado, pois as problematizações que deverão surgir no momento em que os alunos forem desafiados, permitirão que façam as conexões dos conteúdos propostos com situações do cotidiano, como a elaboração de uma receita culinária ou a forma de desvendar um desafio de um livro de história.

> A aprendizagem ativa dá ênfase ao papel protagonista do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as etapas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor; a aprendizagem híbrida destaca a flexibilidade, a mistura e compartilhamento de espaços, tempos, atividades, materiais, técnicas e tecnologias que compõem esse processo ativo. (MORAN, 2017, p. 23)

O autor a partir da sua citação reforça o papel protagonista do aluno e afirma que a aprendizagem pode ocorrer a partir da flexibilização de um ambiente distinto a sala de aula tradicional, pelo uso de diferentes materiais e técnicas que vão compor o processo ativo de ensino. Dessa forma, o refeitório da escola para a ser um espaço de aprendizagem; as receitas, seus ingredientes e a sua execução passam a ser as atividades, materiais e técnicas que servirão de recurso para essa metodologia ativa.

As atividades na turma de 6º ano do Ensino Fundamental serão divididas nas seguintes etapas: revisão de conteúdos matemáticos através da leitura, criação de mascote e receitas por estação do ano, visita a um supermercado, elaboração e degustação das delícias e elaboração do livro de receitas. A etapa de revisão dos conteúdos matemáticos utiliza os livros de Thomson (2011): O Mistério dos números perdidos e Em busca dos números perdidos. Os livros permitem a interação dos alunos com a construção de jogos dinâmicos e a resolução de desafios matemáticos em sala de aula, o ir e vir ao longo da história, depende da decisão e do resultado que o leitor encontrou nos desafios. Além de promoverem de forma interdisciplinar o gosto pela leitura. Nesse universo de leitura e como forma de desmistificar o conteúdo de matemática também serão trabalhados os livros “O diabo dos números” de Hanz Enzensberger e “O Homem que calculava” de Malba Tahan, durante o desenvolvimento da pesquisa. Esses livros também podem ser trabalhados de forma interdisciplinar pelo professor de português, promovendo o estímulo a leitura. A Figura 1 apresenta os livros mencionados e que serão utilizados.

Figura 1- Livros utilizados na proposta do projeto

Fonte: Autor

Propõe-se a construção de um mascote ou logotipo para ser usado durante as atividades realizadas ao longo da pesquisa, como a confecção de um uniforme para ser vestido no refeitório, a produção de um livro de receitas, entre outros. Para a construção do mascote, o docente pode buscar no docente de Artes, a interdisciplinaridade para a execução dessa etapa. Na sequência das atividades serão escolhidas as receitas mais apropriadas e seguras para a prática no refeitório e cozinha da escola. Algumas receitas pré-definidas serão propostas aos alunos para que tomem suas decisões.

Os alunos farão uma pesquisa em um supermercado próximo a fim de evidenciarem vários produtos que podem ser usados na confecção das receitas para o projeto. Além disso, avaliarão os seus hábitos alimentares, a culinária típica da região, o cuidado com o orçamento familiar, buscando uma alimentação saudável e características por estação do ano. Para isso será preenchida uma planilha, conforme ilustra a Tabela 1, para levantamento orçamentário dos ingredientes para cada receita, incluindo valores e quantidades.

Produto	Marca	Peso Quantidade	Unidade de medida Kg,g,l,ml	R$ total	R$ unitário

Tabela 1 - Levantamento de preços e quantidades de itens para as receitas

Fonte: Próprio autor

Uma palestra com um profissional da área gastronômica abordando o tema “Boas Práticas na Culinária” será proposta. Dessa forma os alunos poderão compreender como preparar e armazenar os alimentos de forma adequada, higiênica e segura. Durante essa etapa, o docente pode pedir apoio ao docente de ciências, a integração do docente nessa etapa será fundamental para que os alunos percebam que os conteúdos perpassam entre si. Segundo Brasil (2004) Boas Práticas são hábitos de higiene que devem ser obedecidos pelos manipuladores desde a escolha e compra dos produtos a serem utilizados no preparo do alimento até a venda para o consumidor. O objetivo das Boas Práticas é evitar a ocorrência de doenças provocadas pelo consumo de alimentos contaminados. Além do tratamento de um tema transversal tão importante, os alunos terão a oportunidade de aprender como funciona toda a logística na área de alimentação, valorizando esse setor do mercado de trabalho.

Através de um cronograma pré-definido, as turmas terão acesso ao refeitório da escola, no mínimo 10 visitas, para o desenvolvimento de cada receita, inicialmente terão que utilizar os conhecimentos adquiridos em Boas Práticas. Com o desenvolvimento das receitas será possível o desenvolvimento do conceito de equivalência, MDC e MMC, onde o aluno a partir do seu protagonismo fará suas conjecturas e o docente mediando o conhecimento, vai promovendo esse compartilhamento de saberes. Com a atividade de pesagem e preparo das receitas, além dos dados extraídos pela Tabela 1 será possível explorar o sistema de numeração decimal. Durante a degustação a proposta é trabalhar o conceito de fração, seus tipos e operações.

A atividade terminará com a organização de um livro de receitas elaboradas pelos alunos, tendo no contexto atividades lúdicas envolvendo conteúdos trabalhados, além da participação da Mostra Cultural na escola e na Feira do Livro da FURG, onde os alunos terão a oportunidade de explanar ao público visitante a proposta do projeto.

3 | RESULTADOS OBTIDOS

O projeto foi desenvolvido com alunos dos 6º anos do ensino fundamental, distribuídos em 3 turmas (6º ano A, B e C) na Escola Municipal de Ensino Fundamental Porto Seguro, tendo dois alunos laudados, com Transtorno do Déficit de Atenção com hiperatividade (TDAH). Segundo a Associação Brasileira do Déficit de Atenção ABDA (2018) o TDAH é um transtorno neurobiológico, de causas genéticas, que aparece na infância e frequentemente acompanha o indivíduo por toda a sua vida. Ele se caracteriza por sintomas de desatenção, inquietude e impulsividade. Ele é chamado às vezes de DDA (Distúrbio do Déficit de Atenção).

A atividade da revisão de conteúdos a partir leitura dos livros do psicólogo inglês THOMSON (2011) transcorreu de forma muito prazerosa, dinâmica e divertida. Como os desafios do livro são fundamentados na decisão do leitor, as turmas precisaram trabalhar a questão da equipe, pois cada turma foi dividida em grupos. Cada grupo toma a sua decisão e num processo de argumentação, comunicação e autonomia, baseado em fatos, precisam decidir um único caminho a seguir na história do livro. Nesse momento percebem-se muitas das competências propostas pela BNCC acontecerem. A Figura 2 descreve o momento de interação das turmas durante as atividades de dinâmica com os livros. Observa-se que os alunos estão envolvidos e motivados a trabalhar. A sala de aula ganha uma nova configuração.

Figura 2 - Momento de interação durante a dinâmica do jogo do livro interativo

Fonte: Próprio autor

Outra etapa importante foi a escolha do mascote, representado pela Figura 3 e, receitas seguras e adequadas aos conteúdos matemáticos. Cada turma escolheu uma receita por estação do ano, já que o projeto atendeu 3 turmas, totalizamos 12 receitas. A Tabela 2 mostra as receitas escolhidas divididas por estação do ano e turma. Para a elaboração das receitas, a escola forneceu a maioria dos ingredientes. O restante foi fornecido pelo docente e alunos.

Figura 3 – O mascote do projeto

Fonte: Próprio autor

Turmas	Verão	Outono	Inverno	Primavera
A	Milk Shake	Cookies	Pão de queijo	Mousse de Maracujá
B	Suco de limão com mel e hortelã	Risoto com Arroz Arbóreo	Bolo de chocolate e menta	Gelatina fantasia
C	Salada de Frutas	Amanteigados	Chocolate quente	Pizza

Tabela 2 – Distribuição das receitas escolhidas por turma e estação

Fonte: Próprio autor

A palestra sobre Boas Práticas resultou na construção de um cartaz, representado pela Figura 4, para ser fixado nas salas de aula das turmas envolvidas e também no refeitório da escola.

Figura 4 - Cartaz ilustrativo com algumas práticas de higiene pessoal

Fonte: Acervo do autor

Na pesquisa com coleta de preços dos ingredientes que foram utilizados nas receitas, após a visita a um supermercado, utilizando a Tabela 1 e a pesagem dos ingredientes, levantaram-se alguns questionamentos. Para estimar os gastos, é necessário determinar as quantidades de alimentos que compõem a receita. É preciso identificar o preço por unidade de medida e também por unidade? Quais serão os produtos escolhidos para a confecção das receitas? Em que consiste uma alimentação saudável? Crianças e adultos podem usufruir das mesmas receitas? É possível pensar numa receita mais barata, sem esquecer a qualidade da alimentação saudável na receita? A relação dessa etapa do projeto com os conhecimentos matemáticos possibilitou vislumbrar os números decimais a partir do preço dos produtos e o custo por unidade.

Ao estimar quantidades dos ingredientes, para cada receita, relacionando quantas pessoas poderiam provar a gostosura foi possível perceber frações e seus significados. Os conceitos das operações fundamentais surgiram através da separação e quantidade dos ingredientes de cada receita. O conceito de equivalência, MDC e MMC, surgiu através da separação dos produtos e na preparação de um suco. Durante a execução das receitas no refeitório da escola e com isto compartilhar as delícias culinárias de forma que todos pudessem apreciar o seu sabor, deu significado ao conteúdo de frações. As Figuras 5 e 6 ilustram algumas etapas do preparo das receitas.

Figura 5 - Etapa de Boas práticas e separação de ingredientes

Fonte: Próprio autor

Figura 6 - Etapa de preparo e degustação - Habilidades de conhecimento acontecendo

Fonte: Próprio autor

O projeto encerrou com a organização do livro com as receitas desenvolvidas e com um espaço de atividades relacionando com os conteúdos desenvolvidos. A participação da Mostra Cultural da escola foi uma oportunidade que os alunos tiveram de expor o seu trabalho para a comunidade escolar, através da apresentação de um poster do projeto. Um momento muito rico de integração e empolgação, pois em grupos, eles relatavam aos visitantes a experiência que tiveram com as atividades e mostravam como os conteúdos matemáticos vistos, estavam presentes nas receitas, através de protótipos em EVA de pizzas e cookies. Também foi oportunizado, através da Secretaria Municipal de Educação/ Smed e do Núcleo de Bibliotecas a participação na Feira do Livro da Universidade Federal do Rio Grande, evidenciado pela Figura 7. No mesmo formato da Mostra cultural, o trabalho foi apresentado aos visitantes da Feira do Livro, mas agora representado por um pequeno grupo de alunos.

Figura 7 - Finalização do projeto com a produção do livro e participação da Feira do Livro

Fonte: Próprio autor

4 I CONCLUSÃO

Segundo Brasil (2018, p. 286) “...Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações”. Com a aplicação do projeto pode-se desenvolver com clareza os objetos e habilidades de conhecimento propostos pela BNCC, com relação a unidade temática Números para o 6º ano do Ensino Fundamental.

A proposta de uma sala de aula como metodologia ativa de aprendizagem trouxe como resultado alunos proativos, buscando através das práticas desenvolvidas tanto na atividade de leitura e interpretação dos livros, como também no preparo das receitas, um ambiente de interação criativo, um espaço amplo de comunicação e conhecimento, a proposta da criação do livro de receitas corroborou na valorização do senso estético de organização, além da possibilidade do aprofundamento da argumentação, da empatia, cooperação e do autoconhecimento, através da participação nos dois eventos propostos, a Mostra Cultural da escola e a Feira do Livro da Universidade Federal do Rio Grande.

> O papel do professor nos projetos inovadores é muito mais amplo e avançado: É o de desenhador de roteiros pessoais e grupais de aprendizagem, de mediador avançado que não está centrado só em transmitir informações de uma área específica. O professor é cada vez mais um coach, que orienta o aprendizado, uma pessoa que ajuda os estudantes a elaborarem seus projetos de aprendizagem. (Moran, 2017, p. 26)

A citação traz significado à proposta do projeto inovador, pois o lúdico serviu como ferramenta nesse processo de ensino e aprendizagem. A transformação do refeitório da escola em um grande laboratório permitiu que ideias criativas e delícias se transformassem em razão e proporcionalidade, MMC e MDC, números decimais e as embalagens permitiram que os estudantes vislumbrassem o aspecto nutricional de cada ingrediente e assim pudessem pensar em alimentos mais saudáveis, através da porcentagem dos seus ingredientes.

