INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

JOSÉ ELYTON BATISTA DOS SANTOS
(ORGANIZADOR)

Atena
Editora
Ano 2020

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

JOSÉ ELYTON BATISTA DOS SANTOS
(ORGANIZADOR)

Atena
Editora
Ano 2020

2020 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2020 Os autores
Copyright da Edição © 2020 Atena Editora
Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Edição de Arte: Luiza Batista
Revisão: Os Autores

Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2020

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática

Editora Chefe:	Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecário	Maurício Amormino Júnior
Diagramação:	Maria Alice Pinheiro
Edição de Arte:	Luiza Batista
Revisão:	Os Autores
Organizador:	José Elyton Batista dos Santos

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

I62 Investigação, construção e difusão do conhecimento em matemática [recurso eletrônico] / Organizador José Elyton Batista dos Santos. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-175-6
DOI 10.22533/at.ed.756201607

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Prática de ensino. 3.Professores de matemática – Formação. I. Santos, José Elyton Batista dos.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

A coletânea "Investigação, Construção e Difusão do Conhecimento em Matemática" é uma obra composta por 27 artigos que tem como foco principal a difusão de conhecimentos na dimensão matemática perante a uma diversidade de trabalhos. O livro apresenta produções científicas do âmbito nacional e internacional em formato de relatos de casos, estudos bibliográficos e experimentais com temáticas relevantes para a comunidade científica, para professores em exercício e aos que estão aperfeiçoando seus conhecimentos acerca do que está sendo pesquisado, debatido e proposto no ensino da educação básica, bem como no ensino superior.

A relevância da matemática nos diferentes níveis educacionais é imensurável. Em todo canto e em toda situação a matemática está presente. Perante esse contexto, esta obra fomenta as pesquisas na área da educação matemática, dissemina os conhecimentos científicos a partir das diferentes visões teóricas e estudos contemplados pela referida área, a saber: etnomatemática, tecnologias, recursos didáticos, formação de professores e modelagem matemática. Também se insere nessa dimensão da difusão do conhecimento, as propostas interdisciplinares e conteudista para a educação básica e ensino superior, que visa primordialmente a aprendizagem com qualidade e de acordo com as exigências da sociedade contemporânea, isto é, um ensino próximo ao contexto do aluno.

Debruçar nessa coletânea permite ao leitor se aventurar por diferentes conhecimentos científicos. Ampliará seus conhecimentos teóricos, bem como, enriquecerá sua prática docente a partir dos relatos com materiais concretos, tecnológicos e problemas contextualizados. Todavia, desejo que esta obra contribua significativamente não apenas para o enriquecimento teórico e prático, mas como meio motivador para novas investigações e consequentemente para a difusão do conhecimento científico matemático.

José Elyton Batista dos Santos

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

A CIÊNCIA É RACIONAL? TENTATIVA DE RESPOSTA EM PAUL FEYERABEND E EDGAR MORIN

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 06/05/2020

Deise Leandra Fontana
Instituto Federal do Paraná – IFPR
Curitiba – PR
Lattes: http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4745533H6

Ettiène Cordeiro Guérios
Universidade Federal do Paraná – UFPR
Curitiba – PR
Lattes: http://buscatextual.cnpq.br/buscatextual/visualizacv.do?id=K4728735Z3

O conteúdo deste artigo foi apresentado no XV Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM, 2019). Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/view/1095>

RESUMO: O objetivo deste trabalho é pensar sobre a racionalidade na ciência. Foi realizado um exercício de pensamento a partir da leitura de filósofos que estudam a obra Contra o Método, de Paul Feyerabend, e estudos nas obras Meus Filósofos e Ciência com Consciência, de Edgar Morin. Nos estudos desenvolvidos, é possível inferir que Feyerabend critica a existência de um modelo racional universalista para a ciência, problematizando a ciência como atividade puramente racional, objetiva e neutra. Por outro lado, Morin indica a necessidade de uma ciência não disjuntiva, bem como a importância do conhecimento do conhecimento científico. É possível considerar que embora os autores apresentem bases epistemológicas distintas, ambas as obras são atuais e se complementam, ao possibilitar reflexões acerca da necessidade de se pensar a ciência, o campo da educação matemática e as críticas produzidas por ambos os pensadores.

PALAVRAS-CHAVE: Ciência. Método. Racionalidade.

IS SCIENCE RATIONAL? AN ATTEMPT TO ANSWER IN PAUL FEYERABEND AND EDGAR MORIN

ABSTRACT: The main goal of this work is to think of rationality in science. An exercise in thinking was carried out from the reading of philosophers who study the work Against the Method by Paul Feyerabend and from studies in the works My Philosophers and Science with Conscience by Edgar Morin. It is feasible to infer in the developed that Feyerabend criticizes the existence of a rational model for universal science. He discusses science as a purely

rational, objective, and neutral activity. On the other hand, Morin points out the demand for non-disjunctive science, as well as the importance of knowledge of scientific knowledge. It is possible to consider that, although the authors present different epistemological bases, both works are current and complement each other by allowing reflections on the need of thinking on science, as well as on the field of mathematics education and the criticisms produced by both thinkers..
KEYWORDS: Science. Method. Rationality.

1 I INTRODUÇÃO

Neste ensaio, produzimos algumas reflexões teóricas acerca das tentativas de resposta para a questão esboçada: A ciência é racional? A partir dela, alguns questionamentos emergem, tais como: O que nós realmente conhecemos? A ciência é tão racional quanto pensamos? Como tentativa de resposta, o filósofo da ciência, Paul Feyerabend (1924-1994), explicita dois pontos, a saber: a) a postura dos cientistas e b) a postura dos filósofos e historiadores da ciência. Por sua vez, o antropólogo, filósofo e sociólogo francês Edgar Morin (1921-) complementa essa reflexão abordando a complexidade da ciência. O objetivo deste trabalho é pensar sobre a racionalidade na ciência, com base nas reflexões produzidas por esses dois pensadores da atualidade. É importante destacar que essas reflexões produzem conhecimentos que se aplicam à formação de pensadores dedicados a compreender o processo de constituição do conhecimento científico nos diferentes campos formativos, dentre os quais o campo da educação matemática.

2 I TENTATIVA DE RESPOSTA EM PAUL FEYERABEND – OLHAR DO FILÓSOFO DA CIÊNCIA

A tentativa de resposta será fundamentada nos estudos publicados por alguns filósofos da ciência que estudam as obras de Paul Feyerabend. Dentre esses, os trabalhos da professora Halina Macedo Leal, pesquisadora brasileira da obra de Feyerabend. Na obra “Contra o Método”, Paul Feyerabend “[...] critica a defesa de um modelo racional universalista para a ciência e revela novos possíveis caminhos de interação de padrões abstratos com a multiplicidade da prática científica.” (LEAL, 2016, p. 1). “Contra o Método” nasce de uma tentativa de “diálogo” entre Paul Feyerabend e Imre Lakatos (1922-1974). Leal (2016) desvela que a crítica de Feyerabend tem por base as metodologias (traduzidas em termos de padrões racionais ou racionalistas) do Positivismo Lógico e de Popper, sendo essas abordagens universalistas.

A argumentação de Feyerabend, filósofo da ciência austríaco, centra-se em torno de três ideias-chave, a saber: o anarquismo epistemológico, a contraindução e a incomensurabilidade. O anarquismo epistemológico é uma crítica direta ao racionalismo traduzido pela "unicidade" do método da ciência. Esse anarquismo epistemológico ou anarquismo feyerabendiano, segundo Leal (2016, p. 7) "[...] não envolve a recusa de todo princípio, de todas as regras e critérios na orientação de uma pesquisa, mas a recusa de um princípio absoluto que oriente todas as pesquisas". O anarquismo epistemológico, nessa análise, sustenta a ideia de que todas as regras têm seus limites e de que não há uma racionalidade englobante.

A segunda ideia-chave é a contraindução, a qual Leal (2003, p. 8) infere que esta é "[...] o resultado da conjunção do anarquismo epistemológico com a crítica feyerabendiana ao funcionalismo empirista". Há um contraponto entre a atitude racional caracterizada por regras gerais de aceitação e eliminação de hipóteses e a atitude feyerabendiana frente à irracionalidade do racionalismo (traduzido em termos de indutivismo em seus pressupostos) e a razoabilidade, não exclusiva, desta aparente irracionalidade. (LEAL, 2016).

Neuman e Szczepanik (2018) pensam sobre a razoabilidade da irracionalidade na ciência, com base em Paul Feyerabend. Constatam que a irracionalidade se dá nas ações dos cientistas, a partir da adesão ou avaliação de novas ideias. Os autores são enfáticos em dizer que, para Feyerabend:

> [...] os cientistas utilizam meios proibidos pelas regras racionais de investigação para chegarem a seus objetivos, que eles interpretam evidências de forma que combinem com seus interesses do momento, tentam resolver as dificuldades com as hipóteses ***ad hoc*** ou simplesmente as deixam de lado como se não existissem. (NEUMAN; SZCZEPANIK, 2018, p.335).

Desse modo, a irracionalidade é razoável para o próprio desenvolvimento da ciência, assim como, caos e ordem são fundamentais para a evolução do conhecimento científico.

> Contudo, na tradição racionalista, foco da crítica de Feyerabend, os seus especialistas são considerados mais importantes porque supostamente sabem mais acerca de algum fenômeno em que este saber é considerado objetivo, neutro, rigoroso, metódico, etc, atributos que compõem uma visão de mundo. Porém, a questão central está em que o mundo não é simples ao ponto de uma só tradição e seus especialistas oficiais serem capazes de explicá-lo plenamente, de mostrar para os outros a ***verdade***. Um mundo plural e dinâmico, como o nosso, requer uma ciência também plural e dinâmica e, além disso, pensada por todas e todos, por cientistas e não cientistas (NEUMAN; SZCPEZANIK, 2018, p. 339).

Nessa perspectiva, a ciência é plural e dinâmica (com elementos irracionais), fazendo-nos pensar a ciência feita por quem e para quem. Diante do exposto, até o momento, podemos considerar que não há total separação entre contexto de descoberta e contexto de justificação, emergindo a seguinte questão: Será que o modo como eu procedo não tem a ver com o tempo-espaço em que me encontro? Consideramos assim, a dinamicidade do processo científico.

A terceira ideia-chave apresentada por Feyerabend é a incomensurabilidade, representada por uma "teoria contextual do sentido", segundo a qual o sentido de um termo depende do contexto teórico do qual faz parte. Desse modo, inspirado nos procedimentos de antropólogos, Leal (2016) constata que Feyerabend expõe algumas de suas teses:

> Na primeira delas, o autor defende a existência de esquemas de pensamento incomensuráveis entre si. Na segunda, defende estágios incomensuráveis no desenvolvimento da percepção e do pensamento no indivíduo e, na terceira, a incomensurabilidade de princípios ontológicos condicionantes de ideologias subjacentes a diferentes culturas e que tornam sem sentido certos princípios e agem à base das cosmovisões encerradas nas teorias científicas. (LEAL, 2016, p. 11).

Nas ciências, a incomensurabilidade estaria relacionada ao sentido, aos modos como as teorias são interpretadas, considerando assim os diferentes modos de apreensão do mundo. Nesse sentido, Leal destaca ainda que:

> [...] não somente é desejável a invenção de teorias inconsistentes com teorias bem estabelecidas, como também faz parte do crescimento do conhecimento a existência, num mesmo domínio de fatos, de alternativas teóricas incomensuráveis com teorias aceitas. (LEAL, 2016, p. 12).

Dentre as considerações levantadas por Leal (2016), com base nos estudos desenvolvidos nas diferentes edições da obra “Contra o Método”, reiteram-se as tentativas de resposta que Feyerabend apresenta ao mostrar a ineficácia de um conjunto fixo e universal de regras para um “fazer científico”, a contraindução e a “tese” da incomensurabilidade, que busca afastar a possibilidade de apreensão uniforme da realidade.

Ainda na análise de Leal (2016), a terceira edição da obra “Contra o Método” apresenta algumas reflexões acerca das interações entre ciência (ou prática) e razão (ou racionalidade), com base em três pontos de vista, sendo estes: idealismo, naturalismo e anarquismo ingênuo. Feyerabend constata certo conflito entre a racionalidade e as expectativas efetivas de idealizações, comentadas por Leal (2016). Do ponto de vista do idealismo, a razão governa completamente a pesquisa. No naturalismo, Leal (2016, p. 13) ressalta que “[...] a razão recebe conteúdo e a autoridade da prática, descrevendo o modo como a prática funciona e formulando princípios subjacentes”. Do ponto de vista do naturalismo, a razão é completamente determinada pela pesquisa. Leal (2016) considera que Feyerabend aponta dificuldades do idealismo e do naturalismo, em função das práticas que engendram. Por fim, o anarquismo ingênuo afirma a limitação e inutilidade de todas as regras e critérios no âmbito científico. Feyerabend critica esse posicionamento, na medida em que, na sua perspectiva, as pesquisas necessitam ser orientadas por princípios e regras.

Leal (2016) considera que a “racionalidade feyerabendiana” combina elementos do idealismo e do naturalismo chegando à ideia de um guia que é parte da atividade, guiada e transformada por ela. Isso corresponde à visão interacionista da razão e da prática, na qual “[...] razão e prática não são dois tipos diferentes de entidades, mas *partes de um único processo dialético*” (FEYERABEND, 2011, p. 284, grifo do autor). Segundo Leal, a posição interacionista de Feyerabend considera que:

> [...] os padrões racionais não são considerados fixos, universais, com autoridade independente do contexto específico ao qual se aplicam, nem são totalmente vazios, preenchendo-se única e exclusivamente através do conteúdo fornecido pela prática. Esses padrões são flexíveis, eles contêm idealizações que podem ser transformadas ou substituídas, dependendo do material histórico e contextual com o qual venham a interagir. A prática, por sua vez, não é simplesmente o material bruto que é regulado pela razão, nem simplesmente o que permite à razão mover-se num âmbito concreto. A razão depende da prática para que seus princípios sejam compreendidos e efetivados, e a prática depende da razão para que seus conteúdos sejam organizados. Essa dependência traduz-se em termos de interação, na qual a própria prática só é apreendida como tal na sua relação com a razão e vice-versa. (LEAL, 2016, p.14).

Feyerabend defende uma racionalidade científica para além da universalização. Nesse sentido, "[...] propõe que se encare a ciência dentro da multiplicidade de sua prática real, recusando a ideia de que o método, através da orientação universal e imutável das pesquisas, permite a demarcação do conhecimento científico". (LEAL, 2016, p. 15). Em sua proposta de análise da ciência, reitera a necessidade de não isolar o pensamento científico de outras formas de compreensão do mundo e expressão de ideias. Sugere ainda, o abandono da busca de critérios de demarcação entre filosofia e ciência, destacando a necessidade de interações entre pensamento científico e outras formas de pensamento. Desse modo, Feyerabend (2011) identifica a ciência como prática e a razão como racionalidade.

3 I TENTATIVA DE RESPOSTA EM EDGAR MORIN

Na obra "Meus Filósofos", Edgar Morin admite uma não disjunção entre a ciência e a filosofia, ao considerar "[...] os pensadores da ciência e os cientistas pensadores". (MORIN, 2014b, p. 131). A partir, de um impulso de pensamento, destaca a seguinte questão: "Como é possível que a vida crie ordem e organização, quando o segundo princípio da termodinâmica enuncia a dispersão e a dissipação inelutáveis da energia e da organização?" (MORIN, 2014b, p. 132). Ele reconhece um misterioso impulso criador da vida, iniciando uma jornada reflexiva acerca das abordagens de pensamento. O pensamento de Bachelard o ajuda a opor-se ao pensamento simplificador e disjuntivo, retendo a ideia de que "o simples é sempre o simplificado". Em Piaget, ele encontra a contribuição-chave: a do "círculo das ciências", "[...] no qual as relações entre as ciências são visualizadas de um ponto de vista não reducionista e recursivo" (MORIN, 2014b, p. 134). Desse modo, evidencia um circuito recursivo das ciências.

Faz parte do cerne da filosofia o problema do enraizamento do conhecimento na vida. Com isso, obtêm-se avanços na ideia de *computo* biológico e no princípio da auto-eco-organização. As contribuições vindas de Piaget inspiram-no a elaborar uma "epistemologia complexa", explicitada na obra O método. O esquema a seguir apresenta uma ideia da complexidade desse processo. (MORIN, 2014b)

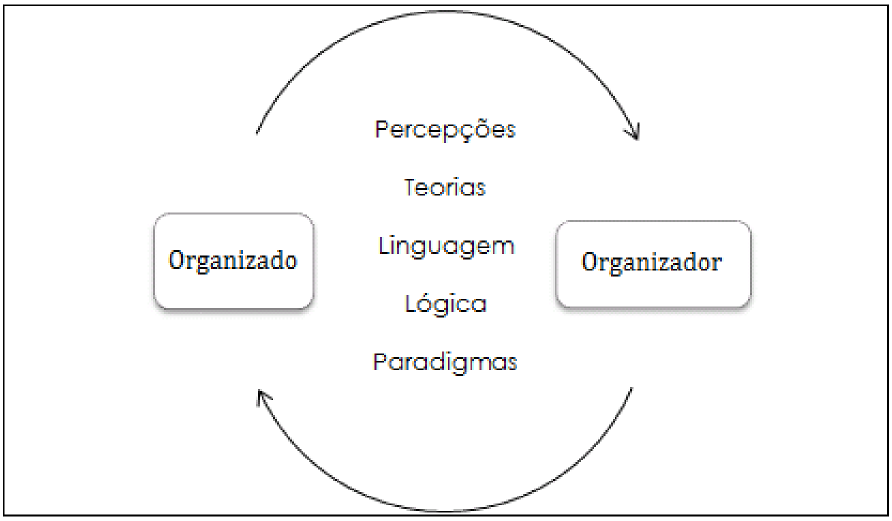


Figura 1 – Ideia de Uma "Organização do Conhecimento"

Fonte: As autoras, adaptado de Morin (2014b, p. 136-137).

Nesse esquema, a organização do conhecimento está incluída num circuito recursivo no qual o organizador torna-se organizado e o organizado torna-se organizador. Encontramos em nós mesmos, no mundo e na vida, a chave da complexidade. A chave do problema da vida reside na originalidade da organização viva. (MORIN, 2014b).

Na década de 1940, Morin inicia seus estudos em três teorias que se interpenetravam: a) a teoria de sistemas; b) a teoria da informação e, por fim, c) a teoria cibernética. Segundo o autor:

> Pude integrar e repensar essas três teorias para, finalmente, ir além delas e conceber uma **teoria da organização como autoeco-organização**, o que, simultaneamente, permitiu que eu elaborasse os princípios metodológicos de um pensamento complexo que expus em O método. Em seguida, cheguei a uma verdadeira gestação/mutação intelectual na qual as contribuições dos pensadores da ciência foram meus alimentos intelectuais. (MORIN, 2014b, p. 139, grifo nosso).

O autor elucida uma síntese, sob a forma de um tetragrama, representando o circuito tetralógico da complexidade auto-organizadora. Conforme explica:

> Esse circuito tetralógico significa que **ordem**, **desordem**, **interações**, **organização** são coproduzidas simultânea e reciprocamente, e que mantêm relações de antagonismo e complementaridade. Desse modo, não apenas a organização produz a ordem apesar da desordem que produz interações aleatórias, mas ela produz igualmente essa ordem com essa desordem desorganizadora. É necessário conceber esses quatro termos como constitutivos de um circuito no qual cada um gera os outros e é gerado por eles. Desse conjunto emerge essa misteriosa propriedade que é a auto-organização. (MORIN, 2014b, p. 141-142, grifo nosso).

Segundo Morin (2014b, p. 142) "[...] von Foerster foi o primeiro a colocar no cerne dos processos auto-organizadores (vivos) a ideia recursiva". Morin (2014b) enfatiza que Foerster, pela via da recursividade, introduziu um pensamento de "segunda ordem" em que a autorreferência, a reflexividade, a criatividade são as condições que permitem visualizar a não trivialidade da "máquina viva" e do ser pensante. Ainda para o autor, "[...] a noção de circuito recursivo e, mais amplamente, a ideia de organização recursiva são a ferramenta mental indispensável para compreender a natureza da complexidade biológica." (MORIN, 2014b, p. 142). Essa noção pode ser observada em diferentes fenômenos complexos e nas ciências.

Morin (2014a) enuncia a obra "Ciência com Consciência", considerando que "A ciência tem a necessidade não apenas de um pensamento apto a considerar a complexidade do real, mas desse mesmo pensamento para considerar sua própria complexidade e a complexidade de questões que ela levanta para a humanidade." (MORIN, 2014a, p. 9). Nessa perspectiva, o autor aborda a necessidade do autoconhecimento do conhecimento científico.

Ao refletir sobre "a verdade da ciência", observa que "[...] a verdade objetiva da ciência escapa a todo olhar científico, visto que ela é o próprio olhar." (MORIN, 2014a, p. 21). O pensador demonstra que o espírito científico é incapaz de se pensar. Nisso cabe a seguinte questão: O conhecimento científico é o reflexo do real?

> Ora, os diversos trabalhos, em muitos pontos antagônicos, de Popper, Kuhn, Lakatos, Feyerabend, entre outros, têm como traço comum a demonstração de que as teorias científicas, como os *icebergs*, têm enorme parte imersa não científica, mas indispensável ao desenvolvimento da ciência. Aí se situa a zona cega da ciência que acredita ser a teoria o reflexo do real. Não é próprio da cientificidade refletir o real, mas traduzi-lo em teorias mutáveis ou refutáveis. (MORIN, 2014a, p. 21-22).

As teorias científicas, como sistemas de ideias, devem enfrentar a complexidade do real e despertar para uma ciência autorreflexiva. Nessa perspectiva, Morin (2014a) admite a necessidade de uma razão aberta. Apresenta ainda as ideias fundamentais de alguns conceitos, tais como: a) a racionalidade, "[...] que é o estabelecimento de adequação entre a coerência lógica (descritiva, explicativa) e uma realidade empírica" (MORIN, 2014a, p. 157) e b) a racionalização que "[...] é a construção de uma visão coerente, totalizante do universo, a partir de dados parciais, de uma visão parcial, ou de um princípio único" (MORIN, 2014a, p. 157), considerando que o desenvolvimento da ciência move-se numa instabilidade de racionalizações. Há revoluções desracionalizantes, produzindo, cada uma, uma nova racionalização (Kuhn). Ainda, segundo o autor:

> Está aberto o debate sobre a possibilidade de controle epistemológico verificador. Feyerabend (*Against Method*) exalta 'o anarquismo epistemológico': nenhuma teoria tem o privilégio da verdade sobre as outras; nenhuma funciona mais ou menos, e sua concorrência é a única condição do progresso científico. (MORIN, 2014a, p. 166).

Morin (2014a) sistematiza essas ideias, ao destacar que a racionalidade e a racionalização procedem de um mesmo movimento que busca encontrar coesão no Universo. Porém a racionalização consiste em fechar o Universo numa coerência lógica artificial e insuficiente. Nesse sentido, "[...] a razão aberta não é somente método. É uma aptidão para elaborar sistemas de ideias, mas sistemas que não são dados como definitivamente estabelecidos e que podem ser remodelados" (MORIN, 2014a, p. 171). E, por sua vez, uma razão evolutiva, com características invariantes.

4 I POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES DAS IDEIAS DE FEYERABEND E MORIN PARA O CAMPO DA MATEMÁTICA

A ciência, para o matemático português Caraça (2000), pode ser encarada sob dois aspectos: a) como exposta nos livros de ensino, onde há uma aparente harmonia, e os capítulos se encandeiam em ordenação, sem contradições ou b) como desenvolvimento progressivo, descobrindo dúvidas e contradições. No primeiro aspecto, a formação dos conceitos e das teorias parece obedecer somente a necessidades interiores; no segundo, pelo contrário, vê-se toda a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da própria ciência. No prefácio desta obra, o autor explicita que os fundamentos da matemática se inserem como toda a ciência, na vida real. Essa é uma perspectiva possível, mas não única.

Embora a matemática seja concebida como uma ciência exata em muitas pesquisas, acreditamos não haver um único modo de se fazer ciência. Neste trabalho, nossa intenção não é indicar o certo ou o errado, mas apresentar perspectivas de pensamento que nos auxiliem a pensar a ciência e o fazer científico, a partir dos elementos que a compõem, proporcionando uma argumentação construtiva e reflexiva. Desse modo, poderemos pensar nas matemáticas e nos processos de insubordinação criativa.

Estamos, de acordo com Moraes e Torre (2004), em um processo de rápidas transformações nas formas de viver/conviver. Nesse sentido:

> As concepções existentes dentro de cada um de nós se revelam também em nossa maneira de conhecer, de aprender e de educar. Se acreditarmos que nada é predeterminado, que a participação do sujeito é fundamental, que não existe um mundo anterior à percepção do observador e que a subjetividade e objetividade estão intimamente relacionadas, então daremos maior valor às experiências, prestaremos maior atenção às relações estabelecidas, às diferentes conversações, aos diálogos e às emergências que surgem nos diferentes ambientes que frequentamos ou criamos. (MORAES; TORRE, 2004, p. 22).

Nessa perspectiva, os autores citados destacam que, ao estarmos atentos às implicações epistemológicas sobre o que acontece com as ciências, a partir de suas teorias, prestaremos maior atenção aos eventos e aos momentos em que diferentes circunstâncias deram origem a novas ideias.

> Assim, o mesmo paradigma que se revela em nossas ações e reflexões do dia-a-dia influencia também outros tipos de relações que permeiam as diferentes dimensões de nossas vidas, dentre elas, a dimensão epistemológica relacionada aos processos de construção do conhecimento e da aprendizagem. Daí a importância de se trabalhar a consolidação de um quadro epistemológico mais amplo em educação, porque acreditamos que ele poderá também influenciar a maneira de pensar, de sentir e de atuar dos aprendizes, diante não apenas do que acontece nos processos de construção do conhecimento, mas também em relação aos diferentes diálogos que o indivíduo estabelece na vida (MORAES; TORRE, 2004, p. 22-23).

Observamos, dessa forma, a necessidade de novos paradigmas que nos auxiliem a perceber as limitações de um paradigma reducionista e simplificador. E quais as referências teóricos que poderiam nortear essa busca? Segundo os autores supracitados, "[...] sabemos que subjacentes às raízes dos pensamentos quânticos e biológicos existem sementes epistemológicas capazes de fundamentar o processo de construção dos conhecimentos". (MORAES; TORRES, 2004, p. 23). Essas sementes podem influenciar o pensamento humano para a compreensão da própria humanidade e talvez, dos próprios rumos da ciência.

A educação matemática é um campo de investigação em que se produzem pesquisas em diferentes perspectivas (pragmáticas, científicas, etc.). A perspectiva adotada neste trabalho incorpora uma busca pela compreensão da ciência e do método, os quais ao longo da história refletem os conhecimentos científicos e a sua natureza. A formação do(a) pesquisador(a) em educação matemática abrange tradições científicas e buscar compreendê-las poderá nos auxiliar para o entendimento da nossa própria prática de investigação. Neste trabalho abordamos filósofos da ciência que indicam ideias relevantes acerca da racionalidade na ciência, possibilitando-nos a refletir sobre a natureza do método, na busca pelo conhecimento, dentre esses, o conhecimento matemático. Esta é uma das contribuições apresentadas neste trabalho, para o campo da formação do(a) pesquisador(a) em educação matemática.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

A possibilidade de conhecer a obra "Contra o método", de Paul Feyerabend, e aprender com os filósofos que pesquisam Paul Feyerabend é muito motivadora para o desenvolvimento de uma reflexão crítica da ciência. A ideia do "anarquismo epistemológico" nos permitiu pensar sobre o status da ciência e da sua racionalidade. Feyerabend propõe que se perceba a ciência dentro da multiplicidade de sua prática real, recusando a ideia de um único método para se fazer ciência. Sugere assim que a ciência interaja com outras formas de apreensão da natureza e passe a ser encarada como espaço de diálogo entre culturas e civilizações.

Edgar Morin é outra leitura desafiante que abarca um pensamento não disjuntivo entre "os cientistas pensadores e os pensadores das ciências". Entendemos que fazer ciência com base nos pressupostos epistemológicos das teorias da complexidade e da organização remete a repensar as ciências inserindo o princípio da incerteza, da complementaridade, da auto-organização que regem os elementos da natureza. Os pressupostos epistemológicos que regem a organização viva têm implicações importantes no processo de construção do conhecimento.

Como implicações resultantes deste trabalho, temos: a) para os cientistas – maior consciência dos limites de sua própria prática e maior "maleabilidade" à sua prática; b) para os filósofos e historiadores da ciência – não existe uma única lógica, pois a lógica é considerada dentro da multiplicidade de sistemas formais e visões de mundo e, por fim, c) para os pesquisadores em geral – proporcionar um questionamento mais amplo a respeito da racionalidade e possibilitar uma reflexão mais ampla a respeito do ser humano e de sua capacidade de conhecer.

REFERÊNCIAS

CARAÇA, B. de J. **Conceitos fundamentais de Matemática**. Lisboa: Gradiva, 2000.

FEYERABEND, P. K. **Contra o método**. 2. ed. São Paulo: Editora UNESP, 2011.

LEAL, H. M. Paul Feyerabend e Contra o Método: Quarenta Anos do Início de uma Provocação. **Cadernos IHU ideias**, n. 237, p. 1-24, 2016.

MORAES, M. C.; TORRE, S. de La. **Sentipensar**: fundamentos e estratégias para reencantar a educação. Petrópolis: Vozes, 2004.

MORIN, E. **Ciência com consciência**. 16. ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2014a.

MORIN, E. **Meus filósofos**. 2. ed. Porto Alegre: Sulina, 2014b.

NEUMAN, P.; SZCZEPANIK, G. E. A irracionalidade na ciência em Paul Feyerabend. **Revista Húmus**, v. 8, n. 24, p. 330-347, 2018.

CAPÍTULO 2

A MATEMÁTICA COMO MEIO DE COMPREENSÃO E TRANSFORMAÇÃO DO MUNDO

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 06/05/2020

Andreza dos Santos Silva Brito
Pedagoga e especialista em educação pelo Centro Universitário de Brusque
Brusque – SC
http://lattes.cnpq.br/3454677575609501

Eloá de Fátima Velho Godinho Peixer
Pedagoga e especialista em educação pelo Centro Universitário de Brusque
Brusque – SC
http://lattes.cnpq.br/5280467082135218

Eliani Aparecida Busnardo Buemo
Pedagoga, especialista em Pré-escola e Séries iniciais, Mestre em Educação pela Universidade Estadual do Centro-Oeste
Brusque – SC
http://lattes.cnpq.br/0310288286442699

RESUMO: A matemática exerce um papel social na vida do ser humano, pois esta surgiu a partir das necessidades do homem em resolver problemas diversos. Desta forma entende-se que esta ciência é fundamental para o desenvolvimento da sociedade num sentido geral. No âmbito educacional a matemática deve ser apresentada de forma concreta, contextualizada, e integrada, facilitando assim, o processo de ensino-aprendizagem, sendo constituído por uma via de mão dupla, onde o mesmo que ensina, também aprende e vice-versa. O trabalho em questão tem como objetivo reconhecer a matemática como instrumento do alcance da razão. A metodologia constitui-se de uma prática interdisciplinar, visando o desenvolvimento de uma atitude que ultrapasse a utilização de meros discursos e aja de forma que valorize os conhecimentos que o aluno já traz consigo, levando-o para uma dimensão interdisciplinar que proporcione um aprendizado contextualizado, bem como, a utilização de jogos que é um mecanismo ou suporte que está ao alcance do professor, permitindo que o mesmo percorra vários caminhos que levem a uma única direção, a aprendizagem. A interdisciplinaridade implícita nos jogos e nas atividades permitiu que a aprendizagem se tornasse muito mais interessante, pois houve a abordagem de vários temas integrados em um único sentido, a obtenção de um aprendizado diversificado.

PALAVRAS - CHAVE: Matemática.Aprendizagem. Metodologia. Interdisciplinaridade. Jogos.

MATHEMATICS AS A MEANS OF UNDERSTANDING AND TRANSFORMATION OF THE WORLD

ABSTRACT: Mathematics plays a social role in human life, as this emerged from the man needs to solve many problems. Thus it is understood that this science is critical to the development of society in a general sense. In education mathematics should be presented in concrete, contextualized and integrated, thus facilitating the process of teaching and learning, and consists of a two-way street, where it teaches also learns and vice versa. The work in question aims to recognize mathematics as the ratio range of the instrument. The methodology consists of an interdisciplinary practice, to develop an attitude that goes beyond the use of mere speeches and act in a way that enhances the knowledge that the student already brings with it, taking it to an interdisciplinary dimension that provides a contextualized learning as well as the use of games that support or is a mechanism that is within range of the teacher, allowing it to go through various paths that lead to a single direction, learning. The implicit interdisciplinarity in games and activities allowed learning to become much more interesting, because there was the approach of various themes integrated in a single direction, obtaining a diverse learning.
KEYWORDS: Mathematics. Learning. Methodology. Interdisciplinarity. Games.

1 I INTRODUÇÃO

O trabalho em questão configura-se pela realização de um Estágio Supervisionado do Curso de Pedagogia do Centro Universitário de Brusque (UNIFEBE), ocorrido nos anos iniciais do ensino fundamental em uma Escola de Educação Básica da Rede Municipal de Brusque.

Sabe-se que a matemática é um campo de conhecimento que está presente em todas as atividades humanas, porém, a maioria das pessoas atribui um sentido antagônico para esta, isto implica dizer que alguma disfunção está acontecendo. A veracidade dos fatos é que a base matemática dos alunos vem sendo constantemente prejudicada com o passar dos anos, o que resulta ao fracasso do alcance de uma aprendizagem significativa. O tema a ser abordado será: “A matemática como meio de compreensão e transformação do mundo.

Consoante com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, p. 24):

> Parte dos problemas referentes ao ensino de Matemática estão relacionados ao processo de formação do magistério, tanto em relação à formação inicial como à formação continuada. [...] A implantação de propostas inovadoras, por sua vez, esbarra na falta de uma formação profissional qualificada na existência de concepções pedagógicas inadequadas e, ainda, nas restrições ligadas às condições de trabalho.

À vista disso, há um déficit na aquisição e transmissão do conhecimento, danificando assim a cognição dos alunos. Isto posto, o presente estágio eclode com o objetivo de “reconhecer a matemática como instrumento do alcance da razão”.

O aporte teórico utilizado nas pesquisas realizadas para a fundamentação do Estágio Supervisionado busca averiguar os documentos oficiais e livros que fazem referência ao ensino da matemática no âmbito mundial, nacional, estadual e municipal. Possibilitando a ampliação dos conhecimentos, dando uma abertura a novos horizontes, e permitindo o alcance de uma atuação autônoma e consciente, impregnada do entendimento histórico cultural que a matemática percorreu para definir-se como ciência.

De acordo com Rosa Neto (1937, p. 16) “A matemática é a mais antiga das ciências. Por isso ela é difícil. Porque já caminhou muito, já sofreu muitas rupturas e reformas, possuindo um acabamento refinado e formal”.

O melhor caminho a ser percorrido na estrada do aprendizado é a utilização do lúdico, bem como, o concreto, possibilitando assim uma maior fixação do que está sendo ensinado, pois há um significado em cada ação desenvolvida pelo professor e para o aluno. A respeito disso, Rosa Neto afirma (1937, p. 35) que:

> As habilidades que um indivíduo possui não aparecem de repente. Elas também resultam de um processo que ocorre por etapas. É uma evolução que se dá do concreto para o abstrato. Muitas vezes, a experiência concreta se realiza na escola, com materiais apropriados. Outras vezes, é a própria vivência que o aluno traz, aprendida no dia-a-dia. A experiência concreta se inicia com a manipulação curiosa, com o contato físico, com os sentidos.

Por esta razão, o objetivo do estágio como um todo gira em torno da ideia de proporcionar aos alunos uma aprendizagem de forma lúdica, que permita o alcance do conhecimento através do concreto, a partir da utilização de jogos matemáticos e da aquisição de uma postura interdisciplinar.

2 I HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

2.1 A Matemática nas Civilizações Antigas

A matemática é uma das ciências fundamentais para o desenvolvimento da humanidade e de suas atividades, e está presente desde o início de sua história.

“A palavra matemática deriva da palavra grega “matemathike“. Matema=compreensão, explicação; thike=arte”. (NETO, 2009). Isto implica dizer que a matemática é a arte de explicar, ou seja, é por meio dela que há a busca pela explicação das coisas por meio da razão.

De acordo com Ximenes (2000, p. 613) “matemática é a ciência que investiga, por meio do raciocínio dedutivo, as relações entre as entidades abstratas, como os números, as figuras geométricas, etc., e as propriedades dessas entidades”.

Estudos apontam que a história da matemática surgiu há muito tempo atrás, desde os primórdios da urdidura da raça humana. Alguns dos registros mais antigos encontrados são os dos povos egípcios e babilônios para a resolução de problemas cotidianos como a contagem de gados, medição de terras, dentre outras. Segundo Boyer (2012), no ano de 450 a. C, Heródoto (grande historiador e geógrafo dos tempos antigos) ao visitar o Egito acreditou e relatou que referente à matemática, a geometria nasceu no Egito através da necessidade da demarcação de terras depois das enchentes anuais que aconteciam às margens do rio.

O sistema de escrita do Egito era a hieroglífica utilizada para o registro de eventos religiosos e públicos, de acordo com Boyer (2012) este tipo de escrita e a escassez de materiais dificultavam o desvendamento da história da matemática pelos pesquisadores.

