Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Atena Editora
Ano 2020

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira
(Organizadores)

Atena Editora
Ano 2020

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecário
Maurício Amormino Júnior
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Karine de Lima Wisniewski
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2020

Atena
Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2

Editora Chefe:	Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecário	Maurício Amormino Júnior
Diagramação:	Camila Alves de Cremo
Edição de Arte:	Luiza Alves Batista
Revisão:	Os Autores
Organizadores:	Américo Junior Nunes da Silva André Ricardo Lucas Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas 2 [recurso eletrônico] / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Lucas Vieira. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-362-0
DOI 10.22533/at.ed.620200809

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Silva, Américo Junior Nunes da. II. Vieira, André Ricardo Lucas.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

O contexto social, histórico e cultural contemporâneo, fortemente marcado pela presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação – TDIC, entendidas como aquelas que têm o computador e a internet como instrumentos principais, gera demandas sobre a escola e sobre o trabalho docente. Não se trata de afirmar que a presença das tecnologias na sociedade, por si só, justifica sua integração à educação, mas de considerar que os nascidos na era digital têm um perfil diferenciado e aprendem a partir do contexto em que vivem, inclusive fora da escola, no qual estão presentes as tecnologias.

É nesta sociedade altamente complexa em termos técnico-científicos, que a presença da Matemática, alicerçada em bases e contextos históricos, é uma chave que abre portas de uma compreensão peculiar e inerente à pessoa humana como ser único em sua individualidade e complexidade, e também sobre os mais diversos aspectos e emaranhados enigmáticos de convivência em sociedade. Convém salientar que a Matemática fornece as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras ciências. Faz-se necessário, portanto, compreender a importância de se refletir sobre as estratégias pedagógicas utilizadas no ensino desta ciência.

Ensinar Matemática não se limita em aplicação de fórmulas e regras, memorização, aulas expositivas, livros didáticos e exercícios no quadro ou atividades de fixação, mas necessita buscar superar o senso comum através do conhecimento científico e tecnológico. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem matemática priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático.

A prática pedagógica intrínseca ao trabalho do professor é complexa, e buscar o "novo" exige o enfrentamento de situações inusitadas. Como a formação inicial representa a instância formadora dos esquemas básicos, a partir dos quais são desenvolvidas outras formas de atuação docente, urge analisá-la a fundo para identificar as problemáticas que implicam diretamente no movimento de profissionalização do professor que ensina matemática.

É neste sentido, que o livro "***Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas***", em seu *volume 2*, reúne trabalhos de pesquisa e experiências em diversos espaços, como a escola por exemplo, com o intuito de promover um amplo debate acerca das variadas áreas que o compõe.

Por fim, ao levar em consideração todos esses elementos, a importância desta obra, que aborda de forma interdisciplinar pesquisas, relatos de casos e/

ou revisões, refletem-se nas evidências que emergem de suas páginas através de diversos temas que suscitam não apenas bases teóricas, mas a vivência prática dessas pesquisas.

Nessa direção, portanto, desejamos a todos e a todas uma boa leitura!

Américo Junior Nunes da Silva

André Ricardo Lucas Vieira

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

JOGOS DIGITAIS COMO FERRAMENTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 30/07/2020

Valdinei Cezar Cardoso
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)
São Mateus-ES
http://lattes.cnpq.br/3560165817659228

Ana Paula Santos Pereira
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)
São Mateus-ES
http://lattes.cnpq.br/5361557218699449

Arina de Jesus Rozario
Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)
São Mateus-ES
http://lattes.cnpq.br/9612961602858531

Camila Muniz de Oliveira
Universidade Estadual de Maringá-PR
http://lattes.cnpq.br/7833103868382802

Edson Ribeiro de Britto de Almeida Junior
Universidade Estadual de Maringá (UEM)
Maringá-PR
http://lattes.cnpq.br/7820499688686517

RESUMO: Esse capítulo tem o intuito de apresentar dois jogos digitais como ferramentas para o ensino de Matemática. O primeiro jogo, desenvolvido com o *software* Scratch, diz respeito ao ensino e a aprendizagem da linguagem algébrica. Partimos do pressuposto que um dos caminhos para superar os entraves para o ensino de Matemática é o uso de metodologias e recursos condizentes com o perfil dos alunos Nativos Digitais. O jogo, aqui denominado "Máquina Mágica", está disponível online e gratuitamente. As fases do jogo foram pensadas de modo a proporcionar a participação ativa dos estudantes durante o seu processo de aprendizagem. O segundo jogo digital é fruto de um Projeto de Iniciação Científica, no qual examinamos as possíveis potencialidades do *software* Scratch 2.0 como provedor de tarefas de aprendizagem para o ensino e a aprendizagem do conceito de fração. Nesse sentido, o presente capítulo visa apresentar a descrição do processo de criação de dois jogos digitais educacionais, sabemos que simplesmente interagir com um recurso digital não garante que os estudantes desenvolvam os subsídios cognitivos necessários para a aprendizagem do objetivo instrucional. Assim, apresentamos algumas possibilidades de abordagens pedagógicas que podem auxiliar os estudantes a desenvolverem as habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular.
PALAVRAS-CHAVE: Scratch, Jogo Digital, Linguagem Algébrica, Frações.

DIGITAL GAMES AS A TOOL FOR TEACHING AND LEARNING MATHEMATICS

ABSTRACT: This chapter aims to present two digital games as tools for teaching mathematics. The first game, developed with the Scratch software, concerns the teaching and learning of algebraic language. We assume that one of the ways to overcome the obstacles to the teaching of Mathematics is the use of methodologies and resources consistent with the profile of Digital Native students. The game, here called "Magic

Machine", is available online and for free. The phases of the game were designed to provide students with active participation during their learning process. The second digital game is the result of a Scientific Initiation Project, in which we examined the possible potential of Scratch 2.0 software as a provider of learning tasks for teaching and learning the concept of fraction. In this sense, this chapter aims to present the description of the process of creating two educational digital games, we know that simply interacting with a digital resource does not guarantee that students develop the cognitive subsidies necessary for learning the instructional objective. Thus, we present some possibilities of pedagogical approaches that can help students to develop the skills proposed by the National Common Curricular Base.
KEYWORDS: Scratch, Digital Game, Algebraic language, Fractions.

1 I INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), visando minimizar a fragmentação das políticas educacionais e garantir um nível comum de aprendizagem no âmbito nacional da educação básica, propõe dez competências gerais que norteiam os direitos de aprendizagem a serem construídos. Uma dessas competências refere-se à compreensão, manipulação e desenvolvimento de tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica e significativa, ou seja, de modo a proporcionar um meio de comunicação e de produção de conhecimentos de forma ativa (BRASIL, 2020).

Na área da Matemática, uma das competências específicas para o ensino fundamental, vinculado às tecnologias, é "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (BRASIL, 2020, p. 267). A competência supracitada, infere que recursos didáticos como jogos, simuladores, *softwares* de geometria dinâmica, entre outras ferramentas tecnológicas, têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas (BRASIL, 2020).

Mesmo diante de todas essas ferramentas digitais para o ensino de Matemática, não podemos afirmar que simplesmente a interação dos estudantes com tais recursos irá garantir o aluno desenvolva os subsídios cognitivos necessário para a aprendizagem (MAYER, 2009). Afinal, "esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização" (BRASIL, 2020, p. 276). Além disso, "a pesquisa sobre como projetar jogos educativamente eficazes está em sua infância" (JOHNSON; MAYER, 2010, p. 1246), pois, "não há quase nenhuma orientação para os designers de jogos e desenvolvedores sobre como projetar jogos que facilitam a aprendizagem" (O'NEIL; PEREZ, 2008, p. 9).

Entre os inúmeros recursos digitais para o ensino de Matemática, optamos por investigar as potencialidades do uso de jogos digitais. Assim como Almeida Junior e Cardoso (2017), acreditamos que essa ferramenta pode estimular os estudantes a utilizarem seus conhecimentos e habilidades para aprenderem com o jogo. No entanto, o papel do professor como mediador entre o objeto de aprendizagem e o objetivo instrucional é crucial para a construção da aprendizagem, tendo em vista "que o professor auxilia o estudante a explorar sua estrutura cognitiva e maximizar a sofisticação desse entendimento" (ALMEIDA JUNIOR; CARDOSO, 2017, p. 11).

Prensky (2001) denomina os estudantes nascidos após a década de 1990, como Nativos Digitais. Esse termo é condizente, tendo em vista que estes estudantes, desde que eram crianças, cresceram utilizando aparelhos digitais. Esse ambiente abundante de interações com a tecnologia computacional, ocasionou diferentes estruturas cerebrais nos Nativos Digitais, tornando-se incompatíveis com o nosso sistema educacional tradicional, pois, possuem mentes hipertextuais (Mattar, 2010).

Diante desses aspectos, acreditamos que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), podem ser aliadas dos professores que optarem em utilizar essa tendência da educação contemporânea, em suas aulas. Nesse sentido, desenvolvemos dois jogos digitais intitulados "Máquina Mágica" e "Frações com STAR WARS", produzidos nos *softwares,* Scratch 2.0 e Scratch 3, respectivamente, com o objetivo de apresentar, aos professores, ferramentas capazes de auxiliar os estudantes na compreensão da linguagem algébrica e de frações, por acreditamos que tais ferramentas metodológicas proporcionam a aprendizagem lúdica. Com isso, o presente trabalho visa apresentar nas próximas seções a descrição da criação dos dois jogos digitais.

2 I JOGO DIGITAL "MÁQUINA MÁGICA"

O jogo "Máquina Mágica"[1] (Figura 1) é fruto da parceria entre os pesquisadores da Universidade Estadual de Maringá e da Universidade Federal do Espírito Santo. O referido jogo foi desenvolvido no *software* Scratch 3. A escolha por esse *software* se justifica tendo em vista o fato do programa ser gratuito, mais acessível do que outras linguagens de programação, não exigir conhecimentos prévios de programação e ser compatível com diversos sistemas operacionais, tais como Windows, Linux e Mac OS X. Com esse software é possível a construção de jogos digitais, animações, simuladores, entre outros, tudo isso utilizando uma construção intuitiva de algoritmos computacionais por meio de códigos prontos em blocos (ALMEIDA JUNIOR, CARDOSO, KATO, 2017).

1 Disponível em: https://scratch.mit.edu/projects/319220893/(projeto no scratch .sb2) ou http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/552903(executável .exe).

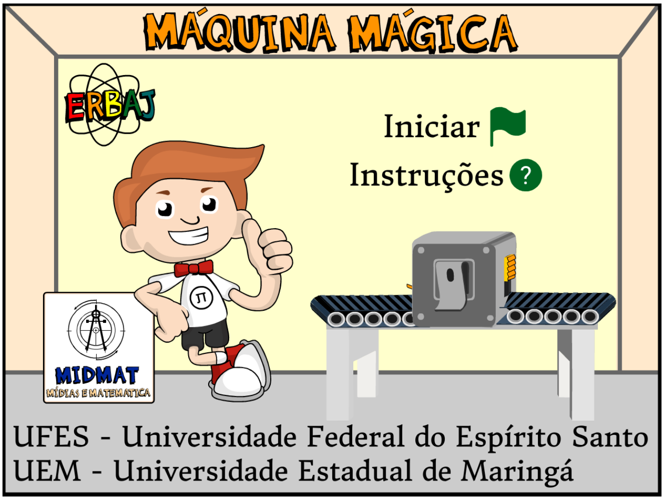
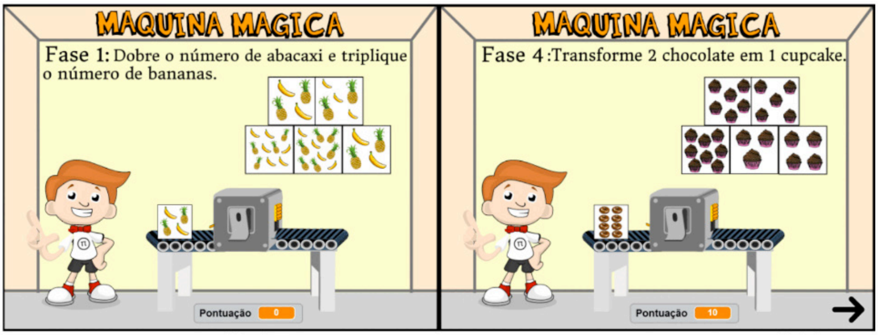


Figura 1: Tela inicial do jogo "Máquina Mágica"

Fonte: Elaborada pelos autores.

O jogo inicia quando o jogador clica na bandeirinha verde, do *software* Scratch 3. Feito isso, surge um campo de pergunta, indagando o nome do jogador. Após o preenchimento, o jogador deve selecionar o nível de dificuldade do jogo, que contém 9 fases. Acreditamos que esse jogo é condizente para turmas a partir do 7º ano, porém algumas fases podem ser utilizadas com turmas de série anteriores. A seguir apresentaremos essas fases juntamente com algumas habilidades que podem ser desenvolvidas pelos estudantes e mediadas pelos professores de matemática.

A BNCC propõe que durante a temática de álgebra, um dos objetos de conhecimento é a compreensão de padrões figurais e numéricos, ou seja, a investigação de regularidades ou padrões em sequências. Nesse sentido, a fase 1 (Figura 2 (2-a)) apresenta um bloco contendo 2 bananas e 2 abacaxis. O jogador deve escolher a resposta que representa o dobro de abacaxis e o triplo de banana, abordando a operação de multiplicação. A fase 4 (Figura 2 (2-b)) solicita que o jogador transforme 2 chocolates em 1 cupcake, requerendo a operação de divisão.

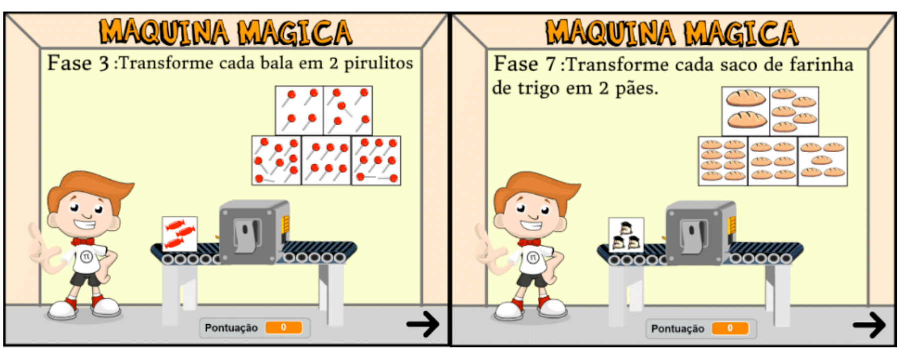


(2-a) (2-b)

Figura 2: Captura de tela da fase 1 (2-a) e da fase 4 (2-b) do jogo “Máquina Mágica”.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Essas fases supracitadas, são de caráter introdutório e visam resgatar algumas habilidades desenvolvidas durante o 6º ano, por exemplo a habilidade (EF06MA06) da BNCC, que consiste em resolver e elaborar problemas que envolvam os conceitos de múltiplos e de divisores. Além disso, acreditamos que essas fases, juntamente com as fase 3 (Figura 3 (3-a)) e fase 7 (Figura 3 (3-b)), auxilia os estudantes a desenvolverem a habilidade (EF07MA13), que consiste em compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.



(3-a) (3-b)

Figura 3: Captura de tela da fase 3 (3-a) e da fase 7 (7-b) do jogo “Máquina Mágica”.

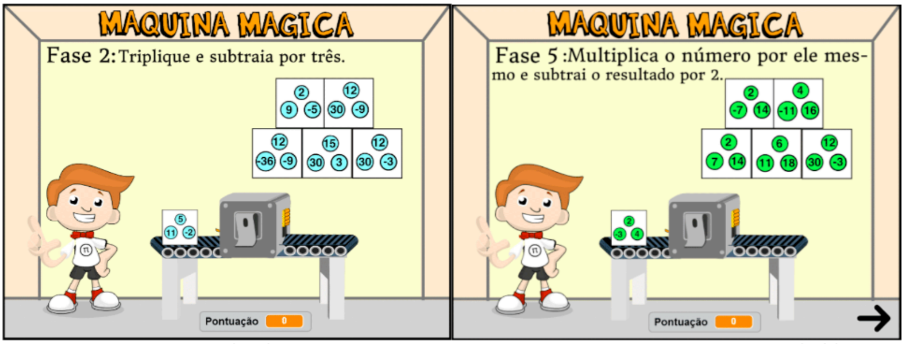
Fonte: Elaborada pelos autores.

Com o intuito de não se tornar redundante e mesmo assim proporcionar as habilidades supracitadas, a fase 8 (Figura 4) ilustra 12 palitos de madeira e solicita que o jogador transforme 4 palitos em um quadrado. Nesse sentido, o jogador poderá resolver o problema utilizando diferentes algoritmos (habilidade EF07MA05 da BNCC). Além disso, essa fase proporciona o reconhecimento que o conceito de recursão está presente não apenas na aritmética, mas também na geometria. A ideia de recursividade, a qual nos referimos, é um termo usado de maneira geral para descrever o processo de previsão do comportamento de um objeto de um jeito similar ao que já fora mostrado.

Figura 4: Captura de tela da fase 8 do jogo “Máquina Mágica”.

Fonte: Elaborada pelos autores.

As fases apresentadas até o momento apropria-se de imagens recursivas para abordar o pensamento algébrico. As demais fases, apesar de apresentarem situações problemas envolvendo números, os professores podem apropriar-se dessas fases para o direcionamento de atividades envolvendo o valor numérico de uma expressão algébrica e auxiliar, os estudantes, a desenvolverem a habilidade (EF07MA15), que refere-se a utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas também em sequências numéricas. A fase 2 (Figura 5 (5-a)), envolve multiplicação com números inteiros. A fase 5 (Figura 5 (5-b)) além da multiplicação, envolve potenciação de números inteiros.



(5-a) (5-b)

Figura 5: Captura de tela da fase 2 (5-a) e da fase 5 (5-b) do jogo "Máquina Mágica".

Fonte: Elaborada pelos autores.

A fase 6 (Figura 6 (6-a)) e a fase 9 (Figura 6 (6-b)), assim como a fase 2 e 5, envolve conceitos inerentes às ideias e operações envolvendo números inteiros. Reitero a possibilidade do uso dessas fases, para direcionar as discussões e atividades abrangendo o valor numérico para expressões algébricas.

(6-a) (6-b)

Figura 6: Captura de tela da fase 6 (6-a) e da fase 9 (6-b) do jogo "Máquina Mágica".

Fonte: Elaborada pelos autores.

Com o intuito de proporcionar uma competição amigável entre os jogadores, para cada acerto o jogador recebe 10 pontos. Assim, a pontuação máxima será de 90 pontos e, ao finalizar a fase 9, o jogador será direcionado para uma tela que apresenta a pontuação final (Figura 7).

Figura 7: Captura de tela da etapa da pontuação final do jogo “Máquina Mágica”.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Note, que na imagem acima, existe um campo escrito “professor” juntamente com um símbolo de cadeado. Quando clicado, será requerido uma senha de acesso. A senha correta é “erbaj” e, com essa senha, será possível o professor obter informações referentes ao jogador, como por exemplo: o seu nome, o nível de dificuldade escolhido e a resposta assinalada em cada fase, como indicado na Figura 8.

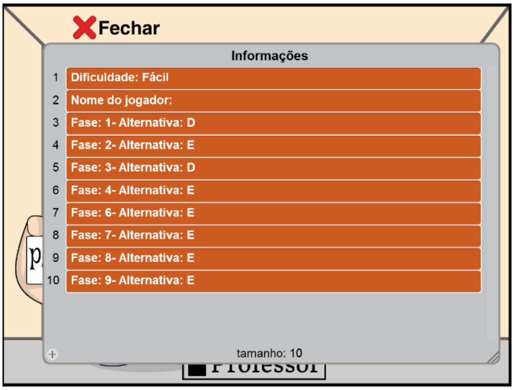


Figura 8: Captura de tela das informações registradas pelo jogo “Máquina Mágica”.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Acreditamos que isso pode auxiliar o professor a compreender quais fases cada estudante acertou e em quais erraram. A partir disso, poderá fazer as intervenções necessárias para sanar as dúvidas apresentadas. As alternativas estão elencadas como A, B, C, D e E. Devem ser consideradas na ordem expressa na Figura 9.

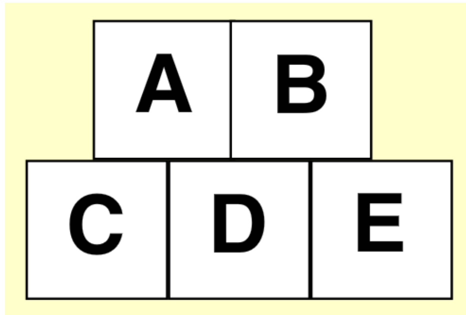
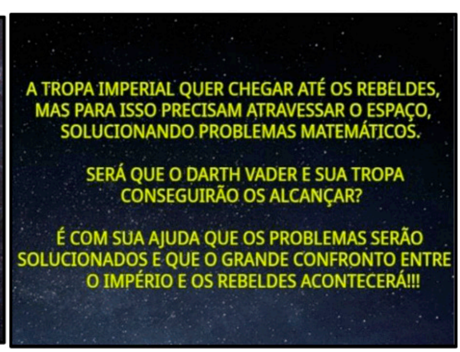


Figura 9: Captura de tela do sistema de alternativas do jogo “Máquina Mágica”.

Fonte: Elaborada pelos autores.

3 I JOGO DIGITAL “FRAÇÕES COM STAR WARS!”

O jogo “Frações com STAR WARS[2]” (Figura 10-a), foi desenvolvido durante um projeto de Pesquisa de Iniciação Científica Voluntária (PIVIC), que faz parte do projeto “As mídias digitais e o ensino e a aprendizagem de Matemática”, da Universidade Federal do Espírito Santo. O jogo é elaborado com a temática inspirada no universo Star Wars e caracteriza-se como um jogo de fases, em que são exploradas características da saga para a construção das missões, cujo objetivo é solucionar problemas que envolvem as operações com frações. Para isso, a trajetória do player é imersiva no contexto da saga (Figura 10-b).



(10-a) (10-b)

Figura 1: Captura da tela inicial (10-a) e da tela de instruções (10-b) do jogo “Frações com STAR WARS”.

Fonte: Elaborada pelos autores.

2 O Jogo está registrado no portal da EduCapes (http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/571665) e também no repositório de arquivos do Scratch (https://scratch.mit.edu/projects/406642467).

O jogo é composto por 4 fases, que contempla situações problemas que abordam as quatro operações básicas com frações (adição, subtração, multiplicação e divisão). Ao clicar em iniciar, o personagem Darth Vader (Figura 11) pergunta o nome do jogador para identificar o aluno que está jogando.

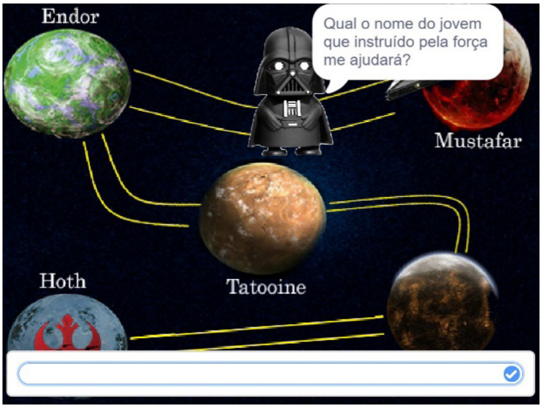


Figura 11: Captura de tela das orientações do jogo "Frações com STAR WARS".

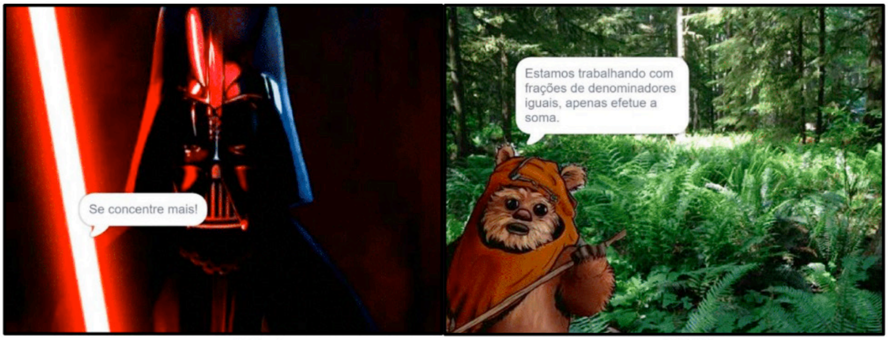
Fonte: Elaborada pelos autores.

A primeira questão (Figura 12-a) apresenta um problema cuja solução requer o conhecimento da operação de multiplicação de frações e/ou subtração de frações. A segunda questão (Figura 12-b) envolve a subtração de frações com denominadores iguais.

Figura 3: Captura da tela da fase 1 (12-a) e da fase 2 (12-b) do jogo "Frações com STAR WARS".

Fonte: Elaborada pelos autores.

Caso o aluno erre a resposta, é apresentado uma dica para direcioná-lo para responder corretamente (Figura 13-a e Figura 13b). Após essa dica, o jogador pode responder novamente. A cada acerto, independentemente de ser de primeira ou após a dica, ele ganha 25 pontos de score.

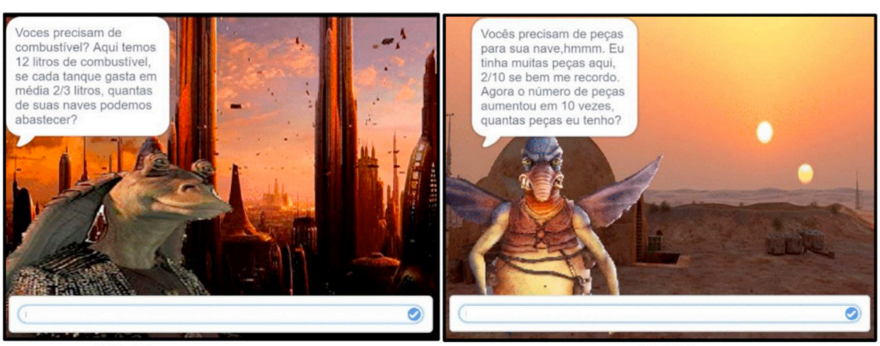


(13-a) (13-b)

Figura 13: Captura da tela informando resposta errada (13-a) e dica para a questão 2 (13-b).

Fonte: Elaborada pelos autores.

As fases 3 e 4 envolvem as operações de multiplicação e divisão, respectivamente. A Figura (14-a) e a Figura (14b) apresenta o enunciado de cada situação problema.



(14-a) (14-b)

Figura 14: Captura de tela da fase 3 (14-a) e da fase 4 (14-b) do jogo “Frações com STAR WARS”.

Fonte: Elaborada pelos autores.

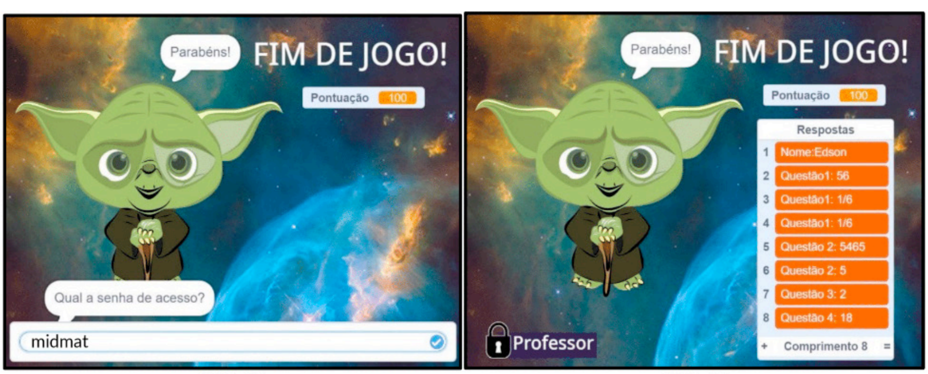
Após responder as questões das 4 fases do jogo, o estudante é parabenizado pelo desempenho (Figura 15-a) e direcionado para a tela final do jogo (Figura 15-b), na qual pode visualizar a sua pontuação final.

(15-a) (15-b)

Figura 15: Captura de tela de congratulações (15-a) e da final (15-b) do jogo “Frações com STAR WARS”.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Note, que na imagem acima, existe um campo escrito “professor” juntamente com um símbolo de cadeado. Quando clicado, será requerido uma senha de acesso (Figura 16-a). A senha correta é “midmat” e, com essa senha, será possível o professor obter informações referentes ao jogador, como o nome e a resposta assinalada em cada fase, como indicado na (Figura 16-b).



(16-a) (16-b)

Figura 16: Captura de tela senha do professor (16-a) e da tela de informações do jogador (16-b).

Fonte: Elaborada pelos autores.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

O jogo digital educativo “Máquina Mágica” como provedor de tarefas de aprendizagem de conceitos matemáticos, é um objeto que visa proporcionar aos alunos, além de uma atividade lúdica, um instrumento motivador para a participação ativa durante seu processo de aprendizagem. Além disso, é mais uma ferramenta de apoio ao professor, durante o encaminhamento das tarefas educacionais. No entanto, simplesmente interagir com um recurso digital não garante que os estudantes desenvolvam os raciocínios cognitivos necessários para a aprendizagem de matemática.

Assim, apesar do potencial educacional dos jogos para auxiliar a o processo de ensino e aprendizagem, o trabalho do professor continua sendo de fundamental importância, tendo em vista que, o trabalho pedagógico é de oferecer estímulos externos que auxilie os estudantes na sistematização e organização dos conceitos abordados pelo jogo em sua estrutura cognitiva. Para isso, é necessário a sua aplicação no âmbito da sala de aula, com o intuito de compreender quais as técnicas de resoluções utilizadas pelos estudantes diante das situações propostas, permitindo um momento de interação e reflexão acerca da eficácia do jogo no ambiente escolar. Esse será o nosso desafio em trabalhos futuros.

No que se refere ao jogo “frações com STAR WARS!” avaliamos suas potencialidades na atualidade. Como este capítulo foi redigido na última semana do mês de junho de 2020. No presente momento, as aulas presenciais continuam suspensas devido a pandemia do COVID-19. Esse momento atípico em nossa história, nos proporcionou compreender que as tecnologias educacionais atingiram um novo patamar, o que antes da pandemia era considerado uma possibilidade de melhoria para a educação, tornou-se uma necessidade para o prosseguimento das aulas.

Os professores mudaram sua atuação da noite para o dia, tendo que adequar-se às novas demandas da sociedade. Assim, surgiram várias indagações: como ministrar minhas aulas remotamente? Como posso avaliar? Como instigar meu aluno a dedicar-se com as atividades propostas pelas instituições de ensino? Não temos as respostas para tais indagações, pois, elas serão respondidas ao longo do tempo.

No presente trabalho, nosso objetivo não foi o de produzir um jogo de computador de qualidade comercial e sim um ambiente de aprendizagem parecido com um jogo para servir como objeto de estudo e até mesmo de avaliação das operações com frações. Em função da dinâmica do jogo, o professor pode compreender quais fases cada estudante acertou e em quais erraram. Além disso, é possível identificar, por meio da lista de respostas, se eles simplificaram as frações ou não. Assim, poderá fazer as intervenções necessárias para sanar as dúvidas apresentadas.

Compartilhamos esses jogos com professores de Matemática, da rede básica via grupos públicos de professores em redes sociais (Facebook, Telegram e WhatsApp). Solicitamos que eles nos relatassem a experiência, destacando o engajamento dos alunos com a atividade, com o intuito de compreender quais as técnicas de resoluções utilizadas pelos estudantes diante das situações propostas, permitindo um momento de interação e reflexão acerca da eficácia do jogo. A análise da investigação supracitada será o nosso desafio em trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA JUNIOR, E. R. B., et al. **Máquina Mágica**. 2019. Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/552903. Acessado em 20 mai. 2020.

ALMEIDA JUNIOR, E. R. B.; CARDOSO, V. C. O estado da arte do uso de jogos digitais para o ensino de Física. In: Encontro Internacional de Produção Científica, 10., 2017, Maringá. **Anais**... Maringá: Unicesumar, 2017.

ALMEIDA JUNIOR, E. R. B.; CARDOSO, V. C.; KATO, L. A. **Operações aditivas com números inteiros a partir da interação com um jogo digital.** In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2017, Paraná. Anais... Cascavel: Unioeste, 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Ensino Fundamental. Brasília: MEC. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 30/06/2019.

JOHNSON, C. I.; MAYER, R. E. **Applying the self-explanation principle to multimedia learning in a computer-based game-like environment.** Computers in Human Behavior, v. 26.6, p. 12461252, 2010.

MATTAR, J. **Game em educação:** como os nativos digitais aprendem. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

MAYER, R. E. **Multimedia Learning**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

PRENSKY, M. **Digital Natives, Digital Immigrants.** NCB University Press., v. 9, p.5, Outubro, 2001.

CAPÍTULO 2

OS CONCEITOS MATEMÁTICOS NO COTIDIANO DA FEIRA LIVRE: UMA INVESTIGAÇÃO FEITA PELOS ALUNOS DA EJA

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 27/07/2020

Tacio Vitaliano da Silva
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal/RN
http://lattes.cnpq.br/3749218626138530

Francisca Vandilma Costa
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Natal/RN
http://lattes.cnpq.br/1179520542965293

RESUMO: Este trabalho foi oriundo de uma pesquisa em que 14 alunos de duas turmas do III nível do 2.º segmento do Ensino Fundamental da Educação de Jovens e Adultos, da Escola Municipal Amadeu Araújo, desenvolveram na feira livre na cidade de Natal, para compreender a forma com que a Matemática no cotidiano, se apresenta diante das dificuldades que os educandos têm em compreender os Números Racionais, na representação decimal, suas operações e a relação desses com situações do cotidiano. A problemática do estudo deu-se em como promover uma aprendizagem com significados dos números e suas operações junto aos alunos de EJA, quando relaciona a matemática que eles estudam e a matemática da feira livre? O objetivo principal consiste em analisar a feira livre como um ambiente de aprendizado que estabelece relações com os conteúdos de matemática apresentados em sala de aula. O percurso metodológico desse trabalho iniciou-se com um levantamento bibliográfico e em seguida a pesquisa ancorou-se nas ideias de Fiorentini e Lorenzato (2009); bem como nos estudos de Bicudo (2005) e Freire (1996). Logo após, definiu-se, guiados pelo objeto de estudo, os sujeitos e o lócus da pesquisa assim como o instrumento de coleta de dados. Os resultados oriundos das análises revelaram que é necessário se conhecer a matemática oriunda do cotidiano, porém é dada pouca relevância, por parte de muitos professores, ao conhecimento prévio do aluno. Dessa forma, a reflexão crítica sobre o saber matemático deve ser vista com seriedade.

PALAVRAS-CHAVE: EJA, Matemática no cotidiano, Feira.

MATHEMATICAL CONCEPTS IN THE DAILY LIFE OF THE FREE FAIR: AN INVESTIGATION MADE BY THE STUDENTS OF THE EJA

ABSTRACT: This work originated from a survey in which 14 students from two classes of the III level of the 2nd segment of Elementary Education of Youth and Adults, the Municipal School Amadeu Araújo, developed at the free fair in the city of Natal, to understand the way in which Mathematics in everyday life presents itself before the difficulties that the students have in understanding the Rational Numbers, in the decimal representation, their operations and their relation with everyday situations. The problematic of the study was how to promote a learning with meanings of the numbers and their operations with the students of EJA, when it relates the

mathematics they study and the mathematics of the fair free? The main objective is to analyze the fair as a learning environment that establishes relations with the mathematics content presented in the classroom. The methodological course of this work began with a bibliographic survey and then the research was anchored in the ideas of Fiorentini and Lorenzato (2009); as well as in the studies of Bicudo (2005) and Freire (1996). Soon after, the subjects and the locus of the research were defined, guided by the object of study, as well as the instrument of data collection. The results from the analyses revealed that it is necessary to know the mathematics from everyday life, but is given little relevance, by many teachers, to the previous knowledge of the student. Thus, critical reflection on mathematical knowledge must be taken seriously.
KEYWORDS: EJA, Mathematics in everyday life, Fair.

1 I INTRODUÇÃO

Esse trabalho trata da temática da aprendizagem matemática na Educação de Jovens e Adultos considerando os aspectos do cotidiano. Desse modo foi feita uma pesquisa de cunho científico no intuito de entender como se estabelece as relações dos conceitos matemáticos oriundos da feira com a matemática sistematizada presente na memória dos alunos da EJA. A capacidade em entender conceitos matemáticos é de grande relevância quando o aluno tem chance, a partir de estratégias didáticas, de entender conceitos matemáticos tratados em sala de aula, principalmente quando esses conceitos estão ligados aos aspectos do cotidiano do aluno.

Conforme Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 59) “Como podemos saber quando um trabalho é realmente uma pesquisa científica?”. Sabemos que a pesquisa científica persegue uma indagação uma pergunta de forma metódica.

Bicudo, (1993, p. 18) relata que, pesquisar significa “perseguir uma interrogação (problema pergunta) de modo rigoroso, sistemático, sempre andando em torno dela buscando todas as dimensões.”

É notória a importância da aprendizagem da matemática para o desenvolvimento do aluno em se tratando do senso crítico e reflexivo, haja vista que, cada vez mais há dificuldades entre os alunos em entender conceitos matemáticos.

Acreditamos que o processo de pesquisa e investigação científica de elementos matemáticos presentes nas relações de negociação e dos conhecimentos prévios existentes na feira laboram como suporte didático na condução do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos necessários aos alunos pesquisadores do III nível da EJA.

Desse modo surgem algumas indagações que nos propõe refletir sobre a temática, de que forma os elementos matemáticos são percebidos pelos alunos na feira? Como os feirantes operam com os números nas suas negociações? Essas questões nos conduzem a refletir e procurar resposta para o seguinte problema:

Como promover uma aprendizagem com significados dos números e suas operações junto aos alunos de EJA, quando relaciona a Matemática que eles estudam e a matemática da feira livre?

Percebe-se o quanto é específico a matemática oriunda do cotidiano do aluno inserido na modalidade EJA, porém é dada pouca relevância por parte de muitos professores ao conhecimento prévio do aluno, pois os conhecimentos prévios dos alunos são diversificados e na maioria das vezes são vistos equivocadamente como obstáculos à aprendizagem. Desse modo, o ensino é carente de uma formação adequada e sólida na área desse saber. Freire (1996, p. 15) relata que,

> Por isso mesmo pensar certo coloca ao professor ou, mais amplamente, à escola, o dever de não só respeitar os saberes com que os educandos, sobretudo os da classes populares, chegam a ela – saberes socialmente construídos na prática comunitária – mas também, como há mais de trinta anos venho sugerindo, discutir com os alunos a razão de ser de alguns desses saberes em relação com o ensino dos conteúdos.

Dessa forma, é necessário mostrar aos alunos a importância de trabalhos que mobilizem os seus conhecimentos prévios e seus saberes com os conteúdos sistematizados na qual eles veem em sala de aula.

Apresentamos como Objetivo geral desse trabalho: Analisar a feira livre como um ambiente de aprendizado que estabelece relações com os conteúdos de Matemática apresentados em sala de aula, contribuindo para a formação de um pensamento crítico do aluno da Educação de Jovens e Adultos. Cujo objetivo específico trata de: mostrar que a Matemática apresentada na feira é diferente da sistematizada, mas uma não anula a outra.

2 | TRAJETÓRIA METODOLÓGICA

Participaram desta pesquisa 14 alunos de duas turmas do III nível do 2º segmento Ensino Fundamental da Educação de Jovens e Adultos da rede municipal da cidade do Natal, no período noturno.

No âmbito metodológico, essa pesquisa pôde ser classificada em qualitativa amparada na análise interpretativa das questões. A pesquisa foi desenvolvida por meio de um questionário colaborativo com questões abertas, onde os alunos foram os entrevistadores. Eles tiveram a oportunidade de ouvir dos feirantes as suas conclusões sobre a relação da matemática com situações de compra e venda presentes no cotidiano.

3 | DESENVOLVIMENTO

O referido trabalho de investigação se dá no ambiente da feira livre que foi escolhida como campo de pesquisa para compreender os números, suas propriedades e a sua relação com o cotidiano. Desse modo foi desenvolvido um trabalho de pesquisa, com os alunos da EJA do turno noturno de uma escola municipal de Natal.

Há momentos na de investigação que trata da elaboração do problema e da formulação das conclusões da pesquisa. Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 60) relatam que,

> Existem dois momentos fundamentais num processo de investigação: o de formulação do problema ou da questão de investigação e o de construção das conclusões ou a uma resposta consistente e confiável para a questão/pergunta de investigação precisamos buscar ou construir um caminho (isto é, uma alternativa metodológica mais segura possível), o qual permita, de maneira satisfatória, tratar o problema ou responder à questão de investigação.

Trabalhar com investigação científica na Educação de Jovens e Adultos é um desafio, pois os alunos dessa modalidade não tem o hábito de desenvolverem pesquisa científica.

Ao longo dos tempos a Educação de Jovens e Adultos não era definida como prioritária no campo da política educacional. Era vista quase que de maneira “marginal” no âmbito do sistema educacional como um todo.

Entre 1940 e 1970 começou-se a buscar o desenvolvimento de programas que contemplassem não só o Adulto do período do Império, mas a juventude da Educação de Jovens e Adultos (EJA).

O Ministério da Educação adotou as orientações metodológicas de Paulo Freire, que ficaram popularmente conhecidas como *Método Paulo Freire* de Alfabetização de Adultos, tamanho sucesso que obteve. Paulo Freire também propunha que o educador utilizasse ilustrações e abrisse uma discussão que evidenciasse o papel ativo dos homens como produtores de cultura, e, que o educando assumisse a sua capacidade e responsabilidade na aprendizagem.

No Brasil Em 2001, criou-se o Programa Recomeço. No final de 2002, baseado em dados de uma pesquisa nacional, o MEC lançou a proposta curricular do segundo segmento da EJA III e IV que correspondem às de 5ª a 8ª séries do ensino regular, atualmente do 6º ao 9º ano. O objetivo desse programa é proporcionar ao aluno sua integração na escola de forma que exerça o ato de cidadania na escola e na comunidade em que vive.

No ano de 2009 em Belém/PA, realizou-se a VI CONFINTEA cujas temáticas defendidas foram desenvolver aprendizagem ao longo da vida, a alfabetização como meio essencial de capacitar o educando para enfrentar os problemas da vida, as políticas para a Educação de Jovens e adultos tem que ser globais, inclusivas e integradas numa perspectiva de aprendizagem ao longo de toda vida, a educação inclusiva e a qualidade da aprendizagem tanto na metodologia de ensino como nos materiais didáticos.

A Educação de Jovens e Adultos (EJA) é uma modalidade da Educação Básica que sugere atender a um público ao qual foi negado o direito à educação durante a infância e/ou adolescência. a definição de EJA na visão de Haddad e Di Pierro (2000, p. 108) da seguinte forma: "a educação de jovens e adultos sempre compreendeu um conjunto muito diverso de processos e práticas formais e informais relacionadas à aquisição ou ampliação de conhecimentos básicos, de competências técnicas e profissionais ou de habilidades socioculturais.

Os sujeitos da EJA são homens e mulheres, trabalhadores (as) empregados (as) e desempregados (as) ou em busca do primeiro emprego; moradores urbanos de periferias, favelas e vilas. Eles vivem no mundo urbano, industrializado, burocratizado e escolarizado, em geral trabalhando em ocupações não qualificadas. É cada vez mais reduzido o número de sujeitos que não tiveram passagens anteriores pela escola e o aumento da demanda indica um número cada vez maior da presença de adolescentes e jovens recém-saídos do Ensino regular, onde tiveram passagens acidentadas e buscam a EJA visando superar essas dificuldades.

4 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

- O aluno Dannylkyson Fernandes do III nível turma B foi a feira e entrevistou Sr. João, que tinha a idade 83 anos e há 11 anos trabalha na feira vendendo queijo e carne. Seu grau de instrução é o Ensino Médio incompleto.

- Quando o entrevistador perguntou ao Sr. João se ele tinha facilidade em fazer cálculos matemáticos "de cabeça" (cálculo mental), ele respondeu que não. Quanto a satisfação do seu emprego ele disse que está satisfeito, pois ganha um bom dinheiro. Sobre o surgimento da feira, não soube responder. O entrevistador perguntou que queria comprar 300 gramas do produto cujo kg custa R$ 7,00. João calculou mentalmente que 300g custa R$ 2,00. **Resposta exata R$ 2,10.**

4.1 Comparação entre a resposta do feirante e o modelo matemático

Resolvendo o problema pela regra de três simples que é um conteúdo que faz parte da estrutura curricular de matemática do III nível da EJA, temos:

- 7,00- 1000g

- x - 300g

- x = 2,10

O feirante seu João resolveu a questão tendo como base os seus conhecimentos prévios. Desse modo o modelo matemático abaixo mostra como se configurou a matemática no seu cognitivo.

- Calculo mental:
- 7,00 – 1000g
- 3,50 - 500g
- 1,75 - 250g
- 0,25 - 50g
- 250g + 50g = 300g
- 1,75 + 0,25 = 2,00
- O equívoco encontrado no cálculo mental do Sr. João foi o preço de 50g que ele calculou de forma aproximada, ao invés de R$ 0,35 para as 50g, ele calculou R$ 0,25.

Nessa análise, observa-se a Matemática de João representada de forma diferente da sistematizada na escola. Apesar de um deles não ter facilidade em desenvolver o cálculo mental, consegue de forma rápida e objetiva calcular o preço do produto sem a utilização da calculadora ou do algoritmo da proporção mostrando aos entrevistadores (alunos) que a Matemática do cotidiano não é difícil, são conhecimentos prévios que podem dialogar com a matemática sistematizada. Dessa forma, Freire (1996, p. 19) mostra que,

> Este saber, o da importância desses gestos que se multiplicam diariamente nas tramas do espaço escolar, é algo sobre que teríamos de refletir seriamente. É uma pena que o caráter socializante da escola, o que há de informal na experiência que se vive nela, de formação ou deformação, seja negligenciado. Fala-se quase exclusivamente do ensino dos conteúdos, ensino lamentavelmente quase sempre entendido como transferência do saber.

A reflexão crítica sobre o saber matemático deve ser vista com seriedade, pois trata de se considerar os conhecimentos prévios dos alunos na fase tão importante que é a formação de conceitos no âmbito da aprendizagem dos conteúdos que não se resume apenas como transferência de conhecimento.

4.2 Qual conceito foi apreendido?

Diante da experiência vivida pelos alunos pesquisadores surge a seguinte indagação, houve aprendizagem do conceito do número decimal?

Carraher, Carraher e Schliemann (1995, p. 27) afirmam que: “era necessário conhecer melhor a matemática inerente às atividades da vida diária, a fim de construir, a partir dessa matemática, pontes e ligações efetivas para a matemática mais abstrata."

A pesquisa deixa claro que é necessário se conhecer a Matemática oriunda do cotidiano, porém é dada pouca relevância, por parte de muitos professores, ao conhecimento prévio do aluno. Existe uma valorização dos conhecimentos matemáticos formais e enciclopédicos em detrimento aos conhecimentos prévios dos alunos. Desse modo Nosella (2004, p. 70) defende, "a ideia de educar a partir da realidade viva do trabalhador e não de doutrinas frias e enciclopédicas; a ideia de educar para liberdade concreta[...]."

Os conhecimentos prévios dos alunos são diversificados e na maioria das vezes são vistos equivocadamente como obstáculos à aprendizagem. Cabe ao educador planejar uma intervenção didática que vise transformar essa diversidade, num ponto de estímulo de modo que o aluno consiga explicar fatos matemáticos, analisá-los e compreendê-los.

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não se pode ignorar que os alunos têm noções matemáticas adquiridas informalmente muito antes de estudar suas representações simbólicas. Esse saber deve ser considerado como suporte para o ensino de matemática em sala de aula.

É necessário permitir que os alunos conte suas histórias de vida e exponham seu saber sobre assuntos do seu cotidiano, assim como estabeleçam conexões entre diferentes temáticas no campo da matemática e uma relação com as demais áreas do conhecimento, pois os conceitos matemáticos quando vistos isoladamente, causam certa confusão na compreensão do aluno. Esses alunos trazem experiências decepcionantes com o saber matemático que certamente, interferem no processo ensino-aprendizagem.

Acreditamos que uma aprendizagem significativa dos Números Racionais na representação decimal, pode colaborar para o conhecimento matemático, de modo a cumprir o papel social que a Matemática deve desempenhar, quando o professor conduz por meio de novas metodologias, o processo ensino-aprendizagem com os alunos da EJA.

REFERÊNCIAS

BICUDO, M. A. V . **Pesquisa em Educação Matemática.** Pro-Posições (Unicamp), Campinas, v. 4, n.1[10], p. 18-23, 1993.

BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Proposta Curricular para educação de jovens e adultos: segundo segmento do ensino fundamental: 5ª a 8ª série. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 2002, vol. 3.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. **Na vida dez, na escola zero.** 10. ed. São Paulo: Cortez, 1995.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. Ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

NOSELLA, P. **A escola de Gramsci.** 3. Ed. rev. e atual. São Paulo: Cortez, 2004.

CAPÍTULO 3

O PENSAMENTO COMPUTACIONAL COMO ESTRATÉGIA DE REFORÇO DE APRENDIZAGEM EM CÁLCULO MENTAL

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 18/08/2020

Julio Cezar Romero
Instituto Federal de São Paulo
Caraguatatuba - SP
https://orcid.org/0000-0003-4290-2195

Juliano Schimiguel
Universidade Cruzeiro do Sul
São Paulo - SP
https://orcid.org/0000-0001-8552-7984

RESUMO: O Pensamento Computacional se caracteriza por ser um conjunto de processos cognitivos da ciência da computação para a resolução de problemas, sendo aplicada em áreas distintas do conhecimento. O referido trabalho busca apresentá-lo como estratégia de reforço de aprendizagem em operações matemáticas de soma por cálculo mental. Trata-se de relato de caso de atividade trabalhada em dezembro de 2019, entre os dias 3 e 5, com uma turma do 4º ano do Ensino Fundamental de uma escola localizada no município de Caraguatatuba, no Estado de São Paulo. Foram três aulas da disciplina de Matemática. Apesar de serem operações simples, dos 30 alunos, apenas 8 (26,67% do total) realizaram as operações mentalmente, ao passo que a maioria (73,33% do total) fizeram uso do caderno para realizar as operações. Pode-se concluir que, embora trate de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental, muitos ainda encontram barreiras para realizar operações de adição, podendo-se apresentar o pensamento computacional como estratégia de reforço de aprendizagem em sua realização.
PALAVRAS-CHAVE: Computação, Pensamento Computacional, Matemática, Cálculo Mental.

COMPUTATIONAL THINKING AS A STRATEGY FOR STRENGTHENING LEARNING IN MENTAL CALCULATION

ABSTRACT: Computational Thinking stands out for being a set of cognitive processes of science for problem solving, being applied in different areas of knowledge. This work seeks to present it as a strategy to reinforce learning in mathematical operations of sum by mental calculation. This is a case report of an activity worked out in December 2019, between the 3rd and the 5th, with a class from the 4th year of elementary school at a school located in the municipality of Caraguatatuba, in the State of São Paulo. There were three classes in Mathematics. Despite being simple operations, of the 30 students, only 8 (26.67% of the total) performed the operations mentally, while the majority (73.33% of the total) used the notebook to perform the operations. It can be concluded that, although they are students of the 4th year of elementary school, many still find barriers to carry out addition operations, being possible to present computational thinking as a strategy to reinforce learning in its realization.
KEYWORDS: Computing, Computational Thinking, Mathematics, Mental Calculation.

1 I INTRODUÇÃO

Ao se considerar a história da Computação moderna (séculos XX e XXI), verifica-se que ela apresenta afinidade com a ação de viabilizar a realização de cálculos numéricos. Nesse sentido, importante menção se faz ao artigo de Alan Turing, de 1936, intitulado "*On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*", no qual o autor definiu as bases estruturais da Computação como é conhecida atualmente. Foi a partir das concepções de Turing, relatadas nesse artigo, que se vislumbrou a viabilidade de realizar cálculos numéricos por meio de uma máquina conceitual, que foi denominada posteriormente de Máquina Universal de Turing (MORAIS; FAGUNDES; MATTOS, 2013).

No entanto, para que a construção de máquinas de computação eletrônica se torne viável, favorecendo, assim, o posterior desenvolvimento de compiladores e linguagens de programação, incorporaram-se outras áreas do conhecimento à Computação, buscando-se, com isso, estruturar o seu corpo de conhecimento (*Body of Knowledge*) (DENNING, 2005; MORAIS; FAGUNDES; MATTOS, 2013; SOUSA; LENCASTRE, 2014).

No desenvolvimento de algoritmos heurísticos e na definição de modelos a serem adotados no processo de desenvolvimento de *software* faz-se uso do método científico, que tem por base o princípio da experimentação. Tanto o projeto como o desenvolvimento do *software* se inserem na esfera de abrangência da Engenharia, que abrange, pois, a aplicação da técnica. Já a Matemática, com seu sistema de dedução fundado em axiomas e sua representação simbólica, torna-se base para o estudo da análise numérica e da complexidade de algoritmos (MORAIS; FAGUNDES; MATTOS, 2013).

Muito embora a Computação busque os seus fundamentos em outras áreas do conhecimento, é fato que, ao analisá-la, ela parece introduzir mecanismos de raciocínio bastante singulares para a resolução de problemas. Contudo, suas aplicações seguem além das fronteiras da Computação em si, não se limitando a ela (SOUSA; LENCASTRE, 2014). É justamente pelo fato de poder beneficiar outras áreas do conhecimento que se vislumbra a conveniência de definir a competências específicas.

Sobre elas, interessa trazer à baila contribuição de Wing (2006), sendo quem estas competências específicas podem ser agrupadas em um conjunto denominado Pensamento Computacional. Para a autora, trata-se de um grupo que detém as seguintes características: corresponde ao ato de conceituar ao invés do de programar; não é habilidade utilitária, mas, sim, fundamental; forma pela qual as pessoas, e não os computadores, raciocinam; busca complementar e combinar a Matemática à Engenharia; não gera artefatos, e, sim, ideias; possui diversas aplicações, podendo ser útil para diferentes aplicações e pessoas.

Em geral, considerando-se o processo de aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental, é possível perceber que muitos deles apresentam dificuldades em relação à realização de operações matemáticas, sendo comum, no momento de aplicação dos exercícios, que o aluno busque confirmar com o professor qual operação deverá realizar (se de adição ou de subtração), sem procurar ao menos ler refletir por si só sobre o que é proposto (MORAIS; FAGUNDES; MATTOS, 2013; MORAIS; BASSO; FAGUNDES, 2017). Contudo, conforme Morais, Basso e Fagundes (2017), em muitos casos, quando questiona o tipo de operação a ser utilizada, o que o aluno pretende é, na verdade, que o professor dê a ele a resposta do exercício. Existem, ainda, conforme o autor, situações em que o aluno tem dificuldades de organizar os dados extraídos para a realização da atividade, dificultando o trabalho do professor.

Diante do exposto, é possível pontuar que a formação do raciocínio lógico ainda consiste em um fator bastante preocupante ao se considerar o processo formativo do alunado. A questão, contudo, como bem pontuam Morais, Basso e Fagundes (2017), é que tal dificuldade pode seguir com o estudante até o Ensino Superior, caso ele não receba os estímulos necessários ao desenvolvimento dessa importante competência. Ressaltam os autores, ainda, a influência da formação docente nesse contexto, expondo a necessidade de os professores disporem de subsídios capazes de fazer com que os alunos exercitem suas habilidades em sala de aula.

É nesse contexto que adentra o Pensamento Computacional (do inglês, *Computational Thinking*), que revela um modo de pensar voltado à solução de problemas, com base nas técnicas e fundamentos da Ciência da Computação. Atualmente, trata-se de técnica vista com excelência para o desenvolvimento do raciocínio lógico. Isso porque, a partir de seus fundamentos, poderá o aluno aplicar técnicas como execução, organização e abstração do passo a passo para resolver problemas, auxiliando-o na compartimentalização do seu pensamento (MORAIS; FAGUNDES; MATTOS, 2013; MORAIS; BASSO; FAGUNDES, 2017).

Diante disso, trata-se o presente estudo de relato de experiência conduzido no âmbito da Matemática. O objetivo é apresentar o pensamento computacional como proposta de auxílio ou reforço de aprendizagem em operações matemáticas de soma por cálculo mental. Para tanto, propõe-se estabelecer relação entre o uso do sistema binário pelos computadores para processar as informações com a realização de operações matemáticas (em especial, de soma) pelo sistema decimal. A atividade foi desenvolvida em dezembro de 2019, entre os dias 3 e 5, na disciplina de Matemática com uma turma do 4º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública localizada no município de Caraguatatuba, no Estado de São Paulo. Ao todo, participaram 30 alunos. Foram três aulas da disciplina.

2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As pesquisas realizadas até o momento, de acordo com Silva, Silva e França (2017), destacam que diversos recursos que têm sido empregados nas práticas de ensino de pensamento computacional, dentre os quais se destacam a computação desplugada, jogos e ambientes de programação visual.

A pesquisa de Silva, Silva e França (2017) observou que os professores participantes de uma formação sobre pensamento computacional, no total de 27 professores, com uma média de participantes do curso de 13 docentes, e foi perceptível aos autores que a desmotivação dos professores por possivelmente desconhecimento da temática, já que os que compareceram, imaginavam que a formação trataria estritamente do uso de tecnologias em sala de aula. Silva, Silva e França (2017) ainda identificaram que a ausência de boa parte dos educadores é consequência da impossibilidade de participação da formação durante à noite e após jornada de trabalho nas escolas, como também pela dificuldade de ajustes nos horários entre o deslocamento das unidades escolares até o centro de formação. Os professores que participaram da formação conseguiram construir diálogos e debates sobre PC, de maneira interdisciplinar, o que possibilitou a ampliação da percepção do tema.

A BNCC (BRASIL, 2017) trouxe, em sua última versão, várias referências sobre o conceito de PC como sendo fundamental para o desenvolvimento de algumas habilidades na área de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Fundamental. A Matemática para os alunos do Ensino Fundamental visa ao desenvolvimento de conceitos e procedimentos em diversos campos, objetivando à resolução de situações-problema. O desenvolvimento dessas habilidades se relaciona a diversas formas de organização da aprendizagem matemática, baseando-se na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática. A BNCC (BRASIL, 2017), portanto, apresentou inúmeras mudanças à educação brasileira, importante foco na tecnologia em sala de aula e desta maneira, uma das cinco competências compreende o uso da tecnologia pelos estudantes de maneira direta e expressiva, enfatizando as linguagens de programação e domínio de algoritmos, uma vez que ambos os conteúdos podem ser úteis e importantes para auxiliar a solucionar desafios cotidianos.

Pasqual Júnior (2018) afirma que os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem são formas privilegiadas da atividade matemática, sendo objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental e são esses processos de característica extremamente rica para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.

3 I METODOLOGIA

Gil (2010) considera que o método científico deriva de princípios reconhecidos como indiscutíveis e verdadeiros, que possibilitam chegar a conclusões apenas por causa da argumentação aplicada e monitorar o desenvolvimento formal.

O principal papel dos métodos e da tecnologia de pesquisa é apresentar e explicar sistematicamente investigações quantitativas feitas em relação a aspectos das ciências sociais (Fachin, 2006).

Para isso, abordam aspectos relacionados a padrões comportamentais e culturais, bem como as condições ambientais, físicas, econômicas ou psicológicas que ocorrem em uma comunidade específica e se relacionam com os fenômenos de várias formas naturais que pertencem a outras ciências, como física, química e biologia (Fachin, 2006).

Foi adotada para esta pesquisa uma abordagem descritiva, quantitativa e qualitativa. Optou-se pela natureza quantitativa sendo complementada pela qualitativa, pois esta última auxilia na apreensão de outros significados presentes (que não podem ser apenas mensurados) no contexto investigado, permitindo ao pesquisador acesso a informações relevantes que garantam um melhor entendimento do objeto em estudo.

Segundo Gil (2010), delimitar um estudo metodologicamente organiza-o, pois é o momento em que o pesquisador estabelece os métodos técnicos do estudo, bem como a oportunidade que ele oferece para as ferramentas e procedimentos necessários para a coleta dos dados.

4 I RELATO DA EXPERIÊNCIA

Inicialmente, cumpre destacar que a ideia de realizar a presente atividade surgiu a partir de uma conversa entre esse autor com a professora do 4º ano do Ensino Fundamental, que relatou que os alunos ainda encontravam dificuldades na realização de adição envolvendo cálculo mental. Diante disso, surgiu a proposta de aplicação de uma atividade que estimulasse o desenvolvimento do pensamento computacional nos discentes, buscando, com isso, auxiliá-los em operações no campo aditivo envolvendo cálculos mentais.

A atividade foi desenvolvida no mês de dezembro de 2019 entre os dias 3 e 5 em uma escola municipal de Caraguatatuba, Estado de São Paulo. Para tanto, foram utilizadas três aulas da disciplina de matemática em uma turma do 4º ano do

Ensino Fundamental, totalizando 30 alunos.

No primeiro dia, a professora me apresentou aos alunos, destacando que naquele dia e nos dois subsequentes as aulas de matemática seriam conduzidas por mim. A partir daí, fiz minha apresentação, informando logo em seguida que o propósito das atividades seria o de compreender como os computadores conseguem traduzir as informações passadas por nós a eles. A partir daí, fiz algumas perguntas à turma.

O primeiro questionamento foi se eles utilizavam computadores ou celular, tendo a maioria respondido que faz uso do celular, principalmente para jogar, assistir vídeos e tirar fotos.

Diante dessas respostas, passei a relatar que os computadores tinham uma relação muito interessante com os números, me referindo ao sistema binário, e destaquei que, para melhor compreender isso, seriam propostas algumas atividades voltadas a desenvolver neles o pensamento computacional.

Voltei a fazer questionamentos à turma, dessa vez sobre o que seriam os números e para que eles servem. A esse questionamento em específico, alguns responderam que eles “servem pra contar”, para “medir distância”, para “dar o valor de um produto”.

A partir daí, fiz menção à contagem dos números seguindo o sistema decimal, que é o que nós normalmente utilizamos. Introduzi, assim, a ideia do sistema binário, apresentando-o como um sistema de numeração utilizado pelos computados para codificar tudo o que neles é processado. Destaquei, ainda, que, diferente do sistema decimal, o sistema binário é composto somente por dois números, quais sejam, o zero (0) e o um (1).

Nesse momento, percebi que muitos alunos demonstraram perplexidade e até mesmo descrença em relação a tal possibilidade. Diante disso, questionaram como isso seria possível, momento em que apresentei o sistema binário como uma espécie de tradutor das informações processadas pelos computadores. Com isso, propus que fizéssemos, na próxima aula, uma atividade que reproduzisse essa mesma ação, traduzindo os números do sistema binário para o decimal.

Na segunda aula, retomaram-se as concepções passadas na aula anterior, detalhando os procedimentos a serem seguidos para a realização da atividade, que seriam os seguintes: primeiramente, seriam distribuídas folhas em branco para os alunos, de forma que eles pudessem reproduzir os cartões com a disposição e quantidade de “pontinhos” descrita na Figura 1.

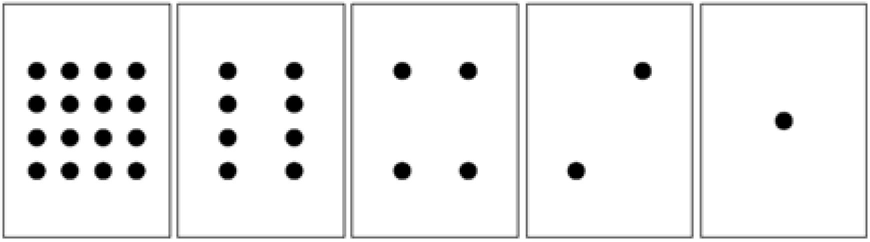


Figura 1 – Linguagem binária

Fonte: Computer Science Unplugged (2011, p. 6)

Solicitou-se aos alunos que reproduzissem os cartões e os mantivessem na sequência apresentada, tendo sido percebido naturalmente pelos alunos de que a carta posterior representava o dobro da anterior.

Feito isso, fez-se breve revisão sobre o sistema binário, relembrando de que se trata de sistema composto apenas pelo zero (0) e pelo um (1). Em termos de representação associativa, propôs-se aos alunos que relacionassem o zero (0) a algo desligado (off), e o um (1) a algo ligado (on). Assim, para a atividade de conversão de números binários em racionais, sempre que se estivesse diante do dígito zero (0), a carta correspondente ao dígito deveria ser virada, de modo que ela passasse a representar que estava no modo off, o que a excluiria da conversão. Desse modo, as cartas que ficassem viradas para cima, teriam os seus "pontinhos" contados, correspondendo, assim, ao número decimal. O primeiro exemplo prático apresentado foi de converter o número binário 0100 em número decimal. A representação por meio dos cartões seria a disposta na Figura 2:

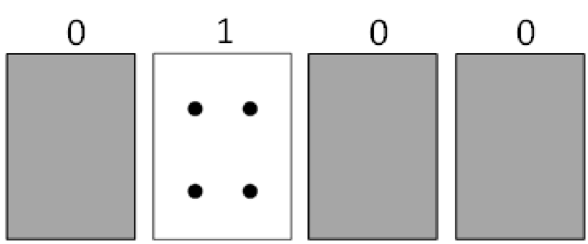


Figura 2 – Conversão 0100 em número decimal

Fonte: atividade prática

Assim, o número binário 0100 convertido em número decimal seria 4.

Buscando-se estimular nos alunos o pensamento computacional para resolução desse problema, procedeu-se, em conjunto com a turma, à conversão do número binário 0011 em número decimal. Os cartões ficaram dispostos conforme exposto na Figura 3:

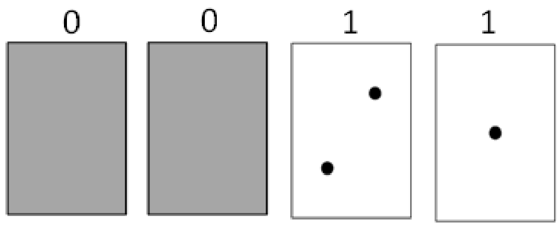


Figura 3 – Conversão 0011 em número decimal

Fonte: atividade prática

Desse modo, o número binário 0011, ao ser convertido em número decimal, seria 3.

Após as duas explicações perguntei se haviam entendido. Neste momento 7 alunos levantaram a mão pedindo ajuda. Fui então na carteira de cada um procedendo com a explicação. Após isso, todos disseram que haviam compreendido. Antes que acabasse a aula, perguntei a eles o que tinham achado da aula. Cerca de 12 alunos disseram que tinham gostado. Outros 9 relataram que gostaram bastante de usar as cartas. O restante da classe preferiu ficar em silêncio. Encerrei a aula orientando que guardassem os cartões pois iríamos utilizá-los na próxima aula. Em seguida agradeci a participação de todos e disse que no próximo dia iríamos realizar algumas atividades práticas.

No dia seguinte iniciei pedindo que pegassem os cartões e colocassem na ordem que havia explicado no dia anterior. Neste momento, 3 alunos pediram ajuda pois não recordavam como as cartas deveriam ficar dispostas. Pedi para que os colegas ao lado ajudassem o amigo. Em seguida informei que a atividade não valeria nota. Tinha como único objetivo verificar se tinham ou não entendido o processo que os computadores utilizavam para converter o sistema binário em decimal.

A partir daí, com o uso do projetor listei as atividades e pedi para que resolvessem sozinhos as seguintes conversões de números binários em decimais:

a) 01010

b) 01110

c) 11110

d) 10101

e) 11001

Durante a aplicação da atividade, percebi um certo nervosismo, talvez ansiedade em alguns alunos. Quatro alunos me pediram ajuda. Pedi para que viessem na frente da sala e fiz uma breve recordação do que deveria ser feito. Em seguida pedi para que retornassem e tentassem realizar as atividades. Já o restante da turma, aparentemente estava bem tranquila. Após aproximadamente 25 minutos percebi que todos já tinham me devolvido a folha.

Em seguida, de posse das folhas, perguntei o que tinham achado da atividade. Recebi algumas respostas, dentre as quais destaco:

- Foi bem diferente, mas gostei.

- Achei um pouco difícil no começo, mas gostei bastante

- Foi bem legal, gostei de usar os cartões.

Antes de encerrar a aula, sugeri que usassem as cartas com amigos ou irmãos para brincarem de realizar somas como também explicassem o que tinham aprendido durante as aulas. Agradeci a todos e encerrei as atividades.

5 I DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos demonstraram que, dos alunos que realizaram a atividade, no total de 30, 16 (53,32%) conseguiram resolver todas as atividades. Do restante, 5 (16,67% do total) as atividades 1,4 e 5; 3 (10% do total) as atividades 1, 2 e 4; 2 (6,67% do total) resolveram as atividades 2, 4 e 5; 2 (6,67% do total) resolveram as atividades 1 e 5; e 2 (6,67% do total) resolveram as atividades 2 e 4 (Gráfico 1).

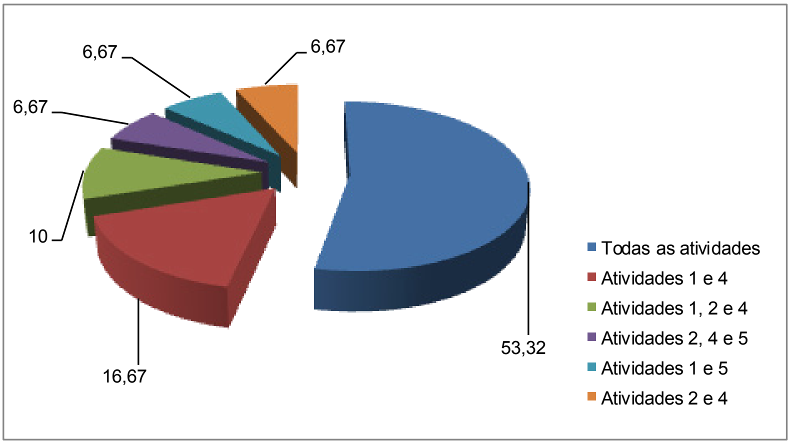


Gráfico 1 – Atividades resolvidas pelos alunos (%)

Em relação à resolução propriamente dita do problema, pode-se afirmar que todos resolveram pelo menos 2 atividades, sendo que 8 (26,67%) alunos informaram que realizaram as contas mentalmente, ao passo que 22 (73,33%) fizeram uso do caderno para as operações de soma (Gráfico 2).

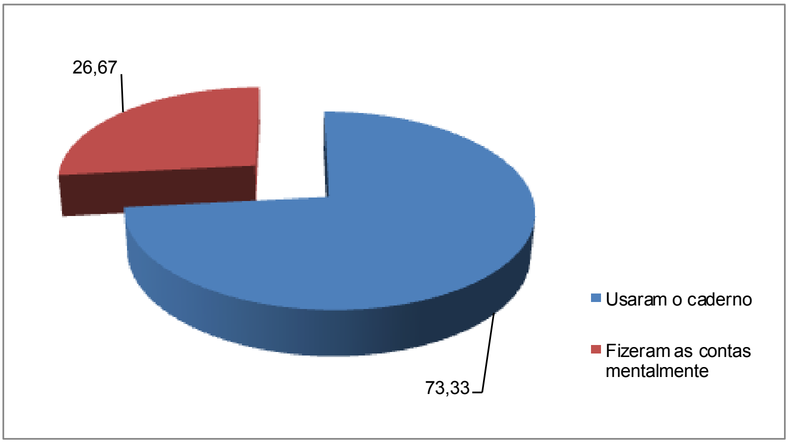


Gráfico 2 – Recursos usados pelos alunos para as operações de soma (%)

6 I CONSIDERAÇÕES

Em geral, considerando-se o processo de aprendizagem dos alunos do Ensino Fundamental, é possível perceber que muitos deles apresentam dificuldades em relação à formação do raciocínio lógico. Nesse contexto, é comum, no momento de aplicação dos exercícios matemáticos, que o aluno busque confirmar com o professor qual operação deverá realizar (se de adição ou de subtração), sem procurar pelo menos ler refletir por si só sobre o que é proposto.