O projeto promoveu a reflexão, tanto para o estudante como para o docente, o significado do processo de ensino e aprendizagem, a possibilidade de transformar uma sala de aula tradicional num ambiente riquíssimo com a utilização de material concreto. Nesse cenário o docente transforma-se em mediador e o aluno em protagonista , tendo a oportunidade de desenvolver algumas competências específicas com relação a área de conhecimento “ Matemática” propostas por Brasil (2017) , onde percebe que a Matemática é uma ciência viva, contribuindo em várias áreas, por exemplo, a área gastronômica utilizada no projeto; a possibilidade de desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos que foram vistos durante todas as etapas do projeto; perceber que os conceitos matemáticos e as unidades temáticas estão relacionadas, inclusive a outras áreas de conhecimento, através da interdisciplinaridade; utilização de processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados; elaborar situações-problema em múltiplos contextos, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens, como a escolha e elaboração das receitas, a construção do livro de receitas e a participação de eventos; a interação com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento durante todo o projeto, reforçou a empatia e a cooperação, através do respeito pelo modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

REFERÊNCIAS

ABDA, A.B. de Déficit de A. **Transtorno do Déficit de Atenção com Hiperatividade**. Brasil: [s.n.], 2018. Disponível em: <https://tdah.org.br/sobre-tdah/o-que-e-tdah/>. Acesso em: 28 out. 2019.

BRASIL, Agência Nacional de Vigilância Sanitária / ANVISA. **Cartilha sobre Boas Práticas para Serviços de Alimentação**. Resolução-RDC nº 216/2004. Disponível em:<http://portal.anvisa.gov.br/documents//Cartilha+Boas+Praticas+para+Servicos+de+Alimentacao>

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** / **BNCC**. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>

HAETINGER, Max Günther. **Movimento**. 1 ed. Curitiba: IESDE Brasil, 2012.

MORAN, Jose. **Metodologias ativas e modelos híbridos na educação**. S. YAEGASHI e outros (Orgs). Novas Tecnologias Digitais: Reflexões sobre mediação, aprendizagem e desenvolvimento**.** Curitiba: CRV, p. 23-35, 2017.

PEREIRA, Z. T. G. & SILVA, D. Q. da. **Metodologia Ativa: Sala de Aula Invertida e suas Práticas na Educação Básica**. REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, v. 16, n. 4, p. 63-67, 2018.

SILVA, D. V da & HAETINGER, M. G. **Ludicidade e Psicomotricidade**. 1 ed. Curitiba: IESDE Brasil, 2013.

THOMSON, Michel. **O mistério dos números perdidos: uma aventura na matemática**. 2 ed. São Paulo: Melhoramentos, 2011.

THOMSON, Michel. **Em busca dos números perdidos: paradidático matemático**. 2 ed. São Paulo: Melhoramentos, 2011.

CAPÍTULO 22

VIVÊNCIAS MATEMÁTICAS: RECURSOS DIDÁTICOS NO ENSINO DE FRAÇÕES

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 21/07/2020

Mírian Silva Ferreira
Mestranda da Universidade Federal do Acre
Rio Branco – Acre
http://lattes.cnpq.br/0930766712861828

Jairo Alves Batalha
Docente do Instituto Federal do Acre
Rio Branco – Acre
http://lattes.cnpq.br/3760056337570705

Trabalho desenvolvido com a turma 6º ano, da Escola de Ensino Fundamental Absolon Moreira pelos alunos: Alice; Alisson; Amanda; Hilário; Ingrid; Isac; Lucas; Orlean; Tainá; Thabata; Vinícius Gabriel;

RESUMO: O ensino da matemática é uma abordagem contemporânea nas discussões de como ensinar, como aprender, reconhecida como campo de pesquisa e, até mesmo, uma disciplina. Nesse sentido, a pesquisa atual com a proposta de apresentar uma vivência no contexto de ensino de frações, juntamente com o conjunto dos números racionais, propondo a abordagem de um recurso didático elaborado que dialogue com o cotidiano do aluno para que o faça perceber as diversas representações de um determinado objeto e sua relação com a matemática. Este recurso didático se trata de uma atividade a ser realizada fora do contexto da sala de aula e do livro didático, com a utilização de elementos que chamam a atenção: a possibilidade de pintar as representações solicitadas; além disso, instiga a percepção de visualizar uma representação da imagem como parte fracionária e parte decimal em sua equivalência. Com essa concepção, os alunos se sentiram à vontade para partilhar suas opiniões, argumentar ideias para concluir as situações propostas, entendendo a parcela de conexão entre as representações matemáticas abordadas no recurso didático. Nesse sentido, concluímos que abordagens simples e diferenciais fazem a diferença em uma situação de ensino e aprendizagem para os alunos do 6º ano, fazendo-os ter uma visão ampla e inserida em suas práticas cotidianas. Mas, para isso, o professor deve, enquanto mediador do conhecimento matemático e o aluno, fomentar práticas pedagógicas que possam trazer estímulos diversos, propostas de intervenções, análises das situações-problemas e encaminhar os alunos ao mundo do questionamento e da autonomia.

PALAVRAS-CHAVE: Frações; Significar; Matemática; Recursos didáticos.

MATHEMATICAL EXPERIENCES: DIDACTIC RESOURCES IN THE TEACHING OF FRACTIONS

ABSTRACT: The teaching of mathematics is a contemporary approach in the discussions of how to teach, how to learn, and it is recognized as a field of research and also a school subject. Likewise, the current research aims at presenting an experience in the context of teaching fractions, along with the set of rational numbers, proposing the approach of an elaborate didactic resource

that dialogues with the daily life of the student so that it makes him/her realize the many representations of a given object and its relationship with mathematics. (This didactic resource is an activity to be performed outside the context of the classroom and the textbook, with the use of elements that draw attention to: the possibility of painting the requested representations; in addition, it instigates the perception of seeing a representation of the image as a fractional part and decimal part in its equivalence. With this conception, the students felt comfortable to share their opinions, to expose ideas to conclude the proposed situations, understanding the connection in the mathematical representations addressed in the didactic resource. In this sense, we conclude that simple and differential approaches make the difference in a teaching and learning environment for 6th grade students, making them have an expanded and deep view about their daily life. (But in order to achieve this, the teacher must, as a mediator of mathematical knowledge and alongside the student, promote pedagogical practices that can bring stimulation, proposals for interventions, analysis of problem situations and to direct students to the world of questioning and autonomy.
KEYWORDS: Fractions; Mean; Mathematics; Teaching resources.

1 I INTRODUÇÃO

As frações são definidas por aquelas que atuam na representação de uma parte do todo, ou seja, quando dividimos um objeto em uma determinada quantidade, cada uma delas é denominada uma fragmentação dele. Deve-se atentar que nem todo número escrito nesta forma será, por conseguinte, um número fracionário, pois esses são os que fazem parte do conjunto dos números racionais, resultante da reunião do conjunto dos números naturais, inteiros, e os da forma $\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros, com b ≠ 0 (fracionários). Por exemplo, se observarmos o cosseno de 30º (trinta graus) que equivale a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (raiz de três sobre dois), não será fracionário, pois o numerador não é um número inteiro, mesmo escrito na forma de fração.

Ademais, partindo de pressupostos que, além de distorções e desorganizações acometidas quando se trata de ensinar fração, muitas vezes é feita uma abordagem superficial sobre o tema. É desafiador lecionar matemática, pelo condicionamento, "de modo muito exemplar para dizer 'o que vale mais' no currículo, para dizer que 'ela sim, é difícil' e que é 'para poucos'. Com isso, ela estabelece uma hierarquia que a coloca num lugar muito privilegiado, um lugar que acaba influindo sobre quem irá adiante nos estudos, quem é 'inteligente' e quem está fora deste currículo tão restrito dos 'que sabem'" (KNIJNIK et al., 2013, p.83).

Assim, quando relacionamos à matemática este tema de frações, nota-se a aversão dos alunos a toda e qualquer situação que os envolvam, mesmo em simples representações. Muito embora autores, como Espinhosa (2009); acredita que as muitas dificuldades dos alunos podem estar vinculadas ao fato de os números fracionários, números decimais e porcentagens serem explorados em sala de aula separadamente, como se fossem conteúdos distintos e longínquos, fazendo uma desvinculação desses. Dessa forma, coube ao professor de Matemática buscar alternativas didáticas com um grupo de alunos mesclados em diferentes níveis de ensino de duas turmas de 6º ano, para desenvolver um trabalho durante uma tarde - depois de a temática já ser abordada em sala de aula - no qual os alunos sejam capazes de “demonstrar interesse para investigar, explorar e interpretar, em diferentes contextos do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, os conceitos e procedimentos matemáticos abordados neste ciclo”(BRASIL, Matemática, 1997, p.56). Frente a esse contexto, surge à necessidade identificar razões a essas disparidades, tendo como subsídios práticas metodológicas de uma didática matemática diferenciada, fomentadas em relação conceitual, usando abordagens que fazem parte do cotidiano do aluno.

2 | CAMINHOS METODOLÓGICOS, RESULTADOS E DISCUSSÕES

O trabalho foi realizado no 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Cruzeiro do Sul, Acre. Sendo a proposta reconhecida e estimulada a partir da grande procura diante de tão pouca compreensão por parte dos alunos. Utilizando o método descritivo, foi utilizada uma atividade que abordava os conhecimentos prévios adquiridos em sala de aula e/ou demais campos, pois há a “importância de o professor pesquisar juntamente com seus alunos os modos de pensar matematicamente, gestado em diferentes contextos culturais, com o intuito de estabelecer relações com o que é produzido dentro e fora da escola” (GIONGO; MUNHOZ, 2016, p. 83).

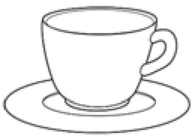
Com isso, sondou-se o livro didático da escola, de Souza (2015), na unidade que aborda os mesmos, na intenção de analisar assuntos pertinentes ao processo de ensino e aprendizagem como conceitos fracionários seriam trabalhados inicialmente. Então, pode-se fazer uma análise com os alunos e procurar alguma maneira de executar uma atividade que faça relação com objetos que eles conheçam e até utilizam em casa, ou similares, para representar tais conceitos e mostrar que há maneiras de escrever símbolos matemáticos sem ser tão exaustivo.

Desta forma, foi elaborado o recurso didático, de caráter diferencial, pois na atividade proposta para os alunos responderem na escola se utiliza de meios e materiais que nem sempre são estimulados e/ou oferecidos, pelas condições estruturais e até financeiras da instituição. Sem auxílio de materiais como calculadora, caderno de matemática, livro didático; eles podem usar lápis e lápis de cor que fora distribuído a eles nessa resolução. Será observado, assim, as metodologias por eles usadas, os conhecimentos técnicos ou induzidos, sua familiaridade com objetos do seu cotidiano, as maneiras de representar as frações por meio da pintura das figuras e a presença de suas facilidades ou dificuldades. Segue a atividade e o questionário que fora aplicado, respectivamente.

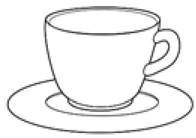
Você já observou que em nosso cotidiano utilizamos muitas frações? Seja para dividir o café, a comida, os cômodos da nossa casa... O que muitas vezes acontece: usamos conceitos matemáticos fracionários e nem paramos para fazer essa observação. Sendo assim, com conhecimentos adquiridos ao longo de toda sua vida, responda as questões abaixo.

1) Pinte nas figuras:

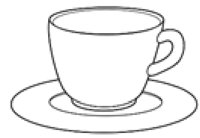
a) $\frac{1}{2}$ da xícara:



b) $\frac{3}{4}$ da xícara:

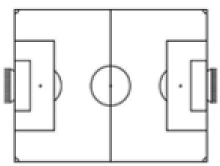


c) $\frac{1}{4}$ da xícara:

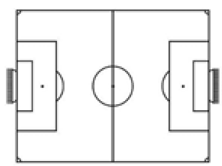


2) Agora, usando o campo de futebol, pinte:

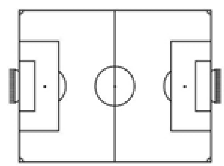
a) $\frac{3}{4}$ do campo:



b) $\frac{1}{2}$ da área do goleiro:

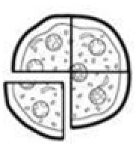


c) $\frac{1}{2}$ do campo:

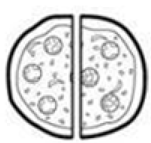


3) Desta vez, com as pizzas, faça as suas representações fracionárias e decimais:

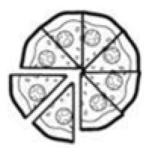
I.



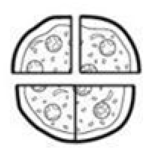
II.



III.



IV.



a) Você identificou alguma relação entre as pizzas? Quais?

Obs.: Material elaborado pela própria autora.