O sistema de numeração utilizado pelos egípcios era o sistema decimal, ou seja, a contagem era feita de dez em dez e a posição em que os números e os símbolos encontravam-se não alteravam os resultados das operações. Os egípcios ainda foram os primeiros a utilizarem o calendário solar com 365 dias, onde o ano era divido em 12 meses e o mês em 30 dias.

A Mesopotâmia, localizada no Oriente Médio, fica entre os rios Tigre e Eufrates, e foi habitada por diversos povos como: os sumérios, babilônicos, caldeus, etc. Cada povo deu a sua contribuição para a evolução de cada civilização.

Os babilônicos ofereceram grande contribuição para a história da matemática, com um sistema de numeração sexagesimal (com base 60), e a alteração dos resultados caso fosse modificado a posição dos símbolos escritos em cuneiformes nas operações. Além disto, a matemática babilônica fez-se notória também por meio de frações sexagesimais, tabelas, equações, geometria, dentre outros.

A matemática foi sendo constituída e aprimorada por diversas civilizações em tempos e épocas distintas, contribuindo para o progresso da humanidade. Além da civilização egípcia e babilônica, houve outros povos que colaboraram de modo precípuo para a história e composição da matemática.

2.2 Acontecimentos que Marcaram a História do Ensino da Matemática a Nível Mundial

O currículo é algo que está presente no cotidiano escolar, seja por meio das relações estabelecidas entre professor e aluno, através de comportamentos e interações instituídas, bem como, a aplicação de conteúdos e atividades propostas pelo professor, além da transmissão de valores culturais e sociais. Com base nesta ideia de currículo, faz-se necessário a busca pelo conhecimento das reformas curriculares referente à área da matemática que aconteceram nos últimos anos no Brasil e no mundo, para assim, conhecermos e compreendermos as propostas matemáticas existentes na atualidade.

O ensino da matemática passou por diversos movimentos para alcançar a sua estrutura atual, defronte disto, os Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática (1997), aponta alguns acontecimentos, iniciando nas décadas de 60/70, afirmando que diversos países foram influenciados pelo movimento da Matemática Moderna, que partiu de uma política de modernização econômica e juntamente com a área de Ciências Naturais, constituía-se algo de acesso privilegiado para o pensamento científico e tecnológico.

> A matemática moderna nasceu como um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e foi posta na linha de frente por se considerar que, juntamente com a área de Ciências Naturais, ela se constituía via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico (PCN's, 1997, p. 21).

Para os PCN'S os formuladores dos currículos dessa época insistiam numa reforma pedagógica, incluindo a pesquisa de materiais e métodos de ensino renovados, isto fez surgir a preocupação com a Didática da Matemática, no Brasil foi utilizada por meio dos livros didáticos, exercendo grande influência.

Outro movimento citado nos PCN'S são o National Council of Teachers of Mathematics – NCTM, dos Estados Unidos ocorrido em 1980, no qual apresentava recomendações para o ensino de matemática no documento "Agenda Ação". Os ideais expostos neste documento influenciaram algumas reformas, tendo algumas propostas elaboradas no período de 1980/1995, em diferentes países, apresentando alguns princípios como: a importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento; ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas, dentre outros. O programa Etnomatemática também obteve grande destaque por considerar os aspectos socioculturais e políticos parte íntimo da matemática.

2.3 O Ensino da Matemática na Atualidade sob uma Perspectiva Nacional, Estadual e Municipal

O Ensino da Matemática no Brasil é fundamentado em um documento denominado "Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática", nele consta a caracterização da área de matemática, apresentando uma breve análise da trajetória e do quadro atual do ensino da Matemática, as principais características do conhecimento matemático, a Matemática e a construção da cidadania, a Matemática e os temas transversais, aprender e ensinar Matemática no ensino fundamental, objetivos gerais de matemática para o ensino fundamental com os conteúdos divididos em primeiro e segundo ciclo, além de oferecer orientações didáticas para os professores referentes aos conteúdos.

De acordo com o site do Ministério da Educação e da Cultura (MEC), há o "IDEB que é o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, criado em 2007, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), formulado para medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino." E como forma de avaliação do nível de ensino em relação à matemática existe a

Prova Brasil e o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) que segundo o MEC "são avaliações para diagnóstico, em larga escala e os testes aplicados tem a finalidade de fazer com que os estudantes respondam a itens (questões) de língua portuguesa, com foco em leitura, e matemática, com foco na resolução de problemas. No questionário socioeconômico, os estudantes fornecem informações sobre fatores de contexto que podem estar associados ao desempenho."

Além dos meios de avaliação nacional referentes à matemática, também há o **INAF que** foi criado pelo **Instituto Paulo Montenegro**, organização sem fins lucrativos do Ibope que busca por meio de entrevistas domiciliares e aplicação de uma prova com questões práticas de Língua Portuguesa e Matemática, seja na zona urbana ou rural, medir os níveis de alfabetismo funcional da população brasileira.

No Estado de Santa Catarina, o ensino da matemática, bem como, de outras áreas do conhecimento está pautado em uma visão sociocultural que valorize os diversos saberes, onde as relações humanas estejam em foco e a diversidade seja valorizada.

A PCSC (2014) apresenta ideais que fundamentam a ação do professor desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, buscando promover uma formação integral que desenvolva o aluno em seus múltiplos aspectos. Assim, pode-se afirmar que o Estado de Santa Catarina tem demonstrando grande preocupação em oferecer uma educação de qualidade, realizando investimentos e fazendo chamamentos para a participação do professor na construção de uma pátria educadora.

No município de Brusque, a prática docente é fundamentada pelas Diretrizes Curriculares Municipais. Neste documento há tabelas com a apresentação do currículo mínimo para todas as etapas desde o berçário I até o terceiro ano do Ensino Médio, demonstrando as habilidades a serem desenvolvidas, estratégias e conteúdos a serem trabalhados com as crianças e os alunos. Tem como objetivo geral na disciplina de matemática "Desenvolver habilidades de observação, análise e construção de conceitos na resolução de situações problema do cotidiano, levantando e testando hipóteses, individual e coletivamente".

2.4 A Matemática, a Interdisciplinaridade e o Jogo

Durante muito tempo, houve uma separação das áreas do conhecimento, ou seja, eram conhecimentos engavetados, os quais cada um tinha a sua própria gaveta e no momento que o aluno desejasse saber algo ele deveria puxar a gaveta específica, depois fechá-la e abrir outra se desejasse saber sobre outro assunto. No entanto, de acordo com Fazenda (1998, p. 18), houve três décadas em particular que colocou em evidência a questão da interdisciplinaridade: a década de 70 através da procura por uma definição de interdisciplinaridade, década de 80 com tentativas de explicar um método e década de 90 com a busca de uma teoria interdisciplinar.

Desta forma, a interdisciplinaridade surge com o intuito de quebrar paradigmas, buscando extinguir a ideia de um conhecimento fragmentado, pois, se há uma busca pela formação do aluno em sua integralidade, consequentemente as metodologias utilizadas até então também deveriam ser alteradas.

Segundo Nogueira (1998, p. 26), interdisciplinaridade:

> É o trabalho de integração das diferentes áreas do conhecimento. Um real trabalho de cooperação e troca, aberto ao diálogo e ao planejamento. As disciplinas não aparecem de forma fragmentada e compartimentada, pois a problemática em questão conduzirá a unificação.

Por esta razão, o professor de matemática, bem como, das demais áreas exerce um papel fundamental na idealização e execução da prática interdisciplinar, pois o docente precisar exercer uma atitude que ultrapasse a utilização de meros discursos e aja de forma que valorize os conhecimentos que o aluno já traz consigo, levando-o para uma dimensão interdisciplinar que proporcione um aprendizado contextualizado.

O jogo por sua vez tem assumido um papel determinante na aplicação de conteúdos, pois ele possibilita que o aluno aprenda ao mesmo tempo em que se diverte, registrando o conteúdo em sua memória de forma inconsciente, além de fazer com que o discente desenvolva-se em seus múltiplos aspectos.

> O jogo implica para a criança muito mais do que o simples ato de brincar. Através do jogo, ela está se comunicando com o mundo e também está se expressando. Para o adulto o jogo constitui um "espelho", uma fonte de dados para compreender melhor como se dá o desenvolvimento infantil. (FRIEDMANN, 1996, p. 14)

A interação grupal, a forma de se relacionar com o outro, também é uma característica que o jogo desenvolve, além disto, o jogo também trabalha a redução da sensação de fracasso, fazendo com que o aluno perceba a importância em participar, esforçando-se cada vez mais para superar-se, passando a progredir no quesito persistência.

Jean Piaget, psicólogo e filósofo que dedicou a sua vida em pesquisas sobre a inteligência infantil, definiu os jogos de acordo com a faixa etária das crianças, classificando-os em: Jogos de Exercício, Jogos Simbólicos, e Jogos de Regras.

Jogos de Exercício: Também conhecidos como "Jogos Sensórios motores", permite que a criança conheça e faça parte do mundo, por meio dos sentidos e sensações. Acontece do nascimento da criança até o surgimento da linguagem, ou seja, até os 18 meses, dependendo do desenvolvimento de cada criança.

Jogos simbólicos: Estes ocorrem dos 2 até os 7 anos de idade, através dele, a criança pode representar a sua realidade, colocando em prática a imaginação, passando a fazer parte da passagem do pensamento abstrato para o concreto.

Jogos de regras: Acentua-se na fase que vai dos 7 anos de idade em diante, porém, este já está presente na vida da criança desde os 4 anos. É a partir deste jogo que a criança aprende a lhe dar com normas a serem seguidas e regras a serem respeitadas, aprendendo a desenvolver habilidades inerentes ao convívio social. Com base nos ideais expostos acima, pode-se afirmar que o jogo é um mecanismo ou suporte que está ao alcance do professor, permitindo que o mesmo percorra vários caminhos que levem a uma única direção, “a aprendizagem”.

Os conteúdos foram apresentados de diversas formas, principalmente com a utilização de jogos, uma vez que, cremos que o jogo é um dos melhores caminhos que garantem um aprendizado espontâneo e de grande relevância.

> Ao se enquadrar a atividade lúdica no contexto educacional, o educador deve ter seus objetivos bem claros. Assim, se pretende ter um diagnóstico do comportamento do grupo em geral e dos alunos de forma individual, ou saber qual o estágio de desenvolvimento em que se encontram essas crianças, ou, ainda, conhecer os valores, ideias, interesses e necessidades desse grupo, ou os conflitos e problemas, é possível, a partir do jogo, ter esse amplo panorama de informações. Se, porém, o que pretende é estimular o desenvolvimento de determinadas áreas ou igualmente promover aprendizagens específicas, o jogo pode ser utilizado como um instrumento de desafio cognitivo. (FRIEDMANN, 1996, p. 70)

Desta forma, a partir do uso dos jogos, pudemos perceber e reconhecer a sua relevância para a obtenção do conhecimento por parte da turma, bem como, para atrair a atenção dos alunos, fazendo com que os mesmos interagissem entre si, e descobrissem novas habilidades, expandindo o seu conhecimento de forma divertida.

Os alunos demonstraram bastante empolgação em todas as atividades, apresentando disposição em realizá-las, participando com ânimo e entusiasmo.

A maioria dos alunos da turma em que foi realizado o estágio demonstrou domínio do conhecimento referente à adição e à escrita. Na subtração, apresentaram um pouco de dificuldade, no entanto, conforme fomos aplicando as atividades e os jogos, mesmo que em um curto período, pudemos perceber a evolução deles.

A interdisciplinaridade implícita nos jogos e nas atividades também permitiu que a aprendizagem se tornasse muito mais interessante, pois houve a abordagem de vários temas integrados em um único sentido.

3 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática é uma área do conhecimento que foi constituída por e para o meio social, a partir da necessidade de encontrar solução para os problemas da vida humana. E por reconhecer a relevância desta ciência em nossas vidas, houve a busca da valorização por meio de uma didática diferenciada, que permitisse aos alunos a construção do seu próprio conhecimento.

A interação entre alunos x estagiárias e aluno x aluno pôde ser aprimorada através do sentimento de pertencimento por meio de atividades grupais e jogos que promovessem a socialização entre seus pares. O compartilhamento de ideias também esteve em foco durante a realização do estágio, possibilitando que os alunos expusessem os seus pontos de vistas, enaltecendo o verdadeiro sentido do processo de “ensino-aprendizagem”.

> [...] o trabalho pedagógico precisa se orientar por uma visão das crianças como seres sociais, indivíduos que vivem em sociedade, cidadãs e cidadãos. Isso exige que levemos em consideração suas diferentes características, não só em termos de histórias de vida ou de região geográfica, mas também de classe social, etnia e sexo. Reconhecer as crianças como seres sociais que são implica em não ignorar as diferenças. Os conflitos – que podem emergir – não devem ser encobertos, mas, por outro lado, não podem ser reforçados: precisam ser explicitados e trabalhados com as crianças a fim de que sua inserção social no grupo seja construtiva, e para que cada uma seja valorizada e possa desenvolver sua autonomia, identidade e espírito de cooperação e solidariedade com as demais. (KRAMER, 2001, p.19)

Assim, o aluno precisa ser visto como único, com suas especificidades, mas também como um ser social que precisa aprender como conviver com os demais indivíduos que compõem a sociedade a qual está inserido, colocando em prática a tolerância e o respeito ao outro e aos seus ideais.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: blucher, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília, 1997.

FAZENDA, Ivani. **Interdisciplinaridade**: História, teoria e pesquisa. São Paulo: Papirus editora, 1994.

FIREDMANN, Adriana. **Brincar:** crescer e aprender. São Paulo: editora moderna, 1996.

FRAGA, Maria Lúcia. **A matemática na escola primária:** uma observação do cotidiano. São Paulo: editora pedagógica e universitária ltd, 1988.

GILLES, Brougére. **Jogo e educação**. Porto Alegre: artmed editora, 1998.

NETO, Ernesto Rosa. **Didática da matemática**. . São Paulo: editora ática, 1937.

NOGUEIRA, Nilbo Ribeiro. **Interdisciplinaridade aplicada**. São Paul: editora érica ltda, 1998.

PREFEITURA DE BRUSQUE. Secretaria Municipal de Educação: Diretrizes Curriculares Municipais. Brusque: Prefeitura de Brusque, 2012.

Disponível em: <http://professoresdaeia.blogspot.com.br/2009/02/origem-da-palavra-matematica.html> Acesso em: 04 de Jun. de 2016.

Disponível em: <http://www.ipm.org.br/pt br/programas/inaf/relatoriosinafbrasil/Paginas/default.aspx>Acesso em: 05 de Jun. de 2016.

Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/portal-ideb/o-que-e-o-ideb> Acesso em: 11 de Jun. de 2016.

Disponível em: <http://www.propostacurricular.sed.sc.gov.br/site/> Acesso em: 11 de Jun. de 2016.

Disponível em: <http://www.brusque.sc.gov.br/upload/conhecabrusque/2015/afc8a874815e33b25ef747ca04307b95.pdf> Acesso em: 20 de Jun. de 2016.

CAPÍTULO 3

O ENSINO DAS CAPACIDADES ESPACIAIS COMO POSSIBILIDADES PARA A FORMAÇÃO NA DOCÊNCIA

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 30/04/2020

Leila Pessôa Da Costa
Universidade Estadual de Maringá – UEM
Maringá - PR
http://lattes.cnpq.br/6883324486751865

Regina Maria Pavanello
Universidade Estadual de Maringá – UEM
Maringá - PR
http://lattes.cnpq.br/2774964947107

Sandra Regina D'Antonio Verrengia
Universidade Estadual de Maringá – UEM
Maringá - PR
http://lattes.cnpq.br/3671050254381458

RESUMO: Este é um recorte de projeto de pesquisa desenvolvido pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática Escolar – GEPEME/UEM abordando a importância de um processo de formação **na** docência de professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Pesquisas constatam que esses profissionais resistem a trabalhar com questões geométricas por serem estas abordadas de forma pontual nos cursos de formação e faltar-lhes ainda apoio metodológico e de formação **na** docência para empreender esse ensino. Neste recorte apresentamos reflexões sobre o conhecimento necessário às professoras para desenvolverem tarefas relativas às figuras e sólidos geométricos, temas escolhidos por elas por se considerarem sem preparo e formação para tratá-los com seus alunos. A proposta desenvolvida pelo grupo de estudo possibilitou perceber a necessidade de articular o que o professor conhece com o que ele diz conhecer e o que de fato ele desenvolve em sala de aula.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática**.** Anos Iniciais. Ensino de Geometria. Capacidades Espaciais.

TEACHING SPACE CAPACITIES AS POSSIBILITIES FOR FORMATION IN TEACHING

ABSTRACT: This is an excerpt from a research project developed by the Group for Studies and Research in School Mathematics Education - GEPEME / UEM, addressing the importance of a training process in the teaching that teach in the early years of Elementary School. Research shows that these professionals resist indicating that working with geometric issues, as they are addressed in a punctual way in training courses, that they still lack methodological support and

training in teaching to undertake this teaching. In this section we present reflections on the knowledge needed by teachers to develop tasks related to figures and geometric solids, themes chosen by them because they consider themselves without preparation and training to deal with their students. The proposal developed by the study group made it possible to perceive the need to articulate what the teacher knows with what he says he knows and what he actually develops in the classroom.
KEYWORDS: Mathematical Education. Early Years. Geometry teaching. Space capabilities.

1 I INTRODUÇÃO

O ensino da Geometria foi deixado de lado na Educação Básica, talvez pela insegurança de muitos professores em trabalhar com esse eixo da Matemática (PAVANELLO, 1993), levando-os a não a incluir em seu planejamento ou a abordá-la apenas ao final do ano letivo de maneira pontual, acelerada e reduzida.

Apesar da reconhecida importância da Geometria em documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é possível constatar certa resistência, por parte dos professores, especialmente os dos anos iniciais, em trabalhar com as questões geométricas. A insegurança desses docentes em abordar esse eixo da matemática com seus alunos parece provir do fato de ser ele geralmente abordado nos cursos de formação docente de modo pontual, com ênfase somente nas definições, tratando geralmente os conceitos como entidades públicas, sem aprofundamento e/ou ligação com os demais campos da Matemática (PIROLA, 2000), ou seja, o professor não tem o conhecimento necessário para abordar esse conteúdo e/ou apoio material e de formação para realizar essa tarefa.

Considerando a importância do desenvolvimento da percepção espacial para o desenvolvimento infantil e que a quase inexistência de material pedagógico destinado ao ensino deste tema poderia ser uma das causas da não exploração das capacidades espaciais com os alunos, o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática Escolar – GEPEME/UEM se propôs a empreender uma pesquisa objetivando suprir essas necessidades. Tal pesquisa buscou apoio em alguns princípios da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1982), nos estudos de Van Hiele (1999) sobre os níveis de conhecimento em Geometria e no desenvolvimento das Capacidades Espaciais em Geometria (MATOS; GORDO, 1993) para produzir materiais para o ensino de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental como forma de contribuir para a formação **na** docência de professores que atuam nessa etapa da escolaridade.

Uma das etapas dessa pesquisa consistiu em investigar que conhecimento têm professores que atuam nessa etapa da escolarização para explorar os conceitos relativos a figuras e sólidos geométricos, conhecimento este que lhes possibilitaria a promover essa aprendizagem, um processo que passamos a relatar.

2 I DA PESQUISA

Considerando a importância de construir conhecimento sobre o processo de ensino e aprendizagem de temas matemáticos, desenvolvemos uma pesquisa com 13 professoras atuantes nos anos iniciais do Ensino Fundamental em uma escola da região noroeste do Estado do Paraná, com o objetivo de investigar as possibilidades de um processo de formação **na** docência a partir da produção de material destinado ao ensino e à aprendizagem das Capacidades Espaciais em Geometria. A formação **na** docência refere-se aos processos formativos, institucionalizados ou não, os quais esses profissionais se utilizam, depois de formados, no decorrer de sua atuação (DA COSTA, 2017).

A pesquisa, de natureza qualitativa e apoiada em alguns dos pressupostos da Engenharia Didática (ALMOULOUD, 2007), seguiu os seguintes passos: análise preliminar da literatura sobre o desenvolvimento das Capacidades Espaciais em Geometria nos primeiros anos do Ensino Fundamental a fim de identificar quais delas poderiam ser trabalhadas nessa faixa etária; seleção, com as professoras de cada turma, das capacidades a serem exploradas em suas salas de aula; elaboração de tarefas e discussão delas com as professoras a respeito dos conceitos a serem aprofundados em cada turma; acompanhamento, pelos pesquisadores, da aplicação, pelas professoras, das tarefas; análise conjunta de pesquisadores e professoras da aplicação das tarefas; reestruturação e reaplicação das tarefas, quando necessário, tendo em vista sua adequação aos objetivos a serem alcançados com as crianças; apreciação desta reelaboração, tanto com as professoras participantes da pesquisa, como com outros professores atuantes nessa etapa de ensino em eventos dos quais o grupo de pesquisa participou.

As variáveis consideradas no estudo foram: os diferentes sujeitos da pesquisa e seus conhecimentos sobre o objeto de ensino, a disposição das professoras em participar desse tipo de pesquisa, a disponibilidade de material e tempo para o desenvolvimento da tarefa e a faixa etária.

Do ponto de vista teórico, a formação do pensamento geométrico abrange o desenvolvimento das Capacidades Espaciais, ou seja, as habilidades de coordenação visual motora, a memória visual, a percepção figura fundo, a constância perceptual, a percepção das relações espaciais e a discriminação visual (MATOS; GORDO, 1993, p.14). Mas, para que esse desenvolvimento ocorra, não bastam algumas atividades manipulativas como montagens, recortes colagens, etc, que observamos serem desenvolvidas em salas de aula de todos os níveis, em especial nas dos anos iniciais. Mesmo porque, embora possam auxiliar no desenvolvimento da intuição espacial, elas não focam especificamente os conteúdos de matemática.   . Contudo, tais atividades são extremamente importantes, pois auxiliam no desenvolvimento da intuição espacial.

De acordo com o modelo de Van Hiele (1999), as ideias que os alunos têm a respeito da geometria vão progredindo por níveis a partir das suas experiências e contato com os entes geométricos, mas a passagem de um nível a outro, no entanto, dependerá dos estímulos que as crianças recebem. Isso está atrelado a um trabalho a ser desenvolvido pelo professor envolvendo a manipulação e a observação de objetos e figuras.

Neste texto vamos focar especificamente a formação **na** docência das professoras relativa às tarefas a serem aplicadas a seus alunos relacionadas aos dois primeiros níveis de Van Hiele: visualização, em que os alunos compreendem as figuras globalmente, isto é, as figuras são entendidas pela sua aparência, e análise, em que os alunos entendem as figuras como um conjunto das suas propriedades (PONTE & SERRAZINA, 2000, p. 178).

3 | DAS TAREFAS SELECIONADAS

Para os 2ºs anos duas tarefas foram selecionadas:

a) **Tarefa 1**- Objetivo: Perceber as características de diferentes figuras geométricas. Orientações aos professores:

- Organizar os alunos em 5 grupos. Cada grupo receberá um envelope com diferentes figuras:

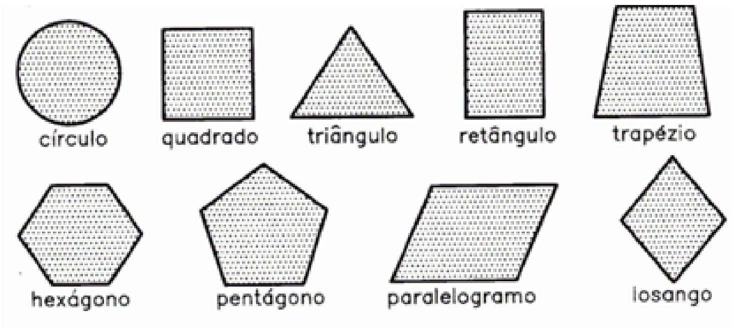


Figura 1: Figuras utilizadas

Fonte: Das Pesquisadoras (2017)

Figura 2: Material utilizado (2017)

Fonte: Das Pesquisadoras (2017)

- Solicitar que classifiquem as figuras a partir de suas características (não haverá orientações sobre as propriedades de cada grupo, cabendo ao aluno a identificação de características comuns entre os elementos): separe as figuras em 2 grupos. Justifique. Continuar com 3 grupos, 4 grupos, justificando sempre a organização proposta.

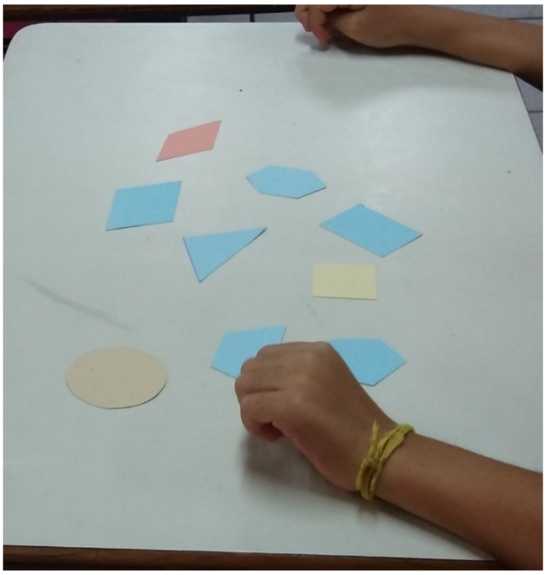


Figura 3: Classificação das figuras geométricas (2017)

Fonte: Das Pesquisadoras (2017)

- Bingo das figuras: os alunos deverão escolher peças que estarão contidas em uma caixa e montar sua cartela para jogar o bingo.
- Ao retirar a figura da caixa o professor deverá identifica-las por meio das características das figuras de acordo com as justificativas dadas anteriormente quando de sua organização.
- Organizar um texto coletivo com as observações dos alunos: O que pudemos observar com essa atividade?

b) **Tarefa 2** - Objetivo: Perceber as características de diferentes sólidos geométricos (prisma, pirâmide e corpos redondos). Orientações aos professores:

- Contar a história: “O homem que amava caixas” de Stephen Michael King, da Ed. Brinque-Book (1997).
- Montar um castelo com diferentes tipos de sólidos. Deve ter pelo menos uma peça para cada uma das crianças.

Figura 4: Sólidos geométricos (2017)

Fonte: Das Pesquisadoras (2017)

Figura 5: Castelo com os Sólidos geométricos (2017)

Fonte: Das Pesquisadoras (2017)

- Posteriormente colocar 3 bambolês no espaço e em cada um deles um sólido a saber um prisma, uma pirâmide e um corpos redondo. Dando início assim a uma possível classificação.
- Solicitar aos alunos que pegue uma das peças do castelo e coloque em um dos bambolês que tenha uma peça com características "parecida". Pedir que explique o porquê da escolha.
- Organizar um texto coletivo com as observações dos alunos: O que pudemos observar com essa atividade?

Para os 3ºs anos, as tarefas selecionadas foram as seguintes:

a) **Tarefa 1** - Objetivo: Identificar partes dos poliedros: faces, vértices e arestas.

Orientações aos professores:

- Cada criança escolhe um sólido para reproduzir com canudos e massa de modelar;

Figura 6: Sólidos geométricos (2017)

Fonte: Das Pesquisadoras (2017)

- Após a montagem, explorar com os alunos as partes do sólido montado;
- Nomear as partes observadas (faces, vértices, arestas);
- Observar que as faces são vazadas e que deveremos "cobri-las".
- Trocar o sólido com um amigo, que deverá identificar quais as formas poderão usar para cobrir os lados (as faces) dos sólidos.
- Organizar um texto coletivo com as observações dos alunos: O que pudemos observar com essa atividade?

b) **Tarefa 2** - Objetivo: Identificar as faces de um poliedro. Orientações aos professores:

- Cada criança deverá escolher um sólido.
- Decalcar as faces do sólido

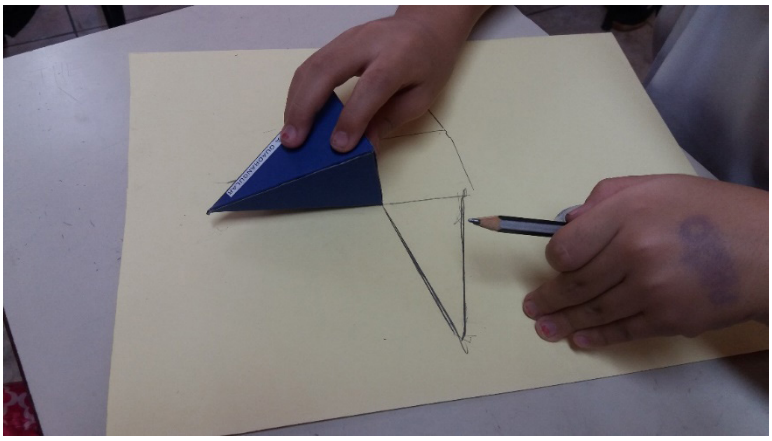


Figura 7: Decalcando as faces do sólido geométrico (2017)

Fonte: Das Pesquisadoras (2017)

- Pintar as faces

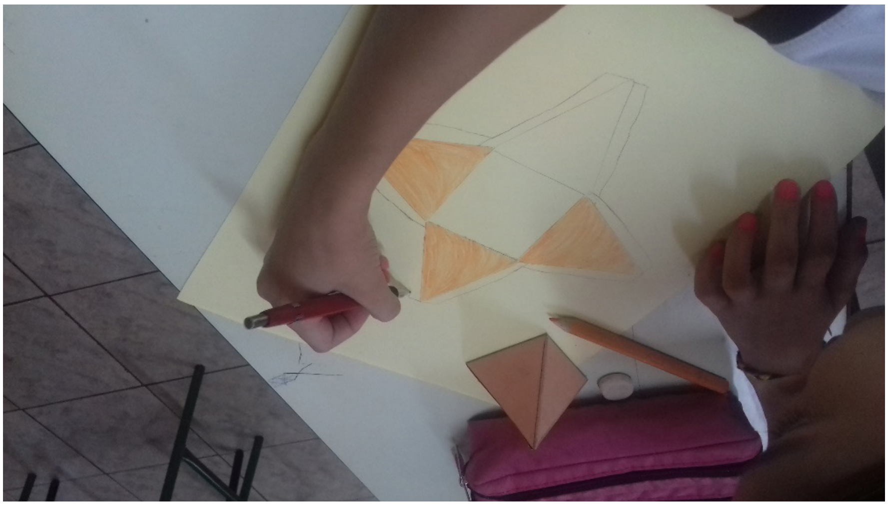


Figura 8: Pintura das faces do sólido geométrico (2017)

Fonte: Das Pesquisadoras (2017)

- Trocar com o amigo para que ele possa recortar a montagem feita e identifique qual sólido foi escolhido.
- Organizar um texto coletivo com as observações dos alunos: O que pudemos observar com essa atividade?

4 I REFLETINDO SOBRE O PROCESSO DE FORMAÇÃO NA DOCÊNCIA

Nossas reflexões consideram o conhecimento necessário aos professores para desenvolverem e aplicarem tarefas relativas às figuras geométricas, desenvolvidas com alunos do 2º ano, e com sólidos geométricos (com os de 3º ano), temas escolhidos por elas por se considerarem sem preparo e formação para tratá-los com seus alunos.

Na discussão com as professoras sobre a abordagem metodológica das figuras planas a partir de suas propriedades ficou evidente seu desconhecimento sobre o que considerar como característica como característica de uma figura e, consequentemente, como explorar esse conhecimento com os alunos.

Percebemos ser necessário explicitar às professoras que uma figura tem elementos característicos: lados (número e tamanho) e vértices (número) e ângulos, conhecimentos fundamentais para poder classificar as figuras que foram apresentadas. Apesar de essa discussão ter sido feita com elas quando da proposição da tarefa, a execução desta evidenciou que a ação de classificar – uma atividade básica do pensamento humano e necessária ao conhecimento matemático – era uma habilidade que lhes era desconhecida, o que dificultava o desenvolvimento do que havia sido planejado.

Isso nos alertou para o fato de haver um abismo entre o que se planeja e se executa na prática docente, permeado pelo conhecimento que o docente tem do conteúdo de ensino. Nosso trabalho nos mostrou ser possível transpor esse abismo ao acompanharmos e retomarmos discussão sobre o conhecimento matemático e as estratégias de ensino, após o que as professoras realizarem a aplicação contribuindo para que de fato a formação fosse bem-sucedida.

Nas tarefas desenvolvidas com os sólidos geométricos, também foi necessário evidenciar suas características: faces, vértices e arestas e a condução do trabalho proposto evidenciou os mesmos problemas já observados anteriormente.

Essas observações nos fazem considerar que o desenvolvimento dos níveis propostos por Van Hiele não é simples, especialmente no que se refere à análise das figuras, evidenciando que essa evolução não ocorre com facilidade, mesmo em adultos, sem que haja um conhecimento matemático subjacente a essa análise, visto que, neste nível, as figuras geométricas já não são reconhecidas pelo que parecem, mas sim por algumas características que possuem, como número de lados, ângulos, etc. (VAN HIELE, 1999).

Podemos acrescentar a isso, o que Flavell (1975) observa sobre o desenvolvimento infantil:

> [...] tanto nas tarefas perceptivas, como nas intelectuais, a criança inicialmente confia muito em percepções passivas, imediatas, dominadas pela centração, e lenta e gradualmente as apoia em processos mais ativos – operações intelectuais e atividade perceptiva, inferências e pré-inferências sempre que as condições permitem (FLAVELL, 1975, p. 360).

Motivo pelo qual é de suma importância que os professores proponham tarefas às crianças que as façam refletir, que causem rupturas, desequilíbrios, pois será a partir dessas rupturas e desequilíbrios que as crianças transformarão e ampliarão os conceitos que já trazem consigo a respeito da Geometria. O que, do mesmo modo, ocorre em situações de formação **na** docência.

Como o trabalho em sala de aula se apoia, em geral, nos livros e orientações didáticas, muitas proposições que neles(as) se fazem, desconhecem ou inferem o saber do professor sobre o objeto de conhecimento, o que se evidenciou na proposta desenvolvida pelo grupo de estudo, a qual possibilitou percebermos a necessidade de articular o que o professor conhece com o que ele diz conhecer e o que de fato ele desenvolve em sala de aula.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho realizado corroborou o que outras pesquisas já haviam demonstrado sobre a falta de conhecimento dos professores com relação aos conceitos geométricos e, portanto, sua resistência em trabalhar com tal eixo da matemática. No entanto, observamos que, ao serem chamadas a estudar tais questões, as participantes da pesquisa sentiram-se mais à vontade para opinar sobre os temas a serem trabalhados, sugerindo tarefas a serem desenvolvidas, vivenciando e analisando a aplicação destas, demonstrando assim terem alcançado um maior conhecimento sobre os temas abordados.

Esse percurso formativo deixou visível a importância não só do planejamento metodológico das tarefas a serem desenvolvidas, como também a necessidade de o professor ter um conhecimento mais elaborado sobre o objeto a ser ensinado para que possa intervir significativamente na aprendizagem dos alunos, caso contrário o ensino corre o risco de não produzir o que se espera dele: a promoção dos alunos para um nível de conhecimento mais elevado.

Consideramos, ao final do trabalho, que o processo contribuiu não só para a compreensão das professoras a respeito dos temas abordados como ressaltou a importância desses temas para o desenvolvimento das crianças da faixa etária em que atuam. Além disso, o fato de terem participado da pesquisa também lhes ofereceu a oportunidade de vislumbrar outras possibilidades para a exploração do conhecimento matemático em questão, contribuindo, assim, com seu desenvolvimento profissional.

Embora os resultados alcançados sejam em geral positivos é necessário ressaltar que, para uma mudança profunda na atuação das professoras e para o seu aprofundamento teórico em relação aos conhecimentos matemáticos abordados, seria necessário que o tempo para essa formação fosse ampliado, permitindo que se pensasse sobre todos os elementos envolvidos no processo educativo.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches em Didactique des Mathétimaques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Édictions, v. 3.1, p. 5-64, 1982.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, SEB, 2017. Disponível in: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versaofinal.pdf>. Acesso em 04 maio 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretrizes curriculares nacionais. Brasília: MEC, SEB, 2010. Disponível in: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=9769-diretrizescurriculares-2012&category_slug=janeiro-2012-pdf&Itemid=30192>. Acesso em 04 maio 2018.

DA COSTA, L. P.; PAVANELLO, R. M. **Números e operações:** uma discussão da prática docente nos anos iniciais do ensino fundamental. Curitiba: CRV, 2017.

FLAVELL, J. H. **A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget**. São Paulo: Livraria Pioneira, 1975

KING, Stephen Michael. **O homem que amava caixas.** Brinque-Book, 1997.

MATOS, José Manuel; GORDO, Maria de Fátima. Visualização Espacial: algumas atividades. **Educação Matemática**. Lisboa, PT, nº 26, 1993, pp. 13-17.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil**: causas e consequências. Revista Zetetiké, ano I, n. 1, p. 7-17, 1993.

PIROLA, Nelson Antônio. **Solução de problemas geométricos**: dificuldades e perspectivas. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

PONTE, J; & SERRAZINA, M. **Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

VAN HIELE, P. M. Developing geometric thinking through activities that begin with play. **Teaching Children Mathematics.** Vol 6, p. 310-316.