Contudo, como se pode verificar na literatura pesquisada, em muitos casos, quando ele questiona o tipo de operação a ser utilizada, o que o aluno pretende é, na verdade, que o professor dê a ele a resposta do exercício. Existem, ainda, situações nas quais os alunos têm dificuldades de organizar os dados extraídos para a realização da atividade, dificultando o trabalho do professor. É nesse contexto que o Pensamento Computacional adentra, podendo favorecer o raciocínio lógico.

Os resultados obtidos a partir da revisão de literatura realizada, que foram corroborados pelo relato de experiência aqui apresentado, permitem concluir que, muito embora se trate de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental, muitos ainda encontram barreiras para realizar operações de adição envolvendo cálculos mentais.

Diante disso, muito embora não acredite na possibilidade de se concluir que o pensamento computacional possa ser considerado solução definitiva para sanar a dificuldade dos alunos na realização de cálculos mentais, pode-se, por meio dele, proporcionar atividades que saem da rotina das aulas, atraindo, assim, a atenção dos alunos. Acredita-se que a realização de atividades que estimulem o pensamento computacional possa efetivamente se tornar ferramentas de apoio para o processo de ensino e aprendizagem.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos à equipe gestora da EMEF Professor João Baptista Gardelin. Em especial, à Professora Ana Paula Martinez, que abriu o espaço de sua sala de aula, permitindo o desenvolvimento dessa atividade.

REFERÊNCIAS

BELL, T.; WHITTEN, I.; FELLOWS, M. **Computer Science Unplugged**. Universidade de Canterbury, Nova Zelândia, 2011. Disponível em: <http://csunplugged.org/sites/default/files/books/CSUnpluggedTeachers-portuguesebrazil-feb-2011.pdf>. Acesso em 14 de fevereiro de 2020.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **Base Nacional Comum Curricular**, 2017. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em 02 de julho de 2020.

DENNING, P. J. **Is computer science?** Communications of the ACM, v. 48, n. 4, p. 27-31, abr. 2005.

FACHIN, Odília. **Fundamentos de metodologia**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5ª ed. São Paulo: Atlas, 2010. 184p.

MORAIS, A. D. de; BASSO, M. V. de A.; FAGUNDES, L. da C. **Educação Matemática & Ciência da Computação na escola: aprender a programar fomenta a aprendizagem de matemática?**. Ciênc. educ. (Bauru), Bauru , v. 23, n. 2, p. 455-473, jun. 2017.

MORAIS, A. D.; FAGUNDES, L. C.; MATTOS, E. B. V. **A matemática do Squeak Etoys e educação matemática: uma perspectiva de projetos de aprendizagem**. In: Congresso Internacional de Informática Educativa, TISE, 18., 2013, Porto Alegre. Memorias...

PASQUAL JÚNIOR, Paulo Antonio; OLIVEIRA, Simone de. **Pensamento Computacional: Uma Proposta de Oficina Para a Formação de Professores**. UCS. RENOTE. V. 17 Nº 1. 2019. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/95707/0. Acesso em: 18 de junho de 2020.

SILVA Vladimir, SILVA, Klebson; FRANÇA, Rozelma Soares de. **Pensamento computacional na formação de professores: experiências e desafios encontrados no ensino da computação em escolas públicas**. VI Congresso Brasileiro de Informática na Educação. 2017. Disponível em: https://www.br-ie.org/pub/index.php/wie/article/view/7299/5097. Acesso em 12 de junho de 2020.

SOUSA, R. M.; LENCASTRE, J. A. **Scratch: uma opção válida para desenvolver o pensamento computacional e a competência de resolução de problemas**. In: CARVALHO, A. A. A. et al. (Org.). Atas do 2º encontro sobre jogos e mobile learning. Braga: CIEd, 2014. p. 256-267.

WING, J. **Computational thinking.** Communications of the ACM, v. 49, n. 3, p. 33-35, 2006.

CAPÍTULO 4

UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE TRANSFORMADA DE FOURIER

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 10/08/2020

Marcel Lucas Picanço Nascimento
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP
Macapá, Amapá
lattes.cnpq.br/8760711618082326

Vinícius Lemos dos Santos
Universidade Federal do Amapá - UNIFAP
Macapá, Amapá
lattes.cnpq.br/7078896706991199

RESUMO: O presente trabalho apresenta, como enfoque principal, o estudo introdutório da teoria moderna da transformada de Fourier, com o uso do espaço de funções de Schwartz (S) integráveis à Riemann, agregando simetria ao operador transformada, ou seja, tornando-o bijetivo. A abordagem metodológica utilizada foi constituída por pesquisas bibliográficas baseadas em títulos como: "Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais", "Introdução à Análise Funcional", e dissertações como "O Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaevskii", além de encontros semanais entre orientando e orientador para discutir os conceitos aqui apresentados. A partir das pesquisas, pôde-se concluir que as funções do espaço das funções integráveis e absolutamente integráveis à Riemann na reta ($\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$) sempre possuem transformada de Fourier, entretanto, este não é apropriado para oferecer simetria ao operador transformada, sendo necessário introduzir um novo espaço de funções, o espaço de Schwartz, para que o problema da simetria do operador seja resolvido.

PALAVRAS-CHAVE: Transformada de Fourier, Espaço de Schwartz.

AN INTRODUCTION TO THE STUDY OF FOURIER TRANSFORMS

ABSTRACT: The present work presentes, as main focus, the introductory study of the modern theory of the Fourier Transform, using the Schwartz function space (S) integrable to Riemann, adding symmetry to the transform operator, that is, making it bijective. The methodological approach used was made up of bibliographic research based on titles such as: "Fourier Analysis and Partial Differential Equations", "Introduction to Functional Analysis", and dissertations such as "The Cauchy Problem for the Gross-Pitaevskii System", in addition to weekly meetings between student and professor to discuss the concepts presented here. From the research, it was concluded that the functions of space of integrable and absolutely integrable functions to Riemann on the Real set ($\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$) always have Fourier Transform, however, this is not appropriate to offer symmetry to the transform operator, being ir necessary to introduce a new function space, the Schwartz space, so that the problem of symmetry is solved.

KEYWORDS: Fourier Transform, Schwartz Space.

1 I INTRODUÇÃO

Ainda sem deixar claro o espaço de funções a ser utilizado, definir-se-á a transformada de Fourier, de forma geral, para uma função $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, como operador $\mathcal{F}$ aplicado à f da seguinte forma:

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx. \quad (1)$$

Observe que, ao aplicar o operador transformada $\mathcal{F}$ na função f, o resultado deixa de ficar em função da variável *x*, passando a ficar em função da variável ξ. Mas, por praticidade, algumas vezes usaremos a notação $\mathcal{F}\,[f(x)]$ ou somente $\mathcal{F}\,[f]$, caso não haja problema no entendimento.

Como exemplo, calculemos a transformada de Fourier da seguinte função (ainda sem preocupações sobre existência da transformada da Fourier):

$$u(x) = \begin{cases} 1, & se \quad |x| \leq 1; \\ x, & se \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Pelo fato da função se anular fora do intervalo [-1,1], a integral imprópria (1) da definição de transformada se resumirá na integral definida

$$\mathcal{F}[u](\xi) = \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}.(1)dx.$$

Calculando a integral, obtemos como resultado

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\xi x}.(1)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{-i\xi} \left(e^{-i\xi} - e^{i\xi} \right) \right) = \frac{1}{-\sqrt{2\pi}(i\xi)} (-2isen\,\xi),$$

onde, na última igualdade, usamos a identidade trigonométrica do seno complexo: $sen\,\xi = {}^{(e^{i\xi} - e^{-i\xi})}\!/_{2i}$. Concluímos que a transformada de Fourier da função *u(x)* é

$$\mathcal{F}[u](\xi) = {}^{2sen\,\xi}\!/_{\xi\sqrt{2\pi}}. \quad (2)$$

Neste caso notemos em (2) que, para qualquer $\xi \in \mathbb{R}$, o cálculo da integral imprópria resulta em um número real, que é o valor da transformada de Fourier (lembrar que $sen\,\xi \leq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}$). Porém, nem sempre é possível chegar a um número real no cálculo da transformada, pois, como se pode ver na definição (1), o segundo membro da igualdade possui uma integral imprópria com respeito à *x*, e que pode ser convergente ou divergente. Vejamos o exemplo:

$$f(x) = \frac{e^{i\xi x}}{x},$$

cuja expressão da transformada de Fourier fica

$$\mathcal{F}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \left(\frac{e^{-i\xi x}}{x} \right) dx.$$

O cálculo da integral imprópria nos leva a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ que é divergente; uma evidência disto é que, para todo $a > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{a}^{t} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to +\infty} (\ln t - \ln a)$$

onde o limite do segundo membro é divergente. Logo, a transformada de Fourier da função $f(x) = e^{i\xi x}/x$ não é finita (não resulta em número real, qualquer que seja ξ). Nesta situação, dizemos que a transformada de Fourier $\mathcal{F}\,[f]$ não existe!

Portanto, para um estudo de transformada de Fourier, existe e é evidente a necessidade de se verificar para quais classes de funções a integral imprópria em (1) é convergente. E esta verificação resume-se, de maneira geral, a encontrar um espaço de funções do qual f seja elemento, para que tenhamos a convergência desejada. Este trabalho tem o intuito de fazer uma verificação e análise do espaço de funções ideal para construir uma sólida teoria de transformada de Fourier, a fim de possibilitar gerar uma excelente ferramenta auxiliar na resolução de problemas, por exemplo, com equações diferenciais. Na nossa pesquisa bibliográfica, o livro Figueiredo (2003) foi a referência que norteou boa parte do nosso estudo, principalmente no que diz respeito à teoria de transformada de Fourier propriamente dita, embora outras referências tenham tido papel imprescindível: o livro Botelho, Pellegrino, Teixeira (2012) foi nos auxiliou na introdução de definições e propriedades de espaços de funções, fundamentais para este trabalho; a dissertação de Cardoso (2005) nos ajudou, de forma mais específica, na compreensão de conceitos e resultados principalmente no que diz respeito aos espaços $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ e de Schwartz ($\mathcal{S}$). Os livros Guidorizzi (1986), Lima (2007) e Bartle (1983) serviram como referências para eventuais dúvidas conceituais sobre cálculo diferencial e integral e Análise Real.

Iniciemos nossa análise com o espaço de funções mais básico para se garantir a convergência da integral em (1), o espaço das funções $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integráveis e absolutamente integráveis (à Riemann) na reta, nominado $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou seja, são válidas as condições

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx < +\infty \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty.$$

Observação 1: Trabalharemos com integrais de Riemann, embora esta teoria possa ser desenvolvida e estudada com funções integráveis à Lebesgue (vide, por exemplo, a referência Rivera (2004).

Observação 2: Pode-se trabalhar com um espaço mais "básico" ainda, o espaço das funções que são seccionalmente contínuas em cada intervalo [*a,b*] e absolutamente integrável na reta. Mas esta condição é mais restritiva, e preferimos iniciar analisando com o espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, garantindo assim propriedades mais interessantes e abrangendo um número maior de funções.

Observação 3: O conjunto $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ é chamado de "espaço", referindo-se ao fato deste conjunto ser um espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação por escalar de funções $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Um resultado importante é a seguinte "desigualdade triangular" para integrais impróprias,

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx \qquad (3)$$

e que, por conseguinte, garante que f pertença a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ se, e somente se, a função $|f|$ também pertença.

Tanto esta desigualdade quanto a proposição a seguir, que normalmente são feitas para funções reais, também são válidas para funções a valores complexos, isto é, para aplicações do tipo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ em que se considera $f(x) = u(x) + iv(x)$, com u e v funções $u,v: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (parte real e parte imaginária, respectivamente). Neste caso, se $u(x)$, $v(x)$ e $|f(x)|$ são funções de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, então concluímos que $f(x) = u(x) + iv(x)$ também pertence a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

A proposição a seguir garante a existência da transformada de Fourier para funções no espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Proposição 1: Toda função f do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tem transformada de Fourier.

Demonstração: Para f uma função arbitrária do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, precisamos garantir a convergência da integral imprópria (1). Para isso, analisemos a convergência absoluta da integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-i\xi x} f(x)\right| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-i\xi x}\right| . \left|f(x)\right| dx.$$

Uma vez que $e^{-i\xi x} = \cos \xi x - i\, sen\, \xi x$, então $\left|e^{-i\xi x}\right| = \sqrt{\cos^2 \xi x + sen^2\, \xi x} = 1$, e por isso, resumimos a situação em

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-i\xi x} f(x)\right| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

esta última integral sendo finita pelo fato de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Portanto, a integral imprópria $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-i\xi x} f(x)\right| dx$ converge (absolutamente), o que implica na convergência (simples) de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx$, ou seja, existe a transformada de Fourier de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, para todo $\xi \in \mathbb{R}$. ■

Definindo a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ **sobre o espaço** $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, obtemos algumas propriedades interessantes:

- $\mathcal{F}[f]$ é uma função contínua (continuidade da transformada);
- $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \mathcal{F}[f](\xi) = 0$, ou seja, $\mathcal{F}[f](\xi)$ tende a zero no infinito.

As demonstrações destas propriedades exigem conhecimento de Análise Matemática fora do escopo deste trabalho (como Lema de Riemann e Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue), mas as provas podem ser encontradas no livro Dyke (2001, p. 140). Agora, o próximo resultado podemos demonstrar e nos será útil:

Proposição 2: Se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, então a transformada $\mathcal{F}[f](\xi)$ é função limitada.

Demonstração: Usando a desigualdade (3) e que $|e^{-i\xi x}| = 1$, basta fazer a conta

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\xi x}|.|f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

a última integral sendo finita pelo fato de $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Portanto, existe um real positivo *M*, tal que $|\mathcal{F}[f](\xi)| \le M$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, como queríamos mostrar. ■

2 I PROBLEMÁTICA: ASSIMETRIA DO OPERADOR $\mathcal{F}$ UTILIZANDO O ESPAÇO $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

A proposição a seguir apresenta uma prova da assimetria do operador $\mathcal{F}$ se definido sobre $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ indicando que se $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, não necessariamente a transformada de Fourier $\mathcal{F}[f]$ igualmente será.

Proposição 3 (Assimetria de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$): $\mathcal{F}$ é uma transformação assimétrica para funções do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, ou seja, a imagem da transformação sobre funções em $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nem sempre é uma função $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Demonstração: Ela será feita por contraexemplo. Já vimos em (2) que a transformada de Fourier de

$$u(x) = \begin{cases} 1, & se \quad |x| \le 1, \\ x, & se \quad |x| > 1, \end{cases}$$

é dada por $\mathcal{F}[u](\xi) = {2sen\,\xi}\big/{\xi\sqrt{2\pi}}$.. Contudo, neste caso, esta função transformada não pertence ao espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Isto porque, quando analisamos se a função $\mathcal{F}[u](\xi)$ é absolutamente integrável (em relação a ξ), temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{2sen\,\xi}{\xi\sqrt{2\pi}}\right|d\xi=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{sen\,\xi}{\xi}\right|d\xi=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{1}\left|\frac{sen\,\xi}{\xi}\right|d\xi+\int_{1}^{+\infty}\left|\frac{sen\,\xi}{\xi}\right|d\xi\right).$$

Trabalhemos em particular a integral imprópria $\int_1^{+\infty}\left|\frac{sen\,\xi}{\xi}\right|d\xi$ (pois a análise da outra integral se dá de forma análoga): uma vez que $|\,sen\,\xi\,| \le 1$, que implica que $sen^2\,\xi \le |\,sen\,\xi\,|$ então para todo $\xi \ge 1$

$$\int_{1}^{+\infty}\left|\frac{sen\,\xi}{\xi}\right|\,d\xi \ge \int_{1}^{+\infty}\frac{sen^2\xi}{\xi}\,d\xi=\lim_{t\to+\infty}\int_{1}^{t}\frac{sen^2\xi}{\xi}\,d\xi$$

e aplicando a técnica de integração por partes, obtemos

$$\int_{1}^{t}\frac{sen^2\xi}{\xi}\,d\xi\;=-\frac{sen\,2t}{4t}+\frac{sen\,2}{4}+\int_{1}^{t}\left(\frac{1}{2\xi}-\frac{sen\,2\xi}{4\xi^2}\right)d\xi\,.$$

Passando ao limite e verificando as parcelas:

- A parcela $(sen\,2)/_4$ é uma constante e usando o limite fundamental da trigonometria obtemos $\lim_{t\to+\infty}\frac{-sen\,2t}{4t}=0.$
- A primeira parcela da integral fica

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{2\xi}d\xi=\lim_{\mathrm{t}\to+\infty}\int_{1}^{t}\frac{1}{2\xi}d\xi=\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\ln t=+\infty\,.$$

Portanto, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{2\xi}d\xi$ é divergente.

- A última parcela é absolutamente convergente. Basta verificar que

$$\left|\frac{sen\,2\xi}{4\xi^2}\right|\le\frac{1}{4\xi^2},$$

enquanto que a integral imprópria $\int_1^{+\infty}\frac{1}{4\xi^2}d\xi$ é reconhecidamente convergente. Usando o teste de comparação para integrais impróprias, concluímos que $\int_1^{+\infty}\left|\frac{sen\,2\xi}{4\xi^2}\right|d\xi$ é convergente, o que implica na convergência de $\int_1^{+\infty}\frac{sen\,2\xi}{4\xi^2}d\xi.$

Diante do exposto, conclui-se que a integral imprópria $\int_1^{+\infty}\frac{sen^2\xi}{\xi}\,d\xi$ é divergente, e usando novamente o teste da comparação, resulta que $\int_1^{+\infty}\frac{|sen\,\xi|}{|\xi|}d\xi$ diverge.

Portanto, a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\mathcal{F}[f](\xi)|\,d\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{2sen\,\xi}{\xi\sqrt{2\pi}}\right|d\xi$$

diverge, e por isso, temos um exemplo de transformada $\mathcal{F}\,[f]\,(\xi)$ que não é função do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. ■

Percebe-se assim uma deficiência preponderante em se trabalhar transformada de Fourier sobre o espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, o que impossibilitaria trabalhar com a inversibilidade do operador transformada, indispensável na resolução de equações diferenciais.

A solução está em se definir a transformada em um espaço vetorial mais restritivo, de preferência dentro do espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ a fim de não perder as propriedades obtidas com ele, mas que também resolva o problema da assimetria do operador.

3 I SOLUÇÃO DO PROBLEMA: O ESPAÇO DE SCHWARTZ (S)

Diz-se que um função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ pertence ao espaço S – chamado **espaço de Schwartz**, se f for infinitamente (continuamente) diferenciável e se, para cada inteiro $m,n \in S$, tais que $m,n \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\sup|x^m D^n f(x)| < +\infty \tag{4}$$

onde $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ denota o operador diferencial de ordem n. O espaço S é chamado também de espaço das funções com decrescimento rápido, isto porque, a condição (4) implica que

$$\lim_{|x|\to\infty} x^m D^n f(x) = 0, \tag{5}$$

o que significa que as funções em S (e suas derivadas) tendem mais rápido para zero, quando $|x|$ tende para infinito, do que as potências x^m vão para o infinito. De fato, basta observar que, se vale (4) para todo $m,n > 0$ então é válido para $m+1,n>0$, ou seja, existe o número real $M>0$ tal que

$$|x^{m+1} D^n f(x)| \leq M$$

e usando propriedade de módulo, para todo $|x| > 0$, temos

$$|x|.|x^m D^n f(x)| \leq M \Rightarrow |x^m D^n f(x)| \leq \frac{M}{|x|}.$$

Fazendo $|x| \longrightarrow +\infty$(ou $\frac{1}{|x|} \longrightarrow 0$) e aplicando o teorema do confronto, concluímos que

$$\lim_{|x|\to\infty} x^m D^n f(x) = 0.$$

A recíproca, (5) implicando em (4), também é válida, mostrando que, na verdade, ambas as condições são equivalentes e podem definir o conjunto S.

Vejamos algumas notáveis propriedades do conjunto de funções em S:

Proposição 4: Se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é função do espaço S, então a função da forma $x^m D^n f \in S$.

Demonstração: Suponha $f(x)$ função de S. Para cada inteiro $m,n > 0$ (arbitrários), chamemos de $g(x) = x^m D^n f$; queremos mostrar que $g \in S$.

Primeiro observemos que $f(x)$ é infinitamente diferenciável, então que $D^n f(x)$ obviamente também é, e segue que o produto de duas funções infinitamente diferenciável x^m e $D^n f$ o é. Precisamos mostrar a existência do supremo de $|x^p D^k g(x)|$, para todo *p, k* > 0 inteiros. Façamos o cálculo da 1ª derivada:

$$D\big(g(x)\big) = mx^{m-1}D^n f(x) + x^m D^{n+1} f(x);$$

a 2ª derivada fica:

$$D^2 g(x) = m(m-1)x^{m-2}D^n f(x) + mx^{m-1}D^{n+1}f(x) + m(m-1)D^{n+1}f(x)$$

$$+x^m D^{n+2} f(x).$$

Se prosseguirmos com o processo de derivação, é fácil observar que todas as parcelas da derivada *k*-ésima de $g(x)$ obtidas são da forma

$$c(m)x^i D^j f(x)$$

com $i = 1,\ldots, m$ e $j = n,\ldots, k$ e $c(m)$ constante real positiva não nula dependendo de m.

Como $f \in S$, então para todo inteiro $m,n > 0$, existe um real $M > 0$ (dependendo de m,n) em que $|x^m D^n f| \leq M$, o que implica que,

- fazendo $m = i$ e $n = 0$, $|x^i| \leq M_i$
- fazendo $m = 0$ e $n = j$, $|D^j f(x)| \leq M_j$

Portanto cada parcela das derivadas de $g(x)$ será limitada pois

$$\left|c(m)x^i D^j f(x)\right| \leq c(m)\left|x^i\right| \cdot \left|D^j f(x)\right| \leq c(m) M_i M_j$$

e por consequência, toda *k* -ésima derivada de $g(x)$ é limitada: existe real M_k, tal que $|D^k g(x)| \leq M_k$ para todo inteiro $k > 0$.

Segue então que, de maneira geral, para todo inteiros positivos, existem *M*, *N* > 0 reais tais que

$$|x^p D^k g(x)| = |x^p| \cdot |D^k g(x)| \leq N \cdot M$$

o que nos resulta que

$$\sup|x^p D^k g(x)| < +\infty,$$

culminando que toda função $x^m D^n f(x) \in S$, sempre que $f \in S$. ■

A proposição a seguir justifica o motivo de chamarmos S de “espaço”.

Proposição 5: S é subespaço vetorial de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Demonstração: Vamos mostrar primeiramente que o conjunto S é subconjunto de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Se $f \in S$, então é contínua em $\mathbb{R}$, por ser infinitamente diferenciável e, logo, será contínua em cada intervalo fechado [*M,N*], e além do mais, f é limitada, garantindo-nos a integrabilidade de f em cada [*M,N*], e por consequência, integrabilidade de $|f|$ em [*M,N*].

Resta-nos provar que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ é convergente. Quebrando a integral nas parcelas $\int_{-1}^{+1} |f(x)|\, dx + \int_{|x|\geq 1} |f(x)|\, dx$, analisemos cada uma:

- f é limitada em [-1,1], então é integrável e por isso $\int_{-1}^{+1} |f(x)|\, dx < +\infty$;
- como $f \in S$, usando a condição (4) para $m = 2$, $n = 0$, temos para todo $x \in \mathbb{R}$.

Em particular para $|x| \geq 1$ e integrando em ambos lados em relação a x, obtemos

$$\int_{|x|\geq 1} |f(x)|\, dx \leq M \int_{|x|\geq 1} |x|^{-2}\, dx \leq M \int_{|x|\geq 1} 1\, dx = M < +\infty$$

Concluímos então que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$ e, portanto, $f \in S$. Além disso,

(i) $f \equiv 0$ implica diretamente que $\sup |x^m D^n(0)| < +\infty$. Logo $0 \in S$

(ii) para $f, g \in S$, temos, para todo $m,n > 0$ inteiros, $\sup |x^m D^n (f+g)(x)| \leq \sup |x^m D^n f(x)| + \sup |x^m D^n g(x)| < +\infty$. Assim, $f + g \in S$;

(iii) Para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in S$, $\sup |x^m D^n(\alpha f(x))| = \alpha \sup |x^m D^n(f(x))| < +\infty$.

Logo $\alpha f(x) \in S$, finalizando assim a demonstração de que S é subespaço vetorial de $\mathcal{L}^1\mathbb{R}$. ■

O resultado seguinte justifica o fato de a transformada de Fourier, sobre o espaço S, ser infinitamente diferenciável e, ainda, oferece-nos uma fórmula para calcular derivadas de transformada.

Proposição 6: Se $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ é função de S, então a transformada de Fourier $\mathcal{F}[f](\xi)$ será infinitamente diferenciável, e, para n inteiro positivo,

$$\frac{d^n}{d\xi^n}\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi).$$

Demonstração: esta prova é feita por indução. Porém, precisamos primeiro garantir a diferenciabilidade de primeira ordem e, para isso, usaremos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em Bartle (1983, p. 248):

Lema: Seja função contínua $(\xi, x) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \phi(\xi, x) \in \mathbb{R}$, I intervalo real, possuindo derivada parcial $\emptyset_\xi$ contínua e suponha que a integral $G(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi, x) dx$

convirja uniformemente em ℝ. Então G é derivável em ℝ e $G'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\xi(\xi, x)dx$.

Este lema nos dará embasamento para provar a diferenciabilidade da função $\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx$, desde que ela *convirja uniformemente* (dizemos que $\int_a^{+\infty} \phi(\xi, x)dx$ converge uniformemente se, $\forall \varepsilon > 0$, existir $x > \alpha$ tal que $\left|\int_x^{+\infty} \phi(\xi, x)dx\right| < \varepsilon$, para todo $x \in I$). E, de fato, chegamos indiretamente a convergência uniforme de $\mathcal{F}[f](\xi)$, obtida através do

Teste M de Weierstrass: Se, para cada ξ, a função $x \mapsto \phi(\xi, x)$ for $\mathcal{L}^1$ em ℝ e existir função integrável M: ℝ ⟶ ℝ integrável, tal que $|\phi(\xi, x)| \leq M(x), \forall \xi \in I$, então a integral $G(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi, x)dx$ converge uniformemente.

Este teorema e demonstração podem ser consultados em Bartle (1983, p. 245).

Prosseguindo na demonstração da Proposição 6, reunimos a seguinte situação para $\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx$: considerando $\phi(\xi, x) = e^{-i\xi x} f(x)$, temos $\phi(\xi, x)$ contínua (produto de funções contínuas $e^{-i\xi x}$ e $f(x)$) e a derivada $\phi_\xi = (-i\,x)e^{-i\xi x} f(x)$ existe e é contínua; além disso, como

- $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\xi, x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-i\xi x}|.\,|f(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$, lembrando que $\left|e^{-i\xi x}\right| = 1$. Portanto, $\Phi\ (\xi, x) \in \mathcal{L}^1$ em ℝ;
- $|\phi(\xi, x)| = \left|e^{-i\xi x}\right|.\,|f(x)| = |f(x)|$, ou seja, $\Phi\ (\xi, x)$ é limitada, para todo $\xi \in I$ pela função integrável $|f(x)|$.

Logo, pelo teste M de Weierstrass, $\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx$ converge uniformemente; pelas verificações expostas acima, $\mathcal{F}[f](\xi)$ se enquadra nas hipóteses do Lema de diferenciabilidade de integrais impróprias, garantindo assim a existência da derivada $\mathcal{F}'[f](\xi)$, dada por

$$\mathcal{F}'[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi}(e^{-i\xi x} f(x))dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)e^{-i\xi x} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}[(-ix)f(x)]dx = \mathcal{F}[(-ix)f](\xi).$$

Depois do primeiro passo, supomos agora valer a fórmula de diferenciabilidade de $\mathcal{F}$ para n: $\frac{d^n}{d\xi^n}\mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi)$ e mostraremos que vale para $n+1$. De fato,

$$\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}\mathcal{F}[f] = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{d^n}{d\xi^n}\mathcal{F}[f]\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi)\right) = \mathcal{F}[(-ix)^{n+1} f](\xi),$$

como queríamos mostrar. Portanto, $\mathcal{F}[f](\xi)$ é infinitamente derivável. ■

A proposição a seguir é um valoroso resultado, que mostra a característica da transformada de Fourier de eliminar derivadas de uma função de S:

Proposição 7: Se $f \in S$, então, para n natural diferente de zero,

$$\mathcal{F}[D^n f](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi).$$

Demonstração: Provaremos novamente por indução. Verifiquemos a condição para $n = 1$, primeiramente: usando integração por partes, calculamos a seguinte integral indefinida

$$\int e^{-i\xi x} f'(x)\, dx = e^{-ix\xi} f(x) + i\xi \int e^{-i\xi x} f(x)\, dx,$$

que nos ajudará a determinar a transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[Df](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f'(x)\, dx = e^{-i\xi x} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx.$$

Analisando o limite do segundo membro: $e^{-i\xi x} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} = e^{-i\xi x} f(x)]_{-\infty}^{0} + e^{-i\xi x} f(x)]_{0}^{+\infty}$ temos

- $e^{-i\xi x} f(x)]_{-\infty}^{0} = f(0) - \lim_{|x| \to \infty} \left(e^{-i\xi t} f(t)\right) = f(0) - 0 = f(0)$, lembrando que $\lim_{t \to +\infty} e^{-i\xi t} = 0$ e $f\ (t)$ limitada (pois $f \in S$).
- $e^{-i\xi x} f(x)]_{0}^{+\infty} = \lim_{|x| \to \infty} \left(e^{-i\xi t} f(t)\right) - f(0) = 0 - f(0) = -f(0).$

Assim, $e^{-i\xi x} f(x)]_{-\infty}^{+\infty} = f(0) + \left(-f(0)\right)$ e o cálculo da transformada de $\mathcal{F}$ $[D\ f]\ (\xi)$resulta em:

$$\mathcal{F}[Df](\xi) = 0 + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\, dx = i\xi \mathcal{F}[f](\xi),$$

ou seja,

$$\mathcal{F}[Df](\xi) = i\xi \mathcal{F}[f](\xi). \tag{6}$$

Agora, supondo a igualdade valer para n, $\mathcal{F}\ [D^n\ f](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}\ [f](\xi)$, vamos mostrar que é válida também para n+1. Observe que

$$\mathcal{F}[D^{n+1} f](\xi) = \mathcal{F}[D^n (Df)](\xi)$$

e usando a hipótese de indução sobre a função de Schwartz $D\ f(x)$, temos

$$\mathcal{F}[D^n (Df)](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[Df](\xi).$$

Como provamos valer (6) para n =1, concluímos que

$$(i\xi)^n \mathcal{F}[Df](\xi) = (i\xi)^n \left(i\xi \mathcal{F}[f](\xi)\right) = (i\xi)^{n+1} \mathcal{F}[f](\xi).$$

Portanto, $\mathcal{F}[D^{n+1}f](\xi) = (i\xi)^{n+1}\mathcal{F}[f](\xi)$, finalizando a prova por indução.

O seguinte teorema é o ponto central do trabalho, visto que garante a almejada simetria do operador transformada $\mathcal{F}$, se definido sobre o espaço de Schwartz $\mathcal{S}$.

Teorema 1: A transformada de Fourier é um operador linear simétrico, definido por $\mathcal{F}:\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$.

Demonstração: Com α ϵ ℝ e f, g ϵ $\mathcal{S}$ e usando propriedades de integral imprópria, observe que

$$\mathcal{F}[\alpha f + g](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\big(\alpha f(x) + g(x)\big)\,dx$$
$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} g(x)\,dx = \alpha\mathcal{F}[f](\xi) + \mathcal{F}[g](\xi),$$

provando assim ser linear o operador transformada $\mathcal{F}$. Para mostrar $\mathcal{F}$ simétrico sobre $\mathcal{S}$, precisamos provar $\mathcal{F}[f]$ (ξ) ser função de $\mathcal{S}$. Constatemos primeiro que, da Proposição 6, $\mathcal{F}[f]$ (ξ) é infinitamente diferenciável e

$$\xi^m \frac{d^n}{d\xi^n}\big(\mathcal{F}[f](\xi)\big) = \xi^m \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi),$$

para cada n inteiro positivo não nulo. Usaremos a fórmula da transformada de derivada de f obtida na Proposição 7, mas primeiro ajeitaremos a expressão

$$\xi^m \mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi) = \xi^m (i^m \cdot i^{-m})\mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi) = i^{-m}(\xi^m i^m)\mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi),$$

podemos aplicar agora a fórmula, sabendo que $i^{-m} = (-i)^m$,

$$i^{-m}(\xi^m i^m)\mathcal{F}[(-ix)^n f](\xi) = -(i^m)\mathcal{F}[D^m(-ix)^n f](\xi) = \mathcal{F}[(-i^m)D^m(-ix)^n f](\xi).$$

Como a derivada m-ésima de $f(x)$ é linear, então $(-i^m)\, D^m\, (-ix)^n f(x) = i^{m+n} D^m (x)^n f(x)$ é função do espaço $\mathcal{S}$ (devido a Proposição 4), e por consequência, é também função do espaço $\mathcal{L}^1$(ℝ) (Proposição 5). Mostramos que uma das propriedades do espaço $\mathcal{L}^1$(ℝ) é que se f ϵ $\mathcal{L}^1$(ℝ), então $\mathcal{F}[f]$(ξ) é limitada (Proposição 2). Usamos este fato para garantir que $\mathcal{F}[(-i^m)D^m(-ix)^n f](\xi)$ seja limitada, e consequentemente, a função $\xi^m \frac{d^n}{d\xi^n}\big(\mathcal{F}[f](\xi)\big)$, que atende

$$\xi^m \frac{d^n}{d\xi^n}\big(\mathcal{F}[f](\xi)\big) = \mathcal{F}[(-i^m)D^m(-ix)^n f](\xi),$$

é função limitada. Assim, é finito o supremo

$$\sup_{\xi \epsilon \mathbb{R}} \left| \xi^m \frac{d^n}{d\xi^n}\big(\mathcal{F}[f](\xi)\big) \right| < +\infty,$$

para cada $m,n > 0$ inteiros positivos, garantindo assim que $\mathcal{F}\ [f](\xi)$, infinitamente diferenciável, seja função do espaço de Schwartz $\mathcal{S}$. ■

4 | CONCLUSÕES: BIJETIVIDADE E INVERSÃO DA TRANSFORMADA

O teorema 1 é de suma importância para o estudo da transformada de Fourier, uma vez que a simetria alcançada de $\mathcal{F}$, definido sobre os espaços de Schwartz $\mathcal{S}$, possibilita a bijetividade deste operador, como veremos a seguir, bem como a existência da inversibilidade de $\mathcal{F}$. Mas, para comprovarmos tais qualidades decorrentes, precisamos de um "canditato" a operador inverso. Vamos definir o operador T: $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ como sendo

$$T[f](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} f(s)\, ds, \tag{7}$$

para qualquer função $f \in \mathcal{S}$. Pode-se demonstrar que

Proposição 8: Se f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ for uma função em $\mathcal{S}$ com sua transformada de Fourier $\mathcal{F}\ [f](\xi) = \mathcal{F}(\xi)$ (podemos usar esta notação de transformada, quando for conveniente), então $f\ (x)$ pode ser escrito como

$$f(x) = T[\mathcal{F}(\xi)](x), \tag{8}$$

isto é,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \mathcal{F}(\xi)\, d\xi.$$

Esta demonstração será omitida, por exigir conhecimentos fora dos nossos objetivos, mas pode ser encontrada em Figueiredo (2003, p. 204). Podemos agora demonstrar nossas duas conclusões terminais:

Conclusão 1 (Bijetividade): A transformada de Fourier é um operador bijetivo.

Demonstração: Primeiro, será demonstrada a injetividade do operador: sejam f_1, $f_2 \in \mathcal{S}$, tais que $\mathcal{F}\,[f_1](\xi) = \mathcal{F}\,[f_2](\xi)$. Basta aplicar o operador T na igualdade e usar a relação (8) da Proposição 8 para obter, de forma direta, que $T\,[\mathcal{F}[f_1](\xi)](x) = T\,[\mathcal{F}[f_2](\xi)](x) \Rightarrow f_1 = f_2$.

Para se demonstrar a sobrejetividade, devemos tomar $\mathcal{G}(\xi)$ função em $\mathcal{S}$ (contradomínio de $\mathcal{F}$) arbitrário e provar que existe $g(x)$ em $\mathcal{S}$ (domínio de $\mathcal{F}$) tal que $\mathcal{F}[g](\xi)=\mathcal{G}(\xi)$. Para isso, basta tomar $g(x) = T\,[\mathcal{G}(\xi)](x)$, ou seja, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}\mathcal{G}(\xi)\, d\xi$, e, usando esta última igualdade e sabendo que $i\xi x=(-i)\xi(-x)$,

$$\mathcal{F}[g](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-i)s(-x)} f(s)\, ds \right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(-x)} (\mathcal{F}[\mathcal{G}](-x)) dx.$$

Usando a integração por substituição nesta última, fazendo -$x = u$, $dx = du$, e os limites da integração imprópria invertidos, obtemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(-x)} \mathcal{F}[\mathcal{G}](-x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{i\xi(u)} \mathcal{F}[\mathcal{G}](u)\, (-du)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(u)} \big(\mathcal{F}[\mathcal{G}](u)\big)\, du = T\big[\mathcal{F}[\mathcal{G}]\big](\xi)$$

e usando novamente (8), temos $T\,[\mathcal{F}\,[\mathcal{G}]](\xi) = \mathcal{G}(\xi)$ Desta forma, mostramos que $\mathcal{F}\,[g](\xi) = \mathcal{G}(\xi)$, e $\mathcal{F}$ é operador sebrejetivo e, portanto, bijetivo. ■

Conclusão 2 (*T* transformada inversa de Fourier): A bijetividade do operador transformada implica na existência de operador inverso. Da Proposição 8, conclui-se diretamente que $(T \circ \mathcal{F})(f) = T\,[\mathcal{F}\,[f]] = f$. Além disso, devido na prova da sobrejetividade de $\mathcal{F}$ e usando (8), para cada $\mathcal{G} \in \mathcal{S}$, existe $g \in \mathcal{S}$ tal que $\mathcal{G} = \mathcal{F}\,[g]$ implicando que $(\mathcal{F} \circ T)(\mathcal{G}) = \mathcal{F}\,[T\,[\mathcal{G}]] = \mathcal{F}\,[g] = \mathcal{G}$. Assim concluímos que o operador T, definido em (7), é o inverso da transformada de Fourier definida em (1). ■

Desta forma, o fato de o operador transformada definido em $\mathcal{S}$ ser bijetivo e, portanto, possuir inversa, é a chave indispensável para aplicações de transformada de Fourier na resolução de equações diferenciais. Estes são objetivos futuros das nossas pesquisas.

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G. **Elementos da Análise Real**. Tradução: Alfredo A. de Farias. Rio de Janeiro, RJ: Campus, 1983. Título original: The Elements of Real Analysis.

BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., TEIXEIRA, E. **Fundamentos da Análise Funcional.** Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2012.

CARDOSO, D. C. **Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaeviskii.** 2005. Tese (Programa de Pós-Graduação em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Alagoas, 2005.

DYKE, P. P. G. **An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series**. London: Springer, 2001.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.** 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: Edgard Blücher, 2003.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.** Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1986. v. 2.

LIMA, E. L. **Análise Real**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2007. v. 1.

RIVERA, J. E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. 1. ed. Petrópolis, RJ: LNCC, 2004.

CAPÍTULO 5

EL USO DE GEOGEBRA PARA VISUALIZAR FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA: UNA EXPERIENCIA CON FUTUROS PROFESORES

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 15/07/2020

Cesar Martínez Hernández
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Colima
Colima, México
https://orcid.org/0000-0002-9958-8152

Rodolfo Rangel Alcántar
Facultad de Pedagogía, Universidad de Colima
Colima, México
https://orcid.org/0000-0002-4130-054X

RESUMEN: En este trabajo se presenta una experiencia del uso de GeoGebra para visualizar funciones de variable compleja por parte de futuros profesores de matemáticas en México. En este sentido, el estudio se enmarca dentro del campo de formación de profesores, específicamente respecto al uso tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El uso de GeoGebra fue considerado ya que su potencial permite visualizar funciones en variable compleja mediante el método de mapeo o transformación, utilizando las dos vistas graficas. La investigación, de corte cualitativo, se sustentó en los elementos teóricos de las representaciones semióticas y la aproximación instrumental. A partir del tipo de función propuesta a los participantes, se identifican que son capaces de entender y describir las funciones en variable compleja como transformaciones.
PALABRAS - CLAVE: GeoGebra, Funciones en variable compleja, Formación de profesores.

THE USE OF GEOGEBRA TO VISUALIZE FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE: AN EXPERIENCE WITH PRESERVICE MATHEMATICS TEACHERS

ABSTRACT: This report presents an experience of using GeoGebra to visualize complex functions by futures Mexican mathematics teachers. In this sense, the study is framed in the research area of mathematics teacher education, especially in the use of the new technologies for mathematics teaching and learning. GeoGebra software was considered due its potential to visualize complex functions trough the transformation method using the two windows for graphics. The study, qualitative in nature, is based on the semiotic representations and in the instrumental approach to tool use. Based on the given function to the participants, it is possible to identify that they can understand and describe the complex functions as a mapping or transformation.
KEYWORDS: GeoGebra, Complex functions, Teacher education.

1 I INTRODUCCIÓN

Uno de los intereses de la educación matemática gira en torno a la formación de profesores y el uso herramientas tecnológicas. En compilaciones como la de HUANG y ZBIEK (2017) se distingue que las investigaciones sobre uso de tecnología y la formación de profesores se pueden caracterizar en los siguientes tipos: investigaciones sobre tecnología y contenidos matemáticos, sobre tecnología y aspectos pedagógicos, y sobre la práctica del futuro profesor en medios tecnológicos. El presente capítulo se ubica en el primer tipo. De esta menara, se reconoce que el uso de tecnología para el aprendizaje matemático de futuros profesores es una categoría específica de investigación (HUANG y ZBIEK, 2017).

El conocimiento matemático, su aprendizaje, es uno de los elementos en la formación y profesionalización de profesores necesarios para la enseñanza de las matemáticas. De acuerdo con BALL, THAMES y PHELPS (2008), el Conocimiento Común del Contenido Matemático es uno de los tipos de conocimiento que el profesor en formación debe desarrollar, este conocimiento refiere al conocimiento disciplinar de las matemáticas. En el nivel universitario, la enseñanza y aprendizaje de la matemáticas no está excento de dificultades. Por ejemplo, en los números complejos, de acuerdo con AZNAR, DISTEFANO, MOLER y PESA (2018) indican que en cursos de álgebra sobre variable compleja no se logran aprendizajes robustos en estudiantes de ingeniería debido al poco uso de diferentes registros semióticos, particularmente estos autores proponen una secuencia didáctica para favorecer la conversión de representaciones de curvas y regiones del plano complejo, y con ello mejorar el aprendizaje.

Por su parte, VILLARRAGA, SIGARRETA Y ROJAS (2017, p.31) indican que en la enseñanza y aprendizaje de los números complejos en licenciaturas de matemáticas se basa en un enfoque deductivo, donde se favorece la definición de los conceptos matemáticos como conocimientos ya acabados, lo que obstaculiza que los estudiantes construyan los conceptos subyacentes al de variable compleja. En este sentido, las investigadoras proponen un modelo didáctico para la enseñanza y aprendizaje del concepto de función de variable compleja, de acuerdo con las autoras, su propuesta promueve el uso de software para visualizar puntos, rectas y subconjuntos, ya que permiten la visualización y asimilación de conceptos abstractos, particularmente debido a que el aprendizaje de propiedades geométricas de funciones en variable compleja conlleva difucultades en una enseñanza tradicional.

Como se observa, por un lado, los investigadores se han intersado en proponer soluciones relativas a mejorar la enseñanza y aprendizaje de números complejos y de funciones de variable compleja, por otro, parte de las ideas propuestas considera la incorporación de herramientas tecnológicas. Esto último resulta fundamental en los futuros profesores, no sólo para su aprendizaje matemático, sino para su futura práctica docente, ya que como lo mencionan VILLARRAGA et al. (2017, p. 38), la tecnología es importante en el nivel universitario, ya que ofrece herramientas para la práctica docente del fururo profesor. En este sentido, en la construcción y reconstrucción de conocimientos matemáticos, la tecnología debe jugar un papel importante en el profesorado ya que en su formación no solo se les debe indicar el portencial del uso de tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sino que los profesores mismos, durante su formación y capacitación contínua, deben tener oportunidades de experimentar tal potencial (MARTINEZ-HERNANDEZ y ULLOA-AZPEITIA, 2017).

De esta manera, en el presente capítulo se reporta una experiencia del uso de GeoGebra en la formación de futuros profesores de matemáticas, en el contexto Mexicano, respecto al aprendizaje del concepto de función de variable compleja. En este sentido, el estudio llevado a cabo tiene como objetivo dar cuenta del potencial del uso de GeoGebra para favorecer el aprendizaje del concepto de función en variable compleja. La pregunta guía fue la siguiente: a partir del uso de GeoGebra y sus capacidades técnicas ¿de qué manera el uso de GeoGebra permite una aproximación al concepto de función como una transformación o mapeo?

Desde hace décadas se reconoce (e.g. LAGRANGE, 2005) que las tecnologías digitales tienen capacidades numéricas gráficas, simbólicas y de programación, que juegan no solo rol como ayuda pedagógica, sino como una ruta para nuevas aproximaciones en la enseñanza y apredizaje de las matemáticas. Por ello, la incorporación de herramientas tecnológicas en la educación matemática de futuros profesores resulta relevante, particularmente en cursos donde pueden tener oportunidad de explorar el potencial para su propio aprendizaje. Particularmente GeoGebra es pertinente para el análisis de funciones de variable compleja, ya que es un software que permite la exploración y análisis a partir de diferentes representación, además de su carácter diinámico.

2 | REFERENTES TEÓRICOS

Para dar cuenta sobre la experiencia del uso de GeoGebra como un medio para construir y acceder al concepto de función de variable compleja, el estudio se sustenta en dos referentes teóricos. El primero de ellos es la Aproximación Instrumental del uso de herramientas tecnológicas en su enfoque antropológico (ARTIGUE, 2002; LAGRANGE, 2003, 2005). En este enfoque, la construcción del conocimiento matemático se considera como parte de una Actividad humana, que se puede explicar a través de tres conceptos: Tarea, Técnica y Teoría. La Tarea se define como el problema a resolver; la Técnica se entiende como la forma o maneras de resolver la Tarea, y la Teoría refiere a la explicación o justificación que sustenta la Técnica. Tomando como base este enfoque teórico, se considera que una herramienta tecnológica como GeoGebra, permite formas adicionales de resolver una Tarea, es decir, permite acceder a Técnicas basadas en la herramienta tecnológica (i.e,, propias de la herramienta). Esto es importante, ya que, a las Técnicas se les suele asignar sólo un valor pragmático, sin embargo, Artigue y sus colegas, muestran que una Técnica tiene también un valor epistémico, particularmente durante la construcción de las Técnicas (LAGRANGE, 2005). Además, las Técnicas son objeto de reflexión conceptual cuando son comparadas con otras y cuando su consistencia es discutida (LAGRANGE, 2003).

Dado que GeoGebra permite el trabajo con distintas representaciones y en distintos registros, el segundo elemento teórico considerado es el de los Registros Semióticos de Representación (RSR) (DUVAL, 2006). Como es ampliamente reconocido, de acuerdo con DUVAL (1999), el pensamiento matemático requiere la activación en paralelo de dos o tres RSR, por lo que la coordinación de registros se entiende como una condición necesaria en el aprendizaje de las matemáticas. Si bien GeoGebra permite el trabajo en distintos registros, el presente reporte sólo aborda el trabajo de los estudiantes en los registros algebraico y gráfico, ya que interesa que los futuros profesores reflexionen sobre la función en variable compleja como una tranformación o mapeo. El papel epistémico de GeoGebra se observará en cómo los estudiantes intepretan lo que visualizen en GeoGebra a partir de utilizar dos vistas gráficas y la vista algebraica, al momento de introducir números complejos particulares y calcular sus correspondientes imágenes, o bien una familia de complejos a partir de las capacidades técnicas de GeoGebra.

3 I MÉTODO

Participantes y toma de datos. La toma de datos se llevó a cabo con 14 profesores en formación de una universidad pública de México, quienes al momento de a toma de datos se encontraban cursando el 8º semestre, en un curso optativo de introducción a la variable compleja, curso en el que de manera sistemática se utilizó GeoGebra para representar números complejos en el plano complejo. La toma de datos se llevó a cabo mediante una entrevista grupal en línea, en la que primero se solicitó a cada participante resolver de manera individual la Tarea diseñada, seguido de una discusión grupal de sus respuestas. De los 14 participantes, 12 completaron la actividad y es sobre quienes se tiene evidencia de su trabajo, debido a restricciones de espacio, en este capítulo ejemplificamos el tipo de trabajo desarrollado por los futuros profesores a partir de tres casos (PF1, PF2 y PF3, en adelante). Las fuentes de información provienen de las hoja de trabajo de los estudiantes, los archivos GeoGebra generados y la videograbación de la entrevista.

Diseño de Actividad. De acuerdo con PONCE (2020, p. 101) existen varios métodos para visualizar funciones complejas: graficar por separado sus componentes reales e imaginarias, mapear o transformar una región, el método de superficies analíticas y el método de dominio coloreado. Con base en el libro de texto que los participantes tenían como base del curso (CHURCHILL y WARD,

1992) se diseñó una actividad que involucra el uso de GeoGebra para visualizar las funciones en variable compleja como un mapeo o transformación de una región del plano complejo. Ello es posible por las múltiples vistas gráficas de GeoGebra para representar los dos planos complejos, uno para el dominio y otro para el co-dominio de funciones de variable compleja (D'AZEVEDO BREDA y DOS SANTOS, 2017). Con base en estos antecedentes, se diseñó una actividad que consta de los siguientes apartados.

Apartado 1. Con el objetivo de que los alumnos recuperen la representación en GeoGebra de complejos en la forma $z=x+iy$, tanto en el vista algebraica como en la vista gráfica se propone que se introduzca en GeoGebra el complejo -2 +3*i*.

Apartado 2. Se solicita visualizar en GeoGebra complejos z tales que su parte real sea 2 (en la Vista Gráfica), así como calcular imágenes de tales complejos a partir de la función $f(z) = z^2$ y visualizarlos en la Vista Gráfica 2.

Apartado 3. Se solicita a los participantes utilizar algún comando o herramienta de GeoGebra para visualizar en la Vista Gráfica tantos complejos z como se quiera, de manera que su parte real sea siempre 2, y calcular sus imágenes $w=f(z)$ a partir de lafunción dada. Los participantes, al tener experiencia con el uso de deslizadores de GeoGebra se espera que sean capaces de utilizar esta herramienta de deslizador para asociarle sus valores tanto a la parte real como imaginaria de un complejo, y así visualizarlos en la vista gráfica.

Apartado 4. En caso de que los participantes no utilicen la herramienta de deslizadores para visualizar una familia (región) de complejos, en este apartado se propone una secuencia de construcción a partir del uso de deslizadores y de las dos vistas gráficas de GeoGebra para visualizar subconjuntos del dominio y su correspondiente codominio. La secuencia de construcción es la siguiente:

- Trazar dos deslizadores *a* y *b* para representar las partes real e imaginaria de un complejo *z*.
- Introducir en la linea de entrada un complejo z a partir de los deslizadores, de manera que la parte real sea 2. Es decir $z=a+bi$, con $a=2$.
- Activar la vista gráfica 2 de GeoGebra para, para visualizar en ésta las imágenes $w=f(z)$ a partir de calcularlos con base en la función planteada $f(z) = z^2$. Es decir, calcular *w* = *z* ˆ 2.
- Activar el rastro de los complejos *z* y *w* representados en la Vista Gráfica y Vista Gráfica 2, respectivamente.
- Apartado 5. Este corresponde a una pregunta de reflexión sobre la construcción propuesta. Específicamente la pregunta es: Explique cuál es el efecto, gráficamente hablando, de aplicar la función $f(z)=z^2$, al conjunto de complejos z cuya parte real siempre es igual a 2.

Apartado 6. En este se solicita a los estudiantes repetir el proceso de construcción, primero, cambiando el valor de la parte real, pero manteniéndolo fijo. Segundo mantener ahora fijo el valor de la parte imaginaria y hacer variar (mediante el deslizador) la parte real.

Apartado 7. Se les solicita a los participantes describir, a partir de la construcción realizada en GeoGebra, el significado de una función de variable compleja.

4 I RESULTADOS

El Apartado 1 tuvo como objetivo que los alumnos recuperaran la forma de introducir complejos de la forma $x + yi$, y observar que de manera automática GeoGebra traza un punto en el plano de coordenadas (x,y). La Figura 1 muestra una recreación de lo solicitado en el Apartado 1 de la Actividad diseñada. Como se observa en la Figura 1, en la Vista Algebraica, GeoGebra reconoce la expresión como un número complejo, y en la Vista Gráfica se traza el punto que correspondiente.

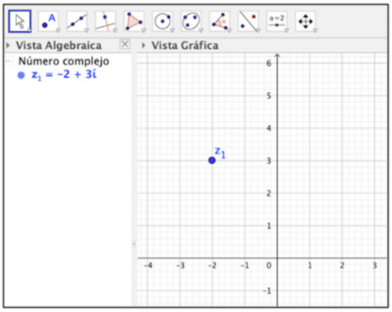


Figura 1. Construcción solicitada en el Apartado 1 de la Actividad.

Con base en esta primera construcción, en el Apartado 2 se solicitó graficar una serie de compejos tal que su parte real siempre fuera igual 2, así como sus imágenes correspondientes en la Vista Gráfica 2 a partir de la función $f(z)=z^2$. Esta idea se ejemplifica en la Figura 2.

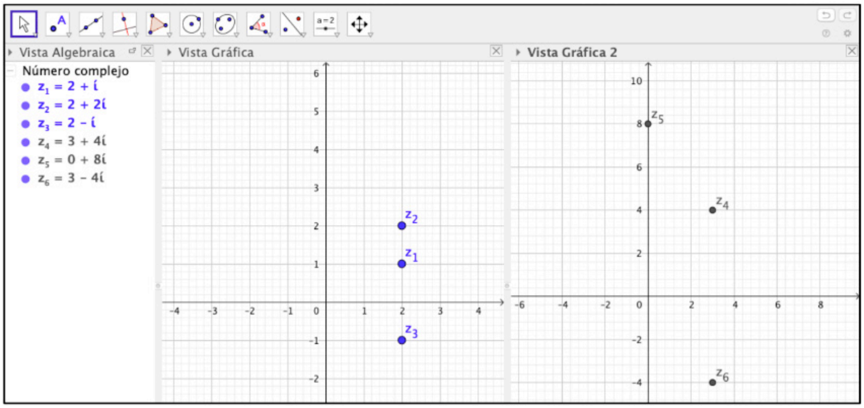


Figura 2. Construcción solicitada en el apartado 2 de la Actividad.

La Figura precedente muestra tres números complejos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 + 2i$ y $z_3 = 2 - i$ en la Vista Algebraica y en la Vista Gráfica. A partir de la función $f(z) = z^2$ en la Vista Algebraica y en la Vista Gráfica 2 se muestran sus imágenes $z_4=3+4i$, $z_5 = 0 + 8i$ y $z_6 = 3 - 4i$, respectivamente. Este es el tipo de construcción que indica D'AZEVEDO BREDA y DOS SANTOS (2017) se puede realizar en GeoGebra para el dominio y co-dominio de una función utilizando las dos vistas gráficas bidimensionales de GeoGebra. Con base en esta idea de construcción se esperaba que los participantes fueran capaces de utilizar deslizadores, por su familiaridad con esta herramienta, para visualizar un conjunto de complejos en la Vista Gráfica, como se muestra en la Figura 3.

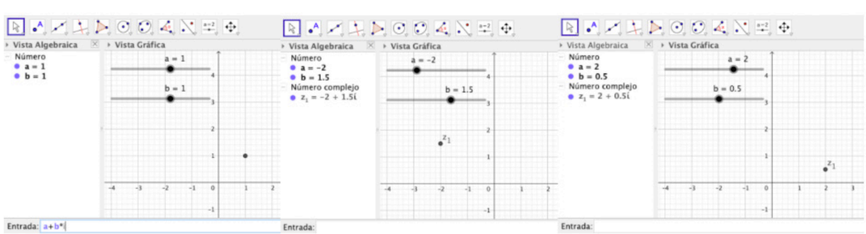


Figura 3. Uso de deslizadores para intridicir números complejos.

La Figura 3 muestra el uso de dos deslizadores α y *b*, para escribir un número complejo en la forma $z=\alpha + bi$, para valores distintos de los deslizadores se muestran tres casos, en los que de manera automática GeoGebra actualiza el número complejo, al estar asociado el valor de los deslizadores α y *b* con la parte real y parte imaginaria de z, respectivamente. Sin embargo, ninguno de los participantes propuso esta forma de trazar los complejos en GeoGebra, sólo fueron capaces, en primera instancia, de intruducir complejos de manera directa, tal como se solicitó en el Apartado 1 de la Actividad. Por este motivo, durante la entrevista se procedió a discutir el trabajo realizado por ellos en el Apartado 4.

A pesar de que los estudiantes no propusieron por sí mismos el tipo de construcción planteada en la Figura 3, no tuvieron ninguna dificultad en entender y seguir la construcción propuesta en el Apartado 4. Las siguiente Figuras muestra las construcciones finales de PF1. En Figura 4 se muestra la región correspondiente a los complejos z (rojo) construidos a partir de dos deslizadores tal que *Re* (z) =2 (Vista Gráfica), en la Vista Gráfica 2 se observa la región del codominio correspondiente (verde), a partir de $f(z) = z^2$.

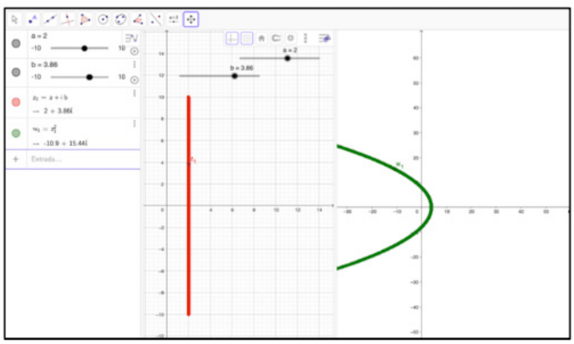


Figura 4. Complejos *z* tal que *Re* (z) =2 y sus correspondiente codominio por PF1

Como se puede observar, con el uso de deslizadores para trazar complejos z en la Vista Gráfica y a través de activar el rastro, se genera una región de recta vertical que corresponde a $x = 2$; de manera automática al generar la imagen $w=f(z)$ en la Vista Gráfica 2 y activar su rastro se genera una curva. Es decir, mediante esta construcción se puede entender una función en variable compleja como un mapeo o transformación, de la región (en rojo) en el plano de la Vista Gráfica, a la región (en verde) en el plano de la Vista Gráfica 2. La Figura 5, muestra la construcción de la misma participante PF1, en este caso corresponde a una construcción de la región de los complejos tales que *Im(z)*=2, para la misma función $f(z)=z^2$.

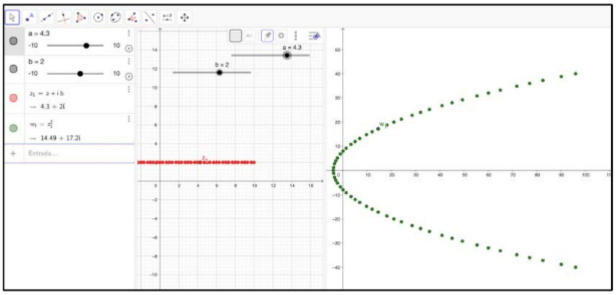


Figura 5. Complejos *z* tal que *Im(z)*=2 y sus correspondiente codominio por PF1.

Las construcciones mostradas en las Figuras 4 y 5, corresponden a lo solicitado a los participantes en los Apartados 4 y 6, respectivamente. Como se mencionó, ningún participante presentó dificultades en realizar la construcción. A partir de estas construcciones, en el Apartado 5, primero, se les solicitó responder a una pregunta de reflexión sobre la construcción planteada y sobre el efecto de aplicar una función a un conjunto de números complejos de una región particular. Por el tipo de respuestas dadas por los futuros profesores, es posible mencionar que logran vincular ambas regiones, roja y verde, por ejemplo de la Figura 4. La siguiente Figura 6 muestra la respuesta de PF1 a la pregunta planteada en el Apartado 5.

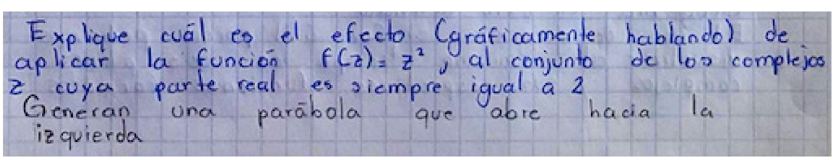


Figura 6. Respuesta de PF1 a la pregunta de reflexión del Apartado 5.

Como se observa en la Figura 6, por la respuesta de PF1 es posible indicar que GeoGebra le permite visualizar una región en la Vista Gráfica 2 (ver Figura 4), asociada a la región de la Vista Gráfica. A partir de esta idea inicial en que logran vincular ambas regiones, en el apartado 7 les fue solictada una explicación de lo que significa una función en variable compleja. Las Figuras 7 y 8, muestran ejemplos de respuesta de esti último.

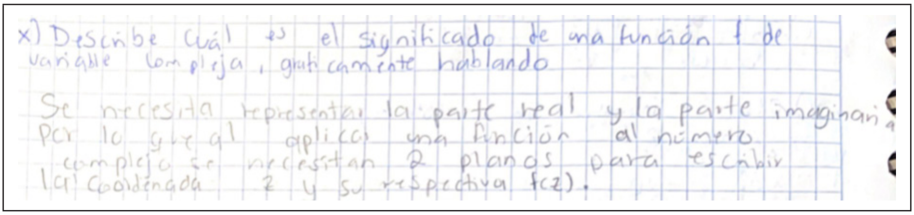

x) Describe cuál es el significado de una función f de variable compleja, gráficamente hablando
Se necesita representar la parte real y la parte imaginaria por lo cual al aplicar una función al número complejo se necesitan 2 planos para escribir la coordenada z y su respectiva f(z).

Figura 7. Explicación de PF2 sobre el significado de una función.

Con sus propias palabras, describa cuál es el significado de una función f de variable compleja, gráficamente hablando. La función de variable compleja es una regla de correspondencia que asigna a cada no. complejo del dominio otro no. complejo en la imagen. Gráficamente esto se pude observar en el momento que se transforma la curva perteneciente al plano z a una curva que pertenece al plano w o a los puntos de las imágenes de la función.

Figura 8. Explicación de PF3 sobre el significado de una función.

Como puede observarse en la explicación de PF2 (Figura 7), indica la necesidad de utilizar dos planos complejos, uno para el conjunto de los z y otro para las imágenes $f(z)$. En este sentido, hay indicios de una intepretación como un mapeo o una transformación por parte de PF2. En el caso de PF3 (Figura 8) explícitamente indica que “se transforma la curva perteneciente al plano z a una curva que pertenece al plano w o a los puntos de las imágenes de la función”. Es decir, además de indicar que se trata de una regla de correspondencia, como las funciones de variable real, esta regla de correspondencia la interpreta como una transformación de un plano conmplejo z a otro plano complejo w.

5 I CONCLUSIONES

En este trabajo se ha reportado cómo cuando se utiliza una herramienta como GeoGebra, y promover el uso de al menos dos representaciones, la algebraica y la gráfica para la visualización de funciones complejas, los participantes lograron coordinar la representación algebraica (Vista Algebraica) con la representación gráfica (Vista Gráfica y Vista Gráfica 2). Sin embargo, no es sólo el hecho del uso de dos representaciones, una parte importante es el carácter dinámico del uso de deslizadores. En términos de la Aproximación instrumental, esta técnica de GeoGebra permite visualizar de forma dinámica cómo la región del plano z (Vista gráfica) se corresponde con otra región del plano complejo w (Vista Gráfica 2). En este sentido, el papel epistémico de la Técnica GeoGebra se observa ya que el carácter dinámico de la construcción generó en los participantes una noción de la función compleja como una transformación.

Finalmente se pone de manifiesto cómo el uso de herramientas como GeoGebra son importantes en el desarrollo del conocimeinto matemático para los futuros profesores, ya que este tipo de construcciones pueden ayudarles a comprender el potencial didáctico de las herramientas tecnológicas para su futura práctica.

REFERENCIAS

ARTIGUE, M. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, 7, 245-274. 2002.

AZNAR, M-A., DISTÉFANO, M-L., MOLER, E. y PESA, M. Una secuencia didáctica para favorecer la conversión de representacioes semióticas de curvas y regiones en el plano complejo. **UNICIENCIA**, 32(1), 46-67. 2018. Recuperado el 15 de junio de https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/download/10171/12454/

BALL, D., THAMES, M. y PHELPS, G. Content knowledge for teaching. What makes it special. **Journal of teacher education**, 59(5), 389-407. 2008.

CHURCHILL, R y WARD, J. **Variable compleja y aplicaciones**. España: McGraw-Hill. 1992

Duval, R. **Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo** (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. 2006.

Duval, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), **Proceedings of the 21st North American PME Conference** (pp. 3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico: PME-NA. 1999.

HUANG, R. y ZBIEK, R. M. Prospective Secondary Mathematics Teacher Education Preparation and Technology. En M. E. Strutchens, R. Huang, L. Losano, Potari D. et al. (Eds.), **The Mathematics Education of Prospective Seconadry Teachers Around the World**. ICME-13 Topical Surveys (pp. 17-24). Suiza: Springer. 2017.

LAGRANGE, J-B.. Using symbolic calculators to study mathematics. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), **The didactical challenge of symbolic calculators** (pp. 113- 135). New York: Springer. 2005.

LAGRANGE, J-B. Learning techniques and concepts using CAS: A practical and theoretical reflection. En J.T. Fey (Ed.), **Computer Algebra Systems in secondary school mathematics education** (pp. 269–283). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 2003.

MARTINEZ-HERNANDEZ, C. y ULLOA-AZPEITIA, R. Dynamic Geometry Software and tracing tangents in the context of the mean value theorem: technique and theory production. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, 24(2), 75-82. 2017.

PONCE, J. C. Una introducción al método del dominio coloreado con GeoGebra para la visualización y estudio de funciones complejas. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, 9(1), 101-119. 2020. Recuperado el 15 de junio de 2020 de https://revistas.pucsp.br/IGISP/article/view/46753/31818

VILLARRAGA, B. SIGARRETA, J. y ROJAS, O. Modelo didáctico para la formación del concepto de función de variable compleja mediante la resolución de problemas. Acta Simposio de Matemáticas y Educación Matemática, 4(2), 31-40. 2017. Recuperado el 10 de junio de 2020 de http://funes.uniandes.edu.co/14176/1/Villarraga2017Modelo.pdf

CAPÍTULO 6

A MATEMÁTICA DAS PENSÕES EM PORTUGAL: HISTÓRIA RECENTE

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 04/07/2020

Onofre Alves Simões
ISEG-UL (Lisbon School of Economics and Management – Universidade de Lisboa) e REM – Research in Economics and Mathematics, CEMAPRE
Lisboa, Portugal
ORCID 0000-0002-9129-3499

RESUMO: Embora apresente os seus aspetos particulares, não se pode dizer que a história da proteção social em Portugal seja muito diferente da de outros países. Aliás, se se excetuarem os exemplos pioneiros da Prússia e da Dinamarca, no século dezanove, e do Reino Unido, já depois da segunda guerra mundial, quando se aprecia a evolução da proteção social nos países europeus, conclui-se que existem muitos traços comuns num grande número de casos. A ocorrência de contingências tais como a morte prematura, a invalidez e o próprio envelhecimento implica frequentemente uma perda de rendimentos, que pode ser muito gravosa. Por essa razão, estas contingências estiveram presentes em todos os esforços realizados no país, com o objetivo de estabelecer um sistema de assistência/proteção/segurança/estado social. Assim, ao longo dos anos, várias soluções legislativas foram surgindo, com maior ou menor sucesso prático, tendo o propósito da atribuição de prestações adequadas, na medida das possibilidades, aos atingidos. Paralelamente a este avanço, desafios de múltiplas ordens se foram colocando com o passar do tempo, exigindo um tratamento analítico adequado das questões. Em especial, nos últimos anos, grande tem sido a apreensão suscitada pelo duplo envelhecimento evidenciado pelas pirâmides etárias, devido ao duplo perigo que representa para a sustentabilidade dos sistemas, tanto a nível das prestações públicas como dos planos e fundos privados de pensões. O trabalho presente procura fazer o levantamento dos aspetos de Matemática Atuarial que acompanharam a evolução observada, com natural particular destaque para o período mais recente. Sublinha-se o papel principal que tem desempenhado na procura de soluções que viabilizem a continuidade das prestações.

PALAVRAS-CHAVE: Pensões, Segurança Social, Matemática Atuarial, Portugal.

PENSION MATHEMATICS IN PORTUGAL: THE RECENT HISTORY

ABSTRACT: Although it shows a few particular aspects, it is not true that the history of social protection in Portugal is very different from that in other countries. In fact, except for the pioneering examples of Prussia and Denmark, in the nineteenth century, and of the United Kingdom, after the Second World War, when one considers the evolution of social protection in most European countries, it is noticeable that many common features can be identified in a large number of cases. Given the seriousness of the consequences resulting from its occurrence, the concern with situations of premature death, disability and old age was present in all efforts

made in the country with the aim of establishing a system of assistance / protection / security / welfare state. Thus, over the years, several legislative solutions have emerged, with greater or lesser practical success, with the purpose of attributing adequate benefits, as much as possible, to those affected by such contingencies. In parallel with this advance, challenges of multiple orders have been posed over time, requiring an appropriate analytical treatment of the issues. In particular, in recent years, the apprehension caused by the double aging shown by the age pyramids has been great, due to the double danger it represents for the sustainability of the pension schemes, both public and private. The present work seeks to survey the aspects of Actuarial Mathematics that go along with the observed evolution, with a particular emphasis on the most recent period. We underline the main role it has played in the search for solutions that enable the continuity of benefits.
KEYWORDS: Pensions, Social Security, Actuarial Mathematics, Portugal.

1 I INTRODUÇÃO

Menos de um mês após a revolução de 25 de Abril de 1974, foi aprovado em Portugal o Decreto-Lei 203/74, preconizando a substituição progressiva dos sistemas existentes de previdência e assistência por um sistema integrado de Segurança Social (SS).

O direito à SS foi pela primeira vez consagrado no artigo nº 63 da Constituição da República Portuguesa de 1976. Aí se estabelece o papel do Sistema de SS na proteção de todos os cidadãos, em todas as situações de falta ou diminuição de meios de subsistência ou de capacidade para o trabalho, em particular nas situações de velhice, invalidez, viuvez, orfandade, desemprego e doença.

A primeira Lei de Bases da SS surgiu em 1984 (Lei nº 28/84), onde se destacam, no artigo 5º, os princípios da universalidade, da unidade, da igualdade, da eficácia, da descentralização, da garantia judiciária, da solidariedade e da participação. Depois de várias reformas, a atual Lei de Bases é a Lei nº 4/2007. De forma a assegurar o seu cumprimento foram acrescentados alguns princípios aos anteriores, entre os quais, os princípios da equidade social, da inserção social, da coesão intergeracional, do primado da responsabilidade pública e da informação (artigos 5º ao 22º).

2 I DEMOGRAFIA E SUSTENTABILIDADE DO SISTEMA DE SS

O Sistema de SS português é financiado pela repartição dos rendimentos do trabalho e a maior componente da despesa do sistema previdencial é a despesa com as pensões, com um peso superior a 80% (ver, por exemplo, IGFSS (2019) e Ministério das Finanças (2018), Anexo 6). Assim sendo, a evolução evidenciada pelos indicadores demográficos nas últimas décadas faz aumentar cada vez mais a preocupação com a sua sustentabilidade financeira. A raiz do problema são as baixas taxas de fertilidade. Para o seu agravamento contribuem também os progressos na mortalidade, expressos de forma muito clara nos acréscimos da esperança de vida à nascença e também aos 65 anos, tradicionalmente a idade normal de reforma.