Questionário:

1) O que você achou da atividade realizada?

( ) Boa ( ) Muito boa ( ) Péssima ( ) Regular

2) Você acha que atividades deste tipo deveriam ser realizadas em sala de aula com frequência?

( ) Sim ( ) Não ( ) Talvez

3) Conseguiu assimilar os conceitos matemáticos com o seu cotidiano?

( )Sim ( )Não

4) Considera que dessa maneira você aprende mais? O que você mais gostou? Ou o que você não gostou?

Obs.: Material elaborado pela própria autora.

Após a atividade houve uma conversa informal com os alunos para que eles expusessem oralmente como a experiência pode ajudar a assimilar conceitos da matemática escolar com a matemática não escolar. Obtendo um diagnóstico por parte da fala deles, da sua vivência, externando o momento.

Com o desenvolvimento da atividade e a aplicação do questionário, pode-se ter uma visão ampla sobre como eles pensam e, ter a comprovação de que cada aluno tem sua particularidade e suas peculiaridades nas formas de aprender. Que a "visão de passividade e de falta de curiosidade" precisa ser mais alimentada à "inserção de novos recursos pedagógicos assim como a utilização do lúdico transformando o ensino de Matemática acessível e simples a todo e qualquer sujeito da aprendizagem" (BORGES, 2006, p. 2). Nunes et al. (2005) sugere que haja a conexão das frações com os demais conteúdos, procurando caminhos que façam relações com parte da vivência dos alunos, aproximando as ideias. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, p. 19), "a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos". E nessa mesma linha, Friedmann (1996), também considera que ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um "aprender" mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um 'aprender' que se esvazia em brincadeiras, mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade.

Há a importância de analisarmos que cada aluno terá sua particularidade em resolver a atividade por diversos fatores. Alguns irão tê-la como algo somatório em seu aprendizado por si só; outros precisam, para que haja compreensão, acompanhamento de materiais palpáveis; alguns outros nem a julgarão como um exercício plausível. Neste momento, a abordagem do professor na mediação é primordial. Contudo, um número maior deles já define como atividade somatória e diferenciada de uma maioria das atividades que eles estão frequentemente adaptados.

Por isso, com o questionário – respostas na respectiva ordem das perguntas - obtivemos resultados como:

a. Muito boa. Sim. Sim. Eu gostei mais porque fala sobre coisas que eu gosto, como o futebol, a pizza e a xícara;

b. Muito boa. Talvez. Sim. Sim, da pizza, da parte das frações;

c. Muito boa. Sim. Sim. Sim, tudo nada;

4 I CONCLUSÕES

A partir do desenvolvimento desta prática metodológica diferenciada com o Ensino Fundamental, percebeu-se que muitas das dificuldades apresentadas pelos alunos são frutos de um ensino que não estabelece conexões não só com outros conteúdos matemáticos, mas também interações com o mundo, uma vez que a atividade proporcionou fazer relações com peças tradicionais, envolvendo materiais conhecidos casualmente com a matemática praticada todos os dias em classe, além de proporcionar um momento mais descontraído, fora do contexto de sala de aula, expor argumentos aos colegas e apresentar caminhos para resolver as situações. Para uma parcela significativa de alunos, a aprendizagem matemática é momentânea e mecânica, mas as propostas escolares nesta não devem ser vistas como um "olhar para coisas prontas e definitivas" (BRASIL, 1997, p. 19), e sim, a busca por um processo construtor, motivador e desafiador, servindo como ponte para transformação e compreensão do cotidiano do aluno. Por isso Meier (2011, p.12) relata que: "cabe, também ao professor a tarefa de buscar alternativas didáticas para desenvolver um trabalho no qual o aluno seja capaz de demonstrar interesse para investigar".

É necessário que seja disponibilizando ao aluno momentos e experiências que lhe possibilitem observar os diferentes significados, identificando a fração como uma representação associada a diversos significados dentro do conjunto dos números racionais, como: razão, quociente, relação parte-todo, porcentagem, entre outros, observando quão importante é a não-fragmentação e desorganização de temas e conteúdos que não só podem, mas devem ser ensinados de uma maneira sequencial e relacionadas com elas mesmas.

Contudo, pode-se propiciar ao aluno uma visão mais ampla dos conteúdos que são abordados; pode-se e devem-se dar meios aos professores, instigar práticas que evolucionem e, assim, fazer acontecer o processo de ensino-aprendizagem de maneira processual, significativa e viva, mostrando aos alunos que a hierarquização e a matéria dita “para poucos” é somente uma linha de pensamento equivocada, pois cada um, às suas maneiras, com as abordagens e mecanismos imprescindíveis, aprendem, ensinam e, quando conseguem compreender os significados e relações reais, também aprendem a ensinar.

REFERÊNCIAS

BORGES, Tatiana de Moura. **A percepção de futuros professores da matemática quanto ao uso de recursos lúdicos no ensino**. Brasília: Universidade Católica de Brasília, 2006. Disponível em:<http://repositorio.ucb.br/jspui/bitstream/10869/1810/1/Tatiana%20de%20Moura%20Borges.pdf>. Acesso em: 12 set. 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática**/ Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEC, 1997.

ESPINHOSA, Carlos Eduardo. **Números decimais: Dificuldades e propostas para o ensino e o aprendizado de alunos de 5ª e 6ª séries.** Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

FRIEDMANN, Adriana. **Brincar, crescer e aprender: o resgate do jogo infantil.** São Paulo: Moderna, 1996.

GIONGO, Ieda Maria; MUNHOZ, Angélica Vier (Org.). **Observatório da educação II: experiências curriculares no ensino de matemática na escola básica.** Lajeado: Ed. Evangraf, 2016.

KNIJNIK, Gelsa *et al*. **Etnomatemática em movimento**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

MEIER, Melissa. **Modelagem Geométrica e o Desenvolvimento do Pensamento Matemático no Ensino Fundamental**. 2012. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2012.

NUNES, Terezinha *et al*. **Educação matemática 1: números e operações numéricas.** São Paulo: Cortez, 2005.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Números Fracionários.** Escola Kids, UOL. Disponível em: <http://escolakids.uol.com.br/numeros-fracionarios.htm.> Acesso em: 12 set. 2017.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Vontade de saber matemática**, 6º ano / Joamir Roberto de Souza, Patrícia Rosana Moreno Pataro. – 3. ed. – São Paulo: FTD, 2015.

CAPÍTULO 23

ENSINO DE MATEMÁTICA: SISTEMA NUMERICO EGÍPCIO POR MEIO DE UM CENÁRIO

Data de aceite: 01/10/2020

Jeizi Ferreira Santos
Universidade do Estado do Pará – UEPA. Moju – Pará.
http://lattes.cnpq.br/9365894413870377

Bruno Sebastião Rodrigues da Costa
Universidade do Estado do Pará – UEPA. Moju – Pará.
http://lattes.cnpq.br/4681222044310540

Eusom Passos Lima
Universidade do Estado do Pará – UEPA. Belém – Pará.
http://lattes.cnpq.br/8868675030514401

Izaias Silva Rodrigues
Universidade do Estado do Pará – UEPA. Moju – Pará.
http://lattes.cnpq.br/4212691573503428

Karoline de Sarges Fonseca
Universidade do Estado do Pará – UEPA. Moju – Pará.
http://lattes.cnpq.br/3912463550379632

Larisse Lorrane Monteiro Moraes
Universidade do Estado do Pará – UEPA. Moju – Pará.
http://lattes.cnpq.br/0559548589731720

Maiky Bailão Sardinha
Universidade do Estado do Pará – UEPA. Moju – Pará.
http://lattes.cnpq.br/3472613801791332

Marcos Vinicius Silva Alves
Universidade do Estado do Pará – UEPA. Moju – Pará.
http://lattes.cnpq.br/8003370065168681

Otavio Junior Reis de Moraes
Universidade Federal do Pará – UFPA. Belém – Pará.
http://lattes.cnpq.br/7308657487944303

Pedro Augusto Lopes Rosa
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Pará – IFPA. Paragominas – Pará.
http://lattes.cnpq.br/6742574084828740

Rosana Pinheiro Tavares
Universidade do Estado do Pará – UEPA. Moju – Pará.
http://lattes.cnpq.br/3349298970863375

Sebastião Erik Pinheiro e Pinheiro
Universidade do Estado do Pará – UEPA. Moju – Pará.
http://lattes.cnpq.br/6374056504714343

RESUMO: O presente trabalho relata a vivência dos discentes do Curso de Licenciatura Plena em Matemática – UEPA (Campus – Moju), na disciplina História da Matemática. Onde procurou – se por meio da utilização de um cenário mostrar aos alunos o sistema de numeração egípcio, desta forma fez-se uso de uma metodologia alternativa baseada na evolução numérica ocorrida no antigo Egito mostrada através de cartazes e jornal dividida em duas etapas, sendo no primeiro momento mostrado o

contexto histórico do povo egípcio detalhando sua necessidade de contar, mostrando assim a evolução de seu sistema de numeração. Já no segundo momento os alunos tinham a possibilidade de criar texto e imagens de acordo com que foi mostrado. Objetivando assim possibilitar ao alunado uma experiência com a História da Matemática por meio de evidencias revelada por egiptólogos. O público alvo foi uma turma de 6º ano b, da escola Lauro Sodré, localizada no município de Moju/PA. Diante das estratégias, serão mostrados os resultados, onde evidenciou a aceitação dos alunos pela metodologia e aprendizagem do conteúdo abordado. Sendo um relato de experiência qualitativo experimental com embasamento teórico nos seguintes autores Sautoy; Schmedt; pretto e Leivas (2016); Lima; Lima e Silva (2016); PCN (1998); Lima; Araújo e Daude (2017); Gasperi e Pacheco (????); Silva (2010); Minayo (2001); Gomes (2001); Santos; França e Santos (2007) promovendo uma discursão das ideias defendidas pelos autores.
PALAVRAS CHAVE: Egito; Sistema Numérico; Metodologia; Cenário com Cartazes; Jornais.

MATHEMATICS TEACHING: EGYPTIAN NUMERICAL SYSTEM THROUGH A SCENARIO

ABSTRACT: The e present work reports the experience of the students of the Full Degree Course in Mathematics - UEPA (Campus - Moju), in the discipline History of Mathematics. Where it was sought through the use of a scenario to show students the Egyptian numbering system, in this way an alternative methodology based on the numerical evolution occurred in ancient Egypt was shown through posters and a newspaper divided in two stages, being in the first moment, the historical context of the Egyptian people was shown, detailing their need to count, thus showing the evolution of their numbering system. In the second moment, students had the possibility to create text and images according to what was shown. Thus aiming to enable students to experience the History of Mathematics through evidence revealed by Egyptologists. The target audience was a class of 6th grade b, from the Lauro Sodré school, located in the municipality of Moju / PA. In view of the strategies, the results will be shown, showing the students' acceptance of the methodology and learning of the content covered. Being a report of qualitative experimental experience with theoretical basis in the following authors Sautoy; Schmedt; pretto and Leivas (2016); Lime; Lima and Silva (2016); PCN (1998); Lime; Araújo and Daude (2017); Gasperi and Pacheco (????); Silva (2010); Minayo (2001); Gomes (2001); Santos; França and Santos (2007) promoting a discussion of the ideas defended by the authors.
KEYWORDS: Egypt; Numerical System; Methodology; Scenery with Posters; Newspapers.

1 | INTRODUÇÃO

Sendo o homem percussor do processo de investigação dos padrões que constituem o universo, a matemática passou por inúmeras evoluções desde seus primeiros indícios, apontado por Schmedt; Pretto; Leivas (2016) "como toda ciência, a matemática tem um processo histórico" os sistemas numéricos, fórmulas e padrões que conhecemos hoje tiveram uma evolução histórica que na grande maioria dos casos não é apontada em sala de aula. Schmedt; Pretto; Leivas (2016) evidenciam que quando a história da matemática é bem trabalhada em sala de aulas ela produz o processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos envolvendo o educando por ser uma forma diversificada que faz referência ao contexto histórico que deu início a tudo, processo este evidenciado em nosso relato de experiência, sendo vivenciado em nossa aula prática desenvolvida na escola municipal Lauro Sodré, localizada na cidade Moju/Pa com a turma de 6° ano b, turno tarde, mudando assim a forma como a matemática é apresentada ao aluno atualmente que é sem a referência de sua história. Sendo uma pesquisa de cunho qualitativo que é definida como:

> A abordagem qualitativa trabalha com valores, crenças, representações, hábitos, atitudes e opiniões. Ela aprofunda a complexidade de fenômenos, fatos e processos; passa pelo observável e vai além dele ao estabelecer inferências e atribuir significados ao comportamento. (SILVA, 2010, p. 6)

O ponto fundamental estar no investigador que busca coletar dados e o que ocorre na coleta dos mesmos relacionando-os com sua teoria de embasamento, assim o mesmo faz uma investigação por meio da observação do processo apresentado e os significados produzidos nos alunos. A matemática é hoje muito rejeitada em sala de aula por ser apresenta como uma ciência mecanicista, no entanto, a utilização da história da matemática pode ser vista como uma forma de motivação ao aluno por ser uma investigação que mostra a evolução de como ocorreu o surgimento dos conceitos que conhecemos aprimorados hoje, levando o aluno a ter outra visão referente à matemática, tirando aquela visão de a matemática ser apenas cálculos e números. Começou a se falar em matemática como disciplina no Brasil somente em 1929, denominada como ciência da repetição, onde a repetição dos procedimentos levaria ao conhecimento, atualmente a aprendizagem em matemática está ligada a compreensão, e seu significado para o aluno resultado das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas aponta Schmedt; Pretto; Leivas (2016). Sendo fundamental ao aluno compreender onde e como aplicá-la, necessitando assim conhecer o que lhe deu início e que necessidade seu surgimento buscou suprir.