CAPÍTULO 4

OS IMPACTOS DOS RECURSOS DIDÁTICOS NA FORMAÇÃO DOCENTE NO PROGRAMA GESTAR MATEMÁTICA

Data de aceite: 05/06/2020

Sheyla Silva Thé Freitas
Universidade Estadual do Ceará – UECE / UAB
Fortaleza - Ceará http://lattes.cnpq.br/0495542790879175

Valmiro de Santiago Lima
Universidade Estadual do Ceará – UECE / UAB
Fortaleza - Ceará
http://lattes.cnpq.br/0339869829457971

RESUMO: A formação do professor não pode ficar apenas no término de um curso de graduação e à medida que esse profissional adentra o universo da sala de aula surgem questões que não foram respondidas no decorrer desse curso, forçando-o a buscarem uma formação continuada que muitas vezes estão relacionadas à teoria do que a prática. Isso não é diferente com os educadores do Ensino Fundamental - anos iniciais, que ensinam a disciplina de matemática e muitas vezes não estão plenamente preparados para ministrar os conteúdos dessa ciência com maestria. Embora os cursos de Pedagogia enfatizem a importância da formação em matemática, ainda é insuficiente, na matriz curricular tal conteúdo. Na perspectiva de contribuir, principalmente com esses profissionais da educação que buscam na formação continuada o aporte didático que venha melhorar e corroborar com sua prática docente, o MEC lançou em 2001 o programa Gestar: Matemática, direcionado aos ensinantes da rede pública de ensino. Esse estudo pretende discutir concepções vivenciadas com o foco no material manipulativo empregado no decorrer das formações desse programa. Foi constatado em número significativo que os docentes participantes dessas capacitações incorporaram e reconfiguraram suas práticas dentro das concepções de material manipulativo que foram apresentados no Gestar Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Gestar Matemática. Formação Continuada. Materiais Manipuláveis.

ABSTRACT: Teacher training cannot be only at the end of a graduate course and as this professional enters the classroom universe, questions appear that were not answered during the course, forcing him to seek continuing education that are often related to the theory of what the practice. This is not different with educators and they are often not fully prepared to teach the contents of this science with mastery. Although Pedagogy courses emphasize the importance of training in math, the content is

still insufficient in the curriculum. In the perspective to contribute, mainly with this education professionals that search in the continuing formation the didactic contribution that will improve and corroborate with your teaching practice, the Ministry of Education launched in 2001 the Gestar Mathematics Program, directed to the public-school teachers. This study intends to discuss conceptions experienced with a focus on the manipulative material used during the course of this program. It was found in a significant number that the teachers participating in these training courses incorporated and reconfigured their practices within the conceptions of manipulative material that were presented in Gestar Mathematics.
KEY-WORDS: Math education. Gestar Mathematics. Continuing formation. Manipulable materials.

1 I INTRODUÇÃO

A temática sobre formação docente em Educação Matemática nos últimos anos vem intensificando o interesse por parte da comunidade acadêmica e pesquisadores, com o intuito de melhorar a metodologia do professor de Matemática no Ensino Básico, na perspectiva de propostas "como fazer Matemática em sala de aula" muitas são as teorias e teóricos que contribuem na busca da qualidade educacional. Oficialmente no Brasil, este fato toma corpo sólido nacionalmente com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), motivando o docente a aprimorar sua práxis. Nesse sentido, as formações continuadas promovidas pelos órgãos oficiais educacionais primam por aprendizagens de qualidade para a comunidade estudantil.

Desse modo, pesquisas em Educação Matemática no século XXI têm sido alavancadas por várias formas, tanto no lado didático-pedagógico quanto no aspecto formal do conteúdo. Contudo, desencadear-se uma reflexão em todos os níveis de ensino, principalmente relacionado à queda no ensino e na aprendizagem matemática do aluno averiguada pelos sistemas de avaliações em larga escala. Nesta situação, o ensino da Matemática deve ter como objetivo preparar o discente para resolver problemas da vida real, desenvolvendo a criticidade intelectual como também, o raciocínio lógico e dedutivo com significado. Considerando o estudante como aquele que aprende em todas as suas dimensões e contextos.

Partindo dessas premissas, surgem às metodologias ou tendências diferenciadas que se destacam entre os estudos nas vertentes: História da Matemática, Modelagem Matemática, Tecnologia da Informação, Etnomatemática, Resolução de Problemas e os Jogos educativos dentre outros. Essas metodologias compõem uma série de possibilidades que o professor tem ao seu dispor para escolher a melhor forma de ensinar um conteúdo de Matemática aos aprendentes, em que vislumbrem significados no contexto social.

Nessa perspectiva, o educador nas abordagens dos conteúdos necessários às aprendizagens matemáticas aos discentes, percebem-se distinções relevantes entre

> a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar é que se refere ao papel e aos significados das definições e das demonstrações em cada um desses campos do conhecimento matemático (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 22).

Nesse contexto, a conceituação formal irmana-se com a matemática da sala de aula de forma contextualizada na percepção do aluno e como instrumento facilitador do ensino. Assim, esse estudo tem o intuito de discutir as concepções vivenciadas no decorrer das práticas exercidas por estes profissionais da educação na formação inicial destes, as lacunas deixadas podem ser superadas com formações continuadas, e com o programa Gestar Matemática, com foco nos recursos didáticos, material manipulativo e jogos que foram empregados nos cursos nessa modalidade com os discentes regentes da disciplina de matemática a serem abordadas em sua atuação facilitadora em sala de aula.

2 I OS CAMINHOS NA FORMAÇÃO DOCENTE

A concepção da formação inicial do professor de Matemática apresenta lacunas quando este se defronta com sua prática compartilhada com os estudantes no processo de ensinagem. Sendo assim, aflora a necessidade da complementaridade de práticas pedagógicas aportadas em cursos de formação continuada referendando metodologias diferenciadas de sua práxis no processo de ensino desta ciência e na compreensão de conceitos inerentes a essa disciplina em aprendizagens significativas para os discentes, em uma concepção macro de parcerias para o ensino de qualidade.

2.1 Os jogos no ensino e na aprendizagem da Matemática

Os jogos são instrumentos que estimulam a curiosidade levando aquele que interage ao prazer e a aprendizagem a partir do lúdico, segundo Huizinga (2008, p. 13): “o jogo lança sobre nós um feitiço: é ‘fascinante’, ‘cativante’. Está cheio das duas qualidades mais nobres que somos capazes de ver nas coisas: o ritmo e a harmonia”, desse modo, podem explorá-lo no contexto da aprendizagem instigando a imaginação dos discentes. Levando-os a ganhos significativos entre eles: cognitivos, emocional, moral e social como pontua Piaget (2010), não esquecendo também, que o mesmo eleva a autoestima, na promoção do emprego de regras estabelecidas de convivência social e participação ativa dos estudantes.

Desse modo, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática corrobora no “aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer” (BRASIL, 1997, p. 49).

Com base nessa concepção, Lara (2003) menciona que existem quatro tipos de jogos que podem ser abordados em sala de aula: os de construção, os de aprofundamento, os de estratégia e os de treinamento.

> **Jogos de construção proporciona** ao aluno um novo conhecimento por meio de materiais manipulativos, levando-o a abstrações matemáticas e oportunizando-o a construir seu próprio aprendizado;
>
> **Jogos de treinamento** auxilia no desenvolvimento de um pensamento dedutivo ou lógico mais rápido, através de exercícios repetitivos que serve de termômetro para medir o real entendimento que o aluno obteve;
>
> **Jogos de aprofundamento**, após estudar determinado assunto o aluno poderá aprofundar esse conhecimento aplicando-os em diversas situações principalmente na forma de jogos;
>
> **Jogos estratégicos** cria ações para uma melhor atuação. Leva o aluno a criar hipóteses e desenvolver um pensamento sistêmico, podendo pensar múltiplas alternativas para resolver um determinado problema (LARA, 2003, p. 25-27).

Entre os quais os jogos de estratégia e os de treinamentos são os mais utilizados em sala de aula. Para serem aplicados devem ter regras bem definidas e aceitas pelos participantes para que produza os efeitos pedagógicos desejados sendo dirigido por educadores.

Nesse sentido, Campos (2015), contribui positivamente ao salientar que

> A proposta de usar jogos no ensino da Matemática é ir além de metodologias tradicionais, baseada na memorização. Os alunos hoje precisam de desafios, de atividades as quais construam conhecimento, analisem, questionem e sintetizem as informações recebidas, criando uma ponte entre as informações e sua realidade de vida (CAMPOS, 2015, p. 39).

Dessa forma, os materiais manipuláveis também podem ser utilizados como atividade pedagógica, por exemplo, o material dourado, para facilitar a compreensão do sistema de numeração de base dez, ressalta-se que este não é posicional, o ábaco para aquisição do conceito das operações básicas elementares, na perspectiva da compreensão do sistema decimal posicional e tantos outros.

No contexto das formações de matemática tivemos a oportunidade de trabalhar com o programa Gestar Matemática na formação continuada em alguns municípios do Estado do Ceará que se encontravam na Zona de Atendimento Prioritário (ZAP). Entre eles estavam os municípios de Caucaia, Crato e Juazeiro do Norte, nos quais, participamos como Formador/ Especialista.

Na perspectiva da formação docente em promover novos professores formadores e multiplicadores no processo de ensino para as aprendizagens discentes com significado, sabe-se que

> as ideias fundamentais que vão se desenvolver até a formação do conceito de número natural começam a ser elaborado muito cedo pelas crianças, a partir principalmente de atividades associadas à contagem e à ordenação de objetos (MOREIRA; DAVID, 2007, p. 47).

Dessa maneira, o educador deve dispor de uma gama de recursos didáticos em suas ações de ensinagem dos conceitos matemáticos aos aprendizes. Sendo assim, as concepções das operações aritméticas básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão dos números naturais, aportam-se em metodologias com os recursos dos materiais manipuláveis, jogos e instrumentos que facilitem a compreensão do aluno.

Desse modo, a formação continuada foi apresentada e direcionada para alguns professores do ensino básico da rede pública municipal que foram agraciados com a denominação (titulação) de Formador/Tutor, no qual tinham como missão serem multiplicadores e socializadores do conhecimento adquirido para os demais regentes da disciplina de matemática do sistema de ensino em seus respectivos municípios. Cada município teve sua formação continuada. Iniciamos a formação pelo município do Crato, no qual os encontros se deram de novembro a dezembro de 2005. Em Juazeiro do Norte a capacitação aconteceu durante o período do mês de agosto de 2006, e para finalizar os trabalhos no programa Gestar Matemática, foi contemplado o município de Caucaia, a formação ocorreu em setembro de 2006. Ressalta-se que todas as formações contabilizaram uma carga horária de 120h/a presenciais por município e um acompanhamento de assessoria de quarenta horas.

Essas capacitações tiveram por objetivo conscientizar os professores regentes na disciplina de matemática a refletirem suas práticas docentes e aprofundarem seus conhecimentos matemáticos.

Os trabalhos transcorreram por meio de oficinas com materiais manipuláveis contemplando os conceitos matemáticos a serem utilizados na prática docente destes na sala de aula. Os formadores/tutores participaram ativamente das oficinas e sempre trazendo inovações para ser aplicado em sala de aula. Momento de interação dos profissionais da educação básica.

As experiências com os formadores/tutores emergiram propostas de novas metodologias e elaboração de oficinas contemplando conceitos matemáticos dos materiais de estudo. Nesse contexto, os jogos e materiais manipuláveis como recursos facilitadores do processo de ensino e aprendizagem, na compreensão de conceitos matemáticos e desenvolvimento de habilidades na aquisição de estratégias e metodologias didáticas poderão fazer a diferença nas aulas de matemática, ampliando saberes significativos aos alunos.

Ensinar matemática utilizando recursos como materiais manipuláveis ou jogos didáticos, no direcionamento pedagógico é no mínimo favorecer e estimular o pensamento, a criatividade e a capacidade de solucionar problemas. Esses agentes tornam a aprendizagem significativa e desenvolve o raciocínio lógico matemático, proporcionando ao aluno resolver situações problemas do particular às generalizações na autonomia discente.

2.2 GESTAR: contribuição para a formação do Professor de Matemática

O Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – GESTAR é gerenciado pelo Fundo de Fortalecimento das Escolas – Fundescola, e configura-se como um conjunto de ações articuladas a serem desenvolvidas junto aos docentes que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental na Educação Básica e estejam no exercício do magistério na rede pública de ensino.

Tem como finalidade oferecer uma contribuição de qualidade no atendimento ao docente, reforçando a competência e autonomia dos professores em suas atividades pedagógicas. Este programa é caracterizado pelo acompanhamento presencial e semipresencial com apoio aos professores participantes.

Assim, a formação do professor converge para a qualidade da aprendizagem nos anos iniciais de escolarização quando os alunos estão aptos a adquirirem importantes ferramentas para elaborar o pensamento crítico. Nesse sentido, o GESTAR direciona ações articuladas de intervenção na prática cotidiana do participante, como aponta o Guia Geral:

- o desenvolvimento de um curso de formação continuada em serviço a ser desenvolvido ao longo de quatro semestres/módulos;
- a ênfase na importância da avaliação diagnostica dos alunos, cujos professores participam do curso de formação, com base nos descritores de Língua Portuguesa e de Matemática;
- a organização de atividades de autoavaliação para os professores visando ao mapeamento de seu desenvolvimento profissional;
- a organização de acervo de aulas de Língua Portuguesa e de Matemática, como recurso de apoio a aprendizagem dos alunos (BRASIL, 2005, p. 7).

Visando o desenvolvimento da linguagem escrita e da linguagem matemática aprimorando o pensamento lógico, as relações simbólicas, as representações, as expressões, a interpretação e a construção de sentidos. A intenção é vincular as duas linguagens no aprimoramento da qualificação do ensinante no processo de ensino e aprendizagem e dar condições às crianças no desenvolvimento das competências e habilidades da língua materna e da compreensão leitora matemática.

O material do programa compreende em sua composição por um guia geral, cadernos de orientações metodológicas em dois volumes, os cadernos de Teoria e Prática (TP) em oito volumes e os cadernos de Atividades e de Apoio à Aprendizagem (AAA) em sete volumes, distribuídos com os professores formadores e posteriormente aos participantes. As formações dos professores formadores em 120 h/a e dos professores participantes em 240 h/a. As avaliações com os discentes ocorreram em dois momentos, o primeiro no início das atividades e o segundo momento em até seis meses após o término da implementação do programa Gestar Matemática.

2.3 Matemática no mundo de hoje

Os processos de assimilação de conhecimento pelo homem começam desde o nascimento e transcorre toda a sua vida. Isto é, o meio em que este ser está inserido tem um papel fundamental no seu desenvolvimento, nas inter-relações com o meio e seus pares que intercedem na aquisição e desenvolvimento do conhecimento, favorecendo o aprendizado.

Nessa perspectiva, essa tônica não é privilégio do momento atual, os homens em todas as épocas interagiram com a matemática no mundo físico, social e cultural, para a sua sobrevivência, na geração do bem-estar e segurança, na compreensão de fenômenos naturais e na elaboração de ferramentas que o auxiliassem em sua evolução natural.

A formação do professor passa por varias vertentes e a,

> experiência de magistério é fundamental para a orientação didática do professor, porque ela aguça a percepção docente fornecendo indicações de ordem didática, tais como: dosagem de nível de conteúdo a ser ministrado, ritmo de aula, pontos de aprendizagem mais difíceis, exemplos mais eficientes à aprendizagem, livros didáticos mais adequados à realidade na qual leciona, entre outros (LORENZATO, 2010, p. 9).

Nesse contexto, a formação inicial e continuada docente deve estar intermediada por atualizações no campo da matemática, tendo em vista a globalização em todas as áreas de conhecimentos, dessa maneira o professor será um agente promotor de excelência para uma educação de qualidade.

2.4 Resolução de problemas

Esta técnica propicia ao aluno o desenvolvimento de habilidades e competências na construção de diferentes modos de raciocínio na aquisição do conhecimento matemático, para o enfrentamento das situações desafiadoras e na elaboração de estratégias de resolução de problemas. O desenvolvimento de habilidades como identificar elementos matemáticos, interpretar situações problemas, estabelecer relações, validar processos, argumentar e comunicar em diferentes linguagens e raciocinar por meio de dedução, intuição, indução ou estimativa, para o enfrentamento de situações desafiadoras que exigem o desenvolvimento de estratégias de resolução dos desafios apresentados.

Um dos objetivos da Matemática é descobrir a regularidade em meio da desordem e confusão, na possibilidade de tirar a estrutura e a invariância, descobrir padrões e estar direcionado para a procura de relações. Dessa forma, na resolução de problemas de matemática é necessário avaliar a capacidade do estudante de observar, estabelecer relações, comunicar-se em diferentes linguagens, argumentar e validar processos, estimular o raciocínio como intuição, dedução e estimativas. Nesse sentido,

> a principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas, não simplesmente repetir o que outras gerações já fizeram. Homens que sejam criadores, inventores, descobridores. A segunda meta da educação é formar mentes que estejam em condições de criticar, verificar e não aceitar tudo que a elas se propõe (MACHADO, 2009, p. 67).

Nesse contexto, o processo educativo no campo da educação escolar, tem no educador papel fundamental que é estimular no aluno a curiosidade, o questionamento crítico no despertar da investigação acadêmica nesse aprendente.

A resolução de problemas em matemática é um dos métodos elucidativos que os estudantes dispõem nessa arte, mas alguns aprendizes ficam indecisos diante de um problema, apesar de conheceram o conteúdo, para isso é fundamental a discussão sobre estratégias na resolução de problemas, sistematização e representações. As quatro fases na arte de resolver problemas são:

> Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (POLYA, 2006, p. 4).

Observa-se que estas etapas na arte de resolver problemas matemáticos, devem ter as características ou tipos de problemas na tomada de decisão, análise e identificação de erros. Na imersão do contexto do problema, o significado deve estar na observância da distância ou não do ambiente da sala de aula. Verificar as disciplinas envolvidas como matemática, ciências, literatura etc. Aflorando a compreensão interdisciplinar das ciências pelos aprendentes.

2.5 Modelagem matemática

A tradução de uma situação problema da vida real para uma solução matemática denomina-se matematização ou modelagem matemática, para isso é importante a compreensão da situação apresentada para elaboração de estratégia no enfrentamento da situação apresentada, que é a área do conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever comportamentos dos mesmos, sendo empregado em diversos campos de estudo, tais como Física, Química, Biologia, Economia e Engenharia, a matematização consiste na arte de descrever matematicamente um fenômeno.

> Transição entre os diferentes registros de representação. Transição da linguagem natural à matemática e vice-versa. Construção de modelos matemáticos. Argumentação, habilidade de conjecturar e partir de suposições. Busca de analogias. Identificação de noções prévias. Identificação de obstáculos. Uso da tecnologia eletrônica (GALLARDO, 2015, p. 115).

Nesse contexto, a matematização é um recurso, técnica de compreender o mundo e resolver situações problemas do cotidiano, entender e explicar fenômenos, estimar e projetar possibilidades em maximizar a eficiência do homem no ambiente social.

A modelagem matemática envolve a tradução do problema da vida real para a matemática, esse processo inclui atividades de identificar a Matemática como relevante em relação a um problema situado na realidade, representar um problema de forma diversificada para organizá-lo de acordo com conceitos matemáticos e formular premissas apropriadas e, compreender relações entre a linguagem do problema na linguagem de símbolos e formal, que é necessária para interpretá-lo matematicamente na busca de encontrar regularidades, relações, padrões em reconhecer aspectos isomorfos em relação a problemas conhecidos para traduzi-lo em um modelo matemático.

Assim, aprofundar os conhecimentos matemáticos fortalece a contribuição da Matemática para outras áreas do saber e promove a arte de resolver problemas cotidianos. Desse modo, para começar uma caminhada no saber matemático, deve-se iniciar com passos simples e lógicos para que "avancemos numa direção clara e firme, com passadas longas e visão apurada, precisaremos de bem menos que as centenas de milhares de passos necessários para a viagem de mil quilômetros" (TAO, 2013, p. 1), as técnicas na arte da modelagem matemática perpassa pelos conhecimentos conquistados nessa ciência e amadurecimento intelectual.

Nesse contexto, a formação do professor quando fomenta e capacita esse profissional de instrumentos e técnicas de ensino, o docente torna-se um facilitador nas aprendizagens discentes.

3 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer dos trabalhos realizados no programa Gestar Matemática, no desenvolvimento das atividades foi percebido que nas elaborações das oficinas contemplando as TP e AAA, com abordagens específicas dos conteúdos matemáticos selecionados nos referidos manuais do projeto houve uma abertura para as práticas a serem desenvolvidas em sala de aulas.

Os professores formadores se apropriaram de técnicas e meios nas abordagens de conteúdos matemáticos, com a utilização de materiais manipuláveis na confecção de instrumentos didáticos, pois perceberam a importância desses recursos no fazer da sala de aula.

Percebendo que a construção desses instrumentais com os alunos promovem a aprendizagem de forma significativa nos saberes matemáticos concebidos através da prática e interação com os participantes.

Nesse sentido, os materiais industrializados estruturados ficam no segundo plano, pois, dependem de ações administrativas dos gestores educacionais, de políticas e verbas que contemplam os planejamentos educacionais.

Os docentes perceberam que tinham potencial para produzi-los e incrementar em oficinas nas construções didáticas pedagógicas às ações de ensino dos conteúdos matemáticos e nas aprendizagens estudantis.

Constatou-se que a formação promoveu profissionais motivados com a autoestima elevada, assumindo a postura de agentes propagadores dessas ideias, que seriam socializadas com os professores participantes em outras capacitações. Dinamizando conhecimentos significativos, ampliando e inovando recursos didáticos nas aulas de matemática. Fazendo com que o aprendiz perceba a matemática como essencial para a vida na sociedade.

REFERÊNCIAS

BRASIL. FUNDESCOLA/DIPRO/FNDE/MEC. **Programa de Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar I:** Matemática – Guia Geral. Brasília: MEC, 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CAMPOS, Ana Maria Antunes de. **Jogos matemáticos:** uma nova perspectiva para discalculia. Rio de Janeiro: Wak Editora, 2015.

GALLARDO, Patricia Camarena. **Teoria de las ciências em contexto y su relación com las competências**. ***Revista Ingenium***, [s.l.] Bogotá, v. 16, n. 31, p.108-127, jul. 2015. Semestral. Universidad de San Buenaventura. http://dx.doi.org/10.21500/issn.0124-7492.

HUIZINGA, Johan. **Homo ludens:** o jogo como elemento da cultura. 5. ed. 3ª reimp. São Paulo: Perspectiva, 2008. Tradução de João Paulo Monteiro.

LARA, Isabel Cristina Machado de. **Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª** série. São Paulo: Rêspel, 2003.

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender Matemática.** 3. ed. São Paulo: Editora Autores Associados, 2010.

MACHADO, Nilson José. **Educação competência e qualidade.** São Paulo: Editora Escrituras, 2009.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **A formação matemática do professor:** licenciatura e prática docente escolar. 1 reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

PIAGET, Jean William Fritz. **Seis estudos de psicologia**. 24. ed. 8ª reimp. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2010. Tradução de Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006. 203 p. Tradução de: Heitor Lisboa Araújo.

TAO, Terence. **Como resolver problemas matemáticos:** uma perspectiva pessoal. Rio de Janeiro: Editora Sbm, 2013.

CAPÍTULO 5

OS NÚMEROS E AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS ELEMENTARES: DO CONHECIMENTO DOCENTE E DAS PRÁTICAS DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS DESENVOLVIDAS

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 20/05/2020

Leila Pessôa Da Costa
Universidade Estadual de Maringá – UEM
Maringá - PR
http://lattes.cnpq.br/6883324486751865

Regina Maria Pavanello
Universidade Estadual de Maringá – UEM
Maringá – PR
http://lattes.cnpq.br/2774964947107

RESUMO: Este trabalho tem como referência os conteúdos relacionados a Números e Operações Aritméticas (NO) objetivando apresentar algumas reflexões sobre o que professoras do 4º e 5º anos do Ensino Fundamental (EF) demonstram compreender sobre esses conteúdos e os encaminhamentos didático pedagógicos adotados por elas para seu ensino. São dados oriundos de uma pesquisa que utilizou, como instrumentos de coleta de dados, entrevistas, observações em sala de aula, discussões com as professoras, entre outros. Observou-se que as professoras se empenham ao máximo para realizarem o que consideram um bom trabalho: o cumprimento do planejamento e um bom desempenho dos estudantes nas avaliações, mas sentem dificuldades em articular os conhecimentos (o matemático, os do professor e os do aluno). A pesquisa nos permitiu evidenciar essas dificuldades e afirmar que a superação desses aspectos depende de o professor se sentir amparado e apoiado no encaminhamento das questões que surgem nesse contexto.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática**;** Formação Docente; Números e Operações Aritméticas Elementares; Anos Iniciais.

NUMBERS AND BASIC ARITHMETIC OPERATIONS: ONTEACHING KNOWLEDGE AND DIDACTIC-PEDAGOGICAL PRACTICES DEVELOPED

ABSTRACT: This work has as reference the contents related to Arithmetic Numbers and Operations (NO) aiming to present some reflections on what teachers of the 4th and 5th years of Elementary School (EF) show to understand about these contents and the didactic pedagogical guidelines adopted by them. These are data from a survey that used as data collection tools, interviews, classroom observations, discussions with teachers, among others. It was observed that the teachers do

their best to accomplish what they consider a good job: the fulfillment of the planning and a good performance of the students in the evaluations, but they have difficulties in articulating the knowledge: mathematical, those of the teacher and those of the student. The research allowed us to highlight these difficulties and affirm that overcoming these aspects depends on the teacher feeling supported and supported in addressing the issues that arise in this context.
KEYWORDS: Mathematics Education; Teacher Training; Elementary Arithmetic Numbers and Operations; Initial Years.

1 I INTRODUÇÃO

Este trabalho é um recorte de pesquisa que teve como objetivo investigar as possíveis contribuições de um processo de reflexão sobre a prática em sala de aula a partir dos erros apresentados pelos alunos relacionados ao tema Números e Operações Aritméticas (NO) no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental (EF).

Uma das ações empreendidas na pesquisa realizada e que abordaremos brevemente neste texto foi investigar o que as professoras[1] demonstram compreender sobre os conteúdos e os encaminhamentos didático-pedagógicos por elas adotados em relação ao tema pesquisado.

A pesquisa foi desenvolvida em duas escolas da rede municipal de ensino de um município situado na região noroeste do Estado do Paraná, nomeadas respectivamente por A e B, e contou com a colaboração de dez professoras atuantes em classes de 4º e 5º ano do EF, sendo quatro delas da Escola A (P1A, P2A, P3A, P4A) e seis da Escola B (P1B, P2B, P3B, P4B, P5B e P6B).

Fazem parte dos dados coletados os resultados uma entrevista inicial semiestruturada, as observações realizadas em sala de aula e as atividades de ensino propostas por essas professoras, com vistas a analisar os encaminhamentos didático-pedagógicos efetivados. Nesse texto, utilizaremos apenas os dados da entrevista inicial e as observações da pesquisadora.

2 I DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

Compreender as operações, suas várias interpretações ou significados é um processo que ocorre de acordo com o amadurecimento intelectual dos alunos e pode ser mais eficaz se soubermos como articular os conteúdos desse conhecimento com os conhecimentos dos sujeitos, oportunizando que eles pensem, troquem ideias e façam descobertas em decorrência das interações que possam estabelecer com seus pares.

Sobre essa articulação, Chevallard (1991) aponta que a didática da matemática como

1 Utilizamos nesse estudo o gênero feminino ao nos referirmos a esse profissional, pois o universo pesquisado foi composto por mulheres.

ciência se constrói sobre um tripé – professor, aluno e saber matemático - e que a relação entre seus elementos é que constitui a relação didática. Dependendo da ênfase dada a cada um dos elementos da tríade configura-se um ato pedagógico diferenciado (centrado no conteúdo, centrado no aluno ou centrado na relação pedagógica), mesmo que o(s) modelo(s) que embase(m) a prática docente seja(m) escolhido(s) de forma inconsciente eles orientarão o que o autor denominou de transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p. 6), ou seja, as adaptações ou transformações de um objeto de saber em objeto de ensino que o professor evidenciará no processo de ensino e interferirá no processo de aprendizagem.

No que diz respeito à relação do aluno com o saber e sua apropriação, convém destacar alguns aspectos apontados por Piaget (1978), Magina (2005) e Vergnaud (1990). Estudos realizados por Piaget (1978) e seus colaboradores mostram que ao longo do processo de desenvolvimento o sujeito apresenta estruturas cognitivas que diferem qualitativamente nas diversas fases de sua vida, nos diferentes alunos e adultos e que essas estruturas são fundamentais para a construção de conceitos matemáticos. Magina (2005, p. 3), afirma que as questões sociais influenciam como os professores "veem o ensino da Matemática e a própria Matemática" e que suas representações diferem das dos alunos e Vergnaud (1990) observou que a aquisição de um conceito não se dá de forma isolada, ou a partir de apenas uma situação, mas do imbricamento de conceitos que são também utilizados em diferentes situações, ao que denominou de campos conceituais.

Além dessas questões, é preciso considerar o papel da linguagem e, mais especificamente, o da comunicação na relação professor e aluno:

> [...] a importância da explicitação e da simbolização na formação dos conceitos [...] o conhecimento posto em palavras pode ser partilhado com mais facilidade, inclusive pelas crianças, desde que, bem entendido, lhe sejam encontradas as formas adequadas. Não se aprende sozinho e a estabilidade dos invariantes operatórios é reforçada por sua formulação oral e escrita (VERGNAUD, 2009, p. 12).

A comunicação é um dos aspectos subjacentes aos Princípios propostos pelo *National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM (*apud* APM, 2008), e deve servir para comunicar ao professor o que o aluno sabe independentemente do tipo de linguagem que utiliza (verbal, visual, sonora, corporal ou digital), visto que quando nos comunicamos possibilitamos que outros compartilhem de nossas ideias, as refutem ou as enriqueçam, além de propiciar ao professor analisar o processo de pensamento do aluno para que possa orientar sua aprendizagem.

Esse compartilhamento é um desafio no processo de ensino e de aprendizagem, em especial nas séries iniciais, em função do desenvolvimento cognitivo do aluno no que se refere a se colocar no lugar do outro, analisar sob a perspectiva do outro um determinado raciocínio ou ainda discutir a partir do simbolismo da linguagem matemática, o que é fundamental no processo de desenvolvimento do aluno. Outro desafio são as formas de comunicação que podem ocorrer a partir de diferentes representações - como, por exemplo, o desenho - que aos poucos vão evoluindo para uma representação mais próxima da linguagem matemática.

Além dos aspectos acima mencionados, a possibilidade de analisar e avaliar formas de resoluções de questões matemáticas usadas por outros, possibilitará clarear as ideias ainda não completamente desenvolvidas e, desse modo, aperfeiçoar a linguagem matemática para se expressar com precisão. Contribui ainda para que, aos poucos, os alunos se apropriem dos conteúdos matemáticos e de diferentes estratégias de pensamento.

Esse processo está vinculado a crença de que o aluno é sujeito de seu processo de aprendizagem e se faz necessário dar voz à ele para que essa aprendizagem se efetive, tal como está posto por Freire (1996) para quem a aprendizagem é uma possibilidade de produção e construção de conhecimento e não a transferência deste.

3 I DO ASPECTO DIDÁTICO-PEDAGÓGICO OBSERVADO NA PESQUISA REALIZADA

Os dados coletados nos permitem afirmar que os conteúdos da matemática são hoje apresentados em sala de aula de uma forma que desconsidera o processo de elaboração desse conhecimento e suas transformações ao longo da história bem como o desenvolvimento do aluno. Observamos ainda que há uma transposição didática desse saber apoiada, na maioria das vezes, no livro didático, um representante da noosfera, que se encarrega de selecionar os conteúdos, a sequência utilizada no processo de ensino e também a forma de os apresentar. Como em geral o livro didático é o único apoio para o professor, ele se torna o currículo a ser desenvolvido e a referência metodológica e didática seguida.

O apoio dos colegas é também um recurso utilizado pelas professoras na sua ação docente e em suas falas[2] as participantes da pesquisa deixam entrever e até explicitam as dificuldades que encontram para ensinar Matemática:

> [...] eu catei a Professora 5 - ela fez várias oficinas o ano passado de Matemática - aí ela pegou as apostilas e trouxe, eu tirei xerox e guardei na correria do dia a dia, aí eu agora, vou ver como que é, porque eu vou trabalhar com o 4º ano [...] na Matemática não, então eu tenho que aprender (P2B).
>
> Aí fui para os livros e aí peguei um livro que vem tudo bem detalhado explicando (P3B).

Quando solicitadas a explicitarem os procedimentos que utilizam no ensino da Matemática, não notamos que estes se diferenciem muito daqueles que foram utilizados em sua formação na Educação Básica como se nota quando descrevem o processo de aprendizagem pelo qual passaram. Contudo, apontam possuir uma forma diferenciada

2 Utilizamos na transcrição as normas propostas por Marcuschi (1986): (( )) para comentário ou complemento da pesquisadora; (+) para indicar pausas na fala; *itálico* para palavras cuja grafia diferem do padrão. Em função do espaço destinado a esse texto selecionamos apenas algumas para explicitar as colocações feitas.

de conceber o ensino e a aprendizagem em comparação aos seus antigos professores. É a utilização eventual dos jogos que as faz acreditarem estar desenvolvendo um ensino diferenciado daquele ao qual algumas delas foram submetidas:

> Eu tento trabalhar Matemática bastante com material, porque eu acho assim, que a teoria é muito válida , você fala, fala, mas você trabalha no concreto, eu tento utilizar o que tenho por aqui [...] a gente tenta realmente utilizar matérias concretos, porque eu acho que no concreto a criança aprende melhor do que na teoria (P2A).

> Olha, eu utilizo assim, além dos jogos, eu gosto muito de sair fora de sala, fazer algumas brincadeiras, [...] com jogos (+) é (+) as vezes assim com alguma musiquinha que você introduz e vai trabalhando, sabe? Eu não tenho só assim aquela coisa giz e quadro, material dourado também, trabalhar um pouco, então tento diversificar um pouco, para ver se fica uma coisa mais gostosa de aprender, né? (P3B).

Considerando a fala das professoras, os jogos representam para elas um recurso lúdico e a possibilidade de concretização de um conceito, contribuindo para tornar a aprendizagem da Matemática menos difícil e não relacionada a atividades mecânicas e repetitivas.

No depoimento da P3B o objetivo dos jogos não está relacionado às habilidades ou conceitos a serem desenvolvidos, mas em diversificar os procedimentos de ensino para torna-lo prazeroso, por acreditar ser possível, por meio da brincadeira e da diversão, dar à aprendizagem um caráter lúdico mediante o qual o aluno aprende sem perceber que está aprendendo, como se fosse possível excluir o processo de reflexão inerente à aprendizagem.

O equívoco dessa visão do processo de aprendizagem da Matemática é que ela minimiza a importância e a necessidade da disciplina e do estudo para que ela ocorra, visto que para aprender é preciso estudar, processo que acarreta dor e prazer, vitórias e derrotas, dúvidas e alegrias e, por isso mesmo, necessita de um rigor que vamos forjando paulatinamente mediante uma disciplina necessária, que não se obtém pela doação ou imposição, mas por a assumirmos como necessidade (FREIRE, 1997, p. 28).

Observamos ainda que o recurso aos jogos ou materiais manipuláveis é visto como algo concreto e prático, em oposição ao uso do giz e da lousa ou dos livros, percebidos como instrumentos de cunho teórico. Essa distinção equivocada do que seja teórico ou prático e a concepção de que a apropriação do conhecimento se dá de forma prática, evidencia a necessidade de o docente ter claro como ocorre esse processo e os objetivos de ensino que daí se estabelecem.

Carraher, Carraher e Schliemann (1986) ressaltam que a utilização de materiais manipuláveis deve considerar que, subjacentes a eles, existem princípios matemáticos que queremos enfocar. Salientam também que um determinado material pode ser considerado mais concreto ou mais abstrato dependendo das relações que tem com a realidade representada. O concreto não tem a ver com o pegar, mas com sua relação com o que é representado. Os autores lembram ainda que podemos considerar os materiais como abstratos, pois existem apenas na escola e não no cotidiano dos alunos, de modo que a utilização dos jogos pode ocorrer de forma mecânica não garantindo a compreensão do conhecimento matemático a que ele possa estar se referindo. Por exemplo, o indivíduo pode fazer corretamente as transformações em uma determinada operação matemática, mas não é capaz de justificá-las ou informar qual o valor está associado a um determinado algarismo numa determinada posição (HATANO, 1977, 1987, 1997 *apud* FAYOL, 2012, p. 36).

Nas observações em sala de aula, percebemos que os materiais manipuláveis não são normalmente utilizados pelas crianças, mas pela professora, com o intuito de ilustrar algum exercício do livro didático ou para servir de apoio ao raciocínio que ela está desenvolvendo.

Verificamos que, para elas, as dificuldades apresentadas pelos alunos estão relacionadas ao que observam na fala ou nos registros deles, ou mais especificamente, se eles apresentam o que elas consideram como correto, desconsiderando o processo de elaboração.

A professora P4B, tenta relacionar a dificuldade de aprendizagem com aspectos do desenvolvimento cognitivo do aluno, enquanto outras a relaciona ao "dom" ou "disponibilidade" dos alunos, como salientam P3B, P4A e P6B:

> [...] tem criança que eu sinto que eles não operam ainda [...] eles não operam matematicamente, não tem esse tempo, então às vezes, pode ser uma imaturidade cognitiva, emocional? Fica a dúvida (P4B).

> No fundo, no fundo, aqueles que a gente vê que quem tem mais facilidade conseguem aprender, mas a grande maioria não [...] A gente trabalha, trabalha, trabalha, e passou um tempo e a gente vai trabalhar de novo, e eles têm dúvida! [...] Nessa questão da dezena, centena, dúzia, que a gente trabalha um monte eles tem dificuldade de quantificar... Essa é uma questão que eu vejo muito, situações problemas, a questão da interpretação mesmo (P3B).