Baixas taxas de fertilidade e longevidade acrescida explicam a forma da pirâmide populacional (cf Instituto Nacional de Estatística - INE (2020abc) e Pordata - https://www.pordata.pt/). Nos últimos dez anos, é visível um duplo envelhecimento demográfico: a base da pirâmide é reduzida e o topo é alargado. Nesse período, o número de idosos (65 anos ou mais) aumentou em 350 000 e a população mais jovem (menos de 15 anos) diminuiu em 221 000. A população em idade ativa (15 a 64 anos) também diminuiu, em cerca de 406 000 indivíduos. Desde 2010 que o número de pessoas em idade potencial de saída do mercado de trabalho não é compensado pelo número de pessoas em idade potencial de entrada. A taxa de fertilidade apresenta uma tendência decrescente há mais de 50 anos e está abaixo do nível de reposição (2.1) desde meados da década de 80. O saldo natural é negativo desde 2009 e o número de habitantes começou a diminuir em 2010. A migração líquida também foi negativa de 2011 a 2016, período da crise da dívida soberana portuguesa. No Quadro 1 sumariam-se estas informações.

As previsões para o futuro não apontam para um reverter da situação, pelo contrário. Entre 2018 e 2080, de acordo com o chamado cenário central (ver INE 2020a), Portugal perderá mais de 2 milhões de habitantes, diminuindo o número de jovens para cerca de 1 milhão e aumentando o número de idosos para 3 milhões. A população em idade ativa diminuirá cerca de 2,4 milhões, de 6,6 para 4,2 milhões de pessoas. O número de indivíduos ativos por idoso (relação de sustentabilidade potencial) cairá para 1.38.

	1970	1981	1991	2001	2011	2019
População residente (10^3)	8680.6	9851.3	9960.2	10362.7	10557.6	10295.9
Índ sint fec (nº. médio de filhos por mulher em idade fértil)	3.20	3.00	2.13	1.56	1.45	1.42
Saldo natural (nascs – óbits - 10^3)	87.6	56.3	12.4	7.7	- 6.0	- 25.2
Saldo migratório (img – emg - 10^3)	-122.3	8.3	-32.8	56.2	-24.3	44.5
Jovens (menos de 15 anos -10^3)	-	2493.8	1959.7	1679.21	1584.0	1397.0
Jovens (menos de 15 anos -%)	-	25.3	19.7	16.2	15.0	13.6
Pop idade ativa (15 a 64 anos -10^3)	-	6224.9	6628.0	6978.3	6981.5	6618.5
Pop idade ativa (15 a 64 anos - %)	-	63.2	66.5	67.3	66.1	64.3
Idosos (65 e mais anos - 10^3)	-	1132.6	1372.5	1705.3	1992.0	2280.4
Idosos (65 e mais anos - %)	-	11.5	13.8	16.5	18.9	22.1

Índ envelh (idosos por 100 jovens)	32.9	45.4	70.0	101.6	125.8	163.2
Indiv em idade ativa por idoso	6.6	5.5	4.8	4.1	3.5	2.9
Esp vida à nascença (Total)	67.1	72.1	74.3	76.9	79.8	80.9
Esp vida à nascença (Homens)	64.0	68.2	70.6	73.3	76.7	78.0
Esp vida à nascença (Mulheres)	70.3	75.2	77.6	80.1	82.6	83.5
Esp vida aos 65 anos (Total)	13.5	14.9	15.9	17.3	18.8	19.6
Esp vida aos 65 anos (Homens)	12.2	13.3	14.2	15.4	16.9	17.7
Esp vida aos 65 anos (Mulheres)	14.6	16.3	17.3	18.8	20.3	21.0

Quadro 1: Indicadores demográficos em Portugal 1970-2019

Fonte: Pordata e INE

Esta é, evidentemente, uma situação perigosa para a sustentabilidade do Sistema de Segurança Social e também, sobretudo devido aos aumentos na longevidade, para os planos e fundos de pensões privados. Na secção seguinte, mostra-se como a legislação procurou ajustar a fórmula de cálculo das pensões da SS, no sentido de as tornar actuarialmente mais ajustadas à realidade.

3 | A MATEMÁTICA DAS PENSÕES DA SS

3.1 Fórmula de Cálculo do Decreto-Lei 329/93

A primeira Lei de Bases da Segurança Social estabeleceu nos artigos 26º e 27º diretrizes genéricas para o cálculo dos montantes das prestações, em particular das pensões. Nessa época, havia dois contribuintes por pensionista. Nove anos mais tarde, quando o rácio já havia caído para 1.7, surgiu o Decreto-Lei 329/93, do regime de proteção na velhice e na invalidez dos beneficiários do regime geral de Segurança Social, visando afinar o cálculo em termos atuariais.

Já então, 27 anos atrás, o preâmbulo do diploma refere

> as profundas mudanças que nos aspetos sociais, demográficos e económicos se têm feito sentir nos últimos anos (…), Os problemas e desafios que se colocam decorrem de fatores que, em Portugal, à semelhança dos demais países europeus, se enquadram no progressivo envelhecimento da população, quer por força do decréscimo da taxa de natalidade, quer pelo crescimento dos níveis de esperança de vida.

Atendendo a estas preocupações, o valor da pensão de velhice (P_{93}) passaria a ser calculado com a fórmula

$$P_{93} = 0.02 \times N \times RR_{93}, \tag{1}$$

onde *N* é o número de anos com registo suficiente de contribuições e *RR* é a

Remuneração de Referência; RR_{93} é igual a $R/140$, sendo R o total das remunerações dos dez anos civis onde se encontrem as remunerações com montantes mais elevados, dos últimos 15 anos de registo. Estas remunerações são revalorizadas através do Índice de Preços do Consumidor (IPC), protegendo os rendimentos dos efeitos da inflação. A taxa global de formação da pensão ($0.02 \times N$) tem por limites 30% (mínimo) e 80% (máximo).

Com a aplicação de (1), obrigou-se o período contributivo mínimo a passar de dez para 15 anos, o cálculo de RR passou a incluir o IPC e a taxa de formação da pensão foi reduzida de 2.2% para 2%.

3.2 Fórmula de Cálculo do Decreto-Lei 35/2002

Decorrido novo período de nove anos, novas - e complexas - alterações ao cálculo da pensão foram aprovadas (Decreto-Lei 35/2002), sempre com o objetivo de o tornar mais acomodado à realidade.

O primeiro ajustamento foi na Remuneração de Referência (RR_{02}), que passou a ser calculada incluindo *toda a carreira contributiva (N)*, com um máximo de 40 anos. Quer dizer, agora $RR_{02} = \frac{TR}{N \times 14}$, com TR igual ao total de remunerações anuais revalorizadas dos N anos de contribuições. Quando $N > 40$, tomam-se as 40 remunerações revalorizadas mais elevadas.

Um segundo acerto refere-se ao modo de revalorização da base de cálculo: as remunerações registadas até 31/12/2001 continuam a ser revalorizadas com o IPC; as remunerações posteriores são revalorizadas pela aplicação de um índice composto por 75% do IPC e 25% da evolução média dos ganhos subjacentes às contribuições declaradas à SS, com máximo igual ao IPC acrescido de 0,5%.

A terceira correção respeitou à taxa anual de formação da pensão, que passou a variar entre 2,3% e 2%, tendo em consideração o número de anos civis de contribuições e o valor apurado de RR_{02} por comparação com o Salário Mínimo Nacional (SMN). Distinguiram-se dois casos.

Aos beneficiários com 20 ou menos anos de registo de remunerações, aplica-se uma taxa anual de formação de 2% (qualquer que seja o valor de RR_{02}), sendo a taxa global de formação igual ao produto de 2% pelo número de anos civis, com o limite mínimo de 30%, correspondente aos 15 anos do prazo de garantia. O valor da pensão de velhice será então

$$P_{02} = 0.02 \times N \times RR_{02}, \tag{2}$$

Aos beneficiários com pelo menos 21 anos de contribuições, aplicam-se taxas anuais decrescentes, do seguinte modo: à parcela de RR_{02} que não exceda $1.1SMN$ aplica-se a taxa de 2.3%; à parcela seguinte, até $2SMN$ aplica-se 2.25%; à parcela seguinte, até $4SMN$ aplica-se 2.2%; à parcela seguinte, até $8SMN$ aplica-se 2.1%; finalmente, aplica-se a taxa de 2% ao valor que exceda $8SMN$. Daqui resulta que a pensão passa a ser calculada de acordo com a fórmula

$$P_{02} = \begin{cases} 0.0230 \times N \times RR_{02} & RR_{02} \leq 1.1SMN \\ 0.0225 \times N \times RR_{02} + 0.00055 \times N \times SMN & 1.1SMN < RR_{02} \leq 2SMN \\ 0.0220 \times N \times RR_{02} + 0.00155 \times N \times SMN & 2SMN < RR_{02} \leq 4SMN \\ 0.0210 \times N \times RR_{02} + 0.00555 \times N \times SMN & 4SMN < RR_{02} \leq 8SMN \\ 0.0200 \times N \times RR_{02} + 0.01355 \times N \times SMN & RR_{02} > 8SMN \end{cases} \quad (3)$$

Os artigos 13.º, 14.º e 15º. do diploma garantem que a transição para a nova fórmula de cálculo não contraria as expectativas dos beneficiários, numa perspetiva de salvaguarda de direitos adquiridos.

3.3 Fórmula de Cálculo do Decreto-Lei 187/2007

No preâmbulo deste Decreto-Lei lê-se que

> A aprovação do presente decreto-lei procura concretizar as medidas mais adequadas para enfrentar os riscos do envelhecimento demográfico (…) Prevê-se a aplicação, na determinação do montante das pensões, de um factor de sustentabilidade, relacionado com a evolução da esperança média de vida e que é elemento fundamental de adequação do sistema de pensões às modificações de origem demográfica ou económica.

O diploma refere ainda o envelhecimento ativo, incentivando a permanência no mercado de trabalho. É neste sentido que cria o fator de sustentabilidade (*FS*), que é a sua principal inovação e visa produzir um corte no valor das pensões, à medida que a longevidade dos pensionistas vai aumentando. A idade normal de reforma permanece nos 65 anos e as fórmulas (2) e (3) continuam válidas, sendo a única alteração resultante da substituição do *SMN* pelo Indexante dos Apoios Sociais (*IAS*), em (3).

O *IAS* é um referencial adotado na fixação, cálculo e atualização das contribuições, das pensões e outras prestações sociais. Aplica-se desde 1 de Janeiro de 2007 e, em princípio, é atualizado todos os anos de acordo com o crescimento real do Produto Interno Bruto e a variação do IPC. Em 2007 correspondia a 99% do *SMN*; atualmente, não chega a 70%. Esta evolução também se repercute no valor das pensões, fazendo diminuir sobretudo as mais elevadas.

Na realidade, o montante mensal da pensão (P_{07}) passou a ser determinado meramente multiplicando o fator de sustentabilidade pelo valor obtido com a aplicação de (2) ou (3), considerando nesta *IAS* em vez de *SMN,* ou seja,

$$P_{07} = FS \times P_{02}, \quad (4)$$

sendo

$$FS = \frac{EV_{2006}}{EV_{ano_{i-1}}}, \qquad (5)$$

onde EV_{2006} é a esperança de vida aos 65 anos observada em 2006 (18.1 anos) e $EV_{ano_{i\text{-}1}}$ é a esperança de vida aos 65 anos observada no ano anterior ao do início da pensão. A esperança de vida aos 65 anos relativa a cada ano é publicada pelo INE. *FS* começou por trazer um corte de 0.56%, em 2008; em 2013, último ano em que se calculou com (5), a redução já ia em 4.78%.

Também agora se procura salvaguardar direitos tidos como adquiridos. Por exemplo, para os beneficiários inscritos até 31 de Dezembro de 2001 e que iniciam a sua pensão até 31 de Dezembro de 2016, aplica-se a fórmula

$$P_{07} = \frac{P_1 \times N_1 + P_2 \times N_2}{N}, \qquad (6)$$

onde P_1 é calculada com (1), P_2 é calculada com (4), N_1 é o número de anos com registo de remunerações para efeitos da taxa de formação da pensão até 31 de Dezembro de 2006, N_2 é o número de anos contáveis a partir de 1 de Janeiro de 2007 e N é o número total de anos.

Para os beneficiários inscritos até 31 de Dezembro de 2001, que iniciem a pensão após 1 de Janeiro de 2017, vem

$$P_{07} = \frac{P_1 \times N_3 + P_2 \times N_4}{N}, \qquad (7)$$

onde P_1 e P_2 se calculam como atrás, N_3 é o número de anos com registo de remunerações para efeitos da taxa de formação da pensão até 31 de Dezembro de 2001 e N_4 é o número de anos contáveis a partir de 1 de Janeiro de 2002.

3.4 O Presente

As fórmulas de cálculo introduzidas pelo Decreto-Lei 187/2007 continuam em vigor, mas passaram já por adaptações várias, fruto da conjuntura particularmente difícil que o país atravessou.

Assim, em janeiro de 2014, a idade legal da reforma aumentou de 65 para 66 anos. Em 2015, manteve-se nos 66 anos, mas de 2016 em diante passou a variar de acordo com a evolução da esperança de vida. Em 2020, é de 66 anos e cinco meses e aumentará mais um mês em 2021, para os 66.5 anos.

Também em 2014, o fator de sustentabilidade começou a ser calculado com base na esperança de vida aos 65 anos *no ano 2000* (17 anos), em vez de ser em 2006 (18.1 anos), como até então, o que é muito penalizador:

$$FS = \frac{EV_{2000}}{EV_{ano_{i-1}}}. \qquad (8)$$

A boa notícia é que *passou a abranger apenas as reformas antecipadas* (que sofrem ainda uma redução de 0.5%, por cada mês de antecipação relativamente à idade normal de reforma). Na conjuntura particularmente difícil que o país então atravessava, o Governo queria a todo o custo travar as reformas antecipadas.

Em geral, num quadro em que os progressos na longevidade têm sido contínuos e a idade de reforma tende a refleti-los, é cada vez mais penalizador antecipar a reforma, por sua vez, mais e mais tardia. A percentagem da redução era 4.78% em 2013. Em 2014, ano da mudança, saltou para 12.34%, embora abrangendo apenas as reformas antecipadas. Em 2020 o corte será de 15.2% (penalização a que se somará 0.5% por cada mês de antecipação). Só em circunstâncias particulares, previstas na lei, é que se abrem exceções à aplicação destes cortes.

Deve notar-se que, quando o valor da pensão calculada nos termos gerais for inferior aos valores mínimos garantidos, o respetivo montante é acrescido do chamado complemento social, igual à diferença entre o valor mínimo garantido e o valor da pensão estatutária.

3.5 Invalidez e Sobrevivência

As secções anteriores respeitam ao cálculo das pensões de velhice (64% do total da despesa do sistema previdencial), mas são também importantes as pensões de invalidez (6%) e de sobrevivência (13%), ver IGFSS (2019) e Ministério das Finanças (2018).

3.5.1 Pensões de Invalidez

As pensões de invalidez são atribuídas aos beneficiários com incapacidade permanente para o trabalho, relativa ou absoluta, de causa não profissional, certificada pelo Sistema de Verificação de Incapacidades

A incapacidade permanente para o trabalho resulta de invalidez relativa (o beneficiário não pode obter mais de um terço da remuneração correspondente ao exercício normal da sua profissão e presume-se que nos três anos seguintes não recupere a capacidade de obter mais de 50% dessa remuneração) ou de invalidez absoluta (o beneficiário apresenta incapacidade permanente e definitiva para toda e qualquer profissão ou trabalho, presumindo-se que não recupere, até à idade legal de acesso à pensão de velhice, a capacidade de obter quaisquer meios de subsistência). O prazo de garantia para atribuição da pensão de invalidez relativa é igual a cinco anos. No caso da invalidez absoluta é de três anos (ver http://www.seg-social.pt/pensao-de-invalidez).

O montante da pensão de invalidez (PI) é calculado, com as necessárias adaptações, usando as equações (2), (3), (4), (6) e (7), com $FS = 1$ Tal como no caso da pensão de velhice, há valores mínimos garantidos para este benefício.

3.5.2 Pensões de Sobrevivência

As pensões de sobrevivência são atribuídas aos familiares, por morte do benificiário. Têm direito (ver http://www.seg-social.pt/pensao-de-sobrevivencia) o cônjuge, ex-cônjuges (se à data da morte do beneficiário dele receberem pensão de alimentos), pessoa em união de facto, descendentes (incluindo os nascituros e os adotados plenamente e enteados, ou outros, se estiverem a cargo do beneficiário falecido à data da morte) e ascendentes (se à data do falecimento estiverem a cargo do beneficiário e não existirem cônjuge, ex-cônjuge e descendentes com direito à pensão).

Os descendentes com idade igual ou superior a 18 anos só têm direito se não exercerem atividade enquadrada em qualquer regime de proteção social de inscrição obrigatória, com exceção da atividade prestada ao abrigo de contrato de trabalho em período de férias escolares, e satisfizerem ainda alguma das seguintes condições: terem menos de 25 anos e estarem matriculados em curso de nível secundário, pós-secundário não superior, ou superior; terem menos de 27 anos e estarem matriculados em pós-graduações, ciclos de estudos de mestrado ou doutoramento ou a realizar estágio indispensável à obtenção do respetivo grau; serem deficientes e, nessa qualidade, destinatários de prestações familiares ou da prestação social para a inclusão.

A pensão de sobrevivência é atribuída se, à data da morte, o beneficiário falecido tiver completado o prazo de garantia de 36 meses de contribuições.

O valor da pensão de sobrevivência é calculado pela aplicação das percentagens do Quadro 2 ao valor da pensão de invalidez ou velhice que o beneficiário recebia, ou daquela a que teria direito a receber, à data do falecimento. Quando houver mais do que um titular, o montante é repartido em partes iguais.

Titular	Número de titulares		
	1	2	3 ou mais
Cônjuge/ex-cônjuge/pessoa em união de facto	60%	70%	70%
Descendentes*	20%	30%	40%
Ascendentes**	30%	50%	80%

Quadro 2: Pensão de sobrevivência, em percentagem da pensão de velhice/invalidez

*Estas percentagens duplicam, caso não haja cônjuge ou ex-cônjuge com direito à pensão.

** Se não houver cônjuge, ex-cônjuge e descendentes com direito à pensão

Fonte: http://www.seg-social.pt/pensao-de-sobrevivencia

Uma vez que o valor da pensão de sobrevivência (*PS*) é calculado por mera aplicação de percentagens ao valor da pensão de velhice (ou de invalidez) que o beneficiário recebia, ou teria direito a receber, à data do falecimento, continuam a aplicar-se as fórmulas antes indicadas, ou os montantes mínimos correspondentes. A terminar, um reparo: na exposição anterior apenas foi tratada o caso geral para cada tipo de pensão, mas a verdade é que existem situações especiais que a legislação também prevê e ultrapassam os objetivos deste texto.

4 I AVALIAÇÃO DAS RESPONSABILIDADES

O apuramento das responsabilidades com o pagamento das pensões é indispensável, quer sejam financiadas num sistema de *pay-as-you-go*, como acontece com a SS portuguesa, quer se trate de esquemas privados. Pode ser uma questão bastante complexa, que extravasa muito os limites deste texto. Por essa razão, aflora-se aqui apenas o essencial. Para mais detalhes ver, por exemplo, Garcia e Simões (2010).

Uma renda financeira, ou anuidade, é uma qualquer série de pagamentos equidistantes. As pensões de velhice, invalidez e sobrevivência são rendas financeiras.

A tipificação das rendas pode fazer-se tendo em consideração vários fatores. Neste caso são rendas incertas, pois a realização dos pagamentos está dependente da sobrevivência do beneficiário. Mais ainda, são rendas vitalícias (com exceção de algumas rendas de sobrevivência a dependentes, que são temporárias), ou seja, os pagamentos cessam com a morte do anuitante, e podem ser imediatas ou diferidas, caso ainda não estejam a pagamento.

Assim, considerando um indivíduo que iniciou as contribuições com idade e que tem atualmente a idade x e espera obter um benefício anual (estimado) B_{IR} quando atingir a idade normal de reforma, o valor atual total das responsabilidades (responsabilidade atuarial) com a sua pensão de velhice é

$$VABT_x = v^{IR-x}\frac{S_a(IR)}{S_a(x)}B_{IR}a^*_{IR}, v = \frac{1}{1+i}, \qquad (9)$$

onde $S_a(...)$ é a função de sobrevivência para um benificiário que inicia as contribuições com idade α, i é a taxa de atualização dos pagamentos futuros ao momento presente e a^*_{IR} é o valor atuarial de uma unidade de pensão na idade normal de reforma (anuidade vitalícia que poderá não ser constante ou ter um fracionamento especial, para incluir o subsídio de férias e o subsídio de Natal, por exemplo). Se a perpetuidade for constante (em princípio, não é e ajustamentos devem ser feitos), e os pagamentos da pensão forem feitos no início de cada mês, então

$$a_{IR}^{*} = \ddot{a}_{IR}^{(12)} = \frac{1}{12} \sum_{k \in \left\{0, \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots\right\}} v^k \frac{S_a(IR + k)}{S_a(IR)}. \qquad (10)$$

Ainda que o benefício seja definido à partida, a determinação de B_{IR} pode não ser trivial. Em geral, a realização destes cálculos obriga a estabelecer hipóteses relativamente a um conjunto significativo de variáveis sensíveis, determinantes para o resultado. Para um aprofundamento no caso específico da Segurança Social, ver Iyer (1999).

5 I CONCLUSÕES

Como se viu, as ameaças à sustentabilidade do Sistema de Segurança Social português estão fortemente associadas ao pagamento das pensões de velhice e também de sobrevivência e invalidez.

Projeções são feitas todos os anos, com conclusões variáveis de ano para ano, ver Moreira *et al.* (2019), para uma análise comparada. Esta variabilidade é notória.

No relatório ao Orçamento do Estado para 2015 (Ministério das Finanças (2014) estima-se que o Fundo de Estabilização Financeira da Segurança Social (FEFSS) se esgotará a partir de 2030. Já no relatório ao Orçamento do Estado para 2019, onde se apresentam projeções muito detalhadas, pode ler-se que o FEFSS deverá fazer face a saldos negativos do sistema previdencial a partir do final da década de 2020, ficando esgotado no final da década de 2040 (Ministério das Finanças (2018). E, no relatório do Orçamento do ano seguinte (Ministério das Finanças (2019)), fala-se ainda de nova (e substancial) melhoria, relativamente a 2019, pois só se prevê o esgotamento do FEFSS na segunda metade da década de 50…

Recorde-se que O FEFSS é um património autónomo que tem por objetivo assegurar a estabilização financeira da Segurança Social, designadamente cobrindo as despesas previsíveis com pensões por um período mínimo de dois anos (art. 1º do Regulamento de Gestão do FEFSS aprovado pela Portaria 1273/2004, de 7 de outubro).

Naturalmente, existe a consciência de que, ainda que se esteja numa fase em que a evolução é favorável, é grande a volatilidade de conclusões derivadas a partir de projeções com um prazo de 50 anos. A reviravolta que a atual pandemia trouxe ao mundo como o conhecíamos, e cujas consequências estamos bem longe de avaliar, é um sinal disso.

Seja como for, o que resulta evidente da análise que se fez é que a Matemática Atuarial virá sempre em socorro dos políticos, quando se trata de equilibrar o sistema. Nos esquemas privados, em que a possibilidade de modificar a fórmula de cálculo de benefícios definidos está afastada, observa-se uma tendência cada vez maior para a substituição de planos de benefício definido por planos de contribuição definida, transferindo-se também desse modo a maior parte do risco para os participantes, ver Antolin *et al.* (2009).

REFERÊNCIAS

ANTOLIN, P.; SCHEUENSTUHL, G. F.; BLOME S.; KARIM, D.; PAYET, S.; YERMO, J. Investment regulations and defined contribution pensions. **OECD Working paper on insurance and private pensions**, 37, 2009.

GARCIA, J. A.; SIMÕES, O. A. **Matemática Actuarial, Vida e Pensões**. Almedina, Lisboa, 2010.

INSTITUTO DE GESTÃO FINANCEIRA DA SEGURANÇA SOCIAL - IGFSS. **Conta da Segurança Social 2017**. Lisboa, 2019. http://www.seg-social.pt/publicacoes?bundleId=16519111

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA - INE a). **Projeções da População Residente em Portugal 2018-2080**. Lisboa, 2020. https://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_destaques&DESTAQUESdest_boui=406534255&DESTAQUESmodo=2&xlang=pt

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA - INE b). **Tábuas de Mortalidade para Portugal 2017 – 2019**. Lisboa, 2020. https://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_destaques&DESTAQUESdest_boui=414427684&DESTAQUEStema=55466&DESTAQUESmodo=2

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA - INE c). **Estimativas da População Residente em Portugal 2019**. Lisboa, 2020. https://www.ine.pt/xportal/xmain?xpid=INE&xpgid=ine_destaques&DESTAQUESdest_boui=414436913&DESTAQUEStema=55466&DESTAQUESmodo=2

IYER, S. **Actuarial mathematics of social security pensions**. Quantitative Methods in Social Protection Series. Geneva, International Labour Office / International Social Security Association, 1999.

MINISTÉRIO DAS FINANÇAS. **Orçamento do Estado para 2015 – Relatório**. Lisboa, 2014. https://www.dgo.pt/politicaorcamental/OrcamentodeEstado/2015/Proposta%20do%20Or%C3%A7amento/Documentos%20do%20OE/Rel-2015.pdf

MINISTÉRIO DAS FINANÇAS. **Orçamento do Estado para 2019 – Relatório**. Lisboa, 2018. https://www.dgo.pt/politicaorcamental/OrcamentodeEstado/2019/Proposta%20do%20Or%C3%A7amento/Documentos%20do%20OE/Rel-2019.pdf

MINISTÉRIO DAS FINANÇAS. **Orçamento do Estado para 2020 – Relatório**. Lisboa, 2019. https://www.oe2020.gov.pt/wp-content/uploads/2019/12/Relatorio-Orcamento-do-Estado-2020.pdf

Moreira, A. (coordenador); Azevedo, A. B.; Manso, L. P.; Nicola, R. **Financial and Social Sustainability of the Portuguese Pension System.** Fundaçao Francisco Manuel dos Santos, Lisboa, 2019.

Legislação

PORTUGAL. [Constituição (1976)]. **Constituição da República Portuguesa**. Assembleia Constituinte, 1976. https://dre.pt/application/file/a/502573

PORTUGAL. Lei nº 28/84, de 27 de julho de 1984. Lei de Bases da Segurança Social. **Diário da República** n.º 188/1984, p. 2501-2510. Série I de 1984-08-14. https://dre.pt/pesquisa/-/search/382393/details/normal

PORTUGAL. Lei nº 04/2007, de 6 de janeiro de 2007. Aprova as bases gerais do sistema de segurança social. **Diário da República** n.º 11/2007, p. 345-356, Série I de 2007-01-16. https://dre.pt/pesquisa/-/search/522781/details/maximized

PORTUGAL. Decreto-Lei nº 203/74, de 15 de maio de 1974. Define o programa do Governo Provisório e estabelece a respectiva orgânica. **Diário do Governo** n.º 113/1974, p. 623-627, Série I de 15-05-1974. https://dre.pt/pesquisa/-/search/623386/details/normal

PORTUGAL. Decreto-Lei nº 329/93, de 25 de setembro de 1993. Estabelece o regime de protecção na velhice e na invalidez dos beneficiários do regime geral de segurança social. **Diário da República** n.º 226/1993, p. 5378-5391, Série I-A de 1993-09-25. https://dre.pt/web/guest/pesquisa/-/search/653127/details/normal?q=Decreto-Lei+329%2F93

PORTUGAL. Decreto-Lei nº 35/2002, de 19 de fevereiro de 2002. Define novas regras de cálculo para as pensões de invalidez e velhice a atribuir pelo sistema de solidariedade e segurança social no âmbito da nova Lei de Bases da Solidariedade e Segurança Social. **Diário da República** n.º 42/2002, p. 1355-1359, Série I-A de 19-02-2002. https://dre.pt/pesquisa/-/search/278032/details/maximized

PORTUGAL. Decreto-Lei n.º 187/2007, de 10 de maio de 2007. Aprova o regime de protecção nas eventualidades invalidez e velhice dos beneficiários do regime geral de segurança social. **Diário da República** n.º 90/2007, p. 3100-3116, Série I de 10-05-2007. https://dre.pt/pesquisa/-/search/520669/details/maximized

PORTUGAL. Portaria n.º 1273/2004, de 7 de outubro de 2004. Aprova o Regulamento de Gestão do Fundo de Estabilização Financeira da Segurança Social. **Diário da República** n.º 236/2004, p. 6233-6236, Série I-B de 07-10-2004. https://dre.pt/pesquisa/-/search/590479/details/maximized

Outros sites consultados:

https://www.pordata.pt/

http://www.seg-social.pt/pensao-de-invalidez

http://www.seg-social.pt/pensao-de-sobrevivencia

CAPÍTULO 7

O AUXÍLIO DA TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Data de aceite: 26/08/2020

Jonathan Bregochi Delmondes
Centro Universitário Leonardo da Vinci – UNIASSELVI
http://lattes.cnpq.br/9536598537279431

Roseni Aparecida Pereira de Macedo
Universidade Católica Dom Bosco (UCDB)
Centro Universitário Leonardo da Vinci – UNIASSELVI
http://lattes.cnpq.br/1454572759867387

RESUMO: O ensino da matemática através da tecnologia vem sendo desenvolvido para a melhora da aprendizagem matemática. Seja como forma de solução de problemas ou modo de verificação de respostas. Cresce ainda mais, atualmente, ganhando proporções extraordinárias em indústrias, lojas, em suas automações e organizações. Sendo assim, o mundo, utilizando o auxilio do computador e algoritmos matemáticos, gerou a revolução industrial, aonde, o mundo vem crescendo gradativamente em tecnologias de ponta por utilizar este sistema. E na educação não poderia ser diferente. Foi analisado, como esta mesma tecnologia pode ser utilizada para a aprendizagem de estudantes do ensino fundamental. Sendo assim, foram analisadas teorias que já mostram um pouco sobre este assunto, e será feito um comparativo entre as ideias para chegarmos ao objetivo geral da pesquisa, como o uso das tecnologias podem ser viáveis ao ensino significativo da matemática no ensino fundamental. Além dos resultados satisfatórios, que ao utilizar algo novo em uma sala de aula, os estudantes do ensino fundamental sentem-se motivados a encontrar soluções de problemas utilizando de forma dinâmica e lúdica, colocando em prática tudo o que ele aprendeu através dos livros e das aulas de matemática nos aplicativos de celulares ou nos softwares de ensino no computador.

PALAVRAS-CHAVE: Tecnologias, Ensino da Matemática, Softwares de Ensino.

THE AID OF TECHNOLOGY IN MATHEMATICS TEACHING

ABSTRACT: The teaching of mathematics through technology has been developed for the improvement of mathematical learning. Whether as a form of problem solving or mode of verification of responses. It grows even more, currently, gaining extraordinary proportions in industries, stores, its automations and organizations. Thus, the world, using the help of computer and mathematical algorithms, generated the industrial revolution, where the world has been gradually growing in cutting-edge technologies for using this system. And education could not be different. It was analyzed, as this same technology can be used for the learning of elementary students. Thus, we have analyzed theories that already show a little about this subject, and a comparison will be made between the ideas to reach the general objective of the research, as the use of technologies can be viable to the significant teaching of mathematics in elementary education. In addition to the satisfactory results, when using something new in a classroom, elementary school students feel motivated to find problem solving

using them in a dynamic and playful way, putting into practice everything they have learned through books and math classes in mobile applications or computer education software.

KEYWORDS: Technologies, Mathematics Teaching, Teaching Software.

1 I INTRODUÇÃO

O ensino da matemática na antiguidade perpassava em métodos de aprendizagem ultrapassados em relação à hoje em dia. Antigamente, nos deparava com métodos tradicionais de ensino e aprendizagem dos estudantes como quadro negro e giz.

Atualmente, no contexto da revolução tecnológica que vivemos, estamos sujeitos a muitas tecnologias de ponta que podem ser bem mais proveitosas na aprendizagem significativa dos estudantes do que uma simples aula tradicional.

Porém, ainda há uma grande restrição por meio dos docentes pela utilização desses recursos por não saberem operar as novas tecnologias e acabam utilizando materiais ultrapassados. Neste sentido apresentar-se-á também as tecnologias que podem auxiliar no ensino e aprendizagem dos estudantes. Partindo da problemática, "como as tecnologias podem favorecer o ensino da matemática?". Objetivando verificar, "como o uso das tecnologias podem ser viáveis ao ensino significativo da matemática no ensino fundamental.".

Os professores estão sempre em busca de levar o conhecimento aos alunos de uma maneira que eles possam aprender de forma significativa, podendo colocá-los em prática em seu cotidiano.

Os estudantes já estão envolvidos com as tecnologias a nossa volta, então, podemos como educadores trazer o mundo globalizado e inovador para dentro das salas de aulas. Atualmente o computador é utilizado em tudo que fazemos, utilizando este recurso a favor da aprendizagem é uma grande ferramenta para o ensino eficaz e de maneira dinâmica.

O tipo de pesquisa é bibliográfica, tendo por objetivo a comparação de ideias sobre o auxilio da tecnologia no ensino da matemática no ensino fundamental, o que cada autor pensa a respeito deste assunto a ser abordado.

Abordaremos a dificuldade que cada docente tem em utilizar a tecnologia em suas aulas de matemática e também se os estudantes estão realmente prontos à utilização das novas tecnologias em sala de aula como método de aprendizagem significativa. Por fim, avaliaremos se foi atingido o objetivo geral desta pesquisa.

2 | O QUE SÃO AS TICS? COMO PODEM SER UTILIZADAS NA EDUCAÇÃO?

Segundo Pacievitch (2015), as TICS (Tecnologias de Informação e Comunicação) são atualmente utilizadas em vários lugares sendo em, na indústria (no processo de automação), no comércio (no gerenciamento), no setor de investimentos (informação simultânea e comunicação imediata) e na educação (no processo de ensino aprendizagem e na Educação a Distância).

A revolução tecnológica aconteceu a partir do século XXI, e no mundo a utilização de meios tecnológicos por toda volta é comum, sendo assim, não da para se livrar deste recurso que na atualidade nos remete a ter agilidade e precisão nos resultados. Por exemplo, antigamente para se mandar uma carta, deveria levar até os correios para que ele encaminhe a residencia, hoje, com o avanço tecnológico temos o e-mail que é uma espécie de correio eletrônico que possui agilidade atraves da internet para envio imediato de mensagens e documentos ao destinatário.

O computador e a calculadora são utilizados em tudo que fazemos ao nosso redor, até nas compras do supermercado. Então, podemos observar que são ferramentas utilizadas para a rapidez e aperfeiçoamento de um trabalho em que manualmente iria demorar certo tempo e podendo ocasionar filas imensas por falta de agilidade. Sendo assim, a tecnologia e a matemática surgiram para suprir uma necessidade social. Portanto, as junções das duas na aprendizagem tornam uma forma investigativa e precisa de se obter um resultado.

O uso das TICS pode ser um apoio na aprendizagem dos estudantes, fazendo com que o estudante sinta mais confortável para aprender matemática de uma forma dinâmica, tendo em vista os softwares e equipamentos tecnológicos auxiliando na sua aprendizagem.

> Os professores precisam saber como usar os novos equipamentos e softwares e também qual é seu potencial, quais são seus pontos fortes e seus pontos fracos. Essas tecnologias, mudando o ambiente em que os professores trabalham e o modo como se relacionam com outros professores, têm um impacto importante na natureza do trabalho do professor e, desse modo, na sua identidade profissional (VALENTE, 2008, p. 76).

De acordo com Valente (2008), o professor deve saber utilizar os equipamentos e softwares de ensino, pois o mesmo trás um aspecto diferenciado em suas aulas, de modo que fique mais prazerosa e mais sociativa entre os integrantes.

Com a utilização das TICS, temos no YouTube, várias videos aulas que pode possibilitar a aprendizagem mais completa dos estudantes, aonde eles podem buscar estas informações de maneira gratuita e dinâmica no conforto da sua casa.

> A tecnologia deve servir para enriquecer o ambiente educacional, propiciando a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de estudantes e professores (BETTEGA, 2010, p.18).

Segundo Bettega (2010), as tecnologias servem para enriquecer o campo educacional, aonde pode se ter um desenvolvimento criativo e crítico por meio dos estudantes e docentes. Sendo que a tecnologia também serve como meio de verificação e precisão de resultados obtidos por um cálculo matemático.

Uma forma do professor de matemática entrar em contato com o ensino da utilização das TICS é através das formações continuadas escolares. Porém, existe uma ausência dos profissionais que verifiquem as novas tecnologias para serem aplicadas pelos professores. Assim como diz Tedesco (2004):

> A realidade é que se escreveu muito pouco disso. Necessita-se de avaliações e pesquisas exaustivas e profundas sobre o impacto das NTIC na sala de aula e nos sistemas educacionais. Elas nos dariam clareza sobre os motivos dos acertos e fracassos, assim como sobre os desafios que devemos enfrentar (TEDESCO, 2004, p.98).

Então, é um desafio trabalhar com as NTICS em sala de aula, pois, os professores tem pouco respaldo ao acerto ou fracasso das mesmas em suas aulas planejadas.

2.1 O uso da calculadora e do computador nas aulas de matemática do ensino fundamental podem auxiliar a aprendizagem?

Os PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais) do ensino fundamental em matemática também aborda essa questão da utilização da calculadora e o computador como formas alternativas de abordar conhecimentos matemáticos apurados, pois, a atualidade caminha cada vez mais ao avanço tecnológico. Por outro lado, também é fato que as calculadoras, computadores e outros elementos tecnológicos estão cada vez mais presentes nas diferentes atividades da população (PCN p.43 1998).

O uso da calculadora e os computadores não deixam de ser um meio tecnológico que pode ser utilizado como forma de verificação, correção de erros e agilidade dos processos matemáticos. Porém, deve haver momentos adequados para a sua utilização.

> [...] relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente (PCN p.43 1998);

Com a utilização da calculadora podemos observar um resultado final de uma questão mais preciso possível, principalmente quando vamos estudar um número irracional, que possui em sua origem uma dízima não periódica que possuem casas decimais infinitas. Por exemplo, o valor do número PI (π) que se dá por resultado (≅ 3,14159265358979323846...), quanto mais casas decimais descobrirmos do PI mais próximo do resultado ficamos, porém ainda não é possível uma tecnologia de hoje dar o valor real. Neste caso, a utilização de um aparelho tecnológico de ponta faz a diferença para termos melhor precisão de resultado. Podemos observar, que o computador é um auxiliador na aprendizagem se utilizado da maneira correta e com os softwares eficazes em poder chegar ao objetivo do conhecimento a ser ensinado. Assim como cita os PCNs:

> Por outro lado, o bom uso que se possa fazer do computador na sala de aula também depende da escolha de softwares, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo (PCN p.44 1998).

O mercado está acelerado em relação a avanços tecnológicos de ponta que propõe agilidade e precisão em seus resultados. Porém, na educação não acontece da mesma forma, várias escolas se encontram sucateadas e sem recursos para adquirir meios tecnológicos e também laboratórios para melhor auxiliar na aprendizagem dos estudantes.

Podemos observar que, muitos dos livros do ensino fundamental já prezam pelo o uso da calculadora em alguns exercícios apresentados nos mesmos. Bigode (2000) cita que:

> Não cabe mais discutir se as calculadoras devem ou não ser utilizadas no ensino, o que se coloca é como utiliza-las... Cabe ao professor explorar por si as calculadoras e as atividades a elas associadas, propondo aos alunos situações didáticas que os preparem verdadeiramente para enfrentar problemas reais. (BIGODE, 2000, p.18).

Então não podemos dizer - podemos ou não utilizá-las - mais é a maneira como ela será empregada às atividades que será passadas para os estudantes para que eles possam utilizá-la da maneira correta no seu cotidiano para resolver os problemas passados a eles.

Podemos dizer que o computador é uma ferramenta poderosa para resolver problemas, porém, nem todos, na educação é a mesma coisa, ele pode ser viável e útil para algumas áreas, porém, em outras não possui êxito. Por este motivo, devem existir profissionais para filtrar e mediar tais tecnologias e os momentos da sua utilização.

De acordo com Ribeiro e Paz (2012) cita que:

> É importante salientar que não é uma simples maquina que vai fazer com que uma criança dotada de Inteligência possa aprender determinados conceitos matemáticos e sim desenvolver um raciocínio

> onde ela possa criar conjecturas, abstrair suas ideias tornando-as conhecimentos formais com ajuda do computador (RIBEIRO; PAZ, 2012, p. 18-19).

2.2 Os docentes estão preparados para ministrar uma aula de matemática com os recursos tecnológicos?

Em relação aos docentes, eles possuem uma grande dificuldade de elaborar ou estudar formas para deixar suas aulas de matemática mais prazerosas e dinâmicas, pelo fato de que sua jornada de trabalho interfere na produção de uma aula diferenciada, pois são poucas as aulas de planejamento nas escolas e os recursos escassos ficam difícil do docente elaborar uma atividade com o uso de diversas tecnologias.

Os docentes possuem uma dificuldade grande em relação ao uso da tecnologia em suas aulas de matemática pelo seu ensino superior não apresentar ou não possuir algum conhecimento aprofundado nesta área. Sendo assim, os docentes vêm com uma deficiência em ensino com o auxílio da tecnologia.

O professor deve descer do pedestal de entregar tudo pronto e acabado para os estudantes e deixa-los encontrar por si só, e o professor deve ser meramente um mediador do conhecimento, tirando de campo o tradicionalismo das salas de aula.

Quando os estudantes estão motivados a trabalhar com a tecnologia, pode-se dizer, que a descobertas, achados, outros tipos de soluções para problemas sociais e etc. Portanto, é de suma importância a valorização da educação através das tecnologias, porém, é equivocado dizer que uma máquina ou algo tecnológico irá resolver todos os problemas da sociedade. Mas, devemos utiliza-las como auxílio no ensino também.

Única forma que temos dos professores chegar a ter o conhecimento sobre este assunto é ele ser abordado em formações continuadas de professores ou em minicursos oferecidos pelas instituições públicas. Também, as instituições devem estar atentas às transformações tecnológicas na sociedade.

2.3 Os estudantes estão preparados para utilizar os recursos tecnológicos nas aulas de matemática?

Os adolescentes e até as crianças utilizam bastante os meios de comunicação e estão por dentro de tudo que acontece neste ramo. Eles estão por dentro dos avanços, sabendo de qual o melhor aparelho e quais deles possuem mais velocidade e memória.

O estudante está mais vulnerável as novas tecnologias do que o professor, o estudante, eles tem acesso a aplicativos em seu próprio celular que possuem gráficos e formas extraordinárias.

Esta tecnologia pode ser utilizada, também, para o desenvolvimento de uma aula de matemática ministrada pelo professor. Um exemplo de aplicativo para android é o *Matemática Elementar* que é totalmente gratuito e em português, desenvolvido pela fábrica de softwares da UFMS - campus de Ponta Porã, que reúne pequenas aulas e exercícios com conteúdos fundamentais da Matemática: conjuntos numéricos, intervalos, potenciação, radiciação, produtos notáveis, funções e inequações. Este aplicativo pode ser utilizado como forma de revisão dos conteúdos.

O aplicativo possui exercícios de todos os conteúdos apresentados, onde, o estudante pode utilizar para testar os seus conhecimentos a respeito dos conteúdos antes da prova. Sendo assim, um meio de estudo diversificado além dos livros e do caderno. O aplicativo pode ser obtido através do Play Store gratuitamente.

Assim, como existem os softwares educativos no computador que possuem bastante êxito ao trabalharem com ele para a aprendizagem matemática, o celular vem crescendo também em aplicativos disponíveis no Play Store gratuitos como, por exemplo, aplicativos de estudos para concursos públicos e ENEM dentre eles, o *Matemática Elementar* é um aplicativo desenvolvido para revisão de conteúdos é bem útil para estudantes que queira relembrar de diversificados conteúdos antes da prova ou por meio de conhecimento.

Figura n. 1 - Interface do aplicativo de matemática

Fonte: UFMS – Campus de Ponta Porã, nov. 2013.

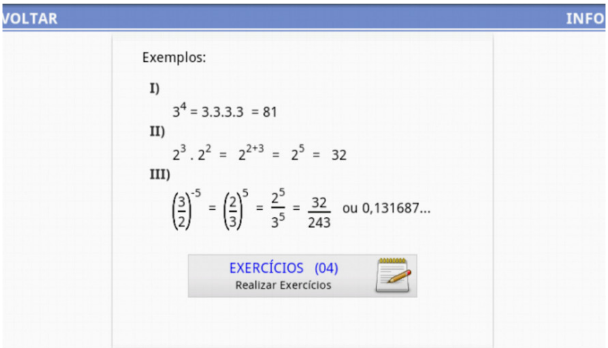


Figura n. 2 – Exemplos do conteúdo de Potenciação do aplicativo de matemática

Fonte: UFMS – Campus de Ponta Porã, nov. 2013.

O aplicativo possui uma ótima interface com fácil acesso, os exemplos são bem dinâmicos e bem completos sem reduzir cálculos, com isso a compreensão dos estudantes para com o conteúdo estudado seja melhor.

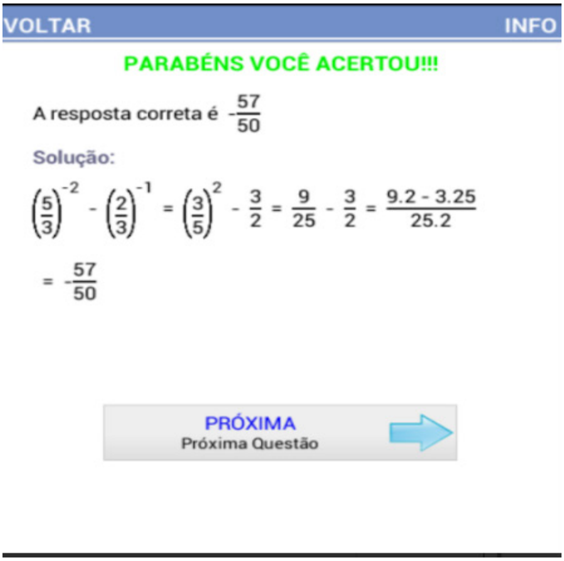


Figura n. 3 – Gabarito dos exercícios do conteúdo de Potenciação do aplicativo de matemática

Fonte: UFMS – Campus de Ponta Porã, nov. 2013.

A solução dos exercícios vem de forma bem explicada sem pular passos de resolução da conta, isso facilita o estudante observar onde ele errou ou se ele pode fazer de forma diferente, porém chegando ao mesmo resultado. Sendo assim, existe outro aplicativo disponível para o sistema android é o *Cola Matemática,* que apesar do nome não é de cola, ele apresenta o cálculo feito de um problema completo para que o estudante possa observar e estudar durante suas tarefas de casa.

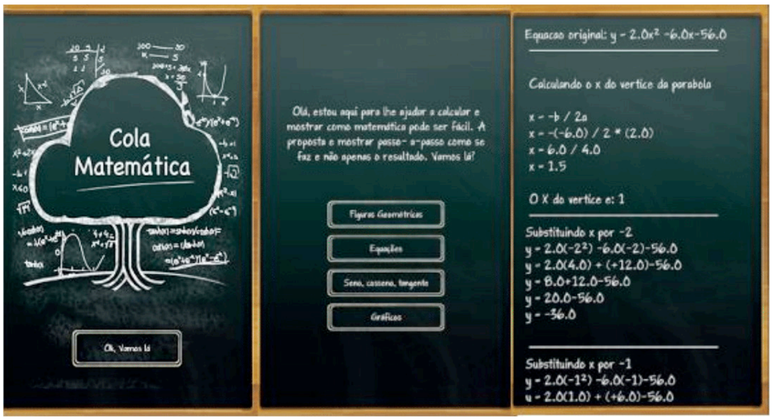


Figura n. 3 – Interface do aplicativo Cola Matemática

Fonte: Bruno F. Oliveira, maio 2015.

É bem interessante este aplicativo por ele apresentar de maneira bem expressa os exercícios e a composição da solução.

Existem vários aplicativos no celular que os estudantes podem ter acesso que auxiliam na aprendizagem matemática dos mesmos, de maneira divertida e dinâmica que despertam o entusiasmo dos próprios estudantes, onde, dificilmente o tradicionalismo das aulas de matemática proporciona.

Então, é interessante que os professores, em especial, os de matemática, estejam atualizados quanto aos avanços tecnológicos presentes atualmente, pois, cada tecnologia aparece mais sofisticada a cada dia, por que as descobertas não param no cotidiano mundial.

Em geral os cursos de licenciaturas devem oferecer mais auxilio e incentivo as práticas de ensino através das novas tecnologias, sendo assim, a educação poderá avançar gradativamente, juntamente, com o mundo globalizado de hoje. Pois, os estudantes sentem-se motivados a buscar o conhecimento quando a fonte é prazerosa e eficaz a ele, de uma forma dinâmica.

Um dos avanços que se pode observar hoje é o avanço do ensino a distância, aonde pode abrir possibilidades aos estudantes de estudarem no conforto de sua casa e na hora que puderem para fazerem as atividades propostas.

De acordo com Menezes e Santos (2001), o Programa Nacional de

Informática na Educação (PROINFO) programa criado em 1997 pela Secretaria de Educação a Distância do Ministério de Educação (MEC) com o objetivo de introduzir a tecnologia de informática na rede pública de ensino. O ProInfo baseia-se na ideia de que a informática educativa é uma forma de aproximar a cultura escolar dos avanços que a sociedade vem desfrutando com a utilização das redes técnicas de armazenamento, transformação, produção e transmissão de informações.

O programa foi criado no ano de 1997 e tecnicamente foi um avanço tecnológico nas instituições públicas de ensino, porém, em vista da atualidade já um grande período de tempo e não houve outro avançado mais sofisticado nas instituições em termos de tecnologias aplicadas a educação. Sendo assim, as instituições necessitam de incentivos de programas como este, que proporcionam qualidade no ensino a partir de novas tecnologias para que desperte ainda mais o entusiasmo dos alunos perante a educação.

Podemos citar que um dos avanços foi à educação a distância que abriu um leque de oportunidades com as vídeos aulas gravadas e atividades on-line que permite aos estudantes estudarem nos seus horários determinados sem ter a preocupação de chegar atrasado por perder o ônibus por exemplo. Então, podemos observar que, a tecnologia de alguma forma é nossa aliada, e a sua utilização da maneira correta, gera soluções de problemas sociais sejam eles de longas escalas ou pequenas.

Deve ser desenvolvido outros programas de incentivo a tecnologia nas instituições de ensino pública, da mesma forma que surgiu o programa ProInfo que foi quem deu o inicio da tecnologia nas escolas. Pois, este programa faz muito tempo que foi criado e até hoje não teve outro programa de avanços além deste nas instituições.

Temos em nosso acervo vários trabalhos tecnológicos desenvolvidos por estudantes, pois, a criatividade de um estudante motivado é excelente. Mas, na atualidade, não vemos isto com facilidade, por que o professor transmite um ensino pronto e acabado ao ouvinte e o mesmo toma como verdade tal ensino sem verificar e questionar.

3 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

No mundo globalizado de hoje, temos vários avanços tecnológicos ao nosso meio, onde surgiu a revolução tecnológica que foi uma explosão de máquinas programadas a trabalhar por si só e o operador qualificado para operá-la. Estas máquinas foram desenvolvidas através de computação e algoritmos matemáticos que atualmente gerou para a sociedade transformações extraordinárias em sua composição. Dentre essas máquinas, temos os celulares, computares, tablets e etc. Estes aparelhos resolvem vários problemas típicos da sociedade. Sendo assim, ocasionou o surgimento das TICS (Tecnologias de Informação e Comunicação), onde, atualmente são utilizadas para o gerenciamento e organização de lojas, empresas, indústrias e etc.

A educação deve acompanhar o mesmo processo de avanço que o mundo vem tendo ao longo dos anos, pois, as escolas se encontram sucateadas a ponto dos livros que são passados aos alunos existem erros e já estão ultrapassados. Por este motivo que o objetivo da pesquisa deve ser analisado por ser muito ampla esta questão para cada teórico, mas não deixa de ser uma atratividade o auxílio da tecnologia ao ensino da matemática.

Sendo assim, a analise comparativa entre os autores em relação ao objetivo geral foi bem amplo e pode-se observar que a utilização destes recursos tecnológicos como computares, celulares, tablets e etc. em sala de aula é também, de suma importância, pois, o auxílio dos mesmos é inovador e desperta a motivação dos estudantes que já estão por dentro deste mundo tecnológicos. Então, é interessante que o professor reflita sobre a sua prática de ensino e não fique somente preso aos livros e ao quadro negro, mas também em várias formas tecnológicas atualmente que pode ser planejada uma aula.

Cabe aos professores se informarem ainda mais sobre este assunto, pois é um assunto que vem crescendo, pois eles devem formar estudantes que sejam críticos e investigador do conhecimento. O mundo se empenha todos os dias em mostrar o potencial em todas as áreas da tecnologia, por exemplo, na área da aviação temos aviões que possuem altas tecnologias em sua composição, onde isso faz toda diferença na sociedade. Pois, podemos estar em lugares diferentes em pouco tempo de viagem. Isso é fruto de uma tecnologia avançada e na educação deveria acontecer o mesmo, preparar estudantes que iram enfrentar este tipo de mercado, porém a falta de recursos e a baixa demanda de profissionais qualificados dificultam estes tais avanços no ensino.

REFERÊNCIAS

BETTEGA, Maria H. S. **Educação continuada na era digital.** 2 ed. São Paulo: Cortez, 2010.

BIGODE, A. J.L. **Matemática hoje é feita assim.** São Paulo: FTD, 2000.

MENEZES, Ebenezer Takuno de; SANTOS, Thais Helena dos. Verbete **ProInfo (Programa Nacional de Informática na Educação). Dicionário Interativo da Educação Brasileira - Educabrasil.** São Paulo: Midiamix, 2001. Disponível em: <http://www.educabrasil.com.br/proinfo-programa-nacional-de-informatica-na-educacao/>. Acesso em: 26 de abr. 2018.

PACIEVITCH, T. **Tecnologia da Informação e Comunicação.** Disponível em: <https://www.infoescola.com/informatica/tecnologia-da-informacao-e-comunicacao/>. Acesso em: 10 jan. 2018.

PCN, **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental.** -Brasília: MEC/SEF, 1998.

RIBEIRO, Flávia Martins; PAZ, Maria Goretti. O ensino da matemática por meio de novas tecnologias. **Revista modelos - facos/cnec**, [S.L.], v. 2, n. 2, p. 12-20, ago. 2018.

SIMON, A. **O uso das Tecnologias no Ensino da Matemática em uma Escola de Ensino Fundamental da Rede Municipal de Cocal do Sul - SC.** Disponível em: <repositorio.unesc.net/bitstream/1/1460/1/Andrei%20Feltrin%20Simon.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2018.

TEDESCO, Juan Carlos (org.). **Educação e Novas Tecnologias: esperança ou incerteza?** São Paulo: Cortez. Brasília: UNESCO, 2004.

VALENTE, J. A. **As tecnologias digitais e os diferentes letramentos.** Revista Pátio, RS, v.11, n.44, 2008.

CAPÍTULO 8

OS TRILHOS MATEMÁTICOS NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 27/06/2020

Isabel Vale
Instituto Politécnico de Viana do Castelo e CIEC
Universidade do Minho, Portugal
ORCID –ID: 0000-0001-6155-7935

Ana Barbosa
Instituto Politécnico de Viana do Castelo e CIEC
Universidade do Minho, Portugal
ORCID –ID: 0000-0002-6314-7080

Este artigo tem por base o texto da conferência proferida no VIII CIBEM, em Madrid 2017.

RESUMO: A sala de aula é uma das "casas" onde a educação tem lugar. O recurso a contextos não formais de ensino e aprendizagem, como seja o meio envolvente, constitui-se como um ambiente educativo que pode promover atitudes positivas e uma motivação adicional para o estudo da matemática. Assim, surgem os trilhos matemáticos, que consistem numa sequência de paragens com tarefas que os alunos têm de resolver, ao longo de um percurso pré-planeado. Os trilhos proporcionam experiências de aprendizagem significativas para qualquer conceito do currículo, permitindo criar um espaço informal de aprendizagem, fora da sala de aula. É fundamental que os professores contactem com abordagens desta natureza e que conheçam as suas potencialidades. Os trilhos matemáticos constituem-se particularmente com grande potencial para a formulação de problemas por parte dos (futuros) professores e para a resolução de problemas por parte dos alunos que vivenciam os trilhos. Este artigo descreve parte de um estudo onde se pretende compreender as potencialidades dos trilhos matemáticos no âmbito da formação inicial de professores do ensino básico (3-12 anos), assim como a sua reação. Em particular, procurámos compreender como os trilhos matemáticos podem constituir-se num recurso para a formação de professores, enfatizando a formulação de problemas bem como a criatividade matemática. Adotou-se uma metodologia de natureza qualitativa e interpretativa, sendo os dados recolhidos através de observações, questionário, entrevistas e produções escritas de tarefas/trilhos. Os resultados mostram uma grande motivação e adesão à proposta de elaboração de um trilho, com grandes potencialidades para a aprendizagem da matemática, contribuindo para aplicarem os seus conhecimentos matemáticos e adquirir uma nova visão da matemática. Contudo estes estudantes reconhecem que formular problemas é mais complexo do que resolver problemas.

PALAVRAS-CHAVE: Contextos não formais, Trilhos matemáticos, Resolução e Formulação de Problemas, Criatividade, Formação Inicial de Professores.

MATHEMATICAL TRAILS IN TEACHER TRAINING

ABSTRACT: The classroom is one of the “homes” where education takes place. The use of non-formal teaching and learning contexts, such as the environment, constitutes an educational environment that can promote positive attitudes and additional motivation for the study of mathematics. In this scope we have the mathematical trails, which consist of a sequence of stops with tasks that students have to solve, along a pre-planned route. The trails provide meaningful learning experiences for any concept in the curriculum, allowing the teachers to create an informal learning space, outside the classroom. It is essential that teachers contact with approaches of this nature and know their potential. The mathematical trails have particularly great potential for problem posing on the part of (future) teachers and for the problem solving on the part of the students who experience the trails. This article describes part of a study in which it is intended to understand the potential of mathematical trails in the context of elementary education teacher training (3-12 years), as well as the future teachers’ reaction. In particular, we tried to understand how mathematical trails can be a resource for teacher training, emphasizing problem posing as well as mathematical creativity. A qualitative and interpretative methodology was adopted, with data collected through observations, questionnaires, interviews and written production of tasks/trails. The results show a great motivation and involvement in the proposal to develop a trail, with great potential for learning mathematics. However, these students recognized that posing problems is more complex than solving problems, as had difficulties diversifying the content involved in tasks based on objects of reality.
KEYWORDS: Non-formal contexts, Mathematical trails, Problem solving and posing, Creativity, Pre-service Teacher Training.

1 | INTRODUÇÃO

Grande parte dos fracassos matemáticos têm origem no ambiente afetivo que se cria e que pode comprometer as expectativas e motivações iniciais dos alunos (e.g. HANNULA, 2004). Nesse sentido, numa tentativa de inverter a situação, e uma vez que os professores têm um papel fundamental no que acontece na sala de aula, a formação de professores deve promover uma nova visão sobre a natureza da matemática e do seu ensino, permitindo que os futuros professores experienciem novas abordagens que se espera que usem com os seus próprios alunos. A aprendizagem matemática deve incluir mais do que tarefas rotineiras, deve ser enriquecida com tarefas desafiadoras, como a resolução e a formulação de problemas, que conduzam à compreensão de conceitos matemáticos estruturantes e contribuam para o desenvolvimento do pensamento criativo. Dentro desta perspectiva surge a aprendizagem fora da sala de aula, recorrendo a contextos não formais, como seja o meio envolvente às escolas, onde privilegiamos os trilhos matemáticos. Por outro lado, os nossos alunos passam largas horas sentados dentro da sala de aula, com todas as implicações que isso tem, em particular, ao nível da atenção, pelo que é pertinente dar-lhes oportunidades de sair do espaço formal, de se movimentarem e de experimentar a matemática à sua volta, relacionando-a ou levando-a para a sala de aula. Simultaneamente têm oportunidade de conhecer o património histórico, arquitetônico, cultural e natural das localidades onde se insere a escola.

Neste contexto é fundamental que os futuros professores desenvolvam o seu conhecimento para ensinar matemática proporcionando-lhes experiências diversificadas, que se espera que usem com os seus alunos. Assim, depois de uma breve contextualização teórica, apresenta-se um estudo baseado num projeto, mais amplo e em desenvolvimento, no âmbito da formação de professores (3-12 anos), onde se pretende compreender o impacto, ao nível das atitudes e dos conhecimentos em matemática, na realização de tarefas/trilhos no ensino e aprendizagem da matemática, como contextos de ensino e aprendizagem fora da sala de aula. Em particular, procurámos compreender como os trilhos matemáticos podem constituir-se como um recurso para a formação de professores, enfatizando a formulação de problemas bem como a criatividade matemática.

2 | AULA DE MATEMÁTICA – DAS TAREFAS À CRIATIVIDADE

As pessoas presentemente já não são recompensadas apenas por aquilo que sabem - o Google sabe mais a cada dia que passa - mas por aquilo que conseguem fazer com o que sabem. Partindo desta ideia a educação hoje tem de fazer muito mais do que apenas transmitir conteúdos, tem de ajudar os alunos: a trabalhar em grupo, para desenvolver as suas capacidades de comunicação e colaboração; a desenvolver as suas habilidades para serem criativos, pensar criticamente, resolver problemas e tomar decisões (SCHLEICHER, 2016). Para aprender matemática é necessário compreender conceitos matemáticos, estratégias e procedimentos e utilizá-los para resolver uma diversidade de problemas, simples ou complexos, rotineiros ou não. Deste modo, muita da investigação é orientada para desenvolver capacidades de resolução de problemas nos alunos desde muito cedo, contudo a realidade nas nossas escolas ainda não é a desejada, pelo que temos de procurar novas estratégias sobre o seu ensino.

A finalidade básica de uma aula de matemática é que os alunos tenham uma aprendizagem significativa e, para a atingir, o professor deve promover um ensino eficaz. Este deve proporcionar aos alunos a vivência de experiências individuais e colaborativas, que promovam a sua capacidade de dar sentido às ideias matemáticas. Ou seja, deve envolver os alunos na resolução e na discussão de tarefas que desenvolvam o raciocínio matemático e a resolução de problemas, que tenham múltiplas abordagens e diversas estratégias de resolução (NCTM, 2014). A aprendizagem da matemática depende fundamentalmente do que acontece dentro da sala de aula, i.e., como os professores e alunos interagem ao longo do currículo. Espera-se que os professores proponham tarefas que estimulem os alunos a estabelecer conexões matemáticas, e analisem as aprendizagens a partir das tarefas utilizadas, de modo a tomar decisões ao longo da sua aprendizagem. Assim, sendo os professores os principais agentes de mudança, é importante que desenvolvam determinado tipo de capacidades, nomeadamente criativas, baseadas em conhecimentos matemáticos e didáticos sólidos, que lhes permitam construir ou adaptar e explorar boas tarefas matemáticas, pois o que os alunos aprendem é largamente influenciado pelas tarefas que lhes são dadas (e.g. SMITH; STEIN, 2011). Assim o NCTM (2014) destaca três aspetos essenciais sobre a utilização das tarefas matemáticas: (1) nem todas as tarefas oferecem as mesmas oportunidade para as aprendizagens dos alunos; (2) a aprendizagem é maior quando as tarefas, encorajam de maneira consistente, o pensamento e o raciocínio de nível elevado, mas é menor se as tarefas são habitualmente rotineiras e procedimentais; e (3) as tarefas que implicam grande exigência cognitiva são as mais complicadas de implementar de forma correta, e, muitas vezes, convertem-se noutras, de menor exigência, durante a sua utilização no ensino. Por outro lado, os professores devem incorporar elementos relacionados com os contextos, cultura e linguagem na criação de tarefas, pois o envolvimento dos alunos nas suas resoluções estará mais ligado com o seu sentido de identidade, conduzindo a um aumento do empenho e de motivação. Assim, valorizam-se as tarefas desafiantes pois suscitam curiosidade, requerem imaginação e apelam à criatividade, tornando-se interessantes e agradáveis de resolver, o que só faz sentido num ensino exploratório onde o professor é o orquestrador da atividade na sala de aula (SMITH; STEIN, 2011). Logo, deve ser dada uma atenção especial à formação de professores, pois deve proporcionar experiências que permitam aos professores adquirir um conhecimento profundo da matemática a ensinar e como ensinar, pois, só assim poderão estabelecer conexões entre temas, e destes com os alunos, realçando a compreensão conceptual e considerando a resolução de problemas como aspeto fulcral no ensino da matemática. Neste sentido é fundamental que os (futuros) professores, durante a exploração de uma tarefa, possam tirar proveito de todo o seu potencial.

As tarefas centradas na resolução e/ou formulação de problemas podem contribuir para a aquisição de conhecimentos matemáticos, mas também para o desenvolvimento de outras capacidades (e.g. comunicar, raciocinar, argumentar, representar, criticar). A formulação de problemas pode ser uma estratégia poderosa para desenvolver capacidades de resolução de problemas e de ter bons resolvedores de problemas, por outro lado, a formulação de problemas matemáticos é necessária para se ser um bom resolvedor de problemas. Ao aprender com a resolução de problemas, os alunos têm inúmeras oportunidades para estabelecer conexões entre ideias matemáticas e desenvolver a sua compreensão conceptual (VALE; BARBOSA; PIMENTEL, 2015).

O processo de criação (invenção, formulação) de problemas tem sido definido de várias formas, mas, na essência, os autores referem-se quase sempre aos mesmos aspetos. Ou seja, a formulação de problemas implica gerar novos problemas ou reformular um determinado problema, com base no conhecimento e experiência matemática e das interpretações pessoais das situações (e.g. BROWN; WALTER, 2005; SILVER, 1997; STOYANOVA, 1998). Brown e Walter (2005) propõem duas estratégias de formulação de problemas que os alunos podem usar. A primeira é *Aceitando os dados*, quando os alunos partem de uma situação estática (e.g. expressão, tabela, imagem, frase, cálculo, conjunto de dados) a partir da qual formulam questões de modo a ter um problema, sem mudar a situação de partida. A segunda, *E se em vez de*, consiste em estender uma dada tarefa alterando o que é dado. A partir da informação contida num problema, identifica-se qual é a questão, o que é conhecido, o que é pedido e quais as limitações que a resposta ao problema envolve. Modificando um ou mais destes aspetos ou questões, podem gerar-se novas e mais questões (VALE et al, 2015).

Por outro lado, os professores têm um papel crucial no desenvolvimento do potencial criativo dos alunos, proporcionando-lhes experiências de aprendizagem adequadas, como sejam a resolução e formulação de problemas (e.g., FREIMAN et al., 2009; LEIKIN, SRIRAMAN, 2017; SILVER, 1997). Estes autores reconhecem a importância das diferentes dimensões da criatividade (fluência, flexibilidade, originalidade) no contributo que dão para aprendizagem matemática. Ambientes onde os alunos têm a oportunidade de resolver problemas com múltiplas possibilidades de resolução e de criar os seus próprios problemas, facilitam o envolvimento e a motivação, o pensamento divergente, logo a criatividade (BARBOSA; VALE, 2015). Este potencial criativo não se desenvolve apenas dentro da sala de aula, podendo este trabalho ser complementado em outros ambientes educativos, como os contextos de aprendizagem não formais e em particular os trilhos matemáticos.

3 | APRENDER E ENSINAR FORA DA SALA DE AULA – OS TRILHOS MATEMÁTICOS

Apesar de já haver um corpo de conhecimento substancial sobre a resolução de problemas, temos de revisitar e atualizar as nossas perspectivas sobre o seu ensino e aprendizagem: de como chegar ao conteúdo matemático de modo mais eficaz e de ter alunos com mais sucesso a resolver problemas. Contudo, aprender a resolver problemas da vida real tem-se revelado uma tarefa mais difícil do que resolver os tradicionais problemas-tipo das aulas e dos livros de texto. A aprendizagem fora da sala de aula mobiliza capacidades de resolução de problemas, cooperação e comunicação interpessoal: todas elas capacidades essenciais para os jovens de hoje. Aprender e ensinar fora da sala de aula tem como finalidade contribuir para o sucesso dos alunos em matemática, através de práticas que favorecem o recurso a contextos fora da sala de aula e, por outro lado, contribui para que os alunos de hoje não passem demasiado tempo sentados. Assim, cada aluno deve experimentar o mundo para além da sala de aula como uma parte essencial da aprendizagem e desenvolvimento pessoal, independentemente da sua idade, habilidade ou circunstâncias vivenciando experiências de aprendizagem, pois a sala de aula é apenas uma das casas onde a educação tem lugar (e.g., KENDEROV; REJALI; BARTOLINI; BUSSI et al., 2009).

Grande parte dos fracassos matemáticos têm origem no ambiente afetivo (e.g. atitudes, concepções, sentimentos) que se cria, e este pode comprometer seriamente as expectativas e motivações iniciais dos alunos, uma vez que esta influencia todo o processo de ensino e aprendizagem (e.g. HANNULA, 2004). A aprendizagem fora da sala de aula pode promover nos alunos atitudes positivas e uma motivação adicional para o estudo da matemática, pois permite-lhes compreender a sua aplicabilidade, mas também desenvolver capacidades e conhecimentos matemáticos associados a todos os temas do currículo, ao mesmo tempo que permitem estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e outras áreas disciplinares. Para além de criar uma atmosfera de aventura e exploração; cria oportunidades para a resolução (e formulação) de problemas em contexto real; mobiliza aprendizagens de dentro para fora da sala de aula e vice-versa; facilita a aprendizagem experimental; e constrói pontes entre a teoria e a realidade, entre as escolas e as comunidades.

Dentro das várias possibilidades de aprendizagem em contextos fora da sala de aula privilegiamos os trilhos matemáticos. De acordo com Cross (1997) um *trilho matemático* consiste numa “sequência de paragens ao longo de um percurso pré planeado, no qual os alunos estudam matemática no ambiente que os rodeia” (p. 38), enquanto que para Shoaf, Pollak e Schneider (2004) um trilho é simplesmente “um passeio para descobrir matemática”. Baseado nestes autores, consideramos que um trilho é uma sequência de paragens ao longo de um percurso pré-planeado, (com início e fim), constituído por um conjunto de postos nos quais os alunos resolvem tarefas matemáticas no ambiente que os rodeia. Cria-se um espaço informal à volta das tarefas propostas pelo trilho, centrado na aprendizagem da matemática, que permite abordar a resolução de problemas, o estabelecimento de conexões, a comunicação, a criatividade e o desenvolvimento de competências matemáticas, resolvendo tarefas em contexto real. A realização de um trilho num espaço envolvente como o ambiente educativo, permite que os alunos (incluindo os futuros professores) estejam motivados para a sua realização, criando atitudes positivas para aprender matemática, facilitando também a compreensão dos conceitos matemáticos.

4 | O ESTUDO E ALGUNS RESULTADOS

De acordo com os objetivos atrás referidos, no âmbito deste projeto realizou-se um estudo exploratório de natureza qualitativa e interpretativa (DENZIN; LINCOLN, 2000) cujos participantes eram 65 futuros professores de matemática do ensino básico (3-12 anos) durante uma unidade curricular no âmbito da Didática de Matemática. A recolha de dados recorreu a documentos, sobretudo as produções dos futuros professores - tarefas/trilhos, observações, questionários e entrevistas. A análise dos dados foi de natureza indutiva, de acordo com alguns critérios como sejam a criatividade, diversidade, natureza e conteúdos matemáticos, tendo por base os objetivos definidos e as respostas dos alunos, realizada conjuntamente pelas duas professoras da unidade curricular supracitada.