Visto que:

> Outra forma de participação da história, manifestada na proposta dos PCN para o ensino da matemática, diz respeito ao uso de problemas históricos, pois considera que os conceitos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, situação em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las. (SCHMEDT; PRETTO; LEIVAS, 2016, p.45)

A base da história da matemática foi a busca por investigações em desenvolver estratégias de soluções para problemas práticos como ressalta o PCN:

> A própria história da matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem pratica (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigação internas à própria Matemática (BRASIL, 1998, p. 40)

A proposta de envolver o educando em um cenário buscou diferenciar o modo de apresentar os conteúdos matemáticos aos educandos, mostrando assim um recurso para o ensino de matemática evidenciando o uso da história da matemática. Pelas colocações da importância da história da matemática no contexto escolar, especificamente em sala de aula, propusemos divulgar neste relato, a nossa experiência com a utilização da história da matemática, enfatizando a visão do docente e discente em todo esse processo.

2 | REFERENCIAL TEÓRICO

O desenvolvimento de nossa pesquisa teve como base teórica: Sautoy; Schmedt; Pretto e Leivas (2016); PCN (1998); Lima; Lima e Silva (2016); Lima; Araújo e Daude (2017); Gasperi e Pacheco (????); Silva (2010); Minayo (2001); Gomes (2001); Santos; França e Santos (2007).

Segundo Lima; Lima e Silva (2016) o bom profissional é o qual amplia os caminhos necessários para facilitar a aprendizagem do aluno, desenvolvendo formas e métodos para ampliar a sua base metodológica sempre buscando inovações e metodologias diferenciadas para repassar os conteúdos aos alunos, não se restringindo a uma única forma de ensinar e assim deixando perceptível ao alunado que a matemática não é uma disciplina finalizada, contudo a mesma pode ser aperfeiçoada com novos métodos facilitadores para compreensão dos mesmos, tornando a cada dia sua aula criativa e interessante e assim fazendo com que os discentes sejam mais participativos.

Segundo Lima; Araújo e Daude (2017) a maneira em que o professor vê a matemática pode influenciar diretamente em sua prática de ensino, pois é o docente quem mostra os caminhos a serem percorridos para seus alunos, sendo assim se o aluno deparar-se com um professor com uma ideia pronta e acabada, possivelmente o discente terá a mesma visão da disciplina, mas se o mesmo tem um mediador com uma matemática diferenciada construída dia após dia, tendo a possibilidade de ver a matemática presente em seu dia a dia certamente o mesmo ficará motivado e sentirá interesse em aprender os conteúdos. Sendo assim utilizando a história da matemática como uma metodologia de ensino mostrará ao aluno a evolução que a matemática teve ao longo da história e assim tornando claro aos alunos que os conceitos matemáticos que conhecemos nos dias atuais não foram criados apenas por um estudioso, mas por vários estudiosos deixando perceptível que a disciplina não é concluída, mas que a cada ano ela vai sendo aprimorada.

O uso da história da matemática na sala de aula tornou-se uma metodologia eficaz, pois quando é repassada de uma maneira correta e sendo acrescentada com outras metodologias diferenciadas fugindo do tradicionalismo e quando o educador mostra ao alunado que a matemática é uma disciplina que vem sendo aperfeiçoado no decorrer dos anos por vários matemáticos, os discentes se sente na liberdade de aprimorar seus conhecimentos nos conteúdos assimilados e sentem-se mais motivados para aprender a matemática. Deste modo afirma Schmedt; Pretto e Leivas (2016) que a matemática pode ser apresentada ao educando como um instrumento construído historicamente e que está permanentemente em transformação, facilitando assim a compreensão dos conceitos abstratos que fundamentam o ensino da matemática atualmente.

Gasperi e Pacheco (????) denominam que a matemática isolada das demais disciplinas torna-se repetitiva com pouco exercício contextualizado e quase nem uma modelagem. Com isso percebesse que a história da matemática tem grande importância nessa ligação das disciplinas e na compreensão de como tudo começou, já que o ensino dessa matemática consiste em permitir ao endivido conseguir por si mesmo gerencia sua própria vida pessoal e profissional, tomando decisões e enfrentando diversos problemas complexos que aparecerão no decorrer de sua vida. A história da matemática pode estar presente em diversos momentos na sala de aula substituindo os exercícios repetitivos e a memorização de fórmulas, criando uma forma de ver e entender a matemática deixando-a mais agradável, disciplinar, criativa e humanizada. Por meio da história pode-se verificar que a matemática é uma construção humana desenvolvida ao logo da história, que nasce e vai se aperfeiçoando conforme as necessidades do homem, fazendo com que compreendêssemos as culturas e os homens envolvidos nessas descobertas. Como enfatizado em nossas práticas trabalhando o sistema de numeração egípcio evidenciando os processos que lhe deram início e suas aplicações no decorrer desta civilização.

O matemático Marcus du Sautoy nos leva a uma viagem perpassando pelo antigo Egito mostra-nos o motivo que deu início na busca pela matemática que foi o sentido de compreender os padrões e sequências do universo, sendo o homem o mentor desse novo universo matemático tendo o rio Nilo um papel importante em todo esse processo, sendo suas cheias denominadas como início de cada ano necessitando os egípcios fazer a contagem entre os dias decorrentes entre duas cheias do Nilo. Assim se começa a utilizar a matemática empiricamente tendo a partir de então passado por inúmeras evoluções detalhadas em nossos procedimentos metodológicos.

A formação de professores tem um papel importante nesse contexto de utilização da história para o aprendizado, mas muitos professores não tiverem essa disciplina em seu curso superior por isso à importância da formação continuada, porque não basta somente transmitir conteúdo pensando que está expandindo o conhecimento do aluno para diversas áreas. Precisa-se muito mais, pois a matemática está presente em muitas outras ciências.

Segundo Santos; França e Santos (2007) durante um longo período da história o conhecimento era repassado de modo informal, onde as pessoas aprendiam conforme os costumes de suas origens e ficavam limitados somente a esses conhecimentos, sem oportunidade de avanços científicos e intelectuais nesse período, mas a cada ano que se passava e com o aumento dos povos houve a necessidade de aprimorar os conhecimentos matemáticos. Entretanto, nos dias atuais a matemática não é mostrada de maneira que possa fazer o aluno sentir interesse em aprendê-la onde por falta de estrutura e incentivos, muitos professores não se atentam em inovar o ensino mostrando aos discentes a importância da matemática no dia a dia. O que se espera do poder público é incentivo para motivar os educadores em desenvolver competências para formar crianças autônomas, capazes de desenvolver diferentes formas para a melhor compreensão da disciplina elaborando ideias para resolver problemas novos.

Porém, não se espera melhora somente por parte do professor a escola também deve estar em constante evolução para atuar nesse mundo moderno, proporcionando aos alunos a aprendizagem para adquirir habilidades indispensáveis para que seu desempenho seja de acordo com o avanço da tecnologia. Sendo assim o mediador não deve desconsiderar o conhecimento que o aluno já traz de seu cotidiano, para trabalhar em cima dessas informações que o discente já tem.

3 | METODOS E RESULTADOS

Fizemos uso do conceito de metodologia denominado por Minayo (2002) “Entendemos por metodologia o caminho do pensamento e a prática exercida na abordagem da realidade. Neste sentido, a metodologia ocupa um lugar central no interior das teorias e está sempre referida a elas”. Desenvolvendo assim uma pesquisa qualitativa experimental, evidenciado uma estratégia de ensino que buscou envolver o educando como um todo no processo de ensino e aprendizagem. Evidenciando Minayo (2002) temos que:

> A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. (MINAYO, 2002, p. 21-22)

Como retrata a autora uma pesquisa qualitativa busca compreender esses processos e significados pertencentes a uma pesquisa, relatar as inquietações, conclusões despertadas nos alunos. Os momentos de desenvolvimento das atividades buscaram explicar os significados do surgimento da numeração egípcia, ou seja, em que contexto e, porque foram criados, pois, assim os alunos compreendem o papel da história da matemática nesse processo evolutivo dos sistemas de numeração.

Nossa proposta em construir um cenário evidenciando o sistema numérico egípcio e as relações que deu início ao mesmo buscou exatamente a particularidade de cada aluno a respeito do assunto abordado, tendo em vista que o principal objetivo foi trabalhar a história da matemática de um modo a qual não seja cansativo ao aluno e nem ao professor, mostrar a evolução matemática que ocorreu na civilização egípcia por meio de um cenário e com isso revelar-se como eram as coisas nesse período que deu início a matemática desenvolvida pelos egípcios. Mostrar imagens da época e as evoluções que ocorreram no campo da matemática para envolver ao educando e faze-lo conhecer esse processo histórico da matemática.

Figura 01: Desenvolvimento da atividade.

Fonte: Os autores

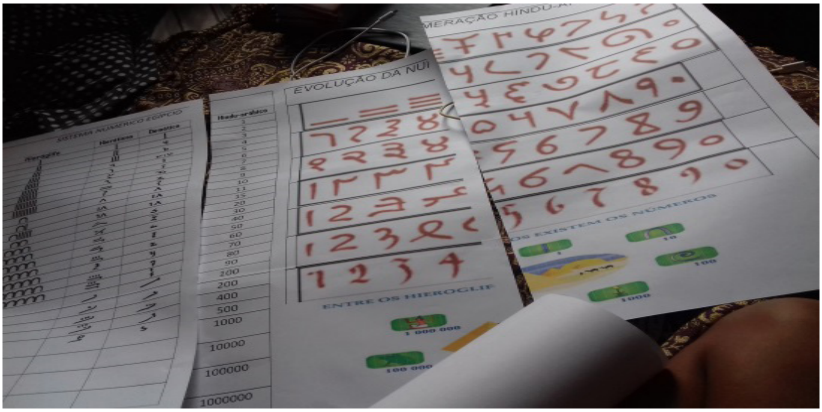


Figura 02: Produção da atividade

Fonte: Os autores

De modo simples e com cartazes, jornais e um suporte pedestal, desenvolvemos nossa oficina em duas aulas, onde no primeiro momento mostramos o processo evolutivo histórico por meio dos cartazes com o contexto da época sendo as três formas de escrita do sistema numérico egípcio, a hieroglífica, a hierática e a demótica evidenciada no jornal.

Esse primeiro momento consistiu em explicar com o auxílio dos cartazes a inquietação que levou os egípcios a elaborar um sistema de numeração e as evoluções que o mesmo sofreu no decorrer dos anos. Inquietação esta que teve início na contagem dos dias decorrentes entre duas cheias do rio Nilo, que foi um fator fundamental nesse processo pelo fato de o período de suas cheias ter sido considerado como o início de cada ano para os egípcios. Nesse momento mostramos nos cartazes e imagens extraídas da internet de como eram as relações de trabalho e a importância do Nilo nessa época, evoluindo um pouco mais mostramos os registros em papiros, documentos estes com tamanhos de 5 m de comprimento e 33 cm de larguras, as únicas comprovações registradas que temos dos problemas matemáticos e escrita desenvolvidas pelos egípcios.

Nesse momento apresentamos aos alunos o contexto histórico e a forma de escrita hierática, sendo necessária a utilização de vários símbolos para a representação dos números não pertencentes à base dez, apresentamos a eles todos os símbolos que representavam os números na base dez. Como método avaliativo referente à assimilação do conteúdo desenvolveu-se o segundo momento.