> Tem dificuldades sim de raciocínio lógico, dificuldade de interpretação a maioria deles tem dificuldades, nem todos se identificam, gostam da Matemática [...] você ensina e quando você pensa assim: não, eles conseguiram, eles estão prontos! Então no outro dia você vai tomar ou na próxima semana [...] você tem sempre que dar uma retomada, tudo que você vai trabalhar você tem que antes de dar continuidade, dar uma parada para retomar [...] Principalmente as situações problemas é de mais, é de menos, o que eu tenho que fazer aqui? (P4A).

> [...] muitos aprendem outros não, só que também a gente percebe que quando também não, são alunos que tem dificuldade em outras áreas também [...] Cálculo mental, calculo mental né (+) estimativas [...]quanto que é uma dezena, quanto que é uma dúzia, quanto que é uma centena [...] as operações mesmo, as operações principalmente de multiplicação por dois que é as dezenas [...] e a divisão por dois também, né, por um número também eles tem dificuldade mas quando você aumenta o grau de dificuldade fica mais difícil para eles conseguirem realizar (P6B).

Essa visão desconsidera que a didática da matemática, enquanto ciência, se constrói sobre um tripé – professor, aluno e saber matemático - e que é na relação entre esses elementos que o processo de ensino e de aprendizagem se efetiva.

4 I ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

De forma geral, os dados coletados nos permitiram verificar que o ensino da matemática ocorre tendo como referência a experiência das professoras como alunas ou das prescrições do livro didático ou da orientação de outro colega.

Ao observarmos a prática empreendida por elas fica evidente a dificuldade no ensino por não compreenderem os conceitos subjacentes a um determinado conceito, seja por não ter sido desta forma que aprenderam ou por não vivenciarem uma experiência que provocasse essa mudança durante sua formação da ou na docência.

Pudemos observar ainda que as professoras, em sua maioria, se empenham ao máximo para realizarem o que consideram um bom trabalho: o cumprimento do planejamento e um bom desempenho dos estudantes nas avaliações que realizam, mas têm dificuldades em articular a tríade referida por Chevallard (1991): o conhecimento matemático, o conhecimento do professor e o conhecimento do aluno.

Assim, a pesquisa empreendida nos possibilitou, entre outros aspectos, verificar a importância de se analisar o que o professor compreende sobre um determinado conteúdo matemático, o seu conhecimento sobre o desenvolvimento dos alunos - a partir das produções deles e em como articulam esses dois aspectos em sua prática pedagógica.

Nas etapas posteriores da pesquisa, entre elas a da intervenção, que em função do espaço destinado a esse trabalho não nos detivemos em descrevê-lo, evidenciou que o apoio aos professores para a superação dessa dificuldade foi decisivo para suplantarem certos obstáculos oriundos da sua formação da e na docência, aprofundando seus conhecimentos sobre o conteúdo, de modo a compreenderem as dificuldades dos seus alunos e organizarem melhor suas práticas.

Sabemos que este não é um caminho tranquilo, ao contrário, há tropeços, dúvidas, angústias e outros sentimentos que a mudança desencadeia, mas não a impedem.

REFERÊNCIAS

APM – Associação de Professores de Matemática. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar**. Trad. Dos Principles and Standards for School Mathematics do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), 2000. Lisboa, 2008.

CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David Willian; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. **Na vida dez, na escola zero**. 4ª. ed. São Paulo: Cortez, 1986.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique**: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné. Grenoble, La pensée Sauvage, 1991

FAYOL, Michel. **Numeramento:** aquisição das competências matemáticas. Traduzido por: Marcos Bagno. São Paulo: Parábola Editorial, 2012.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia: **saberes necessários à prática educativa. RJ: Paz e Terra, 1996.**

FREIRE, Paulo. **Professora sim, tia não**: cartas a quem ousa ensinar. São Paulo, Olho D'Água, 1997.

MAGINA, Sandra. A Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente. **Anais** do **XVIII Encontro Regional de Professores de Matemática.** Unicamp, 2005. Disponível in: http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/conf/conf_01.pdf. Acesso in 10 ago. 2016.

PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança**. 4. ed. Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1978.

VERGNAUD, G. **La Teorie des Champs Conceptuals.** RDM, V10, N23, 1990.

VERGNAUD, Gérard. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora UFPR, 2009.

CAPÍTULO 6

CONTRIBUIÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA E PARA O DESENVOLVIMENTO INTEGRAL DO ESTUDANTE

Data de aceite: 05/06/2020

Silvana Cocco Dalvi
Ifes – Campus Vitória
Castelo- Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/7484846967719596

Oscar Luiz Teixeira de Rezende
Ifes – Campus Vitória
Vitória- Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/1085387566931992

Mirelly Katiene e Silva Boone
Ifes – Campus Vitória
Colatina- Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/0749656895064157

Luciano Lessa Lorenzoni
Ifes – Campus Vitória
Vitória-Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/7959495705859101

Agostinho Zanuncio
Prefeitura de Castelo
Castelo-Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/0108217023847807

Andressa Coco Lozório
Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo
Castelo – Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/4913252934075927

Ana Elisa Tomaz
Prefeitura de Castelo
Castelo-Espírito Santo
http://lattes.cnpq.br/1623775582217253

RESUMO : O presente trabalho tem por objetivo refletir acerca das contribuições da Modelagem Matemática, apoiada nos pressupostos da Educação Matemática Crítica, tanto para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática como para o desenvolvimento integral dos estudantes. Para atender a esse propósito analisa-se dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática, Educimat, do Instituto Federal do Espírito Santo, Ifes, Campus Vitória. Os dados aqui apresentados foram produzidos em um ambiente de Modelagem Matemática realizada com estudantes do ensino fundamental e médio. Nos sete trabalhos analisados encontra-se indícios de que a atividade de Modelagem Matemática implica tanto a necessidade de conhecimentos prévios como a aquisição de novos conhecimentos. Os resultados apontam que os estudantes envolvidos consideram que a atividade de Modelagem Matemática é forma diferenciada para ensinar Matemática, contudo, é preciso atenção na escolha do tema, pois nem

todo assunto é de interesse dos mesmos. A atividade de Modelagem Matemática contribuiu para que os estudantes reconhecessem que a Matemática pode ser usada para resolver problemas aparentemente não-matemáticos extrapolando o ambiente escolar; favoreceu a reflexão sobre realidades diferentes enfatizando discussões acerca da cidadania. O trabalho evidencia o "olhar" dos estudantes em uma prática de Modelagem que enriquece uma Educação Matemática conectada a atualidade e preza por transformações sociais.
PALAVRAS-CHAVE: Processo Ensino e Aprendizagem; Matemática Crítica; Modelagem Matemática; Desenvolvimento Integral.

CONTRIBUTIONS OF MATHEMATICAL MODELING TO THE MATHEMATICAL TEACHING AND LEARNING PROCESS AND TO THE STUDENT'S INTEGRAL DEVELOPMENT

ABSTRACT: The present work aims to reflect on the contributions of Mathematical Modeling, based on the assumptions of Critical Mathematical Education, both for the teaching and learning process of Mathematics and for the integral development of students. To meet this purpose, dissertations from the Professional Master's Program in Education in Science and Mathematics, Educimat, from the Federal Institute of Espírito Santo, Ifes, Campus Vitória, are analyzed. The data presented here were produced in a Mathematical Modeling environment carried out with elementary and high school students. In the seven studies analyzed, there are indications that the activity of Mathematical Modeling implies both the need for prior knowledge and the acquisition of new knowledge. The results show that the students involved consider that the activity of Mathematical Modeling is a different way to teach Mathematics, however, it is necessary to pay attention to the choice of the theme, as not every subject is of interest to them. The Mathematical Modeling activity helped students to recognize that Mathematics can be used to solve seemingly non-mathematical problems by extrapolating the school environment; favored reflection on different realities, emphasizing discussions about citizenship. The work highlights the students' "gaze" in a Modeling practice that enriches Mathematics Education connected to the present and values social transformations.
KEYWORDS: Teaching and Learning Process; Critical Mathematics; Mathematical Modeling; Integral Development.

1 I INTRODUÇÃO

A sociedade contemporânea é marcada pelo desenvolvimento da tecnologia e globalização permitindo o rápido acesso as informações. Nesse contexto contínuo de transformações, a Matemática se constitui uma ferramenta intelectual importante para a tomada de decisão das pessoas influenciando muitos aspectos da vida em sociedade. Surge então, a necessidade de pensar a Educação Matemática de forma eficaz para atender as demandas da atualidade.

Nota-se, historicamente, que as transformações sociais, políticas e econômicas ocorridas ao longo da evolução humana interferiram também no contexto educacional trazendo novas perspectivas de homem, mundo, conhecimento, educação, objetivos e metodologias. A partir da década de 1990, intensificou-se a busca por possibilidades educacionais que contribuíssem com a superação do ensino tradicional em que os livros-textos ocupam o papel central no ambiente escolar, o professor atua trazendo novos exercícios cabendo aos estudantes resolvê-los e o professor corrigi-los (ALRO; SKOVSMOSE, 2010).

Nesse panorama, a Modelagem Matemática abre espaço para uma Educação Matemática pautada na investigação, nas descobertas, inquietações, erros e acertos que fazem parte do processo de ensino e aprendizagem. A ligação entre os problemas socioculturais em que os estudantes estão inseridos demonstram interesse e o estudo escolar é uma característica marcante dessa prática pedagógica. Além disso, as interações em sala de aula privilegiam o diálogo entre os envolvidos na investigação e assim, consideramos ser uma alternativa enriquecedora no campo da Educação Matemática.

O presente trabalho tem por objetivo refletir acerca das contribuições da Modelagem Matemática, apoiada nos pressupostos da Educação Matemática Crítica, tanto para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática como para o desenvolvimento integral dos estudantes. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica cujos instrumentos usados na produção de dados foram dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática, Educimat, do Instituto Federal do Espírito Santos.

Na estrutura do trabalho nos debruçamos sobre a Educação Matemática nos pressupostos da Educação Matemática Crítica e a Modelagem Matemática no âmbito educacional. Em seguida, apresentamos e discutimos trechos das dissertações que revelam o olhar dos estudantes envolvidos na prática da Modelagem e finalizamos com as considerações finais sobre o estudo.

2 I EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA

O movimento da Educação Matemática Crítica integrou-se à Educação Matemática a partir da década de 1980 e, segundo Skovsmose (2001), preocupa-se em desenvolver habilidades que vão além do conhecimento matemático permitindo a participação crítica dos alunos na sociedade.

Skovsmose (2013), explica que a alfabetização matemática deve desenvolver no estudante os seguintes conheceres: conhecer matemático, conhecer tecnológico e conhecer reflexivo, a saber

> 1) *Conhecer matemático*, que se refere à competência normalmente entendida como habilidades matemáticas, incluindo as competências na reprodução de teoremas e provas, bem como ao domínio de uma variedade de algoritmos [...].

> 2) *Conhecer tecnológico*, que se refere às habilidades em aplicar a matemática e às competências na construção dos modelos [...]. De forma geral, é o entendimento necessário para usar uma ferramenta tecnológica para alcançar alguns objetivos tecnológicos.
>
> 3) *Conhecer reflexivo*, que se refere à competência de refletir sobre o uso da matemática e avaliá-lo. Reflexões têm a ver com avaliações das consequências do empreendimento tecnológico (SKOVSMOSE , 2013, p.115-116).

O conhecer matemático é suporte para o conhecer tecnológico e o conhecer reflexivo. O conhecer tecnológico utiliza-se do conhecer matemático e outros para a construção de um modelo que resolva um problema específico, mas não viabiliza uma postura reflexiva da própria atuação na sociedade. O conhecer reflexivo pode ser considerado um meta conhecimento que precisa dos conhecimentos matemático e tecnológico, para cumprir a sua função de desenvolver a criticidade dos estudantes.

Dalvi, Rezende e Lorenzoni (2017) entendem a Modelagem Matemática como uma possibilidade para a alfabetização matemática atual, visto que, ao socializar, de forma intencional, as informações, procedimentos e resultados dos modelos construídos pelos estudantes é possível integrar os conhecimentos matemático, tecnológico e reflexivo. Assim

> Numa atividade de Modelagem Matemática, o conhecer tecnológico utiliza-se do conhecer matemático e outros para a construção de um modelo que represente o problema em questão e para o qual encontre uma possível solução, sem, no entanto, trazer à luz uma postura reflexiva dos impactos da utilização desse modelo. O conhecer reflexivo, ao se apoiar nos conhecimentos matemático e tecnológico, contribui para que os alunos tenham condições de avaliar os impactos de suas escolhas na sociedade, podendo emergir do modelo matemático e das suas relações com a realidade (DALVI, REZENDE, LORENZONI, 2017, p.3-4)

Diante do crescimento rápido da tecnologia da informação, apenas saber ler, escrever e fazer conta não basta para desenvolver uma formação cidadã nos indivíduos (D'AMBROSIO, 2005, p. 119). Estar alfabetizado matematicamente requer adquirir os três conheceres matemáticos desenvolvendo as potencialidades dos estudantes para serem sujeitos críticos e reflexivos. Trata-se de sujeito que, nos mais diferentes e variados contextos, age de forma autônoma e consciente, o que inclui necessariamente a sala de aula. A Educação Matemática Crítica é suporte para a democratização da Educação Matemática como viés, para promover a discussão acerca das conjecturas sociais estabelecidas na sociedade. Segundo Skovsmose

> Para que a educação, tanto como prática quanto como pesquisa, seja crítica, ela deve discutir condições básicas para a obtenção do conhecimento, deve estar a par dos problemas sociais, das desigualdades, da supressão etc., e deve tentar fazer da educação uma força progressivamente ativa (SKOVSMOSE, 2013, p. 101).

Podemos dizer que esse modo de abordar os conteúdos matemáticos não se enquadra em aulas desprovidas de debates e reflexões sem relação ao contexto sociocultural dos estudantes. O conhecimento não se resume a ser reproduzido nem a estar concentrado na mão de uma única autoridade.

Muitos são os desafios impostos à Educação Matemática e por esse motivo a Educação Matemática Crítica surge como ferramenta na superação desses obstáculos, conduzindo um ensino preocupado com a formação cidadã dos estudantes e com transformações sociais. A seguir, aborda-se pontos da prática da modelagem matemática no campo educacional

3 I A MODELAGEM MATEMÁTICA NO CAMPO EDUCACIONAL

Biembengut; Hein (2003) considera que, desde os tempos mais remotos, o homem já fazia uso da Modelagem Matemática, para resolver problemas do cotidiano e encontrar explicações para os fenômenos da natureza. Ela considera que, no cenário internacional, as discussões sobre a Modelagem e suas aplicações na Educação Matemática ocorreram na década de 1960, oriundas do movimento "utilitarista" da Matemática. Esse movimento preocupa- se em ensinar os aspectos técnicos da aplicação dos conhecimentos matemáticos na ciência e na sociedade. Para Bassanezi

> A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. [...] Alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre eles e transformá-los. Nesse sentido, é também um método científico que ajuda a preparar o indivíduo para assumir seu papel de cidadão (BASSANEZI, 2014, p. 16-17).

A Modelagem tem por base trabalhar matematicamente um problema oriundo da realidade. Enriquece o ensino e aprendizagem de Matemática à medida que oferece ao estudante a oportunidade de pesquisar. Sendo um pesquisador da realidade, é possível adquirir conhecimentos que auxiliam em sua transformação, assumindo seu papel de cidadão na sociedade.

A proposta de Modelagem dá sentido real ao ensino, pois "Modelagem é um processo rico de encarar situações reais, e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial" (D'AMBROSIO, 1986, p. 11). Essa afirmação deixa claro que o paradigma do exercício com questões prontas e acabadas cuja solução o professor já conhece de antemão não atende confortavelmente à proposta de ensino de Matemática que busca na realidade formas de abordar os conhecimentos matemáticos.

Araújo (2007) relaciona a Modelagem Matemática à Educação Matemática Crítica, quando discute a natureza do problema a ser estudado. Para Araújo

> Uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não-matemático da realidade, ou de uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos, de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica embasem o desenvolvimento do trabalho (ARAÚJO, 2007, p. 30).

Conforme comenta a autora, os estudantes participam da escolha do tema que aparentemente trata de uma situação que não tem vínculo com a Matemática. Entende-se com isso que os temas trabalhados são ricas fontes para o desenvolvimento da consciência sobre os direitos e deveres do cidadão. A organização em grupo é marca profunda desse trabalho.

Em um ambiente de Modelagem Matemática a aula é construída com a participação dos estudantes que expressam seus conhecimentos e adquirem outros. Novas perspectivas levantadas por eles podem mudar o rumo das investigações trazendo à tona novas situações de aprendizagens. Conforme ressalta Almeida e Silva (2010) a Modelagem Matemática pode ser percebida como elemento integrador entre a realidade e o conteúdo a ser ensinado, isto é, a Matemática passa a ser vista como uma construção humana que se aplica e se desenvolve constantemente em diferentes tempos e espaços. Barbosa considera que a Modelagem é

> [...] uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento. Os conceitos e ideias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade (BARBOSA, 2001, p.5).

Na perspectiva do autor o estudante deve aceitar o convite para a investigação buscando alternativas, o que exige dele um esforço intelectual, uma vez que as estratégias não são dadas pelo professor. O estudante passa a ser o protagonista do processo ensino e aprendizagem usando a Matemática como ferramenta para auxiliá-lo na busca de uma resposta para a situação proposta. Os estudantes envolvidos em uma prática de Modelagem Matemática nos pressupostos da Educação Matemática Crítica, são estimulados a desenvolverem a pesquisa, a criatividade, a autonomia, entre muitos outros aspectos que favorecem o desenvolvimento integral do estudante

Além dos argumentos apresentados, outros podem ser evidenciados em práticas de Modelagem apoiadas pela Educação Matemática Crítica possibilitando uma reflexão atual da Educação Matemática nas escolas. Trata-se de buscar elementos nos próprios estudantes de como essa prática é vista por eles, suas perspectivas quanto à Matemática e os problemas sociais que os envolvem, bem como as contribuições que ela pode oferecer nesse contexto.

4 I PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Gil (2008) considera uma pesquisa bibliográfica quando esta é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Logo, esta pesquisa é de natureza bibliográfica, pois os dados produzidos foram extraídos de dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática - Educimat, do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Espírito Santo

(Ifes) - Campus Vitória.

Como critério para escolha das dissertações, consultamos site oficial do Programa de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática - Educimat, do Ifes[1] e selecionamos as dissertações, defendidas no período de 2015 a 2017, identificando os títulos que evidenciavam o desenvolvimento de da Modelagem Matemática - Quadro 1. Em seguida, buscamos nos textos fragmentos que revelam as perspectivas dos estudantes e as contribuições da Modelagem Matemática para o desenvolvimento integral dos mesmos – Quadro 2. Por fim, identificamos algumas contribuições que essa prática proporcionou aos estudantes – Quadro 3, e produzimos um texto explicativo.

5 I SELEÇÃO, ORGANIZAÇÃO DOS DADOS E ANÁLISE CRÍTICA

Com base no banco de dados do programa Educimat pesquisamos, entre os anos de 2015 a 2017, dissertações de mestrado que abordaram a prática da Modelagem Matemática nos pressupostos da Educação Matemática Crítica. Para determinar que os trabalhos apresentam os pressupostos da Educação Matemática Crítica, analisamos aqueles em que a atividade de Modelagem Matemática segue a perspectiva sociocrítica, apresentada por Barbosa (2003) cujo um dos pontos principais é convidar os alunos a se envolverem em discussões reflexivas, problematizando com eles o debate.

Os trabalhos citados no Quadro 1, foram desenvolvidos por estudantes do programa junto aos orientadores e discutidas no Grupo de Estudo e Pesquisa em Modelagem e Educação Estatística (Gepeme) formado por pesquisadores que atuam nessas áreas. Denominamos cada dissertação por uma letra maiúscula do alfabeto, identificando o título do trabalho, autor, ano de publicação e problemática usada para desenvolver a prática da Modelagem, conforme é apresentado no Quadro 1 a seguir:

Dissertação	Título	Autor	Ano de publicação	Problemática
A	**Educação estatística sob a perspectiva sociocrítica da modelagem matemática:** uma proposta para o Ensino Médio	Evânia de Oliveira Pereira Lima (LIMA, 2015)	2015	Gravidez na adolescência
B	**A construção do conceito de função por meio de uma atividade de modelagem matemática em um contexto do ensino técnico de nível médio.**	Anderson Antônio Alves Cesario (CESARIO, 2016)	2016	Cultura de alface no sistema de hidroponia.
C	**Modelagem matemática e o conhecimento reflexivo: um estudo a partir da captação da água da chuva**	Jonisário Littig (LITTIG, 2016)	2016	“Jardim sustentável na escola”.

1 Site oficial do Programa de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática: http://educimat.ifes.edu.br/index.php/dissertacoes

D	**Construção do conceito de função em um ambiente de modelagem matemática: estudo da renda de uma associação de reciclagem de resíduos sólidos**	Camila Maria Dias Pagung (PAGUNG, 2016)	2016	Situação da Associação dos Catadores de Lixo- Guarapari
E	Desenvolvimento de competências estatísticas no ensino médio por meio da modelagem matemática: analisando as diferentes representações	Laiana Meneguelli (MENEGUELLI, 2017)	2017	Níveis de ruídos e temperatura nas dependências da escola
F	Calor e temperatura no ensino médio: uma abordagem via modelagem matemática na perspectiva sociocrítica.	Rafaela Duarte Nascimento (NASCIMENTO, 2017)	2017	Situação da escola – alto índice de calor
G	**Desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática em um ambiente virtual de aprendizagem baseado no modelo de cooperação investigativa.**	Everton Murilo da Vitória Olario (OLARIO, 2017)	2017	Uso consciente da água durante o banho

Quadro 1: Dissertações extraídas do Programa Educimat, entre 2015 a 2017, que tratam de Modelagem Matemática no âmbito educacional

Fonte: Acervo dos pesquisadores

Em todos os trabalhos apresentados acima, é possível verificar a presença de objetos matemáticos inseridos na investigação da realidade:

A) O trabalho **A** busca verificar o desenvolvimento das competências estatísticas: literacia[2], pensamento e raciocínio estatísticos em alunos do ensino médio, partindo de um ambiente de Modelagem Matemática, tendo como princípios orientadores a Educação Matemática Critica. Os estudantes trabalharam matematicamente com população, amostra, tabelas, gráficos, média, moda e a interpretação de informações estatísticas em um contexto social que aborda a gravidez na adolescência em uma escola pública do município de Nova Almeida/ES;

B) O trabalho **B** analisa o conceito de função por meio de atividade de Modelagem Matemática em um contexto que investiga a produção de alface no sistema de hidroponia no Ifes - Campus Itapina, localizado em Colatina/ES.

C) O trabalho **C** analisa e identifica o desenvolvimento do conhecimento reflexivo com base em uma atividade de Modelagem Matemática que investiga a manutenção de um jardim sustentável um uma escola pública de Santa Maria de Jetibá/ES. Nessa atividade, os estudantes construíram uma tabela de precipitação de chuva em um determinado período, definiram dimensões, calcularam áreas de superfícies circulares e não circulares, estabeleceram a relação entre a área de um telhado e a precipitação de chuva, calcularam medidas de raio de uma circunferência, trabalharam com aproximação de medidas, medidas de comprimento e de capacidade, estabeleceram a relação entre área e quantidade de chuva e calcularam volumes.

D) O trabalho **D** se propõe a investigar a contribuições da Modelagem Matemática

2 Capacidade de ler, interpretar, organizar dados estatísticos representados de diferentes meios (LIMA, 2015).

para a construção do conceito de funções em um contexto que investiga a situação da Associação dos Catadores de Lixo, no município de Guarapari/ES;

E) O trabalho **E** analisa o desenvolvimento da competência estatística com estudantes do ensino médio, por meio de uma atividade de Modelagem Matemática, em um contexto que investiga os níveis de ruído e temperatura nas dependências do Ifes – Campus Vitória.

F) O trabalho **F** investiga como acontece a aprendizagem de Física por meio de uma atividade de Modelagem Matemática em um contexto que estuda os índices de calor em uma escola pública do município de Vila Velha/ES.

G) O trabalho **G** se propõe a analisar as contribuições do Ambiente Virtual de Aprendizagem – Moodle nas interações entre professor e estudantes em um ambiente de Modelagem Matemática que investiga o uso consciente da água durante o banho. Nesse estudo, o sistema monetário, as medidas de capacidade e de tempo, as funções de 1° grau, as tabelas e os gráficos são os objetos matemáticos presentes.

A seguir, conforme o mostra o Quadro 2, extraímos trechos dessas dissertações que apontam algumas contribuições da Modelagem Matemática para o desenvolvimento integral dos estudantes, ou seja, uma proposta de formação que considera a realidade de vida, as necessidades, possibilidades e interesses do estudante. A proposta de educação integral visa o desenvolvimento físico, intelectual e cultural do estudante, a fim de promover uma formação para exercício da cidadania.

Os fragmentos são compostos por trechos dos próprios autores e trechos que são relatos e interações (diálogos) entre os estudantes. Cabe ressaltar, que esse trabalho não esgota as possibilidades para novas indagações, uma vez que outros trechos podem servir de análises desencadeando novos olhares.

Dissertação	Fragmentos
A	Ninguém gostou do tema sugerido: “ah não, isso a gente já sabe a resposta”, “celular é chato”, “as respostas vão ser as mesmas”, “também não gostei” foram alguns dos comentários feitos pela turma. [...]. Assim, foi pedido a cada um que fizesse uma sugestão de tema, de forma que na sequência seria feita uma votação para escolher aquele que agradasse a maioria. No entanto, não foi necessário fazer uma votação, pois quando da realização da primeira sugestão, todos concordaram e nem sugeriram mais temas. O tema escolhido por eles foi: gravidez na adolescência *(LIMA, 2015, p.69).*
B	Os alunos se mostraram entusiasmados para fazer a atividade, pois segundo eles mesmos, seria uma forma diferente de aprender Matemática (p.69). *“Eu acho que o aspecto mais positivo é justamente o aspecto prático. Porque alguns alunos ficam meio dispersos, porque a forma como eles aprendem requer algo mais prático[...]” (Abraão, aluno que participou da atividade – Apêndice B).*

C	Os alunos então sugeriram uma situação problemática que os inquietavam. A questão proposta por eles referia-se à água para irrigação do jardim da escola. A escola não possui abastecimento de água por qualquer empresa. Toda a água gasta na escola é proveniente de um poço artesiano e, em alguns períodos do ano, é necessário economizar água para não faltar. Portanto, os alunos se perguntaram "de onde tirar água para irrigar esse jardim? [...] *perceberam que elementos matemáticos poderiam contribuir para a solução dessa inquietação visto que precisariam relacionar quantidades de água necessárias para a irrigação do jardim com aquelas disponíveis* (*LITTIG, 2016, p. 68).*
D	"Aí a gente viu que o mundo não é igual a nossa vida, que tem tudo, uma renda boa. Que lá (Na associação de catadores de lixo), as pessoas têm que trabalhar mais para conseguir ganhar, pelo menos, o alimento das crianças [...] (Aluna Mariana); "Eu gostei dessa atividade. Ela me ajudou muito a compreender as coisas. Eu acho que as escolas deveriam fazer mais isso, pois a matéria fica melhor de se estudar e mais divertida (Aluna Rafaela)
E	A4: Professora, como se faz isso no Excel? A7: Eu também não sei. A3: Professora, é mentira deles. A gente aprendeu sim, no ano passado. A5: Na aula de informática. É fácil fazer. A4: Mas eu não me lembro. Prof.: A3, o que os meninos precisam para construir os gráficos? A3: Primeiro eles precisam colocar os valores em colunas e depois desenhar o gráfico. Professora, posso sentar com eles para ajudar? Prof.: Claro que pode (Interação 2, p. 88)
F	A atividade começou com uma conversa não direcionada sobre a **instituição de ensino**. Os alunos falaram sobre a escola e os problemas ali enfrentados. Durante esse primeiro contato, a resposta imediata de todos a respeito do maior dos problemas foi a temperatura na sala de aula (LAIANA). A27: "Se tem um Projeto de Lei, podemos lutar por ela, melhor do que lutar por ar condicionado." A7: "Podemos ir ao Ministério Público. Vamos pesquisar melhor sobre isso." (A27 e A7, alunos que participam da atividade)
G	Com a realização das atividades propostas ao longo das semanas passamos a enxergar com outros olhos questões relacionadas ao consumo de água, que deve causar certa preocupação, pois interfere [em] nossas vidas e [n]as de gerações futuras. Devemos então criar novos hábitos, como a reutilização da água sempre que possível, banhos mais rápidos, entre outras coisas. A matemática está presente em praticamente tudo o que nos cerca, o universo em si depende e obedece a princípios determinados. No nosso cotidiano, como no caso do banho, na orientação espacial e temporal que usamos no dia a dia, as compras de produtos no supermercado são exemplos de como essa ciência exata é relevante (O Grupo).

Quadro 2: Fragmentos extraídos das dissertações em estudo

Fonte: Acervo dos pesquisadores

Prosseguindo, procuramos sintetizar as informações do Quadro 2, conforme apresentamos no Quadro 3.

Dissertações	**Pontos de vista dos alunos**
A	A1: Saber trabalhar juntos na escolha de um tema para estudo.
B	B1: Mudança na forma de ensinar Matemática com destaque para o aspecto prático. B2: Entusiasmo na atividade.
C	C1: Conhecimento da realidade C2: Matemática para encontrar as soluções.
D	D1: Tomada de consciência de outras realidades diferentes à sua vivência diária. D2: Compreender melhor as coisas e aprender de forma divertida.

E	E1: Retomada de conteúdos anteriores. E2: Trabalho coletivo na construção do conhecimento, um ajudando o outro.
F	F1: Conhecimento da realidade F2: Consciência da existência de órgãos públicos competentes para fazer a lei ser cumprida.
G	G1: Mudança de visão sobre os problemas sociais. G2; Revisão dos hábitos cotidianos. G3: Presença da matemática no dia a dia.

Quadro 3 – Pontos de vista dos alunos envolvidos na atividade de Modelagem Matemática

Fonte: Acervo dos pesquisadores

Com os dados produzidos, agregamos duas vertentes de contribuições propiciadas pela prática da Modelagem Matemática: uma referente ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática e a outra ao desenvolvimento integral do estudante conforme apresentamos no Quadro 4.

No processo de ensino e aprendizagem de Matemática	B1; B2; C2; D2; E1; G3
No desenvolvimento integral do estudante	A1; C1; D1; E2; F1; F2; G1; G2

Quadro 4: Contribuições da Modelagem Matemática

Fonte: Acervo dos pesquisadores

Conforme mostra o Quadro 4, durante o processo de ensino e aprendizagem de Matemática em um ambiente de Modelagem Matemática é possível ensinar e aprender os objetos matemáticos por meio de atividades práticas, observar entusiasmo por parte dos estudantes, encontrar solução para situações problemas, compreender os objetos matemáticos por meio de uma atividade diferente do habitual, retomar e utilizar objetos matemáticos já aprendidos em outros momentos e perceber a relação entre dos objetos matemáticos com a realidade.

Quanto ao desenvolvimento integral dos estudantes, o ambiente de Modelagem Matemática permitiu que os estudantes aprendessem a trabalhar em equipe, a investigar a realidade, a importância de conviver com realidades diferentes, a trabalhar coletivamente e colaborar com outros, refletir sobre a responsabilidade do poder público, a uma nova forma de olhar para os problemas sociais e a rever seus próprios hábitos.

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo revela que a atividade de Modelagem Matemática contribui tanto para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de Matemática como para o desenvolvimento integral dos estudantes.

A Modelagem Matemática fundamentada pelos pressupostos da Educação Matemática Crítica não desmerece a presença dos objetos matemáticos, ela visa promover a aprendizagem colocando o estudante como protagonista do processo. As atividades da prática pedagógica, nesta perspectiva, não são elaboradas por autoridades externas. São desenvolvidas sob forte influência da realidade em que os estudantes estão inseridos. Assim, contribui para as reflexões sobre as possibilidades mudanças necessárias no campo da Educação Matemática. Nesse sentido, fica claro que as práticas pedagógicas devem relacionar os conteúdos estudados a realidade, despertar a atenção e o interesse dos estudantes levando-os perceber que a matemática está no dia a dia ajudando a encontrar possíveis soluções para os problemas.

No que tange ao desenvolvimento integral dos estudantes entende-se que a atividade de Modelagem Matemática foi um ambiente propício as dimensões intelectuais, sociais e emocionais e o trabalho coletivo desenvolvido com base em dados reais favoreceu a reflexão entre os grupos. Compreendendo o contexto social em que estão inseridos são capazes de pesquisar, investigar, debater os assentos que os incomodam e assim, buscarem soluções que melhorem suas qualidades de vida.

REFERÊNCIAS

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. **Diálogos e aprendizagem em educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

ARAÚJO J. L. Relação entre Matemática e Realidade em Algumas Perspectivas de Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDERA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e prática educacionais. Recife: SBEM, 2007. p. 17-32.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Rio Janeiro: ANPED, 2001.

_________. Modelagem Matemática e a perspectiva sócio-crítica. **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 2, p. 1-13, 2003.

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia. – 4. Ed. – São Paulo: Contexto, 2014.

BIEMBENGUT, M. S. HEIN, N. Modelagem Matemática no Ensino. – 3. Ed. – São Paulo: Contexto: 2003.

CESARIO, A. A. A. **A construção do conceito de função por meio de uma atividade de modelagem matemática em um contexto do ensino técnico de nível médio**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória – Espírito Santo, 2016. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=4841946> Acesso em: 25 jul. 2019

DALVI, S. C; REZENTE, O. L. T de; LORENZONI, L. L. Aproximando pressupostos teóricos que contribuem para o desenvolvimento dos conhecimentos matemático, tecnológico e reflexivo. In: CONFERÊNCIA

NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2017. **Anais...** UEM, Maringá, – Paraná.2017.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, v. 31, n. 1, São Paulo, jan./abr. 2005. p. 99-120.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação**: reflexões sobre educação e matemática. Campinas: Summus, UNICAMP, 1986.

LIMA, E. O. P. **Educação estatística sob a perspectiva sociocrítica da modelagem matemática:** uma proposta para o Ensino Médio**.** 2015. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória – Espírito Santo, 2015. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/view.TrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2659161> Acesso em: 25 jul. 2019

LITTIG, J. **Modelagem matemática e o conhecimento reflexivo: um estudo a partir da captação da água da chuva**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória – Espírito Santo, 2016. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3946042> Acesso em: 25 jul. 2019

MENEGUELLI, L. **Desenvolvimento de competências estatísticas no ensino médio por meio da modelagem matemática:** analisando as diferentes representações. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória – Espírito Santo, 2017. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/TrabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5200684> Acesso em: 25 jul. 2019

NASCIMENTO, R. D. **Calor e temperatura no ensino médio:** uma abordagem via modelagem matemática na perspectiva sociocrítica. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória – Espírito Santo, 2017. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/view TrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7002224> Acesso em: 25 jul. 2019

OLARIO, E. M. da V. **Desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática em um ambiente virtual de aprendizagem baseado no modelo de cooperação investigativa**. 2017. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória – Espírito Santo, 2017. Disponível em: < https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5389101> Acesso em: 25 jul. 2019

PAGUNG, C. M. D. **Construção do conceito de função em um ambiente de modelagem matemática: estudo da renda de uma associação de reciclagem de resíduos sólidos**. 2016. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória – Espírito Santo, 2016. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2847495> Acesso em: 25 jul. 2019

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. Campinas, SP; Papirus, 2013.

CAPÍTULO 7

MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A VACINAÇÃO CONTRA O SARAMPO

Data de aceite: 05/06/2020

Nathalia Kathleen Santana Reyes
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Nova Iguaçu – Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/9819800217965948

Douglas Souza de Albuquerque
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Nova Iguaçu – Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/6920773504922174

Thaís Madruga de Oliveira Mendonça
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Nova Iguaçu – Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/7589822612105321

Josiane da Silva Cordeiro Coelho
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Seropédica – Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/4674789296808077

Claudia Mazza Dias
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Nova Iguaçu – Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/3801901177718984

RESUMO: O Sarampo é uma doença infecciosa aguda, viral, transmissível, extremamente contagiosa e muito comum na infância. Os sintomas iniciais apresentados pelo doente são: febre acompanhada de tosse persistente, irritação ocular e corrimento do nariz.[1] Após estes sintomas, geralmente há o aparecimento de manchas avermelhadas no rosto, que progridem em direção aos pés, com duração mínima de três dias. Além disso, pode causar infecção nos ouvidos, pneumonia, ataques (convulsões e olhar fixo), lesão cerebral e morte. Posteriormente, o vírus pode atingir as vias respiratórias, causar diarreias e até infecções no encéfalo. Acredita-se que estas complicações sejam desencadeadas pelo próprio vírus do Sarampo que, na maior parte das vezes, atinge mais gravemente os desnutridos, os recém-nascidos, as gestantes e as pessoas portadoras de imunodeficiências. Embora a incidência global tenha sido significativamente reduzida através da vacinação, o sarampo continua sendo um importante problema de saúde pública. Como a cobertura vacinal não é uniformemente alta em todo o mundo, o sarampo é o principal assassino evitável de crianças em todo o mundo. A motivação principal para esse trabalho é o estudo de novos modelos matemáticos para a doença. Primeiramente, foi utilizado como base o modelo compartimental SEIR, alguns aspectos do modelo de Kermack e McKendric como a homogeneidade da população (sem idade e sem estrutura social), onde a população total é dividida em quatro categorias: Suscetíveis,

Expostos, Infectados e Recuperados. Considerando como característica do Sarampo, que um paciente curado ou vacinado não será infectado pela doença, portanto o modelo SEIR pode ser usado na modelagem pois representa de forma simplificada a dinâmica da doença. Depois de estudado o modelo simples, partiu-se para o estudo de uma situação onde temos uma parte da população vacinada. Este novo modelo tem como objetivo verificar a efetividade da aplicação da vacina no alastramento da doença. Em ambas abordagens, se tem como resultado sistemas de equações diferenciais ordinárias, que foram solucionados por métodos numéricos como o Método de Runge-Kutta de quarta ordem. Os resultados obtidos permitem observar o comportamento dos diferentes grupos frente a diferentes cenários de simulação. Além disso, a partir de dados disponíveis publicamente e utilizando-se técnicas de inferência estatística, foram feitas estimativas para os valores de alguns dos parâmetros utilizados.
PALAVRAS-CHAVE: modelagem matemática, epidemiologia, sarampo, vacinação.