O trabalho que estes alunos, em pares, realizaram foi a concepção de um Trilho Matemático, que envolveu, a escolha prévia de um percurso pela cidade onde se insere a escola de formação, pelo que teriam de recolher um conjunto de fotografias que tivessem potencial para formularem no mínimo 10 tarefas matemáticas (correspondentes a 10 fotografias diferentes). Com base nestas fotos, deveriam criar um conjunto de tarefas sequenciadas e organizadas sob a forma de um percurso/roteiro, já definido, no meio urbano, que constituiria o trilho e que numa fase final seria concretizado com alunos do ensino básico (7-11 anos). As várias tarefas, deveriam ser adequadas ao ensino básico, e ter por base elementos característicos do meio (e.g. objetos - janelas, edifícios, monumentos, espaços verdes, pavimentos; fenômenos – queda de água, foco de luz).

A construção dos trilhos foi acompanhada durante as aulas, de forma presencial, em particular depois da escolha do percurso. No acompanhamento da concepção e preparação de tarefas baseadas nas fotografias selecionadas pelos alunos, foi sendo dado feedback acerca do trabalho. O design dos roteiros dos trilhos e dos kits de apoio à realização do trilho dependeram das opções e criatividade de cada grupo.

A Figura 1 ilustra quatro exemplos de tarefas construídas pelos alunos, futuros professores do ensino básico (e.g. CASTRO, 2015; VALE et al, 2015).

Tarefa 1.	Tarefa 3
 Olha à tua volta e procura o sinal com o nome da rua em que te encontras. Tira uma fotografia. Se colocares as letras num saco, qual será a letra mais provável que podes tirar? E a menos provável?	 Os caixotes do lixo da escola estão bastante degradados, e a direção da escola decidiu pintar todo o ferro vermelho de azul. 1.Calcula um valor aproximado da área de ferro a pintar. 2. Sabe-se que há 3 latas de tinta azul que dá para pintar 3 metros quadrados e a escola dispõem de 12 caixotes do lixo deste tipo. Verifica e as três latas de tinta serão suficientes para pintar todos os caixotes. Justifica.
Tarefa 2	**Tarefa 4**
 Vai até à Praça da República. Lá, vais encontrar um chafariz. 1. Sabendo que a menina que está na borda do chafariz mede 1,55m, faz uma estimativa da altura do chafariz. 2. Como poderias medir o perímetro do chafariz. Explica.	 Todos estes postos são cubos, nos quais as faces estão representadas 5 ninhos de quadrados pintados alternadamente. 1. Imagina que tinhas um cubo com 50 ninhos de quadrados, de que cor seria o 17ª quadrado? 2. A escola vai transformar estes postos em floreiras. Cada posto terá 8 pés de rosas e 8 pés de lírios. Desenha no teu bloco vários modos de dispor as flores, de acordo com um padrão e sem sobrar nenhuma planta. 3. Gastou-se 75,60 euros em flores para cada posto. Se cada rosa custa 3,50 euros e cada lírio custa mais 70 cêntimos, calcula quantos pés de cada flor terá cada floreira.

Figura 1. Exemplos de tarefas dos trilhos

Fonte: autores

A maior parte das tarefas propostas focaram-se no tema da Geometria e Medida, muitas envolveram questões de conhecimentos de factos específicos (e.g. “Descobre os polígonos que identificas na janela”, “Que tipos de triângulos identificas nas marcas do chão”) ou de problemas rotineiros (e.g. que envolvem medições, ou seja, cálculo de perímetros, áreas, ...), onde a única diferença para as tarefas de sala de aula, era serem realizadas fora da sala de aula e onde os alunos têm de eventualmente efetuar medições necessárias para responder às questões, como ilustra a tarefa 3. Contudo, também surgiram tarefas matematicamente mais interessantes, de nível cognitivo mais elevado e criativas, que foram ao encontro do espírito dos trilhos matemáticos (e.g. tarefas 1, 2, 4). As maiores dificuldades sentiram-se em relação à construção de tarefas, sobretudo em diversificar os conteúdos ao longo dos trilhos e criar tarefas que obrigassem a estar fisicamente no local para as resolver. Acharam que a formulação de problemas é mais complexa do que resolver problemas, tendo sido a estratégia de formulação de problemas mais utilizadas *E se em vez de* (BROWN; WALTER, 2005). Esta dificuldade pode atribuir-se á falta de familiaridade com este tipo de trabalho, pois que só contatam com ele durante a formação. A apresentação do trilho ficou ao critério de cada grupo, o que fez com que surgissem formatos bastante diferentes e originais que variam entre mapas e panfletos e com o apoio de material, como mostra a Figura 2.

Figura 2. Material de apoio ao trilho

Fonte: autores

A partir dos dados dos questionários e das observações podemos constatar que a reação dos alunos (futuros professores) foi positiva, manifestando motivação e adesão à proposta de elaboração de um trilho matemático. Permitiu-lhes, quer como futuros professores, mas também como alunos (em formação), perspectivarem a matemática e a sua aprendizagem de uma forma mais dinâmica e motivadora em relação às suas próprias experiências como alunos: "Nunca tinha tido a ideia ou sequer pensado que a matemática podia ser tão aplicável ao meio que nos rodeia" ou "Muitas vezes perguntamos para que serve a matemática, e este trabalho permitiu encontrar uma resposta. Além disso, foram identificadas dimensões da criatividade na resolução e na formulação das tarefas: "Os trilhos obrigaram-nos a pensar na matemática de uma forma menos formal e mais criativa". Os futuros professores tornaram-se gradualmente mais conscientes e mais atentos à matemática que os rodeia, tendo servido para que desenvolvessem o seu olho matemático, tecendo comentários como “nunca olharei da mesma maneira para uma janela ou para um pavimento” ou até mesmo “gostaria de ter aprendido este tipo de matemática” (BARBOSA et al, 2015; VALE, 2017).

5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho que temos vindo a desenvolver, no âmbito da formação inicial de professores, indica que trabalhar a matemática noutros contextos fora da sala de aula têm sido gratificante, pois os futuros professores ficam motivados para darem corpo a uma proposta exigente que é construir tarefas matemáticas baseadas no meio ambiente, que lhes era desconhecida até então. Assim, pelos relatos destes alunos podemos afirmar que este trabalho contribuiu para que os nossos futuros professores evidenciassem uma atitude mais positiva em relação à matemática e para que adquirissem uma visão mais ampla das possíveis conexões que podem ser estabelecidas entre a matemática e o mundo que nos rodeia (e.g. CASTRO, 2015; HANNULA, 2004; KENDEROV et al., 2009). Os trilhos construídos constituíram um modo de conhecer melhor o meio envolvente, quer dentro dos espaços escolares quer na vila ou cidade, analisando-a através de um “olho matemático”, mas também para conhecer um pouco mais da sua história e arquitetura (VALE et al, 2015). A concepção das tarefas não foi um processo fácil, a diferentes níveis, nomeadamente do ponto de vista dos conhecimentos matemáticos envolvidos, quer do grau de desafio e exigência, quer também da diversidade na tipologia das tarefas (SMITH; STEIN, 2011). Manifestaram conhecimentos matemáticos previamente adquiridos na construção de tarefas (e.g. SHOAF; POLLAK; SCHNEIDER, 2004) e, globalmente, identificaram os conceitos matemáticos mais óbvios aquando da formulação dos problemas, estando principalmente relacionados com a geometria elementar. Este trabalho permitiu o estabelecimento de conexões de natureza diversa, de uma forma natural: dentro da matemática (abordando diferentes temas, como a geometria, número, álgebra, probabilidades); entre a matemática e outras áreas (e.g. história, arte); entre a matemática e o quotidiano (NCTM, 2014). Os futuros professores manifestaram também grande fluência, na formulação de um número significativo de tarefas; alguma flexibilidade na integração de temas como a geometria, medida e número; assim como alguns traços de originalidade, na proposta de tarefas sobre temas que não são usualmente trabalhados nos níveis de escolaridade a que se destinam e no grau de elaboração apresentadas. Manifestaram, sem dúvida, muita originalidade na forma de apresentação dos trilhos (e.g. BARBOSA et al, 2015; LEIKIN; SRIRAMAN, 2017; VALE et al, 2015). Ao contrário do que se pretende com um trilho matemático foram incluídas algumas tarefas para as quais o contexto real serviu de base à criação da tarefa, no entanto mostrou-se irrelevante porque não era preciso estar no local para resolver a tarefa.

A experiência realizada mostrou-se com potencialidades para a formação dos futuros professores, em particular, no trabalho com a formulação de problemas em associação com a reflexão sobre os diferentes tipos de tarefas matemáticas. Foi também importante o papel dos contextos, assim como o trabalho com a criatividade, quer no momento da formulação das tarefas, quer no potencial que apresentaram para promover nos alunos do ensino básico o desenvolvimento da criatividade matemática. Podemos, para finalizar, concluir que os trilhos matemáticos (ou tarefas isoladas) podem complementar o trabalho realizado dentro da sala de aula, pela riqueza de conhecimentos, processos e capacidades que permitem conjugar, dando sentido à matemática que os alunos aprendem.

Este trabalho foi financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projeto do CIEC (Centro de Investigação em Estudos da Criança da Universidade do Minho) com a referência UIDB/00317/2020.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, A.; VALE, I. Trilhos matemáticos: promovendo a criatividade dos futuros professores. **Educação & Matemática**, Lisboa, 135, p. 57-64, Nov./Dez. 2015.

BROWN, S.; WALTER, M. **The art of problem solving.** Mahwah, NJ: Erlbaum, 2005.

CASTRO, Lígia. **Trilho matemático: uma experiência fora da sala de aula com uma turma do 5º ano de escolaridade.** 2015. Relatório Final de Prática de Ensino Supervisionada (Mestrado em Ensino do 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico) – Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana do Castelo, 2015.

CROSS, R. Developing Maths Trails. **Mathematics Teaching**, Derby, 158, p. 38-39, Mar. 1997.

DENZIN, N.; LINCOLN, Y. **Handbook of Qualitative Research.** Newbury Park: Sage, 2000.

FREIMAN, V.; KADIJEVICH, D.; KUNTZ, G.; POZDNYAKOV, S.; STEDOY, I. Challenging mathematics beyond the classroom enhanced by technology. *In*: Barbeau, E.; Taylor, P. (Eds.), **Challenging mathematics in and beyond the classroom.** Switzerland: Springer, 2009, p. 97-131.

HANNULA, M. **Affect in mathematical thinking and learning.** Turku: Turun Yliopisto, 2004.

KENDEROV, P.; REJALI, A.; BARTOLINI BUSSI, M.; PANDELIEVA, V.; RICHTER, K.; MASCHIETTO, M.; KADIJEVICH, D.; TAYLOR, P. (2009). Challenges Beyond the Classroom—Sources and Organizational Issues. *In*: BARBEAU, E.; TAYLOR, P. (org.). **Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom**, Switzerland: Springer, 2009, cap. 2, p. 53-96.

LEIKIN, R.; SRIRAMAN, R. (eds.). **Creativity and Giftedness**, Switzerland: Springer, 2017.

NCTM. Principles to actions: **Ensuring mathematical success for all.** Reston, VA: NCTM, 2014.

SCHLEIDER, A. **Teaching Excellence through Professional Learning and Policy Reform:** Lessons from Around the World, International Summit on the Teaching Profession. Paris: OECD Publishing, 2016.

SHOAF, M.; POLLAK, H.; SCHNEIDER, J. (2004). **Math Trails.** COMAP, Incorporated.

SILVER, E. Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. **ZDM**, Hamburg, 3, p. 75-80, Jun. 1997.

SMITH, M.; STEIN, M. K. **Five practices for orchestrating productive mathematics discussions.** Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 2011.

STOYANOVA, E. Problem posing in mathematics classrooms. *In*: McIntosh, A.; Ellerton, N. (Eds.), **Research in Mathematics Education: a contemporary perspective**. Edith Cowan University: MASTEC, 1998, p. 164-185.

VALE, I. (2017). Aprender para ensinar matemática fora da sala de aula. *In* FESPM (Eds), **Livro de Actas do VIII CIBEM.** Madrid: FISEM, 2017, p. 48-58**.**

VALE, I; BARBOSA, A.; PIMENTEL, T. Math trails a rich context for problem posing - an experience with pre-service teachers. **Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)**, 25, 2, p. 221-227, jul. 2015.

CAPÍTULO 9

MODELAGEM MATEMÁTICA NO CAMPO

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 25/06/2020

Daniel Freitas Martins
Universidade Federal de Viçosa – *Campus* Florestal
Florestal – Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/3855503742201306

Mehran Sabeti
Universidade Federal de Viçosa – Campus Florestal
Florestal – Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/1192944329873105

Nicolly Ramalho Silva
Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte – Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/9838476446868418

RESUMO: Muitos problemas do mundo real podem ser representados por modelos matemáticos. A modelagem matemática consiste na capacidade de tomar um problema definido em alguma situação prática relativamente complexa, transformá-lo em um modelo matemático e procurar uma solução que possa ser reinterpretada em termos da situação original. Neste trabalho foram revisados dois modelos matemáticos voltados ao problema de determinar o número de peixes da espécie tilápia-do-nilo (Oreochromis niloticus) em um determinado estágio de tempo considerando um ambiente controlado. Os modelos aplicam técnicas de equações de diferenças finitas, também chamadas de recorrências lineares, para descreverem o problema matematicamente. Este problema está presente no campo, mais especificamente na Aquacultura, e seu estudo é importante pois permite explorar conceitos abstratos, melhorar a produção de peixes para consumo, reduzir gastos na cultura de peixes desta espécie, etc. Este trabalho também apresenta os principais conceitos envolvidos nos estudos abordados e faz uma discussão a respeito da importância desses temas em aplicações no mundo real.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem matemática, recorrência linear, equação de diferenças, dinâmica populacional, tilápia-do-nilo.

MATHEMATICAL MODELING IN THE FIELD

ABSTRACT: Many real-world problems can be represented by mathematical models. Mathematical modeling consists of the ability to take a defined problem in some relatively complex practical situation, transform it into a mathematical model and look for a solution that can be reinterpreted in terms of the original situation. In this work, two mathematical models were revised on the problem of determining the number of fish of the species Nile tilapia (*Oreochromis niloticus*) at a given time stage considering a controlled environment. The models apply finite difference equation techniques, also called linear recurrences, to describe the problem mathematically. This problem is present in the field, more specifically in Aquaculture, and its study is important because it allows to explore

abstract concepts, to improve the production of fish for consumption, to reduce expenses in the culture of fish of this species, etc. This work also presents the main concepts involved in the studies addressed and discusses the importance of these topics in real-world applications.
KEYWORDS: Mathematical modeling, linear recurrence, difference equation, population dynamics, Nile tilapia.

1 I INTRODUÇÃO

Muitas ideias em matemática surgiram a partir de problemas práticos, sendo que as mesmas foram desenvolvidas a partir da necessidade de se obter uma solução a partir de um modelo matemático, que nada mais é do que a interpretação do problema real para a linguagem matemática. De acordo com Bassanezi (2002), a modelagem matemática consiste na capacidade de tomar um problema definido em alguma situação prática relativamente complexa, transformá-lo em um modelo matemático e procurar uma solução que possa ser reinterpretada em termos da situação original. De acordo com Giordano et al. (2013), um modelo matemático permite que conclusões matemáticas sejam obtidas a respeito de um sistema ou comportamento do mundo real. Essas conclusões podem servir de base para que sejam feitas tomadas de decisão que tenham um impacto positivo no futuro. Veja na Fig. 1 um fluxo representativo do processo de modelagem matemática.

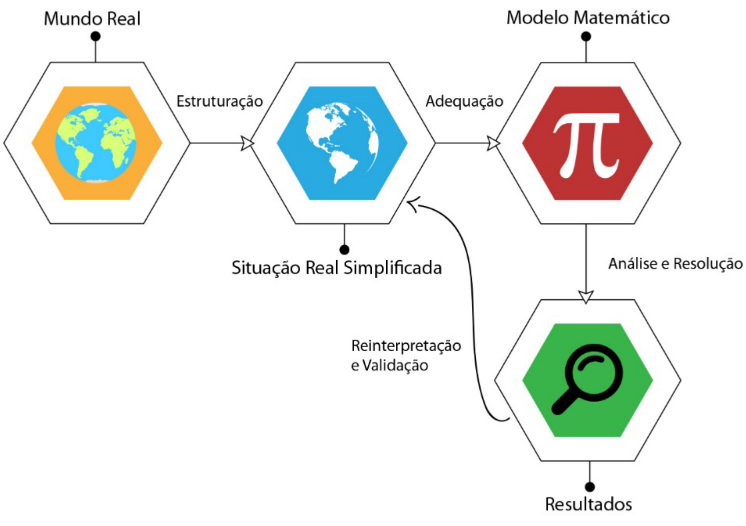


Figura 1: Fluxo representativo do processo de modelagem matemática.

Fonte: Elaborada pelos autores (2020).

Muitos estudos possuem o foco na cultura de peixes em reservas controladas. Em particular, estudos relacionados à cultura de tilápias-do-nilo (*Oreochromis niloticus*) possuem finalidades diversas, como explorar conceitos abstratos, melhorar a produção de peixes para consumo, reduzir gastos na cultura de peixes desta espécie, etc. Júnior et al. (2014) apresenta um estudo envolvendo a aplicação de modelos matemáticos ao crescimento de tilápias-do-nilo criadas em tanques-rede no Submédio do São Francisco, de modo a determinar quais deles melhor representam as condições de criação para a região. Yi (1998) apresenta um modelo de crescimento bioenergético para as tilápias-do-nilo em tanques fertilizados, envolvendo seis variáveis-chave que afetam o crescimento dessa espécie nesse tipo de ambiente. Giordano et al. (2013) apresenta um modelo matemático para predizer o peso de um determinado peixe da espécie robalo (*bass*) tendo como informações a densidade média de peso de peixes desta espécie e o tamanho do peixe considerado. Bassanezi (2002) apresenta dois estudos acerca da dinâmica populacional das tilápias-do-nilo. Em um deles, é estabelecida uma maneira de determinar o número de peixes após um determinado período, considerando dois estágios: alevinos (jovens) e adultos. No outro, taxas de sobrevivência são incluídas no modelo e três estágios distintos são considerados: ovos, alevinos e adultos.

Outros modelos mais complexos podem ser elaborados considerando-se a presença de outros ambientes. Tais ambientes podem, por exemplo, ter a população dividida em predadores e presas (MURRAY, 2002). Em Raymond et al. (2019), um modelo predador-presa é apresentado envolvendo três espécies de peixes: perca-do-nilo, ciclídeos e tilápias. A perca-do-nilo foi considerada a espécie predadora, e as demais foram consideradas as presas do sistema.

Neste trabalho é feita uma revisão bibliográfica a respeito de estudos matemáticos relacionados à dinâmica populacional de peixes tilápias-do-nilo apresentados em Bassanezi (2002). O trabalho está assim organizado: a Seção 2 apresenta uma introdução ao conceito de recorrências; as Seções 3 e 4 descrevem as recorrências lineares de primeira e segunda ordem, respectivamente; as Seções 5 e 6 apresentam os modelos matemáticos referentes ao estudo da dinâmica populacional das tilápias-do-nilo, sendo que nesta última há a inclusão de taxas de sobrevivência; a Seção 7 apresenta as considerações finais deste trabalho.

2 | RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Algumas sequências podem ser definidas por regras que permitem calcular qualquer termo em função dos anteriores, usualmente do antecessor imediato ou de uma quantidade pequena de antecessores imediatos. Esse tipo de construção é dita ser uma construção por recorrência e, para que a sequência possa ser gerada, é necessário o fornecimento do(s) primeiro(s) termo(s) que a compõe. De acordo com Bassanezi (2002), essas construções também são chamadas de *equações de diferenças finitas* e *fórmulas aritméticas*.

Para algumas relações de recorrência é possível obter uma fórmula fechada. Essa fórmula permite calcular o enésimo termo da sequência descrita pela relação de recorrência, sem a necessidade de realizar os cálculos recursivos auxiliares. Por outro lado, de acordo com Bassanezi (2002), quando se trata de uma equação de diferenças não-linear, geralmente não é possível obter tal solução diretamente, sendo necessário analisá-la através de seus *pontos de equilíbrio*. De acordo com Elaydi (2005), um ponto x^* no domínio de uma função f é dito ser um ponto de equilíbrio se é um ponto fixo de f, isto é, $f(x^*) = x^*$. Em outras palavras, este ponto indica onde a função permanece constante, não havendo variação de um termo t para um termo $t + 1$ da sequência que ela gera. Neste trabalho foram estudadas as relações de recorrências lineares de primeira e de segunda ordem.

3 I RECORRÊNCIAS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

De acordo com Elaydi (2005), uma recorrência linear de primeira ordem define uma sequência por meio de uma função do primeiro grau. Cada um de seus termos, com exceção do primeiro, são dependentes do termo imediatamente anterior. Matematicamente, considerando $a, b \in \mathbb{R}$, e $C \in \mathbb{R}$ uma constante previamente definida,

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}) = ax_{n-1} + b, & \text{se } n \geq 1, \\ x_0 = C, & \text{se } n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Uma fórmula fechada pode ser encontrada para relações de recorrência que podem ser descritas pelo Sistema 1. Em geral, o enésimo termo pode ser obtido pela Equação 2:

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b\left[\dfrac{a^n - 1}{a - 1}\right], & \text{se } a \neq 1 \\ x_0 + bn, & \text{se } a = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Note que se for conhecido o valor de x_0, é possível calcular qualquer termo de uma sequência definida por uma relação de recorrência do tipo descrito no Sistema 1 com apenas um cálculo direto.

4 I RECORRÊNCIAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

De acordo com Pereira (2014), uma recorrência linear de segunda ordem define uma sequência por meio de uma função do segundo grau. Cada um de seus termos, com exceção dos dois primeiros, são dependentes de dois termos imediatamente anteriores. Matematicamente, considerando *a, b, c* $\in \mathbb{R}$, e C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ constantes previamente definidas,

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}) = ax_{n-1} + bx_{n-2} + c, & \text{se } n \geq 2 \\ x_0 = C_1, & \text{se } n = 0 \\ x_1 = C_2, & \text{se } n = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Do Sistema 3, quando $c = 0$, a relação de recorrência pode ser escrita como:

$$x_n - ax_{n-1} - bx_{n-2} = 0 \tag{4}$$

A cada relação de recorrência da forma acima (Equação 4), pode-se associar uma equação do segundo grau, chamada *equação característica* (PEREIRA, 2014). A equação característica está representada na Equação 7 e é equivalente à Equação 6 (WEISSTEIN, 2020?), onde *I* é a matriz identidade e A é a matriz associada aos coeficientes dos termos à direita da igualdade do Sistema 5. Este sistema consiste de duas equações de primeira ordem e é uma representação equivalente de uma relação de recorrência de segunda ordem semelhante à Equação 4. Para construir o Sistema 5, faz-se uma mudança de variáveis $x_{n+1} = z_n$ (BASSANEZI, 2002).

$$\begin{cases} x_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = bx_n + az_n \end{cases} \tag{5}$$

$$\det(A - tI) = 0 \tag{6}$$

A é uma matriz quadrada $k \times k$ e *I* é a matriz identidade $k \times k$

$$\begin{vmatrix} -t & 1 \\ b & a - t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t^2 - at - b = 0 \tag{7}$$

A partir das raízes dessa equação característica e do princípio da superposição (BASSANEZI, 2002) é possível determinar uma fórmula fechada para a relação de recorrência do Sistema 3. Se t_1 e t_2 são raízes dessa equação característica, então a Equação 8 é solução da recorrência do Sistema 3, para A1 e A2 determinados pelo Sistema 9, que admite como soluções as Equações 10 e 11 (BASSANEZI, 2002).

$$x_n = A_1 t_1^n + A_2 t_2^n \tag{8}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ t_1 A_1 + t_2 A_2 = x_1 \end{cases} \tag{9}$$

$$A_1 = x_0 - \frac{t_1 x_0 - x_1}{t_1 - t_2} \tag{10}$$

$$A_2 = \frac{t_1 x_0 - x_1}{t_1 - t_2} \tag{11}$$

Um exemplo clássico em que a Equação 8 se aplica é a Sequência de Fibonacci. Ela é definida pela relação de recorrência de segunda ordem abaixo.

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}) = x_{n-1} + x_{n-2}, & \text{se } n \geq 2, \\ x_0 = 1, & \text{se } n = 0 \\ x_1 = 1, & \text{se } n = 1 \end{cases} \tag{12}$$

Pelas Equações 8, 10 e 11, o enésimo termo da sequência de Fibonacci pode ser calculado pela fórmula fechada abaixo:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \tag{13}$$

Note que a partir da Equação 13, fica fácil calcular o 50º termo da sequência de Fibonacci sem a necessidade de se calcular os termos anteriores, isto é (note que o 50º termo corresponde a n =49 , pois o primeiro termo da sequência corresponde a n =0, o segundo corresponde a n =1, e assim por diante):

$$x_{49} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{50} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{50} = 12586269025 \tag{14}$$

5 | DINÂMICA POPULACIONAL DA TILÁPIA-DO-NILO

A tilápia-do-nilo (*Oreochromis niloticus*) é uma das espécies de peixes mais populares em muitos países tropicais (YI, 1998). O cultivo desta espécie está presente em todos os estados brasileiros para fins comerciais (JÚNIOR et al., 2014).

De acordo com Bassanezi (2002), as tilápias apresentam três estágios em seu ciclo de vida: ovos, jovens e adultos. São considerados adultos aqueles que têm a capacidade de se reproduzirem, o que ocorre aproximadamente aos 4 meses de idade. Em condições naturais, quando a temperatura da água permanece acima de 20ºC, a desova pode ocorrer a cada 2 meses. A eclosão dos ovos ocorre em aproximadamente 72 horas após a fecundação por algum macho e pode gerar de 100 a 600 alevinos a depender do tamanho da fêmea. A taxa de mortalidade dos recém-nascidos é igual a 50%. Recomenda-se que, no processo de criação dessa espécie, exista um macho para cada duas fêmeas.

t (2 meses)	P_t	A_t	y_t
0	P_0	0	P_0
1	P_0	αP_0	$P_0 + \alpha P_0$
2	$P_0 + \alpha P_0$	αP_0	$P_0 + 2\alpha P_0$
3	$P_0 + 2\alpha P_0$	$\alpha P_0 + \alpha^2 P_0$	$P_0 + 3\alpha P_0 + \alpha^2 P_0$
4	$P_0 + 3\alpha P_0 + \alpha^2 P_0$	$\alpha P_0 + \alpha^2 P_0$	$P_0 + 4\alpha P_0 + 3\alpha^2 P_0$
...	...	...	...
t	$P_{t-1} + A_{t-1}$	αP_{t-1}	$P_{t-1} + A_{t-1} + \alpha P_{t-1}$

Tabela 1: Dinâmica populacional das tilápias-do-nilo jovens e adultas.

Fonte: Retirada de Bassanezi (2002, p. 100).

De modo a simplificar o modelo, considere A_t, P_t e y_t o número de alevinos, o número de tilápias adultas e o número total de tilápias num estágio t, respectivamente. O estágio t corresponde ao tempo de desova, ou seja, 2 meses. Como as tilápias fêmeas adultas estão sendo consideradas na contabilização de P_t, a quantidade de alevinos no estágio t +1 pode ser calculada como uma proporção do número de adultos do estágio anterior, isto é, $A_t = \alpha P_{t-1}$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Considerou-se também que os peixes estão inseridos em um ambiente controlado, isto é, sem a presença de predadores e em condições ideais.

Observando o comportamento da população das tilápias-do-nilo na Tabela 1, é possível construir uma fórmula de recorrência de segunda ordem para determinar a quantidade de adultos em um determinado período t:

$$P_t = P_{t-1} + A_{t-1} \;\Rightarrow\; P_t = P_{t-1} + \alpha P_{t-2} \quad \text{para} \quad t \geq 2 \qquad (15)$$

A Equação 15 diz que a população de tilápias adultas no estágio t corresponde às tilápias adultas do estágio anterior mais os alevinos do estágio anterior que se tornaram adultos. Note que $A_{t-1} = \alpha P_{t-2}$ corresponde ao número de alevinos amadurecidos no estágio t. Ainda, pela Tabela 1, observa-se que a quantidade de peixes adultos pode ser calculada a partir da última coluna da tabela correspondente ao número total de peixes em cada estágio, isto é,

$$P_{t+1} = y_t \tag{16}$$

$$y_t = y_{t-1} + \alpha y_{t-2} \quad \text{para} \quad t \geq 2 \tag{17}$$

Pela Equação 17 é possível obter o número total de tilápias em um determinado tempo t. Além disso, pela Equação 16, obtém-se o número de tilápias adultas no estágio t + 1. É importante notar que a Equação 17 só é possível de ser calculada se forem conhecidos seus valores em dois estágios imediatamente anteriores.

As Equações 15 e 17 são denominadas fórmulas recursivas (ou equações de diferenças finitas) de segunda ordem (BASSANEZI, 2002). Uma fórmula recursiva de segunda ordem pode ser reduzida a uma fórmula fechada para o cálculo do t-ésimo termo da sequência que ela descreve, conforme apresentada na Seção 4. A fórmula fechada é importante quando se deseja saber a população em um determinado estágio t, sendo necessário que apenas um cálculo seja feito. Neste modelo, determinar o número de peixes em um determinado tempo t pode ter aplicações comerciais, promover estudos científicos ou para controle de um determinado ecossistema, por exemplo. Desta forma, para este modelo o número de peixes adultos em um estágio t pode ser calculado diretamente pela Equação 19, obtida pela resolução do Sistema 18.

$$\begin{cases} P_t = P_{t-1} + \alpha P_{t-2} \\ P(0) = P_0 \text{ e } P(1) = P_1 = P_0 \end{cases} \tag{18}$$

$$P_t = P_0 \frac{(1 + \sqrt{1 + 4\alpha})}{2\sqrt{1 + 4\alpha}} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^t - P_0 \frac{(1 - \sqrt{1 + 4\alpha})}{2\sqrt{1 + 4\alpha}} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^t \tag{19}$$

Esse tipo de estudo se faz importante uma vez que o controle populacional das tilápias implica diretamente na qualidade do produto final. De acordo com Schulter e Filho (2017), a tilapicultura no Brasil, na década de 1980, passou de uma atividade voltada para o repovoamento e complemento de renda a pequenos produtores para uma atividade explorada comercialmente, com o surgimento dos empreendimentos pioneiros. Esses primeiros empreendimentos não obtiveram muito sucesso devido ao pouco conhecimento das técnicas de cultivo, a inexistência de rações adequadas e a baixa qualidade de alevinos.

> As tilápias se multiplicavam intensamente nas psiculturas, nos grandes reservatórios e em açudes particulares, resultando na produção de um grande número de peixes pequenos e sem grande valor comercial. Com isso, elas ganharam, no Brasil, a fama de peixe pequeno, cheio de espinho e com gosto de barro, que dava em qualquer lagoa (SCHULTER e FILHO, 2017, p. 15).

A Equação 19 pode ser usada para predizer o número de peixes adultos em uma determinada época do ano. Com isso, os produtores podem tomar decisões acerca da alimentação e do controle populacional das tilápias de modo a prezar pela qualidade do produto. Outros modelos, como o apresentado na próxima seção e os apresentados por Yi (1998) e Júnior et al. (2014), por incluírem mais considerações são mais complexos e representam melhor o mundo real, e podem ser mais adequados para servirem de base para tomadas de decisão.

6 | DINÂMICA POPULACIONAL DA TILÁPIA-DO-NILO COM TAXAS DE SOBREVIVÊNCIA

Uma variação do modelo anterior, considerando taxas de sobrevivência e as dinâmicas das três fases distintas: ovos, alevinos e adultos (BASSANEZI, 2002), é apresentada a seguir. Este modelo visa ter uma representação mais próxima do mundo real do que o modelo anterior.

Sejam b_n, a_n e c_n a quantidade de jovens (alevinos), a quantidade de adultos e a quantidade de ovos viáveis em cada estágio, respectivamente. As taxas γ, β e δ correspondem à taxa de sobrevivência da população de ovos, a taxa de conversão para adultos e a taxa de sobrevivência da população de adultos, respectivamente.

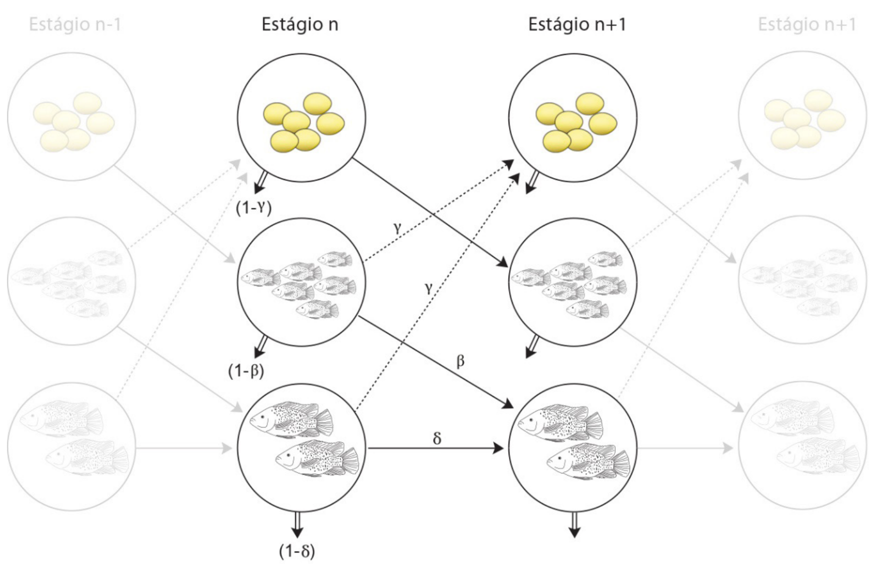


Figura 2: Fluxo de um estágio para outro referente à modelagem da dinâmica populacional das tilápias-do-nilo com três fases e taxas de sobrevivência.

Fonte: Adaptada de Bassanezi (2002, p. 111).

Considerando as taxas de mortalidade, elas podem ser representadas por

$(1-\delta)$, $(1-\beta)$ e $(1-\gamma)$ e correspondem às taxas de mortalidade de adultos, mortalidade de alevinos e perda de ovos, respectivamente.

A Fig. 2 representa o fluxo de um estágio n para um estágio n+1. A partir dessa figura, o modelo pode ser representado pelo Sistema 20 abaixo:

$$\begin{cases} a_n = \delta a_{n-1} + \beta b_{n-1} \\ b_n = c_{n-1} \\ c_n = \gamma a_{n-1} + \gamma\beta b_{n-1} \end{cases} \tag{20}$$

Utilizando a Equação 6, é possível encontrar a equação característica do Sistema 20:

$$\det(\mathrm{A} - tI) = 0$$
$$\Rightarrow \left| \begin{pmatrix} \delta - t & \beta & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ \gamma & \gamma\beta & -t \end{pmatrix} \right| = -t^3 + \delta t^2 + \gamma\beta t + \gamma\beta(1-\delta) = 0 \tag{21}$$

Se os valores dos parâmetros γ, δ e β são conhecidos, então o cálculo das raízes da Equação 21 pode ser feito por métodos numéricos (BASSANEZI, 2002). Com essas raízes, é possível obter uma fórmula fechada para o cálculo de α_n, por exemplo. O método para a obtenção desta fórmula pode ser encontrado em Jensen (2011, p. 28-31). Em suma, utiliza-se o princípio da superposição com algumas considerações a respeito das raízes obtidas como, por exemplo, o domínio de cada uma delas.

De acordo com Bassanezi (2002), nem sempre a solução explícita é a mais conveniente. Outros métodos como tabela de dados, gráficos e análise dos pontos de equilíbrio podem ser úteis para uma análise mais completa.

7 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelagem matemática é uma importante ferramenta para resolver diversos problemas do mundo real. Neste trabalho foram revisados dois modelos matemáticos voltados a um problema do campo, mais especificamente da Aquacultura. O problema consistia em determinar o número de peixes da espécie tilápia-do-nilo (*Oreochromis niloticus*) em um determinado estágio de tempo considerando um ambiente controlado. Ambos os modelos estudados representam o problema como um sistema de equações de diferenças finitas. O primeiro modelo faz uma divisão da população de peixes em adultos e alevinos (jovens). O segundo modelo, similar ao primeiro, considerou também a população de ovos e taxas de sobrevivência, tornando-o mais próximo de uma representação realística.

Neste trabalho também foram apresentados os principais conceitos envolvidos nos estudos abordados. Foi feita também uma discussão a respeito da importância desses estudos em aplicações no mundo real. O problema da dinâmica populacional da espécie tilápia-do-nilo ilustra uma das situações que podem estar presentes em problemas do campo. Este estudo reforça que a modelagem matemática pode ser importante para a obtenção de resultados acerca desse tipo de problema. Tais resultados podem ser úteis para tomadas de decisão quanto a controles populacionais, equilíbrios de ecossistemas e previsões sobre o comportamento futuro das populações, por exemplo.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino - aprendizagem com Modelagem matemática**. 3. ed. Editora Contexto, 2002.

ELAYDI, Saber. **An Introduction to Difference Equations**. 3. ed. Springer-Verlag New York, 2005.

GIORDANO, Frank R.; FOX, William P.; HORTON, Steven B. **A First Course in Mathematical Modeling**. 5. ed. Cengage Learning, 2013.

JENSEN, Arne. **Lecture notes on difference equations**. Department of Mathematical Sciences – Aalborg University, Aalborg, Dinamarca, 2011.

JÚNIOR, José de A. de Souza et al. **Mathematical modeling applied to the growth of tilapia in net cages in the sub middle of the São Francisco river**. Eng. Agríc., Jaboticabal, v. 34, n. 5, p. 1001-1011, 2014. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-69162014000500019&lng=en&nrm=iso>. Acessado em: 14 jun. 2020.

MURRAY, James D. **Mathematical Biology: I. An Introduction**. v. 17. 3. ed. Springer-Verlag New York, 2002.

PEREIRA, Marcus Vinícius. **Recorrências - Problemas e Aplicações**. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

RAYMOND, Charles; HUGO, Alfred; KUNG'ARO, Monica. **Modeling Dynamics of Prey-Predator Fishery Model with Harvesting: A Bioeconomic Model**. Journal of Applied Mathematics, v. 2019, 2019.

SCHULTER, Eduardo Pickler; FILHO, José Eustáquio Ribeiro Vieira. **Evolução da piscicultura no Brasil: diagnóstico e desenvolvimento da cadeia produtiva de tilápia**. Texto para discussão / Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada. Rio de Janeiro: Ipea, 2017.

WEISSTEIN, Eric Wolfgang. **Characteristic Equation**. *In*: MathWorld—A Wolfram Web Resource. Disponível em: https://mathworld.wolfram.com/CharacteristicEquation.html. Acesso em: 17 jun. 2020.

YI, Yang. **A bioenergetics growth model for Nile tilapia (Oreochromis niloticus) based on limiting nutrients and fish standing crop in fertilized ponds**. Aquacultural Engineering, v. 18, n. 3, p. 157-173, 1998.

CAPÍTULO 10

A DIVISÃO EM PARTES UTILIZADA NA PESCA ARTESANAL: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE EMBASADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA SOCIOCRÍTICA

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 20/06/2020

Deusarino Oliveira Almeida Júnior
Universidade do Estado do Pará
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/4508355005233195

Saul Rodrigo da Costa Barreto
Universidade do Estado do Pará
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/3696990935948213

Marcelo Baia da Silva
Universidade do Estado do Pará
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/3761718283585842

Fábio José da Costa Alves
Universidade do Estado do Pará
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/3739552118066554

RESUMO: O presente trabalho trata do ensino de Proporção apresentando uma proposta de atividade desenvolvida no contexto da pesca artesanal realizada por embarcações de pequeno porte no município de Vigia de Nazaré – PA. A elaboração da atividade está embasada na perspectiva da Modelagem Matemática Sociocrítica de Barbosa (2001) e toma como parâmetro, a divisão em partes que é comumente utilizada na divisão dos lucros de uma viagem de pesca, entre os donos das embarcações e as suas respectivas tripulações. A referida proposta didática é direcionada para os alunos do 1º ano do ensino médio e leva em consideração a relevância do ensino de Proporções indicada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A atividade proposta, tem a intenção de contribuir com a inserção de atividades de Modelagem Matemática no ensino de Matemática que possibilitem abordar conhecimentos matemáticos a partir de aspectos da realidade do aluno e que possam favorecer o desenvolvimento de sua percepção sociocultural e de sua criticidade.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, Modelagem Matemática Crítica, Proporção, Pesca Artesanal.

THE DIVISION IN PARTIES USED IN ARTISANAL FISHING: A PROPOSAL OF ACTIVITY BASED ON SOCIOCRITICAL MATHEMATICAL MODELING

ABSTRACT: The present work deals with the teaching of Proportion presenting an activity proposal developed in the context of artisanal fishing carried out by small boats in the municipality of Vigia de Nazaré - PA. The elaboration of the activity is based on the perspective of the Sociocritic Mathematical Modeling of Barbosa (2001) and takes as a parameter, the division into parts that is commonly used in the division of the profits of a fishing trip, between the owners of the vessels and their respective crews. . This didactic proposal is aimed at students in the 1st year of high school and takes into account the relevance of teaching Proportions indicated in the National Curriculum Parameters (PCN) and in the National

Common Curricular Base (BNCC). The proposed activity is intended to contribute to the insertion of Mathematical Modeling activities in the teaching of Mathematics that make it possible to approach mathematical knowledge from aspects of the student's reality and that may favor the development of their sociocultural perception and their criticality.
KEYWORDS: Mathematics Education, Critical Mathematical Modeling, Proportion, Artisanal Fishing.

1 I INTRODUÇÃO

Diversas pesquisas em educação matemática, buscam desenvolver práticas pedagógicas caracterizadas pela participação efetiva do aluno na construção do conhecimento. Nesse sentido, a Modelagem Matemática enquanto metodologia de ensino, diferencia-se significativamente da metodologia tradicional, pois promove em sala de aula um ambiente favorável para desenvolver a aprendizagem de forma autônoma e participativa.

Contrapondo-se a metodologia clássica, o emprego de metodologias ativas em que o aluno deixa de ser um agente passivo e torna-se corresponsável pelo seu aprendizado, tem sinalizado bons resultados relacionados a aprendizagem e ao desenvolvimento cognitivo dos alunos, já que estes assumem durante as aulas, uma postura mais atuante na construção do saber. Desse modo, acreditamos que tais metodologias revelam-se mais adequadas a realidade educacional da atualidade.

Nesse contexto, adotamos neste artigo Modelagem Matemática como metodologia de ensino, desenvolvendo nossa proposta de atividade de acordo com perspectiva de Barbosa (2003, p.69) que à concebe como “Um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade” e da mesma forma, admitimos a modelagem matemática na perspectiva de Burak (1992, p.62) cuja Modelagem Matemática “Constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões”.

Nessa perspectiva, a divisão em partes utilizada na pesca artesanal, comumente utilizada por pescadores em Vigia de Nazaré – PA, permite desenvolver procedimentos de modelagem para o ensino de Matemática a partir de fenômenos presentes no dia a dia do aluno, oportunizando-o investigar, por meio de conhecimentos matemáticos, aspectos de sua realidade. A divisão em partes, a que nos referimos, acontece no retorno das viagens de pesca artesanal, em que é necessário dividir o valor arrecadado com a venda do pescado entre o dono da embarcação e a tripulação da embarcação que realizou a viagem.

Nas atividades são abordados relevantes conhecimentos relacionados a proporção, que por sua vez estão presentes em vários momentos da formação do aluno no decorrer do ensino fundamental.

> A proporcionalidade, por exemplo, que já vem sendo trabalhada nos ciclos anteriores, aparece na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. Para a compreensão da proporcionalidade é preciso também explorar situações em que as relações não sejam proporcionais - os contra-exemplos (BRASIL, 1998, p. 84).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), propõe a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9º ano do ensino fundamental.

> Outro ponto enfatizado no Ensino Fundamental é o desenvolvimento do pensamento proporcional. Isso pode ser feito pela exploração de situações que oportunizem a representação, em um sistema de coordenadas cartesianas, da variação de grandezas, além da análise e caracterização do comportamento dessa variação (diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional). (BRASIL, 2017, p. 518)

Dessa forma, a atividade proposta, pode contribuir para consolidar conhecimentos relacionados ao raciocínio proporcional dos alunos do primeiro ano do ensino médio, a partir de atividades de modelagem matemática elaboradas no contexto da pesca artesanal em Vigia de Nazaré, pois de acordo com Burak (2012, p.96), os conteúdos matemáticos abordados em uma das etapas do processo de modelagem, ganham importância e significado para o estudante. Assim, a partir dos conhecimentos matemáticos adquiridos e com a mediação do professor, é possível que o aluno desenvolva um olhar mais crítico sobre sua realidade, reconhecendo-se como um sujeito transformador de sua própria realidade e de sua própria história.

2 I A MODELAGEM MATEMÁTICA SOCIOCRÍTICA

Em consonância, com as discussões ocorridas no contexto da Educação Matemática Crítica, caracterizada por Ole Skovsmose (2001) como aquela em que os professores e alunos se envolvem conjuntamente no processo educacional por meio do diálogo, de forma a desenvolver a democratização do poder, Barbosa (2003) propõe a Modelagem Matemática Crítica como forma de oferecer uma perspectiva de modelagem voltada não somente a aprendizagem matemática mas também para o papel emancipador da matemática na formação crítica do aluno: "O que chamamos de corrente Sócio-Crítica de Modelagem sublinha que as atividades devem potencializar a reflexão sobre a matemática, a própria Modelagem e seu significado social” (BARBOSA, 2001, p. 5).

Com isso, além de tratar dos conhecimentos matemáticos (domínio dos conceitos, resultados e algoritmos matemáticos), dos conhecimentos tecnológicos (habilidade de aplicar a matemática e construir modelos estratégias e resolução de problemas e algoritmos com os conhecimentos matemáticos), releva o conhecimento reflexivo, relacionado a capacidade de refletir e avaliar, criticamente, a aplicação da matemática em determinadas situações da realidade.

Sobre o conhecimento reflexivo, Barbosa (2001) destaca que o fato do aluno desempenhar atividades de modelagem em sala de aula, não implica que necessariamente irá desenvolver a capacidade de analisar criticamente a aplicação da matemática em fenômenos socias, no entanto, tais atividades podem favorecer algum nível de crítica, e nesse processo de transição que atribui significados sociais aos conhecimentos matemáticos, o professor exerce um papel determinante:

> As atividades de Modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Nem matemática nem Modelagem são “fins”, mas sim “meios” para questionar a realidade vivida. Isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a matemática no mundo social, mas que Modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica. É pertinente sublinhar que necessariamente os alunos não transitam para a dimensão do conhecimento reflexivo, de modo que o professor possui grande responsabilidade para tal. (BARBOSA, 2001, p. 4)

Nesse sentido, atividades de modelagem matemática elaborada**s** no âmbito da Modelagem Sociocrítica, resguardam um viés voltado para desenvolver a capacidade do aluno em compreender e criticar argumentos matemáticos postos em debates, podendo potencializar sua atuação nas tomadas de decisões coletivas, favorecendo o exercício de sua cidadania. Em conformidade com Barbosa (2003):

> Se estamos interessados em construir uma sociedade democrática, onde as pessoas possam participar de sua condução e, assim, exercer cidadania, entendida aqui genericamente como inclusão nas discussões públicas, devemos reconhecer a necessidade de as pessoas se sentirem capazes de intervir em debates baseados em matemática. (BARBOSA, 2003, p. 6)

Alinhados com esses pressupostos teóricos, esta proposta tem a intenção de contribuir para a implementação de atividades de modelagem matemática crítica nas aulas de Matemática, com alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Pretende, portanto incentivar a elaboração de novas propostas pautadas nos pressupostos da Modelagem Matemática Sociocrítica que contemplem aspectos da realidade sociocultural do aluno e favoreça o desenvolvimento de sua criticidade a partir da apreensão de conhecimentos matemáticos.

3 I O MUNICÍPIO DE VIGIA DE NAZARÉ - PA

Vigia de Nazaré é um município brasileiro, localizado no estado do Pará. É um dos onze municípios que compõe a microrregião do salgado, na mesorregião do Nordeste Paraense e está situado a aproximadamente 92 quilômetros da cidade de Belém, capital do Estado do Pará.

Imagem 1 - Localização geográfica de Vigia de Nazaré (PA)

Fonte: Autor (2018)

O município de Vigia de Nazaré é fortemente caracterizado pela atividade pesqueira que é desenvolvida na região. Situada às margens do rio Guajará Mirim apresenta fácil acesso ao oceano atlântico, favorecendo naturalmente a predominância da atividade pesqueira, que representa por sua vez, um segmento primordial da economia do município.

Nesse contexto, de acordo com Burack (2012, p. 93) realizamos uma pesquisa exploratória com proprietários de embarcações de pequeno porte com a intenção de levantar dados sobre a pesca artesanal. As entrevistas realizadas com os donos de embarcação, permitiram extrair diversas informações essenciais sobre a atividade pesqueira desenvolvida no município.

Desse modo, destacamos a seguir, fragmentos de duas entrevistas realizadas com donos de embarcações, que evidenciam como se realiza a divisão por partes para se determinar o pagamento da tripulação, após o retorno de uma viagem de pesca.

3.1 Fragmentos de entrevistas realizadas com proprietários de embarcações de pequeno porte em vigia de nazaré

Na transcrição das entrevistas a seguir, adotamos P para o pesquisador, E1 para o primeiro entrevistado e E2 para o segundo entrevistado.

Fragmentos da primeira entrevista:

P: Você poderia me contar um pouco sobre uma viagem de pesca desde sua partida até sua chegada, como um exemplo?

E1: É esse meu barco ai, a duração de viagem dele é 17, 18 dias de porto a porto...Chega até 20 dias de porto a porto. Agora tem viagem que eles fazem menos, com 15 dias de porto a porto, sai daqui chegar no pesqueiro, pescar e retornar. Agora em termos de custo, termo da despesa pra sair ...Hoje com esse meu barco é pequeno... com R$ 5.000,00 é consegue colocar ele pra fora. A despesa: o gelo, o óleo e o vale pra tripulação e o rancho. No caso ele leva, mais ou menos R$ 1.500,00 de óleo, leva uns R$ 700,00 de gelo, R$ 600,00 varia e ai vem o rancho de R$ 400,00 ai vem o vale do pessoal é uns R$ 1.500,00 chega até R$ 1.700,00 pra se dividir R$ 300 pra cada um... R$ 400,00 ou R$ 500,00 pro responsável que vai entendeu? Ai é isso... as vezes quando leva sorte eles trazem, como já trouxeram quatro toneladas e pouco de peixe e como o peixe era bandeirado[1] deu uma venda de vinte e poucos mil na época né...uma venda de vinte e poucos mil na época. Também tem viagem também que não topa com o peixe, às vezes dá mal pra pagar a despesa, as vez nem dá pra pagar... paga a despesa mas não paga o dinheiro que foi dado pra tripulação entendeu... É por isso que hoje em dia esses empresários grandes de pesca, eles tão investindo nesses barcos frigorífico [...] esses barcos tão passando quatro mês pra fora, três meses, só vem de lá quando tá cheio de peixe, peixe tudo de frigorífico congelado.

P: No caso de uma viagem dessa que deu certo, como é que é feita a divisão do lucro?

E1: A divisão do meu barco, a gente racha no meio. Tira a despesa e divide no meio. Se sobrar R$ 10.000,00 é R$ 5.000,00 pro dono do barco e R$ 5.000,00 a tripulação se divide lá. No caso, o responsável ganha duas partes, o responsável que vai é o encarregado que dizem ganha duas partes, ai o gelador ganha parte e meia. Gelador é o cara que trabalha aqui em cima e desce pra gelar o peixe também... ganha parte e meia. Ai o cara que no caso esse que é a pesca de bandeirado tem que ter um especial pra ... é um que entenda pra jogar anzol, pra jogar a linha na água.

P: É diferente é?

1 Espécie de peixe encontrado na região, cujo nome científico é *Bagre bagre.* Fonte: https://goo.gl/QMYrgC. Acessado em: 10/09/2018 às 22:52.

E1: É não é qualquer um que faz esse serviço. Ai já ganha parte e meia também, agora sendo que o encarregado eu já dou uma parte separado pra ele, porque ele fica tomando conta do barco, é responsável do motor e tal essas coisas de limpeza tudo, cuida né? Uma parte que eu já dou dessa minha parte que sai pra mim, já dou uma parte pra ele que pra ele zelar pela embarcação.

P: Uma parte, no caso seria de igual valor, ou um agrado por fora?

E1: Não o valor que deu uma parte.

P: O valor que deu uma parte... No caso ela é dividida de acordo com a tripulação...são quantos?

E1: Se for cinco. Ai ela é dividido em cinco...ai ...em sete partes.

P: Porque seria?

E1: O encarregado ganha uma, o gelador ganha mais meia e o outro, ganha meia.

P: Isso já tirando a metade?

E1: Tirando a metade.

P: Divide a outra metade em sete partes?

E1: Sete parte é. Porque o cara que vai responsável não pode ganhar o mesmo tanto, o cara que é o conhecedor lá responsável não pode ganhar o mesmo tanto que o que não tem responsabilidade com nada ganha entendeu? Porque é assim, hoje em dia tem muitos pescadores, tem muito pescador que ele chega lá fora as vezes ele não quer nem se interessar no serviço. Já pegou o dinheiro aqui, já gastou uma parte, ele nem se preocupa. Pra ele o que trouxer tá tudo bem. Se não trouxer ai o cara lá que é responsável de tudo que tem que batalhar mesmo... não galera, conversa, ninguém vai ainda, bora batalhar mais um pouco aqui, porque a nossa família lá, nós saímos o que ficou já gastamos tem que batalhar aqui pra levar, mas tem uns que são solteiros que nem pensam nisso ai.

Fragmentos da segunda entrevista:

P: Você poderia me contar um pouco sobre uma viagem de pesca desde sua partida até sua chegada, como um exemplo?

E2: A saída a gente faz o seguinte, pega o gelo, pega o óleo, compra o rancho, compra tudo que uma pescaria necessita. Ai a gente pega, sai corre quase um dia de viagem, chegando lá, todo mundo tem sua função: quem solta rede solta, quem joga boia joga. Afinal de contas são cinco pessoas que trabalham no convés da embarcação, então todo mundo tem sua função. Aí passa em torno de doze, treze, até 15 dias lá fora. Esses 15 dias dependendo do que eles conseguem, a produção de peixe lá fora, a gente chega na beira fala com o nosso patrão de pesca, vai tirar o peixe. Daquela produção, a gente vai e começa a pesar o peixe que eles trazem em torno de, a pescada, é bagre é a gurijuba, é a dourada. Conforme a produção da pescaria, a gente vai, pega, vende e dependendo do preço. O patrão presta conta tudinho direitinho conforme o preço de cada um. Cada peixe tem seu preço. Aí pega e faz o levantamento do peixe quanto deu. Pega o produto que é a grude, que a gente chama aqui na Vigia e também vai vender, ai junta tudo e dependendo da pescaria é que a gente vai ver o que é que vai dar pro pescador e o que vai ficar também pro dono do barco fazer as suas manutenções da embarcação.

P: Você poderia esclarecer um pouco sobre como acontece à divisão das despesas e do lucro ou prejuízo de uma viagem?

E2: É como eu falei, dependendo da pescaria, depois de tudo vendido a gente vai ou chama o encarregado e quando dá certo eu chamo também a tripulação. Dependendo do que deu a gente faz a divisória. Eu tiro o dinheiro da despesa tudinho, se foi cinco mil, se foi cinco mil e pouco eu tiro. Do que sobra, eu divido por dois. Uma parte pra mim e uma parte pra tripulação. Dessa minha, dá pra mim fazer a manutenção minha embarcação e sustentar minha família. Da outra é dividido entre o capitão da embarcação e os tripulantes. Eu divido por dez partes. Cada um ganha a sua. Aí o capitão ganha quatro partes, o geleiro ganha uma e meia, o cozinheiro ganha uma e meia e os outros tripulantes cada um ganha uma parte.

A transcrição de fragmentos das entrevistas realizadas, trazem recortes relevantes da fala dos entrevistados relacionados a divisão comumente utilizada na pesca artesanal e que utilizamos para subsidiar a elaboração da proposta de atividade apresentada a seguir.

4 | A PROPOSTA DE ATIVIDADE

Tendo como como pano de fundo a pesca artesanal que é desenvolvida no município de Vigia de Nazaré esta proposta de atividade de modelagem matemática aborda especificamente a divisão dos valores obtidos com a venda dos pescados adquiridos em viagens de pesca, entre o dono da embarcação de pequeno porte e sua respectiva tripulação.

A referida proposta, pode ser adaptada pelo professor para outros temas que apresentem potencial para o ensino de Matemática a partir de aspectos relacionados com a realidade do aluno e que favoreçam de acordo com Barbosa

(2007), o desenvolvimento de um ambiente de modelagem em sala de aula.

Reiteramos que a atividade foi desenvolvida, atribuindo exclusivamente ao professor, as etapas de formulação do problema, simplificação e coleta de dados. Já a etapa de solução, estão designadas ao professor e ao aluno no desenvolvimento da atividade em sala de aula, conforme a classificação sugerida por Barbosa (2004) exposta a seguir (ver Quadro 1):

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Formulação do problema	Professor	professor	professor / aluno
Simplificação	Professor	professor / aluno	professor / aluno
Coleta de dados	Professor	professor / aluno	professor / aluno
Solução	professor / aluno	professor / aluno	professor / aluno

Quadro 1 – Casos de Modelagem Matemática

Fonte: Barbosa (2004)

Durante a aplicação das atividades, as aulas podem ser divididas em quatro momentos como sugere Barbosa (2009), conforme quadro a seguir (ver Quadro 2).

Momento	Descrição
O Convite	O professor apresenta a situação-problema e discute com os alunos
O trabalho em grupo	Os alunos, organizados em grupos, buscam produzir uma resolução para a situação, tendo o acompanhamento do professor
A socialização	Os grupos de alunos apresentam suas resoluções para discussão da turma;
A formalização	O professor pode fazer formalizações (ou institucionalização) de estratégias ou de tópicos matemáticos.

Quadro 2 – Divisão da aula em momentos nas atividades de Modelagem Matemática

Fonte: Adaptado de Barbosa (2009)

Em consonância com Skovsmose (2001) referente a Educação Matemática Crítica, as atividades de modelagem que constituem a proposta, buscam contemplar as três dimensões do conhecimento relacionadas respectivamente, aos conhecimentos matemáticos em si, aos conhecimentos tecnológicos e aos conhecimentos reflexivos que por sua vez, geralmente carece do auxílio do professor para provocá-lo.

Título: A divisão em partes utilizada na pesca artesanal em Vigia de Nazaré.
Objetivo: Abordar a divisão em partes utilizada na pesca artesanal em Vigia de Nazaré para o ensino de divisão proporcional e suscitar uma reflexão crítica acerca das dificuldades enfrentadas por pescadores artesanais na região.
Material: Texto inicial, folha de atividades, lápis ou caneta.
Procedimentos: Distribuir para todos os alunos o texto “A divisão por partes na pesca artesanal em Vigia de Nazaré” e realizar uma leitura em conjunto com a turma, incentivando que ao final da leitura os alunos se expressem brevemente sobre o tema abordado no texto. Em seguida, dividir os alunos em grupos de no máximo quatro alunos e distribuir uma folha de atividades para cada aluno, informando que devem resolver as questões propostas e discutir uma solução em seus respectivos grupos, de modo que, ao final de cada questão resolvida no intervalo de tempo estabelecido, um representante de cada grupo expõe no quadro a resolução obtida, possibilitando a socialização das respostas encontradas pelos alunos em cada grupo. Em seguida, o professor discute essas respostas com os alunos e procede a formalização do objeto matemático abordado na atividade.

5 | A DIVISÃO POR PARTES NA PESCA ARTESANAL EM VIGIA DE NAZARÉ - PA

Vigia de Nazaré é um município brasileiro, localizado no estado do Pará. É um dos onze municípios que compõe a microrregião do salgado, na mesorregião do Nordeste Paraense e está situado a aproximadamente 92 quilômetros da cidade de Belém, capital do Estado do Pará. O município é fortemente caracterizado pela atividade pesqueira que é desenvolvida na região. Situada às margens do rio Guajará Mirim apresenta fácil acesso ao Oceano Atlântico, favorecendo naturalmente a predominância da atividade pesqueira, que representa por sua vez, um segmento primordial da economia do município.

A pesca artesanal desenvolvida no local, representa uma atividade de grande importância econômica para a região, pois abrange um grande número de embarcações destinadas a captura do pescado em alto mar e envolve muitos pescadores que dependem da pesca para sobreviver e sustentar suas famílias.

De acordo com proprietários de embarcações de pequeno porte, para se determinar o valor monetário a ser recebido pelo dono da embarcação e sua respectiva tripulação (capitão da embarcação e pescadores que realizam a viagem de pesca), é realizada uma divisão por partes do valor que sobra, após a venda do pescado e do pagamento das devidas despesas da viagem. Essas despesas são referentes ao GELO necessário para conservar o pescado durante a viagem, com o ÓLEO DIESEL utilizado pelo motor da embarcação e com o RANCHO, que é relativo a alimentação da tripulação no período da viagem de aproximadamente 15 dias.

A seguir, são apresentados dois trechos de entrevistas realizadas com donos de embarcação da região, que tratam da divisão por partes utilizadas na pesca artesanal. Na transcrição, **P** representa o pesquisador e **E1** o entrevistado da embarcação A e **E2** o entrevistado da embarcação B.

Entrevista 1 - Embarcação A

P: Você poderia esclarecer um pouco sobre como acontece à divisão das despesas e do lucro ou prejuízo de uma viagem?
E1: É como eu falei, dependendo da pescaria, depois de tudo vendido a gente vai ou chama o encarregado e quando dá certo eu chamo também a tripulação. Dependendo do que deu a gente faz a divisória. Eu tiro o dinheiro da despesa: se foi cinco mil, se foi cinco mil e pouco eu tiro. Do que sobra, eu divido por dois. Uma parte pra mim e uma parte pra tripulação. Dessa minha, dá pra mim fazer a manutenção minha embarcação e sustentar minha família. Da outra é dividido entre o capitão da embarcação e os tripulantes. Eu divido por dez partes. Cada um ganha a sua. Aí o capitão ganha quatro partes, o geleiro ganha uma e meia, o cozinheiro ganha uma e meia e os outros tripulantes cada um ganha uma parte.
P: No caso de uma viagem de pesca artesanal que deu certo, como é que é feita a divisão do lucro?

P: Qual a tripulação por viagem?
E1: São seis trabalhadores que trabalham comigo. Têm o capitão, que a gente chama de encarregado. Pra nós é encarregado, pra outros lugares as pessoas chamam de capitão e mais cinco tripulantes e faz em torno de seis trabalhadores comigo.

Entrevista 2 - Embarcação B

P: No caso de uma viagem de pesca artesanal que deu certo, como é que é feita a divisão do lucro?
E2: A divisão do meu barco, a gente racha no meio. Tira a despesa e divide no meio. Se sobrar R$ 10.000,00 é R$ 5.000,00 pro dono do barco e R$ 5.000,00 a tripulação se divide lá. No caso, o responsável ganha duas partes, o responsável que vai é o encarregado que dizem, ganha duas partes, ai o gelador ganha parte e meia. Gelador é o cara que trabalha aqui em cima e desce pra gelar o peixe também... ganha parte e meia. Ai o cara que no caso esse que é a pesca de bandeirado tem que ter um especial pra ele, porque é o que entende de jogar anzol, pra jogar a linha na água. Ai já ganha parte e meia também.

P: No caso ela é dividida de acordo com a tripulação do barco...são quantos?
E2: Se for cinco, ai ela é dividido em sete partes. O encarregado ganha uma a mais, o gelador ganha mais meia e o outro, ganha meia.

Folha de atividades

De acordo com as informações do texto, responda as questões abaixo:

1 – Suponha que após a venda do pescado obtido em uma viagem de pesca artesanal e o pagamento das devidas despesas, obtenha-se um saldo de R$ 10.000,00. Como ficaria a divisão desse valor considerando a embarcação A?

2 – Suponha que após a venda do pescado obtido em uma viagem de pesca artesanal e o pagamento das devidas despesas, obtenha-se um saldo de R$ 10.000,00. Como ficaria a divisão desse valor considerando a embarcação B?

3 – Organize em uma tabela os valores a serem recebidos pela tripulação das duas embarcações e compare os valores a serem recebidos pelos pescadores. Os valores são iguais? Se não, porque isso acontece?

4 – Considere uma viagem de pesca que gerou um saldo positivo de R$ 18.000,00. Observando os cálculos realizados nas questões anteriores, busque elaborar uma forma de encontrar os valores a serem recebidos por cada tripulante utilizando a proporção.

5 – Leia a seguir o trecho do texto **"A ORGANIZAÇÃO DE CLASSE DOS PESCADORES ARTESANAIS DA COLÔNIA Z-3 NO MUNICÍPIO DE PELOTAS-RS (BRASIL)"**[2]

A Forma de Organização de Classe dos Pescadores Artesanais da Colônia Z-3 (Pelotas-RS/Brasil)
A pesca artesanal enquanto atividade humana representa uma modalidade de uso do espaço por meio da apropriação da natureza para o sustento das famílias dos pescadores. "Como modalidade de uso do espaço, a atividade pesqueira interage com as demais formas que a sociedade produz e reproduz seu espaço". Neste sentido, não encontra-se alheia aos processos de urbanização, industrialização, degradação ambiental, turismo, além dos organismos de gestão das águas. "Frente a todos esses processos, pescadores defrontam-se com um amplo campo de embate e a politização de seu movimento alcança as discussões dessas questões que envolvem seus espaços de vida, moradia e trabalho, seu espaço geográfico e seus territórios" (CARDOSO, 2001, p. 101). Deste modo, queremos destacar a emergência de um novo personagem social – os pescadores artesanais enquanto organização de classe ou movimento social.

- Converse com seus colegas de grupo sobre a organização dos pescadores artesanais em sua cidade. Existe alguma organização que represente os pescadores? O que você sabe sobre seu funcionamento?

2 Disponível em <http://www.eumed.net/rev/cccss/2016/04/pescadores.html>acesso em: 10/09/2018 às 19:10

- Essa organização em classes é importante? Justifique.

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos uma proposta de atividade inserida no âmbito da Modelagem Matemática Crítica, e elaborada no contexto pesca artesanal desenvolvida no município de Vigia de Nazaré em que abordamos conhecimentos matemáticos relacionados a proporções e vislumbramos a possibilidade de refletir criticamente com os alunos durante as aulas de matemática, sobre o modelo de divisão por partes, comumente utilizado para determinar o valor monetário a ser recebido pelo dono da embarcação e seus respectivos tripulantes.

De acordo, com as informações obtidas nas entrevistas realizadas com dois donos de embarcação, observamos que ambos utilizam a divisão por partes, porém, não há uniformidade entre os modelos, ou seja, se considerarmos uma situação hipotética em que um pescador trabalhasse em mesmo número de dias, com o mesmo número de tripulantes e obtendo-se o mesmo lucro com a venda de pescado, o valor a ser recebido por ele seria diferente em cada uma das embarcações. Isso mostra que o modelo utilizado não é uniforme, tornando obscuro aspectos das relações econômicas que estão envolvidas nas atividades pesqueiras de pesca artesanal.

Desse modo, ao refletirmos sobre esse modelo utilizado na divisão dos lucros da pesca artesanal e em consonância com as discussões sobre os três tipos de conhecimentos a serem desenvolvidos na Educação Matemática Crítica concebida por Skovsmose (2001), procuramos contemplar em nossa proposta os conhecimentos matemáticos que envolvem proporção e promover o uso correto dos símbolos e das regras matemáticas; estimular a elaboração de estratégias de resolução, caracterizando aplicação dos conhecimentos matemáticos adquiridos na elaboração de outros modelos a serem sugeridos pelos alunos e estimular o desenvolvimento da competência de refletir e avaliar criticamente a aplicação da matemática em situações reais.

Com relação ao conhecimento reflexivo, frisamos novamente, que o professor é peça fundamental para incitar nos alunos a manifestação e o amadurecimento de seu espírito crítico, alicerçado nos conhecimentos matemáticos adquiridos. Desse modo, as discussões sobre a divisão por partes utilizada na pesca artesanal, realizadas em sala de aula com a orientação do professor, podem suscitar questões do tipo: Esse modelo de divisão é justo? É possível sugerir um novo modelo de divisão? Os pescadores são vinculados a alguma associação de pescadores? Esses trabalhadores possuem carteira de trabalho assinada? Eles contribuem com a Seguridade Social? Em caso de acidentes eles tem seguro?

Assim, com esta proposta de atividade esperamos contribuir para implementar nas aulas de matemática, o debate sobre as aplicações de conteúdos matemáticos em situações da realidade do aluno que o levem a desenvolver seu espírito crítico a partir dos conhecimentos matemáticos desenvolvidos.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática**: contribuições para o debate teórico. In: Reunião Anual da ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Caxambu: ANPED, 2001.

__________. **Modelagem Matemática e a Perspectiva Sócio-Crítica**. In Anais II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Santos - SP, 2003.

__________. **Modelagem Matemática:** o que é? por que? como? Veritati, Rio Claro, v. 1, n. 4, p. 73-80, jan./jul. 2004.

__________. **Integrando Modelagem Matemática nas práticas pedagógicas**. Educação Matemática em Revista. n. 26, p. 17-25, março. 2009.

BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 161-174.

BRANDT, C. F., BURAK, D., and KLÜBER, T. E., (Orgs.). Modelagem matemática: perspectivas, experiências, reflexões e teorizações [online]. 2nd ed. rev. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016, pp. 213- 224.

BRASIL, S.E.F. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 2000. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: set. 2018.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC.** Brasília, DF, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf>. Acesso em: set. 2018.

BURAK, Dionísio; ARAGÃO, Rosália M. R. De. **A Modelagem Matemática e relações com a Aprendizagem Significativa**. 1 ed. Curitiba: Editora CRV, 2012. 127 p.

BURAK, D. **Modelagem Matemática:** ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

MELLO, Jéssica Adriane de. **A Modelagem Matemática na perspectiva Sócio-Crítica**: uma experiência em um curso de costureiras: Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Porto Alegre – RS: Universidade Federal do Rio grande do Sul, 2016. 95p.

MOURA, Danieli Veleda; LOUREIRO, Carlos Frederico Bernardo; ANELLO, Lúcia F. S. de. "**A organização de classe dos pescadores artesanais da colônia Z-3 no município de Pelotas-RS (Brasil)**", Revista Contribuciones a las Ciencias Sociales, (octubre-diciembre 2016). Disponível em: <http://www.eumed.net/rev/cccss/2016/04/pescadores.html>

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia**. Campinas: Papirus, 2001, Coleção Perspectivas em Educação Matemática, SBEM, 160 p.

CAPÍTULO 11

TEOREMA DE CARNOT: UMA VALIDAÇÃO COM GEOMETRIA DINÂMICA

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 20/06/2020

Giancarlo Secci de Souza Pereira
Secretaria de Estado de Educação do Estado do Pará
Barcarena – Pará
http://lattes.cnpq.br/2450142365955092
https://orcid.org/0000-0002-8378-0625

Cristiane Ruiz Gomes
Universidade Federal do Pará
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/5246751839088305
https://orcid.org/0000-0001-9368-6248

Antônio Carlos Ferreira
Secretaria de Estado de Educação do Estado do Pará
Ananindeua – Pará
http://lattes.cnpq.br/9262950252046749

Paulo Vilhena da Silva
Universidade Federal do Pará
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/2979203220976406
https://orcid.org/0000-0002-3989-5927

RESUMO: Este capítulo apresenta a verificação do Teorema de Carnot para triângulos acutângulos através da utilização do Geogebra, possibilitando aplicação deste em sala de aula de forma mais atrativa. São apresentados, também, um breve histórico de Lazaret Carnot, uma revisão literária sobre o uso da Tecnologia Digital da Informação e Comunicação, em especial o uso do Geogebra no ensino da Matemática, e a demonstração algébrica do Teorema de Carnot. A verificação via Geogebra é composta de sete etapas para a construção dos elementos necessários.
PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, História da Matemática, Teorema de Carnot, Geogebra.