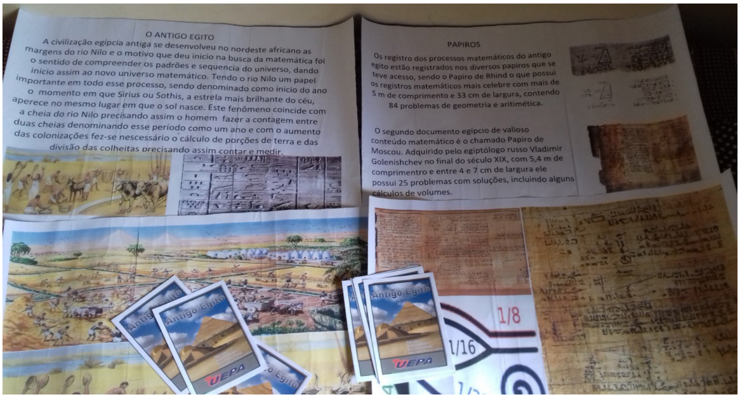


Figura 03: Desenvolvimento da atividade

Fonte: Os autores

Buscando envolver o educando no processo de ensino fizemos uso do jornal desenvolvendo a atividade presente no mesmo. Jornal este produzido pelos autores contendo todas as formas de escritas do antigo Egito e uma lista de atividade na numeração egípcia. Sendo a escrita hieroglífica a primeira forma de escrita utilizada, a hierática sendo a segunda e a demótica foi uma evolução da escrita hierática, sendo enfatizado apenas o uso da escrita hieroglífica.

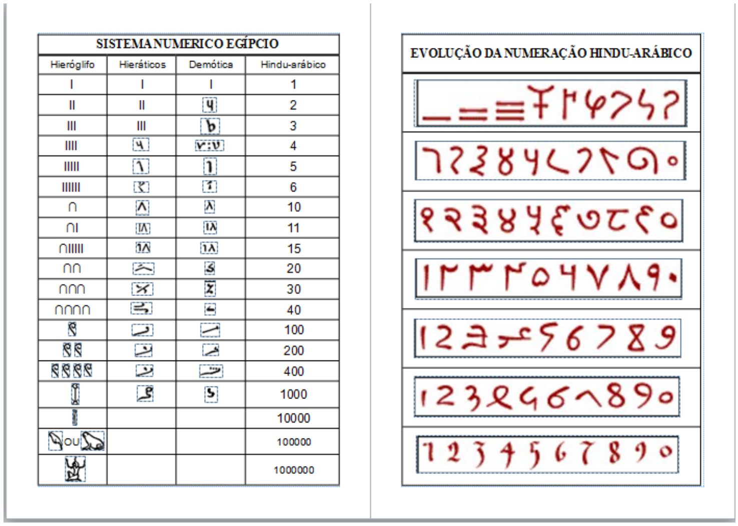


Figura 04: jornal

Fonte: Internet

Esse momento foi marcado pela participação dos educandos na aula, que após a exposição das formas de utilização dos números pelos egípcios e como proceder no processo de soma, tendo em vista que eram utilizados vários símbolos diferentes, abrimos espaço para os alunos desenvolverem sozinhos algumas representações e somas. De modo oral perguntamos a data de nascimento dos alunos e pedimos a alguns para dirigirem-se ao quadro e representarem a mesma no sistema de numeração egípcio, tarefa aceita por diversos alunos que se sentiram motivados e compreenderam a representação egípcia efetuando também a operação soma com números representados no sistema de numeração egípcio, tendo em mente que a operação base dos egípcios era a soma. Tendo também um cartaz apenas com atividades.

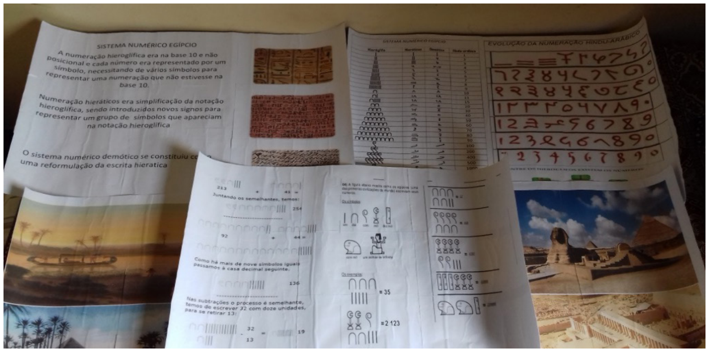


Figura 05: Desenvolvimento da atividade

Fonte: Os autores

No segundo momento foram desenvolvidas diversas representações feitas pelos alunos no quadro no sistema numérico egípcio, finalizando com um questionário buscando a opinião do alunado a respeito do método a qual foi abordado o assunto, tendo um resultado satisfatório. Todos os 16 alunos participantes da oficina responderam ao questionário sendo o resultado apresentado abaixo.

Resposta	Questões					
	01. Você gostou de aprender matemática através da história da matemática?		*02. Você conseguiu entender o sistema de numeração egípcio através da história da matemática?*		*03. Você prefere ver o sistema de numeração egípcio através dos métodos que utilizamos ou através do método tradicional? Se for através do nosso método responda sim ou se for através do método tradicional responda não.*	
	fr.	%	fr.	%	fr.	%
Sim	15	93,75	13	81,25	14	87,5
Não	1	6,25	3	18,75	2	12,5
Total	16	100	16	100	16	100

Tabela 01: Dados do Questionário

Fonte: Os autores.

Na primeira pergunta do questionário percebeu–se que a maioria dos alunos respondeu que sim 93,79% então isso evidencia o que foi colocado pelos teóricos de embasamento de nosso trabalho, que quando bem trabalhada, a história da matemática produz a aprendizagem. Já na segunda pergunta que buscava o esclarecimento se o aluno havia entendido o assunto apenas 18,75% tiveram dificuldade em compreender o assunto abordado, isso mostra que diante de uma metodologia diferenciada alguns alunos sentem dificuldade, no entanto, há um índice maior de compreensão por parte do aluno sendo 81,25% os que conseguiram compreender o conteúdo. Na terceira pergunta que buscava investigar a preferência do aluno pelos métodos de ensino, nosso método teve um bom índice de aceitação, 87,5% disse gostar desse modo que buscou envolver o aluno no contexto do assunto abordado e também não tratou o mesmo como um sujeito passivo que só irá ouvir assunto, mostrando que ele também tem sua importância e participação no processo de aprendizagem desde que sua curiosidade seja despertada e trabalhada de maneira produtiva.

Gomes (2002) ressalta que:

> Quando chegamos à fase de análise de dados, podemos pensar que estamos no final da pesquisa. No entanto, podemos estar enganados porque essa fase depende de outras que a precedem. Às vezes, nossos dados não são suficientes para estabelecermos conclusões e, em decorrência disso, devemos retomar à fase de coleta de dados para suplementarmos as informações que nos faltam. Outras vezes, podemos dispor dos dados, mas o problema da pesquisa, os objetivos e as hipóteses e/ou questões não estão claramente definidas. Nesse caso, devemos redefinir esses aspectos da fase exploratória da pesquisa. Também pode acontecer que não tenhamos uma fundamentação teórica bem estruturada e, devido a isso, toma-se necessário reestudarmos os conhecimentos que embasam nossa pesquisa. Suponhamos que as situações mencionadas acima não aconteceram ou foram resolvidas. Isso ocorrendo, estaremos realmente na fase de análise. (GOMES, 2002, p. 67-68)

O autor mostra a importância do conjunto final de análise de dados que envolvem toda a conjuntura do trabalho em análise para então serem finalizado e expor os resultados, sendo assim é fundamental ao autor fazer uma correção de sua pesquisa para então divulgar os resultados. Em nosso relato de experiência utilizamos um questionário em busca de obter a opinião dos alunos mediante ao assunto trabalhado para então concluirmos quais os efeitos surtidos nos alunos. E consequentemente os pontos positivos e negativos de nossa metodologia de ensino.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio da análise das respostas obtidas nos questionários conclui-se que o objetivo de nossa pratica foi atingido, por meio dos cartazes e jornal trabalhamos o sistema numérico egípcio de maneira diferenciada e obtivemos satisfação por parte dos alunos com nosso método de ensino, tendo uma grande atração dos mesmos diante de nossa aula, onde propusemos uma metodologia que despertou a curiosidade dos discentes tornando-os sujeitos participativos do processo.

Como evidenciado pelos teóricos de nosso relato de experiência, metodologias que utilizam a história da matemática quando bem trabalhadas produzem o conhecimento e é fundamental ao educando conhecer as inquietações que deram início aos conceitos matemáticos aprimorados que conhecemos hoje, pois assim o conteúdo ganha uma significação maior ao alunado.

Sendo nosso resultado obtido no questionário, tendo cada uma das três perguntas um percentual acima de 50% de aceitação da metodologia utilizada comprovando assim que o trabalho desenvolvido nesta turma foi satisfatório podendo ser difundido como experimentação.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

GASPERI, W. N .H; PACHECO, E. R. **A História da Matemática como instrumento para a interdisciplinaridade na Educação Básica.** Disponível em < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/701-4.pdf > .Acesso: 25 de fev. 2018.

GOMES, R. A análise de dados em pesquisa qualitativa. In: MINAYO, M. C. S. (Org). **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 21. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002. p. 67-80 (Coleção Temas Sociais).

LIMA, L. V.; ARAUJO, M. S.; DAUDE, R. B. História da Matemática: um recurso metodológico para a educação b**ásica.** In: ANAIS DA ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2017, Goiás. **Anais eletrônicos** ... Goiás: UEG, 2017. Disponível em: < https://www.anais.ueg.br/index.php/eem/article/view/9676>. Acesso em: 04 de jul. 2020

LIMA, A. A de; LIMA, R. R.C; SILVA, R. C. da. A importância do trabalho diferenciado dentro da disciplina de matemática no ensino fundamental**. Revista de Pesquisa Interdisciplinar**, Cajazeiras, v. 1, Ed. Especial, p. 564–572, set/dez. de 2016. Disponível em: < http://revistas.ufcg.edu.br/cfp/index.php/pesquisainterdisciplinar/article/view/122/120>. Acesso em: 05 de jul. 2020.

MINAYO, M. C. S. Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. In: ______. **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 21. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2002. cap. 1, p. 7-30 (Coleção Temas Sociais).

SAUTOY, M. du. **A história da matemática:** a linguagem do universo. The open university.

SCHMIDT, G. M; PRETTO, Valdir.; LEIVAS, J. C. P. História da Matemática como recurso didático-pedagógico para conceitos geométricos. **Caderno Pedagógico**, Lajeado, v.13, n.1, p.41-57, 2016. Disponível em: < http://www.univates.br/revistas/index.php/cadped/article/viewFile/986/974>. Acesso em: 04 de jul. 2020.

SILVA, G. C. R. F. O Método Científico na Psicologia: Abordagem Qualitativa e Quantitativa. **O Portal dos Psicólogos**, 2010. Disponível em : < https://www.psicologia.pt/artigos/textos/A0539.pdf>. Acesso em: 05 de jul. 2020.

CAPÍTULO 24

PROCESSOS (NÃO) HEGEMÔNICOS DE MATEMATIZAR: ANÁLISE DE LIVROS (PARA) DIDÁTICOS SOBRE O CÁLCULO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS

Data de aceite: 01/10/2020
Data de submissão: 17/07/2020

Weverton Augusto da Vitória
EEEFM Doutor José Moysés
Cariacica – Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/7392626035341009

Rodolfo Chaves
Instituto Federal do Espírito Santo
Vitória – Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/3213154166347387

Originalmente publicado na VI Escola de Inverno em Educação Matemática na UFSM – Santa Maria/RS.

RESUMO: O objetivo deste texto é divulgar um recorte de nosso TCC na qual analisamos obras, dentre elas livros (para)didáticos do Ensino Médio, disponíveis no Laboratório de Práticas de Ensino Integrado (LPEI), da Licenciatura em Matemática (Limat), do Instituto Federal do Espírito Santo, *campus* Vitória, com vistas à comparar métodos hegemônicos e não hegemônicos de matematizar. Analisamos 4 livros didáticos (processos hegemônicos de matematizar) e 6 paradidáticos (processos não hegemônicos de matematizar), porém neste texto exibiremos somente a análise de 2 livros didáticos e 2 paradidáticos. A metodologia adotada é bibliográfica e a finalidade foi discutir, analisar e apresentar possíveis vieses entre processos (não) hegemônicos, de cálculo de área, com um foco socioambiental. Nossa pesquisa possuiu uma abordagem qualitativa e participativa, nos moldes de um estudo de caso, tendo como atores, licenciandos em Matemática, integrantes do Grupo de Estudos e Pesquisas em Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática (Gepemem). O cenário constituiu-se a partir de oficinas e plenárias do Gepemem durante 2014. Para atingirmos nosso objetivo, discutimos obras que comparam os cálculos de modelos clássicos de áreas de polígonos com os métodos de esquadrejamento e cubação utilizados por agricultores, assim como em *Exclusão e Resistência: Educação Matemática e legitimidade cultural*, de Gelsa Knijnik. A partir da metodologia de intervenção do Gepemem, elaboramos e testamos um material didático-pedagógico com os atores. Como resultados dessa dinâmica, percebemos que os atores visualizaram várias maneiras de interpretar as propostas, produzindo assim vários e diferentes significados, principalmente quanto ao uso do *software* GeoGebra que trouxe-lhes confiabilidade, mesmo que o uso do *software* proporcionara apenas uma constatação, e não demonstração, o mesmo foi importante quando, ao utilizarem os modelos clássicos, para compararem resultados.