MATHEMATICAL MODELING FOR MEASLES VACCINATION

ABSTRACT: Measles is an acute viral infectious disease, transmissible, highly contagious and very common in childhood. The initial symptoms presented by the patient are: fever accompanied by persistent cough, eye irritation and nasal discharge.[1] After these symptoms, there is usually the appearance of reddish spots on the face which progress towards the feet lasting at least three days. In addition, it can cause ear infections, pneumonia, attacks (seizures and stare), brain damage and death. Posteriorly, the virus can reach the airways, cause diarrhea and even infections in the brain. These complications are believed to be triggered by the Measles virus itself, which most often affects the malnourished, newborns, pregnant women and people with immunodeficiencies most severely. Although the global incidence has been significantly reduced through vaccination, measles remains a major public health problem. Due to vaccination coverage is not uniformly high worldwide, measles is the number one preventable killer of children in the world. The main motivation for this work is the study of new mathematical models for the disease. Firstly, the SEIR compartmental model was used as a basis, some aspects of the Kermack and McKendric model such as population homogeneity (without age and without social structure), where the total population is divided into four categories: Susceptible, Exposed, Infected and Recovered. Considering as a characteristic of Measles, that a cured or vaccinated patient will not be infected by the disease, therefore the SEIR model can be used in modeling because it represents in a simplified way the dynamics of the disease. After studying the simple model, we started to study a situation where we have a part of the vaccinated population.

This new model aims to verify the effectiveness of vaccine application in spreading the disease. In both approaches it results in systems of Ordinary Differential Equations, which were solved by numerical methods such as the fourth-order Runge-Kutta Method. The results obtained allow observing the behavior of the different groups against different simulation scenarios. In addition, using publicly available data and using statistical inference techniques, estimates were made for the values of some of the parameters used.

KEYWORDS: mathematical modeling, epidemiology, measles, vaccination.

1 I MODELO

A modelagem de doenças como o sarampo é de fundamental importância para o entendimento dos processos que envolvem doenças infecciosas no geral [2]. Como resultado da modelagem da dinâmica de propagação do Sarampo em uma população, levando-se em conta que parte desta população teve acesso a vacina, tem-se um sistema de equaçõoes diferenciais ordinárias que pode ser resolvido através de técnicas numéricas adequadas. O modelo considera que parte da população é vulnerável à doença ou suscetível, parte é atualmente infectada e, por isso, tem potencial para infectar, parte está no período de latência, parte foi vacinada contra o Sarampo, e finalmente, parte é removida do sistema, seja por morte ou por recuperação, neste caso adquirindo imunidade. Além disso, a partir de dados disponíveis publicamente e utilizando-se técnicas de inferência estatística, é possível obter estimativas de valores dos parâmetros que descrevem as dinâmicas populacionais.

O modelo utilizado foi o SEIRV cujo objetivo é verificar a efetividade da aplicação da vacina no alastramento da doença, propondo uma análise do problema a partir da modelagem matemática e computacional das dinâmicas da transmissão do Sarampo em uma população.

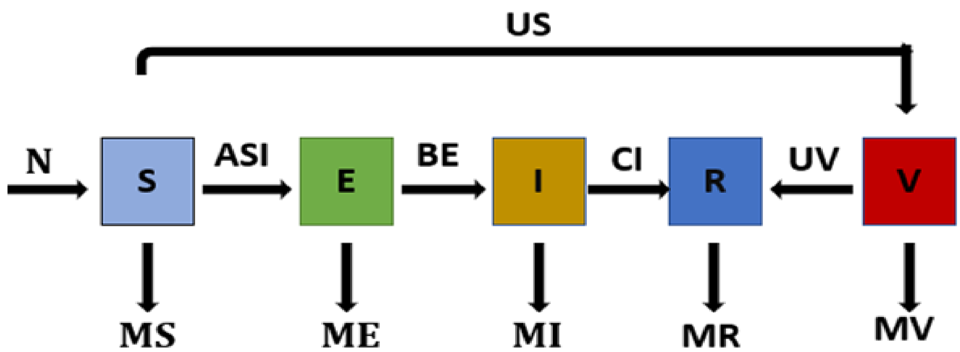


Figura 1: Diagrama de transferência de modelo

Nesse modelo, a população total (P) é dividida em cinco classes: Suscetíveis (S), Expostos (E), Infectados (I), Recuperados (R) e Vacinados(V). E ainda, as seguintes taxas: N - Taxa de Natalidade; M - Taxa de Mortalidade; A - Taxa de Transmissão; B - Taxa de Latência; C - Taxa de Recuperação e U - Taxa de Vacinação. Com base no diagrama que representa a dinâmica de transmissão, temos as seguintes equações diferenciais (equações de estado) para o modelo dinâmico de transmissão de sarampo [3]:

$$\frac{dS}{dt} = N - ASI - US \qquad \frac{dR}{dt} = CI - MR + UV$$

$$\frac{dE}{dt} = ASI - BE - ME \qquad \frac{dV}{dt} = US - MV - UV$$

$$\frac{dI}{dt} = BE - CI - ME$$

Com condições iniciais:

$S(0) \geq 0 \qquad R(0) \geq 0$

$E(0) \geq 0 \qquad V(0) \geq 0$

$I(0) \geq 0$

Utilizamos o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem para resolução das equações diferenciais ordinárias, pois atinge uma boa precisão nos resultados. A implementação é realizada através do software gratuito Scilab. Com o intuito de mostrar o impacto da vacinação na dinâmica de transmissão do Sarampo, foram realizadas simulações numéricas em uma população hipotética constante e homogênea, variando os parâmetros principais. Estimamos os valores de nossos parâmetros, conforme visto a seguir [3].

S=0.8, E=0.1, I=0.1, R=0 (Dados Iniciais Teste 1)

S=0.7, E=0.1, I=0.1, R=0, V=0.1 (Dados Iniciais Teste 2)

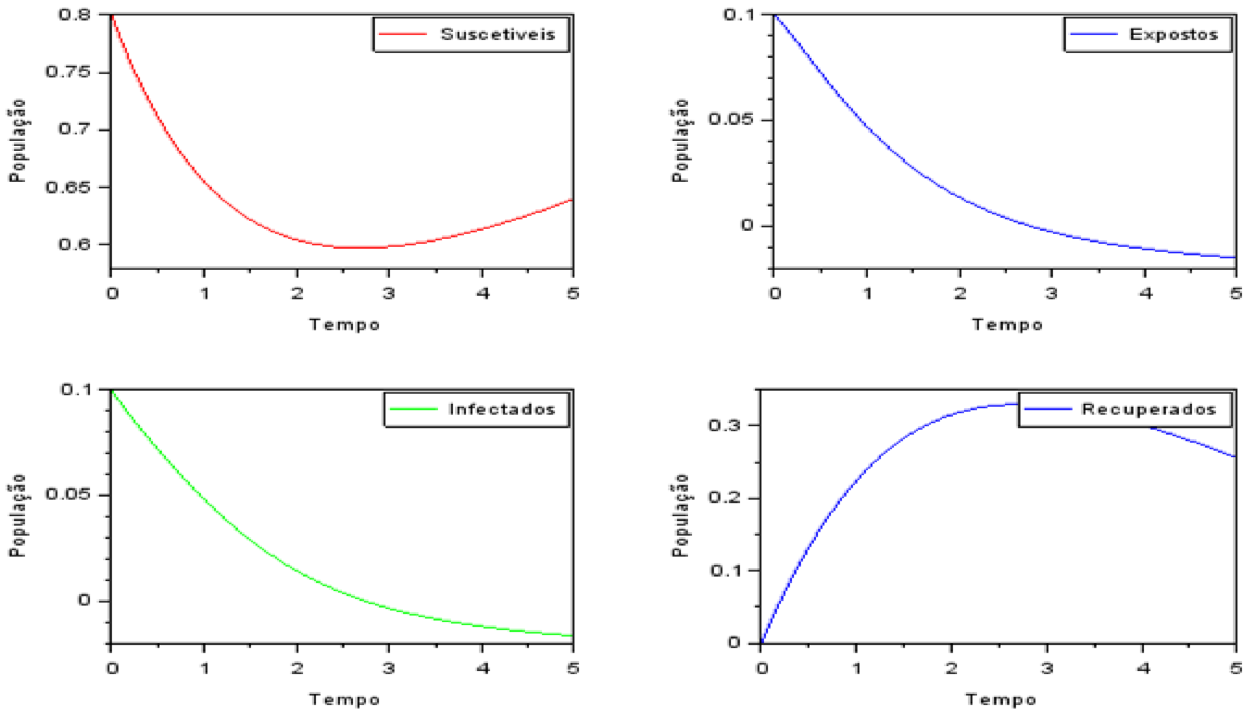
S=0, E=0.1, I=0.1, R=0, V=0.8 (Dados Iniciais Teste 3)

Parâmetros: N = 0.00314, A = 2.76515, B = 2.53472, C = 3.04167, U = 0.53472, M = 0.00314.

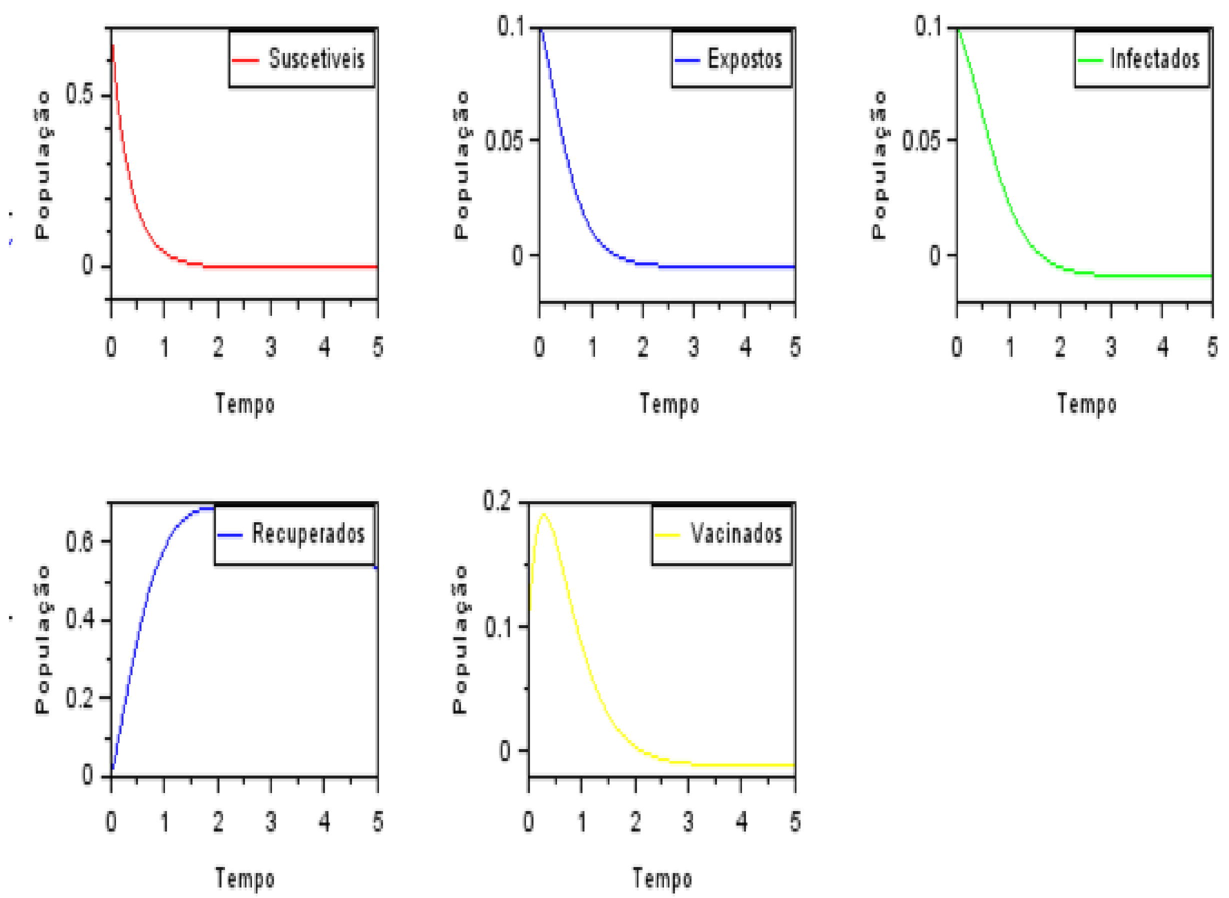
A unidade de tempo se passa em meses.

2 I RESULTADOS DA MODELAGEM

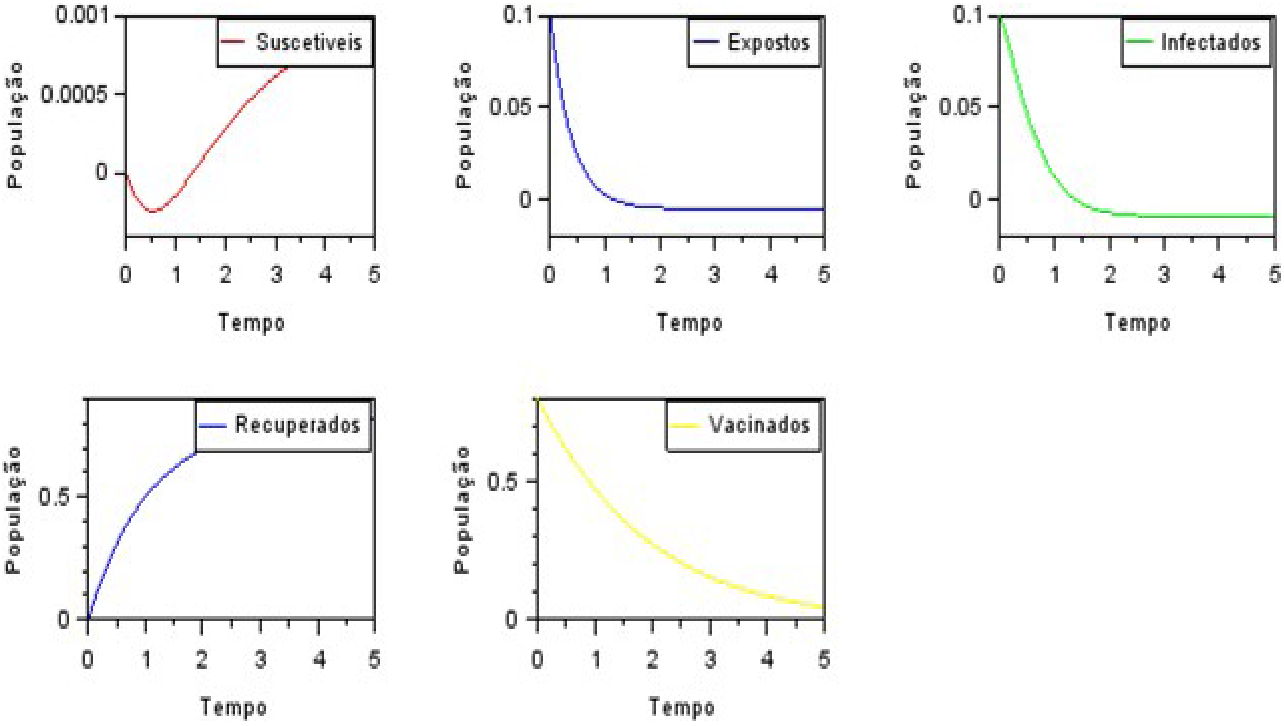
O Teste 1 tem como base o modelo SEIR, neste caso temosa ausência da vacinação na população. No Teste 2 tem-se o modelo SEIRV apresentando uma cobertura vacinal baixa, e no Teste 3 uma cobertura vacinal alta.



Teste 1



Teste 2



Teste 3

3 I CONCLUSÕES

Comparando-se os gráficos, entendemos melhor o comportamento dos diferentes grupos envolvidos no processo de transmissão da doença, e assim analisar a efetividade da aplicação da vacina na erradicação do Sarampo em diferentes cenários de adesão ou acesso à vacina, deixando evidente que a vacinação em massa da população é importante para a erradicação da doença. Observamos que com a presença da cobertura da imunização há declínio rápido no número de infectados. Isso demonstra que uma cobertura vacinal alta pode ser uma medida de controle eficaz em países com alta prevalência de Sarampo [2].

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao CNPq pela bolsa IC de Douglas Souza de Albuquerque. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

REFERÊNCIAS

[1] Fundação Oswaldo Cruz. Site: http://www.bio.fiocruz.br/index.php/sarampo- sintomas-transmissao-e-prevencao. Consulta em: 23/06/18.

[2] World Health Organization, Department of Vaccines and Biologicals, 2001. Measles Technical Working Group: strategies for measles control and elimination. Report of a meeting, Geneva, 11-12 May 2000. Geneva, Switzerland: World Health Organization.

[3] O. O. Onyejekwe; E. Z. Kebede. **Epidemiological Modeling of Measles Infection with Optimal Control of Vaccination and Supportive Treatment**. *Applied and Computational Mathematics*. 4(4): 264-274, 2015.

CAPÍTULO 8

A MODELAGEM MATEMÁTICA NUMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA COM FUTUROS PROFESSORES DA UNEMAT: APLICAÇÃO DA INTEGRAL DEFINIDA DE UMA VARIÁVEL REAL

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 03/04/2020

Polyanna Possani da Costa Petry
Universidade do Estado de Mato Grosso
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas
Sinop – Mato Grosso
http://lattes.cnpq.br/6140591894426193

Kátia Maria de Medeiros
Universidade Estadual da Paraiba
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática
Campina Grande - Paraíba
http://lattes.cnpq.br/9356901445058009

Raul Abreu de Assis
Universidade do Estado de Mato Grosso
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas
Sinop – Mato Grosso
http://lattes.cnpq.br/7738144067749993

RESUMO: Este trabalho apresenta o relato de experiência com a utilização do processo de Modelação como uma das atividades avaliativas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT, campus de Sinop, no segundo semestre ano de 2017. Com objetivo de buscar um maior envolvimento e interesse por parte dos futuros professores, proporcionar situações para que compreendam que a Matemática pode ser utilizada em diferentes contextos e, principalmente, contribuir na construção do conhecimento do futuro professor, incentivando-o à pesquisa, propôs-se a modelagem matemática, por meio de algum software livre, de uma taça com uma capacidade de 300ml. Indicou-se também que o volume fosse calculado utilizando sólidos de revolução, uma aplicação de integrais. Os softwares livres utilizados pelos estudantes foram o Geogebra e o Winplot. Após as atividades analisamos os resultados obtidos utilizando as etapas de Modelação. Além disso, observamos a íntima relação do resultado final do trabalho com a participação efetiva por parte dos futuros professores nos momentos de acompanhamento e atendimento.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem em Educação Matemática,Licenciatura em Matemática, Aplicação de integral.

THE MATHEMATICAL MODELLING IN A DICACTIC EXPERIENCE WITH UNEMAT'S FUTURE TEACHERS: APPLICATION OF THE DEFINITE INTEGRAL OF A REAL VARIABLE

ABSTRACT: This work presents the experience report with the use of the Modelling process as one of the evaluative activities of the Differential and Integral Calculus I subject, in the Mathematics Degree course at the Mato Grosso State University - UNEMAT, Sinop campus, in the second semester of 2017. In order to seek greater involvement and interest by the future teachers, to provide situations so that they understand that Mathematics can be used in different contexts and, mainly, to contribute to the future teachers' knowledge building, encouraging them to research, it was proposed the mathematical modelling, through some free software, of a goblet with a 300ml capacity. It was also indicated that the volume was supposed to be calculated using solids of revolution, an application of integrals. The free software used by students were Geogebra and Winplot. After the activities, we analyzed the results achieved by the use of the Modelling steps. In addition, we observed the close relationship between the work final result and the effective participation of the future teachers in the moments of monitoring and attendance.

KEYWORDS: Modelling in Mathematics Education, Degree in Mathematics, Application of integral.

1 I INTRODUÇÃO

Discussões referentes às dificuldades de aprendizado em Matemática e a busca por alternativas que contribuam no processo de construção do conhecimento em todos os níveis de educação – desde os anos iniciais até o nível superior – são recorrentes e necessárias. Em particular, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I) do ensino superior, as dificuldades apresentadas pelos estudantes acentuam-se no processo de abstração para compreensão e construção do conhecimento "[...] a abstração assume um papel fundamental na constituição do conhecimento matemático, mais especificamente na compreensão de conceitos, teoremas e demonstrações que fazem parte do conteúdo desta importante disciplina" (DIOGO, 2015, p. 23).

Nesse contexto, a prática pedagógica faz parte dessa reflexão de como contribuir para uma melhor compreensão e abstração dos conceitos, principalmente quando se fala em cursos de Licenciatura, ou seja, na formação de professores é importante que seja desenvolvida e estimulada nos alunos e futuros professores a capacidade de abstração e visualização desse abstrato, isto é, refletir sobre a prática pedagógica na seguinte perspectiva:

> Conjecturando sobre a nossa prática pedagógica no ensino de Cálculo Diferencial e Integral I, sob a perspectiva da formação do professor de Matemática, percebemos a necessidade de propiciar, aos alunos, chances de desenvolver a capacidade de visualização, por ser esta um recurso didático-pedagógico potencializador do pensamento criativo na interpretação e na construção do seu próprio conhecimento (DIOGO, 2015, p. 18).

A visualização geométrica para a compreensão de um conceito é um caminho que possibilita essa transição para a demonstração e representação dos conceitos de CDI I e, no caso do estudo das Integrais e suas aplicações, não é diferente, pois "há um problema geométrico associado ao campo conceitual da Integral" (CARNEIRO DÖRR, 2017, p. 40). Desta forma:

> [...] é relevante que o professor desenvolva uma postura crítica reflexiva, subsidiada pelo tratamento teórico, sem abrir mão da conscientização a respeito das vantagens de buscar oferecer na disciplina uma abordagem didático-pedagógica que possa propiciar aos alunos tecerem as suas teias de significados, construídas num movimento de ir e vir entre, o voltar-se para si mesmo e o ir além de si mesmo (DIOGO, 2015, p. 17).

Nessa perspectiva, dos alunos darem sentido aos conceitos por meio daquilo que lhes interessam e assim construírem seus próprios significados, Biembengut (2016, pg. 176) apresenta como processo/método de ensino a *Modelação* como a "utilização do processo da Modelagem no ensino e na aprendizagem da Educação formal", com objetivo de, dentro da estrutura escolar/universitária, incentivar os estudantes à pesquisa, proporcionando condições que os levem a um conhecimento além dos conceitos matemáticos. Para tanto, a autora define as seguintes etapas da modelação:

> (1ª) *percepção e apreensão*; (2ª) *compreensão e explicitação*; e (3ª) *significação e expressão*. Estas etapas envolvem tanto o ensino dos conteúdos curriculares, quanto o ensino do processo de pesquisa. Cada etapa deste processo envolve pluralidades de contextos: interativo, social, discursivo, semântico, histórico, linguístico, científico, dentre outros (BIEMBENGUT, 2016, p. 178).

Conforme a autora, a etapa da percepção e apreensão é o momento que visa estimular o aluno sobre determinado tema/assunto, sendo, portanto, o processo de reconhecimento e familiarização com a situação-problema. A segunda etapa, definida como compreensão e explicitação, é o momento de formulação do modelo, Biembengut (2016, p. 197) afirma que na Modelação "esta etapa consiste em levarmos os estudantes a identificar alguns elementos do *tema/assunto* no sentido quantitativo e qualitativo e, com base nas ideias que eles já possuem, ensinamo-los a inteirarem-se do que ainda desconhecem". Finalmente, a fase de significação e expressão, é uma etapa de interpretar, avaliar e validar não somente o modelo obtido, mas também suas contribuições, expressando o que foi produzido por meio da realização de um seminário, por exemplo.

Nesse sentido, na busca de contribuir na construção do conhecimento dos futuros professores e encontrar alternativas que possibilitem e estimulem a pesquisa foi proposta uma atividade de Modelação Matemática. No segundo semestre de 2017, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (cuja ementa aborda aplicações de integrais de funções de uma variável) do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT, campus de Sinop – uma das notas avaliativas foi atribuída ao desenvolvimento da seguinte atividade de modelagem: modelagem, utilizando o conceitos de sólidos de revolução, de uma taça, com capacidade de 300ml, por meio de um *software* livre. Trabalhos com atividades nesse contexto, cujo objetivo é a modelagem de um recipiente (utilizando sólidos de revolução) e o cálculo do seu volume (por integral definida de função de uma variável real), são encontradas na literatura, tais como Júnior e Oliveira (2016), Dantas e Matias (2017) e Pereira et. al. (2017). No entanto, neste trabalho, chama-se atenção ao fato de que a capacidade de armazenamento da taça já estava predefinida, o que apresenta uma variação das referências consultadas.

2 I METODOLOGIA

Para o desenvolvimento dos modelos foram disponibilizadas aulas destinadas ao acompanhamento e atendimento dos grupos durante todo o processo. É importante observar que o tema foi solicitado aos futuros professores e que a taça construída deveria apresentar detalhes para que, no caso de ser real, apresentasse boa aparência e fosse possível de ser utilizada, ou seja, as proporções dessa taça também precisavam ser levadas em consideração.

Por ser a última atividade avaliativa da disciplina, e por ser um curso com a característica de desistência durante o semestre letivo (outra questão importante que deve ser discutida em outro momento), apenas 6 (seis) futuros professores chegaram a etapa da realização e apresentação do modelo, obtendo-se 3 (três) grupos com 2 (dois) futuros professores cada.

O ponto de partida da modelagem deu-se a partir de cada grupo determinar o modelo de taça a ser construído. Em seguida, os grupos ocuparam-se com o processo de modelagem da taça escolhida, sendo o primeiro passo a busca pelas funções que melhor atenderiam ao objetivo da construção da taça definida, ou seja, determinar/encontrar as funções de maneira que, ao rotacioná-las em torno do eixo ou do eixo , a taça obtida fosse a desejada. Além disso, para garantir a capacidade de 300ml destes recipientes, o estudo do domínio destas funções também fez parte desse processo.

Com relação ao *software*, apesar de ter deixado livre, todos os grupos optaram por utilizar o GeoGebra, isto porque, durante o mesmo semestre, esses futuros professores estavam cursando a disciplina de Informática Aplicada à Educação Matemática, na qual o professor responsável estava realizando atividades com esse *software*. Além disso, conforme o Instituto Geobebra[1] – UESB "[...] é um *software* de Matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação. Tem recebido vários prêmios

1 Disponível para download em: https://www.geogebra.org/download

na Europa e EUA.” Em particular, o grupo 01, além do GeoGebra, utilizou também o *software* livre Winplot[2], apresentando o resultado final (a taça pronta) por meio dos dois softwares.

A seguir, apresenta-se alguns aspectos, referentes ao processo de modelagem da taça de cada grupo, com intuito de relacioná-los com os resultados obtidos e as etapas de modelação citadas anteriormente. Os aspectos considerados foram: utilização das aulas de atendimento; modelo de taça a ser construída; escolha das funções; resultado após realizar a rotação em torno do eixo x.

<u>Utilização das aulas de atendimento:</u> as aulas de atendimento disponibilizadas foram em horário de aula. O grupo 01 participou de todos os atendimentos, apresentando o que já haviam desenvolvido e retirando dúvidas, quando surgiam; o grupo 02 levou um longo tempo para definir o modelo da taça e, portanto, não aproveitaram, como poderiam, as aulas de atendimento; o grupo 03, numa situação muito semelhante ao grupo 02, também demorou para definir o modelo da taça.

<u>Modelo da taça a ser construída:</u> após todos os grupos definirem os modelos das taças que desejavam construir, obteve-se o resultado apresentado na Tabela 1, cuja representação das taças utilizadas como referência constam na Figura 1.

GRUPOS	MODELO DA TAÇA UTILIZADA COMO REFERÊNCIA
01	Taça de sorvete - modelo apresentado na Figura 1(a)
02	Taça de vinho - modelo apresentado na Figura 1(b)
03	Taça cálice - modelo apresentado na Figura 1(c)

Tabela 1 – Modelo de taça a ser construída por cada grupo

Fonte: Dos autores.

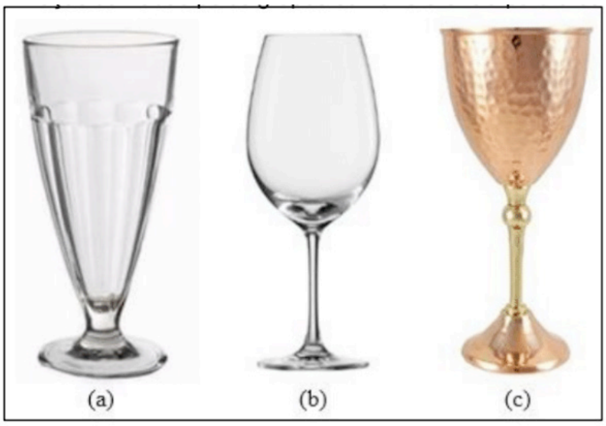


Figura 1 – Taças utilizadas pelos grupos como referência para a construção.

Fonte: Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura emMatemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

2 Criado pelo Professor Richard Parris “Rick”, por volta de 1985 o Winplot é “uma excelente ferramenta computacional para fazer gráficos 2D e 3D de maneira bastante simples e, diria até, intuitiva” (SOUZA, 2004), ainda conforme o autor, sua utilização é motivada por 5 (cinco) pequenos motivos: inteiramente gratuito, simples utilização, pequeno e portátil, é sempre atualizado e há versão em português). Disponível para download em: https://winplot.br.softonic.com/

<u>Escolha das funções para a modelagem:</u> Definido o modelo da taça a ser utilizada como referência, cada grupo iniciou a "procura" pelas funções cujo contorno relacionavam-se com o modelo almejado. Esse processo ocorreu de maneira muito particular para cada grupo, porém é importante observar que não foi utilizado a ferramenta "Inserir Imagem" do software GeoGebra, o que poderia implicar, por exemplo, no uso de interpolação polinomial, inserindo-se pontos sobre a curva da imagem. Assim, todos os grupos iniciaram suas buscas plotando o gráfico da função que julgavam adequada e então, a partir de observações, foram realizando os ajustes necessários.

Para atender a restrição de que as taças modeladas precisavam ter capacidade de 300ml, o alunos utilizaram o conceito referente às aplicações das integrais definidas, a saber, o cálculo de volume de sólidos de revolução, obtidos a partir da rotação de uma função $f(x)$ em torno do eixo x ou *y*, cuja construção já havia sido estudada em momento anterior na disciplina.

Neste ponto, podemos destacar a excelente oportunidade de aplicação dos seguintes conteúdos matemáticos relacionados com a disciplina de Cálculo Diferencial:

- Domínio e Imagem de funções elementares.
- Funções elementares definidas por partes.
- Integral definida e cálculo de volumes de sólidos de revolução.

Em particular, a fórmula de sólidos de revolução em torno do eixo foi utilizada pelos estudantes:

$$V_{Ex} = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

onde $f(x)$ é a função que determina o perfil da taça e $[a, b]$ é o intervalo no qual a função está definida. Observa-se que, como $1ml = 1\ cm^3$, os alunos puderam adotar as unidades do eixo x como centímetros, de forma que a integral já fornece o resultado em termos de unidades de cm^3, de forma equivalente ao resultado em unidades de ml.

As funções utilizadas pelos grupos e seus respectivos domínios são apresentados a seguir:

Grupo 01: Modelo - taça de sorvete

$p(x) = \sqrt{x},\ \ 0 \leq x \leq 13.82,$ $g(x) = x^2 + 0.3,\ \ -1.85 \leq x \leq 0.1,$

$q(x) = 3.72,\ \ -2.3 \leq x \leq -1.85$ e $r(x) = 3.72,\ \ 13.82 \leq x \leq 14.5$

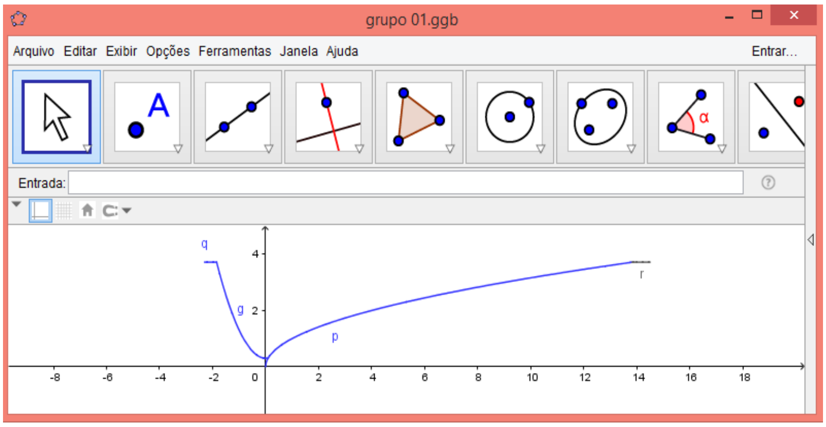


Figura 2 – Funções utilizadas, pelo grupo 01, para a construção da taça de sorvete.

Fonte: Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

Para este grupo, em particular, vamos apresentar também a forma como foi utilizada a fórmula de volume de sólido de revolução. A função que define a porção da taça responsável por reter o conteúdo é aquela relacionada com a função

$$p(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 13.82.$$

Na verdade, o próprio intervalo de definição desta função é fruto do cálculo relacionado com o volume recomendado pelo projeto, ou seja, 300 . A seguir, ilustramos o processo.

Se definimos como o intervalo da função $[0, b]$ queremos determinar p (x) tal que o volume do sólido de revolução obtido ao girarmos o gráfico de p (x) em torno do eixo x nesse intervalo resulte 300 cm^3. Ou seja,

$$300 = \int_0^b \pi (p(x))^2 dx = \pi \int_0^b \left(\sqrt{x}\right)^2 dx.$$

Neste caso, como $0 \leq x$, a raiz está bem definida no conjunto dos números reais e podemos escrever $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x^2$, de onde:

$$300 = \pi \int_0^b \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^b x\, dx.$$

Calculando a integral, obtemos:

$$300 = \pi \frac{x^2}{2}\bigg|_0^b = \pi \frac{b^2}{2}$$

de onde obtém-se, finalmente:

$$b = \sqrt{\frac{600}{\pi}} \cong 13{,}82$$

que é o valor que define o intervalo utilizado para atender à demanda do volume específico de 300 cm^3.

Cálculos análogos foram realizados pelos outros grupos mas, uma vez que já cumprimos o intuito de ilustrar a aplicação dos conceitos no projeto de modelagem das taças, apresentamos apenas as funções utilizadas pelos mesmos.

Grupo 02:

$$f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{2}{3}x, \quad 0 \leq x \leq 10.43 \qquad \text{e}$$

$$g(x) = 3\sqrt{x+8} - \left(\frac{2}{3}\,(x + 8) + 3.46\right), \qquad -8 \leq x \leq 0$$

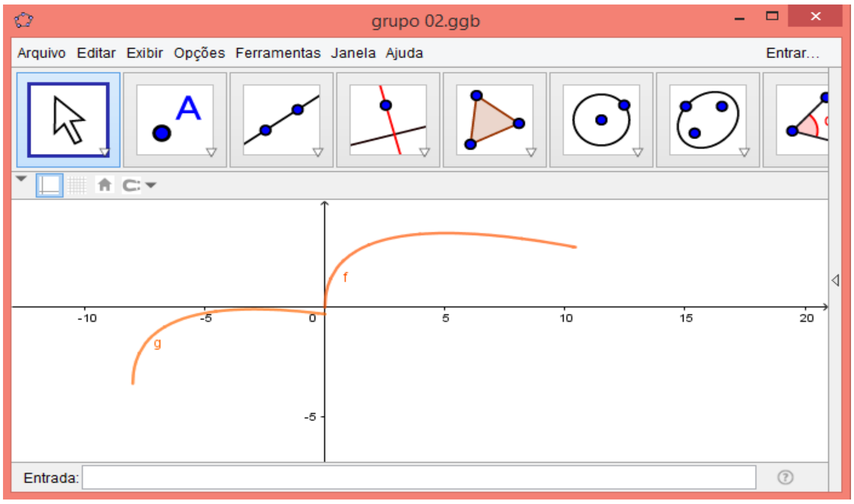


Figura 3 – Funções utilizadas, pelo grupo 02, para a construção da taça de vinho.