CARNOT'S THEOREM: A VALIDATION WITH DYNAMIC GEOMETRY

ABSTRACT: This chapter presents the verification of the Carnot's Theorem for acute triangles through the use of Geogebra, allowing application in this the classroom in a more attractive way. A brief history of Lazaret Carnot, a literature review on the use of Digital Information Technology and Communication, in particular the use of Geogebra in the teaching of mathematics and algebraic demonstration of Carnot's theorem are also presented. Verification via Geogebra consists of seven steps for the construction of the necessary elements.
KEYWORDS: Mathematical Education, History of Mathematics, Carnot's Theorem, Geogebra.

1 I INTRODUÇÃO

As últimas décadas têm sido de grande avanço no desenvolvimento e na produção da Tecnologia Digital da Informação e Comunicação (TDIC). Evoluímos de gigantescos computadores na década de 1940, que faziam apenas operações simples, para smartphones que processam e realizam tarefas complexas em altíssima velocidade e disseminam, através da internet, os produtos finais de maneira quase que instantânea.

No entanto, esse avanço só foi possível devido ao trabalho e empenho de cientistas que dedicaram seus esforços na busca de novas tecnologias. Essas novas descobertas não são resultados isolados, mas sim produtos de pesquisas que têm como base relatos históricos de fatos e problemas enfrentados ao longo do tempo. Dentre os fatores que impulsionaram esse desenvolvimento, destacam-se os de natureza matemática que se caracterizam como elementos motivacionais para o ensino da Matemática.

Segundo Chaquiam (2015, p. 13) "estudos apontam que a história da matemática, combinada com outros recursos didáticos e metodológicos, pode contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática". Além disso,

> Acredita-se que a utilização das TDIC's integrada à História da Matemática como recurso pedagógico, possibilita ao professor apresentar aos alunos o percurso histórico da formação de um conceito matemático e refletir sobre o seu desenvolvimento nos dias atuais" (BRUGNERA e DYNNIKOV, 2018, p.2).

Nesse sentido, este capítulo propõe aliar a História da Matemática (HM), através do teorema de Carnot, aos novos recursos computacionais (Geogebra), o que poderá motivar e enriquecer o processo de ensino aprendizagem da Matemática. Com esse fim o capítulo está dividido em seis seções: introdução; breve histórico de Lazare Carnot; tecnologia e história no ensino da matemática; teorema de Carnot; uma visão dinâmica do teorema de Carnot e considerações finais.

2 | BREVE HISTÓRICO DE LAZARET CARNOT

Segundo Eves (2011, p. 463) Lazare Carnot (Figura 1) é apontado como uma das principais mentes que contribuíram para o desenvolvimento da matemática no século XVIII, junto a nomes como, a família Bernoulli, De Moivre, Taylor, Euler, Clairaut, d'Alembert, Lambert, Lagrange, Laplace, Legendre e Monge.

Lazare Nicolas Marguerite Carnot, conhecido como o Coordenador de Vitórias ou o Grande Carnot, nasceu em 13 de maio de 1753 na cidade francesa de Nolay. Filho de um advogado, Carnot estudou no Collège d'Autun e posteriormente no pequeno seminário da mesma cidade.

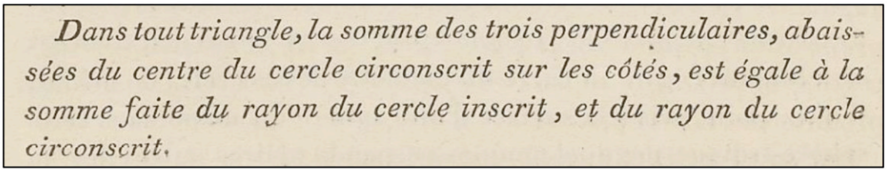
Figura 1: Lazaret Carnot

Fonte: https://www.britannica.com/biography/Lazare-Carnot

Depois de frequentar a escola preparatória de artilharia e engenharia em Paris de 1769 a 1771, formou-se na escola de engenharia de Mézières, em janeiro de 1773, com o posto de tenente. Em 1780, ele foi admitido em uma sociedade literária e em 1784 tornou-se conhecido por um elogio de Sébastian Le Prestre de Vauban, o engenheiro militar francês, que recebeu um prêmio da Academia Dijon. Em 1787, foi eleito membro da Academia Arras, cujo diretor era Maximilien Robespierre, que seria uma figura de destaque na Revolução francesa. (SOBOUL, 2018, tradução nossa, documento eletrônico).

Em 1796 em Genebra, Carnot escreveu um trabalho semifilosófico sobre a metafísica do cálculo. Suas principais contribuições a geometria foram lançadas em 1803 e 1806 intituladas “*Géométrie de Position”* e *“Essai sur la Théorie des Transversals”*.

A seguir é apresentado um pequeno fragmento do livro *Géométrie de Position* (Fig. 2) onde está enunciado o teorema de Carnot.



Dans tout triangle, la somme des trois perpendiculaires, abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés, est égale à la somme faite du rayon du cercle inscrit, et du rayon du cercle circonscrit.

Figura 2: Fragmento do teorema de Carnot.

Fonte: CARNOT (1803)

O trecho presente no fragmento, em francês, pode ser traduzido para o português como:

Em qualquer triângulo, a soma das três perpendiculares, baixadas do centro do círculo circunscrito nos lados, é igual à soma feita do raio do círculo inscrito e do raio do círculo circunscrito.

A apresentação desse enunciado, bem como a demonstração do teorema de Carnot estão presentes nas páginas 167 e 168 do livro *Géométrie de Position*, publicado por Carnot em 1803. Este teorema e sua representação dinâmica são os objetos de estudo neste capítulo.

3 | TECNOLOGIA E HISTÓRIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O grande avanço tecnológico ocorrido nas últimas décadas possibilitou a inserção da TDIC nas escolas. Tal inserção é fortalecida no Brasil por documentos oficiais que formam a base legal da Educação no país. Os parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) dão destaque ao avanço tecnológico e enfatizam a possibilidade de uma rápida transformação na educação proveniente da incorporação das novas tecnologias nos sistemas educacionais. "É possível afirmar que, nas próximas décadas, a educação vá se transformar mais rapidamente do que em muitas outras [...] estimulada pela incorporação das novas tecnologias" (BRASIL, 2000, p. 5).

Nesse contexto, a Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental indica a utilização de software de geometria por alunos a partir do 4º ano, conforme indicado na habilidade EF04MA18: "Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou *softwares* de geometria." (BRASIL, 2018, p. 292).

Essa referência aos recursos desse gênero de *software* torna-se mais intensivo no Ensino Médio, momento em que o aluno é chamado a construir o domínio de conhecimentos geométricos mais aprofundados como resposta à resolução de problemas de natureza geométrica. Justifica-se, assim, no desenvolvimento desse capítulo, a utilização do Geogebra na verificação do Teorema de Carnot.

Além disso, segundo o *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM (2000) apud (Saha, 2010, p. 687, tradução nossa), a tecnologia é fundamental no ensino e aprendizagem da matemática, podendo influenciar no ensino e melhorar a aprendizagem dos alunos. A tecnologia também pode ajudar os alunos a fornecerem suas imagens visuais de ideias matemáticas, organização e análise de dados, permitindo cálculos de forma eficiente e precisa.

Em conformidade, Viana e Alvarenga (2009) apud (Braz, 2015, p.3) constataram, segundo estudos, que a retenção de informação por parte dos alunos, em geral, é de cerca de 20% do que ouvem, ou seja, do que é falado pelo professor. Já alunos que veem e ouvem informações, retêm cerca de 40% do que é transmitido. Mas, estudantes que veem, ouvem e que estão altamente envolvidos no processo de aprendizagem, retêm aproximadamente 75% das informações.

Por outro lado, a História da Matemática é evidenciada a partir da publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais em 1997. Tal documento apresenta essa tendência “como uma das formas de fazer matemática em sala de aula, acarretando assim, sua inserção como parte da formação dos alunos da Educação Básica” (PEREIRA; GUEDES, 2016, p. 2).

Adicionalmente, Pereira e Guedes (2016) destacam que o desenvolvimento de determinados assuntos a partir de sua origem, possibilitando ao aluno melhor entendimento sobre o tema, através de análises e observações acerca das transformações ocorridas ao longo do tempo, além de agregar esses conteúdos históricos à prática escolar.

Segundo Chaquiam (2015), a compreensão dos motivos que nos levam a estudar determinados conteúdos tornam as aulas mais dinâmicas e permitem ao professor a construção de uma visão crítica sobre o assunto em questão é possibilitada pela História da Matemática.

Desse modo, é consenso que tanto a TDIC quanto a HM apresentam-se como ferramentas potenciais que podem trazer benefícios significativos ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Aquela possibilitando maior interação entre alunos e professores, enquanto esta podendo “despertar interesse e apresentar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática” (BRASIL, 2018, p. 298).

Em relação ao Geogebra, Silva (2014) destaca-o como ferramenta que fornece uma visão geral do que está sendo trabalhado em sala de aula, prendendo a atenção do aluno, fazendo com que este fique mais envolvido com os conteúdos abordados e participe ativamente do processo de ensino, conseguindo, dessa forma, aprender o que está sendo proposto pelo professor.

O Geogebra é um software livre multiplataforma que permite estabelecer valorosa conexão entre álgebra e geometria possibilitando clareza em tópicos da matemática que necessitam do auxílio visual para a interpretação de problemas. Por ser o teorema de Carnot assim caracterizado, ao necessitar de uma representação visual para melhor compreensão, escolhemos o Geogebra para o desenvolvimento deste trabalho.

4 I TEOREMA DE CARNOT

Para o desenvolvimento da demonstração algébrica e da verificação dinâmica, proposta neste aprofundamento dos conhecimentos requeridos no ensino médio, espera-se que os alunos tenham alguns conhecimentos prévios em geometria euclidiana plana e trigonometria, tais como: classificação, área, perímetro e pontos notáveis de triângulos, circunferências, perpendicularidade, relações trigonométricas no triângulo retângulo e operações com arcos trigonométricos. É necessário que os alunos estejam familiarizados com a área de trabalho do Geogebra.

Teorema (Carnot): Sejam ***ABC*** um triângulo acutângulo, ***H*** o centro da circunferência de raio ***R*** circunscrita em ***ABC*** e a circunferência de centro ***I*** e raio ***r*** inscrita a ***ABC***. Se ***HE***, ***HF*** e ***HG*** são as distâncias de ***H*** aos lados de ***ABC***, então:

HE + HF + HG = R = r

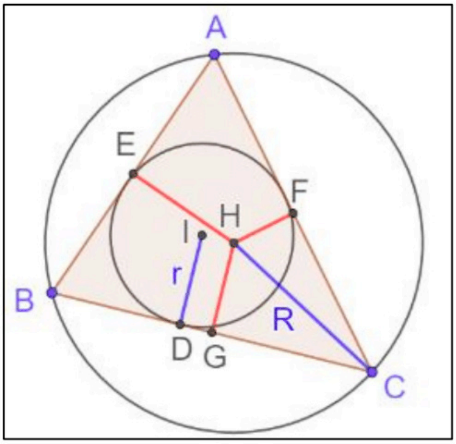


Figura 3: Representação geométrica do teorema de Carnot

Fonte: Elaborada pelos autores.

Demonstração:

Seja ***ABC*** um triângulo acutângulo inscrito na circunferência ***λ*** de centro ***H*** e raio ***R***. A partir de ***H*** traçamos os segmentos ***HE*** , ***HF*** e ***HG*** perpendiculares aos lados ***AB***, ***AC*** e ***BC***, respectivamente, e os segmentos ***AH***, ***BH*** e ***CH***, raios de ***λ***.

Note que ***HG*** é altura e bissetriz de ***BHC***, por este ser isósceles. Assim, $\boldsymbol{med}\left(B\hat{H}C\right) = 2.\boldsymbol{med}(\hat{A})$ implica que $\boldsymbol{med}\left(G\hat{H}C\right) = \boldsymbol{med}\left(B\hat{H}C\right)/2 = \boldsymbol{med}(\hat{A})$. Daí, segue que:

$$\overline{HG} = R \cdot \cos \hat{A}. \qquad (1)$$

De modo análogo, obtemos

$$\overline{HF} = R \cdot \cos \hat{B} \quad \text{e} \qquad (2)$$

$$\overline{HE} = R \cdot \cos \hat{C}. \qquad (3)$$

A área do triângulo ***BHC*** é dada por

$$S_{BHC} = \frac{a \cdot \overline{HG}}{2} = \frac{a \cdot R \cdot \cos \widehat{A}}{2}. \tag{4}$$

Analogamente, obtemos

$$S_{AHC} = \frac{b \cdot \overline{HF}}{2} = \frac{b \cdot R \cdot \cos \widehat{B}}{2} \quad \text{e} \tag{5}$$

$$S_{AHB} = \frac{c \cdot \overline{HE}}{2} = \frac{c \cdot R \cdot \cos \widehat{C}}{2}. \tag{6}$$

Dessa forma, a área ***S*** do triângulo ***ABC*** é dada por

$$S = \frac{a \cdot R \cdot \cos \widehat{A}}{2} + \frac{b \cdot R \cdot \cos \widehat{B}}{2} + \frac{c \cdot R \cdot \cos \widehat{C}}{2}. \tag{7}$$

De ***ABC***, temos que

$$a = b \cdot \cos \widehat{C} + c \cdot \cos \widehat{B} \tag{8}$$

$$b = a \cdot \cos \widehat{C} + c \cdot \cos \widehat{A} \tag{9}$$

$$c = b \cdot \cos \widehat{B} + b \cdot \cos \widehat{A} \tag{10}$$

Somando (8), (9) e (10) obtemos

$$\begin{aligned} a + b + c &= (b + c) \cdot \cos \widehat{A} + (a + c) \cdot \cos \widehat{B} + (a + b) \cdot \cos \widehat{C} \\ &= (a + b + c) \cdot \cos \widehat{A} + (a + b + c) \cdot \cos \widehat{B} + (a + b + c) \cdot \cos \widehat{C} - \\ -a \cdot \cos \widehat{A} - b \cdot \cos \widehat{B} - c \cdot \cos \widehat{C} &= (a + b + c)\left(\cos \widehat{A} + \cos \widehat{B} + \cos \widehat{C}\right) - \\ &-(a \cdot \cos \widehat{A} + b \cdot \cos \widehat{B} + c \cdot \cos \widehat{C}). \end{aligned}$$

Seja ***2p*** o perímetro e ***p*** o semiperímetro do triângulo ***ABC***. Aplicando (1), (2), (3) e (7) neste último resultado, segue-se que

$$\begin{aligned} 2p = 2p\left(\frac{\overline{HG}}{R} + \frac{\overline{HF}}{R} + \frac{\overline{HE}}{R}\right) - \frac{2S}{R} &\Leftrightarrow \\ pR = p(\overline{HE} + \overline{HF} + \overline{HG}) - pr &\Leftrightarrow \\ p(R + r) = p(\overline{HE} + \overline{HF} + \overline{HG}) &\Leftrightarrow \\ R + r = \overline{HE} + \overline{HF} + \overline{HG}. & \end{aligned}$$

■

5 | UMA VISÃO DINÂMICA DO TEOREMA DE CARNOT

Nesta seção apresentamos a verificação do teorema de Carnot para triângulos acutângulos utilizando o software Geogebra. Este procedimento consiste na construção dos elementos necessários para a demonstração do teorema e está estruturado em sete etapas a seguir descritas de (a) a (g). Cada etapa descreve de forma objetiva os procedimentos necessários para a construção da aplicação (Fig.

4), que ao final poderá ser manipulada, de forma dinâmica e lúdica.

a. Construir um triângulo ***ABC*** qualquer utilizando a ferramenta Polígono . Clicar em um ponto qualquer da área de trabalho do Geogebra, em seguida em outros dois pontos distintos e finalizar clicando no ponto ***A***. Por padrão o Geogebra criará os pontos ***A***, ***B*** e ***C***, respectivamente após cada clique.

b. Traçar as mediatrizes e as bissetrizes do triângulo ***ABC*** para marcar o circuncentro ***H*** e o incentro ***I*** utilizando as ferramentas: Mediatriz , Bissetriz e Interseção de Dois Objetos .

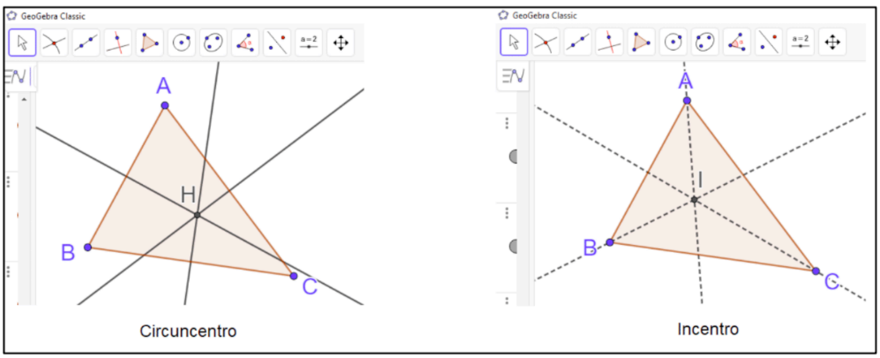


Figura 4: Circuncentro ***H*** e Incentro ***I***, após etapas (a) e (b).

Fonte: Elaborada pelos autores.

c. Marcar os pontos ***D, E, F*** e ***G*** nos lados do triângulo ***ABC*** , utilizando a ferramenta Interseção de Dois Objetos .

d. Desenhar as circunferências circunscrita (de raio ***R***) e inscrita (de raio ***r***) ao triângulo ***ABC*** utilizando a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos* .

e. Traçar os segmentos ***HE, HF*** e ***HG*** perpendiculares aos lados ***AB***, ***AC*** e ***BC***, respectivamente e os raios das circunferências circunscrita e inscri-ta em ***ABC*** utilizando a ferramenta *Segmento* .

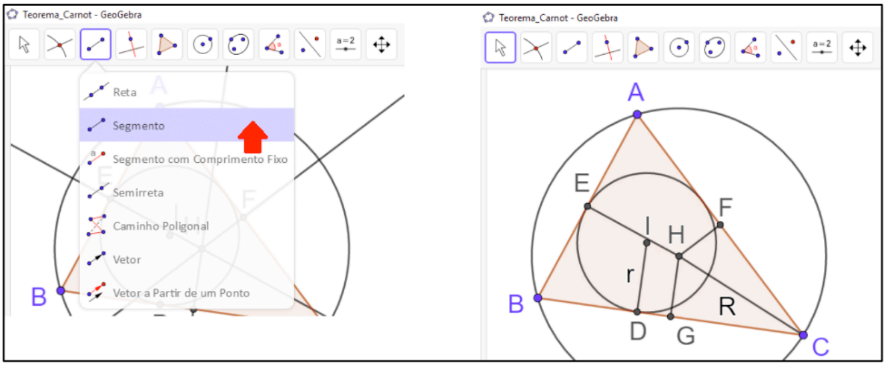


Figura 5: Ferramenta *Segmento* e os segmentos ***HE***, ***HF*** e ***HG***.

Fonte: Elaborada pelos autores.

f. Determinar as variáveis ***w*** e ***v*** para representar as somas ***HE + HF + HG*** e ***R + r***, respectivamente digitando na caixa de entrada, os comandos que estão entre aspas "***w = HE + HF + HG***" e "***v = R + r***".

g. Inserir textos para comparação e visualização das somas. a ferramenta *Texto* ABC. Após clicar na ferramenta *Texto*, abrirá uma janela com as opções de configuração do texto, clicar na opção *Avançado,* em seguida, no ícone do *Geogebra*, depois no rótulo desejado, neste caso o "***w***" e finalizar clicando em *OK*. Proceder de igual modo para a soma ***R + r***, utilizando a variável "***v***".

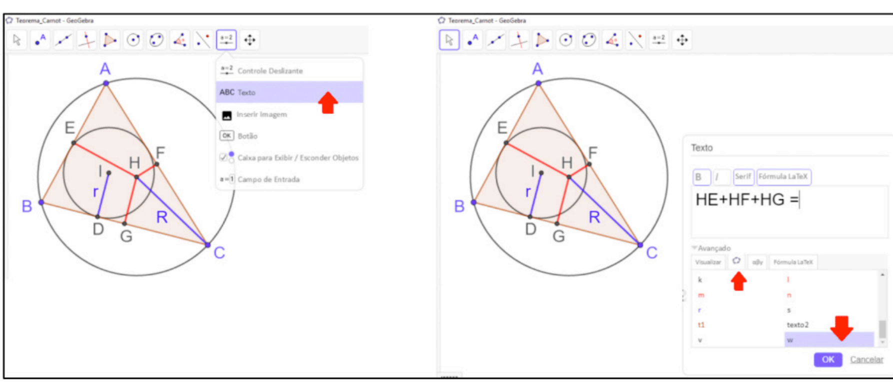


Figura 6: Atribuindo variáveis aos textos.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Com a representação geométrica do teorema de Carnot para triângulo acutângulo pronta, escolhe-se um dos três pontos do triângulo, , ou , para deformá-lo e, assim, observar que permanecendo acutângulo, as somas representadas na (Figura 7), permanecerão iguais.

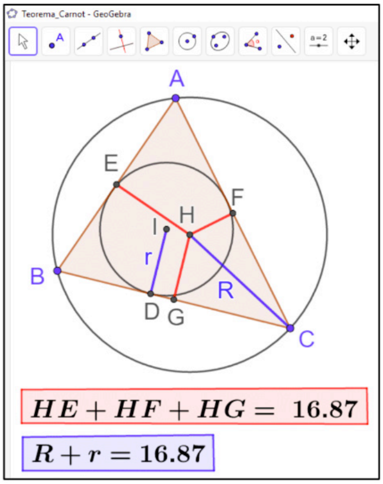


Figura 7: Representação do teorema de Carnot no Geogebra.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Caso o triângulo se torne obtusângulo, as somas apresentarão diferença em seus valores, comprovando, dessa forma, a veracidade do teorema de Carnot para triângulos acutângulos.

6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o constante avanço da tecnologia, que a cada dia se torna cada vez mais dinâmica, é inevitável que os ambientes escolares e principalmente a vida cotidiana de nossos alunos seja bombardeada com novos dispositivos tecnológicos. Logo, é fundamental que os profissionais da educação, principalmente os professores que atuam diretamente no processo de ensino e aprendizagem, estejam preparados para orientar os alunos desta época.

A pesquisa bibliográfica sobre Lazaret Carnot e suas contribuições para a ciência produziu um breve relato sobre sua vida pessoal e acadêmica. Dentre suas principais publicações científicas que trouxeram valiosas contribuições à Matemática, em especial a geometria, destacou-se o trabalho intitulado *Géométrie de Position*, no qual se constatou a presença de seu teorema, bem como sua demonstração.

A busca pelo aporte teórico que embasou esta pesquisa evidenciou os benefícios que a utilização da História da Matemática, das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação e do Geogebra podem trazer ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

A proposta metodológica apresentada, que relaciona essas tendências, possui grande potencial para motivar o aluno através de problemas desafiadores e a possibilidade de verificação de suas soluções através de uma visão dinâmica com a utilização do Geogebra.

Logo, espera-se que esta pesquisa, ao aplicar, na verificação de um teorema clássico, a tecnologia digital como ferramenta de construção e visualização, seja mais um instrumento que o professor possa levar **à** sala de aula como elemento motivador no processo de ensino aprendizagem.

Assim, concluímos que atividades que permitam ao aluno conhecer a história de matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento das ciências ampliam o leque de conhecimentos matemáticos fundamentais na interpretação prática de proposições e de teoremas quando acompanhados de representações computacionais proporcionadas por softwares de geometria dinâmica.

REFERÊNCIAS

BRUGNERA, E. D.; DYNNIKOV, C. M. S. S. **Tecnologia e História da Matemática:** uma parceria na construção do conhecimento. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO E TECNOLOGIA, 1., 2018. Anais Ciet:enped. São Carlos, SP. Disponível em: < https://goo.gl/snxopr>. Acesso em: 05 jan. 2018

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC/CONSED/UNDIME. 2018. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 20.jun.2020.

BRASIL. MEC. SEMT. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 30.abr.2016.

BRAZ, R. A. F. S. **Concepções dos alunos no uso do software Geogebra como ferramenta de ensino e aprendizagem da matemática: uma análise do sujeito coletivo**. 13º Congresso de Tecnologia na Educação: educação, tecnologia e a escola do futuro. Recife, Brasil, 2015. Disponível em: < https://goo.gl/58kPL7>. Acesso em: 19.mai.2018.

CARNOT, L. N. M. **Géométrie de Position**. DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET. i ° A PARIS, Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, 1803. Disponívél em: < https://goo.gl/oLqXYo >. Acesso em 21.mai.2018.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. – (Série história da matemática para o ensino; v.10).

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Ed. 5. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

PEREIRA, A. C. C., GUEDES, A. M. S. **Considerações acerca da disciplina de história da matemática nas universidades cearenses: desvendando uma prática docente**. Revista Brasileira de Ensino Superior-REBES, 2(4), p. 22-33, out/dez 2016.

SAHA, R. A.; AYUB, A. F. M.; TARMIZI, R. A. **The Effects of Geogebra on Mathematics Achievement: Enlightening Coordinate Geometry Learning**. Procedia - Social and Behavioral Sciences, v. 8, 2010, Pages 686-693. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042810022007>. Acesso em 23.mai.2018.

SILVA, R. **O uso do GeoGebra como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem da matemática**. Anais do V Encontro Nacional das Licenciaturas. Natal (RN): UFRN, 2014. Disponível em: <http://enalic2014.com.br/anais/anexos/2630.pdf>. Acesso em: 21.mai.2016.

SOBOUL, A. M. **Lazare Carnot**. ENCICLOPAEDIA BRITANNICA, May 10, 2018. Disponível em: < https://www.britannica.com/biography/Lazare-Carnot>. Acesso em 21.mai.2018.

CAPÍTULO 12

OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA ESTUDO DE PERÍMETRO, ÁREA E PROPORCIONALIDADE DE POLÍGONOS VIA HOMOTETIA

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 20/06/2020

Saul Rodrigo da Costa Barreto
Universidade Federal do Pará – UFPA
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/3696990935948213

Marcelo Baia da Silva
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/3761718283585842

Fábio José da Costa Alves
Universidade do Estado do Pará – UEPA
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/3739552118066554

Deusarino Oliveira Almeida Júnior
Universidade do Estado do Pará - UEPA
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/4508355005233195

RESUMO: O presente trabalho trata de um objeto de aprendizagem para o estudo de perímetro, área e proporcionalidade de polígonos, por meio de atividades experimentais, utilizando a homotetia. Desse modo, o aluno terá a oportunidade de construir conhecimentos geométrico e proporcional ao manipular o aplicativo criado em um software dinâmico, uma vez que a interação com esse software possibilita a percepção de padrões, que vão subsidiar o aluno na captação de conceitos e percepção de propriedades sobre os tópicos abordados. O trabalho apresenta uma sequência didática para o ensino de Matemática dos assuntos mencionados e utiliza o *software* GeoGebra como suporte pedagógico. Esse objeto de aprendizagem é indicado aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Assim, espera-se, com este trabalho, contribuir, a nível Fundamental, com o ensino de Matemática a respeito dos conteúdos citados e possibilitar ao professor o uso de novas tecnologias nas aulas da disciplina Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Perímetro, Área, GeoGebra, Homotetia.

LEARNING OBJECT FOR STUDY OF PERIMETER, AREA AND PROPORTIONALITY OF POLYGONS VIA HOMOTETIA

ABSTRACT: The present work deals with a learning object for the study of perimeter, area and proportionality of polygons, through experimental activities, using homotetia. In this way, the student will have the opportunity to build geometric and proportional knowledge when manipulating the application created in dynamic software, since the interaction with this software allows the perception of patterns, which will subsidize the student in capturing concepts and perception of properties on the topics covered. The work presents a didactic sequence for the teaching of Mathematics of the subjects mentioned and uses the GeoGebra software as pedagogical support. This learning object is suitable for students in the 7th year of elementary school. Thus, it is expected, with this work, to contribute, at fundamental level, with the teaching of Mathematics regarding the contents mentioned and to enable the teacher to

use new technologies in the classes of the Mathematics discipline.
KEYWORDS: Perimeter, Area, GeoGebra, Homotetia.

1 I INTRODUÇÃO

Neste trabalho, visamos explorar alguns conceitos de Geometria Plana e Proporcionalidade com o uso de atividades experimentais no software GeoGebra, na intenção de possibilitar um ensino e aprendizado dos conteúdos matemáticos significativos, uma vez que os alunos ao manipulares e interagirem com o software em questão, estarão sujeitos a perceberem os princípios que norteiam esses conceitos por meio dos padrões observados ao executarem as atividades, dando, assim, sentido aos procedimentos matemáticos.

O uso de novas tecnologias no ensino de Matemática é um dos caminhos apontados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental (1998), BNCC[1] (2018) e também pela Educação Matemática. Respaldados nessas orientações, elaboramos esta proposta de atividade de Matemática, para o ensino dos conteúdos perímetro, área e proporcionalidade utilizando polígonos retangulares, com um roteiro contendo o passo a passo da construção dessa atividade pelo professor no software GeoGebra.

> Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (BRASIL, 2018, p. 276).

Adiante apresentamos na Figura 1 da atividade já pronta com todos os elementos que a constituem, isto é, como o aluno irá visualizá-la no aplicativo. A utilização desse aplicativo é bem simples, basta que o aluno siga o passo a passo de execução, não é necessário que ele tenha conhecimentos prévios sobre programação.

1 Base Nacional Comum Curricular

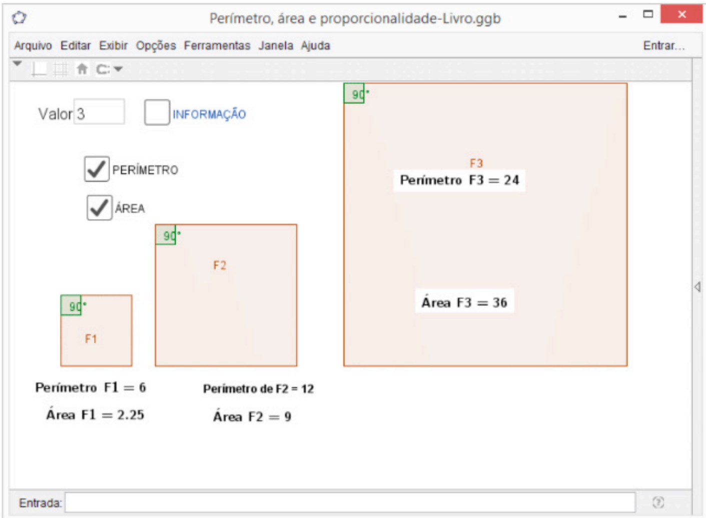


Figura 1: Objeto de aprendizagem para o ensino de perímetro, área e proporcionalidade

Fonte: autores (2018)

A seguir trazemos os passos de como construir a referida atividade no GeoGebra com as respectivas imagens de cada passo da construção. Dessa forma, julgamos que os encaminhamentos para a construção da atividade ocorram dentro do planejado e sem incidentes.

2 I CONSTRUÇÃO PASSO A PASSO

Com o software GeoGebra iniciado, iremos construir o aplicativo seguindo um passo a passo para desenvolver nosso objeto de aprendizagem, abordando a construção de um polígono, determinado ponto de homotetia, construção de homotetia e a programação vinculada para o funcionando do aplicativo. A seguir apresentamos a tela inicial do aplicativo na Figura 2.

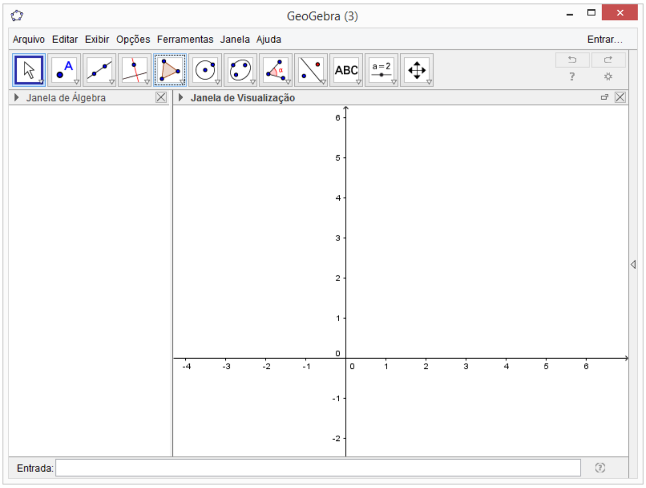


Figura 2: Janela inicial do GeoGebra

Fonte: autores (2018)

1° Passo: Criando um polígono regular

Para construir a homotetia, iremos inicialmente escolher na barra de ferramenta a opção “polígono” e, na janela de visualização, escolher polígono regular, para em seguida, construir um polígono clicando com na origem dos eixos cartesianos e no ponto (0,2) no eixo “y”, então abrirá um caixa sugerindo a quantidade de lados do polígono, que nesse caso será 4, vide Figura 3.

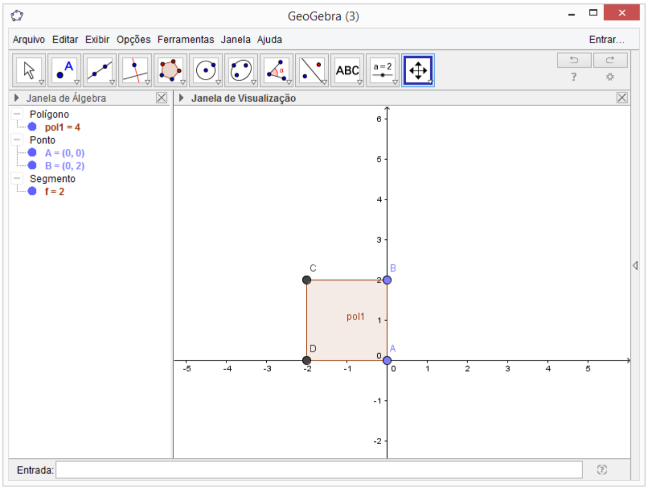


Figura 3: Criando um polígono regular

Fonte: autores (2018)

2° Passo: Criando a homotetia

Primeiramente escolheremos na barra de ferramenta a opção “ponto”, em seguida, clicaremos no eixo das abscissas, de preferência no lado negativo, depois escolheremos a opção “homotetia” na barra de ferramenta, em seguida, clicaremos no objeto (polígono regular) depois no ponto, então abrirá uma caixa de “homotetia”, na qual colocaremos o valor 0.5, irá aparecer no 2º quadrante um polígono que vale a metade do primeiro. Repetindo o procedimento, iremos construir outro polígono, agora colocando na caixa de homotetia o valor 2, então aparecerá no 1º quadrante um polígono que tem o dobro do primeiro, ver Figura 4.

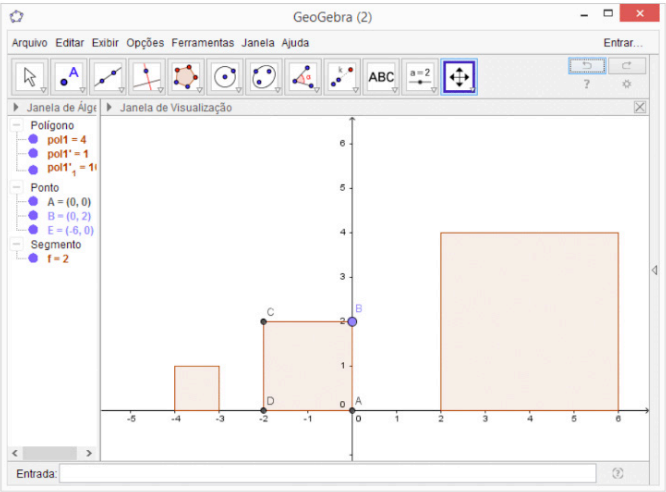


Figura 4: Criando a Homotetia

Fonte: autores (2018)

3° Passo: Criar a caixa “valor”

Iremos criar uma caixa chamada “valor”, que a princípio será a coordenada de um ponto (0,2). Na barra de ferramenta clicar na opção “campo de entrada”, em seguida, vincularemos os pontos A (0,0) e B (0,2) no campo de entrada através do “objeto vinculado”, vide Figura 5.

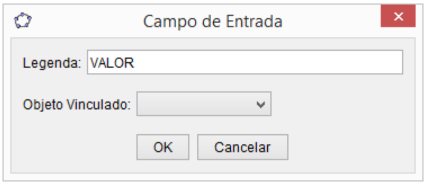


Figura 5: vincular objeto

Fonte: autores (2018)

Feito esse procedimento, vai aparecer na janela do GeoGebra à caixa “valor”, com as coordenadas (0,2), vide Figura 6.

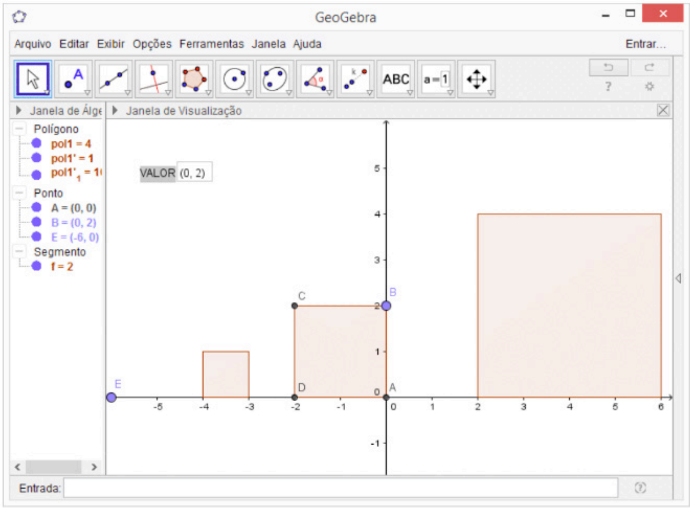
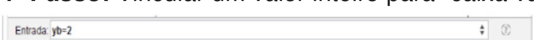


Figura 6: Caixa valor

Fonte: autores (2018)

Como o objetivo do objeto de aprendizagem é abordar assuntos do 7° ano do ensino fundamental, não é didaticamente coerente tratar coordenadas nesse nível de ensino, portanto, no próximo passo, iremos mudar o campo da “caixa valor” em coordenada para um valor inteiro positivo.

4º Passo: Vincular um valor inteiro para “caixa valor”



A princípio entraremos com o número “yb = 2” na caixa entrada para gerar esse número na janela de álgebra, e repetiremos o procedimento com o ponto “B = (0,yb)”. Depois disso vamos vincular no “campo de entrada” o valor de “yb” com o número “2.”, ver Figura 7.

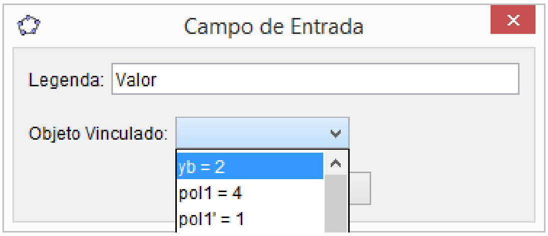


Figura 7: Campo de entrada

Fonte: autores (2018)

Agora a caixa “valor” vai aparecer na janela de visualização do GeoGebra com um valor inteiro e não mais como coordenada, e com isso podemos ocultar a caixa “valor” em coordenadas, clicando com o botão direito do mouse sobre “valor”, e escolher a opção “exibir objeto”, ver Figura 8.

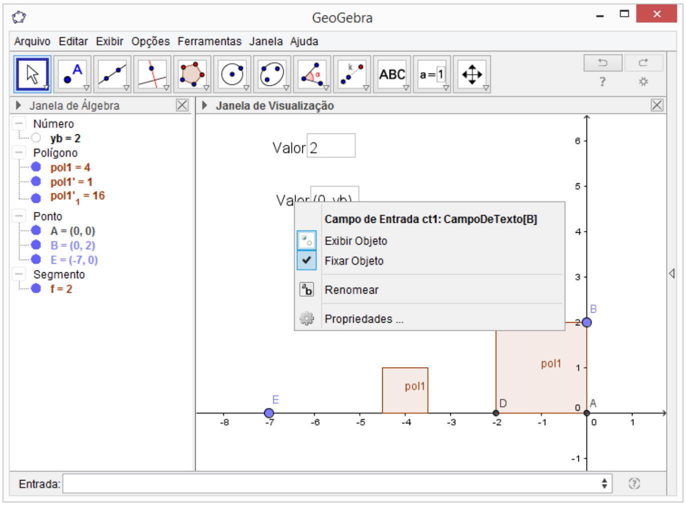


Figura 8: Caixa valor inteiro

Fonte: autores (2018)

5° Passo: Determinando perímetro e área.

Na barra de ferramenta escolher as opção “Distância, Comprimento, ou Perímetro”, e depois a opção “Área”, e, em seguida, clicar sobre os polígonos, os valores dos perímetros e das áreas aparecerão, vide Figura 9 e Figura 10.

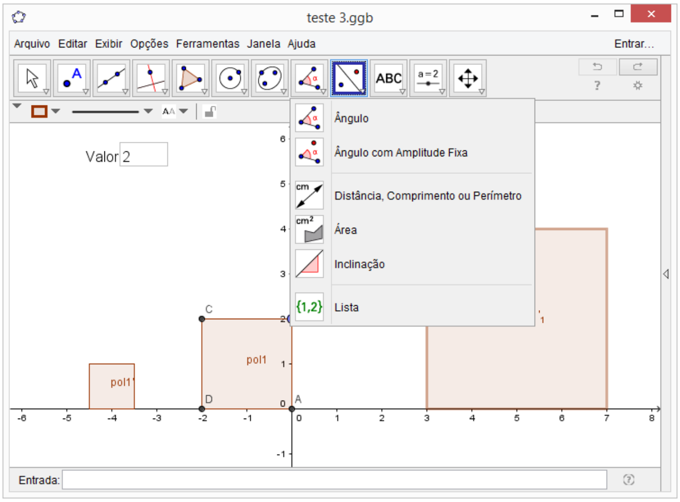


Figura 9: Determinando perímetro e área

Fonte: autores (2018)

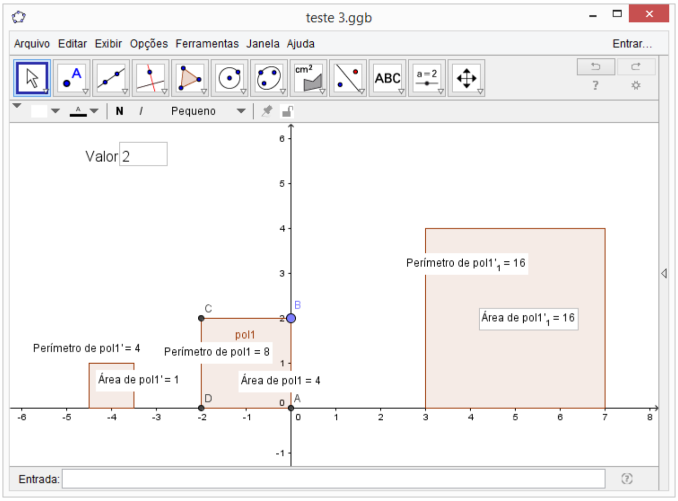


Figura 10: Perímetro e área

Fonte: autores (2018)

Para representar as medidas dos ângulos das figuras, iremos na opção ângulos e depois clicar sobre dois lados para que a apareça o ângulo corresponde a esses lados, figura 11.

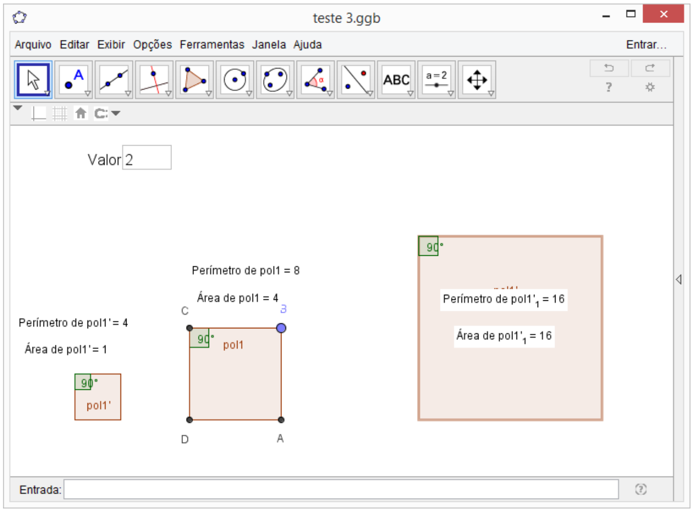


Figura 11: Criando ângulos

Fonte: autores (2018)

6° Passo: Vinculando os valores do perímetro e da área em botões.

Nesse passo, criaremos botões que estarão vinculados aos valores do perímetro e da área, para que o aprendiz ao utilizar o aplicativo use apenas uma das informações de acordo com a abordagem da atividade, pois os valores só aparecerão quando os botões estiverem com as caixas ativadas.

Clicando na opção “Caixa para Exibir / Esconder objetos”, vincular os valores do perímetro e da área dos polígonos um de cada vez, ver figuras 12.

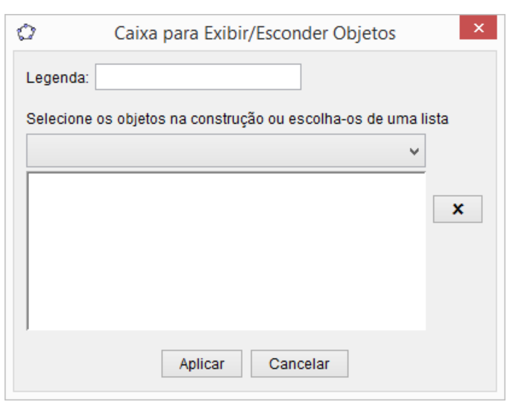


Figura12: Botões ativados

Fonte: autores (2018)

Nas figuras 13 e 14 aparecem os botões ativados e desativados.

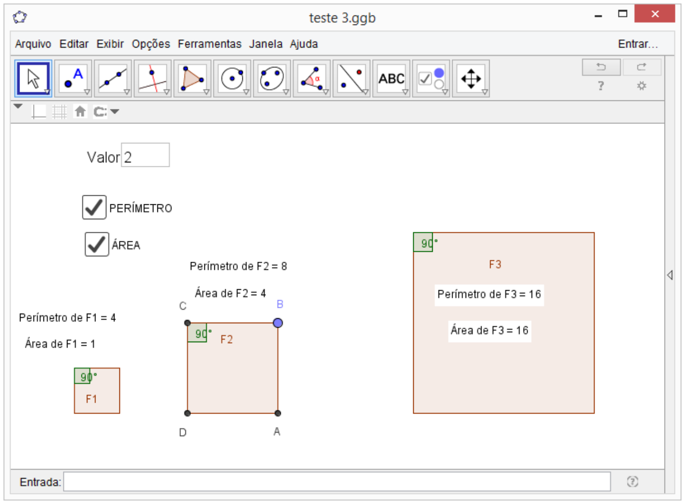


Figura13: Botões ativados

Fonte: autores (2018)

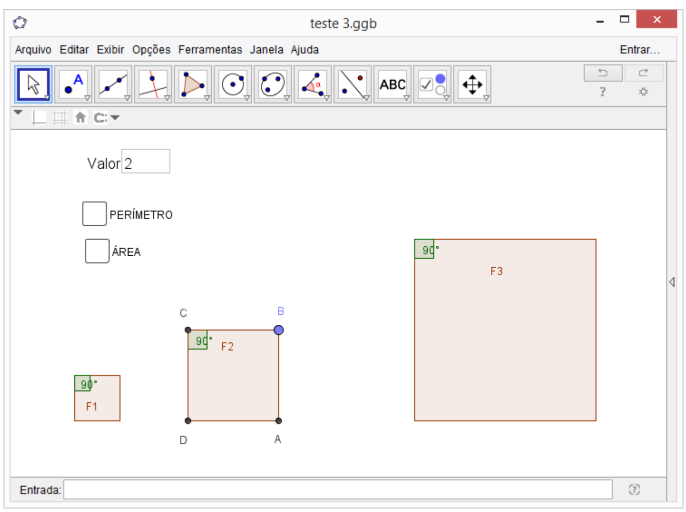


Figura 14: Botões desativados

Fonte: autores (2018)

Por fim será inserido um “botão” chamado “INFORMAÇÃO”, que trará conceitos de semelhança e igualdade, para auxiliar o aprendiz nas atividades experimentais.

A construção do botão informação é similar com o 6° passo, só que ao invés de “esconder” uma palavra, vai ser um texto, figura 15.

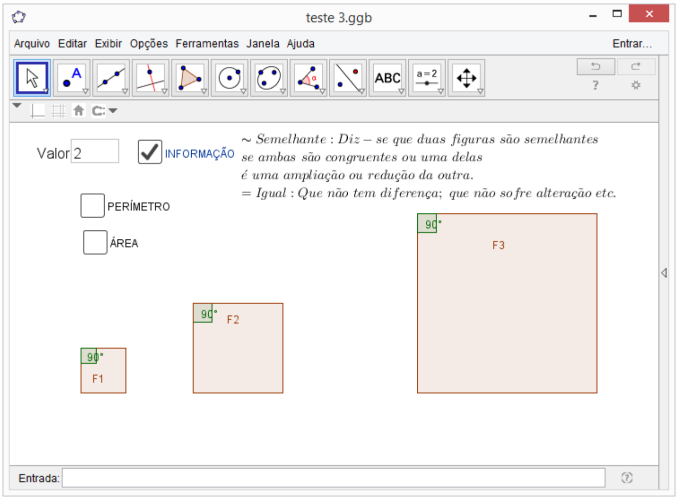


Figura15: Tela final

Fonte: autores (2018)

3 | ATIVIDADES NORTEADORAS

A seguir será apresentada uma sequência de atividades norteadoras para o aprendizado através da experimentação, onde o aprendiz responderá os exercícios das atividades manipulando o aplicativo construído no GeoGebra, com o objetivo de auxiliá-lo na construção do conhecimento. Desse modo, espera-se que o educando levante conjecturas, estabeleça relações, construa conceitos a partir da observação de parâmetros do objeto matemático.

Atividade 1: Relacionar o conceito de perímetro com o número de lado.

Objetivo: Espera-se que o aluno desenvolva o conceito de perímetro com base na quantidade de lados e suas medidas

Valor	**Perímetro F_1**	**n° lados F_1**	**Perímetro F_2**	**n°lados F_2**	**Perímetro F_3**	**n°lados F_3**
1						
2						
3						

A partir do experimento, conceitue perímetro.

Atividade 2: Relacionar o conceito de área com o número de lado.

Objetivo: Pretende-se que o aluno perceba que ideia de área está relacionada com o produto de dois lados.

Valor	Área F_1	n° lados F_1	Área F_2	n° lados F_2	Área F_3	n° lados F_3
1						
2						
3						

Com base no experimento, que seria área para você?

Atividade 3: Usar a ideia de ampliação e redução de perímetros para entender proporcionalidade.

Objetivo: Fazer com que o aluno perceba que ao ampliar as figuras estará multiplicando por um número (fator de ampliação) e ao reduzir estará dividindo por um número (fator de redução). Cabendo aqui a intervenção do professor para a noção de proporcionalidade direta e inversa entre grandezas.

Sugestão: usar os valores 2 e 3 para essa atividade.

a-Qual figura tem maior perímetro, F_1 ou F_2?
b-Em quantas vezes é maior?
c- Qual figura tem menor perímetro, F_2 ou F_3?
d- Em quantas vezes é menor?
e-Quais operações você usou para comparar as figuras F_1 e F_2 e F_2 e F_3?
f-Observando o perímetro da F_1 até a F_3 você diria que houve uma redução ou ampliação da F_1?
g-Observando o perímetro da F_3 até a F_1 você diria que houve uma redução ou ampliação da F_3?
h-Com base no experimento, comente o que você entendeu sobre redução e ampliação de figuras usando perímetros.

Atividade 4: Observar a proporcionalidade entre áreas de figuras semelhantes.

Objetivo: Pretende-se reforçar a ideia de proporcionalidade com semelhança. Cabendo aqui também uma intervenção do professor de forma que o aluno perceba a relação de proporcionalidade (direta e inversa) ao utilizar áreas, porém com uma constante ao quadrado.

a- Qual figura tem maior área, F_1 ou F_2?
b-Em quantas vezes foi ampliada?
c-Qual figura tem menor área, F_2 ou F_3?
d-Em quantas vezes foi reduzida?
e-Em relação ao item "d", que operação você uso para responder o item?
f-No processo de redução e ampliação das figuras utilizando área, o que você observou?
h-No processo de redução e ampliação das figuras utilizando perímetro, o que você observou?

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objeto de aprendizagem, representado e descrito neste trabalho, busca aliar-se ao entretenimento digital como alternativa para estimular os alunos e ajudar o ensino de perímetro, área e proporcionalidade de polígonos via homotetia, a partir de uma abordagem que prima pelo uso de tecnologias no ensino.

É notável que a utilização de tecnologias, não é suficiente para resolver as diversas dificuldades no ensino e na aprendizagem de Matemática. No entanto, considerando que o ambiente tecnológico é muito próximo do universo vivenciado pelos alunos, acreditamos que a execução de propostas de ensino bem planejadas que fazem uso das tecnologias, e estabelecidas por meio de critérios bem definidos entre professor e aluno, podem estimular a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.-

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. ***Parâmetros Curriculares Nacionais***. Brasília: MEC, 1998.

DANTAS, S. **Homotetia no geogebra.** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=3wUmZGYyJ6A> Acesso em: 18 jun. 2016.

GIOGETTI, T. **Homotetia inversa no geogebra.** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=l5LgvgPlttM> Acesso em: 18 jun. 2016

GIOVANNI JUNIOR, J. R., CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática.** Ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2009.

Só Matemática - **portal matemático.** Disponível em:<www.somatematica.com.br> Acesso em: 21 jun. 2016.

CAPÍTULO 13

UMA ANÁLISE DAS CONTRIBUIÇÕES DE BOÉCIO E DA OBRA *DE INSTITUTIONE ARITHMETICA* PARA A MATEMÁTICA

Data de aceite: 26/08/2020

Francisco Aureliano Vidal
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia da Paraíba – IFPB
Cajazeiras – Paraíba

Márcio Alisson Leandro Costa
Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Amazonas – IFAM
Maués – Amazonas

RESUMO: Neste trabalho apresentamos uma breve discussão acerca da vida e da obra de Boécio (480 – 524 d. C.), suas obras foram utilizadas por muitos séculos nas escolas medievais e este foi o principal fato que nos inquietou. Assim, objetivamos uma análise das contribuições deste autor, em especial, de sua obra *De Institutione Arithmetica* para a matemática. Nossos estudos apontaram para a necessidade de resolução da seguinte questão: como uma obra considerada fraca e sem originalidade permaneceu por vários séculos influenciando o ensino de matemática nas escolas monásticas medievais? Para isto utilizamos como metodologia uma pesquisa bibliográfica, onde procuramos em algumas obras de História da Matemática como Boyer (1974), Eves (2011), Brolezzi (2014) entre outras, fatos relacionados tanto a esta obra quanto ao seu autor com a finalidade de compreender quais os motivos que levaram Boécio a adquirir tamanha credibilidade e suas obras terem se tornado uma espécie de sumo do conhecimento em sua época, apesar de ser considerada muito fraca em termos de conceitos matemáticos. Os primeiros resultados apontam para o fato de que nosso autor foi um cristão muito aplicado e acreditar na sua fé foi um dos fatos determinantes de sua execução após extenso encarceramento ordenado pelo rei Teodorico, este episódio fez com que a igreja católica o proclamasse como um de seus mártires da fé, e este foi um dos fatores que contribuíram para a adoção de suas obras nas escolas monásticas devido ao grande prestígio adquirido por Boécio, mais como filósofo que como matemático. Também suas obras estão voltadas mais com a preocupação de aplicação a filosofia e a música do que com o desenvolvimento da matemática, outro fator importante é que são obras sempre baseadas em traduções, comentários e compilações de obras antigas, mas a importância disto está no fato de este autor contribuir de modo expressivo na preservação da cultura da antiguidade em tempos de crises como o que ele viveu. Com relação aos conceitos da *Arithmetica*, percebemos que está baseada totalmente em outra obra publicada quatro séculos antes, a *I*ntroductio arithmeticae de Nicômaco, uma obra em que as tendências filosóficas gregas são predominantes e é voltada mais para a aplicação dos conceitos da aritmética a música e a filosofia pitagórica do que para a matemática, daí se conclui que o tipo de público ao qual a *Arithmetica* de Boécio é dirigida não é exclusivamente aquele específico da matemática.
PALAVRAS-CHAVE: Boécio, De Institutione Arithmetica, Matemática, Filosofia.

ABSTRACT: In this work we present a brief discussion about the life and work of Boethius

(480 - 524 AD), his works were used for many centuries in medieval schools and this was the main fact that disturbed us. Thus, we aim to analyze the contributions of this author, in particular, of his work De Institutione Arithmetica to mathematics. Our studies pointed to the need to resolve the following question: how did a work considered weak and without originality remained for several centuries influencing the teaching of mathematics in medieval monastic schools? For this, we used as methodology a bibliographic research, where we looked in some works of History of Mathematics as Boyer (1974), Eves (2011), Brolezzi (2014) among others, facts related to this work as well as to its author for the purpose of understand the reasons that led Boethius to acquire such credibility and his works have become a kind of juice of knowledge in his time, despite being considered very weak in terms of mathematical concepts. The first results point to the fact that our author was a very applied Christian and believing in his faith was one of the determining factors of his execution after extensive imprisonment ordered by King Theodoric, this episode caused the Catholic Church to proclaim him as one of his martyrs of the faith, and this was one of the factors that contributed to the adoption of his works in monastic schools due to the great prestige acquired by Boethius, more as a philosopher than as a mathematician. His works are also more concerned with the application of philosophy and music than with the development of mathematics, another important factor is that they are always based on translations, comments and compilations of old works, but the importance of this is in the fact for this author to contribute significantly to the preservation of the culture of antiquity in times of crisis such as the one he experienced. Regarding the concepts of Arithmetica, we realize that it is based entirely on another work published four centuries earlier, Introductio arithmeticae by Nicomachus, a work in which Greek philosophical tendencies are prevalent and is more focused on the application of the concepts of arithmetic to music and Pythagorean philosophy than for mathematics, it follows that the type of audience to which Boethius' Arithmetica is directed is not exclusively that specific to mathematics.
KEYWORDS: Boethius, From Institutione Arithmetica, Mathematics, Philosophy.

1 I INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos uma breve discussão acerca da vida e da obra do estadista romano Ancius Manílius Torquatus Severinus Boethios (480 – 524 d. C.), ou simplesmente Boécio, que, além de matemático, foi também filósofo, sendo neste último campo o que fez as maiores contribuições da qual a maior delas foi *De Consolatione Philosophiae*, sua obra mais célebre que escreveu enquanto aguardava a morte na prisão, um ensaio em prosa e verso no qual "discute a responsabilidade moral à luz da filosofia aristotélica e platônica" (BOYER, 1974, p. 140). Aliás nosso autor tinha uma preocupação muito mais de "aplicação da aritmética à música e à filosofia platônica do que com o progresso do próprio assunto" (BOYER, 1974, p. 132), no nosso caso a matemática. Mesmo assim, suas obras foram utilizadas por muitos séculos nas escolas medievais e este fato nos inquietou. Assim, objetivamos com este estudo realizar uma análise das contribuições de Boécio e, em especial, de sua obra *De Institutione Arithmetica* para a matemática.

Desta forma nos deparamos com o seguinte problema: como uma obra considerada fraca e sem originalidade permaneceu por vários séculos influenciando o ensino de matemática nas escolas monásticas medievais? Acreditamos que a resposta a esta questão ocasionará importantes descobertas referentes tanto em relação ao ensino da época, em especial ao ensino de matemática, por isto a nossa opção pela referida obra, como também trará informações a respeito de seu autor e sua influência para o desenvolvimento das ciências na época em que ele viveu. Para isto procuramos em algumas obras de História da Matemática como Boyer (1974), Eves (2011), Brolezzi (2014) entre outras, fatos relacionados tanto a esta obra quanto ao seu autor com a finalidade de compreender quais os motivos que levaram Boécio a adquirir tamanha credibilidade e suas obras terem se tornado uma espécie de sumo do conhecimento em sua época, apesar de ser considerada muito fraca em termos de conceitos matemáticos.

Destarte, com o intuito de entender tais razões, utilizamos como metodologia uma pesquisa bibliográfica, para tanto foi realizada uma análise, muito sucinta, da época em que tal obra foi escrita, em que se baseia seus conceitos, a que tipo de público ela é dirigida, além de um breve relato da vida deste autor por considerar que isto pode ser um fator determinante desta notoriedade. Acreditamos que estes fatos podem contribuir para a popularidade desta e de outras obras deste autor. Também realizamos uma breve análise da obra de Godofredus Friedlein (editada em 1867) em que este autor apresenta, em latim, uma versão da *De Institutione Arithmetica* de Boécio com o intento de estudar os conceitos apresentados nesta obra.

Os primeiros resultados apontam para o fato de que nosso autor foi um cristão muito aplicado e acreditar na sua fé foi um dos fatos determinantes de sua execução após extenso encarceramento ordenado pelo rei Teodorico, este fato fez com que a igreja católica o proclamasse como um de seus mártires da fé, aí está um dos fatores que contribuíram para a adoção de suas obras nas escolas monásticas devido ao grande prestígio adquirido por Boécio, mais como filósofo que como matemático. Também suas obras estão voltadas mais com a preocupação de aplicação a filosofia e a música do que como desenvolvimento da matemática, outro fator importante é que são obras sempre baseadas em traduções, comentários e compilações de obras antigas, mas a importância disto está no fato de este autor contribuir de modo expressivo na preservação da cultura da antiguidade em tempos de crises como o que ele viveu.

2 | ANCIUS MANÍLIUS TORQUATUS SEVERINUS BOETHIOS - BOÉCIO

O nosso personagem viveu no período turbulento de 480 a 524 da nossa era, nesta época o império romano do ocidente estava em colapso ruindo em 476 d.C. quando Odacro, o Hérulo, tornou-se imperador romano iniciando, assim, uma "grande alteração nos cuidados oficiais com a cultura" (BROLEZZI, 2014, p. 43). Teodorico, o Ostrogodo, sucessor de Odacro, por algum tempo manteve-se ainda assessorado pelo senado romano que, mesmo sem o controle político, ainda manteve-se por algum tempo na situação de conselheiro, nesta circunstância estava Boécio, que foi Cônsul e mordomo de Teodorico e ainda o mais ilustre dos escritores eclesiásticos chamado de "o último romano, o primeiro escolástico" (JEAUNEAU, 1963, p. 17). Proveniente de antiga e importante família patrícia, homem do estado romano e que certamente encarou com desgosto o desmoronar do império romano e o emergente poder ostrogodo.

Boécio soube o que fazer para salvar a cultura Helênica que ele representava, adaptou-se as condições dos bárbaros e, por algum tempo ainda produziu obras que ajudaram a preservar a cultura do mundo antigo. "Apesar de que parte de seu projeto fosse traduzir todas as obras de Platão e Aristóteles" (LAUAND, 1986, apud BROLEZZI, 2014, p. 44), porém graças ao seu esforço e o de outros como ele foi possível a sobrevivência da Matemática na Europa Ocidental. Lauand (1986, apud BROLEZZI, 2014, p. 45) resume o esforço de Boécio neste sentido quando comenta o trabalho realizado por ele:

> ... graças a esse trabalho humilde e sacrificado, assumido conscientemente por quem tinha talento para muito mais, a Matemática preservou-se no Ocidente e pôde manter-se até o século X, quando recebe novo impulso com Gerberto e, a partir dos séculos seguintes, desenvolver-se mais e mais.

Percebemos, desta forma, como este autor contribuiu de modo significativo para a manutenção das ideias matemáticas da antiguidade. Seu trabalho em matemática, apesar de pouco original, se tratava basicamente em traduções, comentários e compilações de obras antigas, mesmo assim é considerado "o principal matemático da Roma antiga" (BOYER, 1974, p. 139). E como representante dos romanos nesta questão, Boécio que vivenciou intensamente o colapso do sistema político romano,

> Escreveu livros de texto para cada um dos quatro ramos matemáticos das artes liberais, mas esses livros eram abreviações insignificantes e extremamente elementares de clássicos mais antigos – uma *Arithmetica* que era apenas uma forma abreviada da *Introductio* de Nicômaco; uma *Geometria* baseada em Euclides e contendo apenas enunciados, sem prova, de algumas das partes mais simples dos

> quatro primeiros livros de ***Os Elementos***; uma ***Astronomia*** derivada do ***Almajesto*** de Ptolomeu; e uma ***Música*** em dívida com obras de Euclides, Nicômaco e Ptolomeu. (BOYER, 1974, p. 139).

Porém, o conjunto destes escritos não deixam de constituir em uma importante fração da biblioteca medieval (JEAUNEAU, 1963), todos eles foram bastante utilizados nas escolas monásticas da Idade Média. Eves (2011, p. 289) afirma que “Com esses trabalhos e sua obra filosófica, Boécio tornou-se o fundador da escolástica medieval”, reforçando, assim, a importância da sua obra para a preservação da cultura antiga, pois:

> Toda a região rural da Europa Ocidental estava pontilhada de monastérios, conventos e instituições religiosas engajadas nos misteres da Igreja. Os monastérios eram, aliás, os únicos locais da Europa Ocidental onde se cultuava o saber (EVES, 2011, p. 287).

Desta forma, a obra de Boécio deu importante contribuição neste sentido. Para a história da matemática, a sua importância “se embasa no fato de seus livros de geometria e aritmética terem sido adotados, por muitos séculos, nas escolas monásticas” (Eves, 2011, p. 290). Este autor ainda relata sobre a obra matemática de Boécio “Embora muito fracos, esses trabalhos acabaram se constituindo no sumo do conhecimento matemático, o que ilustra bem o quanto esse conhecimento se tornou insignificante na Alta Idade Média” (Idem, p. 290). Porém a Matemática ocidental antiga sobreviveu neste período graças ao trabalho de pessoas como Boécio e é por isto que resolvemos pesquisar um pouco mais a respeito de sua *De Institutione Arithmetica* no sentido de compreender as razões principais da adoção dela nas escolas monásticas por muitos séculos. Acreditamos que uma delas seja o fato de Boécio ser cristão e considerado pela igreja como um mártir da fé, fato este que ocasionou sua morte “assassinado sob a acusação de magia e de conspiração” (JEAUNEAU, 1963, p. 17) após um longo encarceramento.

“A morte de Boécio pode ser considerada como marco do fim da matemática antiga no Império Romano do Ocidente, como a morte de Hipatia tinha marcado o fim de Alexandria como centro matemático” (BOYER, 1974, p. 140), porém foi graças à sua influência que outros autores latinos entre eles Cassiodoro, seu discípulo, iniciaram este trabalho de tradução e compilação de obras da matemática antiga e esta prática perdurou durante todo o período de 500 a 1200 em que os mosteiros, como relatadao acima, eram praticamente os únicos lugares onde se cultuavam o saber.

3 | A *DE INSTITUTIONE ARITHMETICA* DE BOÉCIO

Na Grécia antiga a palavra aritmética tinha o significado de teoria dos números e não computação, "Freqüentemente (sic) a aritmética grega tinha mais em comum com a filosofia que com o que consideramos como matemática" (BOYER, 1974, p. 130) e este era o interesse de Boécio pela aritmética, tanto que a obra que estamos discutindo aqui é baseada na *Introductio arithmeticae* do Nicômaco de Gerasa, "um neopitagórico que viveu não longe de Jerusalém no ano 100 aproximadamente" (Idem, p. 130), uma obra em que as tendências filosóficas gregas é predominante apesar de seu autor ser considerado de origem síria.

Para compreender a *De Institutione Arithmetica* de Boécio precisamos antes discutir a *Introductio* de Nicômaco e o que é relatado sobre a mesma a seguir está inteiramente baseado no que encontramos em Boyer (1974). Este autor relata que tal obra contém apenas dois livros e que é possível que isso seja apenas uma versão abreviada de uma obra originalmente mais ampla. Nicômaco tinha pouca competência para a matemática e se ocupava apenas com as propriedades mais elementares dos números e ainda que o nível da obra pode ser avaliado pelo fato de Nicômaco achar conveniente juntar uma "taboada (sic) de multiplicação indo até *I* vezes *I* (isto é, 10 vezes 10)" (Idem, p. 131) e afirma que é o mais antigo exemplo grego preservado de tal tabela.

Esta obra começa com a classificação pitagórica dos números em pares e ímpares, depois em parmente pares (potências de dois) e parmente ímpares ($2^n. p$ onde p é ímpar e $p > 1$ e $n > 1$). Afirma ainda que são definidos os números primos, compostos e perfeitos, e é dada uma descrição do crivo de Erastóstenes e uma lista dos quatro primeiros números perfeitos (6 e 28 e 496 e 8128). A obra inclui também uma classificação das razões e combinações de razões (por que razões de inteiros são essências na teoria pitagórica dos intervalos musicais), um tratamento extenso dos números figurativos (que tinham tido tanto relevo na aritmética pitagórica) em duas e três dimensões, e uma exposição bem completa sobre as várias médias (também um tópico favorito na filosofia pitagórica). A *Introductio* contém um teorema moderadamente sofisticado "se os inteiros ímpares são agrupados segundo o esquema 1; 3 + 5; 7 + 9 + 11; 13 + 15 + 17 + 19; ... as somas sucessivas são os cubos dos inteiros" (Idem, p. 132).

Esta obra, de acordo com Boyer (1974, p. 132), "não era nem um tratado sobre computações nem sobre álgebra, mas um manual dos elementos de matemática essenciais à compreensão da filosofia pitagórica e platônica" e ainda "um trabalho enfadonho e meio místico, embora tivesse desfrutado de alto prestígio" (Eves, 2011, p. 290), desta forma, serviu de modelo para comentadores e imitadores e um dos mais famosos foi Boécio que escreveu *De Institutione Arithmetica* cerca de quatro séculos depois em latim e Boyer (1974) a classifica como apenas uma tradução da *Introduction* de Nicômaco não contendo, segundo este autor, nada de original. Isto foi confirmado por nós quando fizemos o estudo da edição feita por Friedlein em 1867, pois lá encontramos os mesmos conceitos relatados por Boyer sobre a obra de Nicômaco. No entanto:

> Para os teóricos musicais a obra *De Institutione Arithmetica* de Sevério N. Boécio serviu fortemente de base para fundamentar suas teorias principalmente por ser aquela que, contrariamente a obra de Martiniano Capella, definia a música majoritariamente como uma ciência matemática ligada a Aritmética e não como ciência harmônica, ligada a Astronomia (MASI, 2006, apud BROMBERG e ABDOUNUR, 2011, p. 1-2).

Esta obra, como as demais de Boécio, também foi adotada por alguns séculos nas escolas monásticas durante a idade média e deu uma grande contribuição ao conhecimento matemático neste período, sua importância principal está no fato de que ajudou a preservar o conhecimento do mundo antigo durante uma época tão conturbada e em que tantos deles se perderam devido à ignorância cultural dos invasores bárbaros.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho objetivamos realizar uma breve análise das contribuições de Boécio e, em especial, de sua obra *De Institutione Arithmetica* para a matemática. Para isto procuramos em obras de história da matemática como Boyer (1974), Eves (2011), Brolezzi (2014), entre outros, relatos da vida deste autor bem como da referida obra da qual fizemos uma breve análise da edição em latim feita por FRIEDLEIN (1867) para termos uma ideia mais geral dos conceitos abordados na *Arithmetica*. O nosso estudo apontou para a necessidade buscar respostas para a seguinte questão: como uma obra considerada fraca e sem originalidade permaneceu por vários séculos influenciando o ensino de matemática nas escolas monásticas medievais? O que nos inquietou foi o fato de a obra matemática de Boécio, apesar de ser considerada muito fraca, terem se tornado uma espécie de sumo do conhecimento em sua época.

Destarte, sobre as razões que levaram a ocorrência disto, concluímos a respeito da época em que tal obra foi escrita que o período em que Boécio viveu foi de grandes mudanças, em especial, no que diz respeito aos cuidados oficiais com a cultura, iniciando em 476 d.C. quando Odacro, o Hérulo, tornou-se imperador romano. Boécio o auxiliou como mordomo e conselheiro do seu sucessor, Teodorico, no entanto sua integridade foi a causadora do desagrado do novo imperador que o mandou ao encarceramento e em seguida ao assassinato. Com relação aos conceitos da *Arithmetica*, percebemos que está baseada totalmente em outra obra publicada quatro séculos antes, a *I*ntroductio arithmeticae de Nicômaco, uma obra em que as tendências filosóficas gregas são predominantes e é voltada mais para a aplicação dos conceitos da aritmética a música e a filosofia pitagórica do que para a matemática, daí se conclui que o tipo de público ao qual a *Arithmetica* de Boécio é dirigida não é exclusivamente aquele específico da matemática.