PALAVRAS-CHAVE: Etnomatemática; Processos hegemônico e não hegemônicos de matematizar; Modelo dos Campos Semânticos; Produção de Significado.

ABSTRACT: The purpose of this scientific communication is to disseminate an excerpt from our TCC and from our article “Possible biases between Ethnomathematics and the Model of the

Semantic Fields” where we analyze texts, among them (for) didactic books of High School, available in the Laboratory of Integrated Teaching Practices (LPEI), from the Mathematics Degree (LIMAT), from the Federal Institute of Espírito Santo, campus Vitória, with a view to comparing hegemonic and non-hegemonic methods of mathematizing. We analyzed 4 textbooks (hegemonic processes of mathematizing) and 6 paradidactics (non-hegemonic processes of mathematizing), however in this communication we will show only the analysis of 2 textbooks and 2 paradidactics. Our methodology in this communication is bibliographic and the purpose was to discuss, analyze and present possible biases between (non) hegemonic processes, of area calculation, with a socio-environmental focus. Our research had a qualitative and participative approach, along the lines of a case study, with actors, graduates in Mathematics, members of the Group of Studies and Research in Model of the Semantic Fields and Mathematical Education (Gepemem). The scenario was formed from Gepemem workshops and plenary sessions during 2014. To achieve our goal, we discussed works that compare the calculations of classic models of polygon areas with the squaring and cubing methods used by farmers, as well as Exclusion and Resistance: Mathematical Education and Cultural Legitimacy, by Gelsa Knijnik. Based on Gepemem's intervention methodology, we developed and tested didactic-pedagogical material with the actors. As a result of this dynamic, we realized that the actors saw various ways of interpreting the proposals, thus producing several and different meanings, mainly regarding the use of the GeoGebra software that brought them reliability, even though the use of the software had provided only one finding, and not demonstration, the same was important when, when using classic models, to compare results.
KEYWORDS: Ethnomathematics; Hegemonic and non-hegemonic processes of mathematizing; Semantic Fields Model; Meaning Production.

1 | INTRODUÇÃO

Neste texto apresentamos abordagens de alguns livros (para)didáticos de Matemática – disponíveis no Laboratório de Práticas de Ensino Integrado (LPEI), do Curso de Licenciatura em Matemática (Limat), do Instituto Federal do Espírito Santo, *campus* Vitória – que abordam o assunto “áreas de figuras planas” nos processos (não) hegemônicos de matematizar.

Esse assunto foi pesquisado no nosso Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), quando analisamos, a partir de Knijnik (1996), o tema o “esquadrejamento e cubação de terras” praticada por agricultores. Essa obra apresenta um método de cálculo de área diferente do tradicional (hegemônico, normalmente apresentado nos livros didáticos).

A partir da situação supracitada, comparamos como algumas obras hegemônicas e não hegemônicas abordam o tema “áreas de figuras planas”.

2 | APORTE TEÓRICO

A pesquisa que desenvolvemos, a caracterizamos como bibliográfica pesquisa, pois nosso foco foi o levantamento das produções sobre o tema elencado e consideramos leitura informativa como “feita com vista à coleta de dados ou informações que serão utilizados em trabalhos para responder questões específicas.” (CERVO; BERVIAN; DA SILVA, 2007, p. 84). As etapas de busca e os procedimentos adotados à seleção dos trabalhos seguiram as fases definidas por esse texto à leitura informativa, que são: *pré-leitura*; *leitura crítica* ou *reflexiva*; *leitura interpretativa*; *comentários de texto*. (CERVO, BERVIAN, DA SILVA, 2007).

Na *pré-leitura* tomamos os resumos dos trabalhos resultantes da busca pela palavra-chave “livros didáticos de Matemática”, para selecionar os que faziam menção à História da Matemática. Na *leitura crítica*, tomamos os trabalhos selecionados na etapa anterior, para selecionar quais obras analisavam o exposto na problemática. As etapas de *leitura interpretativa* e *comentários de texto* foram realizadas simultaneamente, culminando em descrição adiante neste trabalho.

Em nosso TCC adotamos a Etnomatemática como procedimento de ensino, para discutir política de conhecimento dominante praticada na escola e trazer à tona conhecimentos não hegemônicos– saberes populares – produzidos pelos atores, advindos de práticas sociais e confrontá-lo com a política de conhecimento dominante.

> O pensamento etnomatemático está centralmente interessado em examinar as práticas de fora da escola, associadas a racionalidades que não são idênticas à racionalidade que impera na Matemática Escolar, com seus estreitos vínculos com a razão universal instaurada pelo Iluminismo. Mas é preciso que se diga: olhar para essas outras racionalidades, sem jamais se esquecer do que está no horizonte, é pensar outras possibilidades para a Educação Matemática praticada na escola (KNIJNIK et al, 2012, p. 18).

Knijnik et al (2012) possibilitou-nos vislumbrar outros modos de matematizar que não apenas os hegemônicos, na expectativa de emergir a heterogeneidade de se matematizar a partir de procedimentos não-referendados pela academia e discutir quais motivos que impossibilitam que os mesmos sejam tomados como modelo. Isso porque tomamos como alicerce epistemológico as ideias de Romulo Campos Lins, relativas ao Modelo dos Campos Semânticos (MCS), pontuadas pela defesa da produção de legitimidade, dentro da escola, para os modos de produção de significado da rua:

> meu projeto, sustentado no MCS, trabalha naturalmente na direção da ***ampliação dos significados que são legítimos na rua***, e não na substituição da rua pela escola. Diversos projetos de Etnomatemática trabalham na mesma direção (LINS, 1999, p. 92, *grifos do autor*).

Mais do que indagar “quem”, preocupamo-nos com “o que” é delimitado como “verdadeiro” ou “falso” nas diferentes áreas do conhecimento e quem passa a deter a posição de enunciador dessas “verdades”. Pensando essas questões para a área de Educação Matemática, podemos nos perguntar: quais saberes contam como “verdadeiros” nas aulas de Matemática? Quais são desqualificados como saberes matemáticos no currículo escolar? Quem tem a legitimidade para definir isso? (KNIJNIK et al, 2012).

Se por um lado, tomar a Etnomatemática como procedimento metodológico de ensino nos faculta realizar as questões apresentadas, foi com o Modelo dos Campos Semânticos (MCS) que vislumbramos ir além da relação dicotômica acertar/errar.

Outro elemento aproximativo do MCS à Etnomatemática, pelo menos a que propomos, dá-se a partir do entendimento de Lins (1999) a respeito de uma possível Educação Matemática praticável:

> 1. explicitar, na escola, os modos de produção de significado da rua;
>
> 2. produzir legitimidade, dentro da escola, para os modos de produção de significado da rua (ato político, ato pedagógico);
>
> 3. propor novos modos de produção de significado, que se juntam aos da rua, ao invés de substituí-los (LINS, 1999, p. 92).
>
> O que é realmente relevante é que tradicionalmente a escola negou os significados da rua, e se esforçou em tentar implementar o domínio dos significados da escola; no caso da Matemática, os significados matemáticos (oficiais), e aqui voltamos outra vez a importância de examinarmos pressupostos (LINS, 1999, p. 90).

O MCS não se restringe a uma teoria a ser estudada, mas uma teorização a ser adotada, pois, o mesmo só existe em ação (LINS, 2012) e, por isso, converge com a dinâmica da *sistemática do conjunto de ações desenvolvidas pelo professor no ciclo de discussão em grupo*, como apresentado anteriormente, advindo de Chaves (2000). Ao adotarmos o MCS como procedimento de análise vislumbramos ampliar o entendimento a respeito da maneira de operar dos alunos; sejam eles do ensino básico ou dos processos de formação de professores.

> os pressupostos da teoria, pensar em caminhos que apontariam para ações concretas de interação entre professor e aluno e possibilidades de intervenção advindas da leitura da produção de significados desses estudantes. (SILVA; LINS, 2013, p. 3).

No MCS a noção de significado de um objeto é entendida como aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz a respeito de um objeto no interior de uma atividade e é no interior de uma atividade que se dá a produção de significado[1].

> Por leitura plausível consideramos “Toda tentativa de se entender um autor deve passar pelo esforço de olhar o mundo com os olhos do autor, de usar os termos que ele usa de uma forma que torne o todo de seu texto plausível” (LINS, 1999, p. 93).

1 A produção de significado “não se refere a tudo o que numa dada situação o sujeito poderia ou deveria dizer de um objeto e sim ao que ele efetivamente diz sobre aquele objeto no interior daquela atividade” (SILVA, 2003, p. 21).

A obra Francisco (2008) considera que ao se realizar uma leitura plausível leva-se em consideração a aproximação de "um olhar antropológico que procura conhecer como a cultura de um determinado grupo social funciona, sem a necessidade de alteração ou mudança desse ambiente por julgá-lo menos ou mais importante pelos olhos de quem o estuda". Tal concepção faculta que haja uma interface com a enunciação a respeito do direcionamento de uma pesquisa empírica de abordagem etnomatemática, caracterizada

> como a investigação das tradições, práticas e concepções matemáticas de um grupo social subordinado (quanto ao volume e composição de capital social, cultural e econômico) e o trabalho pedagógico que se desenvolve com o objetivo de que o grupo interprete e decodifique seu conhecimento; adquira o conhecimento produzido pela Matemática acadêmica, estabeleça comparações entre seu conhecimento e o conhecimento acadêmico, analisando as relações de poder envolvidas no uso destes dois saberes (KNIJNIK, 1996, p. 109-110).

Para o MCS conhecimento é uma crença-afirmação associada a uma justificação que nos permite produzir uma enunciação. Ele é do domínio da enunciação e há sempre um sujeito do conhecimento, que não é do conhecer. Lins (1999) chama atenção ao fato de que toda produção de significado implica produção de conhecimento e que, quem produz significado não é o autor, mas o leitor de um texto, de uma enunciação. "O significado de algo é aquilo que digo deste algo. *Grosso modo*, significado, para mim, é o que a coisa é" (LINS, 1999, p. 86).

Analisar o trânsito e as inter-relações entre os saberes escolares e os socialmente constituídos, ou as inter-relações entre as Matemáticas (popular e acadêmica) (KNIJNIK, 1996), considerando a questão da parte diversificada do currículo (LDB, Art. 26.), também suas características regionais e locais da sociedade, e aspectos relacionados ao mundo físico e natural e da realidade social e política (BRASIL, 1996) possibilita entre aluno e professor, que se produza um compartilhamento de espaços comunicativos. Buscamos interlocuções e, para o MCS interlocutor (ser cognitivo e não biológico) é uma direção na qual se fala. "Quando falo na direção de um interlocutor é porque acredito que este interlocutor diria o que estou dizendo e aceitaria/adotaria a justificação que me autoriza a dizer o que estou dizendo." (LINS, 2012, p. 19). Dessa maneira, na busca de uma interlocução, pensamos a Matemática enquanto sistema cultural:

> Trata-se de pensá-la não de forma abstrata, imune às lutas do campo simbólico que buscam a manutenção ou ascensão nas posições do espaço social onde ela é produzida e reproduzida. Ao contrário, busco entende-la, enquanto uma das manifestações simbólicas de um determinado grupo social, relacionada com usa posição de dominação ou subordinação no espaço social onde está inserido. Mais ainda, considero que não só a Matemática é uma manifestação simbólica: falar a seu respeito, teorizar sobre ela, interpretá-la, também o é. (KNIJNIK, 1996, p. 95-96).

Mais do que possível é legítimo; não por uma questão de autoridade, pois como aponta Lins (2012) “a autoridade não ‘explica’ nada, ela apenas autoriza, empresta legitimidade” (p. 21) pois,

> o que se internaliza não é o conteúdo, não são conceitos, e sim legitimidades: a pessoa já era capaz de fazer; mas não sabia que nesta ou naquela situação aquilo era legítimo, que nesta ou naquela situação aquele modo de produção de significado era legítimo. [...] Internalizar interlocutores, legitimidades, é o que torna possível a produção de conhecimento e significado, torna possível antecipar uma legitimidade do que digo (LINS, 2012, p. 20).