Fonte: Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

Grupo 03:

$f(x) = \sqrt{2x}, \ \ 0 \leq x \leq 9.77,$ $g(x) = x^3 + 0.9, \ \ -0.97 \leq x \leq$ $0.6,$

$h(x) = 0.4, \ \ -7.1 \leq x \leq 0.8$ e $r(x) = 3\,\mathrm{sen}(4x), \ \ -7.5 \leq x \leq$ -7.1

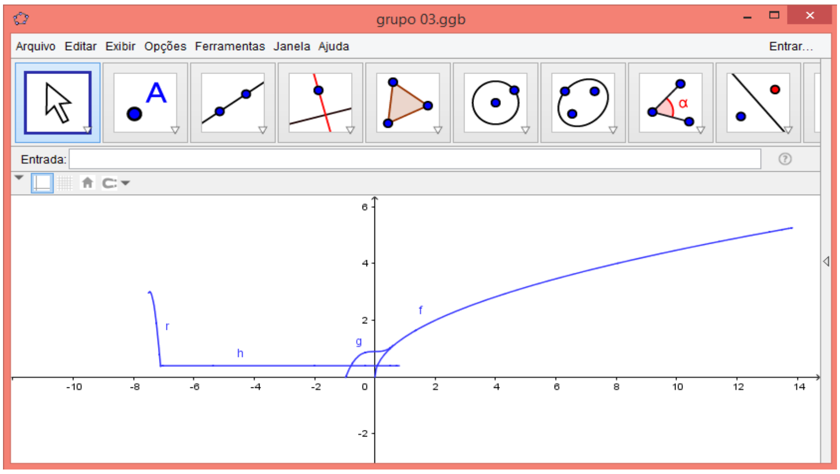


Figura 4 – Funções utilizadas, pelo grupo 03, para a construção da taça cálice.

Fonte: Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

Resultado após realizar a rotação em torno do eixo *x*: Devido à construção desenvolvida por cada grupo, tem-se que todos os grupos realizaram a rotação das funções em torno do eixo , obtendo assim, a versão final da taça. Os resultados finais das modelagens são apresentados a seguir: Figura 5, taças de sorvete desenvolvidas pelo grupo 01 (construção no Winplot à direita e construção no GeoGeobra à esquerda); Figura 6, taça de vinho desenvolvida pelo grupo 02; Figura 7, taça cálice desenvolvida pelo grupo 03.

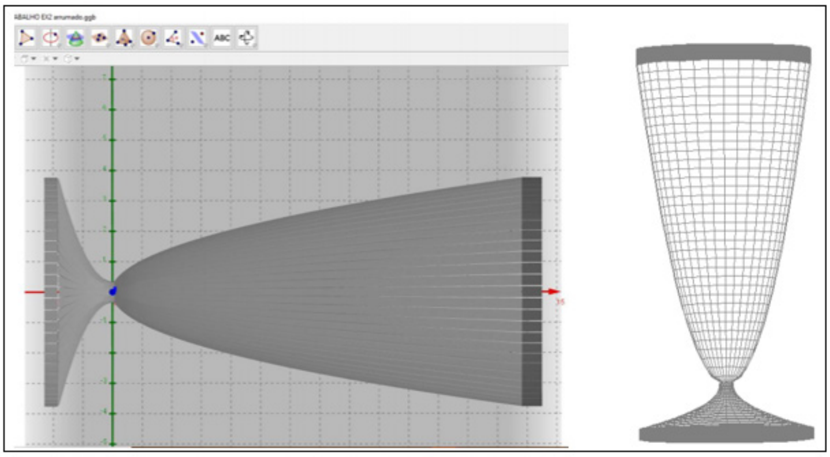


Figura 5 – Resultado obtido após realizar a rotação em torno do eixo : grupo 01, taça de sorvete.

Fonte: Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

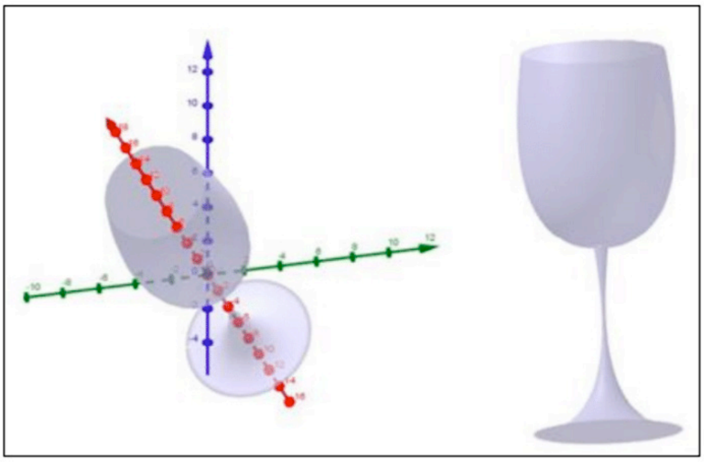


Figura 6– Resultado obtido após realizar a rotação em torno do eixo : grupo 02, taça de vinho.

Fonte: Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

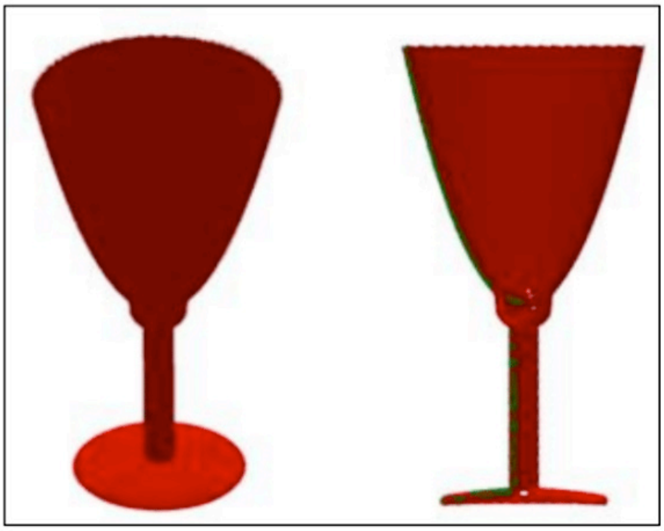


Figura 7 – Resultado obtido após realizar a rotação em torno do eixo x :grupo 03, taça cálice.

Fonte: Alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, campus de Sinop, turma 2017/2.

3 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

De maneira geral, o resultado da experiência didática (experiência no sentido de propor a elaboração de uma atividade de modelagem matemática de modo que os futuros professores fossem os atuantes desse processo de modelagem e o professor fosse o mediador) temos que os objetivos iniciais deste trabalho foram alcançados. Isto é, consideramos que tivemos sucesso em contribuir na construção do conhecimento dos futuros professores, na perspectivas de proporcionar situações que estimulassem maior envolvimento e o interesse destes sujeitos, de modo que estes compreendessem as possibilidades da Matemática, em diferentes contextos e, portanto, incentivando-os à pesquisa.

Uma situação que exemplifica tal incentivo é a participação de um destes grupos com a apresentação, na forma de pôster, do trabalho intitulado "O uso do GeoGebra como recurso didático para o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I: Experiência vivenciada na formação acadêmica" no I Seminário de Pesquisa Aplicada e Tecnologias – SEPATE[3], realizado de 21/11/2018 a 23/11/2018, na cidade de Sinop, Mato Grosso.

Com relação às etapas da Modelação, definidas por Biembengut (2016), e as etapas de construção das taças, temos as seguintes considerações: os momentos de definição do modelo de taça a ser construída e do *software* utilizado encaixam-se como a primeira etapa da Modelação, isto é, a percepção e apreensão. A escolha das funções para a modelagem da taça desejada, determinação dos intervalos bem como os testes de rotação relacionam-se com a segunda etapa da Modelação – compreensão e explicitação. Por fim, ao avaliar o resultado final, ou seja, avaliar a validade do modelo obtido para a taça em questão tem-se a ocorrência da significação e expressão, terceira etapa da modelação.

Observa-se ainda que, após os seminários dos trabalhos finais, ficou explícito que o grupo que utilizou os horários para orientação desde o início, aproveitando a cada novo encontro para apresentar o caminho que estavam traçando na construção (modelagem) da taça e sanar as dúvidas que estavam surgindo, pôde-se contribuir de maneira mais efetiva nos possíveis erros que poderiam ser gerados na taça final, possibilitando maiores avanços para o resultado final do modelo. Ainda que os outros aspectos que implicam no resultado final (detalhes como proporção da taça, intervalos das funções que poderiam ser diferentes) para se obter melhores resultados estão relacionados ao primeiro, isto é, enxerga-se que as aulas de atendimento e acompanhamento são relevantes, principalmente para a troca de experiência entre o professor formador e o aluno – futuro professor de Matemática. Dessa forma, a atividade propiciou aos licenciandos, além de discussão e reforço dos conceitos, uma formação reflexiva sobre o conteúdo, crítica na interpretação dos conceitos e o desenvolvimento da capacidade de visualização, conforme Diogo (2015) defende.

REFERÊNCIAS

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

CARNEIRO DÖRR, R. **Análises de Aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral: um Estudo de Caso de Desenvolvimento de Conceitos e Procedimentos Algébricos em uma Universidade Pública Brasileira**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Brasília – Brasília, 2017, 237 p.

DANTAS, S. C; VIEIRA, C. V. Formas de revolução e cálculo de volume.
Ciência e Natura, vol. 39, núm. 1, janeiro-abril, 2017, pp. 142-155
Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, Brasil.

3 Para verificar - código de autenticidade 896183.535071.097152.0.309821216496349156 em https://www.even3.com.br//documentos.

DIOGO, M. G. V. S.**Uma abordagem didático-pedagógica do cálculo diferencial e integral I na formação de professores de matemática**. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Rio Claro, 2015, 256 p.

Instituto GeoGebra – UESB.
Disponível em: <http://www2.uesb.br/institutogeogebra/?page_id=7>. Acesso em: 21 de abril de 2019.

JÚNIOR, P. B. A; OLIVEIRA, E. G. MODELO MATEMÁTICO DA CURVA DE REVOLUÇÃO DE UMA TAÇA. XII **Encontro Nacional de Educação Matemática - Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades** - ISSN 2178-034X. São Paulo –SP, 13 a 16 de julho de 2016.
Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6412_3325_ID.pdf.Acesso em: 16 de outubro de 2019.

PEREIRA, et al. Usando o GeoGebra para o ensino de sólidos de revolução. **Ciência e Natura**, vol. 39, núm. 3, setembro-dezembro, 2017, pp. 666-686. Universidade Federal de Santa Maria
Santa Maria, Brasil.

SOUZA, Sérgio de Albuquerque. **Usando o Winplot**. Versão: 27/10/2004.
Disponível em: <http://www.mat.ufpb.br/sergio/winplot/winplot.html#toc1>. Acesso em: 21 de abril de 2019.

CAPÍTULO 9

CONTEXTUALIZANDO O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA EXPERIÊNCIA ANCORADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 27/03/2020

Rudinei Alves dos Santos
Instituto Federal do Pará – IFPA
Santarém - Pará
http://lattes.cnpq.br/9365709399373081

Vanessa Pires Santos Maduro
Instituto Federal do Pará – IFPA
Santarém - Pará
http://lattes.cnpq.br/5788121479915797

Verônica Solimar dos Santos
Instituto Federal do Pará – IFPA
Santarém - Pará
http://lattes.cnpq.br/2213211795984444

Gilbson Santos Soares
Instituto Federal do Pará – IFPA
Santarém - Pará
http://lattes.cnpq.br/1017295739649287

Adriana Oliveira dos Santos Siqueira
Instituto Federal do Pará – IFPA
Santarém - Pará
http://lattes.cnpq.br/0480846453077266

RESUMO: O presente trabalho apresenta um relato de experiência desenvolvido junto aos acadêmicos do curso de Bacharelado em Engenharia Civil do Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Pará – IFPA/ Campus Santarém, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, ofertada no primeiro semestre de 2019. Objetivou oportunizar aos acadêmicos de Engenharia Civil uma atividade de modelagem matemática capaz de fazê-los refletir sobre as possibilidades de construir e analisar modelos matemáticos em sua área de atuação. Evidenciou-se que Modelagem Matemática motivou o debate e propiciou aos alunos momentos de envolvimento acerca da atividade que buscava um modelo matemático sugerido em uma situação-problema adaptada da prova do Exame Nacional do Ensino Médio do ano de 2017. O envolvimento e a disposição dos acadêmicos no sentido de buscarem caminhos coletivos para construção da solução e aprofundamento do conhecimento envolvido destacam a relevância da utilização da Modelagem Matemática para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral.

PALAVRA-CHAVE: Modelagem Matemática; Cálculo Diferencial; Relato de Experiência.

CONTEXTUALIZING DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS: AN EXPERIENCE ANCHORED IN MATHEMATICAL MODELING

ABSTRACT: This work presents a report of

experience developed with the academics of the course of Bachelor in Civil Engineering of the Federal Institute of Education, Sciences and Technology of Pará - IFPA / Campus Santarém, in the discipline of Differential and Integral Calculus I, offered in the first half of 2019. The purpose of this course was to provide civil engineering students with a mathematical modeling activity capable of making them reflect on the possibilities of building and analyzing mathematical models in their field. It was evident that Mathematical Modeling motivated the debate and provided students with moments of involvement about the activity that sought a mathematical model suggested in a problem-situation adapted from the National High School Exam of the year 2017. The involvement and willingness of academics to seek collective paths for building the solution and deepening the knowledge involved highlight the relevance of using Mathematical Modeling for the teaching of Differential and Integral Calculus.
KEYWORDS: Mathematical Modeling; Differential Calculus; Experience Report.

1 I INTRODUÇÃO

Em nossa prática docente percebemos que replicamos atividades que, por vezes, não despertam no aluno o interesse pela Matemática, pois são permeadas de situações-problema desconectadas da realidade ou que não são capazes de desafiar e gerar reflexões sobre o conteúdo abordado e suas possíveis aplicações no mundo em que vivemos. Isso pode ser evidenciado nas aulas de Cálculo para o curso de Engenharia Civil, principalmente no primeiro semestre do curso, em que o aluno se depara com disciplinas com muito conteúdo matemático e pouca aplicabilidade na sua futura profissão de engenheiro, o que acaba desmotivando-o. Nesse sentido, como desenvolver uma atividade que possa envolver e estimular esses alunos a estudarem Cálculo Diferencial e Integral?

Este artigo apresenta um relato de experiência que aborda conceitos de Derivada e Integral na aplicação de uma situação prática na área de Engenharia Civil, além de envolver conhecimentos prévios acerca da Matemática estudada na educação básica. Possibilitando conduzir o aluno a reflexões que o conduza a relacionar os seus conhecimentos prévios e acadêmicos com seu contexto, como ressaltado por Bassanezi (2002, p.18):

> Quando se propõe analisar um fato ou uma situação real cientificamente, isto é, com o propósito de substituir a visão ingênua desta realidade por uma atitude crítica e mais abrangente, deve-se procurar uma linguagem adequada que facilite e racionalize o pensamento. O objetivo fundamental do uso de matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem.

A experiência relatada ocorreu no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA) Campus Santarém. Atualmente o referido Campus atende 1.265 alunos, segundo dados da Plataforma Nilo Peçanha (BRASIL, 2019), distribuídos em cursos técnicos, superiores e de pós-graduação lato sensu. Destaca-se o fato de que em 2018 iniciou a primeira turma de Graduação em Engenharia Civil, curso em que aplicamos a atividade de Modelagem Matemática.

Essa atividade objetivou oportunizar ao acadêmico de Engenharia Civil uma atividade de modelagem matemática capaz de fazê-lo refletir sobre as possibilidades de construir e analisar modelos matemáticos em sua área de atuação. Biembengut (2016, p.83) afirma que "O Modelo Matemático de algum fenômeno das Ciências (...) nos permite compreender o fenômeno que o gerou, fazer uso para solucionar uma situação-problema, inferir ou mudar uma situação; encadeia muitas revelações significativas".

Escolhemos a Modelagem Matemática como metodologia de ensino, pois concordamos com a definição de Bassanezi (2002, p. 16), em que a descreve como "a arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". E ainda de acordo com o mesmo autor, é possível selecionar alguns argumentos para a inclusão da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem de Matemática, tais como: motivação; facilitação da aprendizagem; preparação do estudante para que utilize a Matemática em diferentes áreas; desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e auxílio na compreensão do papel sociocultural da Matemática.

Nas próximas sessões, descreveremos a metodologia utilizada para execução da atividade, análise dos resultados obtidos e as considerações finais.

2 I METODOLOGIA

A situação-problema explorada foi adaptada da questão de número 176, encontrada na prova do ENEM 2017, caderno amarelo. Originalmente, foi inspirada na obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer. Trata-se da Igreja de São Francisco de Assis, localizada na Lagoa da Pampulha em Belo Horizonte. A questão original solicita que seja calculada a altura dessa igreja a partir de medidas fictícias e explora conhecimento acerca de função quadrática, uma vez que a abóbada da obra foi traçada em arco de parábola.

Buscando explorar o conceito de máximos e cálculo de áreas, respectivamente, por meio de derivada e integral, a situação-problema (em anexo) ganhou itens que procuravam conduzir o aluno a construir uma proposta de solução. Além disso, com intuito de aproximar a questão do contexto do aluno, inseriu-se uma abordagem histórica que pudesse justificar a motivação dos cálculos solicitados.

A situação-problema ficou composta de seis questões. A primeira consistia, somente, em determinar a função quadrática que melhor representava a ilustração na questão (Figura 1). Para tanto, implicitamente, foram apresentadas as coordenadas de quatro pontos sobre a representação de uma parábola.

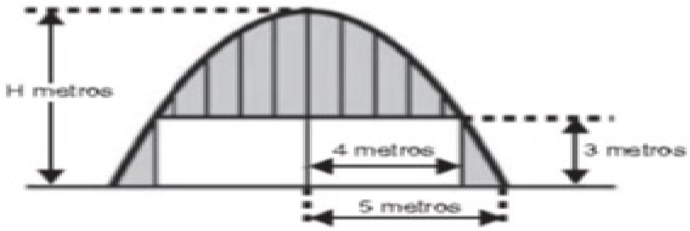


Figura 1 – Representação da faixada da Igreja de São Francisco de Assis

Fonte: Prova ENEM 2017

A segunda questão questionava sobre possibilidades de áreas para a entrada retangular da igreja, apresentada na Figura 2, com intuito de conduzir o aluno a criar e analisar modelos possíveis para essa entrada. Como consequência, o próximo item da situação-problema questionou a existência de área máxima do retângulo destacado e solicitou-se que justificassem as respostas com base em teoremas que pudessem sustentá-las.

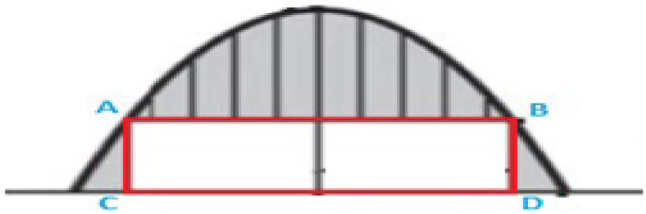


Figura 2 - Entrada retangular da Igreja

Fonte: Os autores

Na quarta questão solicitamos que fosse calculada a área limitada pela curva f (x) (caracterizada na primeira questão) e pelos pares $(x\ ;\ y)$ tais que $0 \leq x \leq 10$ e $0 \leq y \leq f(x)$. Nesta questão o aluno deveria fazer uso de seus conhecimentos sobre cálculo de áreas com o auxílio de integral.

O quinto item da situação-problema tentou promover discussão sobre a existência de área mínima para região localizada acima da representação do retângulo ABCD (como visto na Figura 2). Nessa questão, o aluno deveria, de posse das análises realizadas para resolução das questões anteriores, verificar que essa área pode ser tão próxima de zero quanto se queira, pois quando os pontos C e D tendem para 5, a área do retângulo tende a zero.

Na última etapa buscamos inserir um contexto que justificasse a necessidade de generalização e motivasse o aluno no sentido de propor uma solução para a questão. Para tanto, fez-se uso de uma abordagem histórica e de uma situação fictícia capaz de inserir o futuro engenheiro civil em um cenário local de atuação profissional. Nesse contexto, objetivou-se a generalização da situação, solicitando a elaboração de um modelo matemático para calcular a área limitada por uma parábola e o maior retângulo possível para a entrada de uma igreja (Veja questão em anexo).

Com o intuito de melhor acompanhar e orientar a execução da atividade a turma foi dividida em grupos de até quatro alunos. Cada grupo recebeu a questão impressa e folha de resposta. Solicitou-se que as resoluções apresentassem justificativas matemáticas e o passo a passo de sua execução.

Para melhor direcionar os trabalhos, cada grupo elegeu: um(a) Coordenador(a), responsável em organizar as discussões, estimular a participação dos componentes e evitar que os debates fugissem do tema; um(a) Secretário(a), responsável em realizar os registros oriundos das discussões e propostas de resolução da questão; um Comunicador, distinto daqueles que ocuparam a função de Coordenador(a) e Secretário(a), com a função de apresentar à turma as respostas construídas.

Os grupos tiveram quatro horas destinadas à execução da atividade, sendo que desse tempo, 2h30min foram destinadas a resolução e 1h30min destinada à socialização das propostas de solução. Após a socialização de cada grupo, limitada em10minutos, abria-se para considerações e perguntas do professor e alunos da turma. Ao final da exposição a proposta escrita na ficha de resolução foi entregue aos professores que orientaram o desenvolvimento da atividade.

3 I ANÁLISE

Apesar da turma submetida à atividade já ter explorado os conceitos matemáticos necessários à resolução da situação-problema apresentada, muitas dúvidas emergiram durante a execução da atividade. Além disso, fatores ligados a organização do grupo impediram melhores resultados.

Inicialmente destaca-se a pouca habilidade dos alunos trabalharem em grupo. Diante disso, mesmo antes da leitura da atividade, observou-se que alguns grupos fizeram o “rateio” da questão uma vez que estava dividida em seis itens. Alguns desses grupos perceberam em seguida o equívoco dessa estratégia, uma vez que os itens foram construídos para que servissem de trampolins para a execução do item seguinte. Então, logo reorganizaram a atividade.

O primeiro item, mesmo abordando conceitos explorados no Ensino Médio, conduziu a muitas discussões, pois precisaram revisitar o tema de Função Quadrática para buscarem meios de construir a função que representaria a curva em parábola apresentada nesse item. Desta forma, houve grupos que buscaram pesquisar o tema por meio de seus *smartphones* acessando sites na internet, outros buscaram exemplares de livros na biblioteca do Campus para subsidiar seus debates. Foram momentos de muitos *insights* nos quais se podia perceber o empenho e construção coletiva das respostas.

Acerca das resoluções apresentadas no item 1, apesar dos cinco grupos mostrarem resultados equivalentes, verificamos dois caminhos traçados. No primeiro, já esperado pelos autores deste artigo, optou-se por construir a função quadrática utilizando um sistema linear de segunda ordem, como apresentado na figura 3.

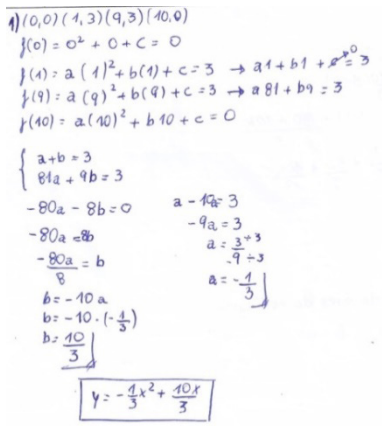


Figura 3 - Resolução da questão 1 apresentado pelo grupo 1.

Fonte: Registros dos acadêmicos.

O segundo caminho fez uso da estrutura algébrica de um polinômio do segundo grau na forma fatorada. Essa estratégia simplificou o processo de resolução e, os grupos que optaram por ela, gastaram menos tempo em sua execução, como observado na figura 4.

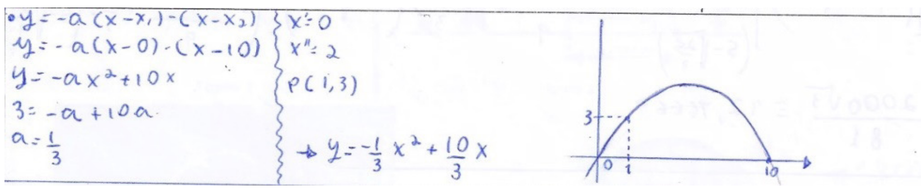


Figura 4 - Resolução da questão 1 apresentada pelo grupo 5.

Fonte: Registros dos acadêmicos.

Os caminhos descritos acima evidenciam que a modelagem é capaz de promover momentos de debates em grupos que conduzem a caminhos, apesar de distintos, repletos de estratégias ancoradas em conceitos matemáticos explorados em níveis de formação anteriores que fundamentam o conhecimento atual e que sem eles se torna difícil a evolução acadêmica do aluno, principalmente para o ensino/aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. Esse fato corrobora com as ideias de Moreira (2006, p.14), em que afirma:

> Há um processo de interação pelo qual conceitos mais relevantes e inclusivos interagem com o novo material funcionando como ancoradouro, isto é, abrangendo e integrando o material novo e, ao mesmo tempo, modificando-se em função dessa ancoragem.

Os itens 2 e 3 não foram resolvidos nessa sequência pelos grupos, como era esperado pelos autores do artigo, apesar da orientação dispensada nesse sentido, pois os alunos responderam o item 2 a partir da resposta encontrada no item 3 de uma forma mais “mecânica” (ver figura 5), sem fazer estimativas ou substituições na lei de formação modelada no item 1.

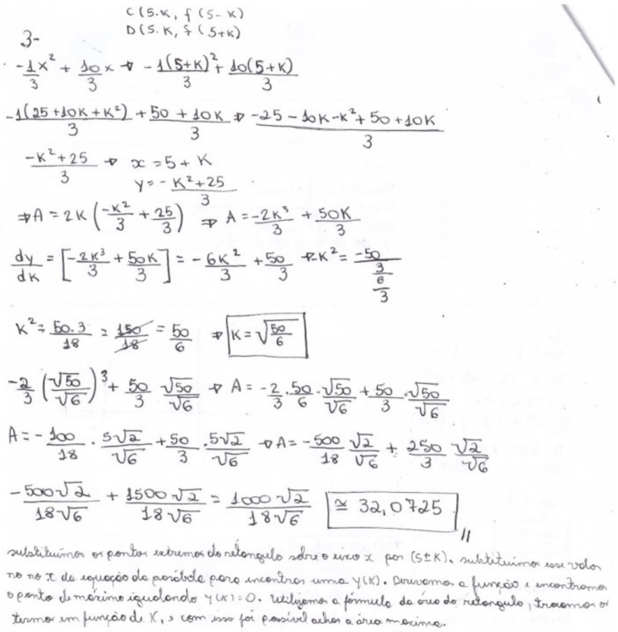


Figura 5 - Resolução da questão 3 apresentada pelo grupo 2.

Fonte: Registros dos acadêmicos.

Apesar dos grupos terem obtido respostas satisfatórias, a mudança de ordem na sequência de resolução dos itens 2 e 3 furtou a etapa em que iriam refletir sobre estratégias de como calcular a área desses possíveis retângulos e, assim, construir a resolução do item seguinte. Esse fato ocasionou maior demanda de tempo para equacionar o item 3 e requereu mais intervenções dos professores. Ressalta-se que no momento da socialização foi destacado esse evento e, após debates, a turma reconheceu que a melhor estratégia seria buscar solução para o item 2 e a partir das experimentações realizadas nessa etapa, construir uma solução algébrica fundamentada nas experiências adquiridas anteriormente.

Outro fato que chama a atenção nas resoluções da questão 3 é a desconsideração em relação ao enunciado que exigia o uso de teoremas matemáticos para justificar as técnicas apresentadas. Destacamos que somente uma equipe descreveu sucintamente, sem fundamentação de teoremas, como procedeu com sua resolução. Aparentemente, os grupos seguiram uma estrutura mecanizada de raciocínio sem espaço para reflexões. Desta forma, percebemos que é fundamental seguir sequencialmente as etapas de resolução propostas em um processo de modelagem, pois podem contribuir para aquisição significativa do conhecimento, como evidenciado por Silva (2016, p.169):

> O processo de Modelagem Matemática, portanto, tem como um de seus objetivos facilitar a aquisição de conhecimentos já estabelecidos, mas de modo mais natural possível a fim de que o sistema cognitivo não sofra desnecessariamente no seu processo evolutivo, bem

como não se acomode definitivamente, ocorrendo assim à estagnação desse sistema. O que queremos dizer é que, pelo processo de Modelagem Matemática, o sistema cognitivo do aluno busca sempre se alimentar com conhecimentos significativos, e não apenas com aprendizagens mecânicas que não promovem as abstrações reflexivas.

Na questão 4, que menos recorria a manipulação algébrica, foi desenvolvida com mais tranquilidade, contudo alguns equívocos aritméticos e de notação ocorreram durante o processo. Então, com base nesses equívocos as orientações foram direcionadas para que por meio de debates em grupos fundamentados em suas leituras e conhecimentos prévios os grupos pudessem superar suas dificuldades. Assim, conseguiram lograr êxito na questão, como ilustrado na figura 6.

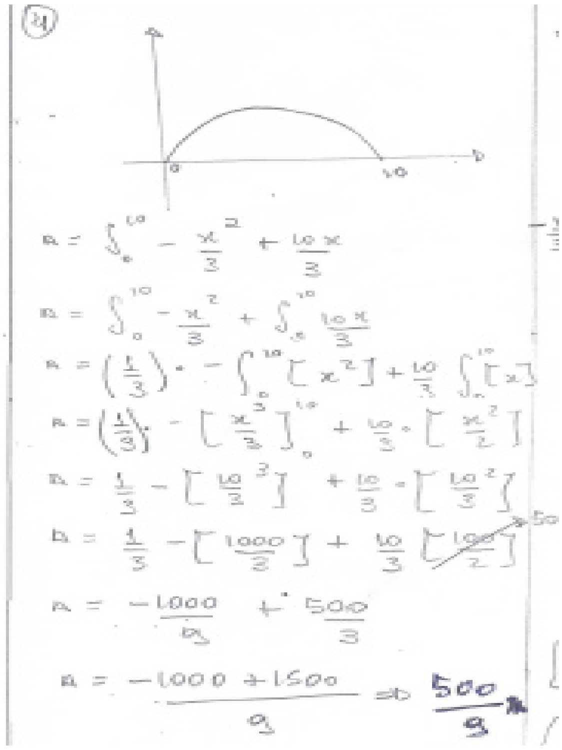
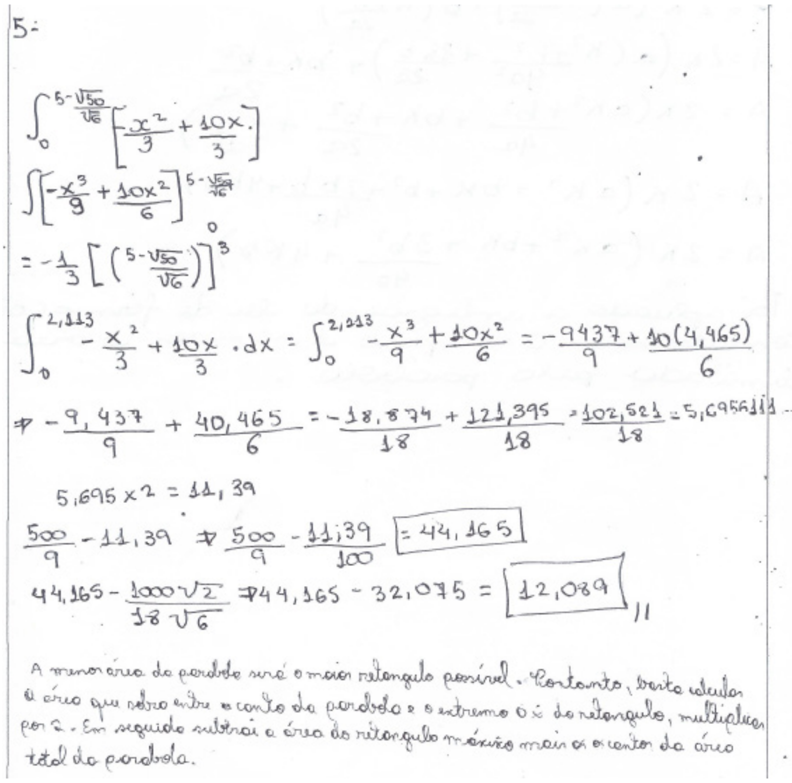


Figura 6 - Resolução da questão 4 apresentada pelo grupo 3.

Fonte: Registros dos acadêmicos.

Nas resoluções da questão 5, mesmo com as perguntas instigadas pelos professores para provocar reflexão, os grupos concluíram, equivocadamente, que a situação permitia a existência de uma área mínima para a situação descrita, sendo determinada quando o retângulo ABCD (representado na figura 2, anteriormente) tivesse área máxima, como exemplificado na figura 7.



5:

$$\int_0^{5-\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}}} \left[-\frac{x^2}{3}+\frac{10x}{3}\right]$$

$$\int \left[-\frac{x^3}{9}+\frac{10x^2}{6}\right]_0^{5-\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}}}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[\left(5-\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{6}}\right)\right]^3$$

$$\int_0^{2,113} -\frac{x^2}{3}+\frac{10x}{3}\cdot dx = \int_0^{2,113} -\frac{x^3}{9}+\frac{10x^2}{6} = -\frac{9437}{9}+\frac{10(4,465)}{6}$$

$$\neq -\frac{9,437}{9}+\frac{40,465}{6} = -\frac{18,874}{18}+\frac{121,395}{18} = \frac{102,521}{18} = 5,6956111\ldots$$

$$5,695 \times 2 = 11,39$$

$$\frac{500}{9}-11,39 \neq \frac{500}{9}-\frac{11,39}{100} \boxed{=44,165}$$

$$44,165-\frac{1000\sqrt{2}}{18\sqrt{6}} \neq 44,165-32,075 = \boxed{12,089}$$

A menor área da parábola será o maior retangulo possível. Portanto, basta calcular a área que sobra entre o canto da parábola e o extremo do retangulo, multiplicar por 2. Em seguida subtrai a área do retangulo máximo mais os cantos da área total da parábola.

Figura 7 - Resolução da questão 5 apresentada pelo grupo 2.

Fonte: Registros dos acadêmicos.

Após refletirmos sobre os diálogos nos grupos acompanhados durante a execução da atividade e no momento da socialização, deduzimos duas possíveis causas para as conclusões equivocadas verificadas nas resoluções da questão 5. A primeira está ligada a não execução sequencial das questões 2 e 3, pois assim poderiam observar com a variação das dimensões do retângulo, que possui dois de seus vértices sobre a parábola, a possibilidade da região acima desse retângulo tender a zero. A segunda hipótese está associada ao próprio enunciado da questão que pode ter induzido o aluno, pouco experiente, a concluir, sem as devidas comprovações matemáticas, que seria possível determinar a menor área diferente de zero acima do retângulo ABCD anteriormente definido.

Na primeira parte da questão 6, todos os grupos mostraram clareza de como deveriam proceder para apresentar um modelo matemático que pudesse calcular a área limitada pela parábola idealizada, contudo os grupos apresentaram bastante dificuldade, pois era preciso razoável habilidade algébrica para executar a atividade. Mesmo assim, conseguiram propor modelos capazes de atender à solicitação dessa parte da questão, como exemplificado na figura 8.

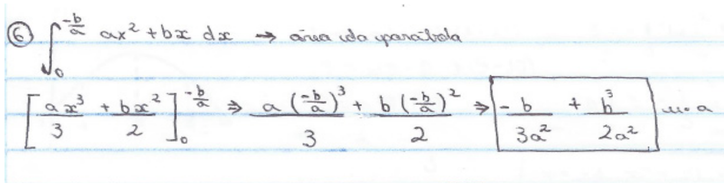


Figura 8 - Resolução da primeira parte da questão 6 apresentada pelo grupo 4.

Fonte: Registros dos acadêmicos.

A segunda parte da questão 6, novamente, por meio dos debates verificados nos grupos, percebemos que todos tinham traçado corretamente o caminho a seguir para que pudessem apresentar o modelo solicitado. Apesar disso, somente o grupo 5 conseguiu chegar mais próximo de um modelo, conforme a figura 9.

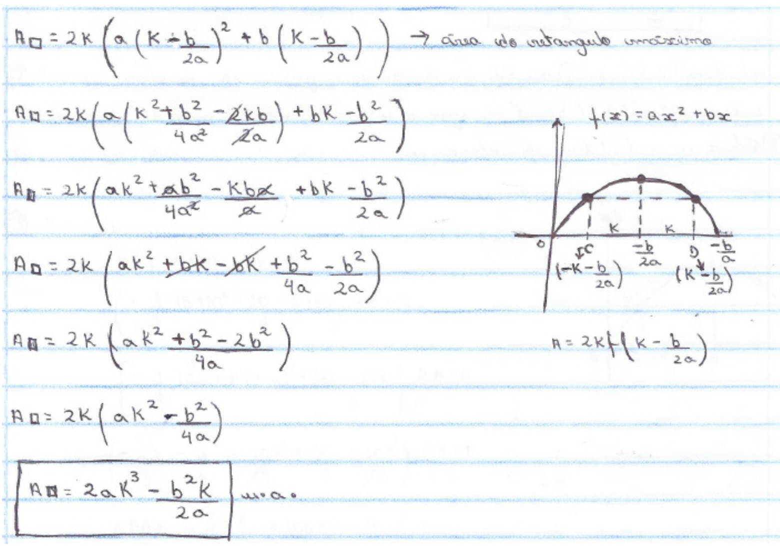


Figura 9 - Resolução da segunda parte da questão 6 apresentada pelo grupo 4.

Fonte: Registros dos acadêmicos.

O grupo 4, apesar de não ter prosseguido com a resolução a ponto de apresentar um modelo em função dos coeficientes “a” e “b” da função quadrática, finalizou sua resolução com um valor “k” não definido e demonstrou maior habilidade algébrica em relação aos demais grupos envolvidos na atividade.