Boécio deu importante contribuição para salvar a cultura Helênica que ele representava, soube adaptar-se as condições dos bárbaros e, por algum tempo ainda produziu obras que ajudaram a preservar a cultura do mundo antigo. É considerado como o mais ilustre matemático romano, apesar de sua obra matemática ser considerada fraca e sem originalidade, foi adotada por muitos séculos nas escolas monásticas, fato que ilustra o quanto este campo foi menosprezado na época medieval. No entanto, o fato de Boécio ser cristão e considerado pela igreja como um mártir da fé, foi determinante para esta adoção, além de ser ele o fundador da escolástica medieval.

No nosso trabalho verificamos apenas a presença de comentários a respeito da *De Institutione Arithmetica* e de seu autor em apenas três livros de história da matemática, um artigo sobre a história da música, um livro sobre a filosofia medieval e, por enquanto, apenas a parte relacionada ao conteúdo de uma edição muito posterior da *Arithmetica* de Boécio o que não nos permite tirar conclusões definitivas sobre o assunto. Nossa intenção é ainda continuar com este trabalho fazendo a análise mais aprofundada da referida obra e ainda da tradução inglesa realizada por MASI (1983) e de obras posteriores ao século V que comentem, copilem ou traduzam a *Arithmetica* e ainda pretendemos analisar seu trabalho sobre geometria, outra obra matemática deste autor.

REFERÊNCIAS

BOETII, Anicil' M. T. Severini. ***De Institutione Arithmetica Libre Duo De Institutione Musica Libri Quinque Accedit Geometria Quae Fertur Boetii E Libris Manu Scriptis.*** Edidit Godofredus Friedlein; Lipsiae in Aedibus B. G. Teubneri; Indiana University Library, 1867.

BROLEZZI, Antonio Carlos. **A arte de contar:** história da matemática e educação matemática. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2014.

BROMBERG, Carla; ABDOUNUR, Oscar João. A Matemática e Documentos Musicais Italianos do século XVI. In: IX Seminário Nacional de História da Matemática. **Anais...** Aracaju: UFS, 2011.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Trad. Elza F. Gomide. São Paulo, Edgad Blucher, 1974.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Trad. Hygino H. Domingues. 5ª ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

JEAUNEAU, Édouard. **A Filosofia Medieval.** Trad. João Afonso dos Santos. Lisboa, Edições 70, 1963.

MASI, Michael. **Boethian Number Theory:** A Translation of the De Institutione Arithmetica, Studies in Classical Antiquity, vol. 6. Amsterdam: Rodopi, 1983.

CAPÍTULO 14

UMA VISÃO HELLERIANA DA INSERÇÃO SOCIAL NA EAD: ANÁLISE DO COTIDIANO E DA COTIDIANIDADE NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Data de aceite: 26/08/2020

Débora Gaspar Soares
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/1106186788602404

Márcio Rufino Silva
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/6001195417301978

RESUMO: O cenário da universidade em âmbito nacional tem experimentado alterações no seu espaço educacional derivadas de diferentes fatores, entre os quais compete destacar a implantação de Novas Tecnologias de Informação e Comunicação na prática docente. Esse estudo, busca a análise dessas mudanças que são fomentadas pelo Sistema Nacional de Inovação que orienta a CAPES, a FAPERJ, e o CNPq, na perspectiva da Teoria de Agnes Heller, na introdução sistemática de recursos inovativos nas atividades docentes em concordância com as exigências neoliberais e as mudanças que essas impõem ao exercício do professor, especialmente na construção do cotidiano em territórios virtuais, e na sua jornada de trabalho, dissuadindo os objetivos, a organização e a finalidade da educação.
PALAVRAS-CHAVE: Territórios virtuais, cotidiano, formação para o trabalho, Educação a Distância.

ABSTRACT: The university's scenario at the national level has experienced changes in its educational space derived from different factors, among which it is worth highlighting the implementation of New Information and Communication Technologies in teaching practice. This study seeks the analysis of these changes that are fostered by the National Innovation System that guides CAPES, FAPERJ, and CNPq, from the perspective of Agnes Heller's Theory, in the systematic introduction of innovative resources in teaching activities in accordance with neoliberal demands and the changes that these impose on the exercise of the teacher, especially in the construction of daily life in virtual territories, and in their working hours, deterring the objectives, organization and purpose of education.
KEYWORDS: Virtual territories, daily life, training for work, distance education.

1 | INTRODUÇÃO

A formação de professores de Matemática em rede nacional (PROFMAT), em nossa investigação, pretende abarcar as tramas, as tranças, e as teias da conexão entre sociedade e educação em EaD e o seu ritmo. Dialogar entre o global e o *sui generis*, entre a escola-instituição formadora das relações sociais de produção capitalista e as profusas experiências possíveis da prática docente, que dão a conhecer profundas alteridades sócio espaciais, das quais se assemelham a uma travessia indefinidamente em alomorfia. Da mesma maneira essas alteridades quando se tenta fazer o elo, o *link*, essas revelam silhuetas, sombras, contornos, formas descontínuas, perfis variados, diversas escalas que em rede (o lugar, o regional, o nacional, o global) ´tangenciam o aspecto geográfico da sua formação. O que torna a leitura de Agnes Heller fundamental para um estudo rigoroso sobre as contemporâneas transformações que a inovação corresponde para a formação de Professores em Matemática em rede nacional (PROFMAT) é sua teoria *marxista crítica,* sua biografia permite investigar o espaço social escolar como instituição, mas percebendo a presença, a ação, a atividade das pessoas, do sujeito indivíduo, do sujeito social, que na formação EaD se conecta, e tece redes sociais no seu cotidiano.

Para realização e análise das transformações que a inovação corresponde para a formação de Professores em Matemática em rede nacional (PROFMAT), as alteridades sócio espaciais, com o ambiente laboral, e com a compreensão de mais valia há uma variedade de teóricos que alteia esse debatimento (Marx, 1983 [1867]; Silva, 2008; Damiani, 2016; Heller, 2016 [1970]; Lukács, 2003; Lefebvre, 1991; entre outros), dentre outras bibliografias pertinentes para o desenvolvimento desse trabalho. Além da bibliografia desses teóricos foi imprescindível o curso nas disciplinas: Epistemologia da Geografia, ministrada pelo Professor Guilherme Ribeiro; e A (Re)produção do Espaço e Cotidiano: Escalas do Urbano e sua Mobilização Crítica, ministrada pelo Professor Márcio Rufino. Essas disciplinas fazem parte do curso de Pós-Graduação em Geografia, e oportunizam o debate e entendimento da dinâmica do processo histórico no exercício das transformações e reproduções no espaço cotidiano. Foram realizadas com encontros presenciais, no prédio da Geociências, Departamento de Geografia em Seropédica no segundo semestre de 2018.

1.1 Entre links e comunicação, conforme Agnes Heller admite o contato em territórios virtuais

As discussões e argumentações relativas à renovação e formação das competências e habilitações do corpo social contemporâneo, circunscrevem os processos históricos e a premência social dos fatos, mas precisam criticar as conjunturas de produção capitalista, o acesso distinto a escola, e o arcabouço institucional que subjuga os seus participantes. Por isso, compreender a correlação entre saber e o poder presume assentir que uma implementação de política educacional, que requer a estruturação da inovação na sociedade presente é razão e circunstância para a reprodução material dessa forma de trabalho na sociedade. Em outros termos, o meio de produção capitalista depreende uma conformação de organização do saber que não é apenas retrato da vida escolar, essa não reflete nitidamente sobre os distintos protagonistas da vida na escola. Segundo Heller (2016 [1970], p.15): “podemos estabelecer a possibilidade de um subsequente desenvolvimento dos valores, apoiar tal possibilidade e, desse modo, emprestar um sentido à nossa história." Em conformidade Lefebvre (1991, p.8) diz: "o tempo é o tempo da mudança. Não aquele de uma simples modificação local, parcial, mas o tempo das transições e dos transitórios, o dos conflitos; da dialética e do trágico." Já Luckacs (2003, p. 205) afirma que: "o tempo é tudo, o homem não é mais nada; quando muito, é a personificação do tempo." Esses autores tornam claro que a análise do ordinário da vida, do cotidiano, fundamenta as questões, as indagações sobre as mudanças e transformações atuais na educação com o uso da inovação, determinadas pela elucubração econômica e pela influência cultural.

Os estudos acerca do Ensino a Distância no Brasil demandam uma exploração sobre o seu território, para conhecer a rede que se compõe apoiada na sua oferta. Nesse ínterim, a caracterização de rede está relacionada à circulação e alastramento da informação e conhecimento. Entretanto, os territórios virtuais na educação determinam a validação dos conhecimentos, e o contato virtual demarca quais pessoas podem ou não articular as práticas pedagógicas a eles relacionadas. Ocorre uma inibição da prática pedagógica, a manifestação do diálogo aberto é restringida. Contudo, qual é a ameaça da prática pedagógica para o professor? O maior risco da prática pedagógica é a reflexão, o que isso quer dizer? A reflexão acontece no diálogo, no confronto, e a prática pedagógica é também responsável pelas representações do sujeito como indivíduo, pois ela traz memórias, técnicas, recursos, maneiras de experienciar, formas de viver, ritmando as alteridades sociais que a alicerçam. Conforme Heller (2016 [1970], p.17) destaca: "a· vida cotidiana é a vida do homem inteiro; ou seja, o homem participa na vida cotidiana com todos os aspectos de sua individualidade, de sua personalidade." A autora esclarece que a ameaça da prática pedagógica se desvalia na regulamentação das ações, no controle, no interdito, nos critérios, nos conteúdos, pois são definidos, eminentemente, por aqueles que regem as instituições, com critérios, mecanismos e processos para reconhecimento como verdade superior, e como valorização do professor. Portanto, as conexões em rede tornam complexa a presença dos territórios virtuais e a sua vinculação com a educação.

O que Agnes Heller coadjuva para um estudo rigoroso sobre as contemporâneas transformações que a inovação corresponde para a formação de Professores em Matemática em rede nacional (PROFMAT)? Para perfazer o que foi discutido sobre sua teoria *marxista crítica*, na sociedade humano-digital, o sujeito usa a inovação, mas aniquila e desfaz a sua objetividade, então, esse sujeito se escraviza a um retalho de realidade, encerra a sua espontaneidade, o sujeito escravo não participa do imprevisto, nem do improviso, ao alienar-se suas ações propendem para particularidade. Há uma profunda ausência de consciência da ação do sujeito alienado gerando uma voragem fronte a criação do sujeito genérico, e isso que caracteriza a conjuntura dessa alienação. Em concordância com Heller (2016 [1970], p.20): “Os choques entre particularidade e genericidade não costumam tornar-se conscientes na vida cotidiana; ambas submetem-se sucessivamente uma à outra do aludido modo, ou seja, «mudamente”.” A autora salienta que essa voragem não alcança de forma equivalente os diversos estratos sociais num processo histórico, entretanto agravou-se exponencialmente no capitalismo neoliberal.

1.2 Inserção Social para a formação de professores de Matemática em rede nacional (PROFMAT)

A apresentação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) se concebeu em 2011, por intermédio de uma rede de instituições de Ensino Superior, via constituição da Universidade Aberta do Brasil, fomentada por meio da Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), e estruturada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com a contribuição do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Impa). De acordo com o Relatório Digital PROFMAT (2017, p.1): “o PROFMAT surgiu mediante uma ação induzida pela CAPES junto à comunidade científica da área de Matemática, representada e coordenada pela SBM.” As políticas públicas no sentido de usar a inovação estimularam o desenvolvimento de cursos de Graduação, Mestrados Profissionais, dentre outros orientados para a EaD, pelo sistema da Universidade Aberta do Brasil (UAB), com expansão da sua oferta e engajamento de diversas instituições públicas. Esse estudo vai analisar o polo do PROFMAT na Universidade Federal do Rio de Janeiro, que oferece o curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional no Estado do Rio de Janeiro desde a sua criação.

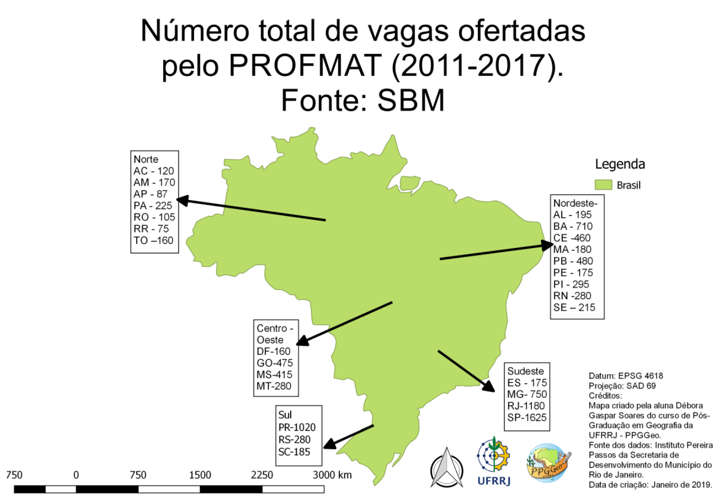


Figura 1: Número Total de vagas ofertas pelo PROFMAT (2011-2017)

Fonte: Instituto Pereira Passos.

Para realizar esse estudo com relação à inserção social na EaD analisando como, em geral, se suscita o cotidiano e a cotidianidade na formação de professores de Matemática em rede nacional (PROFMAT), e compreendendo como, em particular, a teoria de Agnes Heller interpreta nossa sociedade informacional, onde prepondera o modo capitalista de produção. O primordial recurso foi o site do PROFMAT no qual foi pesquisado, especialmente, o Relatório Digital de 2017; Regimentos; Portarias e Designações. Em seguinte, foram realizadas entrevistas que ocorreram na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, elas aconteceram no segundo semestre de 2018, com a Coordenação anterior e a atual Coordenação do PROFMAT, professores do ICE (Instituto de Ciências Exatas) que são membros do DEMAT (Departamento de Matemática da UFRRJ), essas que possibilitaram uma interação do ponto de vista das práticas produtivas, da ação cooperativa e das fontes de informação e conhecimento para inovação, respeitantes às características dessa amostra de estudo.

A efetivação, alastramento e promoção da inovação na prática pedagógica, por meio da rede em EaD, tipifica um arquétipo de inter-relação sócio espacial que reúne cidades como indicadores, que caracterizam os locais ou sítios, nos quais se organizam o contato, se criam as conexões, se formam as interações, que se geram pelos trânsitos de informações, e desenham um território virtual em rede. Destarte, a inovação no que se atribui a EaD, imputa uma expectativa social de ampliação e redimensionamento do lugar, de nova cartografia, de geração de novos caminhos, de criação de tecnologia, a partir de políticas públicas que fomentam o uso da rede nesse lugar. De acordo com Heller (2016 [1970], p.20): “o próprio cientista ou artista têm vida cotidiana: até mesmo os problemas que enfrentam através de suas objetivações e suas obras lhes são colocados, entre outras coisas (tão-somente entre outros, decerto), pela vida.” Em conformidade Lukács (2003, p.215): “os instrumentos, as reservas, e os meios financeiros, indispensáveis tanto à empresa quanto à vida econômica, estão nas mãos do empresário, num caso, e do chefe político, no outro.” Tal qual Damiani (2016, p.13) argumenta: “a industrialização envolve o imperativo do trabalho abstrato no campo e na cidade. Define-se como divisão social do trabalho, divisão campo-cidade. As relações sociais concorrenciais estruturam o fundamento das formas de sociabilidade modernas.” Esses autores evidenciam que o uso da inovação promove uma interiorização em distintos graus de arquitetura de geografia das redes. E nos fazem refletir algumas questões: Para que o uso da EaD para promoção e formação técnico-científica de Professores de Matemática? Como a rede projeta esse território virtual de práticas pedagógicas? Como o uso e difusão da rede na formação de Professores reverbera no ordenamento escolar das cidades desses professores?

A estrutura do PROFMAT no polo da Universidade Federal do Rio de Janeiro é o local de funcionamento presencial do curso, o lugar físico onde ocorrem as aulas, e se encontram o aluno, tutor, professor, coordenação e outros agentes de conhecimento. O polo do PROFMAT-UFRRJ que coordena os sistemas e a infraestrutura que viabilizam as interações e os fluxos de informações. Apesar, do PROFMAT exigir o encontro presencial com os alunos uma vez por semana, o PROFMAT depende que a instituição polo ofereça laboratório de informática para os alunos, porque a proposta pedagógica primazia pela utilização da Plataforma Moodle de Educação, e é nesse ambiente virtual de aprendizagem que se disponibiliza os fóruns, chats, webconferências, troca de mensagens, as disciplinas, as redes de comunicação, as vídeo-aulas (não foi encontrado o tempo de atualização desse material), e material didático, que só podem ser acessados pela internet, portanto configura a dependência desse modelo educacional às tecnologias informacionais em rede. De acordo com Damiani (2016, p.14): "a era urbana real e utópica, ao mesmo tempo, é a superação da crise implicada na separação campo-cidade. Ela identifica um elemento novo: a programação do consumo, a manipulação das necessidades, através do cotidiano; trata-se da cotidianidade." Em conformidade Heller (2016 [1970], p.30) afirma: "Na maioria das formas de atividade da vida cotidiana, as motivações do homem não chegam a se tornar típicas, ou seja, as motivações em permanente alteração estão muito longe de expressar a totalidade, a essência do indivíduo." Já Lefebvre (1991, p.23) destaca que: "O homem cotidiano se fecha em suas propriedades, seus bens e suas satisfações, e às vezes se arrepende. Ele está ou parece estar mais próximo da natureza do que o sujeito da reflexão ou, da cultura." Os autores discutem sobre a alienação propiciada pela sociedade informacional, e pelo modo de produção capitalista, no quanto essa se alastra para além do cotidiano, para a própria ciência contemporânea, para os modelos educacionais, e sobre os fundamentos e estruturas da vida cotidiana.

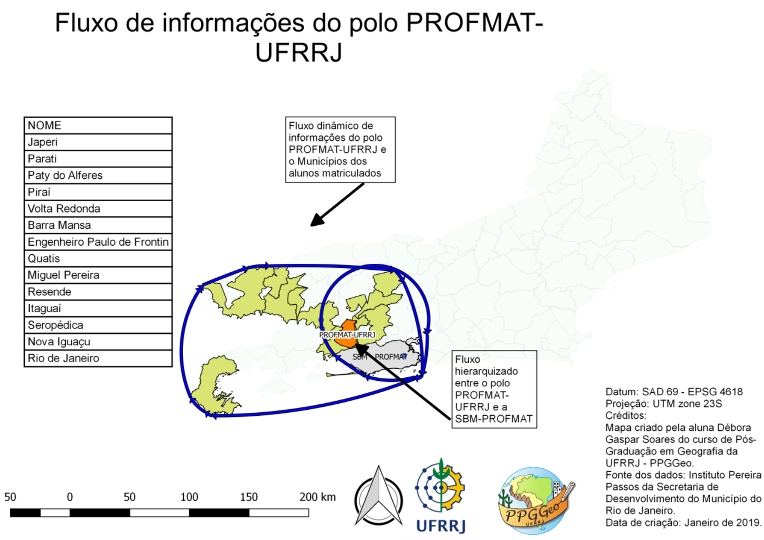


Figura 3: Fluxo de informação entre o polo PROFMAT-UFRRJ e os Municípios de origem dos alunos matriculados.

Fonte: Instituto Pereira Passos.

O PROFMAT, ao tornar-se adepto da EaD, adotou a modalidade semipresencial que busca conciliar as práticas pedagógicas virtuais e presenciais do aluno. Na Plataforma Moodle, o aluno dispõe das vídeo-aulas, material didático, guias, e as distintas redes de comunicação com Professor e Tutor à distância, assim configurando as ações do aluno em rede. Mas, esse território virtual de ensino possibilita o encontro presencial, no qual o aluno é acompanhado pelo Professor, o Tutor é à distância, que acaba sendo mediador e orientador das atividades na Plataforma e no polo. Nesse sentido, o relatório digital do PROFMAT 2017 sinaliza que a oferta da formação de Professores de Matemática na EaD enfrenta adversidades, reveses e diversos desafios relacionados a sociedade informacional. Vale destacar que essa oferta do curso está sujeita a exclusão de outros extratos sociais, a completa retração e restrição de vagas de demanda social conforme comunicado PROFMAT Nº 01/2019 de que as vagas para o processo de seleção PROFMAT/2020 são exclusivas para docentes do ensino básico das redes públicas, devido a uma nova interpretação da Portaria CAPES Nº209 de 21 de outubro de 2011. Assim, os alunos do PROFMAT, que até o presente momento são na maioria professores do ensino básico, e que devem se tornar exclusivos do ensino básico das redes públicas, e cuja formação educacional e exercício laboral são alicerçados pela modalidade presencial. Nesse sentido, compreende-se que o seu processo histórico, memória, e formas de aprendizado seguem referências pedagógicas no contato físico, e direto aluno-professor em sala de aula. Então, o conteúdo do PROFMAT necessita desenvolver competências e habilidades na utilização e ações na EaD, para que esse professor tenha competência de transformar o seu método de aprendizagem, e acrescentar novos recursos informacionais para sala de aula e para a escola, sendo que os conteúdos oferecidos são específicos da Matemática, e a única disciplina caracterizada como Humano-Digital: Recursos Computacionais para o Ensino de Matemática é eletiva.

Contrapondo a relação dos alunos matriculados no PROFMAT-UFRRJ (2017-2019), verifica-se que os municípios de Nova Iguaçu, Rio de Janeiro e Volta Redonda, mantiveram ou ampliaram sua matrícula no polo, isso indica que houve uma divulgação, repercussão, e procura do curso pelos outros profissionais, ou seja, que há interesse pelos professores de Matemática em se capacitar no modelo EaD. Essa inserção social é relatada no Relatório Digital do PROFMAT 2017, que relata dados de um formulário respondido pelos alunos, professores e coordenadores, em que os egressos afirmam que a formação ajudou no seu desempenho profissional como maior segurança para apresentar conteúdos, habilidade para motivarem os alunos pelo conteúdo, e maior capacidade de elaboração de material didático. Outro fator relevante é que o egresso considera o curso importante no avanço da sua carreira profissional. O Relatório Digital do PROFMAT (2017, p.34) destaca: "considera-se haver uma mudança na postura e na prática da sala de aula, tendo consequentemente contribuído para a melhoria da Educação Básica, seu principal objetivo." Para finalizar, há apenas um indicador nesse material de pertinência sócio espacial que é o aumento do envolvimento dos egressos na preparação e motivação da participação dos alunos da Educação Básica na Olimpíada Brasileira de Matemática. De acordo com Heller (2016 [1970], p.32): "o precedente tem mais importância para o conhecimento da situação que para o conhecimento das pessoas. É um "indicador" útil para nosso comportamento, para nossa atitude." A autora elucida que as relações sociais degeneram-se conforme os sistemas funcionais da sociedade informacional geram estereótipos, vidas estereotipadas, imitação, no ofício das circunstâncias sociais de domínio, manipulação, e os comportamentos configuram-se em papéis cerceando a individualidade.

2 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A observação das informações relativas ao PROFMAT, correlacionadas a demanda sobre sua institucionalização no ambiente do polo da UFRRJ, apresenta indicativos para buscar entender o uso da modalidade EaD para promoção e formação técnico-científica de Professores de Matemática do ensino básico. Não há dúvidas que a modalidade EaD se tornou, no âmbito educacional, uma modalidade de ensino substancial e permanente, que é fomentada pela sociedade informacional capitalista. Tal condição assente significância porque exige práticas pedagógicas mais avançadas e em conformidade com a vida cotidiana midiática, tecnológica e em rede atual. Entretanto, a oferta dessa formação de Mestrado e a inserção social desses professores de Matemática na Universidade revelam desigualdades sócio espaciais. Apesar da conexão em rede de distintos municípios, a hierarquização e sistematização do EaD cerceia a prática pedagógica; a escolha e determinação dos conteúdos a serem apresentados pelos Tutores a distância impede a autonomia de preparação pedagógica, e a falta de exigência da formação em Tutores em EaD para os professores do PROFMAT dificulta a função de mediador na Plataforma Moodle; a comunicação ser pela Plataforma Moodle limita a liberdade de expressão e o pensamento crítico dos agentes de conhecimento. De acordo com Heller(2016 [1970], p.32): "as formas necessárias da estrutura e do pensamento da vida cotidiana não devem se cristalizar em absolutos, mas têm de deixar ao indivíduo ·uma margem de movimento e possibilidades de explicitação." Em conformidade Silva (2008, p.8) elucida: "o crítico está impresso nas formas de produção e reprodução do urbano, bem como o seu produto final: um espaço posto como valor de troca [...] e o aprofundamento dos processos de segregação urbana." Esses autores explicitam que o modelo do EaD de construção colaborativa de conhecimento fomentado pelo capitalismo neoliberal elabora conhecimentos que não se propõem a esclarecer a prática da vida cotidiana, nem são capazes de responder a complexidade humana.

A geografia que está sendo delineada e tecida por meio do ordenamento territorial virtual representa um desafio para esse estudo do PROFMAT, os dados do polo presencial da UFRRJ sugerem como a rede projeta esse território virtual de práticas pedagógicas. Quanto à promoção de ciência, tecnologia, técnica, conteúdo, e informação, há a ausência de uma definição da CAPES do conceito de inovação que deve ser utilizado, ainda assim, a rede dinamiza esse território virtual e conecta os agentes de conhecimento. Nessa acepção, o polo presencial da UFRRJ equivale à zona de conexão entre os fluxos de informação e agentes de conhecimento que utilizam a rede de comunicação do PROFMAT. O ponto de partida para a formação do ordenamento territorial virtual se esboça na articulação desses centros urbanos, que arquitetam suas relações e contatos através da rede, essas configuram formas e sistemas sócio espaciais, autossuficiente da dimensão física e alcance do local, ignorando o modelo tradicional capitalista de urbanização. Nessa cinesia de ordenamento territorial virtual sobrevém a ressignificação das concepções de próximo e distante, e toda a topologia da rede é fechada, é tecida na área de interação entre conteúdo-rede, zona-conexão e virtualização-plataforma, que edifica uma teia de articulações da contemporânea sociedade informacional. Em conformidade com Lukács (2003, p.216): "surge uma sistematização racional de todas as regulamentações jurídicas da vida, sistematização que representa pelo menos em sua tendência, um sistema fechado e que pode se relacionar com todos os casos possíveis e imagináveis.” O autor explica que o modelo EaD de aprendizagem colaborativa, como território virtual é um sistema fechado que ojeriza e produz um abismo para ação do pensamento crítico, do reflexivo, do que reproduz a vida cotidiana, do familiar, do habitual, do ordinário, dos que são desconsiderados cientificamente, ou tecnicamente, ou ideologicamente.

Para perfazer esse estudo, a formação dos professores de Matemática necessita repensar a formação para o trabalho em educação. Simplesmente, porque analisando o relatório digital do PROFMAT 2017, há apenas um indicador sócio espacial destacado que é o aumento da participação dos alunos do ensino básico na Olimpíada Brasileira de Matemática. Apesar do relatório possuir um capítulo denominado “Inserção social”, não está claro de que se trata nem qual extrato social alcança e transforma, pois não há uma definição de que e qual inserção social tanto da SBM, como do IMPA, como do CNPq, como da CAPES. O território virtual de rede de comunicação é baseado pela conexão e interação, e nessas condições não há dados que esclareçam como o uso e difusão da rede na formação de Professores reverbera no ordenamento escolar das cidades desses professores. Aprendizagem se constrói absolutamente por meio do diálogo, do debate, da comunicação, e a formação para o trabalho não deve dominar as vozes, as elocuções, as reflexões, o território virtual para a prática pedagógica não deve ser um sistema fechado, hierarquizado, é necessário para a educação, para o trabalho, para vida cotidiana a autonomia. Em concordância com Barthes (1977, p.9): “quanto mais livre for esse ensino, tanto mais será necessário indagar-se sob que condições e segundo que operações o discurso pode despojar-se de todo desejo de agarrar.” Diante desse panorama, é crucial para a sociedade informacional uma tomada de atitude, a prática pedagógica não pode constituir como ameaça para a sociedade, é vital para função e exercício de professorar o reconhecimento dessas conjunturas, é imprescindível que a educação no território virtual quer seja no espaço da universidade, quer seja no espaço da escola pública seja oportuna, propícia e favorável para a reflexão sobre os planos, programas e concepções sociais que pretenda edificar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente a Deus por esse trabalho.

Agradeço a assistência, a fundamentação e a inspiração recebida pela Pós-graduação em Geografia, a toda equipe, aos meus caros colegas, especialmente a organização, atenção e o zelo dos Coordenadores Clézio dos Santos e Márcio Rufino.

Agradeço o apoio recebido pelo grupo de Iniciação Científica: Educação e Mundo Contemporâneo (UFRRJ), a todas as discussões e questionamentos que fizeram parte da nossa amizade, e o respeito e admiração que tenho por cada um de vocês colegas. Estendo esses agradecimentos a Professora Lúcia Sartório e ao meu orientador Professor Márcio Rufino pela direção, pelas orientações, pela presença a cada momento desse trabalho e o inestimável apoio intelectual.

Agradeço a contribuição material da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) que ofereceu esse projeto, a CAPES, a FAPERJ, ao CNPq, a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), a Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ), a Universidade Federal Fluminense (UFF), a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e a Fundação CECIERJ (CEDERJ).

Agradeço à ajuda recebida, na pesquisa bibliográfica, dos professores Giuseppe Cocco e Sarita Albagli do PPGCI/IBICT-UFRJ, ao Bruno Tarin, a todos os colegas, ao IBCT, ao LIINC e ao PPGCI. A compreensão, generosidade e a atenção do Professor Orlando Pereira, da Professora Aline Barbosa, e da Professora Rosane de Oliveira, e a toda equipe do DEMAT da UFRRJ.

Agradeço a cada um dos meus professores que ao longo da minha vida foram pacientes comigo e por me educarem. Acrescento a cada um dos meus amigos, aos colegas, aos funcionários e a todos que de alguma forma me ajudaram em algum momento.

Agradeço a minha família, em especial a minha mãe Célia e ao meu pai Daniel por serem minhas raízes, as minhas irmãs Daniela e Diane por me incentivarem sempre, aos meus sobrinhos Maria Clara e João Vitor por me cativarem tanto amor, tenho muito orgulho de ser sua tia Dedé. Aos meus cunhados Anderson e Alex por me ajudarem incondicionalmente. A Rosana e ao Ubiraci por cuidarem de mim e das minhas irmãs com zelo e amor. Aos amigos Valfredo e Isabel por toda a atenção e carinho. E a todos os meus familiares, os meus amigos familiares, e a minha comunidade neocatecumenal pela cooperação.

Agradeço ao meu marido Ivan por me apoiar de forma extraordinária, por todos os seus questionamentos desse trabalho, por ser um grande professor, por quem tenho profunda admiração pelo seu trabalho de excelência e seu amor ao magistério. Acrescento ao meu filho Daniel que torna o meu dia feliz por acordar sorrindo todos os dias.

Muito obrigada!

REFERÊNCIAS

BAITZ, Ricardo. Implicação: um novo sedimento a se explorar na Geografia? In: Boletim Paulista de Geografia, nº 84, jul. 2016, pp. 25-50.

BARTHES, Roland. Aula. 15ª ed. São Paulo: Cultrix (2007 [1978]).

DAMIANI, Amélia Luísa (coord.) et. al. O futuro do trabalho : elementos para a discussão das taxas de maisvalia e de lucro. São Paulo: AGB/SP. Labur/Programa de Pós-Graduação em Geografia Humana, Departamento de Geografia, FFLCH/USP, 2006. 72 p.

CAPÍTULO 15

A REGRA DE TRÊS E O ENSINO DE PROPORCIONALIDADE COM FUNDAMENTOS NA PROPOSIÇÃO CINCO DO *LIBER QUADRATORUM*

Data de aceite: 26/08/2020

Denivaldo Pantoja da Silva
Universidade Federal do Pará
Belém/PA
http://lattes.cnpq.br/0767953869085054

José dos Santos Guimarães Filho
Universidade Federal do Pará
Belém/PA
http://lattes.cnpq.br/3097821995908518

João Cláudio Brandemberg
Universidade Federal do Pará
Belém/PA
http://lattes.cnpq.br/3873561463033176

RESUMO: Neste trabalho, pretendemos apresentar alguns ajustes que julgamos ampliar a discussão, mantendo a originalidade das ideias, realizada em artigo publicado cujo propósito foi buscar na proposição 5 do *Liber Quadratorum* fundamentos que permitam apresentar a Regra de Três como dispositivo didático eficaz, uma ferramenta de modelização matemática para auxiliar o estudo da noção de proporcionalidade geométrica. Para isso, buscamos na História da Matemática uma abordagem metodológica aliada à noção de praxeologia. Os resultados mostram a Regra de Três como um dispositivo didático para iniciação ao estudo da proporcionalidade geométrica por meio da modelização matemática possível na educação básica e, consequentemente, um dispositivo eficaz de formação de professores e com potenciais didáticos.

PALAVRAS-CHAVE: Liber Quadratorum, Praxeologia, Modelização Matemática, Proporcionalidade, Regra de Três.

THE RULE OF THREE AND THE TEACHING OF PROPORTIONALITY BASED ON THE FIVE PROPOSITION OF THE LIBER QUADRATORUM

ABSTRACT: In this work, we intend to present some adjustments that we believe to expand the discussion, maintaining the originality of the ideas, carried out in a published article whose purpose was to seek in the proposition 5 of the Liber Quadratorum the foundamentals that allow presenting the Rule of Three as an effective didactic device, a modeling tool mathematics to assist the study of the notion of geometric proportionality. For this, we seek in the History of Mathematics a methodological approach combined with the notion of praxeology. The results show the Rule of Three as a didactic device to initiate the study of geometric proportionality through possible mathematical modeling in basic education and, consequently, an effective device for teacher training and with didactic potentials.

KEYWORDS: Liber Quadratorum, Praxeology, Mathematical Modeling, Proportionality, Rule of Three.

1 I INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática tem sido objeto de pesquisas em Didática das Matemáticas e da Educação Matemática buscando compreender determinadas problemáticas de sala de aula, por vezes, centradas nas aprendizagens, condições de desenvolvimento e organizações praxeológicas de objetos de ensino tradicionais nos currículos escolares tais como proporcionalidade, Regra de Três entre outros (SILVA, 2011, 2017).

Em geral, as pesquisas que se ocupam do ensino da Matemática encaminham o uso de estratégias inovadoras capazes de estabelecer relações entre o que se considera aula "teórica" e as práticas de uso ordinário que acontecem na vida das pessoas. Tais relações têm como elemento facilitador relacionado principalmente ao uso de materiais concretos que parece encontrar abrigo no ambiente das aprendizagens prazerosas assim consideradas por alunos e professores.

No entanto, na aprendizagem da Matemática sabemos que o saber em jogo pode organizar o ensino e aprendizagem e os objetos concretos e qualquer dispositivo destinado ao ensino, a nosso ver, desempenham papel construtivo somente quando participam efetivamente do processo de construção do conhecimento matemático, vai além da motivação, da cooperação e do desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Nesse sentido, vimos na História da Matemática potencialidades didáticas com respeito à transmissão e difusão das ideias matemáticas promovendo ao professor oportunidade de desenvolver uma prática de ensino alternativa e diferenciada para seu trabalho em sala de aula de forma contextualizada. Para além disso, pode contribuir para a aprendizagem interdisciplinar e com significados resistentes ao esquecimento imediato que geralmente acontecem com a aprendizagem dos alunos no decorrer da formação acadêmica, na mudança de uma série para outra.

Assim, ousamos propor alguns ajustes que julgamos promover a possibilidade de ampliar as discussões, mantendo as ideias originais, propostas em Silva e Guimarães Filho (2020) cujo objetivo foi buscar na proposição 5 do *Liber Quadratorum* fundamentos que nos possibilitem apresentar a Regra de Três como dispositivo didático eficaz, no sentido de apresentá-la como uma ferramenta de modelização matemática para auxiliar o estudo da noção de proporcionalidade geométrica, na educação básica. Desse modo, anunciamos a referida proposição da seguinte maneira: *Encontre dois números de modo que a soma de seus quadrados faça um quadrado formado pela soma dos quadrados de outros dois outros números dados* (SIGLER, 1987, tradução nossa).

Portanto, para alcançar nosso objetivo, será desenvolvido na primeira seção um breve histórico do *Liber Quadratorum* para apresentar a praxeologia da proposição 5. Em seguida, trataremos da proposição 5 como fundamento matemático na busca por elementos que encaminhem a construção de uma compreensão da mesma como um dispositivo didático seguindo a questão: **Como podemos desenvolver a noção de proporcionalidade geométrica, utilizando a Regra de Três como dispositivo didático?** Por fim, nas considerações finais abordaremos de forma mais precisa algumas conclusões as quais poderão se constituir em respostas possíveis à questão posta, e ainda apontar as potencialidades identificadas neste e para trabalhos futuros.

2 | *LIBER QUADRATORUM*: BREVE HISTÓRICO E APRESENTAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 5

O século XIII deixou muitos legados para a história da ciência, em meio a estes, temos Leonardo de Pisa, ou Fibonacci, como ficou comumente conhecido, o qual, é considerado por Castillo (2007) o primeiro matemático medieval. Este preeminente matemático, deixou contribuições reconhecidamente até hoje, entre elas a obra denominada *Liber Quadratorum*, apresentado por Oliveira (2013) como o Livro dos Quadrado.

Escrito em 1225, este livro partilhou de um período de estabilidade na Europa, o que favoreceu Leonardo Fibonacci (daqui em diante, Fibonacci) aprofundar seus estudos viajando pelo norte da África. A Europa neste período estava sendo regida por Frederico II, um rei intelectual que apreciava a arte e a ciência. A seu pedido foi organizado um torneio matemático, que tem por convidado especial, Fibonacci, o qual, participou com maestria deste torneio, resolvendo os três problemas propostos a ele (CASTILLO, 2007).

Dentre os problemas propostos a Fibonacci, temos no primeiro uma atenção especial, pois motiva a construção do livro em questão. Este problema consiste em *encontrar um número quadrado que adicionado ou subtraído cinco permaneça um número quadrado* (SIGLER, 1987, tradução nossa). Outro ponto a ser evidenciado é que este livro foi dedicado ao rei Frederico II, que se tornou um admirador dos trabalhos de Fibonacci o tornando uma pessoa ilustre para sua época (GUIMARÃES FILHO, 2018).

O *Liber Quadratorum* é composto de vinte e quatro problemas, apresenta segundo Oliveira (2013) em seu conteúdo, problemas envolvendo a Teoria dos Números que, dentre outros, examina métodos para encontrar as ternas pitagóricas de várias formas, os quais, partem de uma ideia inicial de Fibonacci ao perceber que a soma de números ímpares tem uma relação direta com os números quadrados, apresentado na introdução do livro e demonstrado na quarta proposição deste.

Estes problemas serão denominados por nós de proposições, pois Fibonacci organiza de forma que as proposições apresentadas se constituam como axiomas para subsidiar uma apresentação (demonstração) concisa de uma resposta ao primeiro problema proposto a ele no torneio, que é designada de proposição dezessete no *Liber Quadratorum*.

Neste trabalho, na tentativa de alcançar nosso objetivo de buscar na proposição 5 fundamentos para apresentar a Regra de Três como um dispositivo didático para iniciação ao estudo da proporcionalidade geométrica, reconstruímos o enunciado da referida proposição, como segue: *Encontre dois números quaisquer de modo que a soma de seus quadrados forme um quadrado, e que este quadrado possa ser formado pela soma de dois quadrados quaisquer diferentes dos dois primeiros*.

Para apresentar a demonstração dada por Fibonacci, a referida proposição e nossas inferências, estarão em itálico, as partes traduzidas diretamente do trabalho de Sigler (1987). Vale ressaltar também, que Fibonacci faz suas explicações em primeira pessoa, assim, todas as partes que traduzimos estarão em primeira pessoa, bem como, são preservadas as simbologias utilizadas por Fibonacci.

Esse matemático italiano, inicia a demonstração da proposição fazendo o seguinte comentário: *Deixe dois números .a. e .b. serem dados para que então a soma de seus quadrados forme um número quadrado .g.; deve-se encontrar dois outros números para que então a soma de seus quadrados seja igual ao número quadrado .g..*

Deixe quaisquer outros dois números serem encontrados para que a soma de seus quadrados seja um número quadrado. Esses dois números são representados com os segmentos .de. e .ez., e são colocados de modo que formem um ângulo reto, assim é nomeado o ângulo .dez.. Também, o segmento .dz. é localizado estando oposto aos lados .de. e .ez.. O número quadrado formado pelo segmento .dz. é igual ao número .g. ou não.

Desta forma, teremos três situações: ser igual a .g.; ser maior que .g.; ser menor que .g.. Assim, seguiremos com a condição de ser igual, e para esta, Fibonacci apresenta que: *Primeiro, se igual, então os dois outros números pelos quais a soma de seus quadrados seja igual a .g. são encontrados, um desses é igual ao segmento .de. e o outro ao segmento .ez.* expressas no triângulo da figura seguinte:

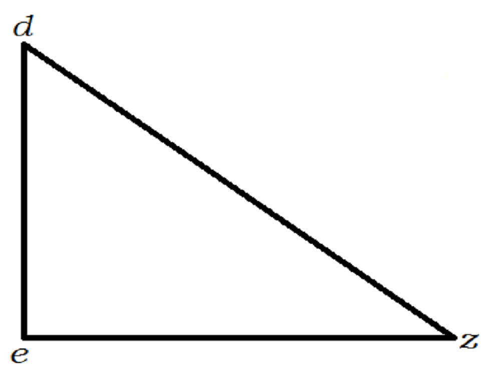


Figura 1: Representação geométrica da proposição 5.

Fonte: Guimarães Filho (2018).

Assim, segundo Leonardo Fibonacci temos que,

- $.a.^2 + .b.^2 = .g.$
- $.g.$ é um número quadrado
- $.dez. = ⊾$

Se $.dz.^2 = .g. \rightarrow .de.^2 + .ez.^2 = .g. = .dz.^2$

Seguindo esta proposição temos o comentário de Leonardo Fibonacci para a situação de não ser igual: *Se não, o número quadrado feito pelo segmento .dz., que é o número .g., não é igual ao número .g., ele será maior ou menor que .g..*

Dessa forma, temos para segunda situação $.dz^2 > .g.$. Leonardo Fibonacci comenta: *Primeiro, se maior, o quadrado formado pelo número .dz. é maior que a raiz quadrada de .g.; portanto, a raiz do número .g. é tomada igual ao número .i., e é colocada sobre o comprimento .dz., e é denotada por .tz.. E do ponto .t. se faz .tk., perpendicular a .ez.; .tk.* é portanto *paralelo a .de. Pelo triângulo .tkz. ser similar ao triângulo .dez., .zd. é para .zt., como .de. é para .tk.. Mas a proporção de .zd. para .zt. é conhecida; ambos os comprimentos são de fato conhecidos.*

Similarmente, é mostrado que o segmento .zk. é conhecido com a proporção dele para .ze. assim como .zt. para .zd.; são portanto, conhecidos .tk. e .kz., que tem a soma de seus quadrados igual ao quadrado feito pelo segmento .tz.. Mas o quadrado do número .tz. é igual ao quadrado do número .i., e .i. é de fato a raiz quadrada do número .g.. Portanto, o quadrado de .tz. é igual ao número .g.; dois números .tk. e .kz. são então encontrados com a soma de seus quadrados igual ao número quadrado .g..

Dessa forma, $.dz^2 > .g.$, temos $.tz. = \acute{\imath}.$ logo, tomando o triangulo (figura 2) teremos as relações seguintes, onde *C* denominamos de constante de proporcionalidade.

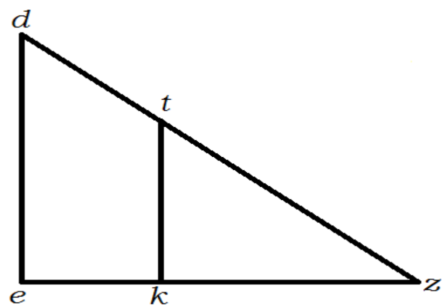


Figura 2 – Representação geométrica do comentário da proporção 5.1

Fonte: Guimarães Filho (2018).

- $.g. = i^2$
- $\Delta\,.dez. \approx \Delta\,.tkz.$
- $\frac{.tz.}{.dz.} = C$
- $\frac{.tk.}{.de.} = C$
- $\frac{.kz.}{.ez.} = C$
- $.tk.^2 + .kz.^2 = .tz.^2 = .i.^2 = .g.$

Continuando a demonstração dada por Fibonacci, temos por fim, $.dz^2 < .g.$, para tanto $.lz. = i$, assim, tomando o triângulo (figura 3) teremos as seguintes relações, onde *C* continua sendo uma constante de proporcionalidade.

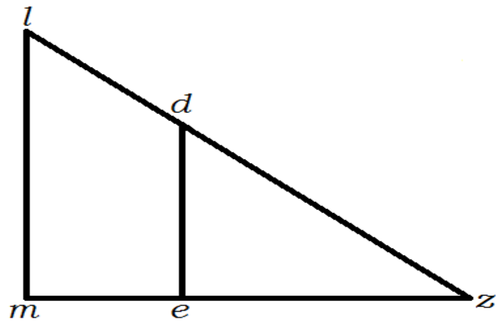


Figura 3 – Representação geométrica do comentário da proposição 5.2

Fonte: Guimarães Filho (2018).

- $.g. = i.^2$
- $\Delta\,.dez. \approx \Delta\,.lmz.$
- $\frac{.dz.}{.lz.} = C$
- $\frac{.de.}{.lm.} = C$
- $\frac{.ez.}{.mz.} = C$
- $.lm.^2 + .mz.^2 = .lz.^2 = .i.^2 = .g.$

Afim de esclarecer sua demonstração, Fibonacci exemplifica esta proposição da seguinte forma, para:

- $.a. = 5$
- $.b. = 12$
- $.g. = 169$
- $.i. = 13$

Com isso temos que,

$$.a.^2 + .b.^2 = .g. \Rightarrow 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow 25 + 144 = 169 = 13^2$$

E se temos $.dz^2 > .g.$ e admitindo,

- $.de. = 15$
- $.ez. = 8$
- $.dz. = 17$
- $.tz. = 13$

Temos que,

$$.tk. = \frac{.zt. \times .de.}{.dz.}$$

$$.tk. = \frac{13 \times 15}{17} = \frac{195}{17} = 11\frac{8}{17}$$

$$.kz. = \frac{.zt. \times .ez.}{.dz.}$$

$$.kz. = \frac{13 \times 8}{17} = \frac{104}{17} = 6\frac{2}{17}$$

E dessa forma temos que,

$$.tk.^2 + .kz.^2 = .tz.^2 \Rightarrow \left(\frac{195}{17}\right)^2 + \left(\frac{104}{17}\right)^2 = 13^2 \Rightarrow \frac{38025}{289} + \frac{10816}{289} = 13^2$$

$$\Rightarrow \frac{48841}{289} = 169 = 13^2 = .g.$$

E se temos $.dz^2 < .g.$ e admitindo que,

- $.de. = 4$
- $.ez. = 3$
- $.dz. = 5$
- $.lz. = 13$

Temos que,

$$.lm. = \frac{.zl. \times .de.}{.dz.}$$

$$.lm. = \frac{13 \times 4}{5} = \frac{52}{5} = 10\frac{2}{5}$$

$$.mz. = \frac{.zl. \times .ez.}{.dz.}$$

$$.kz. = \frac{13 \times 3}{5} = \frac{39}{5} = 7\frac{4}{5}$$

E desta forma temos que,

$$.lm.^2 + .mz.^2 = .lz.^2 \Rightarrow \left(\frac{52}{5}\right)^2 + \left(\frac{39}{5}\right)^2 = 13^2 \Rightarrow \frac{2704}{25} + \frac{1521}{25} = 13^2$$
$$\Rightarrow \frac{4225}{25} = 169 = 13^2 = .g.$$

Logo,

- Para $.dz^2 = .g.$, temos $.a.^2 + .b.^2 = .g. = .de.^2 + .ez.^2;$;
- Para $.dz^2 > .g.$, temos $.a.^2 + .b.^2 = .g. = .tk.^2 + .kz.^2;$;
- Para $.dz^2 < .g.$, temos $.a.^2 + .b.^2 = .g. = .lm.^2 + .mz.^2.$.

Desta maneira, Fibonacci demonstra como podem ser encontrados infinitos valores para esta proposição, bem como, foi possível perceber que basta encontrar uma constante de proporcionalidade e multiplicá-la por qualquer valor para encontrar valores que obedeçam à relação expressa nesta proposição.

3 | A PROPOSIÇÃO CINCO: FUNDAMENTO DE UM DISPOSITIVO DIDÁTICO

Pensar um método de ensino eficaz de encaminhar a aprendizagem matemática na escola básica, demanda concentrar esforços na articulação de mecanismos, procedimentos e estratégias que possibilitem a ajuda ao estudo de objetos matemáticos escolares de modo objetivo e sistematizado, que promova o encontro às perspectivas de alunos e professores para uma aprendizagem com significados, mesmo que seja na própria Matemática e a partir daí transpor para o enfrentamento de outras situações.

Sobre a questão de como ensinar Matemática na escola, cabe refletir sobre a afirmação de Lacroix (2013) quando afirma que a eficácia do ensino consiste principalmente em colocar ordem nas proposições, tornar evidente o encadeamento que as liga entre si e manter, tanto quanto possível, as oportunidades que se oferecem de lançar adiante algumas dessas visões fecundas que guiaram os inventores.

Nesse sentido, uma estratégia que consideramos eficaz em acordo com o proposto por Lacroix (2013), para atender à essa necessidade de significação da aprendizagem matemática, é iniciar pelo estudo histórico-epistemológico do objeto matemático e seguir o processo de transposição discutindo possíveis sutilezas interpostas, isso permitirá certamente uma reflexão sobre o desenvolvimento criativo de noções matemáticas estudadas na escola, além disso afastaria a ideia de que o uso da História da Matemática se aplicam somente interpretações ingênuas (SCHUBRING, 2018).

Pais (2006) ao discutir o fazer matemático escolar nos faz pensar sobre a importância de considerar com atenção nas práticas docentes a dimensão didática ao evidenciar a função das estratégias de ensino: devem contribuir para que o aluno possa fazer matemática sob a orientação do professor, o qual deve buscar dinâmicas apropriadas que intensifique as interações realizadas entre o aluno e o conhecimento matemático valorizando suas ações ao mobilizar noções e procedimentos para solução de problemas.

Nesse sentido, vislumbramos a Regra de Três como prática social provida de história na evolução e difusão das ideias matemáticas, constituir-se potencialmente em um dispositivo didático capaz de cumprir o papel deflagrador de organizações praxeológicas, no sentido de promover por meio de praxeologias a iniciação do aluno ao processo de construção do conhecimento matemático de forma eficaz e consistente, cujo fundamento reside, neste caso, no fazer matemático da proposição 5 do *Liber Quadratorum* de Fibonacci, ou seja, proporciona a iniciação ao estudo da proporcionalidade geométrica tema da Matemática escolar. Para além disso, o fazer matemático desenvolvido na demonstração de Fibonacci, por meio da álgebra geométrica, poderá encaminhar para estudos em níveis mais avançados da Matemática.

Mas, alertamos que não é nosso propósito aqui esgotar todas as possibilidades de uso e aplicação da proposição 5 no ensino da Matemática, nem explorar na sua totalidade o rigor teórico e axiomático que exige a Álgebra Geométrica, mas, sim, explorar de acordo com o previsto em nosso objetivo proposto, alguns pontos que consideramos potencialmente favoráveis ao didático, tomado aqui como "tudo aquilo que está relacionado com o estudo e com a ajuda para o estudo da Matemática" (CHEVALLARD, BOSCH, GASCON, 2001, p.46).

Desse modo, buscamos possíveis respostas para a seguinte questão: **Como podemos desenvolver a noção de proporcionalidade geométrica, utilizando a Regra de Três como dispositivo didático?** Para enfrentá-la, consideramos fundamental a proposição 5 demonstrada por Fibonacci como uma praxeologia matemática relativamente completa (CHEVALLARD, 1999; 2005).

Inicialmente vamos retomar a proposição 5 já enunciada anteriormente do seguinte modo: *Encontre dois números quaisquer de modo que a soma de seus quadrados forme um quadrado, e que este quadrado possa ser formado pela soma de dois quadrados quaisquer diferentes dos dois primeiros.* Para atender nossos propósitos, passaremos a anunciá-la convenientemente adaptada a um problema protótipo de Regra de Três, o que permite recorrer a todo instrumental disponível no escopo deste gênero de problemas, da seguinte forma: Se conhecidos dois números quadrados cuja soma resulta em um quadrado, quais outros dois números quaisquer diferentes dos primeiros que também formam o mesmo quadrado?

Nesse caso, ater-se somente na leitura do enunciado, a resposta parece não ser imediata. Precisamos de outros modos de ler e pensar no modo matemático, vamos então usar o pensamento aritmético para nos auxiliar. O enunciado nos permite escolher dois números: o primeiro 5 e o segundo 12. A soma de seus quadrados é 169, isto é, $5^2 + 12^2 = 169$. Esse resultado corresponde a 13^2 como era de se esperar! Para os números desconhecidos, no entanto, sua escolha dependerá de duas situações fundamentais que devem conduzir o desenvolvimento da resposta procurada: Se os números tomados formarem o mesmo número quadrado ou formarem um número quadrado diferente. No primeiro caso, é trivial, não há o que fazer, pois atende plenamente as condições do problema.

No segundo caso, temos que o número quadrado é diferente, logo, duas possibilidades devem ser consideradas impreterivelmente: (i) o número quadrado é maior que o número quadrado dado (169); (ii) o número quadrado é menor que o número quadrado dado (169). Desse modo, teremos:

(i): Tomando os números 8 e 15, teremos que $8^2 + 15^2 = 289$, observe que $289 > 169$ e ambos são números quadrados. Esse número foi tomado como referência para o cálculo dos dois números quaisquer desconhecidos que formarão o mesmo número quadrado dado inicialmente (169). Para isso estabeleceremos relações adequadas de proporcionalidade do número 13 que corresponde a raiz quadrada de 169 a partir da relação do 17, raiz quadrada de 289, com o 8 para determinar o primeiro valor desconhecido. Em seguida repete-se o mesmo procedimento para o número 15. Dessa forma teremos as seguintes sentenças: 17 está para 8, assim como 13 está para o primeiro número desconhecido, que juntas formam a proporção. Do mesmo modo, 17 está para 15 assim como 13 está para o segundo número desconhecido. Da primeira sentença chegamos a $\frac{104}{17}$ e da segunda, $\frac{195}{17}$, que são os dois números procurados. Prova:

$$\left(\frac{104}{17}\right)^2 + \left(\frac{195}{17}\right)^2 = \left(\frac{10816}{289}\right) + \left(\frac{38025}{289}\right) = \frac{48841}{289} = 169 = 13^2.$$

(ii): tomando os números 3 e 4, teremos que $3^2 + 4^2 = 25$, observe que $25 < 169$ e ambos são números quadrados. Esse número foi tomado como referência para o cálculo dos dois números quaisquer desconhecidos que formarão o mesmo número quadrado dado inicialmente (169). Para isso estabeleceremos relações adequadas de proporcionalidade do número 13 que corresponde a raiz quadrada de 169 a partir da relação do 5, raiz quadrada de 25, com o 3 para determinar o primeiro valor desconhecido. Em seguida repete-se o mesmo procedimento para o número 4. Dessa forma teremos: 5 está para 3, assim como 13 está para o primeiro número desconhecido formando a proporção. Do mesmo modo 5 está para 4 assim como 13 está para o segundo número desconhecido. Da primeira sentença chegamos a $\frac{39}{5}$ e da segunda, $\frac{52}{5}$, que são os dois números procurados. Prova:

$$\left(\frac{39}{5}\right)^2+\left(\frac{52}{5}\right)^2=\left(\frac{1521}{25}\right)+\left(\frac{2704}{25}\right)=\frac{4225}{25}=169=13^2.$$

Portanto, finalizamos a resolução do problema proposto utilizando o pensamento aritmético analítico nesse desenvolvimento. Essa resolução adaptada de Fibonacci que acabamos de apresentar, pode ser trabalhada pelo professor inicialmente sem maiores problemas de ordem operatória, mas exigiria dos alunos certa habilidade para análise, que se adquire durante o desenvolvimento de estudos aritméticos. Por outro lado, podemos recorrer à Regra de Três que jogará, nesse caso, o papel de dispositivo didático eficiente e com a vantagem de ser um instrumento de caráter prático, rápido e seguro para resolução de problemas dessa natureza. Senão vejamos:

De acordo com os dados do enunciado do problema, podemos iniciar dispondo-os de modo adequado no quadro seguinte:

17	8
13	x

Formamos, então, a proporção geométrica usando x para denotar o número desconhecido e determinamos seu valor aplicando a técnica de cálculo “produto cruzado” , assim teremos:.

$$\frac{17}{13}=\frac{8}{x}\Rightarrow x=\frac{104}{17}$$

Do mesmo modo, chegaremos ao valor do outro número desconhecido.

$$\frac{17}{13}=\frac{15}{x}\Rightarrow x=\frac{195}{17}$$

Portanto, chegaremos aos valores dos números procurados, $\frac{104}{17}$ e $\frac{195}{17}$.

Como podemos notar, essas resoluções apresentadas, de certa forma simples, mobilizam objetos e procedimentos matemáticos que podem ser utilizados pelo professor nos diferentes níveis de ensino sem maiores dificuldades. Particularmente, ressaltamos neste trabalho, que as potencialidades didáticas eleitas a partir da proposição 5 do *Liber Quadratorum* como iniciação ao estudo da proporcionalidade e da Regra de Três inter-relacionados, foram contempladas em conformidade com os limites de nosso objetivo. Mais ainda, podemos explorar não só a proporcionalidade geométrica, mas a própria Regra de Três Algebrizada não explorados neste trabalho, do mesmo modo como estudado na escola atual ampliando as organizações praxeológicas que os manuais escolares apresentam.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como anunciado anteriormente, sobre a algebrização da Regra de Três foi iniciada uma discussão em Silva, Guimarães Filho e Brandemberg (2020), onde buscamos desenvolver por meio da noção de transposição didática uma praxeologia denominada da Regra de Três Algebrizada utilizando o processo axiomático de algebrização de forma evolutiva, consultando fontes históricas - *Liber Quadratorum* - como método de pesquisa.

Nestes trabalhos, percebemos que ao resgatar o *Liber Quadratorum* para fins didáticos, surgiu a presença de objetos com potenciais didáticos que podem auxiliar o fazer docente, seja no contexto escolar ou no acadêmico. De forma global, temos potencialidades didáticas nesta obra do século XIII já evidenciadas por Guimarães Filho (2018), quando aponta, em relação a conteúdo das séries escolares e que transcendem a obra.

Desta forma, Guimarães Filho (2018) sugere potencialidades diversas que o professor pode fazer uso tais como: explorar as ternas pitagóricas, elabora atividades envolvendo quadrados e potências, explorar a evolução da linguagem algébrica entre outros envolvendo a História da Matemática.

Aqui, centramos nossa atenção no fazer da proposição 5 para tentar mostrar um potencial evidente, a Regra de Três como um dispositivo didático. Vimos que esse dispositivo se mostra eficaz para inicialização do estudo da proporcionalidade geométrica, inclusive para Regra de Três, e mais, numa versão mais ampla pode ser tomada para preparação ao estudo de campos mais avançados da Matemática como a teoria das Proporções, Álgebra Geométrica entre outras, não evidenciado no trabalho de Guimarães Filho (2018).

Reafirmamos que há uma consequência imediata que decorre do tratamento da Regra de Três como dispositivo didático para o estudo da proporcionalidade geométrica desenvolvida no campo de práticas aritméticas, é que em continuidade ao estudo da proporcionalidade, esses problemas poderão ser modelizados por uma Regra de Três Algebrizada que de forma geral, deverá ser aplicada para tipos de problemas e até mesmo para gêneros de problemas. Nesse sentido, evidencia-se ainda certa ampliação no enfrentamento de situações em outros campos de saber utilizando como ferramenta a Regra de Três.

Postulamos que este trabalho proporcionou a possibilidade de explorar as proposições de Fibonacci e seu fazer matemático, evidenciando a Regra de

Três como dispositivo didático de modelização matemática capaz de integrar as dimensões aritmética, algébrica e geométrica.

Portanto, temos a convicção de que a resposta para nossa questão inicial - **Como podemos desenvolver a noção de proporcionalidade geométrica, utilizando a Regra de Três como dispositivo didático? -** pode ter sido descrita, mesmo que parcialmente, no desenvolvimento deste trabalho. Tentamos mostrar que é possível desenvolver o estudo da proporcionalidade por meio da Regra de Três, com potenciais didáticos aos temas da Matemática Escolar estudadas atualmente, seja pela prática docente ou por manuais escolares, com base nas proposições estabelecidas por Fibonacci, neste caso escolhemos a de número 5.

Enfim, esperamos que nosso trabalho possa contribuir para além de uma reflexão sobre o trabalho docente, no sentido de construir compreensões sobre os objetos matemáticos de ensino e que possam ajudar o professor na construção de organizações didático-matemáticas e estratégias inovadoras que evidencie o fazer matemático escolar como algo significativo promovendo aprendizagens duradouras.

Para aprofundamento deste e para trabalhos futuros deixamos as seguintes questões: Como podemos integrar as proposições do *Liber Quadratorum* para construir um modelo epistemológico de referência para o estudo da Álgebra Geométrica? De que maneira podemos construir uma organização matemática para uso nas aulas de geometria da escola básica a partir das proposições do Liber Quadratorum? Certamente que a busca por essas respostas demandará do pesquisador esforço, o qual será compensado pela qualidade da produção científica a ser alcançada em favor do Ensino da Matemática.

REFERÊNCIAS

CASTILLO, R. M. **Fibonacci: El Primer Matemático Medieval**. 2ª ed. Coleção – La matemática em sus personajes. Espaha: Nivola, 2007.

CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Yves. La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado, 2005.

CHEVALLARD, Yves. BOSCH, M. & GASCÓN, J. Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

FIBONACCI. **Liber Quadratorum.** Pisa, 1225.

GUIMARÃES FILHO, José dos Santos. **Um estudo do *Liber Quadratorum* (1225) de Leonardo Fibonacci (1180 – 1250) e suas Potencialidades para o Ensino de Matemática.** (Dissertação de Mestrado). Belém-PA, 2018.

LACROIX, Sylvestre-François. **Ensaios sobre o ensino em geral e o de matemática em particular**. Tradução Karina Rodrigues.I ed.Editora UNESP, São Paulo, 2013.

OLIVEIRA, J. J. **Sequências de Fibonacci:** possibilidades de aplicações no ensino básico. UFBA. Salvador, BA, 2013.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender matemática**. Autêntica, 2006.

SCHUBRING, Gert. **Os números negativos: exemplos de obstáculos epistemológicos?.** Editora livraria da física, São Paulo, 2018.

SIGLER, L. E. **The Book of Squares.** An annotated traslation into modern english. Academic Press, USA: 1987.

SILVA, Denivaldo Pantoja da. **Regra de três: prática escolar de modelagem matemática**. 2011.Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém-PA.

SILVA, Denivaldo Pantoja da**. A INVARIÁVEL PRÁTICA DA REGRA DE TRÊS NA ESCOLA**. 2017. Tese. (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém-PA.

SILVA, Denivaldo Pantoja da**.;** GUIMARÃES FILHO, José dos Santos. (no prelo). ENSINO DA REGRA DE TRÊS: a proposição cinco do *Liber Quadratorum* como um contexto de estudo em Matemática. Número Especial – IV Seminário Cearense de História da Matemática, **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** - Volume 7, 2020.

SILVA, Denivaldo Pantoja da**.;** GUIMARÃES FILHO, José dos Santos.; BRANDEMBERG, João Cláudio. A praxeologia da regra de três algebrizada e a proposição cinco do *Liber Quadratorum*. **Amazônia** | RECM | v.16 (35) - Especial História da Matemática 2020. p. 61-73.

CAPÍTULO 16

AS CONTRIBUIÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA NO CONTEXTO DE UMA SALA DE AULA DO 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 08/06/2020

Thaís Cristina Barros Machado
Cachoeira de Minas
http://lattes.cnpq.br/2180310335727534

RESUMO: O presente trabalho tem como objetivos apresentar os primeiros resultados de uma pesquisa sobre a Modelagem Matemática como metodologia alternativa de ensino da matemática e investigar suas possíveis contribuições no processo de ensinar e aprender matemática, tendo como foco alunos do 9° do ensino fundamental. A pesquisa realizada é de cunho qualitativo e de caráter exploratório, fundamentada nos princípios de modelagem na perspectiva de Bassanezi, Barbosa, Biembengut e Hein, entre outros. Com o intuito de atingir os objetivos propostos foi desenvolvida uma atividade usando a Modelagem Matemática em uma turma de 9° ano do ensino fundamental. Os alunos escolheram como tema da atividade "construção de casa", formularam um problema relacionado ao volume do concreto necessário para encher a laje de uma casa, criaram um modelo matemático e resolveram. Pode-se perceber o aumento do interesse e participação dos alunos durante as atividades de modelagem.
PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática, Educação Matemática, Realidade.

THE CONTRIBUTIONS OF MATHEMATICAL MODELING IN THE CONTEXT OF A CLASSROOM OF THE 9TH YEAR OF FUNDAMENTAL EDUCATION

ABSTRACT: The present work has as objectives to present the first results of a research on Mathematical Modeling as an alternative methodology of teaching mathematics and investigate its possible contributions in the process of teaching and learning mathematics, focusing on students from the 9th grade. The research carried out is qualitative and exploratory, based on the modeling principles from Bassanezi, Barbosa, Biembengut and Hein, among others. In intent to reach the proposed objectives, we developed an activity using Mathematical Modeling in a 9th grade elementary school class. The students chose, as an activity theme, "constructing a house" and formulate a problem related to the volume of concrete needed to fill a slab of a house, created a mathematical model and solved it. We clearly noticed an increase of the interest and participation of the students during the activities of modeling.
KEYWORDS: Mathematical Modeling, Mathematical Education, Reality.

1 I INTRODUÇÃO

Com o rápido desenvolvimento tecnológico e com as dificuldades que a educação apresenta em acompanhar as mudanças da sociedade, surgem novos desafios para os educadores, visto que o modelo tradicional de ensino não abrange todas as necessidades das novas gerações.

O método tradicional de ensino não propicia aos alunos um ambiente que desenvolva a autonomia, a criticidade e a curiosidade. No caso específico da matemática este cenário agrava-se ainda mais, pois é apresentado aos alunos um conteúdo matemático dissociado da realidade, e que não corresponde aos questionamentos e necessidades dos educandos.

Diante disso, a Modelagem Matemática é vista como uma alternativa pedagógica, pois, por meio de seu método ensina os conteúdos matemáticos problematizando situações cotidianas. Segundo Barbosa (2004, p.75), "a modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade".

O presente trabalho justifica-se pela necessidade do professor em conhecer métodos que possam atender suas necessidades e possibilitem sanar os problemas como, por exemplo, o baixo nível de participação, desempenho e interesse dos alunos nas aulas de matemática. Nesse sentido, Biembengut e Hein (2014, p. 18) defendem que "[...] a modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente".

Dessa maneira, essa pesquisa procura fazer um estudo sobre a Modelagem Matemática como metodologia alternativa de ensino da matemática e investigar suas possíveis contribuições no processo de ensinar e aprender matemática, tendo como foco alunos do 9° do ensino fundamental.

2 I ETAPAS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Segundo Anastácio (2010, p. 6) "o processo de fazer modelagem se constitui a partir de uma sequência de passos que devem ser seguidos". Muitos autores da área 'Modelagem Matemática' descrevem etapas para concretização de atividades de Modelagem, geralmente essas etapas assemelham-se. Esse trabalho fundamentou-se nas etapas definidas por Bassanezi (2016), são elas: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação.

A primeira etapa designada *experimentação* refere-se à coleta de dados envolvidos no fenômeno. Os dados podem ser coletados por meio de pesquisas bibliográficas, experiências em campo, entrevista com um especialista no tema, etc.

A segunda etapa instituída *abstração* é a parte do processo no qual o modelo matemático é formulado. Essa etapa se divide em quatro momentos: seleção das variáveis, problematização, formulação de hipótese e simplificação. Bassanezi (2016, p. 27-28) afirma que a *seleção das variáveis* é "a distinção entre as variáveis de estado que descrevem a evolução do sistema e as variáveis de controle que agem sobre o sistema”. A *problematização* é a elaboração de enunciados explícitos, entendíveis e operantes.

A *formulação de hipóteses* é o momento em que os supostos que darão direção à investigação serão levantados, normalmente são formulações gerais que permitem a conclusão de manifestações empíricas. A *simplificação* consiste em delimitar e discernir os fenômenos comumente completos para que sejam trabalhados matematicamente e simultaneamente para manter o seu valor.

A terceira etapa nomeada *resolução* consiste em manusear o modelo a fim de encontrar uma solução, dado que o mesmo representa o problema. Ao resolver o modelo, encontra-se a resposta do problema. Na quarta etapa *validação* é o momento de aceitar ou recusar o modelo apresentado anteriormente. O modelo e as hipóteses devem ser testados e comparados para certificar que preveem os fatos inicias do problema. Na última etapa *modificação*, se o modelo foi recusado, o modelador deve rever os dados do problema e modifica-lo para melhor aproximá-lo da realidade.

3 | MODELO

Para Biembengut e Hein (2014) a Modelagem Matemática é o procedimento em que expressamos situações cotidianas por meio da linguagem matemática e o processo no qual se obtém um modelo, ou seja, “a Modelagem Matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias” (BIEMBENGUT; HEIN, 2014, p. 13).

Para Bassanezi (2015) a Modelagem é um artifício para compreendermos as situações de nossa realidade, isto é, “a modelagem é o processo de criação de modelo em que estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente sobre a sua realidade, carregadas de interpretações e subjetividades próprias de cada modelador” (BASSANEZI, 2015, p. 15).

Diante disso, pode-se notar que, sempre que se refere a Modelagem como um método no processo de ensino e aprendizagem da matemática, refere-se a um processo que envolve a matematização ou a tradução de um contexto real em um modelo matemático.

Para Jacobini e Wodewotzki (2001, p. 8) “um modelo matemático é uma representação de alguma situação relacionada com o mundo real, feita através do uso de uma linguagem matemática”. Biembengut e Hein (2014, p. 12) entendem como modelo matemático “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procuram traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real”.

Para Barbosa (2009, p. 70) modelos matemáticos são “aqueles que empregam símbolos matemáticos, sejam tabelas, gráficos, equações, inequações, etc., ou, em outras palavras, empregam conceitos, notações e/ou procedimentos matemáticos”. Bassanezi (2016, p. 20) denomina modelo matemático como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado” no contexto educacional “é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas”.

4 I MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO

A maioria dos indivíduos não conseguem associar a Matemática com situações cotidianas e com as outras Ciências, como se a Matemática fosse isolada de outros contextos. Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2013) isso acontece porque a Matemática é vista pela sociedade como um objeto de ensino e o professor como o principal sujeito do processo, porém na Modelagem a ideia de que os objetos são ensinados pelos professores deve ser substituída pela ideia de que o aluno os aprende. Nessa abordagem, os alunos passam a ser o principal sujeito do desenvolvimento da aprendizagem, os objetos de ensino devem ser manipulados por eles e a concepção do conhecimento está relacionada a interação entre objeto e sujeito.

Na Modelagem o aluno é o centro do processo de aprendizagem e deve investigar situações ligadas ao seu cotidiano, pois quando o aluno entra na sala não é possível desvincular seu cotidiano extraescolar da aula de matemática. Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2013, p. 26) “o que precisamos fazer é habilitar os alunos a aprender e a ter confiança em si próprios de que conseguirão fazê-lo. Aprender a formular e a resolver uma situação e com base nela fazer uma leitura crítica da realidade”.