Esse foi nosso aporte epistemológico que norteou nosso TCC e que trazemos nesse capítulo também.

3 I ANÁLISE E DISCUSSÃO DAS OBRAS

3.1 Processos Hegemônicos de Matematizar

Em Iezzi et al (2013) a linguagem matemática é carregada de definições formais e demonstrações matemáticas. Traz as seguintes definições de cálculo das áreas:

> A área de um retângulo é igual ao produto da medida da área da base pela medida da altura (IEZZI, 2013, p. 135).

> A área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado (IEZZI, 2013, p. 136).

> A área de um triângulo é igual à metade da medida da base pela medida da altura (IEZZI, 2013, p. 140).

> A área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura (IEZZI, 2013, p. 148).

Souza (2013) também traz as definições dos cálculos de áreas dos polígonos utilizados neste trabalho

> De maneira geral, podemos calcular a área de um retângulo multiplicando a medida de seu comprimento pela medida de sua largura (SOUZA, 2013, p. 185).

> De maneira geral, podemos calcular a área de um trapézio adicionando-se a medida de sua base maior com a da menor, multiplicando a soma obtida pela medida da altura e dividindo o resultado por 2 (SOUZA, 2013, p. 186).

> De maneira geral, podemos calcular a área de um triângulo multiplicando a medida da base pela medida da altura e dividindo o resultado por 2 (SOUZA,

2013, p. 191).

A obra Dolce e Pompeo (1977) apresenta a fórmula de Herão sem mencionar Herão. Já no livro Souza (2013), o texto realiza a construção da fórmula e um comentário sobre a história de Herão conforme a citação a seguir:

> Também podemos calcular a área de um triângulo conhecendo as medidas de seus três lados. Utilizando o semiperímetro
>
> $$p = \frac{a+b+c}{2},$$
>
> podemos demonstrar que a área desse triângulo pode ser calculada pela seguinte fórmula
>
> $$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
>
> (SOUZA, 2013, p. 191)

> A fórmula $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ é conhecida como fórmula de Herão, em homenagem ao matemático Herão de Alexandria, que viveu por volta da segunda metade do século I d.C. Em geral, seus trabalhos tratam de aplicações práticas da matemática dando grandes contribuições à Agrimensura e à Engenharia (SOUZA, 2013, p. 191).

Bordeaux et al. (2008), traz as definições de cálculo de áreas de polígonos. No caso da área do retângulo, apresenta duas figuras: uma cozinha retangular de dimensões 8 cerâmicas por 4 cerâmicas (figura 1) e outro retângulo de dimensões 4 cerâmicas por 3 cerâmicas destacando a unidade de área. Em seguida calcula a área da cozinha baseado no produto de comprimento e largura e comenta que a unidade de medida, nesse caso, é dada em unidades de área (nesse caso, cerâmicas). A partir desse exemplo, generaliza para os demais retângulos.

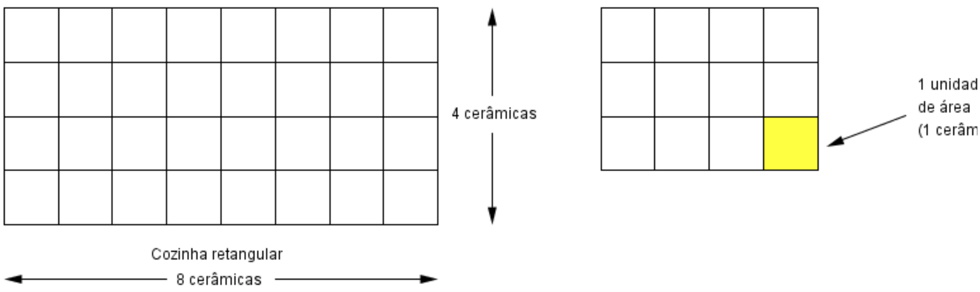


Figura 1 - Introdução ao cálculo de área de retângulo

Fonte: (BORDEAUX et al., 2008, p. 82)

Antes de mostrar a fórmula da área do trapézio, essa obra, apresenta a definição de paralelogramo. Em seguida propõe que o leitor construa um paralelogramo qualquer em uma folha de papel (Figura 2) e execute a transformação a seguir.

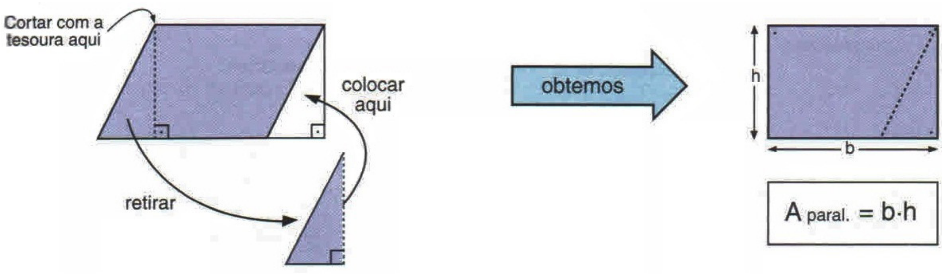


Figura 2 - Construção do cálculo de área do paralelogramo

Fonte: (BORDEAUX et al., 2008, p. 83)

A partir dessa discussão mostra tipos de trapézios existentes (isósceles e retângulo) e questiona os leitores: “Como calcular a área do trapézio desenhado abaixo, no qual *B* = base maior; *b* = base menor e *h* = altura?” (BORDEAUX et al., 2008, p. 84).

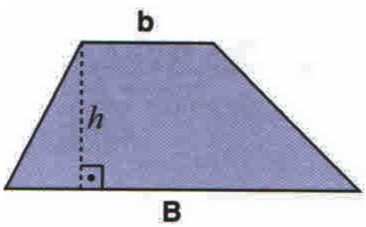


Figura 3 - Trapézio qualquer

Fonte: (BORDEAUX et al., 2008, p. 84)

A ideia utilizada foi juntar dois trapézios de iguais medidas de modo que formassem um novo paralelogramo. Em seguida obteve um paralelogramo de base *B* + *b* e altura *h* (Figura 4).

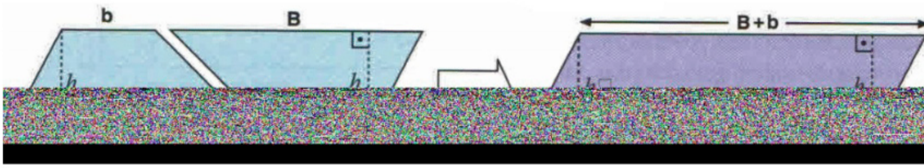
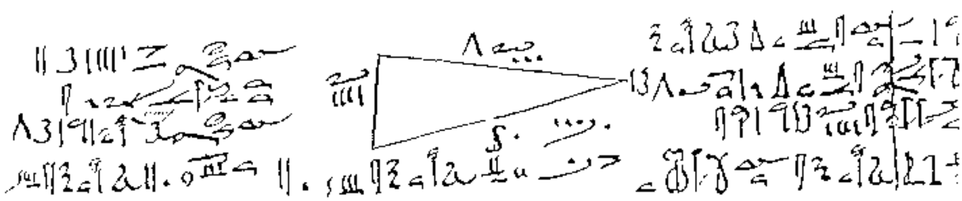


Figura 4 - Construção do cálculo de área do paralelogramo

Fonte: (BORDEAUX et al., 2008, p. 84)

Essa técnica proposta é histórica e denomina-se dissecção e recomposição, encontrada no *Papiro de Ahmes* (ou *Rhind*) – (1950 AEC – Eves (2008, p. 74)) e (1650 AEC – Boyer (1974, p. 9)) – em pelo menos dois problemas (os de número 51 e 52) para os quais os egípcios utilizavam o cálculo de áreas, com o uso de *composição* e *decomposição* de figuras.

Problema 51. Qual é a área de um triângulo de lado 10 jet e base 4 jet?



Problema 52. Qual a área de um triângulo truncado de 20 jet de lado, 6 jet de base e 4 jet em sua linha de secção?

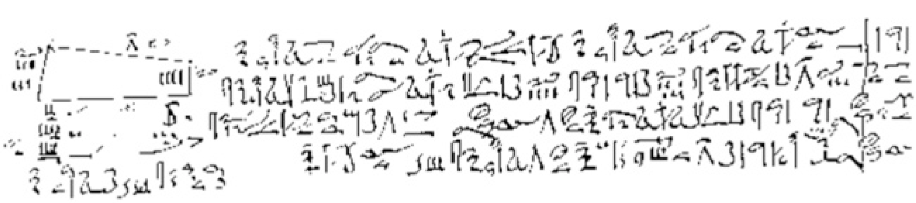


Figura 5 – Problemas 51 e 52 do *Papiro de Ahmes* (ou *Rhind*)

Fonte: Zocolotti et al. (2018).

Ainda destaca que a área do paralelogramo é o dobro da área do trapézio e evidencia:

$$A_{trapézio} = \frac{(B+b)\,h}{2}$$

Para definir a área do triângulo (Figura 5), o texto segue a mesma dinâmica.

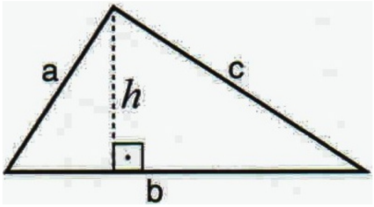


Figura 5 - Triângulo qualquer

Fonte: (BORDEAUX et al., 2008, p. 85)

Recortou um triângulo de mesmas dimensões, formou um novo paralelogramo e em seguida verificou que a área formada é o dobro da original (Figura 6).

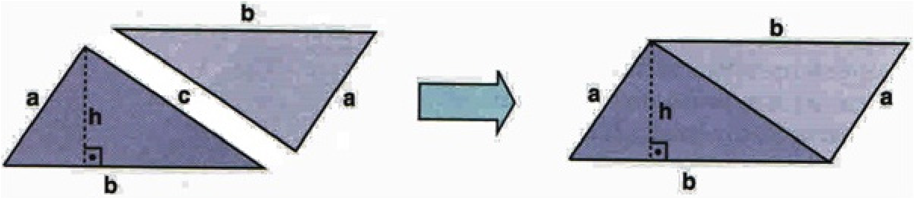


Figura 6 - Construção da área de um triângulo qualquer

Fonte: (BORDEAUX et al., 2008, p. 86)

Portanto, tais obras argumentam que somente o Ensino Tradicional de Matemática (ETM)[2] não é capaz de estimular a aprendizagem de todos os alunos. Por isso, evidenciam que a partir da realidade do aluno é possível aumentar o interesse deles pela Matemática. Neste caso, a tática proposta estimula a criatividade dos alunos, pois, a partir do momento que é possível confrontar estes métodos de cálculos de áreas (não hegemônico x hegemônico), é plausível produzir vários significados matemáticos.

3.2 Processos não Hegemônicos de Matematizar

Com o propósito de apresentar uma proposta de cálculo de área por média aritmética entre polígono inscrito e circunscrito, para ser trabalhada com alunos de Escolas Famílias Agrícolas (EFA), Chaves (2005) é uma proposta ao ensino de Matemática às EFA e propõe que se discuta o cálculo da área da circunferência e propõe a técnica do cálculo das médias (área média), conforme figura a seguir.

2 Termo cunhado em Chaves (2004) ao discutir a existência das muitas rotinas que sustentam o fracasso ou como dispositivos táticos de manutenção deste quadro, responsáveis pela manutenção da meritocracia posta “não apenas como um adjetivo, mas como uma política de exclusão, banimento e fixação de castas, com o propósito de manter um mito positivista de que o saber produz poder” (CHAVES, 2004, p. 84).

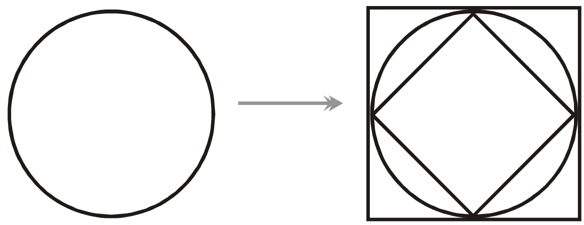


Figura 7 - Técnica sugerida a área da circunferência será a média aritmética entre as áreas dos quadrados.

Fonte: Chaves (2005, p. 164)

$$\textbf{Área}\,(\bigcirc) = \frac{\textbf{Área}\,(\square) + \textbf{Área}\,(\boxdot)}{2}$$

Supondo o diâmetro igual a quatro, afirma:

> Como o quadrado maior (circunscrito) tem a medida do lado igual ao diâmetro da circunferência, podemos concluir que a área do quadrado maior é 16 unidades de área. E como mostrar nas séries iniciais que o quadrado menor tem a metade da área do maior (portanto oito unidades de área), sem precisar falar de teorema de Pitágoras ou raiz quadrada de um número? (CHAVES, 2005, p. 165).