Ressalta-se que, apesar das dificuldades que impediram os grupos de alcançarem os resultados traçados por meio de suas discussões, a Modelagem Matemática motivou o debate e oportunizou aos alunos momentos de envolvimento profundo acerca da trama que buscava o modelo adequado, pois parte de dentro da Matemática e visa resolver situações-problema associados à realidade de interesse dos acadêmicos. Esse comportamento, mais uma vez justifica a necessidade de buscarmos caminhos que promovam o aprofundamento e a construção coletiva do conhecimento.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo de nossa trajetória docente, em todos os cursos de graduação nos quais atuamos e que tem em sua matriz curricular disciplinas relacionadas à matemática, podemos testemunhar a chegada à academia de vários calouros que vislumbravam uma jornada de descobertas e conquistas, na qual os conceitos e definições matemáticas fariam sentido e estariam claramente ligadas as suas áreas de formação e futura atuação. Somados a esses, podemos, ainda, citar aqueles que acreditam nessa etapa como o marco temporal de seu completo desligamento da "passada" e "superada" Educação Básica.

Essas ilusões, ainda no início do curso, muitas vezes são destruídas em meio a uma tempestade de teoremas que em sua maioria possuem um nível sofisticado de abstração e que aparentemente não possuem aplicação em seu contexto de formação, além de simultaneamente requerer um alicerce fortemente firmando nos conhecimentos matemáticos estudados na Educação Básica.

Então, enquanto professores que buscam pesquisar a própria prática com o intuito de aprimorar o ensino, continuamente nos questionamos: como minimizar os impactos negativos nesses acadêmicos causados pela abordagem descontextualizada da matemática e que pode levá-los a desistência de um sonho?

Tentando responder a esse questionamento e buscando ancoragem em tendências metodológicas que apontam novos caminhos é que lançamos mão da Modelagem Matemática, pois se apresenta como uma estratégia de ensino capaz de conduzir os alunos a momentos de redescoberta e reflexão sobre conhecimentos prévios e novos conhecimentos, por meio de situações-problema inseridas em contextos reais e/ou fictícios.

É evidente que na execução da atividade algumas estratégias precisam ser repensadas. Podemos destacar o número de componentes por grupo que excedeu o que inicialmente estava estabelecido e muitas vezes impossibilitou o envolvimento mais direto de alguns membros. Acreditamos que um número ideal por grupo seria igual a três. Reconhecemos que a estratégia de entregar as seis questões de uma única vez ao grupo possibilitou a divisão da atividade o que descaracteriza o trabalho em grupo. Desta forma, sugerimos que em uma nova experiência as questões sejam entregues uma de cada vez, sendo que a entrega da questão seguinte deve estar condicionada a devolução da anterior. Supomos que, desta forma, evitaremos a subdivisão da atividade.

Mesmo diante dos obstáculos enfrentados na execução da atividade, este trabalho apresenta-se como uma experiência exitosa que, apesar das necessidades de ajustes ligados as estratégias de execução, demonstra como a Modelagem Matemática é capaz de resgatar e realmente envolver alunos no processo e ensino/aprendizagem.

Nesse sentido, buscamos para encerrar nossas considerações finais o testemunho registrado na avaliação da aluna Estela (nome fictício) que diz: *"A proposta é bastante* *interessante, pois não aprendemos da maneira convencional, em que ficamos escutando mais do que executando. Da forma atual, aprendemos enquanto resolvemos questão, e para mim esse método funciona”*.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem na Educação Matemática e na Ciência**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica. **Plataforma Nilo Peçanha 2019/Ano Base 2018**. Disponível em: <https://www.plataformanilopecanha.org>. Acesso em 11 abr. 2019.

MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem significativa: A teoria de David Ausubel**. São Paulo: Centauro, 2006.

SILVA, Francisco Hermes Santos da. **Educação Matemática: Caminhos Necessários**. Belém: Palheta, 2016.

ANEXO I

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO PARÁ

CAMPUS SANTARÉM

<table>
<tr><td>Curso:</td><td>Disciplina:</td><td>Nota</td></tr>
<tr><td>Data de aplicação:</td><td>Bimestre:</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>Alunos:</td><td>Professores Responsáveis:</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

(ENEM – 2017, Adaptado) A igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

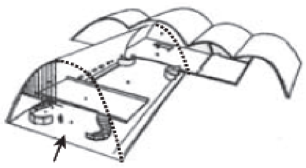


Figura 1

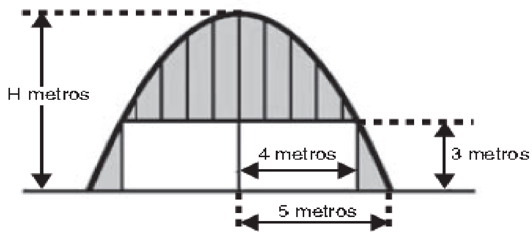


Figura 2

Figura 3

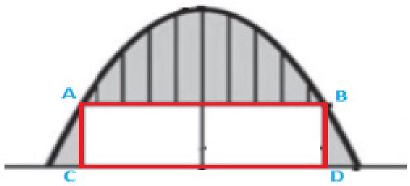


Figura 4

Questões:

1) Determine a função quadrática que modela a parábola esboçada na figura 2.

2) É possível representar uma entrada retangular, ilustrada na figura 3, com área igual a 28 m²? E com 32,07 m²? E com 40m²?

3) Existe uma área máxima para esse retângulo inscrito na parábola? Justifique com os teoremas matemáticos.

4) Determine a região limitada pelo conjunto de todos os pares $(x; y)$ tais $0 \leq x \leq 10$ e $0 \leq y \leq f(x)$. Sendo $f(x)$ a função quadrática solicitada na questão 1.

5) Determine a menor área possível para a região acima do retângulo ABCD na figura 4. Sendo a parábola representada nessa figura a mesma da questão 4.

6) O Pe. João Felipe Bettendorf fundou a cidade de Santarém, em 1661, às margens do Rio Tapajós. Enviado por seu superior, Pe. Antônio Vieira, o jesuíta tinha como objetivo a divulgação do evangelho entre os povos indígenas da região. Com a expulsão dos jesuítas em 1759, pelo Marquês de Pombal e a supressão da Companhia de Jesus no mundo, em 1773, a cidade ficou sem a presença da espiritualidade inaciana por mais de 250 anos.(JESUITASBRASIL, 2013).

JESUITASBRASIL. Após 200 anos, Jesuítas reabrem missão em Santarém no Pará. Disponível em:< https://www.jesuitasbrasil.com> Acesso em 4 jun. 2019.

Apesar da expulsão dos jesuítas, ainda, nos dias atuais nota-se grande influência dessa colonização, quando se observa a quantidade significativa de comunidades paroquiais santarenas e a grande devoção ao círio de Nossa Senhora da Conceição. Desse modo, é comum nos depararmos com construções e reformas de igrejas na cidade de Santarém.

Supondo que o administrador da diocese de Santarém, com o intuito de apresentar um modelo genérico que pudesse usar como padrão, caso desejasse construir a fachada frontal de uma paróquia inspirada na obra arquitetônica da igreja de São Francisco de Assis (apresentada acima), contrate um engenheiro e solicite que apresente um modelo matemático prático para calcular a área limitada pela parábola da faixada dessa paróquia e o maior retângulo possível (como proposto na figura 4). Nesse sentido, apresente um modelo que atenda a solicitação do administrador.

CAPÍTULO 10

A IMPORTÂNCIA DO SENTIDO DO SABER: A MATEMÁTICA PRESENTE NA ATIVIDADE PESQUEIRA NO MUNICÍPIO DE SALINÓPOLIS

Data de aceite: 05/06/2020

Lucivaldo Vieira Pinheiro
Graduado em Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA)
Pós - Graduado do Curso de Especialização em Matemática Fundamental da Universidade Federal do Pará (UFPA)
Mestrado em Ciências da Educação: Avaliação Educacional – Universidade de Évora (UEVORA)
e-mail: lvpinheiro26@gmail.com

Artigo proveniente da dissertação de mestrado em titulada **A importância do sentido do saber: A matemática presente na atividade pesqueira no município de Salinópolis** defendida em 15/01/ 2016 na Universidade de Évora – Portugal, por Lucivaldo Vieira Pinheiro.

RESUMO: Este artigo é resultado de uma dissertação de mestrado que trata da percepção matemática de um grupo de pescadores de uma comunidade pesqueira do município de Salinópolis. O objetivo deste estudo foi identificar a matemática formal presente na atividade pesqueira. O quadro teórico da referida investigação centrou-se nos estudos de Ubiratan D'Ambrósio e também outros estudiosos. Quanto aos instrumentos metodológicos empregados neste estudo, os mesmos se deram por meio de observações, entrevistas semiestruturadas e análise documental. A análise de dados foi de natureza interpretativa seguindo um esquema analítico, com a intensão de verificar como os pescadores desenvolviam sua atividade profissional e se os mesmos conseguiam relacionar algo de sua prática com o saber matemático. Este estudo também expõe, que mínima percepção dos pesquisados evidencia-se por conta da dicotomia existente entre a origem do conhecimento matemático deles, internalizado as suas práticas, e o conhecimento científico presente na matemática formal.

PALAVRAS - CHAVE: Etnomatemática; educação; pescador; atividade pesqueira.

1 I INTRODUÇÃO

No princípio os conhecimentos matemáticos utilizados pelo homem eram tidos como básicos ou rudimentares, e eram praticados de maneira informal, estando direcionados a atividades como a contagem de animais, a demarcação territorial, a confecção de instrumentos para a caça, a troca de produtos e outros; com o decorrer dos séculos a Matemática evolui de forma significativa, influenciando no cotidiano de cada ser humano, satisfazendo suas necessidades naturais, científicas e sociais. Tamanha evolução permitiu a Matemática assumir um papel de caráter significativo no desenvolvimento de outras ciências, como na Física, na Química e na Biologia por exemplo.

Quanto aos aspectos elencados anteriormente, os conhecimentos gerados e transmitidos neste contexto, assumem um caráter cultural, como ressalta D'Ambrósio (2011):

> "O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura" (p.22).

Partindo da mesma prerrogativa de D' Ambrósio, com relação à presença do conhecimento no cotidiano, Paulics (2000, p.28) utiliza como exemplo "a conexão entre a atividade da pesca e a matemática...". Ainda, segundo Paulics (2000, p. 3), "a relação entre a pesca e a matemática está ligada ao desempenho de diversas atividades, que surgem desde a confecção de redes e tarrafas até a construção e reforma de embarcações".

Nessa perspectiva com relação à atividade da pesca, Mendes (2006) enfatiza que podem ser trabalhados diferentes conceitos matemáticos e também salienta que "torna-se necessário abordar a matemática e seus conceitos enquanto uma atividade referente à efetivação de um pensamento ativo, que busca construir soluções para os processos lógico-interrogativos surgidos no dia-a-dia" (p.6).

Nesse sentido, se verifica que a aquisição do conhecimento matemático pode ser de modo informal ou formal, permitindo com isso sua utilização nas escolhas referentes à atividade profissional da cada indivíduo. Porém é bastante pertinente frisarmos que esses novos saberes não poderão negar antigas aprendizagens que de alguma forma contribuíram ou contribuirão no percurso dessa atividade profissional.

Diante de tais prerrogativas, a Matemática por meio da Educação Matemática tem se preocupado de forma contundente com relação à dimensão cultural dos saberes no ensino e na aprendizagem da Matemática. Nessa perspectiva a linha de pesquisa em Etnomatemática de acordo com Pires (2008) tem primado pela:

> (...) valorização das diferentes formas culturais, as pesquisas Etnomatemáticas promovem a direta inserção do pesquisador junto dos contextos sociais investigados. Diante do exposto, cumpre assinalar que a contextualização cultural da matemática é ponto imprescindível para a apropriação desta ciência (p.13)

Comungando das mesmas ideias de Pires (2008) este estudo visa identificar a matemática formal presente na atividade pesqueira, analisando se a matemática aplicada pelos pescadores manifesta-se de forma consciente, e também procurando relacionar o conhecimento cultural do pescador, com a matemática formal. Quanto a esse aspecto D'Ambrósio (2001) entende que qualquer manifestação matemática, pode ser interpretada como "uma forma de matemática".

2 I O CONHECIMENTO MATEMÁTICO NA PERSPECTIVA ETNOMATEMÁTICA

Desde seu surgimento na terra, o homem sempre se preocupou em compreender e explicar os fenómenos que acontecem ao seu redor utilizando diferentes ferramentas para alcançar esses objetivos, através de estudos e inúmeras pesquisas.

Nesta perspectiva, Velho e Lara (2011) destacam que:

> Com a progressiva evolução científica e tecnológica, o aprender exige cada vez mais novas formas de construir os conhecimentos e se constitui numa exigência social, sendo indispensável para o desenvolvimento pessoal, profissional e, consequentemente, econômico das pessoas. (p.3)

Nesse sentido Velho e Lara (2011) observam o conhecimento matemático como parte desse processo de expansão; e também enxergam a Matemática como uma ferramenta na qual desempenha um papel importantíssimo no que diz respeito à utilização do conhecimento matemático na resolução das diversas situações relacionadas, não somente com o cotidiano de determinado grupo ou comunidade, mas também a situações abstratas.

A partir de tais observações, é bastante pertinente ressaltarmos que o conhecimento matemático está também implicitamente centrado em atividades tradicionais e simples, com pequeno grau de complexidade, mais que servem para atender a necessidade do grupo que o está utilizando.

Quanto a esse aspecto D’Ambrósio (2011) explana que,

> o cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura. (p.22)

Seguindo as mesmas ideias D’Ambrósio (2011), verifica-se nesse estudo que atividade da pesca configura-se como é um exemplo clássico em relação à presença do conhecimento empírico, visto que seus praticantes, em grande parte, lançam mão de conhecimentos provenientes das mais diversas áreas (Física, Química, Biológica, Matemática) de maneira empírica, para realização de sua atividade profissional.

Quanto à produção do conhecimento matemático, Dos Santos e Donizeti (2011), enfatizam que “enquanto produto cultural, a matemática desenvolveu-se de diferentes formas, dependendo das condições culturais, sociais e econômicas do contexto em que cada grupo estava inserido.” (p.25).

Já na concepção de Giardinetto (1997):

> Ao longo do processo histórico-social de elaboração do conhecimento matemático, as primeiras expressões conceituais caracterizaram-se por uma interpretação da natureza condicionada aos limites do corpo humano. As formas mais elementares do conhecimento matemático se deram num nível de empiria tendo o próprio corpo humano como instrumento, como ponto de referência, como parâmetro para as primeiras arguições matemáticas. (p.70)

Nessa perspectiva Chieus (2009), seguindo os mesmos pressupostos teóricos de Giardinetto (1997), argumenta que o conhecimento matemático está enraizado ao contexto cultural de cada civilização, grupo étnico ou comunidade de forma ímpar, e também estabelece que o mesmo caracteriza-se como fruto do convívio social enraizado as práticas estabelecidas por meio das diferentes relações.

A partir dos contextos expostos anteriormente, D'Ambrósio (2011) entende que o surgimento do conhecimento matemático está diretamente relacionado à necessidade e a forma de pensar da espécie humana com respeito o ato de explicar, comparar, medir, entender, quantificar, manejar, avaliar e inferir independente do contexto, algum juízo de valor sobre qualquer atividade por ela desempenhada.

Nesse contexto D' Ambrósio (1990) salienta que a Etnomatemática, como linha filosófica, destaca-se por buscar e tentar explicar através de diversos processos, o surgimento de qualquer conhecimento, inclusive o conhecimento matemático; no cerne dos diversos sistemas culturais, a partir da vivência e das características que determinam a geração, a organização e a transmissão conhecimento no cotidiano de cada comunidade ou grupo a qual o indivíduo está inserido.

Quanto ao surgimento do conhecimento matemático, Gerdes (2007) esclarece que:

> A actividade matemática é uma actividade humana, e, como tal, uma atividade cultural. Ideias e métodos matemáticos variam de cultura para cultura, e a nossa compreensão do que é a matemática cresce na medida em que essas ideias e métodos se fertilizam mutuamente (p. 154).

Nessa perspectiva Cabrera (2004) também realiza importante abordagem com relação à importância da Etnomatemática, destacando-a como uma tendência da Educação Matemática que investiga a construção e a utilização do saber matemático a partir do envolvimento pessoal de grupos, comunidades e, também, a valorização desses saberes quanto a sua especificidade dentro do contexto social e cultural a qual se encontra inserido.

Assim como Cabrera (2004), D'Esquível (2007) também destaca que, além de pesquisas referentes ao saber e ao fazer matemático de diferentes culturas, outros pensadores apresentam a Etnomatemática como valiosa alternativa pedagógica à educação tradicional, mediante a valorização cultural através da abordagem de etnográficas, históricas e epistemológicas.

Diante dos contextos expostos no presente artigo sobre o conhecimento matemático na perspectiva Etnomatemática, entende-se que no cerne da Educação Matemática, a Etnomatemática assume um papel de grande relevância para educadores, pesquisadores e estudiosos; pois os mesmos na ânsia de aprimorar e melhorar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, enxergam na Etnomatemática um elo direto entre a dicotomia presente entre os diferentes saberes e o universo cultural de um determinado grupo.

3 I OPÇÕES METODOLÓGICAS

Dada à natureza qualitativa, com forte influência etnográfica, a presente pesquisa buscou investigar as posturas dos pescadores perante o conhecimento por eles internalizado com o conhecimento científico, visto que tal busca centrou-se primordial e diretamente no cotidiano dos pesquisados, pois "(...) pretende-se conhecer a realidade tal como ela é pelos seus diversos actores (...)" (PONTE 1994, p.9) através da observação e compreensão dos costumes dos participantes no seu contexto natural.

Nesse contexto a investigação qualitativa lançou mão de diversificados instrumentos metodológicos tais como: observação participante, conversas informais, análise documental, entrevista em profundidade e recolha de dados; com a finalidade de abordar a problemática em estudo, e também confirmar o campo interpretativo os quais, segundo Coutinho (2011), a "investigação qualitativa /interpretativa quer os instrumentos, quer a conduta do investigador são difíceis de formalizar num conjunto de normas universalmente aplicáveis a todas as situações de pesquisa". (p.287)

Assim, o presente estudo foi constituído, sobretudo pela observação participante; na qual utilizou a conversa informal como um componente dessa observação, em virtude das características apresentadas pela pesquisa em questão e principalmente pelas vantagens apresentadas por esse método de recolha de dados; que considera, não somente o tipo de estudo, mas os participantes em seu contexto natural.

A observação, de acordo com Vieira e Tibola (2005), na conjuntura antropológica destaca-se como uma técnica que "(...) é de essencial relevância, uma vez que busca constatar diferenças entre costumes e hábitos culturais. A observação não consiste apenas em ver e ouvir seu objeto de estudo, mas também em examinar fatos ou fenômenos". (p.17)

Quanto à análise documental, no contexto da pesquisa qualitativa Caulley (1981, apud, LÜDKE e ANDRÉ, 1986, p.38), afirma que "a análise documental busca identificar informações factuais nos documentos a partir de questões e hipóteses de interesse..." (p.38), sendo assim a análise documental destaca-se também pela utilização de diversos documentos, com o objetivo de extrair o máximo de subsídios que ajudarão na análise dados e consequentemente no resultado da investigação.

A entrevista em profundidade apresenta-se como outra técnica de recolha de dados, a qual de acordo com Coutinho (2011) tem como objetivo "conhecer a perspectiva dos participantes sobre determinado problema". (p.291). Assim, dentro do universo da entrevista em profundidade e do estudo em questão, escolheu-se também como um dos instrumentos de coleta de dados a entrevista semiestruturada, por considerar-se que este instrumento se enquadra no tipo de pesquisa em questão.

A recolha de dados decorreu no ambiente natural, onde se encontravam os pescadores, envolvidos nas suas práticas profissionais, através do contato e de conversas informais, observando-se o cotidiano dos pesquisados na prática de suas tarefas diárias como a análise das condições da maré, o processo de divisão do peixe após uma pescaria; além também da manutenção dos utensílios pesqueiros (rede malhadeira, espinhel, muzuá, curral de pesca), com a intenção de desenvolver conversas sobre os assuntos da temática do trabalho.

4 I RESULTADO E DISCUSSÃO

A pesca, assim como em outra profissão, se observa a existência de inúmeras rotinas, que se verificam através do ato de medir, do calcular, do tecer, do quinhão[1], do palmo[2], da braça[3] etc., onde são utilizados métodos que perpassam pela aplicação empírica do saber matemático (da Matemática).

Quanto a esse aspecto Renuca e Vithal (1992, apud PIRES, 2008, p.80), “chamam à atenção para o facto de que muitas práticas quotidianas crescem nas práticas profissionais diárias, vários conteúdos e processos matemáticos, sem, contudo terem consciência da sua presença”. Por isso no referido estudo o investigador primou em descrever episódios que se inserem em temas matemáticos distintos – Aritmética e Geometria – deveu-se ao fato do mesmo pretender responder às questões do estudo.

4.1 Condições da Maré: perfazendo os caminhos do conhecimento matemático

Para a realização de uma boa pescaria, torna-se necessário que o principal ator, neste caso o pescador, possua uma gama de conhecimento e bastante experiência, com relação à prática de sua atividade profissional; visto que, esta atividade necessita de inúmeros saberes de diferentes áreas de conhecimento para a sua execução.

Assim quando inseridos, quando perguntados a respeito da constante alternância no horário de se pescar; e como este fator interfere no local de pescar; os pescadores (A, B e C) foram enfáticos em afirmarem que depende da maré [da maré de enchente e da maré de vazante] e da “cara da lua” [fases lunares] que indicam que teriam uma boa pescaria ou não.

Quanto, ao questionamento sobre quantas horas costumam ficar pescando; verificou-se que a investigada C relata com exatidão sobre o que lhe foi perguntada no decorrer do episódio, contudo não consegue relacionar o fator tempo, a quantidade de horas gastas em uma pescaria com algum saber matemático. Já o conhecimento empírico do investigado B proporcionou um momento ímpar durante a referida coleta de dados, pois apesar de seus cálculos não estarem aritmeticamente articulados, o mesmo consegue chegar ao resultado correto. Porém, assim como pesquisada C, também não percebe

1 Quinhão (divisão): expressão que os pescadores utilizam quando realizam a partilha do peixe pescado.
2 Palmo: Medida da distância que vai da ponta do polegar à do mínimo, estando a mão estendida.
3 Braça: Antiga unidade de medida de comprimento.

qualquer relação entre a alternância de horário de uma pescaria e /ou a duração de horas de uma pescaria com algum conhecimento matemático.

Ainda com respeito a este episódio, centrado nas informações de seus pesquisados, o investigador observou uma sequência de conhecimentos empíricos e científicos, que analisados separadamente, vislumbram a riqueza de informações das mais diferentes áreas do conhecimento. Nessa conjuntura de informações, o saber matemático está centrado entorno da situação "condições da maré", através da aritmética simples estabelecida pelos fatores - alternância no horário de uma pescaria e /ou duração de horas de uma pescaria - que aliados à grandeza tempo, estabelecem um cenário de correlação entre esses fatores e a percepção ou não percepção por parte dos pesquisados A, B e C, desses saberes no seu cotidiano e principalmente no desempenho de sua atividade profissional.

4.2 - Partilha do Quinhão[4]: o processo de divisão do peixe.

A divisão ou partilha do peixe – "quinhão" de peixe – configura-se como uma das inúmeras atividades relacionadas às práticas diárias dos pescadores, permitindo a estes desempenharem inúmeras atividades relacionadas às situações de medir, calcular e outras, nas quais a Matemática sempre está presente, mesmo que de forma implícita e não perceptível por parte dos sujeitos inqueridos no presente estudo.

Nesse contexto ao serem inqueridos como é feita a divisão do peixe após uma pescaria; os pescadores (A, B e C) responderam que costumam tirar o "quinhão", o qual corresponde à divisão do peixe por tamanho. Sobre a venda do peixe, o mesmo é comercializado de acordo com a classe a qual pertence, ou seja, a classe do peixe é que determina o seu valor na hora de vender.

Investigador: *Como o Senhor (a) determina o valor do peixe que pesca?*

Pesquisado A, B e C - Pescador A, B e C:

_ (...) "Varea" de classe "né"! Por exemplo, cada classe as vez tem seu preço (...) é diferente do quinhão.

Investigador: *Como assim?*

Pesquisado A, B e C - Pescador A, B e C:

_Acontece assim; o bagre, o cangatã, a arraia e a corvina é peixe de segunda classe; a tainha, o camurim e a pescada (amarela, branca), por exemplo, é peixe de outra classe, é de primeira. (...) uma classe combate a outra na hora da venda.

- *_ Por exemplo:*
- *O quilo do cangatã miúdo (pequeno) é de R$ 2,00*
- *O quilo do cangatã médio é de R$ 3,00*
- *O quilo do cangatã grande é de R$ 5,00*
- *O quilo da pescada pequena é de R$ 8,00*
- *Já a pescadota (média) tem seu preço igual a R$ 10,00*

4 Quinhão: termo utilizado pelos pesquisados para designar sua parte em uma pescaria (no resultado de uma pescaria).

- *A pescadona (pescada grande) é que custa mais, seu preço varea entre R$ 13,00 e R$ 16,00 o quilo.*

O investigador constatou que a partir de seu conhecimento do mundo os investigados, no referido episódio, também apresentaram um conhecimento bastante homogêneo quanto ao saber matemático demonstrado a partir de suas noções de quantidade, de proporcionalidade e de comparação entre grandezas (sistema de medidas).

Assim, também se evidenciou nesse ambiente a criação e utilização de jargões próprios de sua linguagem, para determinar o tamanho do peixe tais como: bagre miúdo (pequeno); bagrote (bagre tamanho médio), merote (mero tamanho médio), corvinota e outras. Tal situação se fez presente a partir da utilização de diversas expressões, elencadas para designação da partilha e da comparação entre as diferentes grandezas.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

A identificação da Matemática presente na atividade pesqueira permitiu-nos analisar que a Matemática, independente do contexto a qual está incorporada, surge na maioria das vezes de forma espontânea, sendo em alguns momentos perceptível ou não por parte de que a utiliza na solução de diversas situações. Na atividade pesqueira e em especial nas questões abordadas neste estudo, notou-se que os saberes concernentes a esta ciência está diretamente ligado à rotina dos pescadores, expostos por meio de suas práticas.

Quanto aos aspectos abordados anteriormente, no que concerne a Matemática, o saber matemático e suas formas de aparições D' Ambrósio (2011) enfatiza que:

> o cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, e algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura. (p.22)

Assim observou-se que a Matemática utilizada e praticada pelos pescadores na atividade da pesca surge agregada a diversas situações, tais como nas construções das armadilhas de pesca e na própria prática dos investigados.

Pode-se verificar que no decorrer do trabalho de campo que as relações e os processos matemáticos utilizados pelos pesquisados pouco se apoiavam nos conhecimentos da Matemática trabalhada na escola, em virtude principalmente de fatores direcionados ao baixo nível de escolaridade dos mesmos. Nesse sentido, apurou-se durante o desenvolver dos episódios descritos que os informantes [pescadores] aplicavam os conhecimentos de natureza matemática de modo prático e intuitivo, através da utilização de diferentes estratégias no desempenho de sua atividade profissional.

Nesse contexto Monteiro (2004, p.441) ao declarar que "o saber – fazer cultural tem outros caminhos"; reporta-nos para uma estreita semelhança com outras situações vivenciadas pelos pescadores em suas rotinas. Comungando das mesmas ideias de

Monteiro (2004), D' Ambrósio enfatiza que a Etnomatemática pode ser compreendida como:

> "... uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo da sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural." (DáMBRÓSIO, 1996, p.7).

Nesse sentido a análise da Matemática aplicada pelos pescadores, descritos neste estudo por meio de diversos episódios, configurou-se em situações na qual os saberes direcionados a matemática se encontravam implícitos e emergiam de modo informal, agregados a rotina dos pescadores e também, de modo explícito, expressos por conta da utilização de algoritmos, regras de cálculo, medições e outros. Nesse contexto, observou-se a existência de uma forte conexão e aproximação da matemática exercida pelos pescadores com Matemática formal, apesar de apenas uma parte mínima desta conexão ser percebida e reconhecida pelos pescadores.

A singularidade apresentada no decorrer e nas transcrições das situações elencadas nesse estudo; direcionaram esta pesquisa a constatar que os investigados utilizavam empiricamente diferentes pressupostos ou componentes da matemática formal, aos quais foram expostos por meio de diversas representações ligadas aos diversos conceitos geométricos, como as várias representações geométricas que formavam a figura do curral de pesca, assim como o muzuá na qual a pescadora possuía somente a noção de um funil e, por conseguinte não possuía nenhum conhecimento geometria espacial e sua complexidade no cerne da matemática formal.

REFERÊNCIA

CABRERA. S.R.T. *A Etnomatemática: Teoria e Prática. Curso de pós-graduação em Educação matemática*. Criciúma: UNESC. (2004).

CHIEUS, G. A Braça da Rede, uma Técnica Caiçara de Medir. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *2*(2), 4-17. (2009).

COUTINHO, C. M. G. F. P. Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: *Teoria e Prática*. Coimbra: Almedina. (2011).

D' AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática*: *arte de explicar e conhecer*. São Paulo, SP: Editora Ática. (1990).

D' AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática: Elo entre as tradições e modernidade* (2ªed.). Belo Horizonte: Autêntica. (2001).

D' AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática: Elo entre as tradições e modernidade* (4ªed.). Belo Horizonte: Autêntica. (2011).

D'ESQUÍVEL. M. O. Etnomatemática e pesquisa histórica: campo de possibilidades. In *Actas III Encontro Estadual de História: Poder, Cultura e Diversidade* (pp. 1-9). Bahia: UESB. (2007).

DOS SANTOS, L. T. M & DONIZETI, A. Educação Escolar Indígena, matemática e cultura: a abordagem etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *4*(1). 21-39. (2011).

GERDES, P. *Etnomatemática – Reflexões sobre a diversidade cultural*. Ribeirão: Edições Húmus. (2007).

GIARDINETTO, J. R. B, *O Fenômeno da Supervalorização do Saber Cotidiano em Algumas Pesquisas da Educação Matemática*. Tese de Doutoramento. Centro de Educação e Ciências Humanas. Doutorado em Educação (Área de Concentração: Fundamentos da Educação). São Carlos: Universidade Federal de São Carlos. (1997).

LUDKE, M. & ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU. (1986).

MENDES, I. A. *Matemática em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem*. Natal: Flecha do Tempo. (2006).

MONTEIRO, A. A etnomatemática em cenários de escolarização: alguns elementos de reflexão. In Gelsa Knijnik (Ed.), *Etnomatemática*: *currículo e formação de professores* (pp. 432-446). Santa Cruz do Sul: EDUNISC. (2004).

PAULICS, V. *Escola de Pesca de Piúma (ES).* Guarapari: Espírito Santo. (2000).

PIRES, E. M. C. P. *Um estudo de Etnomatemática: A matemática praticada pelos pedreiros*. Dissertação de Mestrado. Departamento das Ciências da Educação. Lisboa: Universidade Aberta. (2008).

PONTE, J. P. O estudo de caso na investigação em Educação Matemática. *Quadrante*, *3* (1), 19-53. (1994).

VELHO, E. M. H. & LARA, I. C. M. O Saber Matemático na Vida Cotidiana: um enfoque etnomatemático. *ALEXANDRIA-Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, *4*(2), 3-30. .(2011)

VIEIRA. V. A. & TIBOLA. F. Pesquisa Qualitativa em Marketing e suas Variações: Trilhas para Pesquisas Futuras. *Revista de Administração Contemporânea (RAC), 9*(2), 9-33. (2005).

CAPÍTULO 11

ANÁLISE DOS MÉTODOS DE CUBAGEM NA ZONA DA MATA DO ESTADO DE RONDÔNIA

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 26/06/2020

Natanael Camilo da costa
Universidade Federal de Rondônia – UNIR
Porto Velho-Rondônia
https://bit.ly/2Nf8r9U

Renato Lima dos Santos
Faculdades Integradas Aparício carvalho-FIMCA
Porto Velho – Rondônia
https://bit.ly/2zQPCXk

Fabio Herrera Fernandes
Centro Universitário São Lucas
Porto Velho – Rondônia
https://bit.ly/2YckFGE

Marcus Vinícius Oliveira Braga
Centro Universitário São Lucas
Porto Velho – Rondônia
https://bit.ly/2NIYR4M

Junior Cleber Alves Paiva
Faculdade de Ciências Tecnológica de Rondônia-FATEC
Porto Velho – Rondônia
https://bit.ly/31hb57a

Rafael Luis da Silva
Centro Universitário São Lucas
Porto Velho – Rondônia
https://bit.ly/2UTQRMK

RESUMO: O objetivo deste trabalho foi pesquisar aplicações da Geometria Espacial em cubagem de madeiras, comparando métodos usados na região de Rolim de Moura, Rondônia. A pesquisa foi realizada a fim de conhecer a rotina da compra e venda de madeira, assim como os diferentes métodos de cubagens. Para o desenvolvimento da pesquisa foi usado o método de investigação qualitativo-descritiva com participação de dois madeireiros. Constatou-se que, ainda que os madeireiros não foram bem escolarizados, a experiência supriram a defasagem escolar e empiricamente aprenderam os métodos essenciais para a execução de seus trabalhos. Os madeireiros mostraram conhecer conteúdos matemáticos desenvolvidos por eles mesmos. Conteúdos estes básicos, e que não usavam fórmulas, a não ser o método geométrico. Este é praticamente o único método utilizado pelos madeireiros para a compra e cubagem das toras, e que as mesmas foram cubadas ainda no local de extração. Outro fator interessante é o fato de que alguns vendedores de madeira usavam estes métodos, tais como, cortando o pedaço mais fino da tora, para que ela “aumente” seu volume no cálculo. Portanto, de acordo com a pesquisa os métodos de cubagem foram usados conforme as características da tora de

cada localidade ou cada tipo de espécie madeireira em manejo.
PALAVRAS-CHAVE: Geometria; Matemática; Tora.

ANALYSIS OF METHODS OF CUBING IN THE ROCKET STATE OF RONDÔNIA

ABSTRACT: The objective of this work was to research applications of Spatial Geometry in wood cubing, comparing methods used in the region of Rolim de Moura-RO. The research was carried out in order to know the routine of buying and selling wood, as well as the different methods of cubing. For the development of the research, the qualitative-descriptive research method was used with the participation of two loggers. It was found that, although the woodworker is not well educated, with many years of experience they learn the essential methods for the execution of their geometric works. The loggers proved to know mathematical content developed by themselves. These basic contents, and which did not use formulas, except the geometric method. This is practically the only method used by loggers for the purchase and cubing of logs, and that they were still cubed at the extraction site. Another interesting factor is the fact that some wood sellers used these methods, such as cutting the thinnest piece of the log, so that it "increases" its volume in the calculation. Therefore, according to the research, the cubing methods were used according to the log characteristics of each location or each type of wood species under management.
KEYWORDS: Geometry; Mathematics; Log.

1 I INTRODUÇÃO

Rondônia tem uma vasta área de florestas, nas quais são feitos planos de manejos e reflorestamentos para o manuseio e extração da madeira de forma legal. Ao longo da ocupação de Rondônia pode-se perceber uma grande exploração em suas florestas, exploração esta motivada pelo alto valor da madeira e pelas facilidades no processo de comercialização e extração, sem falar que a madeira é de suma importância na sociedade.

O Estado de Rondônia tem 10% de sua economia baseada na extração e venda de madeiras (IBAMA, 2013). Um estudo da superintendência estadual de contabilidade do estado de Rondônia no ano de 2013, explana que o reflorestamento liberava para o mercado cerca de 53.993de madeira e a estimava era que, a partir do ano de 2014 aumentasse em 75 % este número, sendo 25% para cada ano que passasse, ampliando assim a demanda de madeira em todos os setores e beneficiando principalmente a economia local. Os dois tipos de madeiras mais exploradas Eucalipto (*Eucalyptus sp.*) e Teca (*Tectona grandis*).

A Madeira é um produto físico, que é comercializada de acordo com a sua qualidade e utilidade. Hoje em dia a legalidade da extração e venda se baseia em cima de projetos e leis. Um deles é o chamado de Plano de manejo, que representa a utilização adequada de madeira (IBAMA, 2013).

No entanto, quando se entra no viés de aplicabilidade, os procedimentos de manipulação da tora de madeira, para com a identificação do seu volume, está diretamente relacionada a matemática, no ramo da geometria.

A geometria é a mais antiga manifestação da atividade matemática conhecida. Ela surgiu das necessidades práticas do uso do espaço e a utilização das formas geométricas com riqueza e variedade que percorrem a história da humanidade em diferentes atividades, como por exemplo, no desenvolvimento da engenharia com a utilização da geometria prática, na agricultura, na pecuária, no comércio, na arte, dentre outros (REIS, 2001).

A geometria espacial está presente em todo o nosso meio, e não há como falar de geometria espacial sem antes dar ênfase a geometria plana, já que podemos considerar que todos os objetos espaciais, como a madeira de extração, de alguma maneira se relacionam com a geometria plana.

Este trabalho teve como escopo analisar o processo de cubagem em madeiras e a forma adequada de encontrar o volume desta tora, isso devido o fato de os proprietários de serrarias pagarem pela madeira em relação a seu volume em metros cúbicos. Este fato demostra uma das infinitas aplicações da geometria espacial, que consiste em cálculos de volumes e áreas. A economia de Rondônia tem fortes influências pela exportação de madeiras. É com o intuito de mostrar como funciona a medição destas toras no ato de compra e venda que surgiu o incentivo de trabalhar o tema.

O objetivo deste trabalho foi pesquisar aplicações da Geometria Espacial em cubagem de madeiras, comparando métodos usados na região de Rolim de Moura-RO.

2 I ABORDAGENS DA PESQUISA.

A realização deste trabalho se constituiu numa pesquisa de campo no município de Rolim de Moura – RO, localizado a uma latitude de 11° 48´13'' Sul e a uma longitude 61° 48´12'' Oeste, estando a uma altitude de 290 metros acima do nível do mar. Possui uma área de 1487,35 km^2. O município tem uma economia liderada pela agropecuária, seguido do setor de serviços, onde entra o setor madeireiro com destaque (GONZAGA, 2006; IBGE, 2016).