“A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças” (BASSANEZI, 2016, p. 31). Assim, quando se trabalha com problemas reais em sala de aula é possível despertar nos alunos o sentimento de que estão participando e contribuindo no desenvolvimento da sociedade. Ainda, pode-se desenvolver a criticidade e a criatividade, porque o aluno precisa pensar em formas diversificadas para resolver o problema e uma vez que está por dentro da situação, consegue formar opiniões concisas, fazer críticas construtivas e propor soluções, sendo isso exatamente o que a sociedade mais precisa e espera dos indivíduos.

> O uso da modelagem no processo de ensino-aprendizagem propicia a oportunidade de exercer a criatividade não somente em relação às aplicações das habilidades matemáticas, mas, principalmente,

> na formulação de problemas originais uma etapa tão estimulando quando a da resolução (BASSANEZI, 2015, p. 15).

Para Almeida, Silva e Vertuan (2016) a introdução de atividades de Modelagem na prática escolar está ancorada na possibilidade de motivar e favorecer a compreensão dos métodos e conteúdos matemáticos, além de mostrar as aplicações da Matemática no dia a dia e em outras áreas de conhecimento. A motivação ocorre ao introduzir e problematizar nas aulas de matemáticas temas de interesse dos alunos, presentes no contexto social em que estão inseridos.

Quando os desejos e interesses dos alunos são considerados a aula torna-se estimuladora e possibilita aos alunos perceberem que eles são os principais responsáveis pelo próprio aprendizado. "Uma motivação contextualizada com o curso ou com a vida real cria nos alunos uma afetividade com a disciplina e o desejo de aprender" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 30).

É comum os professores receberem de seus alunos questionamentos sobre o porquê de aprender matemática e onde irão aplicar os conteúdos estudados, que muitas vezes afirmam serem desnecessários por não perceberem suas aplicabilidades. Assim, é importante mostrar em qual contexto real determinado conteúdo pode ser aplicado, isso é possível por meio da Modelagem, visto que a modelagem aborda matematicamente situações reais. Em concordância Bassanezi (2015, p. 15) afirma que "a modelagem matemática é simplesmente uma estratégia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais". Portanto, a Modelagem também funciona como uma estratégia para mostrar aos alunos como os conteúdos matemáticos podem ser aplicados no contexto social e como o conhecimento da matemática pode melhorar o bem-estar da sociedade.

Segundo Bassanezi (2016) os principais argumentos para a inclusão da Modelagem na educação são: argumento formativo, argumento de competência crítica, argumento de utilidade, argumento intrínseco, argumento de aprendizagem e argumento de alternativa epistemológica.

O *argumento formativo* realça as aplicações, a resolução de problema e a Modelagem Matemática como meio para desenvolver capacidades e atitudes dos alunos, fazendo com que sejam criativos, pesquisadores e competentes na resolução de problemas. O *argumento de competência crítica* mantém o foco na preparação dos alunos para atuarem como cidadãos na sociedade, formarem opiniões próprias e entenderem a matemática usada no contexto social. O *argumento de utilidade* ressalta o saber matemático como instrumento para os alunos solucionarem problemas em diversos contextos.

O *argumento intrínseco* salienta que a inclusão de Modelagem, aplicações e resolução de problemas propicia aos alunos uma valiosa bagagem para interpretar e compreender a matemática nas diversas situações. O *argumento aprendizagem* assegura que as aplicações ajudam os estudantes a perceberem e reterem procedimentos, conceitos e resultados matemáticos, e prezar a matemática em si. O *argumento de alternativa epistemológica* afirma que o Programa Etnomatemática se adequa a Modelagem, pois segundo D'Ambrosio (1993) o programa sugeri uma perspectiva epistemológica alternativa relacionada a historiografia, tendo como ponto de partida a realidade e alcançando a ação pedagógica por meio da fundamentação cultural, de forma que funcione como uma metodologia alternativa mais pertinente as diferentes realidades socioculturais.

Em vista disso, a Modelagem pode contribuir em vários aspectos no desenvolvimento integral dos alunos como cidadãos capazes de interagir e modificar o ambiente social em que estão inseridos, por meio do aprendizado significativo da matemática.

5 | PAPEL DO PROFESSOR NA MODELAGEM MATEMÁTICA

No ambiente de Modelagem o professor assume o papel de orientador e o aluno ocupa o centro de sua própria aprendizagem. Para Almeida, Silva e Vertuan "orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos" (2016, p. 24). Dessa forma, o professor deve fornecer as ferramentas, indicar caminhos, estimular e questionar os alunos e fazer ajustes quando necessário.

> É incumbência do professor analisar as dificuldades dos alunos no processo de modelagem, especialmente aquelas relacionadas com a matematização e a interpretação dos resultados e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos curriculares (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 29).

Os autores ainda afirmam que a intensidade da participação e orientação do professor depende de quanto os alunos estão acostumados com os procedimentos da Modelagem e que cabe aos alunos serem confiantes e independentes para interpretar as situações-problemas e procurar soluções através da matemática.

Para Barbosa (2001b, p. 9) "o professor é concebido como "coparticipe" na investigação dos alunos, dialogando com eles acerca de seus processos". Ao dialogar com os alunos o professor deve guia-los nos possíveis caminhos matemáticos para resolver o problema. Bassanezi entende que:

> O professor, nesse caso, é aquele sujeito mais experiente que facilita o processo de aprendizagem da modelagem matemática, já que a melhor maneira de saber usar a matemática é praticando modelagem, de preferência, junto com alguém que já lidou com situações concretas aplicando a matemática (BASSANEZI, 2015, p. 13).

Assim, por mais que o aluno seja o sujeito principal em trabalhos que envolvam a Modelagem Matemática, o professor é indispensável no início para ensinar a arte de modelar, supervisionar e ajudar nas questões matemáticas, estimular nos alunos a capacidade de pesquisar e interpretar os dados coletados e orientar as melhores direções para obter um modelo efetivo.

6 | RELATO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Para investigar as possíveis contribuições da Modelagem no processo de ensinar e aprender matemática, foi desenvolvida uma atividade usando a metodologia da Modelagem Matemática em uma turma de 34 alunos do nono ano do ensino fundamental, de uma escola pública na cidade Santa Rita do Sapucaí – MG, na qual a pesquisadora leciona.

O primeiro momento foi propor aos alunos que escolhessem um tema relacionado a realidade deles e que tivessem afinidade. Assim, o tema para a Modelagem foi escolhido de acordo com a preferência da maioria dos alunos da turma, já que o tema foi único para toda a turma. Logo de início os alunos começaram a conversar sobre séries de televisão e mostraram muita animação em relação ao assunto. Biembengut e Hein (p. 20, 2014) afirmam que uma vantagem relacionada a escolha do tema estar a encargo dos alunos é que se sentem participantes no processo. Por fim, a escolha do tema foi "construção de casa" motivada pelo interesse da maioria dos alunos pela série de televisão "Prison Break[1]", no qual o personagem principal é um engenheiro civil que fez a planta da prisão abordada na trama.

O primeiro trabalho proposto aos alunos foi fazer um esboço da planta de suas casas. Para esta atividade foi distribuído papel quadriculado e instruído que as plantas poderiam ser feitas com medidas aproximadas, estimadas pelos próprios alunos. No momento seguinte os alunos foram divididos em seis grupos (A, B, C, D, E e F) de cinco ou seis integrantes com a intenção de cada grupo entrevistar um profissional da área de construção (pedreiro, engenheiro civil, etc.), afim de conhecerem mais a fundo sobre o tema. As perguntas para a entrevista[2] foram elaboradas em conjunto conforme o interesse dos alunos.

Através da análise realizada pela pesquisadora verificou-se que alguns conteúdos poderiam ser explorados a partir do tema escolhido, desse modo, enquanto os alunos realizavam as entrevistas extraclasses, em sala de aula alguns conteúdos foram trabalhados, são eles: unidades de medidas de comprimento, medições, figuras planas, conceito de área, unidades de medidas de área, área do

1 Prison Break é uma série de televisão de ação transmitida pela Fox, com início em 2005.
2 Veja as perguntas da entrevista com pedreiro em anexo.

retângulo, quadrado e triângulo, sólidos geométricos e volume de bloco retangular. Em relação a esses conteúdos, procurou-se construir os conceitos com os alunos sempre relacionando ao tema da modelagem.

Em seguida, fez-se a leitura e discussão dos resultados obtidos com as entrevistas, dando ênfase especial sobre como é feita a laje de uma casa baixa. Assim, com as respostas dos pedreiros concluiu-se que geralmente para fazer a laje primeiro coloca-se as vigas, e lajotas ou isopor entre as vigas, depois de escorar as vigas para suportar o peso, coloca-se aproximadamente de dois a cinco centímetros de altura de concreto, dependendo da preferência do pedreiro. Para dar sequência a modelagem, cada equipe recebeu uma planta baixa de um projeto de construção real, impresso em folha A0, como a imagem abaixo:

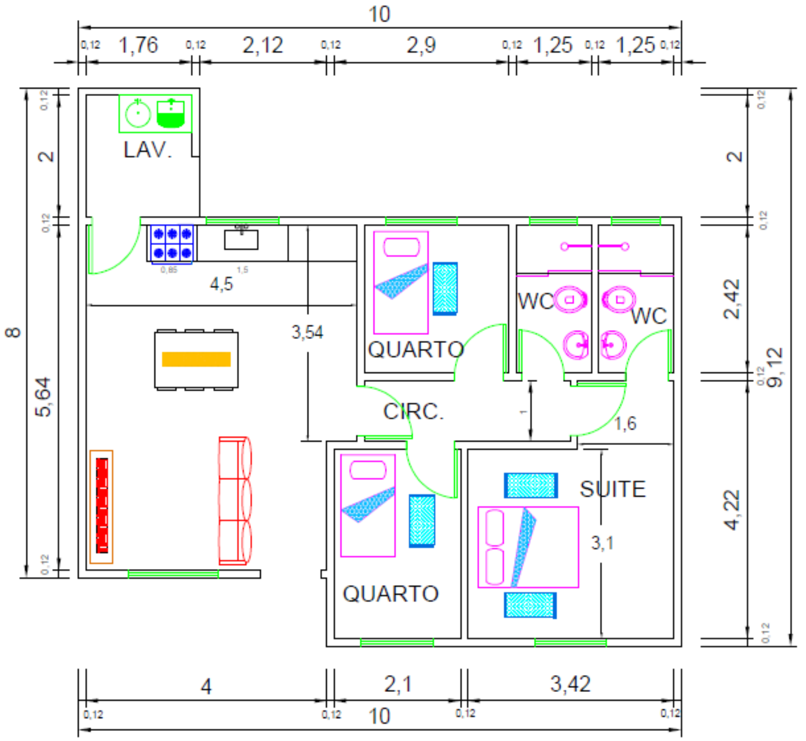


Figura 1: planta baixa da casa.

Os alunos discutiram entre si e analisaram os elementos da planta, por exemplo: a representação de portas e janelas, como identificar as medidas dos cômodos, a forma geométrica dos cômodos, a medida da espessura das paredes representada na planta, os ângulos formados pelas paredes, etc. Em seguida, a pesquisadora levou a discussão em direção a laje da casa, se seria possível calcular a quantidade de concreto necessária para encher a laje e como poderia calcular. Dessa forma, os alunos perceberam que poderiam dividir a planta da casa em retângulos e a região da laje que receberia o concreto em blocos retangulares, podendo, assim, calcular o volume do concreto, para isso combinaram que a altura do concreto seria de 5cm. Logo, a pergunta do problema foi formulada: qual é a quantidade de concreto necessária para encher a laje? Ou seja, qual o volume de concreto necessário para encher a laje?

Os alunos aprenderam anteriormente que o volume de um bloco retangular é dado pela multiplicação da altura, comprimento e largura ou pela área da base multiplicada pela altura, logo, para calcular o volume eles poderiam dividir a planta em retângulos, calcular a área desses retângulos e obter a área total da casa somando a áreas de todos os retângulos, em seguida, multiplicar a área total da casa pela altura do concreto, obtendo o volume do concreto necessário para encher a laje.

Observe a divisão dos cômodos em retângulos feito pela uma equipe C:

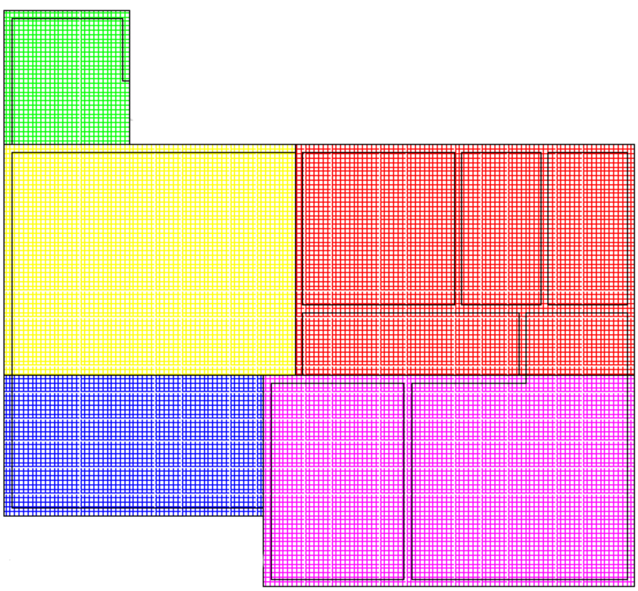
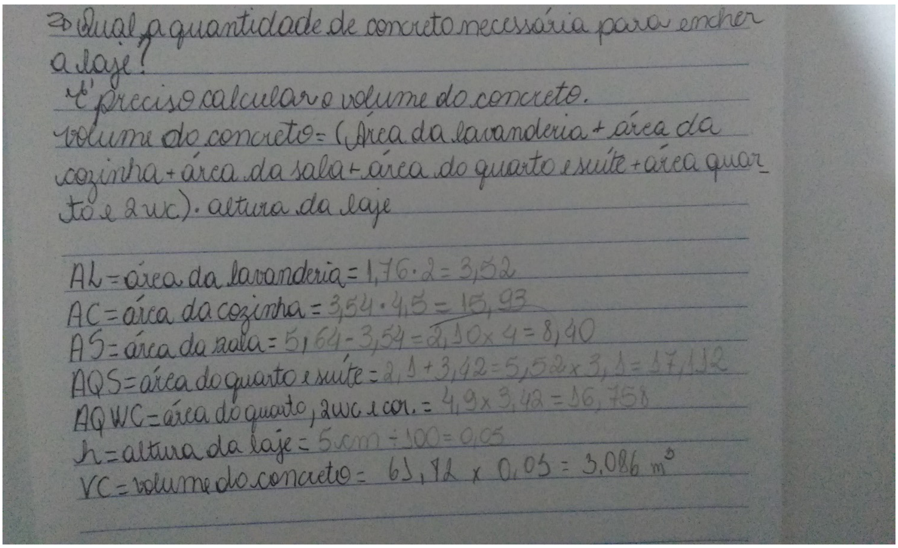


Figura 2: planta baixa da casa dividida em retângulos.

A região verde corresponde a área da lavanderia (AL), a região amarela corresponde a área da cozinha (AC), a região azul corresponde a área da sala (AS), a região vermelha corresponde a um quarto, o corredor e os dois banheiros

(AQWC) e a região rosa corresponde a um quarto e a suíte (AQS). Desse modo, a área total da casa é dada por: Área total = AL + AC + AS + AQWC + AQS, e o volume do concreto é dado pelo modelo: Volume = área total altura. Para trabalhar com a mesma unidade de medida os alunos transformaram a medida da altura 5 cm em metros, 0,05 m, já que as medidas na planta baixa estão em metros. Observe a resolução da equipe C:



3) Qual a quantidade de concreto necessária para encher a laje?

É preciso calcular o volume do concreto.

volume do concreto = (Área da lavanderia + área da cozinha + área da sala + área do quarto e suíte + área quarto e 2wc) . altura da laje

AL = área da lavanderia = 1,76 · 2 = 3,52

AC = área da cozinha = 3,54 · 4,5 = 15,93

AS = área da sala = 5,64 - 3,54 = 2,10 x 4 = 8,40

AQS = área do quarto e suíte = 2,1 + 3,42 = 5,52 x 3,1 = 17,112

AQWC = área do quarto, 2wc e cor. = 4,9 x 3,42 = 16,758

h = altura da laje = 5 cm ÷ 100 = 0,05

VC = volume do concreto = 61,72 x 0,05 = 3,086 m³

Figura 3 – Resolução do modelo matemático.

Por fim, os modelos matemáticos das equipes foram aceitos, porém algumas equipes cometeram pequenos erros matemáticos durante a resolução do modelo, mas com a ajuda da pesquisadora os mesmos foram corrigidos. A atividade foi encerrada com uma conversa com os alunos sobre as maneiras de obter o concreto para encher a laje: contratar o serviço de uma empresa que trabalha com concreto usinado ou fazer o concreto na própria obra. Concluiu-se que durante a construção de uma casa real, deveriam fazer um orçamento das duas opções, assim poderiam analisar qual das opções é mais conveniente financeiramente.

7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa teve o propósito de fazer um estudo sobre Modelagem Matemática como metodologia alternativa de ensino da matemática e investigar as possíveis contribuições da Modelagem Matemática no processo de aprender e ensinar matemática. Para atender aos objetivos, fez-se um estudo de campo, no qual foi desenvolvida uma atividade de Modelagem Matemática com o tema “construção de casa”, em uma turma de 9° ano do ensino fundamental, de uma escola pública na cidade de Santa Rita do Sapucaí – MG, na qual a pesquisadora leciona. A atividade foi fundamentada nas etapas estabelecidas por Bassanezi (2016) para a concretização da Modelagem Matemática, as etapas são: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação.

Os trabalhos realizados pelos alunos condizentes com a primeira etapa *experimentação,* que se refere a coleta de dados e ao primeiro contato com o tema, foram um esboço em papel quadriculados da planta baixa de suas casas e a realização de entrevistas com pedreiros.

Na segunda etapa *abstração,* o problema é formulado e o modelo matemático que expressa o problema é criado. Alguns conteúdos que possivelmente poderiam ser necessários para elaborar e resolver o modelo matemático foram trabalhados, são eles: unidades de medida, medições, figuras geométricas planas, área do triangulo, retângulo e quadrado, sólidos geométricos e volume do bloco retangular. Ao trabalhar esses conteúdos, houve uma preocupação em construir os conceitos com os alunos e relacionar os conteúdos com o tema da modelagem, procurando sempre dinamizar as aulas. Nos momentos em que os alunos realizaram tarefas, principalmente as diferentes do usual, desenharam no papel quadriculado para aprenderem sobre área ou usaram o material dourado para entenderem o conceito de volume, apresentaram maior entusiasmo, participação e interesse em relação ao que estava sendo trabalhado.

No que diz respeito a formulação do problema foi bem natural, a sequência das atividades durante a modelagem direcionava a pergunta do problema. Os alunos apresentaram um pouco de dificuldade de escrever o modelo matemático, de expressar de forma escrita usando símbolos as ideias de como resolver o problema antes de realizar os cálculos em si, ou seja, eles sabiam quais eram os cálculos que deveriam fazer, mas em virtude de não terem o costume de escrever um modelo matemático que representem os cálculos que geram o resultado do problema, necessitaram de ajuda para expressarem seus próprios pensamentos na linguagem matemática de forma generalizada.

A terceira etapa, *resolução,* consiste resolver o modelo matematicamente, algumas equipes apresentaram pequenos erros na resolução, os erros foram comedidos por falta de atenção ou por dúvidas quanto a soma e/ou multiplicação de números decimais. Com ajuda da pesquisadora as dúvidas foram solucionadas e os erros corrigidos naquele momento.

A quarta etapa, *validação,* compreende em aceitar ou não o modelo matemático. Os modelos das equipes descrevem e preveem os fatos iniciais do problema, logo foram aceitos. A última etapa, *modificação,* afirma que se na etapa anterior o modelo foi recusado, deve-se voltar na etapa abstração, na qual o modelo é formulado e fazer os ajustes para melhor descrever o problema e aproximar da realidade. Assim, como os modelos foram aceitos não houve a necessidade da última etapa.

A aplicação da atividade de modelagem, nesta turma em questão, ressalta o grande valor na relação dos aspectos teóricos da matemática com a realidade vivenciada pelos alunos. O interesse, entusiasmo e a grande participação dos estudantes no desenvolvimento das etapas comprovam que os conteúdos matemáticos despertam a atenção no processo de modelagem proposta. A aprendizagem desses conteúdos na perspectiva da Modelagem associou a realidade, aplicações e atividades práticas e concretas, proporcionando aulas mais dinâmicas e a aprendizagem efetiva. Além disso, pode-se perceber que ao desenvolver atividades em grupos a troca de experiências e conhecimentos flui melhor, contribuindo para a aprendizagem dos conteúdos, ao mesmo tempo percebeu-se que atividades em grupos proporcionam maior autonomia em relação ao professor.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes Werle; SILVA, Karina Pessoa; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem matemática na educação básica**. 1. ed. São Paulo: Contexto, 2016

ANASTACIO, Maria Queiroga Amoroso. Realidade: uma aproximação através da modelagem matemática. **Revista de Modelagem na Educação matemática**, v. 1, n. 1, p. 2-9, 2010.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: **Reunião Anual da ANPED**, 24, 2001, Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Modelagem matemática:** O que é? Por quê? Como? Veriatati, n.4, 2004.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem e modelos matemáticos na Educação Científica. **ALEXANDRIA: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 65-85, 2009.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática:** teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Contexto, 2015.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2016.

BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática um problema. **SBEM: Educação Matemática em Revista**. v. 1, p. 5-18, 1993.

JACOBINI, Otávio Roberto; WODEWOTZKI, Maria Lucia L. A modelagem matemática aplicada no ensino de estatística em cursos de graduação. **Bolema**, Rio Claro, v. 14, n. 15, p. 1-22, 2001.

MEYER, João Frederico da Costa de Azevedo; CALDEIRA, Ademir Donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

ANEXO A – PERGUNTAS DA ENTREVISTA COM PEDREIROS

1. Como é feita a laje de uma casa baixa?
2. Para que serve a laje?
3. Que espessura (altura) geralmente é feita a laje de uma casa baixa?
4. Para que serve as escoras (estacas) colocadas dentro da casa?
5. Qual é a diferença entre concreto e massa de cimento?
6. Como é feito a massa de cimento?
7. Como é feito o concreto?
8. Quantos tijolos são usados em uma parede de um metro de altura e um metro de largura, ou seja, em um metro quadrado de parede?
9. Como é feito o telhado?
10. Quais são as dificuldades de construir um prédio?
11. Que instrumentos você usa para medir?

CAPÍTULO 17

O ENSINO DE GEOMETRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE EPISTÊMICA DAS ORIENTAÇÕES CURRICULARES BRASILEIRAS

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 05/06/2020

Miriam Ferrazza Heck
Universidade Luterana do Brasil
Canoas- RS
http://lattes.cnpq.br/9239270984715525

Carmen Teresa Kaiber
Universidade Luterana do Brasil
Canoas- RS
http://lattes.cnpq.br/6869696643291591

RESUMO: Apresenta-se, neste trabalho, uma análise epistêmica da Base Nacional Comum Curricular brasileira, no que se refere aos conhecimentos geométricos nos anos finais do Ensino Fundamental. O mesmo é parte integrante de uma pesquisa que está sendo desenvolvida em nível de doutorado, que tem como objetivo investigar possibilidades da constituição de um currículo para a Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, na região da 36ª Coordenadoria Regional de Educação/ RS, tomando como referência o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS). A análise proposta se efetivou considerando os constructos advindos do EOS. Os resultados da investigação apontam a presença, de modo equitativo dos componentes situações- problemas, linguagem, regras, argumentos e relações, integrantes da Idoneidade Epistêmica da EOS. Foi possível identificar, também, uma articulação entre as unidades temáticas Geometria e Grandezas e Medidas na indicação do trabalho com situações-problemas.

PALAVRAS - CHAVE: Geometria, Diretrizes Curriculares, Currículo de Matemática, Ensino Fundamental.

THE TEACHING OF GEOMETRY IN THE FINAL YEARS OF ELEMENTARY SCHOOL: AN EPISTEMIC ANALYSIS OF THE BRAZILIAN CURRICULUM GUIDELINES

ABSTRACT: This paper presents an epistemic analysis of the Brazilian Common National Curriculum Base, with regard to geometric knowledge in the final years of elementary school. The same is an integral part of a research that is being developed at the doctoral level, which aims to investigate possibilities of the constitution of a curriculum for Geometry in the final years of elementary school, in the region of the 36th Regional Coordination of Education / RS, taking as reference the Ontosemitic Approach of Knowledge and Mathematical Instruction (EOS). The proposed analysis was carried out considering the constructs from EOS. The results of the investigation indicate the presence, in a fair manner, of the components situations - problems, language, rules, arguments and relationships, which are members of the Epistemic Suitability of OSS. It was also possible to identify an articulation between the thematic units Geometry and Quantities and Measures in the indication of work with situations- problems.

KEYWORDS: Geometry, Curriculum Guidelines, Mathematics Curriculum, Elementary School.

1 I INTRODUÇÃO

Os conhecimentos geométricos se constituem em parte importante do currículo da Educação Básica brasileira e estão presentes nas orientações curriculares com espaço e relevância análogos aos demais campos que compõem o currículo da área de Matemática- Aritmética, Álgebra, Estatística e Probabilidade- apresentadas na (BNCC)- Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017). Ainda, aspectos do processo de ensino e aprendizagem da Geometria permanecem no centro de discussões e investigações relacionadas, principalmente, a sua pouca presença como objeto de ensino em sala de aula, suas contribuições ao desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e a processos de ensino pertinentes, notadamente os que envolvem uma Geometria chamada de experimental e a utilização de recursos advindos das tecnologias digitais. Mais recentemente, pesquisas sobre o trabalho com provas e demonstrações, na Educação Básica, tem recebido atenção.

Nesse contexto, o estudo aqui apresentado é parte integrante de uma pesquisa que está sendo desenvolvida, em nível de doutorado, e que tem por foco investigar aspectos do desenvolvimento da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental em escolas públicas da 36ª Coordenadoria Regional de Educação do Estado do Rio Grande do Sul/Brasil, tomando como referência, os constructos teóricos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS (GODINO, 2011). Particularmente, apresenta-se, aqui, uma análise produzida na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017) no que se refere à Geometria desenvolvida no nível de ensino mencionado, na perspectiva do enfoque teórico apontado e que vai servir de base para a coleta e análise de dados a ser realizada nas escolas participantes da investigação.

A Base Nacional Comum Curricular foi instituída no ano de 2017, tendo como objetivo, estabelecer os conteúdos essenciais a serem estudados na Educação Básica brasileira. Trata-se de um documento de caráter normativo, que se estrutura por meio de um conjunto harmônico e progressivo de aprendizagens essenciais a serem desenvolvidos ao longo da escolaridade conforme apontado no documento que a apresenta (BRASIL, 2017).

Anteriormente a Base, no período entre os anos de 1998 e 2016, o documento orientador da Educação Básica brasileira eram os Parâmetros Curriculares Nacionais e, de acordo com o documento que apresenta a BNCC do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017), esses parâmetros e a Lei de Diretrizes e Base- LDB nº 9394/96, serviram de subsídio para a constituição das noções fundantes e estruturantes das orientações curriculares que entraram em vigor no ano de 2017.

Sobre essa questão, o documento que apresenta a BNCC destaca que, a orientação para a definição de uma Base Nacional Comum Curricular já estava presente na própria Constituição Federal do Brasil que orientava no seu artigo 210 que “serão fixados conteúdos mínimos para o ensino fundamental, de maneira a assegurar a formação básica comum a respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais” (BRASIL, 2017 p. 10), apontando para o estabelecimento de um conjunto de ações e conhecimentos básicos a serem desenvolvidos em todo o território brasileiro. Neste sentido, segundo o que consta no documento que apresenta a base é esperado que a BNCC ajude a superar a

> [...] fragmentação das políticas educacionais, enseje o fortalecimento do regime de colaboração entre as três esferas de governo e seja balizadora da qualidade da educação. Assim, para além da garantia de acesso e permanência na escola, é necessário que sistemas, redes e escolas garantam um patamar comum de aprendizagens a todos os estudantes, tarefa para a qual a BNCC é instrumento fundamental. (BRASIL, p. 8, 2017)

De acordo com o mencionado documento, dentre as vertentes inovadoras que podem ser observadas na BNCC (BRASIL, 2017), é que a mesma refere-se às aprendizagens por competências (definida no documento como a mobilização de conhecimentos, conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida. Neste sentido, a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências, possuindo o compromisso com a educação brasileira, com a formação humana integral, assim como, com a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, fatores considerados essenciais para serem desenvolvidos no decorrer da Educação Básica.

No que se refere à Matemática do Ensino Fundamental a BNCC (BRASIL, 2017) aponta que, a mesma precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações, associando essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Desta forma, é esperado que os estudantes fossem capazes de desenvolver a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. Ao mesmo tempo, salienta que é nesta fase que a dedução de algumas propriedades e a elaboração de conjecturas precisa ser estimulada.

Ainda de acordo com o documento, o Ensino Fundamental precisa ter compromisso com o desenvolvimento do letramento matemático, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, ou seja, que os alunos precisam ser capazes de desenvolver a capacidade de formular, empregar e interpretar a Matemática em uma variedade de contextos.

Dentre as competências específicas de Matemática apontadas na BNCC (BRASIL, 2017, p.265) para o Ensino Fundamental, destacam-se: a) reconhecer que a Matemática é uma Ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas; b) desenvolver o raciocínio lógico, espírito de investigação e capacidade de produzir argumentos convincentes; c) compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática; d) fazer observações sistemáticas de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes; e) utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais, para modelar e resolver problemas cotidianos, validando estratégias e resultados; f) enfrentar situações- problemas em múltiplos contextos; g) desenvolver e discutir projetos; h) desenvolver trabalhos coletivos no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder questionamentos na busca de soluções para problemas.

A BNCC apresenta os conhecimentos matemáticos, estruturados em cinco unidades temáticas - Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística. Em cada unidade temática são apresentados os objetos do conhecimento pertinentes e destacadas as habilidades a serem desenvolvidas. Particularmente, neste trabalho, apresenta-se uma análise produzida em duas unidades temáticas: Geometria, e Grandezas e Medidas, considerando que na própria BNCC estas unidades aparecem entrelaçadas ao longo de diferentes situações no decorrer do Ensino Fundamental, embora o foco da análise fosse a Geometria.

Assim, no que se refere à Geometria, a BNCC (BRASIL, 2017) enfatiza o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. No caso, dos anos finais do Ensino Fundamental, o ensino e aprendizagem envolvem construções e representações, por meio de indução e o desenvolvimento do raciocínio lógico, intuitivo e hipotético dedutivo, por meio de aplicações e demonstrações, de forma articulada com outros conhecimentos. Neste contexto, destaca-se a importância de representações e comunicação em linguagem matemática (linguagem natural, numérica, simbólica, figural e gráfica), bem como um trabalho que permita desenvolver a capacidade de apresentar justificativas e construir argumentações.

Apresenta-se ainda, a necessidade de desenvolver aprendizagens com o auxílio de diferentes recursos didáticos e materiais, de maneira a despertar o interesse e apresentar um contexto significativo, para aprender e ensinar Matemática integrada a situações que propiciem a reflexão, tomada de decisão e apresentação de justificativas, necessários para a sistematização dos conceitos. Nesse contexto, faz-se necessário também, que os estudantes tenham a oportunidade de desenvolver a capacidade de abstração por meio de reelaboração de situações- problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento, apreendendo relações e significados, para aplicá- los em outros contextos.

Já na unidade temática Grandezas e Medidas é proposto o desenvolvimento do estudo de medidas e das suas relações, favorecendo a integração da Matemática com outras áreas do conhecimento. No que se refere aos anos finais do Ensino Fundamental, esta unidade reforça a necessidade de reconhecer comprimento, área, volume, ângulos e as demais grandezas associadas a figuras geométricas de forma a conseguir resolver problemas com o uso das diferentes unidades de medidas.

No que segue, são apresentadas as considerações sobre EOS, enfoque teórico adotado, com foco na dimensão epistêmica da Idoneidade Didática, os procedimentos metodológicos da investigação e a análise produzida.

2 | ASPECTOS DA ANÁLISE EPISTÊMICA NO ÂMBITO DO EOS

De acordo com Godino (2011) o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) se propõem analisar as relações entre o pensamento, a linguagem e as situações em que a atividade matemática ocorre. Para o autor, esse processo se constitui como um percurso de reflexão, análise e tentativa de unificar diferentes pressupostos sob aspectos ontológicos, epistemológicos, cognitivos e instrucionais do conhecimento matemático e da instrução matemática essencial para o seu desenvolvimento. Parte de uma visão da Matemática, que contempla um triplo aspecto: como atividade de resolução de problemas socialmente compartilhada, como linguagem simbólica e um sistema conceitual logicamente organizado (GODINO, 2011).

O EOS é composto por um conjunto de noções teóricas, entre as quais se destaca, aqui, a Idoneidade Didática, a qual pode ser útil na concepção, implementação e avaliação do processo de ensino e aprendizagem da Matemática (GODINO, 2011). Ainda, de acordo com o autor, a Idoneidade Didática é definida como a articulação coerente de sistêmica de seis dimensões: epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, emocional e ecológica.

Particularmente a análise aqui apresentada, tem como foco a Idoneidade Epistêmica, a qual Godino, Contreras e Font (2006) salientam que está relacionada, em um processo de estudo, ao grau de representatividade que há, do ponto de vista institucional, entre o significado atribuído a um objeto em relação a sua referência matemática. Refere-se ao conhecimento institucional, o qual é compartilhado dentro das instituições ou comunidades de prática, como se fossem redes de objetos.

Orientado pelos pressupostos do EOS a análise epistêmica realizada na BNCC segue as orientações dos componentes da idoneidade epistêmica a qual, de acordo com Godino (2011), propõe cinco elementos advindos das entidades primárias que caracterizam o modelo epistêmico- cognitivo no EOS: situações-problema, linguagem (elementos linguísticos e representacionais), regras (conceitos, definições, procedimentos), argumentos e relações. Tais elementos serão explicitados, na metodologia, a partir de indicadores que são propostos no âmbito do EOS e que foram tomados como referencia para a análise.

3 I PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A investigação, na qual a análise aqui apresentada se insere, está sendo conduzida em uma perspectiva qualitativa (CRESWELL, 2014), particularmente nos elementos da análise textual discursiva (MORAES & GALIAZZI, 2007), aliados aos constructos teóricos do Enfoque Ontossemiótico. A análise textual discursiva está organizada, de acordo com os autores, em quatro focos, sendo que os três primeiros constituem um ciclo inicial, desmontagem dos textos, estabelecimento de relações, seleção de informações pertinentes e, por fim, o ciclo de análise dos elementos seguindo um processo autorganizado.

No quadro da Figura 1, são colocados em destaque os componentes e indicadores da chamada Ferramenta de Análise Epistêmica, utilizada como referência na análise produzida.

Componentes	Indicadores
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propor situações de expressão matemática e interpretação.
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.

Figura 1- Ferramenta de Análise Epistêmica

Fonte: Godino (2011, p. 09, traduzido pelas autoras).

No que segue, são destacados os resultados provenientes da análise produzida no documento que apresenta a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, no que se refere, a Geometria desenvolvida nos anos finais do Ensino Fundamental, como já destacado.

4 I A GEOMETRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ANÁLISE EPISTÊMICA DA BNCC

Conforme já descrito, a BNCC encontra-se em vigor e estabelece as normativas educativas para as escolas de Educação Básica em todo o território brasileiro. A análise epistêmica da BNCC, apresentada a seguir, refere-se aos anos finais do Ensino Fundamental. A Base está organizada por áreas do conhecimento (Aritmética, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística), competências específicas das áreas, componentes curriculares e competências específicas de componente. Estas unidades temáticas definem um arranjo dos objetos de conhecimento, ao longo do Ensino Fundamental e as habilidades expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos dos diferentes contextos escolares.

No que se refere à unidade temática Geometria, a BNCC destaca que a mesma envolve “o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (BRASIL, p. 226, 2017). Esse tipo de pensamento é essencial para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos, sendo que, nessa etapa, a Geometria precisa ser consolidada de forma a promover a ampliação das aprendizagens.

Neste sentido, Fonseca (2009) contribui considerando que o trabalho com a Geometria é uma das melhores oportunidades que existe para aprender a matematizar a realidade, visto que, permite descobertas, construções e manipulações, possibilitando novas investigações. Nessa mesma linha de pensamento, Bulos (2011) enfatiza que a Geometria pode ser o caminho para o desenvolvimento de habilidades e competências necessárias para a resolução dos problemas do nosso cotidiano, visto que, o seu entendimento proporciona o desenvolvimento da capacidade de olhar, comparar, medir, predizer, generalizar e abstrair.

No quadro da Figura 2, é apresentada uma síntese da análise produzida nas unidades temáticas Geometria, e Grandezas e Medidas dos anos finais do Ensino Fundamental da BNCC, tomando com base os objetos do conhecimento e as habilidades a serem desenvolvidos, assim como, os componentes indicadores da Análise Epistêmica da Idoneidade Didática. Como já explicitado, a unidade temática Grandezas e Medidas foi percebida articulada à Geometria, motivo pelo qual fez parte da análise. No quadro, são destacadas evidências da presença, na BNCC, de cada um dos componentes epistêmicos propostos pela Idoneidade Didática, as quais não são as únicas encontradas ao longo do documento, mas um conjunto que se entendeu representativo dos mesmos.

Componentes	Evidências- BNCC
Situações-problema	- Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas de comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume. - Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão. - Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas. - Resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. - Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ ou triângulos, utilizando a equivalência entre área. - Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas. - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
Linguagem	- Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono. - Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e a construção de quadriláteros. - Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas. - Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e quadriláteros. - Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro. - Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área. - Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
Regras (definições, proposições, procedimentos)	- Reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º. - Reconhecer a rigidez geométrica de triângulos e suas aplicações. - Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos. - Reconhecer, representar e construir, no plano cartesiano, o simétrico de figuras geométricas. - Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.
Argumentos	- Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. - Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos. - Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. - Reconhecer a inclusão e a intersecção de classes.

Relações	- Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides. - Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos e classifica-los em regulares e não regulares. - Identificar características dos quadriláteros e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles. - Verificar relações entre os ângulos formados por retas cortadas por uma transversal. - Estabelecer relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência. - Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. - Identificar características dos triângulos, quadriláteros e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos; - Reconhecer a inclusão e a intersecção de classes.

Figura 2 - Análise Epistêmica da BNCC

Fonte: Brasil (2017, p. 299 - 317)

A análise permitiu perceber que, as orientações curriculares propostas pela BNCC (BRASIL, 2017) apontam para um conjunto significativo de situações-problemas envolvendo diferentes conceitos desenvolvidos ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental. Destaca-se, também, a presença das propostas de situações que articulam diferentes unidades temáticas, no caso a Geometria e Grandezas e Medidas, motivo pelo qual a análise foi realizada contendo essas duas unidades, como já indicado. Fica clara, também, a presença da Aritmética e da Álgebra, uma vez que as situações envolvem tratamentos que, muitas vezes, são de natureza aritmética e algébrica.

No que se refere ao componente epistêmico Linguagem, a análise apontou indícios da presença de diversos tipos de expressões matemática manifestadas em linguagem natural, numérica, algébrica, simbólica, figural e gráfica. Destaca-se, ainda, que o componente Regras se faz fortemente presente, sendo que os conteúdos indicados a serem estudados envolvem a construção de conceitos, o desenvolvimento de procedimentos e o entendimento e demonstração de proposições.

O componente epistêmico Argumentos se faz presente, notadamente, nos dois últimos anos do Ensino Fundamental, pois pode-se observar, a existência de indicativos para o trabalho com situações que envolvam argumentações, explicações, comprovações e demonstrações. Já no que se refere a Relações, a BNCC destaca os objetos geométricos a partir de situações, definições, proposições e procedimentos que se relacionam e se conectam entre si.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Embora analisados separadamente, os componentes da Idoneidade Epistêmica, mantêm estreitas relações e articulações o que foi percebido também nas habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental apontadas na BNCC.

A análise permitiu perceber a existência de evidências que apontam para a articulação das unidades temáticas Geometria, e Grandezas e Medidas na proposta de situações a serem resolvidas, bem como a presença dos componentes epistêmicos da Idoneidade Didática – situações- problemas, linguagem, regras, argumentos e relações. Considera-se que, tais componentes, estão presentes de modo equitativo na BNCC, sendo que argumentações e relações estão mais fortemente presentes nos últimos dois anos do Ensino Fundamental.

Por fim, destaca-se que foi possível perceber um gradual aprofundamento ao longo dos anos, com indicativos de que uma noção que é trabalhada intuitivamente em um ano, nos anos seguintes é retomada e aprofundada buscando uma conceitualização gradual.

REFERÊNCIAS

BULOS, A. M. M. O Ensino de Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. In: XIII CIAEM- IACME, Recife. **Anais**. Recife. 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)-** Anos Finais do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2017.

CRESWELL, J. W. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa: escolhendo entre cinco abordagens.** Tradução de Sandra Mallmann da Rosa. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2014.

FONSECA, M. da C. F. R., et al. **O ensino da Geometria na Escola Fundamental:** três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidade didáctica de processos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In: XIII CIAEM – IACME. **Anais.** Recife, 2011. Disponível em:<https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf>. Acesso em: 15 out. 2018.

GODINO, J. D.; CONTRERAS, Á.; FONT, V. **Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática.** Departamento de Didáctica de la Matemática.Universidad de Granada, 2006. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf>. Acesso em: 25 set. 2018.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. do C. **Análise Textual Discursiva**. Ijuí, RS: UNIJUI, 2007.

CAPÍTULO 18

HISTÓRIA E ENSINO DE MATEMÁTICA: RESULTADOS DO USO DE UM DIAGRAMA METODOLÓGICO NA GRADUAÇÃO

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 05 /07/2020

Jessie Heveny Saraiva Lima
Universidade do Estado do Pará
http://lattes.cnpq.br/4849031681811127

Miguel Chaquiam
Universidade do Estado do Pará
http://lattes.cnpq.br/9356361533701895

RESUMO: Apresentamos as visões de concluintes do curso de licenciatura em matemática a respeito da disciplina História da Matemática e do diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017), diagrama que baliza a composição de elementos para elaboração de textos que articulam a história geral, a história da matemática e os conteúdos matemáticos. Pra tanto, foi aplicado um questionário com perguntas abertas, dividas em dois blocos, cujas respostas foram categorizadas de acordo com os argumentos apresentados pelos respondentes. Justifica-se a avaliação do uso da história da matemática no ensino, tendo em vista o que apontam as pesquisas recentes nesta área, principalmente em relação as alternativas didáticas voltadas ao ensino de matemática. Os resultados apontam que a história da matemática não é vista como elemento importante na formação inicial e tão pouco como recurso didático nas aulas de matemática. Por outro lado o diagrama emerge como importantes elementos na elaboração de textos que envolvem história da matemática e conteúdos matemáticos com possibilidade de uso em sala de aula e as empirias apontam que o diagrama pode ser um importante elemento balizador na composição de textos que relacionam história e matemática a partir da eleição de tema/conteúdo. Além disso, a busca de elementos para compor o diagrama é um bom exercício de pesquisa na seleção de informações em diversos contextos e a produção textual um admirável treino frente a integração das informações de diferentes contextos num mesmo texto.

PALAVRAS-CHAVE: História da Matemática, História no Ensino de Matemática, História como Recurso Didático, Elaboração de texto com História e Matemática.

HISTORY AND TEACHING MATHEMATICS: RESULTS OF USING A METHODOLOGICAL DIAGRAM IN GRADUATION

ABSTRACT: We present the views of graduates of the degree course in mathematics regarding the History of Mathematics discipline and the methodological diagram proposed by Chaquiam (2017), a diagram that guides the composition of elements for the elaboration of texts that articulate the general history, the history of mathematics and mathematical content. For that, a questionnaire with open questions was applied, divided in two blocks, whose answers were categorized according to the arguments presented by the respondents. It is justified to evaluate the use of the history of mathematics in teaching, in view of what recent research in this area points out,

especially in relation to didactic alternatives aimed at teaching mathematics. The results show that the history of mathematics is not seen as an important element in initial formation and neither as a didactic resource in mathematics classes. On the other hand, the diagram emerges as important elements in the elaboration of texts that involve history of mathematics and mathematical contents with the possibility of use in the classroom, and the empiricies point out that the diagram can be an important guiding element in the composition of texts that relate history and mathematics from the choice of theme / content. In addition, the search for elements to compose the diagram is a good research exercise in the selection of information in different contexts and the textual production is an admirable training when integrating information from different contexts in the same text.
KEYWORDS: History of Mathematics, History in the Teaching of Mathematics, History as a Didactic Resource, Text elaboration with History and Mathematics.

INTRODUÇÃO

Há muitas pesquisas que relatam a importância da história no ensino de qualquer ciência segundo Balestri (2008) e, em particular, a História da Matemática que vem sendo incluída à prática pedagógica, considerada como uma ferramenta que poderá ajudar o aluno em seu processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Segundo Luiz e Col (2013), compete ao professor buscar alternativas didáticas que atraiam a atenção dos alunos, que despertem o interesse, mostrando a utilidade dos conceitos matemáticos numa relação entre teoria e prática. Além do mais, de acordo com Balestri (2008) o professor tem a função de determinar em qual aspecto a História da Matemática será associada à sua prática pedagógica.

> Cabe ao professor determinar em qual perspectiva a história da matemática será incorporada à sua prática pedagógica. Nesse processo é necessário que o professor tenha clareza das diferentes perspectivas e dos diferentes enfoques da participação da história da matemática na sala de aula, avaliando suas implicações pedagógicas. (BALESTRI, 2008, p. 2)

Nesse sentido, Balestri (2008) aponta a importância de o professor estar preparado para associar a História da Matemática ao Ensino de Matemática. Logo, o autor considera que as discussões sobre a História da Matemática devem fazer parte da formação de professores de matemática, pois é durante a licenciatura que se concentra a parte significa da formação dos futuros professores de matemática.

Miguel e Brito (1993) relatam que a História pode ajudar os futuros docentes a observar que o movimento de abstração e generalização por onde passam muitos conceitos e teorias não se devem as razões de ordem lógica, mas a interferência de outros discursos na constituição e no desenvolvimento do discurso matemático.

Em um estudo desenvolvido por Prado (1990), ele apresentou uma proposta ligada à preparação metodológica do professor de matemática a partir da compreensão dos períodos históricos como meio de encaminhamento das ações pedagógicas, procurando relacioná-las ao desenvolvimento cognitivo do aluno. Além de Prado (1990), Mendes (2001) também considera importante a preparação do professor, já que ele irá aplicar atividades usando a história do conteúdo, logo o professor deverá ter um aprofundamento acerca o conteúdo histórico.

> É de fundamental importância realizar uma preparação efetiva do professor que atuará com essa proposta de Educação Matemática, caso contrário correremos o risco de ver mais uma vez a matemática ser tratado como um meio de seleção escolar, além de continuarmos a fomentar a utilização de receitas prontas no ensino de matemática. (MENDES, 2001, p. 65)

Para Mendes (2001) é de fundamental importância que o professor esteja preparado para expor em suas aulas os conceitos matemáticos a partir da história, para que a os conteúdos matemáticos não sejam apresentados em sala de aula como receitas pontas e acabadas, que surgiram da mesma forma que já temos hoje.

Chaquiam (2017) afirma que ao concordar em ministrar aulas de História da Matemática, decidiu aprofundar seus estudos e que instruiria seus alunos mais sobre a História da Matemática e pesquisa em História, além de fazê-los enfrentar leituras que revelam uma realidade bem diferente daquela posta nos livros didáticos.

A partir de experiências iniciais, Chaquiam (2017) apresenta no XI Encontro Nacional de Educação Matemática (2007) os primeiros resultados. A partir desses resultados passou a desenvolver pesquisas relacionadas ao uso da História da Matemática como recurso didático, tendo em vista a possibilidade de ministrar a disciplina história da matemática a partir de personagens.

Chaquiam (2017) criou um diagrama metodológico, que sofreu alterações até chegar ao modelo atual, objetivando estabelecer caminhos à construção de textos que articulem história e conteúdos matemáticos, com demarcação de tempo e espaço para extrapolar a visão internalista à matemática, tendo em vista sua utilização em sala de aula durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, principalmente na educação básica e formação de professores.

O diagrama proposto destaca o saber matemático numa dinâmica multifacetada, estabelece conexões pluridisciplinar e sociocultural, além disso, discorre sobre a evolução do conteúdo matemático selecionado a partir da produção de um personagem, conectando esse personagem a contemporâneos seus, tomando por base a tríade contextual: sociocultural, pluridisciplinar e técnico-cientifico.

Diante desse contexto, surgiu o interesse em verificar qual a opinião de alunos concluintes do curso de Licenciatura de Matemática de uma universidade pública de Belém/PA, em 2018, sobre história da matemática antes de cursarem a disciplina

História da Matemática e sua avaliação sobre o uso do diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017) após a utilização deste.

O QUE PENSAM OS RESPONDENTES SOBRE A DISCIPLINA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E SOBRE O MODELO PROPOSTO POR CHAQUIAM (2017)

Nesta sessão são apresentados resultados coletados a partir da aplicação de um questionário e as discussões relativas aos questionamentos foram categorizadas de acordo com as respostas, separadas em dois bloco, o que pensam a respeito da citada disciplina e do digrama proposto por Chaquiam (2017).

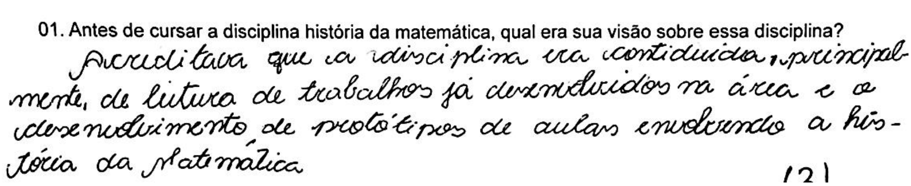
Iniciamos com dados referentes a disciplina História da Matemática, sobre a qual foram elaboradas duas perguntas, cujas justificativas deviam ser apresentadas em consonância com sua afirmativa ou negação. Para tais foram elaboradas categorias em harmonia ao constante nos questionários:

1ª Antes de cursar História da Matemática, qual era sua visão sobre essa disciplina?

i	Não viam a história da matemática como um recurso de ensino	05
ii	Compreendiam como uma disciplina importante para sua formação;	08
iii	Acreditava que a disciplina englobava apenas de leituras históricas acerca dos conteúdos;	27
iv	Não tinha uma boa visão sobre a disciplina, não a considerava importante para o ensino.	08

Fonte: Elaborado pelos autores, 2019.

Notemos que dos 48 alunos entrevistados, 27 acreditavam que a disciplina História da Matemática envolvia apenas leituras de textos sobe a histórica da matemática, ou seja, pensavam havia apenas uma revisão histórica sobre a origem dos conteúdos matemáticos, evidenciado numa das respostas abaixo:


01. Antes de cursar a disciplina história da matemática, qual era sua visão sobre essa disciplina?

Acreditava que a disciplina era constituída, principalmente, de leitura de trabalhos já desenvolvidos na área e o desenvolvimento de protótipos de aulas envolvendo a história da Matemática

(2)

Figura 1: Recorte das respostas apresentadas pelos alunos

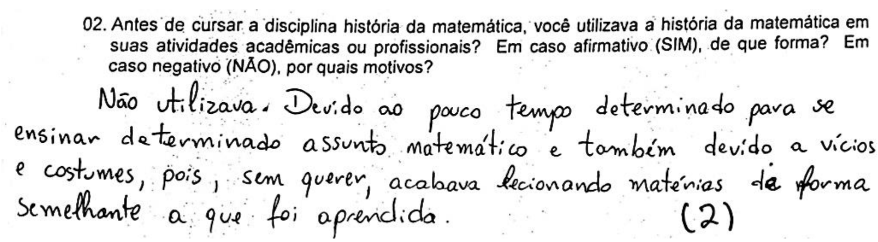
Fonte: Protocolos da pesquisa, 2018.

Porém, a disciplina história da matemática vai além do que pensavam os alunos, visto que para Miguel e Brito (1996) essa disciplina pode contribuir para as modificações das representações que estudantes e futuros professores têm da matemática, contribuindo para modificar a visão estática e unilateral que trazem consigo a respeito da natureza dos conteúdos matemáticos, fazendo-os perceber que a matemática se desenvolve não apenas através da acumulação de resultado e conquistas, mas passa por mudanças qualitativas ao longo dos anos.

2ª Antes de cursar a disciplina História da Matemática, você utilizava a história da matemática em suas atividades acadêmicas ou profissionais? Em caso (SIM), de que forma? Em caso (NÃO), por quais motivos?

i	Sim	13
ii	Não	35

Aproximadamente 73% não a utilizavam como recurso, e isso se davam por diversos motivos, a exemplos, por falta de conhecimentos históricos, por não considerar importante seu uso no ensino e, dentre outros, um aluno aponta que:


02. Antes de cursar a disciplina história da matemática, você utilizava a história da matemática em suas atividades acadêmicas ou profissionais? Em caso afirmativo (SIM), de que forma? Em caso negativo (NÃO), por quais motivos?

Não utilizava. Devido ao pouco tempo determinado para se ensinar determinado assunto matemático e também devido a vícios e costumes, pois, sem querer, acabava lecionando matérias da forma semelhante a que foi aprendida. (2)

Figura 2: Recorte das respostas apresentadas pelos alunos

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2018.

Apesar das contribuições que a História da Matemática pode trazer ao ensino, Chaquiam (2017) diz que é comum ouvir de alunos e professores que inserir a história da matemática nas aulas de matemática é um desperdício de tempo e esforço. Ainda há outros argumentos contrários ao uso da história da matemática nas aulas de matemática apontados por Vianna (1998, apud CHAQUIAM, 2017), como por exemplo, que o passado da matemática não é significativo à compreensão da matemática atual; o tempo desperdiçado no estudo da história da matemática deveria ser utilizado para aprender mais matemática e entre outros argumentos.

O QUE PENSAM SOBRE O MODELO PROPOSTO POR CHAQUIAM (2017)

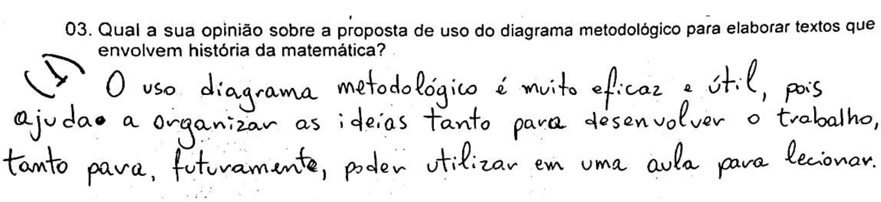
Oito perguntas foram elaboradas a respeito do modelo proposto por Chaquiam (2017), tanto sobre as contribuições que esse modelo pode oferecer quanto sobre as experiências que os alunos obtiveram a partir da elaboração de textos com base no diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017). Para cada pergunta foram elaboradas categorias de acordo com as respostas.

3ª Qual a sua opinião sobre a proposta de uso do diagrama metodológico para elaborar textos que envolvem história da matemática?

i	Relevante para a abordagem da História da Matemática.	48

Como podemos ver 100% dos alunos apontam que o modelo proposto por Chaquiam (2017) é relevante para a elaboração de textos que abordam História da Matemática, pois, segundo os alunos, o diagrama metodológico ajuda a compreender não somente a História da Matemática, bem como o processo evolutivo de determinados conteúdos matemáticos.

Além disso, há alunos que apontam que o uso do diagrama metodológico é muito eficaz e útil, pois, ajuda na organização das ideias para serem transpassadas para os textos e no momento da utilização desses textos em sala de aula. Outros dizem que o diagrama aborda uma proposta interessante, visto que, usufrui de contextos socioculturais, personagens contemporâneos, podendo ter um olhar mais amplo sobre o que ocorria no período histórico de cada conteúdo, como é apontado pela resposta de um dos alunos a seguir:


03. Qual a sua opinião sobre a proposta de uso do diagrama metodológico para elaborar textos que envolvem história da matemática?

(I) O uso diagrama metodológico é muito eficaz e útil, pois ajuda a organizar as ideias tanto para desenvolver o trabalho, tanto para, futuramente, poder utilizar em uma aula para lecionar.

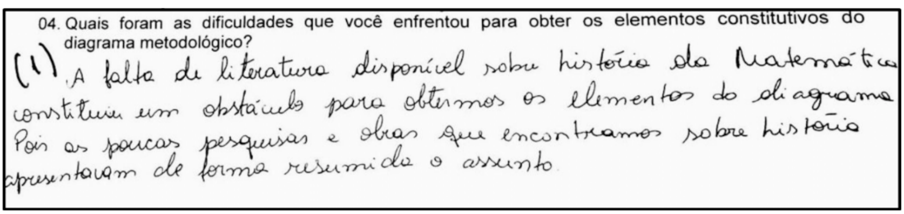
Figura 3: Recorte das respostas apresentadas pelos alunos

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2018.

4ª Quais foram as dificuldades que você enfrentou para obter os elementos constitutivos do diagrama metodológico?

i	Escassez de referencial teórico ou materiais didáticos;	36
ii	Obter alguns elementos do diagrama: contemporâneos e contexto sociocultural;	10
iii	Não obteve nenhuma dificuldade ou deixou em branco.	02

Setenta e cinco por cento dos alunos apontam a mesma dificuldade na obtenção dos elementos constitutivos do diagrama metodológico, além disso temos a escassez de referencial teórico ou materiais didáticos que abordem sobre a origem dos conteúdos matemáticos, suas transformações, personagem contribuintes e contemporâneos, como aposta a resposta de um dos alunos:


04. Quais foram as dificuldades que você enfrentou para obter os elementos constitutivos do diagrama metodológico?

(1) A falta de literatura disponível sobre história da Matemática constituiu um obstáculo para obtermos os elementos do diagrama Pois as poucas pesquisas e obras que encontramos sobre história apresentavam de forma resumida o assunto.

Figura 4: Recorte das respostas apresentadas pelos alunos

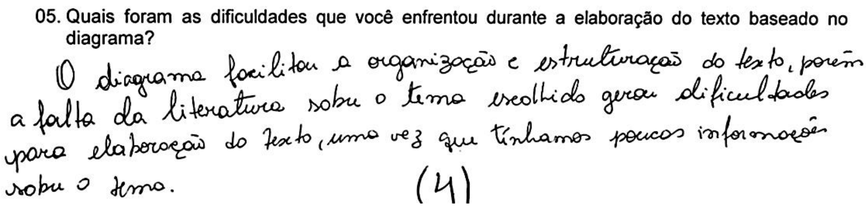
Fonte: Protocolos da pesquisa, 2018.

5ª Quais foram as dificuldades que você enfrentou durante a elaboração do texto baseado no diagrama?

i	Organizar o texto de acordo com o diagrama;	13
ii	Fazer algumas relações do conteúdo matemático com a história;	09
iii	Referências Bibliográficas;	21
iv	Não obteve nenhuma dificuldade ou deixou em branco.	05

Vinte e um alunos tiveram dificuldades na obtenção de referências bibliográficas, dificuldade semelhante ao questionamento anterior. A ausência de referenciais é um dos argumentos contrários ao uso da história da matemática apontado por Vianna (1998, apud CHAQUIAM, 2017), pois segundo esse autor não há literaturas disponíveis para uso dos professores, mas, como se pode observar essa dificuldade não é somente em textos para serem aplicados em sala de aula, mas como também textos para serem usados na elaboração de trabalhos científicos.

A seguir temos a resposta de um dos alunos a respeito da sua dificuldade na elaboração do texto a partir do diagrama metodológico:


05. Quais foram as dificuldades que você enfrentou durante a elaboração do texto baseado no diagrama?

O diagrama facilitou a organização e estruturação do texto, porém a falta da literatura sobre o tema escolhido gerou dificuldades para elaboração do texto, uma vez que tinhamos poucas informações sobre o tema. (4)

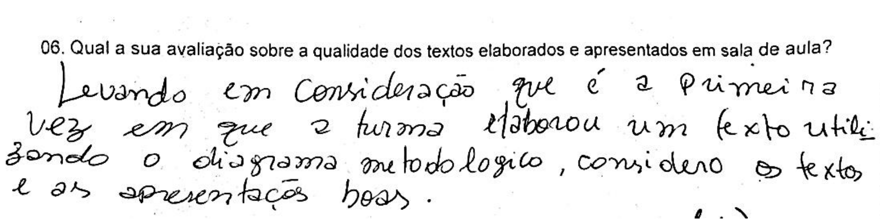
Figura 5: Recorte das respostas apresentadas pelos alunos

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2018.

6ª Qual sua avaliação sobre a qualidade dos textos elaborado/apresentado em sala?

i	Qualidade excelente dos textos;	07
ii	Qualidade boa dos textos;	33
iii	Qualidade razoável podendo melhorar.	07
iv	Em branco	01

Apesar das dificuldades encontradas na constituição do texto, os alunos acreditam que produziram bons textos, pois conseguiram organizar as ideias a partir do diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017). Alguns alunos levaram em consideração ao fato de terem elaborado o texto, a partir do diagrama, pela primeira vez e por terem conseguido consideraram seus textos bons, como aponta a resposta do aluno abaixo:


06. Qual a sua avaliação sobre a qualidade dos textos elaborados e apresentados em sala de aula?

Levando em consideração que é a primeira vez em que a turma elaborou um texto utilizando o diagrama metodologico, considero os textos e as apresentações boas.

Figura 6: Recorte das respostas apresentadas pelos alunos

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2018.

Outros disseram que apesar das dificuldades existentes para obtenção de informações sobre os temas, consideraram que os textos produzidos apresentaram resultados satisfatórios, alguns mais detalhados e mais elaborados que outros, porém, todos merecem o mérito de textos bem produzidos pelo empenho de cada um para a elaboração de seus textos.

7ª De que forma o texto elaborado a partir do diagrama pode ser explorado em sala?

i	Apresentar a origem e as transformações de cada conteúdo ao longo do tempo;	26
ii	Incentivar a estudar matemática por meio da história e facilitar a aprendizagem;	21
iv	Em branco.	01

As respostas foram divididas em duas categorias, na primeira apontam que os textos podem ser explorados a partir da apresentação da origem histórica dos conteúdos matemáticos e suas transformações ao longo do tempo e, na segunda, o texto pode incentivar o aluno a despertar o interesse pelo estudo do conteúdo matemático abordado, fato que pode contribuir para melhoria do processo de ensino e aprendizagem, exemplificado a seguir:

07. De que forma o texto elaborado a partir do diagrama pode ser explorado em sala de aula?

Pode-se iniciar a aula com o texto; apresentando a origem e como surgiu determinado tema, pois assim apresentaria ao aluno qual foi a necessidade que determinado tema veia atender, dessa forma trazendo para a realidade do aluno o tema. (1)

Figura 7: Recorte das respostas apresentadas pelos alunos

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2018.

A história da matemática é um recurso que pode ser utilizado para recorrer às origens dos conteúdos e trazer muitos benefícios para o processo de ensino e aprendizagem do aluno em sala de aula. De acordo com Luiz e Col (2013) esse recurso pode contribuir no entendimento dos conteúdos e seu processo de evolução, contribuir também para desmistificar a ideia de que a matemática é uma ciência pronta e acaba. Neste sentido, o texto elaborado pode ser utilizado como um recurso à incentivar os alunos a estudarem matemática, como apontado a seguir:

07. De que forma o texto elaborado a partir do diagrama pode ser explorado em sala de aula?

O TEXTO PODE DESPERTAR O INTERESSE DO ALUNO AO REVELAR AS ORIGENS DO CONTEÚDO, O PROBLEMA A PARTIR DO QUAL ELE SURGIU. ISSO PODE GERAR UMA NOVA VISÃO PARA O ALUNO, E ASSIM FACILITAR O APRENDIZADO DELE. (2)

Figura 8: Recorte das respostas apresentadas pelos alunos

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2018.

O primeiro argumento apresentado por de Miguel (1995) em “As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores” aborda discussão sobre a história como fonte motivadora para o ensino e aprendizagem de matemática, onde cita Evans (1976, apud MIGUEL, 1995) que aponta que os estudos sobre a motivação têm passado por mudança qualitativa com a mudança do enfoque mecanicista para cognitivo.

Há uma grande dificuldade e aceitação do uso da história no ensino, tanto pelos professores quanto pelos alunos, e isso, de acordo com Miguel (1993), se dá ao fato de não existir uma motivação para usar a história em sala de aula.

> Portanto, se a história, podendo motivar, não necessariamente motiva, e não motiva a todos igualmente e da mesma forma, parece-nos que a categoria ‘motivação’ constitui-se uma instância problemática de justificação para a incorporação da história no ensino. (MIGUEL, 1993, p. 70)

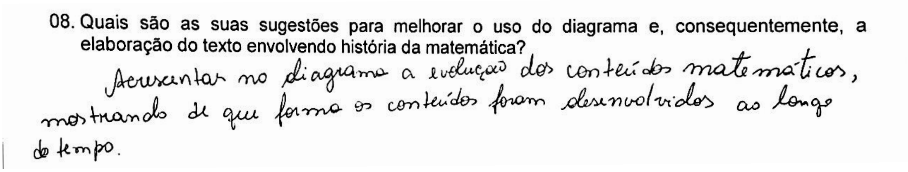
Pode-se associar essa desmotivação considerando que professores ao lecionarem sobre os conteúdos matemáticos não pensam em recorrer a história por diversos motivos, como por exemplo, ausência de referenciais, apontado anteriormente, por considerar uma falta de tempo e desperdício, como aponta Chaquiam (2017) em seus estudos, e tudo isso leva a uma desmotivação no momento da elaboração das aulas dos docentes.

8ª Quais são suas sugestões para melhorar o uso do diagrama e, consequentemente, a elaboração do texto envolvendo história da matemática?

i	Sugestões relacionadas à aplicabilidade em sala de aula, utilizando outros recursos além do diagrama e buscando uma interdisciplinaridade;	08
ii	Explorar mais a matemática e outras ciências a partir da história;	08
iii	Acrescentar mais tópicos ao diagrama ou explicar mais os que já têm;	18
iv	Sem sugestões, considerando o diagrama suficientemente bom;	11
v	Em branco	03

Embora haja certa contradição quanto a obtenção de materiais, percebe-se que há necessidade de incluir outros elementos para melhor esclarecer o diagrama e, consequentemente, a produção textual. Alguns apontam que seria relevante acrescentar tópico sobre a evolução do conteúdo matemático em questão.

A seguir, tem-se uma das respostas relativa ao questionamento feito:



08. Quais são as suas sugestões para melhorar o uso do diagrama e, consequentemente, a elaboração do texto envolvendo história da matemática?

Acrescentar no diagrama a evolução dos conteúdos matemáticos, mostrando de que forma os conteúdos foram desenvolvidos ao longo do tempo.

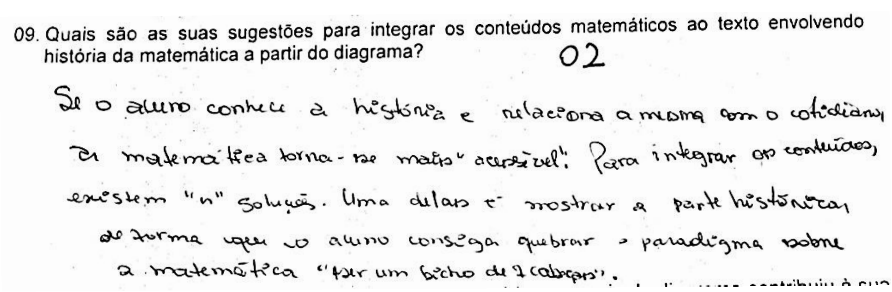
Figura 9: Recorte das respostas apresentadas pelos alunos

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2018.

9ª Quais são as suas sugestões para integrar os conteúdos matemáticos ao texto envolvendo história da matemática a partir do diagrama?

i	Tornar o conteúdo matemático ou texto mais acessível e mais interessante, a partir da história, para diferentes públicos;	14
ii	Elaborar atividades que usem a história da matemática, além de verificar suas aplicações em sala de aula;	06
iii	Apropriar-se inicialmente do conteúdo matemático para posteriormente abordar sua história ou vice versa;	18
iv	Sem sugestões, considerando a integração suficientemente boa;	07
v	Em branco	03

Notemos que há duas categorias que encaixam as respostas a respeito da integração dos conteúdos ao texto envolvendo história, um sugere tornar o conteúdo ou texto mais acessível e interessante para diferentes públicos, como apontado:



09. Quais são as suas sugestões para integrar os conteúdos matemáticos ao texto envolvendo história da matemática a partir do diagrama? 02

Se o aluno conhece a história e relaciona a mesma com o cotidiano, a matemática torna-se mais "acessível". Para integrar os conteúdos, existem "n" soluções. Uma delas é mostrar a parte histórica de forma que o aluno consiga quebrar o paradigma sobre a matemática "ser um bicho de 7 cabeças".

Figura 10: Recorte das respostas apresentadas pelos alunos

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2018.

Gomes (2009) afirma que a história da matemática pode contribuir no aprofundamento do conteúdo, esclarecer dúvidas e superar dificuldades. Nesse contexto, aliado a recursos didáticos e metodológicos pode surgir uma forma diferenciada de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, atrativa e criativa, podendo minimizar algumas dificuldades e dúvidas dos alunos.

Sabe-se que professores devem ser habilitados, tanto em conteúdo quanto em história para concordar com Mendes (2001) quando considera importante a preparação do professor para evitar o uso de formas prontas, conforme exposto seguir:

09. Quais são as suas sugestões para integrar os conteúdos matemáticos ao texto envolvendo história da matemática a partir do diagrama?

Acredito que antes de se escrever o texto didático o discente/docente deva primeiro aprofundar seu conhecimento matemático do conteúdo o qual pretende ensinar. Assim, posteriormente, procure as origens e desenvolvimento histórico sobre o conteúdo em questão.

Figura 11: Recorte das respostas apresentadas pelos alunos

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2018.

10ª De que forma essa abordagem da história da matemática por meio do diagrama contribuiu à sua formação acadêmica e profissional?

i	Ao desenvolver uma nova perspectiva sobre a importância do uso da história da matemática no ensino;	14
ii	Na compreensão de como utilizar a história da matemática como um recurso de ensino em sala de aula ou em futuras pesquisas;	22
iii	A melhor compreender sobre as transformações que a matemática ao longo dos anos;	11
iv	Em branco	01

De acordo com as respostas, o diagrama contribui na compreensão de como utilizar a história da matemática nas aulas como recurso no ensino, mas também, para balizar pesquisas, dentre as formas de utilização pode-se citar as origens dos conteúdos, suas transformações, e assim fazer com que o aluno possa compreender o conteúdo matemático de forma eficaz e simples, como apontado a seguir:

10. De que forma essa abordagem da história da matemática por meio do diagrama contribuiu à sua formação acadêmica e profissional?

A abordagem da história da matemática por meio do diagrama, contribuiu para um melhor entendimento de como abordar a história dos conteúdos matemáticos de forma que o sujeito que irá receber tal informação, possa entender de forma eficaz e simples. Evidenciando a história como um importante recurso metodológico.

Figura 12: Recorte das respostas apresentadas pelos alunos

Fonte: Protocolos da pesquisa, 2018.

De acordo com Chaquiam (2017) muitas pesquisas relacionadas à História das Ciências vêm sendo desenvolvidas ao longo do tempo, em particular, a História da Matemática, que vem sendo considerada uma importante ferramenta para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, permitindo compreender as origens das ideias que deram forma à matemática que temos hoje, podendo observar diversos aspectos de seu desenvolvimento e perceber que as teorias que hoje aparecem prontas e acabadas vieram de grandes esforços e desafios enfrentados por muitos matemáticos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retratou-se o que pensam alunos concluintes de um curso de Licenciatura em Matemática em 2018, de uma universidade pública de Belém do Pará, a respeito da disciplina História da Matemática e do diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017), a partir dos dados coletados por meio de questionário aberto aplicado por 48 concluintes.

As categorias foram apresentadas em quadros, acompanhadas das respostas com maior incidência e, por fim, analisadas e discutidas. Além disso, foi possível diagnosticar o que os alunos pensavam da disciplina antes de cursa-la e analisar as experiências relativas ao constructo proposto por Chaquiam (2017).