Para tal, sugere a técnica de dobraduras partindo da ideia de que, se efetuarmos duas dobras no quadrado maior (dobrando-o ao meio duas vezes) obteremos quatro quadrados ((1) figura 8). Pegue cada vértice do maior e leve até o centro (a interseção das dobras) (2). Repita este processo para os demais vértices do quadrado maior (3).

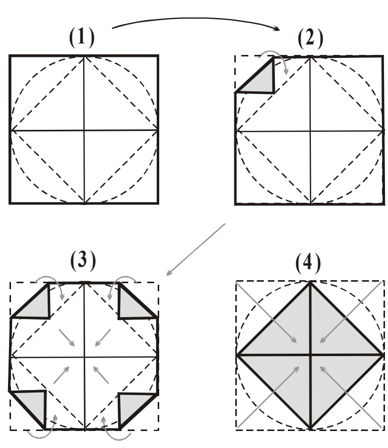


Figura 8 - Etapas de dobradura do quadrado

Fonte: Chaves (2005, p. 165)

Com os quatro vértices do quadrado maior no centro das dobras (centro da circunferência) observamos que forma quatro triângulos valendo a metade dos quatro quadrados obtidos pela dobradura do maior. Como esses quatro triângulos, juntos formam o quadrado menor, vimos que a área do quadrado inscrito é a metade da área do quadrado circunscrito. Assim:

$$\textbf{Área}\,(\square) = 16 \quad \text{e} \quad \textbf{Área}\,(\boxdot) = 8$$

Como

$$\textbf{Área}\,(\bigcirc) = \frac{\textbf{Área}\,(\square) + \textbf{Área}\,(\boxdot)}{2}$$

temos que a área da circunferência mede aproximadamente 12 unidades de área.

Oliveira et al. (2013) é composta de seis cadernos temáticos e nosso objeto de nossa análise foi "*Medindo Comprimentos e Áreas*". A mesma efetua uma discussão de Matemática através dos vieses históricos e investigativos.

A "*Conhecendo algumas medidas de comprimento*" propõe aos alunos uma divisão em grupos com 4 componentes e com as seguintes tarefas para cada: registro, apresentação para a turma e medição (o que será medido e o instrumento de medição). Além disso, a atribuição de tarefas ajuda na organização do grupo e o registro deve ser o mais detalhado possível:

> A atividade consiste em fazer três medidas diferentes. As medidas devem ser bem diferentes entre si. O grupo deve procurar e definir o que medir. Para realizar a medida o grupo pode utilizar o que quiser. Depois de colher as três medidas, o grupo deve voltar para a sala e preparar o relatório e a apresentação de como as medidas foram feitas. O relato deve ser o mais detalhado possível. Terminados os relatórios, cada grupo apresenta o trabalho para o restante da sala e o professor coordena a discussão total. (OLIVEIRA, 2013, p. 6).

Essa seção apresenta alguns padrões de medidas utilizados em outras épocas por alguns povos[3] e propõe atividades comparando essas medidas com o corpo. Em seguida apresenta as unidades de medidas atuais[4]. Daí aborda atividades de comparação do sistema métrico decimal com a polegada. Encerra com 3 questões reflexivas: 1) O que é medir; 2) Escreva algumas situações sobre o que considera medir; 3) Faça um resumo sobre as novas aprendizagens e as dificuldades que ainda possui sobre o assunto. (OLIVEIRA, 2013).

Em "*Medindo áreas retangulares*" evidencia que a área do quadrado de lado 1 metro é a principal referência utilizada nos cálculos de área. Essa área é dada em metro quadrado (m²) e explica que existem outras unidades de medida. Em seguida apresenta uma planta baixa do quarto de um adolescente de 300cm x 400cm e comenta que o piso

3 cúbito, milha, braça, polegada, pé e jarda.

4 Sistema Internacional de Medidas (S.I.)

está com umidade e que será trocado por um piso que mede 40cm x 40cm. O exercício solicitado é sobre o cálculo de enfileiramento das peças (na maior e na menor dimensão do quarto, corte de peças e a quantidade que será utilizada no revestimento). As demais atividades são investigativas cujo o propósito é que o aluno colete os dados que auxiliem na construção das fórmulas de área e perímetro. (OLIVEIRA, 2013).

Em "*Unidades de Medidas de áreas*" apresenta alguns instrumentos de medidas de comprimento: paquímetro (medidas de pequenas espessuras), fita métrica (pequenas medidas em centímetros ou metros), trena (pequenas medidas em metros), metro (pequenas medidas em metros ou polegadas) e distanciômetro (utilizado em distâncias acima de 50m). Em seguida apresenta um quadrado de lado 1m e insere um quadrado de lado 1 dm como unidade referência de área. A partir disso propõe algumas investigações com outras unidades de medidas de área: 1 cm^2, 1mm^2, 1 hectare e 1 alqueire. (OLIVEIRA, 2013, p.19-21).

Nessa mesma seção há uma tarefa de construção da área de triângulos, paralelogramos e trapézios utilizando a mesma técnica adotada em Bordeaux et al., (2008) com a manipulação e construção das fórmulas. (OLIVEIRA, 2013, p.19-21).

Esta obra apesar de apresentar processos hegemônicos de matematizar, a consideramos como não hegemônica pelos seguintes motivos: é uma proposta pedagógica investigativa; traz contextos históricos e contemporâneos; convida os alunos a construírem seus conhecimentos. Considerando que o tempo de realização das atividades supracitadas é superior ao tempo disponível de aulas tradicionais, percebemos que dificilmente seria utilizada em uma escola propedêutica ou preparatória.

Nas obras que analisamos e listamos nos processos não hegemônicos o que verificamos como característica comum foi o fomento à investigação e a práticas colaborativas que envolvam alunos e professores. Outra similaridade entre as mesmas foi que quebram a hegemonia de considerarem livros e sala de aula como *locus* dos processos de ensino e de aprendizagem. O MDP, no caso o livro ou o roteiro, é apenas um suporte e um convite a outros ambientes de aprendizagem, como a internet, a pesquisa bibliográfica e a consulta até mesmo a outros profissionais, como por exemplo, pedreiros, agrimensores, agricultores, assentados, engenheiros etc.

4 | CONCLUSÕES

Nas plenárias do Gepemem, ao desenvolvermos nossas oficinas, várias discussões surgiram a partir desta proposta: cálculo de área total por decomposição; sistemas de equações do 2º grau, para resolução do cálculo de áreas; conceitos de Geometria Analítica; técnicas de topografia (uso do pseudo-determinante para o cálculo de áreas); utilização e demonstração da fórmula de Herão; escalas, constantes de proporcionalidade e suas respectivas relações com medidas lineares e de superfície; condição de existência de um triângulo levando em conta o princípio da desigualdade triangular; Progressão Aritmética.

Com o uso da Etnomatemática, enquanto procedimento de ensino, pudemos observar que uma gama de ações e conteúdos emergiram, indo muito além do que os programas oficiais, hegemônicos, proporiam. A diversidade estimulou os atores, que para o MCS constituem-se como sujeitos cognitivos, aqueles que se encontram com o que acreditam ser resíduos de enunciação; isto é, algo que acreditam que foi dito por alguém.

Assim, a proposta pautada em princípios da Etnomatemática, tomando o MCS como processo de análise das atividades, focadas na ação diferencial facultou além da interlocução, dos diversos significados produzidos e de trabalhos colaborativos, novos olhares que vão além de uma mera proposta de conteúdos, descontextualizados, ocos e bancários. Os atores viram-se envolvidos, participativos e protagonistas do processo.

REFERÊNCIAS

BORDEAUX, A. L; ANTUNES, C.; RUBINSTEIN, C.; WAGNER, E.; OGLIARI, E.; LEVENTHAL, G.; ORTIGÃO, M. I. R.; MANDARINO, M.; FILHO, N. S; COUTO, T.; PINTOMBEIRA, J, B. **Matemática, primeira série, ensino médio**. 3. ed. – Rio de Janeiro: Fundação Roberto Marinho, 2008.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. Reimp. São Paulo: Edgard Blücher, 1978 [1974].

BRASIL. LDB. Lei 9394/96 – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Disponível em <www.planalto.gov.br>. Acesso em: 25/abri./2015.

CHAVES, R. **Material pedagógico na base nacional comum na linha da pedagogia da alternância**: ensino de Matemática nas Escolas Família-Agrícolas. Viçosa, MG: Departamento de Educação da UFV; Associação das Escolas Família-Agrícolas de MG, 2005.

CHAVES, R. Por que anarquizar o ensino de Matemática intervindo em questões socioambientais? 223p.Tese (Doutorado em Educação Matemática) – **PPGEM, IGCE, Unesp**, Rio Claro, 2004.

CHAVES, R. Caminhos percorridos para a implantação do grupo de pesquisa-ação em educação matemática junto ao núcleo de ensino integrado de ciências e matemática da Universidade Federal de Viçosa. 285 p. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática) □ **PPGEM, IGCE, Unesp**, Rio Claro, 2000.

CERVO, Amado Luiz; BERVIAN, Pedro Alcino; SILVA, Roberto da. **Metodologia Científica**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. 162 p

DOLCE; O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana. v. 9. 3. ed. São Paulo: Atual, 1977.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 2. Reimp. Campinas (SP): Ed. Unicamp. 2008 [2004].

FRANCISCO, C. A. **O Modelo dos Campos Semânticos como Instrumento de Leitura da Prática Profissional do Professor de Matemática**. Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/306-1-A-gt1_francisco_ta.pdf. Acesso em 21/mar./2015.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. ALMEIDA, N. de. ***Matemática Ciência e Aplicações.*** **Ensino Médio. v.2**, 7.ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

KNIJNIK, G.; WANDERER, F.; GIONCO, I. M.; DUARTE, C. G. **Etnomatemática em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

KNIJNIK, G. **Exclusão e Resistência: Educação Matemática e legitimidade cultural**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

LINS, R. C. O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In: ANGELO, C. L. et al. (org.). **Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática**: 20 anos de história. São Paulo: Midiograf, 2012. p. 11-30.

LINS, R. C. Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. (Seminários DEBATES Unesp).

OLIVEIRA, A. J.; SALAZAR, A. V.; PAIVA, M. A. V.; FREITAS, R. C. de O.; SILVA, S. F. da S. Medindo comprimentos e áreas**.** p.4-39. In: **Cursos Técnicos PROEJA**. 3. ed. Vitória: GEPEM-ES, 2013.

SILVA, A. M.; LINS, R. C. Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. 1, v. 6 (2), 2013. Disponível em: http://periodicos.uniban.br/index.php?journal=JIEEM&page= article&op= view&path[0]=373&path[1]=395. Acesso em: 15/dez./2014.

SILVA, A. M. Sobre a dinâmica da produção de significados para a matemática. 244p.Tese (Doutorado em Educação Matemática) – **PPGEM, IGCE, Unesp**, Rio Claro, 2003.

SOUZA, J. R. ***Novo Olhar Matemática*****. 2 ed. v. 2**. São Paulo: FTD, 2013.

ZOCOLOTTI, A. K.; BERNARDES, B. V.; MARCARINI, V. B.; CHAVES, R. Demonstrações do teorema de Pitágoras pela técnica da dissecção, com o uso de materiais didático-pedagógicos reaproveitáveis. Anais: **VI Escola de Inverno de Educação Matemática**. UFSM, Santa Maria – RS, 2018.

SOBRE O ORGANIZADOR

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA - Professor do Departamento de Educação da Universidade do Estado da Bahia (Uneb - Campus VII) e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA (Uneb - Campus III). Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB), Especialista em Psicopedagogia Institucional e Clínica pela Faculdade Regional de Filosofia, Ciências e Letras de Candeias (IESCFAC), Especialista em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pelo Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco (CESVASF). Foi professor e diretor escolar na Educação Básica. Coordenou o curso de Licenciatura em Matemática e o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) no Campus IX da Uneb. Foi coordenador adjunto, no estado da Bahia, dos programas Pró-Letramento e PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa). Participou, como formador, do PNAIC/UFSCar, ocorrido no Estado de São Paulo. Pesquisa na área de formação de professores que ensinam Matemática, Ludicidade e Narrativas. Integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/UFSCar), na condição de pesquisador e do Grupo Educação, Desenvolvimento e Profissionalização do Educador (Uneb/PPGESA), na condição de vice-líder. É editor-chefe da Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM), uma publicação do PPGESA da Uneb em parceria com o Campus VII da mesma instituição e com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano (IF Sertão-PE).

ÍNDICE REMISSIVO

E

F

I

L

M

N

O

P

R

S

T

V

W

Y

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena Editora
Ano 2020

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática

Atena
Editora
Ano 2020