Considerando que o curso de licenciatura está relacionado à formação inicial de professores de matemática, essa forma de pesquisa aponta esse constructo como um meio eficaz para aproximar os alunos da história da matemática num primeiro momento, além de contribuir para a desmistificação de que história da matemática está restrita a nomes, datas e fatos.

Os resultados da utilização desse modelo metodológico nos revelam uma melhoria na elaboração textual, inclusive em relação aos textos que envolvem história e matemática. Também apontam sua eficácia, uma vez que os textos apresentam maior integração da história e com a matemática, e coesão e coerência, visto que os textos produzidos apresentam-se mais consistentes e harmoniosos, entretanto, negativamente observa-se que ainda faltam aprofundamentos no que tange a integração de atividades abordando a temática e seu uso em sala de aula.

Recentemente Chaquiam (2020) reiterou que o diagrama proposto não está endereçado aos historiados de profissão ou matemáticos com experiência em história da matemática, entretanto, orienta a elaboração de um texto que contempla uma abordagem multicontextual, proporciona a integração da história e matemática e fornece uma visão global aos iniciantes da historicidade do conhecimento científico.

Por fim, notamos que a disciplina História da Matemática era vista pelos alunos de uma maneira diferente do que realmente deve ser. Além disso, percebe-se a eficácia do diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017), visto que pode contribuir à produção de textos na área de Educação Matemática com a inserção da História da Matemática no ensino de Matemática.

REFERÊNCIAS

BALESTRI, R. D. ***A participação da História da Matemática na Formação de Professores de Matemática na Óptica de Professores/Pesquisadores.*** Universidade Estadual de Londrina – UEL, 2008.

CHAQUIAM, M. ***Ensaios Temáticos: história e matemática em sala de aula*** **Belém**: SBEM-PA, 2017.

CHAQUIAM, M. ***Historia y Matemáticas integradas de un diagrama metodológico.*** Revista Paradigma. v. 41. Nº Extra 1. Maracay, Venezuala. Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma, 2020.

GOMES. ***Professor, Licenciado em matemática e aluno do curso de pós-graduação em metodologia do ensino de matemática e física***, da UNINTER, 2009.

LUIZ, E. A. J; COL, L. ***Alternativas metodológicas para o ensino de matemática visando uma aprendizagem significativa: educação matemática no ensino médio.*** ULBRA – canoas- Rio Grande do Sul, 2013.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. ***História nas aulas de Matemática****: fundamentos e sugestões didáticas para professores*. Belém: SBHMat, 2016.

MENDES, I, A. ***O uso da história no ensino da Matemática****: reflexões teóricas e experiências*. Belém (PA): EDUEPA, 2001.

MIGUEL, A. ***As potencialidades pedagógicas da História da Matemática em questão****: argumentos reforçadores e questionadores*. Anais do I seminário Nacional de História da Matemática. Recife: SBHMat, 1995.

MIGUEL, A. ***Três estudos sobre história e educação matemática***. Campinas, São Paulo 1993. 274p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, SP, 1993.

MIGUEL, A; BRITO, A. J. ***A História da Matemática na formação do professor de matemática***. Cadernos CEDES – História e Educação Matemática. Campinas: Unicamp, 1996.

PRADO, E. L. B. ***História da Matemática****: um estudo de seus significados na educação matemática*. Rio Claro, 1990. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade do Estado de São Paulo, Rio Claro, 1990.

CAPÍTULO 19

A MATEMÁTICA X UMA PRÁTICA INTERDISCIPLINAR

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 05/06/2020

Keith Gabriella Flenik Morais
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba
Curitiba - Paraná
http://lattes.cnpq.br/6086080242702025
https://orcid.org/0000-0002-5862-8963

Angelita Minetto Araújo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba
Curitiba - Paraná
http://orcid.org/0000-0001-8469-5978
http://lattes.cnpq.br/1442938401919340

Tiago Skroch de Almeida
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba
Curitiba - Paraná
http://lattes.cnpq.br/7885560727280335

RESUMO: Este trabalho refere-se à descrição e análise de duas experiências vivenciadas pelos autores: a primeira sendo um projeto aplicado a três turmas de primeiro ano do ensino médio do Colégio Estadual Guarda Mirim do Paraná e a segunda um minicurso como uma adaptação deste mesmo projeto como proposta de ensino aos licenciandos da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba. O estudo teve como objetivo verificar que relações poderíamos estabelecer sobre um mesmo projeto, embora aplicado a dois públicos distintos e, que dificuldades e/ou facilidades cada um dos dois grupos apresentariam. Tanto a proposta do projeto aplicado aos estudantes do colégio quanto aos licenciandos da Universidade foi a de mobiliar uma casa e representá-la numa planta baixa, numa perspectiva interdisciplinar (POMBO, 2003) e de Modelação Matemática (BIEMBENGUT, 2014). Para a realização do estudo utilizamos a abordagem qualitativa de pesquisa, sendo este um estudo de caso (ANDRÉ, 2005). Como resultados do presente estudo, foi possível perceber que, enquanto os estudantes do ensino médio apresentaram dificuldades: nas operações; com conexão à internet; e distrações com questões que não diziam respeito ao projeto; os licenciandos apresentaram-se focados, autônomos, com facilidade nos exercícios de matemática, mas com dificuldades em olhar criticamente para a proposta escolar. Neste sentido, nota-se que para o ensino médio é fundamental a realização de atividades fora do contexto escolar, do cotidiano do estudante, e que com o projeto, as “contas” passaram a ter mais sentido e representação; e, para o ensino superior esta foi uma oportunidade formativa como futuros professores.

PALAVRAS-CHAVE: Interdisciplinaridade, Modelação Matemática, ensino médio, formação de professores.

THE MATHEMATICS X AN INTERDISCIPLINARY PRACTICE

ABSTRACT: This work refers to the description and analysis of two experiences lived by the authors: the first one is about a project applied

to three first-year classes at High School Guarda Mirim from Paraná and the second one is an adaptation of it as a teaching proposal for undergraduates from Federal Technological University of Paraná, Campus Curitiba. The study's objective was to verify what relationships we could establish about the same project, but applied to two different audiences and, also, what difficulties and / or facilities each one of these groups could present. The purpose to both groups was compose a house with furniture, appliances and decorations and represent it on a floor plan, in an interdisciplinary perspective (POMBO, 2003) and Mathematical Modeling (BIEMBENGUT, 2014). We used the qualitative research approach, more specifically a case study (ANDRÉ, 2005), to execute this study. Analyzing the results, this experiences show that while high school students had difficulties with math accounts, with internet connection and distractions from outside the project; the undergraduates presented focus, autonomy and good math skills but with difficulties to see the school proposal in a critical way. Therefore, it is clear the importance of unusual activities: to high school's students the accounts admited meaning and representation; to university's students, it was a professional qualification opportunity as future teachers.
KEYWORDS: Interdisciplinarity, Mathematical Modeling, high school, teacher training.

1 I INTRODUÇÃO

Formar-se Professor de Matemática atualmente não é tarefa fácil, e não nos formamos apenas assistindo aulas na Universidade, é preciso estudar muito, fazer cursos de formação, participar de eventos, escrever artigos, cumprir muitas horas de Estágio Supervisionado ou participar do Programa Residência Pedagógica.

Nessa perspectiva, durante as atividades pertinentes ao Estágio Supervisionado do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Curitiba (UTFPR-CT), surgiu a necessidade de elaborar um projeto diferenciado para os estudantes dos 1os anos do Ensino Médio, denominados Pelotão de Aspirantes (PAS), do Colégio Estadual Guarda Mirim do Paraná, localizado em Curitiba/PR. Este projeto surgiu a partir das dificuldades dos estudantes apresentadas durante as regências sobre os conteúdos de progressão aritmética e geométrica, os conteúdos abordados envolviam números decimais em exercícios ou resolução de problemas ligados a situações reais.

O projeto foi intitulado "Competição InterPAS: mobiliando uma casa" – Competição porque do modo como foi pensado e combinado com as turmas que fizeram parte do projeto, acabou virando uma competição saudável entre as turmas do 1º ano do ensino médio. Esse projeto ocorreu no final do ano letivo de 2017.

O professor regente do Colégio Estadual foi colega de turma da estagiária que desenvolveu o projeto com os estudantes na turma e autor do presente artigo.

2 I METODOLOGIA

Este projeto se desenvolveu na abordagem de Pesquisa Qualitativa, segundo Oliveira (2014, p. 37), por ser este, “um processo de reflexão e análise da realidade através da utilização de métodos e técnicas para compreensão detalhada do objeto de estudo.” Dentre os tipos de pesquisa destacados, segundo André (2005) classificamos este estudo como estudo de caso, pela

> ... capacidade de retratar situações da vida real, sem prejuízo de sua complexidade e de sua dinâmica natural. (...) são valorizados pela sua capacidade heurística, isto é, por jogarem luz sobre o fenômeno estudado, de modo que o leitor possa descobrir novos sentidos, expandir suas experiências ou confirmar o que já sabia. (ANDRÉ, 2005, p. 34).

Ao todo, o projeto foi desenvolvido em seis etapas para a coleta dos dados, as quais consistiam em: i. Arrecadar doces; ii. **Atividade 1**: Resolução de exercícios; iii. **Atividade 2:** Orçamento de móveis e eletrodomésticos; iv. **Atividade 3**: Orçamento de produtos perecíveis; v. Elaborar a planta baixa da casa; vi. **Atividade 4:** Representar a planta humanizada e o corte do cômodo.

Para Amaral (2019?), plantas baixas humanizadas são recursos utilizados para tornar mais didático os projetos às pessoas leigas. Em outras palavras, elas contêm “… a representação de móveis, da circulação, dos revestimentos e das pinturas, dos objetos decorativos e demais acessórios do espaço, das portas e janelas, pontos hidráulicos, áreas e medidas.” (AMARAL, 2019?).

Além disso, o corte do cômodo é uma representação da construção ele “(...) busca mostrar a dimensão vertical de uma edificação. Como se fosse uma fatia, pode mostrar os andares, a altura, o pé-direito e outros detalhes que não são representados na planta baixa.” (BRASIL, 2014?, grifos do autor).

3 I O COLÉGIO

O colégio apresentava características singulares, como as disciplinas de “Formação Cidadã e Profissional” no período da tarde dos cursos integrais de Ensino Médio (MORAIS; ALMEIDA; ARAÚJO, 2018, p. 1) e, por isso, contribuiu para a criação e execução do projeto.

> Como o Ensino Médio nesse Colégio passou a funcionar em 2016 e o estágio foi realizado em 2017, o Projeto Político Pedagógico ainda não estava concluído, bem como as ementas de algumas disciplinas fora da grade curricular obrigatória. Deste modo, os professores tinham a liberdade para elaborar propostas de trabalho de acordo com a realidade e necessidade de cada turma. (MORAIS; ALMEIDA; ARAÚJO, 2018, p. 2).

Além disso, o colégio contava com o apoio de instituições profissionalizantes e com a presença do Batalhão Militar dentro do ambiente escolar para regimento e formação cidadã dos estudantes.

> O perfil do colégio é militar e profissionalizante, mesmo não sendo uma escola técnica. Desde 2005, mantém convênio com o Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial (SENAC) e com o Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial (SENAI), com o intuito de inserir os estudantes no mercado de trabalho devidamente instruídos, oferecendo-lhes uma oportunidade de emprego. Entretanto, somente, a partir de 2017 o Batalhão da Polícia Militar passou a atuar no colégio, com a função “de ministrar disciplinas de cidadania e civismo, e também de acompanhar a rotina dos estudantes, coordená-los, orientá-los, supervisioná-los e até puni-los quando se faz necessário” (MORAIS, 2017, apud MORAIS; ALMEIDA; ARAÚJO, 2018, p. 2).

Favorecidos por estas circunstâncias e devido às dificuldades apresentadas pelas turmas de primeiros anos do Ensino Médio pela necessidade de se trabalhar com números decimais, durante regências sobre progressões aritméticas e geométricas, surgiu à oportunidade para trabalhar com esses conteúdos embora, inseridos em uma situação real.

Assim, optou-se pela abordagem de ensino por projetos devido à possibilidade dos estudantes aprenderem a se organizar, trabalhar em grupo, planejar e se comunicarem com os pares, além de realizar tarefas em comum. Segundo Hernandez e Ventura (1998) a Pedagogia de Projetos possibilita a interdisciplinaridade, ou seja, o conhecimento não é exclusividade de uma única disciplina, o papel do professor é ir além. Por meio de projetos há a possibilidade de trabalhar uma diversidade de conteúdos relacionando-os interdisciplinarmente, como por exemplo, com: Língua Portuguesa e Artes. Nesse sentido, consideramos imprescindível, expor o que entendemos por interdisciplinaridade, ainda que, de acordo com Pombo (2003), falar sobre este termo seja algo difícil, principalmente pelo termo já estar gasto.

> (...) a interdisciplinaridade é um conceito que invocamos sempre que nos confrontamos com os limites do nosso território de conhecimento, sempre que topamos com uma nova disciplina cujo lugar não está ainda traçado no grande mapa dos saberes, sempre que nos defrontamos com um daqueles problemas imensos cujo princípio de solução sabemos exigir o concurso de múltiplas e diferentes perspectivas. (POMBO, 2003, p. 4).

Este projeto além de ter características interdisciplinares (POMBO, 2003) também se aproximava da metodologia de Modelação Matemática (BIEMBENGUT, 2014, p. 30). Assim, tornou-se uma possibilidade de aprimorá-lo, ser uma oportunidade de formação para os licenciandos e objeto de estudo para nós.

4 | DESCREVENDO O PROJETO

O projeto consistia em realizar pesquisas de orçamentos para mobiliar, decorar, abastecer uma casa e representar numa planta baixa os seus respectivos cômodos. Deste modo, as turmas foram divididas em grupos com 4 ou 5 estudantes, por meio de sorteios. Em cada turma os grupos ficaram responsáveis por um cômodo da casa e receberam uma quantia fictícia em “cheque“ para mobiliar o cômodo, essa quantia deveria ser administrada durante toda a competição.

Os grupos organizaram-se em quatro ou cinco integrantes e sortearam um dos cômodos de uma casa: quarto de casal/suíte; banheiro da suíte; banheiro, quarto de solteiro; lavanderia/área de serviço; cozinha; escritório; sala de estar; e sala de jantar. Além do cômodo sorteavam um cheque fictício com valor variando entre um a cem mil reais (FIGURA 1) para administrá-lo durante toda a competição, este valor deveria ser gasto para: mobiliar, abastecer e decorar os respectivos cômodos. (MORAIS; ALMEIDA; ARAÚJO, 2018, p. 4).

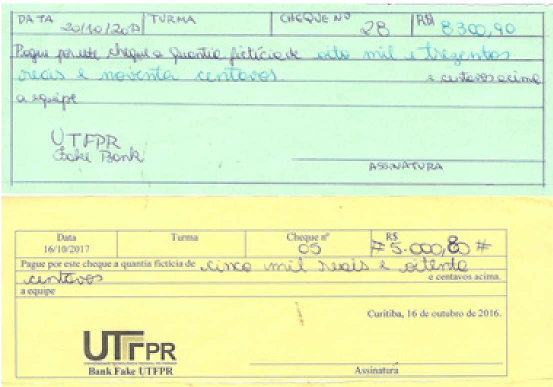


FIGURA 1 – EXEMPLOS DE CHEQUES FICTÍCIOS

FONTE: Autoria própria (2017).

Ao todo, o projeto foi elaborado em seis etapas e com quatro atividades inclusas. Para cada atividade foi destinada uma aula específica para explicar seus respectivos conteúdos e apresentar exemplos de como elaborá-las. Durante toda a competição, os estudantes arrecadaram doces para a premiação final (etapa 1), como uma forma de motivação. As atividades tiveram início na etapa (2): “Atividade 1: Resolução de Exercícios”, cuja atividade continha 32 exercícios sobre adição, subtração, multiplicação, divisão e equações com números decimais, para o grupo resolvê-las. (MORAIS; ALMEIDA; ARAÚJO, 2018, p. 5).

As etapas 3 e 4 foram realizadas no laboratório de informática da escola, pois destinavam-se as pesquisas: os estudantes precisaram utilizar o valor fictício recebido no cheque para fazer orçamentos de móveis e eletrodomésticos na Atividade 2 para mobiliar seu cômodo. Em seguida, precisaram utilizar seu saldo para equipar e decorar seu respectivo cômodo na Atividade 3, fazendo orçamento de produtos perecíveis e utilitários domésticos. (MORAIS; ALMEIDA; ARAÚJO, 2018, p. 5).

Para as etapas 5 e 6, os estudantes trabalharam com representações dos objetos que orçaram (móveis, eletrodomésticos, decorações), ou seja, precisaram desenhar e elaborar a planta baixa de uma casa em uma folha A3 (parte componente da Atividade 3) e, por fim, desenhar a planta humanizada e do corte de seus cômodos (ambas componentes da Atividade 4). (MORAIS; ALMEIDA; ARAÚJO, 2018, p. 5).

> 6ª etapa*:* Atividade 4: Representação da planta humanizada e do corte. Após a confecção da planta em A3, foram feitas três cópias da planta baixa em folhas A1 da casa de cada turma: duas para recortar os cômodos e distribuir às equipes e a terceira para os recortes serem colados depois. Os tamanhos dos cômodos variaram de acordo com a elaboração das plantas, mas maioria apresentava-se menor que uma folha A4. Eles deveriam representar nessa planta todos os móveis e eletrodomésticos que foram escolhidos na 3ª etapa, isto é, fazer a planta humanizada do seu cômodo. Também foi solicitado que os estudantes apresentassem o corte do seu cômodo. Como os estudantes já haviam estudado em Artes a perspectiva dos objetos acabaram por fazê-lo aqui também, e não o corte. (MORAIS; ALMEIDA; ARAÚJO, 2018, p. 5).

Na perspectiva interdisciplinar, nota-se a Língua Portuguesa presente durante as Atividades 2 e 3, ou seja, as duas atividades de pesquisa de orçamentos de móveis, eletrodomésticos (FIGURA 2), produtos perecíveis e de utilidades domésticas (FIGURA 3), pois, além da lista de compras ser considerada um gênero textual (KARWOSKI, 2001), existiu a interpretação textual e de dados destes objetos. Nesse sentido, sem as ferramentas, ou seja, o conhecimento da Língua Portuguesa para fazer a interpretação, leitura, pesquisa e análise não conseguiríamos ter realizado a atividade de Matemática.

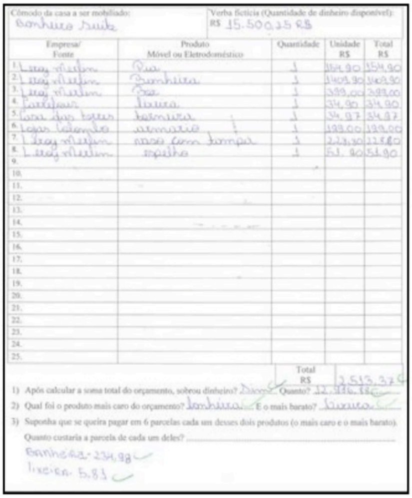


FIGURA 2 - ATIVIDADE 2:
BANHEIRO SUÍTE

FONTE: Autoria própria (2017).

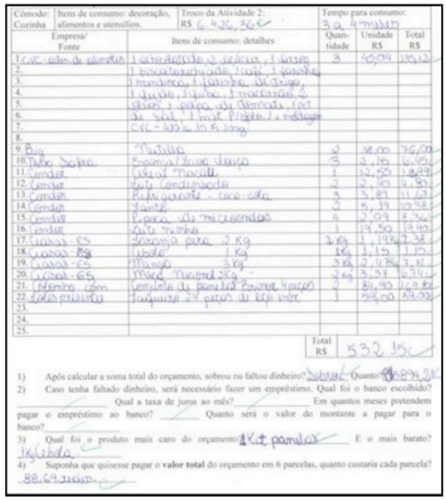


FIGURA 3 - ATIVIDADE 3: COZINHA

FONTE: Autoria própria (2017).

Karwoski (2001) assim se refere à interdisciplinaridade dos gêneros textuais:

> (...) o estudo dos gêneros textuais é uma fértil área interdisciplinar, com atenção especial para o funcionamento da língua e para as atividades culturais e sociais. Desde que não concebamos os gêneros como modelos estanques nem como estruturas rígidas, mas como formas culturais e cognitivas de ação social corporificadas de modo particular na linguagem, veremos os gêneros como entidades dinâmicas. (KARWOSKI, 2001, p. 25).

Na relação interdisciplinar com Artes, a professora da disciplina colaborou e trabalhou conjuntamente nas últimas atividades do projeto, ou seja, se debruçou sobre as elaborações das plantas baixas – Atividade 3, as plantas humanizadas (FIGURA 4) e os cortes dos cômodos – Atividade 4 (FIGURAS 5 e 6) cujos objetivos eram reproduzir os objetos que haviam orçado para mobiliar estes espaços. E, sobre esta etapa do projeto assim se referiu:

> Muito interessante a abordagem dos cortes propostos aos alunos para dar um “norte” para elaboração dos trabalhos. E a planta humanizada traz à luz o cotidiano de cada aluno com sua contribuição particular e mais próximo da realidade dele. Assim a Matemática, o desenho, a Arte e a visão do todo só pode ser reunida e contribuir para uma melhor aprendizagem de vários conceitos como espacialidade, bidimensionalidade, tridimensionalidade, escalas, medições entre outros. (RIBAS apud MORAIS, 2017, p. 82).

FIGURA 4 – PLANTA HUMANIZADA, TURMA 2º PAS

FONTE: Autoria própria (2017).

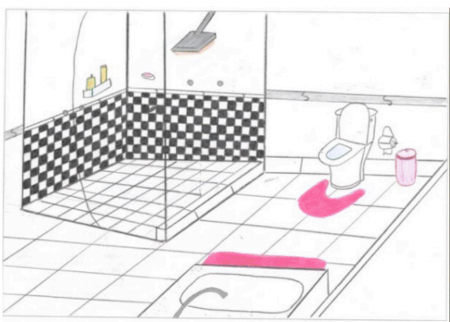


FIGURA 5 - CORTE DO BANHEIRO SUÍTE, 3º PAS

FONTE: Autoria própria (2017).

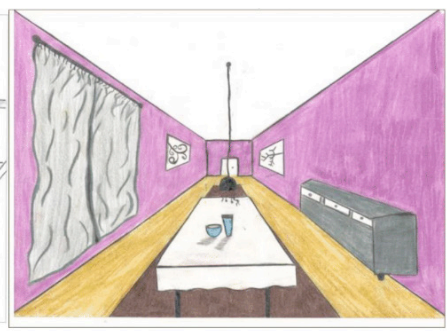


FIGURA 6 - CORTE DA SALA DE JANTAR, 3º PAS

FONTE: Autoria própria (2017).

As equipes foram classificadas conforme as pontuações na competição, e essa pontuação foi utilizada para compor a nota da disciplina “Matemática como Formação Cidadã e Profissional”. Ao longo da competição, as notas eram atualizadas, conforme as etapas iam avançando, e os critérios de avaliação (organização, cálculo e pesquisa, trabalho em equipe e cumprimento de prazos). Todos os critérios foram apresentados logo no início e as notas eram atualizadas e expostas em sala de aula, deste modo todos tinham consciência de seus rendimentos e podiam melhorar suas notas. (MORAIS; ALMEIDA; ARAÚJO, 2018, p. 6).

5 | DISCUSSÃO TEÓRICA

Embora o projeto seja interdisciplinar e trate de uma situação real, pode ser considerado uma situação de Modelagem Matemática? Para responder a esta questão, apoiamo-nos primeiro às concepções de modelo e modelagem de Biembengut (2014):

> Um modelo é um conjunto de símbolos os quais integram entre si representando alguma coisa. Essa representação pode se dar por meio de desenho ou imagem, projeto, esquema, gráfico, lei matemática, dentre outras formas. Na matemática, por exemplo, um modelo é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduzem de alguma forma, um fenômeno em questão. (BIEMBENGUT, 2014, p. 20).

Esta representação passa por um sistema de processos, desde a sua observação, até interpretação e efetivação. Este conjunto de atividades denomina-se de modelagem (BIEMBENGUT, 2014, p. 21):

> Modelagem é o processo envolvido na elaboração de modelo de qualquer área do conhecimento. Trata-se de um processo de pesquisa. A essência deste processo emerge na mente de uma pessoa quando alguma dúvida genuína ou circunstância instigam-na a encontrar uma melhor forma para alcançar uma solução, descobrir um meio para compreender, solucionar, alterar, ou ainda, criar ou aprimorar algo. E em especial, quando a pessoa tem uma percepção que instiga sua inspiração. (BIEMBENGUT, 2014, p. 21).

A esta concepção de Biembengut (2014) agregam-se às concepções de Bassanezzi (2011) sobre Modelagem Matemática: “A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”. (BASSANEZI, 2002, p. 16).

De acordo com a autora, o percurso da modelagem apresenta três fases: Fase 1: Percepção e Apreensão; Fase 2: Compreensão e Explicitação; Fase 3: Significação e Expressão. A Fase 1 refere-se à aproximação com a situação-problema e identificar os fatores necessários para resolvê-lo. A Fase 2 “subdivide-se em formulação do problema, formulação do modelo e resolução.” (BIEMBENGUT, 2014, p. 24). Em outras palavras, é a fase de explicitação de dados relevantes, identificação das variáveis, formulações matemáticas (modelos) e resolução.

> Este modelo pode conter um conjunto de expressões aritméticas e/ou algébricas, representações gráficas ou geométricas, aplicações computacionais. Uma vez modelada, resolvemos a situação-problema a partir do modelo e realizamos a aplicação. (BIEMBENGUT, 2014, p. 24).

A terceira e última fase trata-se da validação dos resultados obtidos na fase anterior, ou seja, interpretá-los e avaliá-los a fim de verificar seus significados. É importante, também nesta fase, que tanto o processo quanto a conclusão sejam escritos de forma acessível para possíveis interessados.

Ademais, a autora diferencia Modelagem Matemática de Modelação Matemática, enquanto Modelagem Matemática pode ser tomada como método científico de pesquisa, a Modelação Matemática depende e adequa-se das circunstâncias escolares para acontecer, isto é, em suas próprias palavras:

> Denomino de ***modelação matemática*** ao modelo que se utiliza das fases do processo da modelagem na Educação formal, com a estrutura vigente: currículo, período, horário, espaço físico, números de horas-aula por período letivo, número de estudantes por classe, dentre outros aspectos. A modelação orienta-se pelo ensino do conteúdo curricular (e não curricular) a partir de reelaboração de modelos matemáticos aplicados em alguma área do conhecimento e, paralelamente, pela orientação dos estudantes à pesquisa. (BIEMBENGUT, 2014, p. 30).

Deste modo, retoma-se a questão inicial: o projeto “Competição InterPAS: Mobiliando uma casa” pode ser considerado uma situação de Modelagem Matemática? Conforme os teóricos aqui apresentados anteriormente, não, pois os estudantes não passaram pelas Fases 1 e 3, ou seja, de observar, problematizar, interpretar e validar a modelagem. Em outras palavras, se tomarmos como questão disparadora “o que é necessário para se elaborar uma planta humanizada?”, os estudantes não puderam iniciar essa discussão, pelo contrário, receberam as etapas prontas de como procedê-la e não puderam discutir sobre os resultados que chegaram com os demais colegas de turma.

No entanto, as plantas humanizadas realizadas pelas turmas podem ser consideradas como modelos (BIEMBENGUT, 2014, p. 20): apesar de não terem sido tratados conteúdos de proporção e escala, os estudantes puderam representar em forma de ilustração as pesquisas que realizaram ao longo do projeto sobre móveis, eletrodomésticos, produtos perecíveis, utilitários domésticos e de decoração.

Em síntese o projeto teve grande aceitação pela escola e pelos estudantes. Tanto que se tornou inspiração para elaboração de um minicurso para formação de professores no curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR-CT. E, dando sequência a esse trabalho, em agosto de 2018, o projeto “Competição InterPAS: Mobiliando uma Casa” passou por adaptações para tornar-se um minicurso de dois encontros de quatro horas. O minicurso manteve sua essência de elaborar, abastecer e representar uma casa, ou seja, elaborar uma planta humanizada, mas teve como objetivos: inserir os licenciandos em um contexto real escolar, propor uma possibilidade de ensino para a metodologia de Modelação Matemática (BIEMBENGUT, 2014, p. 30) e proporcionar um momento de análise, reflexão e discussão com futuros professores.

A partir das duas aplicações com dois públicos distintos, poderíamos levantar algumas questões: Que relações poderíamos estabelecer sobre um mesmo projeto aplicado a dois públicos distintos? Que dificuldades e facilidades cada um dos dois grupos apresentaria?

Sobre estas questões apresentamos a seguir a proposta do minicurso.

6 I MINICURSO: UMA ADAPTAÇÃO PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Como o projeto teve grande aceitação pelos estudantes e pela equipe escolar e também trouxe bons resultados, tornou-se inspiração para elaboração de um minicurso para formação de professores no curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR-CT.

A partir das reflexões teóricas sobre Modelação e Modelagem Matemática de Biembengut (2014) e Bassanezi (2002), o projeto foi reestruturado com objetivos diferentes, sem perder a essência de se elaborar uma planta humanizada de uma casa.

Tendo como base Biembengut (2014) que sugere a elaboração da planta baixa de uma casa a partir da Modelação Matemática e com a experiência vivenciada nas aulas de estágio supervisionado, elaboramos um minicurso para licenciandos da UTFPR. Neste minicurso abordou-se os conteúdos de geometria (figuras geométricas, retas, pontos, ângulos); escala; área; perímetro; proporção (BIEMBENGUT, 2014); operações com números decimais; interpretação e preenchimento de tabelas. Na proposta original da autora, o intuito é elaborar uma planta baixa, entretanto, esse não foi o propósito do minicurso visto que, os licenciandos receberam uma planta baixa (feita por uma das turmas do PAS) e o intuito era mobiliá-la.

O minicurso, denominado de “Mobiliando uma Casa: Uma aproximação com a Modelação Matemática”, foi realizado em agosto de 2018 durante a II Semana das Licenciaturas, na UTFPR-CT e contou com a participação de 27 estudantes da Licenciatura de Física, Química, Letras, entretanto a maioria dos inscritos era da Licenciatura em Matemática.

Assim como o projeto realizado na escola, os licenciandos dividiram-se em grupos e sortearam cômodos e cheques fictícios para administrar durante os dois encontros do minicurso (Quadro 1). No entanto, não foi possível dar as devidas atenções e profundidade à cada fase definida por Biembengut (2014) devido ao período curto de tempo para realização do minicurso.

O minicurso iniciou-se com a apresentação do projeto, da proposta e de conceitos de Modelagem, Modelação Matemática e as categorias de Modelagem

Matemática (BIEMBENGUT, 2014; BASSANEZI, 2011). Em outros termos, aqui iniciou-se a Fase 1 definida por Biembengut (2014), onde foram dadas a situação-problema e a contextualização: o objetivo prático do minicurso era mobiliar uma casa e ilustrá-la.

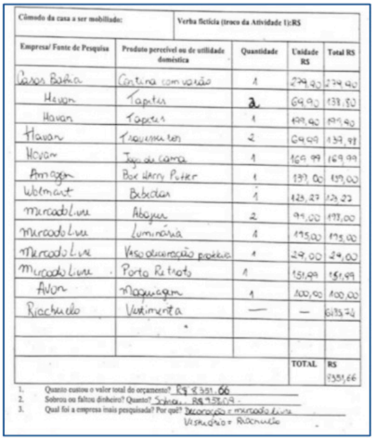
Cômodo da casa a ser mobiliado	Verba fictícia (R$)	Número de integrantes
Banheiro (normal)	13.015,15	4
Banheiro suíte	9110,10	6
Cozinha	100.000,00	5
Escritório	10.125,00	7
Quarto de casal	15.500,25	5

QUADRO 1 – GRUPOS DE LICENCIANDOS

FONTE: Autoria própria (2018).

Em seguida, foram apresentados possíveis questionamentos para a Fase 2 (BIEMBENGUT, 2014): “O que é necessário para abastecer uma casa? E para representá-la? De que formas podemos representá-la? Que ferramentas matemáticas podemos utilizar?”. Para a realização desta, os licenciandos receberam duas atividades: (i) Orçamento de móveis e eletrodomésticos (FIGURA 7) e (ii) Orçamento de produtos perecíveis e utilitários domésticos (FIGURA 8).

Similares às Atividades 2 e 3 do projeto realizado na escola, os licenciandos fizeram uso do *notebook*, celular, *tablet* ou catálogos impressos para fazer os orçamentos e preencher as tabelas com as seguintes informações: fonte/empresa; nome do móvel ou eletrodoméstico; medidas (comprimento, altura e profundidade); valor da unidade; quantidade necessária; total (para cada objeto) e algumas questões de cálculo e interpretação de tabela.

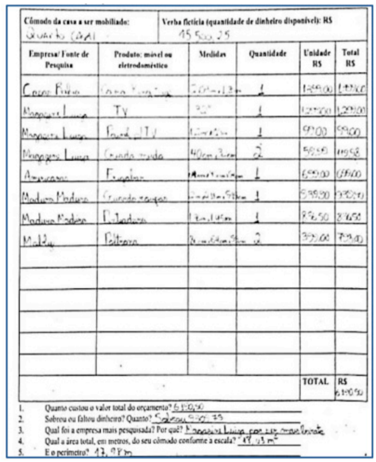


Cômodo da casa a ser mobiliado:		Verba fictícia (troco da Atividade 1):R$		
Empresa/ Fonte de Pesquisa	**Produto perecível ou de utilidade doméstica**	**Quantidade**	**Unidade R$**	**Total R$**
Casas Bahia	Cortina com varão	1	279,90	279,90
Havan	Tapetes	2	69,90	139,80
Havan	Tapetes	1	199,90	199,90
Havan	Travesseiros	2	69,99	139,98
Havan	Jogo de cama	1	169,99	169,99
Amazon	Box Harry Potter	1	139,00	139,00
Walmart	Bebedouro	1	123,27	123,27
mercado livre	Abajur	2	99,00	198,00
mercado livre	Luminária	1	195,00	195,00
mercado livre	Vaso decoração	1	29,00	29,00
mercado livre	Porta Retrato	1	151,99	151,99
Avon	Maquiagem	1	100,00	100,00
Riachuelo	Vestimenta	—	—	6135,74
			TOTAL	R$ 7351,66

1. Quanto custou o valor total do orçamento? R$ 8351,66
2. Sobrou ou faltou dinheiro? Quanto? Sobrou... R$ 9358,09
3. Qual foi a empresa mais pesquisada? Por quê? Decoração = mercado livre Vestuário = Riachuelo

FIGURA 7 – (I) ATIVIDADE: QUARTO CASAL

FONTE: Autoria própria (2018).



Cômodo da casa a ser mobiliado: Quarto Casal		Verba fictícia (quantidade de dinheiro disponível): R$ 15 500,25			
Empresa/ Fonte de Pesquisa	**Produto: móvel ou eletrodoméstico**	**Medidas**	**Quantidade**	**Unidade R$**	**Total R$**
Casas Bahia	[illegible]	[illegible]	1	1459,00	1459,00
Magazine Luiza	TV	[illegible]	1	1299,00	1299,00
Magazine Luiza	Painel p/ TV	[illegible]	1	99,00	99,00
Magazine Luiza	Criado mudo	[illegible]	2	59,59	119,58
Americanas	[illegible]	[illegible]	1	699,00	699,00
Madeira Madeira	Guarda roupas	[illegible]	1	939,90	939,90
Madeira Madeira	Penteadeira	[illegible]	1	836,50	836,50
Mobly	Poltrona	[illegible]	2	399,00	798,00
				TOTAL	R$ 6190,50

1. Quanto custou o valor total do orçamento? 6190,50
2. Sobrou ou faltou dinheiro? Quanto? Sobrou 9309,75
3. Qual foi a empresa mais pesquisada? Por quê? Magazine Luiza [illegible]
4. Qual a área total, em metros, do seu cômodo conforme a escala? 17,03 m²
5. E o perímetro? 17,98 m

FIGURA 8 – (II) ATIVIDADE: QUARTO CASAL

FONTE: Autoria própria (2018).

Para a Fase 3 (BIEMBENGUT, 2014), os licenciandos puderam elaborar a planta humanizada de seu cômodo (FIGURAS 9 e 10), mas diferentemente do projeto do ensino médio, aqui enfatizou-se a utilização da escala, dada por 1:16 pelos ministrantes. Outra diferença com o projeto escolar, os licenciandos não precisaram criar uma planta baixa, eles utilizaram a planta baixa elaborada pelo 1º PAS pois era a planta de maior área.

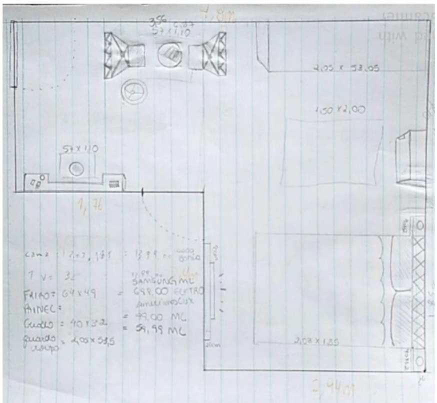


FIGURA 9 – RASCUNHO: QUARTO DE CASAL

FONTE: Autoria própria (2018).

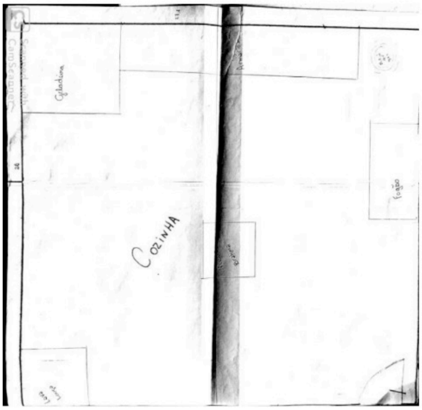


FIGURA 10 – RASCUNHO: COZINHA

FONTE: Autoria própria (2018).

Os licenciandos desenvolveram as atividades com muita empolgação, não tiveram dificuldades em se organizar, em realizar as tarefas, em fazer os cálculos. Pelo que pudemos observar a maior dificuldade do grupo não estava na Matemática, ou seja, nos conteúdos e sim em como fazer para ensinar aqueles conteúdos se estivessem em uma sala de aula "real". Que era a proposta original de trabalho, de onde tinha saído a problemática em questão.

7 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da perspectiva de prática interdisciplinar (POMBO, 2003) os estudantes do ensino médio e licenciandos tiveram a oportunidade de mobiliar os cômodos de uma casa e trabalhar com os conteúdos matemáticos relacionados à outras disciplinas como Língua Portuguesa e Artes, além de outras áreas tais como Designer, Arquitetura, Administração e Economia. Essa inter-relação entre áreas foi riquíssima para desmistificar a compartimentalização disciplinar.

Infelizmente, alguns obstáculos foram encontrados nas turmas de ensino médio como "acesso lento ou nulo à internet; quantidade insuficiente de computadores para os grupos; distrações com *sites* de jogos*, whatsapp, youtube* e jogos de futebol ao vivo *online*." (MORAIS; ALMEIDA; ARAÚJO, 2018, p. 8) os quais necessitavam de intervenção e auxílio frequente do professor regente e da estagiária.

Por outro lado, foi possível perceber o envolvimento dos estudantes, tanto entre eles como com a matemática. A constatação da validade se deu no momento em que os estudantes começaram a discutir sobre como empregar o dinheiro recebido para dar conta de realizar o que a atividade exigia. Nesses momentos, percebemos um amadurecimento tanto matemático quanto pessoal, em questões relacionadas à: leitura; interpretação; escrita; qualidade do produto x preço; preço x condição de pagamento (à vista ou a prazo); planejamento financeiro; operações com decimais (adição, subtração, multiplicação, divisão, juros; geometria; interpretação e resolução de problemas; proporção; medidas; planta baixa. Durante as atividades realizadas constatamos que os estudantes sentiram bastante dificuldade na atividade de resolução de exercícios, em representar os cômodos na planta humanizada e muita facilidade em realizar as pesquisas de preços dos produtos na *internet.*

> Para o professor, a produção de textos em matemática auxilia a direcionar a comunicação entre todos os alunos da classe; a obter dados sobre os erros, as incompreensões, os hábitos e as crenças dos alunos; a perceber concepções de vários alunos sobre uma mesma ideia e obter evidências e indícios sobre o conhecimento dos alunos. (SMOLE; DINIZ, 2001, p. 31).

No ensino superior, os estudantes demonstraram foco, autonomia, prazer na execução e solicitaram minimamente a intervenção dos ministrantes do minicurso já que apresentavam facilidade em matemática. Entretanto os grupos tiveram dificuldade nos momentos de discussão: não conseguiam vislumbrar esse projeto na realidade escolar, isto é, projetar um olhar reflexivo sobre o projeto. O objetivo era que os licenciandos vislumbrassem as possíveis dificuldades que os estudantes poderiam passar por esse processo ou de que modo o projeto poderia ser melhorado para que os estudantes aprendessem mais.

Considera-se que ao propor atividades diferenciadas, tanto para o ensino médio quanto para o ensino superior, que fujam do formato em que estão acostumados, o professor incita a curiosidade e desperta o interesse deles. Durante o desenvolvimento dessas duas aplicações, os estudantes e licenciandos resolveram diversos problemas matemáticos, os quais se originaram das pesquisas que realizaram e pela necessidade de conquistar os objetivos. Deste modo, os futuros professores tiveram uma oportunidade formativa de criar condições para modelar enquanto os cálculos passaram a ter mais significado para os estudantes de ensino médio.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, M. E. D. A. de. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional**. Série Pesquisa, v. 13. Brasília: Líber Livro, 2005.

AMARAL, L. **Planta humanizada:** Guia completo. Arquiteto Leandro Amaral: 2019?. Disponível em: <https://arquitetoleandroamaral.com/o-que-e-planta-humanizada-e-como-fazer-uma/> Acesso em: 04 jun. 2020.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática No Ensino Fundamental.** Blumenau: Edifurb, 2014.

BRASIL, Conselho de Arquitetura e Urbanismo do. **Corte.** CAU/BR: 2014?. Disponível em: < https://arquiteturaurbanismotodos.org.br/corte/#:~:text=Como%20planta%20e%20fachada%2C%20o,s%C3%A3o%20representados%20na%20planta%20baixa.> Acesso em: 04 jun. 2020.

GONZATTO, M. **Por que 89% dos estudantes chegam ao final do Ensino Médio sem aprender o esperado em matemática?** Disponível em: < https://gauchazh.clicrbs.com.br/geral/noticia/2012/10/por-que-89-dos-estudantes-chegam-ao-final-do-ensino-medio-sem-aprender-o-esperado-em-matematica-3931330.html>. Acesso em: 15 fev. 2018.

HERNANDEZ, F.; VENTURA, M. **A organização do currículo por projetos de trabalho**: O conhecimento é um caleidoscópio. 5 ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

KARWOSKI, A. M. et all. **Gêneros Textuais**: reflexões e ensino. 4 ed. São Paulo: Parábola Editorial, 2011.

MORAIS, K. G. F. **Relatório Descritivo e Analítico-Reflexivo:** Estágio Supervisionado B. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. Curitiba, 2017.

MORAIS, K. G. F; ALMEIDA, T. A. S. de; ARAÚJO, A. M. **Matemática x formação cidadã**: mobiliando uma casa... In: VII Jornada Nacional de Educação Matemática, 7., 2018, Passo Fundo/RS. *Anais*... Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2018, Eixo 4 - Práticas e Intervenções na Educação Básica e Superior, Relato de Experiência, nº 40. Disponível em: < http://docs.upf.br/download/jem/Trabalhos2018/Eixo4/RE_097-090-529-77-versao-indentifacada.pdf> Acesso em: 28 mai. 2020.

OLIVEIRA, M. M. de. **Como fazer Pesquisa Qualitativa.** 6 ed. Petrópolis, RJ: Vozes. 2014.

POMBO, O. **Epistemologia da Interdisciplinaridade**. Seminário Internacional Interdisciplinaridade, Humanismo, Universidade, Faculdade de Letras da Universidade do Porto, 12 a 14 de novembro 2003. Disponível em: <http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/investigacao/portofinal.pdf >. Acesso em: 15 mar. 2018.

SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. **Ler, escrever e Resolver Problemas:** Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CAPÍTULO 20

O USO DE JOGOS PARA O ESTUDO DE FUNÇÕES AFINS E FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Data de aceite: 26/08/2020
Data de submissão: 05/06/2020

Ana Lorena Miranda Gomes
Universidade Federal do Piauí – UFPI
União-PI
http://lattes.cnpq.br/4268924998159581

Éllen Beatriz Araújo da Silva
Universidade Federal do Piauí – UFPI
União-PI
http://lattes.cnpq.br/7933639950384014

Francisco das Chagas Ferreira Carvalho
Universidade Federal do Piauí – UFPI
União-PI
http://lattes.cnpq.br/1045120128439497

Maria Iêda Rodrigues de Oliveira Silva
Universidade Federal do Piauí – UFPI
União-PI
http://lattes.cnpq.br/2219798594956086

Wanderson de Oliveira Lima
Universidade Federal do Piauí – UFPI
União-PI
http://lattes.cnpq.br/9311077970913766

RESUMO: Este artigo apresenta o relato de uma experiência que utiliza jogos para o melhor aprendizado dos discentes nas aulas de Matemática, abordando os assuntos Função Afim e Função Quadrática, tendo em vista a demonstração da eficácia dessa metodologia de ensino, sendo esta aplicada aos alunos do ensino médio do CETI Professor José Amável pelos bolsistas do PIBID do curso de Licenciatura em Matemática/UFPI.

PALAVRAS-CHAVE: Função Afim, Função Quadrática, Jogos Matemáticos.

THE USE OF GAMES FOR THE STUDY OF AFFINE FUNCTIONS AND QUADRATIC FUNCTIONS

ABSTRACT: This article presents an report of an experience that uses games for the best learning of students in Mathematics classes, approaching the subjects Affine Function and Quadratic Function, in order to demonstrating the efficiency of this teaching methodology, which is applied to students from the High School of CETI Professor José Amável by the PIBID scholarship holders of the Mathematics Degree Course / UFPI.

KEYWORDS: Affine Function, Quadratic Function, Mathematical Games.

1 I INTRODUÇÃO

O uso de jogos como metodologia de ensino na Matemática favorece a aproximação dos alunos com a aplicação do conteúdo estudado, possibilitando que os educandos participem de forma direta da construção do próprio conhecimento. Reflexão, investigação, ação, participação, são habilidades desempenhadas no decorrer desse tipo de atividade, o que muito enriquece o processo de aquisição do assunto em estudo.

Aliado a essa perspectiva, o presente trabalho tem como intuito mostrar as atividades desenvolvidas pelos bolsistas através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID, que permite aos bolsistas o contato inicial com a docência. As atividades foram realizadas no CETI Professor José Amável com o apoio do coordenador Manoel Vieira e a supervisora Conceição Assis, sendo atendidos pelos bolsistas os alunos da 1ª série do ensino médio, a quem foram desenvolvidas atividades extraclasse.

As pessoas diariamente passam por situações que necessitam dos aprendizados matemáticos, já que a matemática está presente nas diversas áreas do conhecimento. Apesar de ser usada cotidianamente e fazer parte da vida das pessoas de forma direta e indireta, não é fácil mostrar aos alunos o quanto ela é importante, suas peculiaridades e aplicações para despertar neles o interesse em aprendê-la. Em busca de tornar seu ensino mais agradável e atrativo, pensa-se no uso de jogos na prática educativa. A utilização de jogos pode ser uma ferramenta útil para melhorar o processo de ensino e aprendizagem, além de tornar o trabalho educacional mais diversificado e dinâmico.

Percebendo que os alunos apresentavam dificuldades de concentração, raciocínio e compreensão de alguns conceitos básicos envolvendo o estudo de funções afim e quadrática, os bolsistas fizeram o uso de jogos, almejando atrelar os objetivos definidos pelo educador ao aspecto de promover a aprendizagem matemática didaticamente.

Foram elaborados dois jogos intitulados: "Responde ou Passa" e "Pescaria de Funções Quadráticas", envolvendo, respectivamente, funções afins e funções quadráticas.

2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Muitos educadores, pesquisadores e estudiosos idealizam os jogos como ferramenta indispensável para o ensino da matemática, tendo em vista que eles fazem com que o aluno interaja melhor com o assunto abordado. Reconhecendo que em quase todos os momentos do cotidiano a matemática é executada, percebe-se que nem sempre é fácil despertar o interesse dos alunos diante do estudo matemático.

Assim, Aranão (1996) defende que o jogo é um importante recurso metodológico que pode ser utilizado em sala de aula para desenvolver a capacidade de lidar com informações e criar significados culturais para os conceitos matemáticos. A utilização de jogos nas aulas auxilia os alunos a aprenderem a respeitar regras, a exercer diferentes papéis, a discutir e a chegar a acordos, a desenvolver a habilidade de pensar de forma independente e na construção de conhecimento lógico-matemático.

Borin (1998) também afirma que dentro da situação de jogo, é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, nota-se que, ao mesmo tempo em que os alunos falam de matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem. Desse modo, a resolução de problemas é a mais adequada para desenvolver uma postura crítica ante qualquer situação que exija resposta. Cada hipótese formulada ou cada jogada desencadeia uma série de questionamentos e um consequente aprendizado.

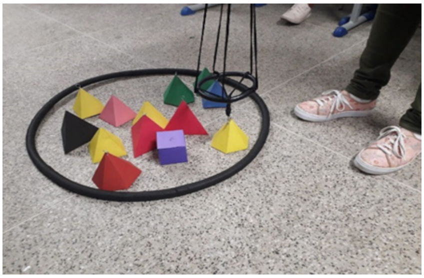
A introdução dos jogos nas aulas de matemática é uma possibilidade de diminuir os desafios apresentados por muitos dos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados de aprendê-la. Portanto, o objetivo dessa prática "transcende a simples ação lúdica do jogo pelo jogo, para se tornar um jogo pedagógico, com um fim na aprendizagem matemática-construção e/ou aplicação de conceitos" (GRANDO, 1995, p.35).

3 | METODOLOGIA

Foram trabalhados dois jogos distintos, tendo como objetivo principal a busca pela aprendizagem, reconhecendo que o aluno deve participar e interagir na elaboração de estratégias de resolução e na procura por soluções, organizando-se de acordo com as regras e normas estabelecidas. Desse modo, a metodologia foi aplicada com eficiência, visto que, no decorrer do desenvolvimento da atividade, os alunos ficaram mais atentos ao assunto abordado, demonstrando facilmente suas dúvidas e dificuldades em executar determinados cálculos dentro do referido conteúdo. Ao fazer isso, os alunos permitiram que os bolsistas identificassem suas dificuldades na compreensão da temática.

Para a execução do jogo "Responde ou Passa", a turma foi dividida em duas equipes, em que depois de uma disputa de par ou ímpar, a equipe vencedora iniciou o jogo. Logo após, deu-se a um membro da equipe uma caixa que continha perguntas relacionadas ao estudo de funções afins, na qual o aluno deveria retirar uma pergunta e responder junto com sua equipe, que se não soubesse a resposta, passaria a pergunta para a equipe adversária, as perguntas envolviam tanto conceitos da função como também alguns cálculos que poderiam ser resolvidos no quadro ou no caderno. Caso ninguém respondesse corretamente, ela seria explicada pelos bolsistas. Ao final do jogo, venceu a equipe que mais pontuou.

Já o jogo “Pescaria de funções quadráticas”, segue o mesmo padrão do jogo anterior. Todavia, em um bambolê, foram colocados símbolos matemáticos que tinham em seu interior perguntas que foram pescadas pelos alunos com a ajuda de um gancho. Eles recolhiam a pergunta e respondiam para os bolsistas e demais alunos, caso a equipe errasse a resposta, poderia passar o desafio ao outro grupo e não pontuaria. A equipe vencedora é tida como aquela com maior número de acertos.



4 I DISCUSSÃO E RESULTADOS

Os objetivos alcançados mostram a grandeza, eficácia e importância da busca por meios que proporcionem o bom desempenho dos alunos diante dos saberes matemáticos. Através dos jogos executados, foi notória a participação direta dos discentes no processo educativo, na qual estes desenvolveram conhecimento na área estudada, assim como, a oralidade, o trabalho em equipe, o diálogo, que, consequentemente, provoca e possibilita a fundamentação das definições trabalhadas e o aprimoramento dos conceitos matemáticos. Ao analisá-los, nota-se que aprenderam de fato a identificar, relacionar, diferenciar as funções afins e quadráticas, o que lhes permite discutir com facilidade a temática abordada, resolver questões e contextualizá-las.

Vale ressaltar a importância da pesquisa, do planejamento, do equilíbrio e organização do docente no decorrer dessa atividade. O professor torna-se mediador e deve interferir corretamente durante a execução dos jogos, para que assim, obtenha não somente as metas e finalidades pretendidas, mas também a potencialidade do jogo seja real.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao trabalhar com material concreto, os alunos da 1ª série do ensino médio demonstraram mais interesse pelas aulas de matemática voltadas ao estudo das funções afins e quadráticas. Os jogos desenvolvidos permitiram que os alunos compreendessem os conceitos básicos de funções e a diferença entre ambas. Proporcionou também o desenvolvimento de habilidades a partir de questões resolvidas no quadro. O jogo pôde ser aproveitado como instrumento motivador e dinâmico no processo de construção de conhecimentos, visto que facilitou seu desenvolvimento cognitivo, tendo em vista que os jogos matemáticos e a matemática recreativa são carregados de ludicidade.

Portanto, o uso dos jogos matemáticos para o estudo das funções afins e quadráticas mostrou-se como um fio condutor no aprimoramento do saber matemático, pois, através dele, os alunos se apropriaram de conhecimentos obtidos pela observação e vivência dos fatos, adquirindo as competências e habilidades esperadas.

APOIO

CAPES/UFPI

REFERÊNCIAS

A Importância dos Jogos no Ensino de Matemática. UOL. Disponível em:<https://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/a-importancia-dos-jogos-no-ensino-matematica.htm>. Acesso em: 18 Set. 2019.

ARANÃO, I. V. D. **A matemática através de brincadeiras e jogos**. Campinas: Papirus, 1996.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas:** uma estratégia para as aulas de matemática. 3.ed. São Paulo: IME/USP, 1998.

GRANDO, R. C. **O jogo suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem na Matemática**. 1995. 194 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

CAPÍTULO 21

ENSINO DE FATORAÇÃO: ALUNO APRENDENDO A FAZER MATEMÁTICA

Data de aceite: 26/08/2020

Data de submissão: 05/06/2020

Daniellen Costa Protazio
Universidade do Estado do Pará
Moju - Pará
http://lattes.cnpq.br/8302393991229224

Cinara Damacena Cardoso
Universidade do Estado do Pará
Abaetetuba – Pará
http://lattes.cnpq.br/7144011811126058

Aline Lorinho Rodrigues
Universidade do Estado do Pará
Abaetetuba – Pará
http://lattes.cnpq.br/6602720119096278

Danielle de Jesus Pinheiro Cavalcante
Universidade do Estado do Pará
Abaetetuba – Pará
http://lattes.cnpq.br/3299550194220478

Ashiley Sarmento da Silva
Universidade do Estado do Pará
Abaetetuba – Pará
http://lattes.cnpq.br/7441462727185859

Yara Julyana Rufino dos Santos Silva
Universidade do Estado do Pará
Moju – Pará
http://lattes.cnpq.br/3454281160985590

Camila Americo Neri
Universidade do Estado do Pará
Moju – Pará
http://lattes.cnpq.br/4391535086811495

Izabel Cristina Gemaque Pinheiro
Universidade do Estado do Pará
Moju – Pará
http://lattes.cnpq.br/8529654767042818

Odivânia Ferreira de Moraes
Universidade do Estado do Pará
Moju – Pará
http://lattes.cnpq.br/2853396161827616

Izaias Silva Rodrigues
Universidade do Estado do Pará
Abaetetuba – Pará
http://lattes.cnpq.br/4212691573503428

Priscila da Silva Santos
Universidade do Estado do Pará
Moju – Pará
http://lattes.cnpq.br/2240844963549424

Cristiane Matos Oliveira
Universidade do Estado do Pará
Moju – Pará
http://lattes.cnpq.br/8119440089202484

RESUMO: Este trabalho tem como objetivo mostrar ao aluno novas formas de aprendizado e fazer com que o mesmo construa o seu aprendizado em relação ao conteúdo de fatoração, por isso construímos uma atividade que fazia uso de emojis de WhatsApp para explica-lo, visto que é uma das coisas que fazem parte do cotidiano destes. Esta atividade foi impressa e distribuída aos alunos para resolvê-la de forma individual, o *locus* da pesquisa foi a E.M.E.F "Tia Érica Strasser" com alunos da turma de oitavo ano, sob a orientação dos bolsistas PIBID, foi

possível perceber durante a aplicação desta atividade alguns questionamentos, curiosidades dos alunos que só foram possíveis depois dessa atividade, favorecendo assim a construção de seu conhecimento. Diante disso, conclui-se que a tarefa de educar é bastante desafiadora diante dessa atual realidade, o professor precisa se reinventar, ser criativo, e para isso este precisa está apoiado pelo governo, escola, e principalmente pelos pais dos alunos.
PALAVRAS-CHAVE: Fatoração, Atividade Matemática, PIBID, Ludicidade.

FACTORING TEACHING: STUDENT LEARNING TO DO MATH

ABSTRACT: This work aims to show the student new ways of learning and make him build his learning in relation to the factoring content, so we built an activity that used whatApp emojis to explain it, since it is a of the things that are part of their daily lives. This activity was printed and distributed to students to solve it individually, the locus of the research was the municipal elementary school "Tia Érica Strasser" with students of the eighth grade class, under the guidance of PIBID fellows, it was possible to receive it during the application of this activity some questions, curiosities of students that were only possible after this activity, thus favoring the construction of their knowledge. Therefore, it is concluded that the task of educating is quite challenging in view of this current reality, the teacher needs to reinvent himself, be creative, and for this he needs to be supported by the government, the school, and especially by the students parents.
KEYWORDS: Factorization, math activity, PIBID, Playfulness.

1 | INTRODUÇÃO

Ensinar fatoração, na maioria das vezes é uma tarefa bastante delicada para o professor, visto que os alunos sentem bastante dificuldades em compreender esses assuntos.

" As macroavaliações apontam que a maioria dos alunos apresenta grande dificuldade em entender não apenas os conceitos, as definições, os teoremas, as aplicações envolvendo polinômios, mas também o processo de fatoração e sua relação com as raízes de polinômios" (LAUTESCHLAGER; RIBEIRO, 2017, p.238).

Este trabalho busca relatar uma experiência vivenciada com os alunos de oitavo ano da E.M.E.F Tia Érica Strasser, no município de Moju. Essa atividade buscava atrair o interesse do aluno para o conteúdo de fatoração, motivá-lo a buscar compreender o assunto ministrado e assim contribuir para melhor ensino-aprendizagem dos mesmos.

A atividade foi realizada devido ao vínculo com o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), designado por "A Formação de Novos Professores-Pesquisadores de Matemática em Contexto Amazônico no Baixo Tocantins", coordenado pelo professor Me. Rafael Silva Patrício, desenvolvido no primeiro semestre de 2019, na referida escola citada acima.

Durante esse período de experiência em sala de aula, foi preciso ter um olhar crítico em relação ao ensino - aprendizagem dos alunos, e dentre as que podemos observar está a falta de concentração dos alunos, e isso é um dos fatores que pode estar impedindo esse feedback professor-aluno, foi possível visualizar que são poucos os alunos que se concentram para resolver as atividades em sala de aula, precisando assim de intervenção, pois o saber precisa ser democrático.

D‘Ambrósio (1996, pg.80) afirma que “o novo papel do professor será o de gerenciar, de facilitar o processo de aprendizagem e naturalmente, de interagir com o aluno na produção e crítica de novos conhecimentos, e isso é essencialmente o que justifica a pesquisa”.

Pais (2006, p.28) torna essa ideia ainda mais consistente quando diz que “ o método e as estratégias de ensino têm a função de contribuir para que o aluno possa fazer matemática no contexto escolar, sob a coordenação do professor; é uma das finalidades mais expressivas da educação matemática”.

2 I JUSTIFICATIVA

Fazer com que o aluno por um instante olhe para uma determinada atividade de matemática e tenha curiosidades de buscar compreender o que está sendo proposto não é uma tarefa fácil para o professor, durante as aulas de matemática foi possível perceber alunos muitos dispersos, fazendo desenhos em seu corpo, jogando papel uns nos outros, decorando símbolos para se destacar no jogo de vídeo game, com álbuns de figurinhas de desenho animado etc.…enfim, de alguma forma sempre tinha algo que lhes chamava mais atenção do que a aula.

Isso nos conduziu a criar essa atividade, a priori o intuito era fazer algo que chamasse atenção dos mesmos, que despertasse sua curiosidade, e principalmente que estivesse intimamente relacionado ao meio no qual estão inseridos, que tivesse a linguagem destes.

Por isso essa atividade tinha como introdução os emojis de WhatsApp para ensinar fator comum. “Os pictogramas são elementos visuais que, na contemporaneidade, compõem um sistema de sinalização e comunicação. Sua natureza figurativa e lúdica tem a capacidade de comunicar mensagens complexas” (MORO, 2016, p.53).

Mulligan (1995) afirma que a manipulação de expressões polinomiais é uma técnica essencial; no entanto, como qualquer atividade que exige prática, pode tornar-se repetitiva e monótona. Em outro trecho esta mesma autora destaca que uma coleção de alguns fatos surpreendentes permite ao aluno descobrir e então demonstrar esses fatos, usando aritmética dos polinômios.

3 I DESENVOLVIMENTO

Este trabalho foi realizado por discentes do 5° (quinto) semestre do curso de licenciatura plena em matemática da UEPA, campus XIV-Moju. Tendo como *locus* da pesquisa a E.M.E.F Tia Érica Strasser, com alunos de oitavo ano. Esta atividade foi impressa em folha de papel A4 e distribuída para os alunos, como mostra a figura 1 abaixo.

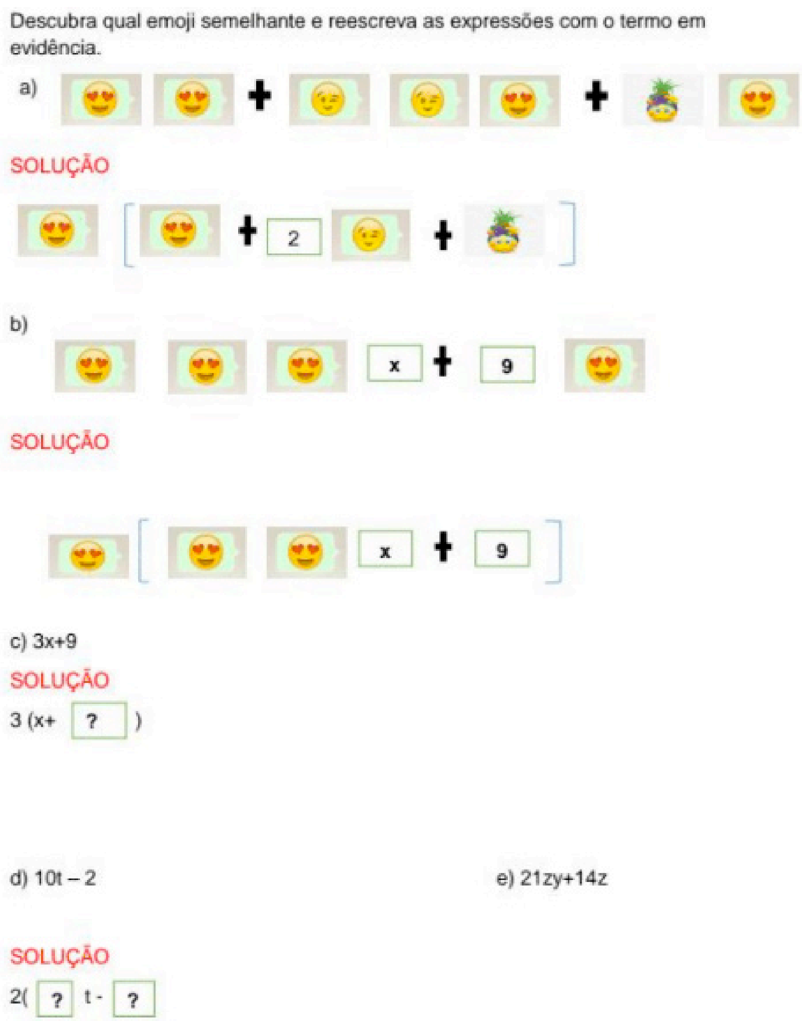


Figura 1: Atividade proposta para os alunos.

Fonte: os autores

Esta atividade foi desenvolvida aproveitando horário vago de uma professora, por isso o número de alunos ficou reduzido, visto que alguns alunos foram embora, mesmo sendo avisados com antecedência, então os que ficaram foram somente aqueles alunos que estavam realmente interessados em nossa atividade, e isso para nós não foi bom, pois queríamos fazer a intervenção nesses alunos que sentem mais dificuldades e consequentemente que não prestam atenção nas aulas, pois de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN´s) de matemática é que " a matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização de seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente".

Um fato que nos chamou bastante atenção, foi que no momento do intervalo mostramos para algumas alunas, a folha com a atividade, elas ficaram bastante curiosas em querer saber como aqueles emojis estavam relacionados com a matemática, queriam a atividade para recortar as imagens, enfim, o importante foi que permaneceram na sala de aula aguardando a atividade.

Durante a atividade percebemos que os alunos queriam entender, mas sentiram bastante dificuldades, pois não estão acostumados a estudar dessa maneira, queriam dar valores numéricos aos emojis para facilitar a compreensão. Essa parte da matemática que é a álgebra por ser abstrata, não necessitando em si de um valor numérico, confunde bastante a cabeça dos alunos, porque é uma área específica da matemática que não se estuda nas séries iniciais de ensino, logo não estão acostumados com esse tipo de raciocínio.

Outro ponto relevante de nossa aula, foi quando um aluno ao tentar resolver sozinho a questão de letra "E" nos perguntou "posso colocar o número 1 em evidência", isso foi bastante gratificante pois nos mostrou que o aluno estava construindo o seu próprio conhecimento, tendo nós como mediadores desse conhecimento.

De acordo com Pais (2006, pg.28) "Fazer matemática é uma atividade oposta às práticas da reprodução, as quais consistem em conceber a educação escolar como um exercício de contemplação do mundo científico, de onde vem a ideia de transmissão de conhecimentos" é isso que a educação atualmente está pautada, o aluno deve fazer matemática, ou seja, essa busca pelo conhecimento deve ser instigada, provocada pelo mediador do conhecimento.

Pais (2006, pg.28) ainda ressalta que "Para fazer isso, é preciso buscar dinâmicas apropriadas para intensificar as possibilidades de interação do aluno com o conhecimento".

Foi possível visualizar novamente o aluno fazendo matemática quando nos perguntou se ele podia multiplicar por um número decimal dentro do parêntese, esta pergunta surgiu por que este sentiu dificuldade em encontrar um número para pôr em evidência, este aluno queria resolver a questão da letra "E" da seguinte forma 2z * (10,5 y+7), esses questionamentos durante as aulas tradicionais não surgiram, apenas depois dessa atividade surgiram as dúvidas, fazendo com que assim o aprendizado fosse construído paulatinamente.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com isso, concluímos que este trabalho teve uma relevância significativa, visto que foi uma aula diferenciada, pois os alunos acabam não tendo atividade no lúdico, por conta disso conseguimos atrair bastante a atenção deles, e fazendo assim que atingisse nosso objetivo que era o aprendizado do mesmo.

Hoje em dia nas salas de aula é possível ver o professor se importando bastante com o conteúdo programático e esquecendo do que ao meu ver é o principal que é a aprendizagem dos alunos, ser professor de matemática é uma profissão que se deve ter muita paciência, sabedoria e persistência, visto que geralmente os alunos não apresentam nenhum interesse em compreendê-la.

Acredita-se que para se ter uma educação de qualidade, deve-se trabalhar o coletivo, escola, governo, pais, professores e alunos, durante esses meses enquanto bolsista do projeto, foi perceptível que atualmente a tarefa de educar estar sobrecarregando apenas o professor, muitas vezes os pais não fazem o acompanhamento do desenvolvimento de seus filhos pelo caderno, para estes, a função dele está restrito a apenas mandar para a escola e comprar o material escolar.

Isto supõe-se que se deve ao baixo nível de escolaridade dos pais desses alunos, sendo assim, nesta etapa os mesmos não conseguem acompanhar o conteúdo ministrado em sala de aula, ou até mesmo, muitos trabalham e não tem esse tempo disponível, enfim, são muitas variáveis que devem ser estudadas e analisadas para se chegar a um consenso, e assim buscar uma solução possível para esse entrave, que está fazendo com que essa responsabilidade recaia apenas para o professor. Diante do exposto concluímos que esse tipo de inovação no ensino é bom para instigar o aluno a pensar e ver a matemática no cotidiano deste, nos pequenos detalhes.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Terceiro e Quarto ciclo do Ensino Fundamental. Matemática. Brasília: MEC/SEF,1998b.

D' AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática da Teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus, 1996.

LAUTESCHLAGER, Etienne; RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Formação de professores de matemática e o ensino de polinômios**. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.19, n.2, 237 – 263, 2017.

MORO, G.H.M. **Emoticons, emojis e ícones como modelo de comunicação e linguagem: relações culturais e tecnológicas.** Rev. Estud. comun., Curitiba, v.17, n. 43, p. 53-70, set/dez. 2016.

MULLIGAN, C. H. **Uso de polinômios para surpreender**. In: COXFORD, A; SHULT, A. P. As idéias da Álgebra. Tradução de H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995. P. 236-243.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 152 p.

SOBRE OS ORGANIZADORES

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA - Professor do Departamento de Educação da Universidade do Estado da Bahia (Uneb - Campus VII) e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA (Uneb - Campus III). Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB), Especialista em Psicopedagogia Institucional e Clínica pela Faculdade Regional de Filosofia, Ciências e Letras de Candeias (IESCFAC), Especialista em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pelo Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco (CESVASF). Foi professor e diretor escolar na Educação Básica. Coordenou o curso de Licenciatura em Matemática e o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) no Campus IX da Uneb. Foi coordenador adjunto, no estado da Bahia, dos programas Pró-Letramento e PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa). Participou, como formador, do PNAIC/UFSCar, ocorrido no Estado de São Paulo. Pesquisa na área de formação de professores que ensinam Matemática, Ludicidade e Narrativas. Integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/UFSCar), na condição de pesquisador e do Grupo Educação, Desenvolvimento e Profissionalização do Educador (Uneb/PPGESA), na condição de vice-líder. É editor-chefe da Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM), uma publicação do PPGESA da Uneb em parceria com o Campus VII da mesma instituição e com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano (IF Sertão-PE).

ANDRÉ RICARDO LUCAS VIEIRA - Doutorando em Educação pela Universidade Federal do Sergipe - UFS/PPGED. Mestre em Educação de Jovens e Adultos pela Universidade do Estado da Bahia - UNEB/MPEJA (2018), com Especialização em Tópicos Especiais de Matemática (2020), Ensino de Matemática (2018), Educação de Jovens e Adultos (2016), Matemática Financeira e Estatística (2015) e Gestão Escolar (2008). Licenciado em Matemática pela Universidade Nove de Julho (2000). Atualmente é professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - IF Sertão/PE. Coordenou o Curso de Licenciatura em Matemática pelo Plano Nacional de Formação dos Professores da Educação Básica - PARFOR pela Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus XVI - Irecê-BA. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Formação de Professores e Tecnologias da Informação e Comunicação - FOPTIC (UFS/CNPq). É editor assistente da Revista Baiana de Educação Matemática - RBEM, uma publicação do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA da Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus III - Juazeiro/BA em parceria com o Campus VII - Senhor do Bonfim/BA da mesma instituição e com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - IF Sertão-PE, Campus Santa Maria da Boa Vista/PE.

ÍNDICE REMISSIVO

P

R

S

T

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora

Ano 2020

Prospecção de Problemas e Soluções nas Ciências Matemáticas 2

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020