A pesquisa foi executada em duas serralherias do munícipio, onde se buscou estudar os métodos usados para cubagem de madeira e ainda identificar os conhecimentos matemáticos mais utilizados pelas serrarias ao comprarem e venderem a madeira e principalmente as formas usadas por eles para medir o volume das toras.

O trabalho é do tipo qualitativo-descritiva conforme Marconi (2010), consiste em investigações de pesquisas empíricas cuja principal finalidade é o delineamento ou análise das características de fatos ou fenômenos, utilizando várias técnicas como entrevistas, questionários, formulários, pesquisas bibliográficas, etc.

3 I COLETA DE DADOS.

O local da entrevista foi de acordo com o tempo em que a madeireira se encontrava instalada. Assim foram escolhidas duas madeireiras diferentes para analisar se havia métodos de cubagens diferentes. Para relacionar e diferenciar as madeireiras e os proprietários das madeireiras; os entrevistados; foram dotados nomes fictícios, tais como as madeireiras serão chamadas de a e madeireira β , e seus donos foram chamados de A e B. Os resultado da pesquisa consistiu na resposta das 15 perguntas (P1 à P15) efetuadas e dirigidas aos proprietários das madeireiras, no qual a finalidade de cada questão está disposta na sequência abaixo:

- (P01) - Esta pergunta tinha a finalidade de analisar qual eram a idade e o tempo de serviço com madeireira;
- (P02) - Ter a noção do grau de escolaridade do proprietário da madeireira;
- (P03) - Analisar o domínio dos conteúdos matemáticos, que são necessários para a execução dos serviços na empresa;
- (P04)- O objetivo desta pergunta era analisar se os conteúdos foram aprendidos na escola ou se foi ao longo das experiências de trabalho;
- (P05) - Consistia em analisar qual dos métodos de cubagem que ele utilizava para medir o volume das toras e assim para efetuar o pagamento;
- (P06) - Analisar o que seria feito com as perdas, tais como, pó e os restos de madeiras que não dariam de ser aproveitados em mais nada;
- (P07) - Analisar se alguns vendedores discutiam sobre o volume da madeira encontrado;
- (P08) - A ideia é analisar se o madeireiro tem alguns conhecimentos sobre geometria plana e quais seriam;
- (P09) - Analisar se os preços do metro cubico da madeira variam. E que fatores fazem este preço variar;
- (P10) - Identificar qual era os três tipos de madeiras mais trabalhadas. E o porquê?
- (P11) - Analisar quantos metros cúbicos de madeiras eram comprados por mês. E quais seriam as variáveis para estas compras;
- (P12) - Identificar a dimensão e o preço de uma tábua, analisando os cálculos geométricos, através do lucro aproximado no metro cubico de madeira.

4 I RESULTADOS

O quadro 1, mostra a idade dos proprietários das duas madeireiras e o respectivo tempo de serviço, dessa forma foi possível identificar a existência na relação do tempo de serviço com a idade, o que permitiu perceber que ambos começaram ainda jovens a trabalhar no setor madeireiro, e ainda, afirmaram que começaram as atividades em Rolim de Moura.

O madeireiro “A” já trabalhava com madeireira desde seus 18 anos de idade, onde aprendeu ainda com seu genitor as táticas de ser um bom profissional na área. No entanto o madeireiro “B” relatou que era sócio com outros madeireiros e é dono único da madeireira, a aproximadamente 10 anos.

Madeireiro	Idade (anos)	Tem que trabalha com madeiras (anos)
A	48	30
B	35	20

Quadro 1: Idade e tempo de profissão.

Fonte: Resultados da Pesquisa, 2017.

No Quadro 2, apresenta-se o grau de escolaridade dos dois madeireiros.

Madeireiro.	Nunca Frequentou a escola	Até a 6° ano Do Ensino fundamental (antiga 5° série)	Ensino Médio completo	Ensino Superior Incompleto
A		X		
B				X

Quadro 2: Grau de escolaridade.

Fonte: Resultados da Pesquisa, 2017.

A escolaridade dos madeireiros entrevistados é apresentada no quadro 2, na qual pode-se observar que existe uma grande diferença. O madeireiro ”A” expôs que não estudou muito, mas que considera sua 6° série do colegial melhor que o ensino médio dos dias atuais. Ele alega que antigamente o ensino da matemática era mais satisfatório.

O madeireiro “B” respondeu que concluiu o ensino médio e já está quase concluindo o curso de Gestão Ambiental e também estava no segundo semestre do curso de Engenharia Civil. Ele afirmou estar estudando para aperfeiçoamento no trabalho. Outro motivo também é por “gostar muito de matemática”.

No quadro 3 apresenta-se os conteúdos que eles reconhecem utilizar nas atividades da compra manuseio e venda da madeira.

Madeireiro	Resposta
A	Todos os conteúdos básicos matemáticos são essenciais.
B	Matemática básica.

Quadro 3: Conteúdos matemáticos utilizados.

Fonte: Resultados da Pesquisa, 2017.

O madeireiro “A” falou que não teria como executar suas tarefas no serviço se não soubesse ao menos a matemática básica. No entanto, o madeireiro “B” respondeu que não sabe que tipo de matemática se trabalha no cálculo de cubagem de madeira, mas afirma que sem a matemática básica não teria como desenvolver nada do teu trabalho.

O Quadro 4 contém as respostas de quais conhecimentos matemáticos eles aprenderam na escola.

Madeireiro	**Resposta**
A	Os básicos são trazidos da escola, já os demais são adquiridos com experiências.
B	Sempre.

Quadro 4: Conhecimentos matemáticos apreendidos na escola.

Fonte: Resultados da Pesquisa, 2017.

Como se observa no quadro acima o madeireiro A, bem mais experiente alega que os conteúdos básicos matemáticos como multiplicação, adição, subtração e divisão foram aprendidos na escola. O madeireiro “B” respondeu que muitos dos cálculos que fez na empresa foram aprendidos na escola, e até mesmo o que aprendeu nos dias atuais na faculdade. Comentou ainda sobre a matemática ensinada na sala de aula, alegou que não é contextualizada com o meio em que se vive.

Madeireiro	**Resposta**
A	Método Geométrico
B	Método Paulista

Quadro 5: Eficiência da profissão relacionada à Matemática.

Fonte: Resultados da Pesquisa, 2017.

Os dois proprietários utilizavam praticamente o mesmo método, pois o *“método paulista”* em Rolim de Moura é conhecido também como *“método geométrico”*. Ambos alegaram que o fato de usarem este método foi devido oferecer a melhor medida de volume da tora, e que é o mais viável para calcular a cubagem das madeiras da região, e principalmente só as toras mais grossas.

O madeireiro “A” afirmou ainda que a madeira de reflorestamento foi medida pelo método de Flancon, pois dá uma margem de erro bem menor. O madeireiro “B” alegou que antigamente a cubagem da madeira era feita por meio de uma tabela, que para encontrar o metro cúbico, bastava só analisar o diâmetro menor ou a média do diâmetro menor com o maior.

Madeireiro	Resposta
A	Não
B	Não

Quadro 6: Reclamação do volume encontrado.

Fonte: Resultados da Pesquisa, 2017.

Ambos alegaram que não haviam reclamações da quantidade cúbica de madeira, pois todos utilizavam o mesmo método para cubar a madeira, e que às vezes ocorreram toras muito deformadas que ai por meio de um consenso entre as partes (vendedor e comprador), eles fizeram o desconto adequado para que ninguém sofresse prejuízos.

Madeireiro	Resposta
A	Sim. Sei que volume é de geometria espacial.
B	Não tenho noção de geometria espacial e nem plana.

Quadro 7: Conhecimentos sobre Geometria.

Fonte: Resultados da Pesquisa, 2017.

O madeireiro “A” comentou que a geometria espacial é a parte da matemática básica que ele mais usa na serraria, e que sem ela não seria possível cubar as madeiras e nem saber qual preço vender. Entretanto o madeireiro “B” desconhecia a geometria plana e espacial, mas o que ele não sabia é que estavam constantemente presente.

Madeireiro	Resposta
A	Qualidade e essência.
B	Tipo de madeira.

Quadro 8: fatores que definem o preço a pagar.

Fonte: Resultados da Pesquisa, 2017.

Ambos explanaram que a madeira foi paga de acordo com a espécie e a qualidade. Entende-se por espécie os tipos de madeiras existentes, tais como canela, tinguiri, baobá, pinho-cuiabano, etc. E que cada tipo tinha um preço diferente a ser pago, que variava de R$ 100,00 a R$ 300,00 o metro cúbico.

Madeireiro	Resposta
A	Primeiro escolhemos o produto que tem mais saída (venda), depois escolhemos a qualidade de madeira especifica para cada item a ser fabricado.
B	De acordo com o que mais vende.

Quadro 9: Como é feita a escala do produto final a ser fabricado.

Fonte: Resultados da Pesquisa, 2017.

Os madeireiros ponderaram que não adiantava fazer um produto com pouca saída, então, os mais fabricados foram tábuas, ripas, vigas e caibros.

Madeireiro	Resposta
A	Vigas 70%, tabuas 30%
B	Tabuas e vigas

Quadro 10: Principais materiais fabricados.

Fonte: Resultados da Pesquisa, 2017.

Ambos os madeireiro produziam tábuas e vigas, pois declararam tinha mais saída e a matéria que oferecia mais lucro à empresa. Os madeireiros foram perguntados sobre o preço de venda de uma tábua. No Quatro 11 apresentam-se as respostas.

Madeireiro	Resposta
A	R$ 6,50 o metro para parede. R$ 3,00 o metro para caixaria. R$ 10,00 o metro da tábua de Garapa.
B	R$ 6,60 o metro para parede. R$ 3,50 o metro para caixaria. R$ 8,00 o metro da tábua de pequi.

Quadro 11: O preço de uma tábua.

Fonte: Resultados da Pesquisa, 2017.

De acordo com a tabela acima, pode-se observar que as tábuas feitas de qualquer madeira tinham o mesmo preço, com exceção das tábuas de garapa na serraria do madeireiro “A” e as tábuas de pequi na serraria do madeireiro “B”. Isso se dá pelo fato em que as tábuas de garapas e pequi foram mais procuradas, sendo que A declarou que ela era exportada.

Aqui chega o momento de identificar todo o arcabouço metodológico do processo de cubagem de uma tora, temos os seguinte fatos:

- Uma tora com as medidas especificadas acima, pelo método geométrico de cubagem tinha volume aproximadamente igual a 0,46 m^3 e podia gerar 30 caibros com as medida de 5 cm de espessura x 5 cm largura x 2,5 metros de comprimento. Logo, pôde-se concluir que os caibros eram prismas quadrangulares regulares, então o volume de cada caibro foi igual a $v = 0{,}05\ X\ 0{,}05\ X\ 250 \quad \leftrightarrow \quad v = 0{,}00625\ m^3$, multiplicando por 30 unidades tem-se o volume total de caibros produzidos $v = 0{,}1875\ m^3$.
- 3 tábuas de 2,4 cm de espessura x 25 cm de largura e 2,5 metros de comprimento. As tábuas também fora prismas, mas não regular, pois a base foi um retângulo, então pode-se achar este sólido de paralelepípedo, e seu volume foi igual à $v = 0{,}024\ X\ 0{,}25\ X\ 2{,}5 \ \leftrightarrow v =$ 0,15m^3, como só deram três tábuas, logo, o volume total das tabuas foi de $v = 0{,}45\ m^3$ . .
- 15 balaústras com 2,4 cm de espessura x 5 cm de largura e 1,5 m de comprimento. As balaústras eram prismas irregulares, pois a base não era polígono regular, logo pôde-se chamar uma balaústra de paralelepípedos. O volume de uma balaústra foi igual à: V = $0{,}024\ \mathrm{X}\ 0{,}05\ \mathrm{X}\ 1{,}5 \quad \leftrightarrow V = 0{,}0018\ m^3$. Como foram15 balaústras, logo o volume total de balaústras foi igual à: $\mathrm{V} = 0{,}0018\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{X}\ 15 \quad \leftrightarrow \mathrm{V} =$ 0,027 m^3.

Com isso pode-se analisar que a tora de 0,46 m^3 pôde ser aproveitada cerca de 0,2295 m^3 na fabricação de produtos para consumo final. Os outros 0,2305 m^3 que faltam foram lançados em um local a parte para serem vendidos por preço de lenha e também uma pequena parte que foi transformada em pó, para ser vendido para olarias. O dono da serraria havia falado que de uma tora aproveita- se em média somente 40 % dela.

Nesta tora que foram feitos os cálculos para averiguação foi verificado aproveitamento de 49,8 % na produção dos produtos. Por final, os materiais produzidos foram colocados em um estoque, ou já foram carregados e entregues aos clientes.

5 I CONCLUSÕES

Verificou-se que o método mais usado pelos madeireiros na hora da compra é o método geométrico. Porquanto, é o que dá maior volume na hora de calcular quantos metros cúbicos possui uma tora. O método geométrico apresentou uma melhor resposta ao verdadeiro volume da tora, pois ele apresenta menos prejuízo para ambos os lados numa relação de compra e venda entre ambos os negociantes.

Por fim, o ponto crucial é que os madeireiros sabem qual é o método de cubagem mais apropriado para cada instante, ou seja, para cada tipo de madeira a ser calculado. Por exemplo, em toras de reflorestamento o método mais apropriado é o método de Francon, já em toras nativas o método mais apropriado é o método geométrico. Em Rolim de Moura por ter maior trabalho com toras nativas, usa-se com uma maior frequência o método geométrico como já mencionado neste trabalho..

REFERÊNCIAS

ACRA, A. **A cubagem das àrvores:** Professor de matemática, ed.5, 2016.D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática:** Elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

GONZAGA, A. L. **Madeira:** Uso e conservação. Brasília: Iphan, 2006.

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar:** Geometria Plana e Espacial. São Paulo: Atual,1993.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). 2010. Disponível em: <http://censo2010.ibge.gov.br/>. Acesso em: 27 mar. de 2017.

INSTITUTO BRASILEIRO DO MEIO AMBIENTE E DOS RECURSOS NATURAIS RENOVÁVEIS – IBAMA. Seminário Nacional Sobre Incêndios Florestais e Queimadas, Brasília. Conclusões. Brasília, 2013.

INSTITUTO DE METROLOGIA (IMETRO). 2010. Disponível em:<http://www.imetro.sc.gov.br/>. Acesso em: 18 mai. 2017.

MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo, p. 58, 2010.

OLIVEIRA, R. Z. **Métodos de obtenção do volume de madeiras**. Revista professor de matemáticas, pp. 1-15, 2013.

PEREIRA, D.; SANTOS, D.; VEDOVETO, M.; GUIMARÃES, J.; VERÍSSIMO, A. **Fatos florestais da Amazônia**. Belém: IMAZON, 2010.

REIS, M. S. **A indústria baseada em madeiras duras tropicais no Brasil**. In: Mesa Redonda Internacional, Oportunidade e Limitações para o Desenvolvimento da Industria Baseada em Madeiras Tropicais na América Latina. 20-23 fev., Brasília DF, 1989.

Superintêndencia de Contabilidade do estado de Rondônia (SECON). 2016. Disponível em:<http://www.rondonia.ro.gov.br/secon/>. Acesso em: 19 jul. 2017.

CAPÍTULO 12

A PORCENTAGEM E OS PESCADORES DO MUNICÍPIO DE SALINÓPOLIS-PARÁ

Data de aceite: 05/06/2020

Lucivaldo Vieira Pinheiro
Graduado em Matemática pela Universidade Vale do Acaraú (UVA) Ps - Graduado do Curso de Especialização em Matemática Fundamental da Universidade Federal do Pará (UFPA)
email: lvpinheiro26@gmail.com

Sandro Benício Goulart Castro
Mestrando no Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA)
email: sandrobeniciogoulart@gmail.com

RESUMO: Este artigo apresenta o resultado de uma pesquisa que teve como objetivo investigar se o cálculo percentual é utilizado pelos pescadores na venda do pescado no município de Salinópolis. A produção das informações ocorreu por meio das seguintes etapas: conversa informal com uma amostra de 20 pescadores, observação no lócus da pesquisa e a aplicação de formulários sócios econômicos, que permitiram analisar o entendimento dos sujeitos participantes, no que diz respeito ao uso da porcentagem relacionada com seu cotidiano. O trabalho proporcionou aprendizagens fundamentais referentes à temática em estudo, através do estabelecimento de ligações entre o conhecimento formal de porcentagem e aquilo que se usa no cotidiano de um pescador. As análises dos resultados indicaram o quanto não é usada a porcentagem como ferramenta na prática da atividade pesqueira.

PALAVRAS - CHAVE: Matemática. Porcentagem. Pescado. Venda.

ABSTRACT: This article presents the result of a research that aimed to investigate whether the percentage calculation is used by fishermen in the sale of fish in the municipality of Salinópolis. The production of the information took place through the following steps: informal conversation with a sample of 20 fishermen, observation in the locus of the research and the application of socio-economic forms, which allowed to analyze the understanding of the participating subjects, with regard to the use of the percentage related to your daily life. The work provided fundamental learning related to the theme under study, through the establishment of links between formal percentage knowledge and what is used in the daily life of a fisherman. The analysis of the results indicated how much the percentage is not used as a tool in the practice of fishing activity.

KEYWORDS: Mathematics. Percentage. Fish.

Sale.

1 I INTRODUÇÃO

A sociedade atual tem necessidades das tecnologias que ela mesma gerou. Para entender estas necessidades, diversas ciências intervêm buscando resolver os desafios que surgem. Na pesca realizada nos oceanos, nos rios, nos lagos como por exemplo, não basta somente à habilidade e a experiência dos pescadores, mas para realizar esta atividade, a matemática também intervém, fornecendo os instrumentos teóricos para que se determine além do peso, da qualidade, da localização e da abundância dos cardumes de peixes; outros instrumentos ligados à parte de comercialização do pescado. Este é um exemplo da estreita ligação entre a atividade da pesca e a matemática.

De acordo com Paulics (2000, p.28), a conexão entre a atividade da pesca e a matemática, está muito mais relacionada ao uso e aproveitamento econômico e social do pescado capturado do que ao seu volume. Muitas das espécies capturadas no Brasil são de alto valor econômico, e a pesca, na sua maioria de características tropicais ou subtropicais, é praticada por um grande número de pessoas, o que tem como consequência um maior aproveitamento da captura e distribuição mais ampla e direta do benefício que pescarias mono específicas.

Ainda segundo Paulics, (2000, p. 3) a relação entre a pesca e a matemática está ligada ao desempenho de diversas atividades, que surgem desde a confecção de redes e tarrafas até a construção e reforma de embarcações. Desde a produção do gelo até o fornecimento de alimentos para as tripulações. Desde o trabalho dos pescadores abordo dos barcos até o descarregamento do pescado e avaliação de sua qualidade para comercialização.

Na atividade da pesca podem ser trabalhados diferentes conceitos matemáticos, que de acordo com Mendes (2006, p.6) torna-se necessário abordar a matemática, seus conceitos enquanto uma atividade referente à efetivação de um pensamento ativo, que busca construir soluções para os processos lógico-interrogativos surgidos no dia-a-dia.

Na relação pesca e matemática pode ser trabalhado vários conteúdos, tais como sistema de medidas, sistema monetário, juros, funções, porcentagem etc. Sendo que, o conteúdo que estará em destaque neste artigo será, “porcentagem”, haja vista que, este assunto esta diretamente relacionado com atividade da pesca, a comunidade pesqueira e a comunidade escolar.

Lello (1981) destaca que percentagem é o número de tantos por cento recebidas ou pagas na proporção de um por cento e mostra também outras palavras referentes à porcentagem como: percentagista (pessoa que recebe percentagens), percentil (grandeza dos elementos que divide uma série de dados em grupos igualmente numerosos ou intervalos iguais), percentual (vem do brasileiro).

Ao abrir o jornal, ligar a televisão ou olhar vitrines de lojas e supermercado é comum deparamo-nos com expressões do tipo:

"O Brasil é o segundo maior produtor de bananas do mundo, atrás da Índia. Mas desperdiçamos 60 % de nossa produção"; Giovanni e Castrucci (2002, p.124).

"Em 2009 a produção de pescado no Brasil atingiu 68 % do consumo interno"; Giovanni e Castrucci (2002, p.124).

"Apenas 15 % dos associados da colônia - Z 29 estão em dias à mensalidade do mês de maio." (COLÔNIA Z-29/ SALINÓPOLIS – PA, 2016).

Tais expressões, na maioria das vezes aparecem em forma de PORCENTAGEM (%). Percebe-se assim, que a notação de porcentagem é muito usada em nossa sociedade, pois é muito útil para reduzir os dados estatísticos a uma forma mais fácil de ser entendida e para comunicar as relações da aplicação comercial do número. Segundo Giovanni e Castrucci (2002), é muito importante desenvolver não apenas o significado matemático de porcentagem, mas também a sua função de comparações e outros.

A partir dessa e de outras concepções concernentes à relação da matemática com a atividade da pesca, consequentemente com a porcentagem, é que este trabalho primou por investigar como esta importante matemática é utilizada pelos pescadores do município de Salinópolis – Pará.

2 I A IMPORTÂNCIA DA PESCA PARA A ECONOMIA MUNICIPAL

O ambiente aquático é sem dúvida, um dos componentes mais importantes da natureza Amazônica. E a pesca, sobre tudo, ocupa um lugar de destaque na economia regional. O peixe é o sustentáculo da alimentação do homem na Amazônia brasileira.

Assim como no passado, atualmente a atividade da pesca no município de Salinópolis é refletida diante das condições físicas e ambientais do espaço regional e paralelamente de políticas públicas, que apenas visam uma recompensa de estado econômico. Dessa forma, a principal atividade econômica (pesca), originalmente se desenvolve em função da grande produção de pescado, que ocorre de janeiro a junho, e nesse período de safra, esse setor chega a empregar o maior volume de mão - de - obra, sendo o responsável principal pela circulação de renda do município.

Essa atividade econômica (pesca) possibilita, assim, o processo de desenvolvimento regional, que visa um maior incentivo e fomento ao desenvolvimento da agricultura familiar do município. Sendo que no setor primário, segundo estimativa da Secretaria Executiva de Estado de Planejamento, Orçamento e Finanças - SEEPOF, (2005), apenas 1872 pescadores artesanais sobrevivem da comercialização da pesca, dentre os quais 400 são catadores de caranguejo e maricultores[1], os quais também sobrevivem do pescado e outras atividades correlacionadas à atividade pesqueira. Vale ressaltar que cerca de 80%

1 Maricultores: refere-se especificamente a aquicultura marinha, ou seja, cultivo de peixes e mariscos em geral.

dos agricultores também são pescadores, conforme a informação da Secretaria Executiva de Estado de Planejamento, Orçamento e Finanças - SEEPOF, (2005).

Dentro desta atividade econômica, se destaca a pesca artesanal, a qual se realiza única e exclusivamente pelo trabalho manual do pescador. Na pesca artesanal a manipulação dos implementos e a participação do homem são fundamentais na obtenção do produto final.

O conhecimento adquirido sobre a pesca artesanal é transmitido ao pescador por seus ancestrais, pelos mais velhos da comunidade ou através da interação com os companheiros de ofício. É sempre realizada em embarcações pequenas (botes e canoas) a remo ou a vela motorizada, sem instrumentos de apoio à navegação, contando para a operação tão somente com a experiência, os saberes adquiridos, a capacidade de observação dos astros, dos ventos e das marés. Essa atividade não se apoia na produção ou estocagem.

A pesca artesanal é desenvolvida durante o ano todo, segundo os pescadores; sendo que o período de maior captura do pescado, situa-se entre os meses de janeiro a junho. O horário de trabalho e de repouso é estabelecido em decorrência do fluxo e refluxo da maré que se diferenciam, no horário a cada dia de sua atividade.

Os pescadores apesar de praticar a atividade em todos os domínios piscatórios, em sua maioria são pessoas de baixa renda, geralmente desprovidos de capital. Possuem instrumentos rudimentares com a finalidade de subsistência que promove a sua reprodução social, baseado no aproveitamento dos mananciais pesqueiros da região.

Artesanalmente, para explorar os produtos oferecidos pelo seu meio ambiente aquático, o pescador se utiliza de algo mais que o simples domínio do conhecimento sobre hábitos e biologia dos peixes, obedecendo às oscilações das marés. Para isso, utilizam instrumentos como: currais, redes, embarcações, recipientes para acondicionar o pescado e outros artefatos sem os quais, a pescaria se tornaria impraticável.

Dentro da pesca artesanal em sua maioria, os pescadores são autônomos, pois trabalham sozinhos ou em parceria. Os parceiros da pesca são produtores diretos, despossuídos dos instrumentos que trabalham como: rede, canoa e outros; a remuneração é feita pelo sistema tradicional de divisão da produção em partes entre os envolvidos, ao final de cada pescaria.

3 I A ATIVIDADE DA PESCA NO MUNICÍPIO DE SALINÓPOLIS

A pesca constitui-se em uma das principais atividades dos municípios localizados na região paraense do Salgado, assumindo e servindo, de acordo com Santos (2005) como base econômica para essas localidades há várias décadas. Assim, localizado na região nordeste do estado do Pará, na zona do salgado, o município de Salinópolis possui uma localização geográfica que lhe garante uma situação privilegiada em relação aos estoques pesqueiros uma vez que está situado, junto à costa marítima do Pará, em áreas potencialmente ricas em mananciais piscosos, em face de fertilidade de suas águas.

A pesca artesanal[2] é praticada em todos os municípios da Região do Salgado, visto que esta é uma área tradicionalmente pesqueira, e um dos principais centros produtores é o município de Salinópolis.

A pesca em Salinópolis é desenvolvida de forma artesanal, caracterizando-se como uma atividade de subsistência das mais tradicionais desenvolvidas pela população local. Nas décadas de 50 e 70 as pescarias eram realizadas próximas a terra, os principais aparelhos de trabalho aplicados à pesca na região eram os currais de peixes[3], espinhéis[4] e as tarrafas[5].

Quanto a este aspecto Ferro (2010) também frisa que a pesca representa uma das principais atividades econômicas de Salinópolis, movimentando o comércio local e um grande contingente de pessoas.

Contudo, atualmente há uma unanimidade entre os pescadores de Salinópolis que no passado, as águas eram mais piscosas6, de modo que as pescarias podiam ser realizadas próximo à praia e os resultados eram mais rápidos. A pesca representava um processo amplo de trabalho que ultrapassava a simples captura.

A despeito da abundância, que lhes permitia, em época de safra[7], pescar poucos dias na semana, o trabalho desses pescadores e seus familiares não deixavam de ser intenso. Em primeiro lugar, como as redes[8] e linhas eram de algodão, devia ser, pelo menos, semanalmente banhadas em uma tinta, para proteger os fios.

Além do trabalho rotineiro de conservação dos aparelhos de pesca, havia ainda o trabalho de salgar e secar os peixes. Pois não havia em circulação nem em municípios vizinhos a produção de gelo, assim, os peixes que eram capturados tinham que ser salgados e entrar num processo de secagem exposto ao sol após a captura para que ficassem conservados até o momento da comercialização.

O processo de salga e secagem, realizados nas praias contava com uma pequena estrutura chamada rancho [residências] dos pecadores, envolvia o trabalho de diversos membros da família, como filhos, esposas e outros.

Vale ressaltar que mesmo sendo realizada de forma artesanal, a pesca no município de Salinópolis, assim como em outros municípios, agrega outras atividades decorrentes

2 Pesca artesanal: é um tipo de pesca caracterizada principalmente pela mão-de-obra familiar, com embarcações de porte pequeno ou ainda sem embarcação, como na captura de moluscos perto da costa. Sua área de atuação está nas proximidades da costa e nos rios e lagos.

3 Curral de peixe: Cercado destinado à pesca junto à praia, composto de três partes: a espia (entrada), a sala (espaço elíptico maior) e o chiqueiro (espaço circular).

4 Espinhéis: instrumento de pesca formado por uma extensa corda, na qual se predem de espaço em espaço, linhas armadas de anzóis.

5 Tarrafa: pequena rede de pesca circular, com chumbo nas bordas e uma corda no centro, pela qual o pescador a retira fechada da água depois de havê-la arremessada aberta.

6 Piscoso: Em que há muito peixe.

7 Safra: Época da passagem de um grande cardume, ou seja, período de abundância do pescado.

8 Utensilio: utilizado na pesca fluvial ou costeira, para recolher diversos tipos de peixes.

do processo de comercialização do pescado.

4 I METODOLOGIA DA PESQUISA

Com objetivo de se verificar a utilização da porcentagem na atividade pesqueira; este trabalho lançou mão de diversos instrumentos metodológicos como: observação participante, conversas informais, aplicação de questionário socioeconômico com perguntas semiabertas; para aferir se os pescadores reconhecem este conteúdo matemático dentro de sua atividade profissional, e principalmente a forma como os mesmos lindam no cotidiano com a porcentagem.

A pesquisa em questão foi realizada no mês de agosto de 2017, e contou com a participação e uma amostragem de 20 pescadores, a partir da delimitação do corrente quantitavo de participante a pesquisa seguiu as outras etapas.

A observação em lócus dos envolvidos na pesquisa nos auxiliou de forma consubstancial no que diz respeito a conhecer a rotina dos investigados, pois grande parte da venda do pescado era realizada no próprio local na qual se realizava a pescaria.

Ainda com relação à observação utilizada neste estudo, Vieira e Tibola (2005, p.17) salientam que, na conjuntura antropológica destaca-se como uma técnica que "(...) é de essencial relevância, uma vez que busca constatar diferenças entre costumes e hábitos culturais. A observação não consiste apenas em ver e ouvir seu objeto de estudo, mas também em examinar fatos ou fenômenos".

Verifica-se também que no contexto de uma investigação, a observação apresenta diversos mecanismos para a obtenção de informações e consequentemente para a coleta de dados independentemente do estudo.

Nessa perspectiva, as conversas informais vislumbram como forte mecanismo utilizado pela observação apresentar proximidade com os pesquisados, permitindo através deste mecanismo que os mesmos exponham os seus pontos de vista de forma mais abrangente e com alto grau de veracidade junto ao pesquisador e principalmente aos objetivos da pesquisa em questão.

Dando prosseguimento a referida investigação realizou-se a aplicação de um questionário [formulário] de caráter socioeconômico para os pescadores, cujo objetivo principal era analisar o grau de conhecimento, dos envolvidos no presente estudo, com relação ao uso da porcentagem em seu cotidiano.

Quanto à etapa de análise de dados da pesquisa, esta se consubstanciou pela sintetização das informações recolhidas no decorrer das etapas [observação no lócus da pesquisa e entrevistas com pescadores] que antecedem esta última. A análise de dados centrou-se primordialmente na integração das diversas informações provenientes das observações, dos formulários socioeconômicos e das conversas informais; que se propunham a analisar a estreita ligação entre o conhecimento formal de porcentagem e a quilo que se usa no cotidiano de um pescador.

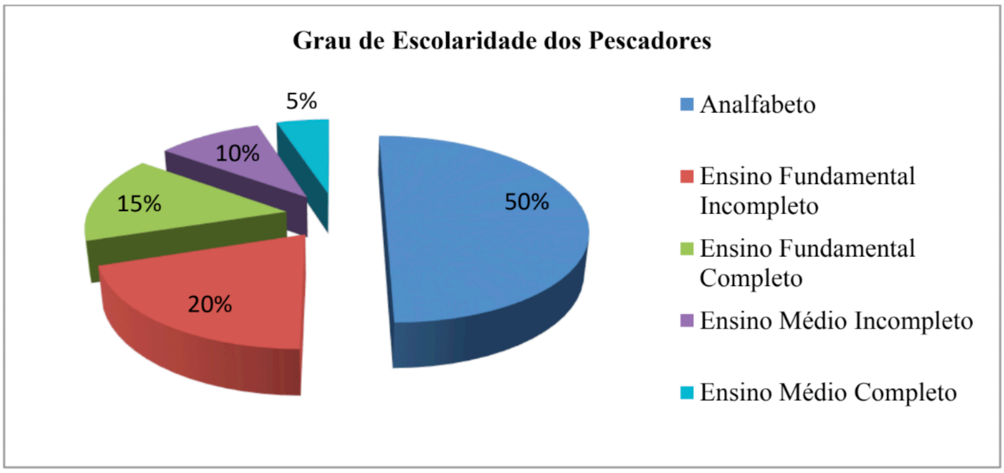
Passadas as etapas de utilização dos instrumentos de coleta de dados referenciados neste trabalho, e realizada a etapa de análise de dados [sintetização das informações no decorrer da pesquisa, realizada por meio da leitura e interpretação de gráficos] a referida pesquisa centrou-se primordialmente nas considerações finais, cujo objetivo é retratar de maneira fidedigna se o resultado da pesquisa foi alcançado ou não, e quais fatores contribuíram para tal ocorrência.

5 I ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS NA PESQUISA

Esse capítulo tem como objetivo descrever, analisar e tratar os dados coletados de forma a prepará-los, para as análises que serão realizadas nos próximos subitens. Através da análise das informações das observações, dos formulários socioeconômicos e das conversas informais dos questionários [formulários socioeconômicos] aplicados para os pescadores categoria, teve-se a oportunidade de conhecer um pouco da realidade vivenciada por essa categoria profissional – [pescador], durante a realização da pesquisa.

Um dos primeiros questionamentos realizados aos sujeitos inclusos no estudo em questão se refere especificamente o grau de escolaridade dos mesmos, pois a partir desse aspecto (item) já se pode verificar a questão do conhecimento formal e informal dos pesquisados com relação à porcentagem; conforme nos mostra o gráfico - 01 a seguir.

GRÁFICO 01



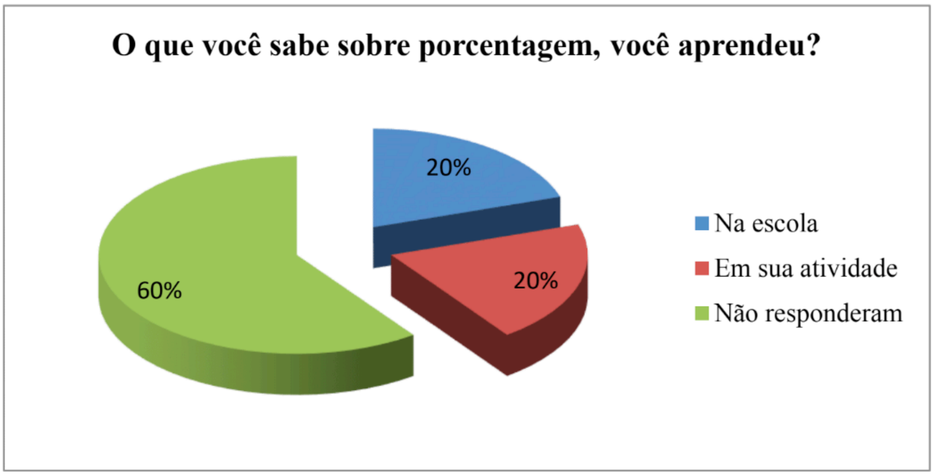
Fonte de Pesquisa: Pesquisa de Campo - 2017

No que concerne a esse aspecto ao questionar os sujeitos inclusos no refererido estudo – pescadores; sobre o grau de escolaridade, verificou-se que a maioria dos pesquisados possuem baixo nível de escolaridade. A ocorrência de tal fato está estreitamente direcionada ao não frequentamento a escola, a rotina desgastante de sua atividade profissional [a pesca]; a fatores socioeconômicos [sustento da família] e a falta de incentivo de seus pais quando tais pescadores eram jovens.

Nesse sentido, a ocorrência de tal fato vai na contra mão do que estabelece a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional-LDB (2010), art.2, que determina: " A éducação é dever da família e do Estado, inspirada nos seus ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho".

Seguindo os mesmos parâmetros de questionamento do gráfico anterior [gráfico 01], o gráfico a seguir [gráfico - 02], procura estabelecer uma relação sobre o local ou momento no qual os pescadores aprenderam porcentagem.

GRÁFICO 02



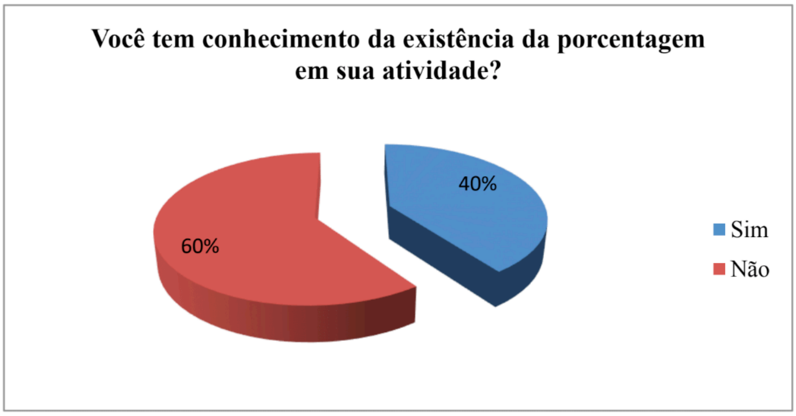
Fonte de Pesquisa: Pesquisa de Campo - 2017

Considerando ainda a questão da porcentagem e primordialmente o local ou o momento em que aprenderam a utilizar essa importante ferramenta matemática, percebeu-se que, de acordo com o exposto no gráfico - 02, através dos dados coletados dos vinte (20) pescadores entrevistados, a grande maioria não respondeu a referida questão por conta de fatores ligados consubstancialmente ao pouco desenvolvimento intelectual; fato este ocasionado pelo baixo nível de escolaridade dos mesmos, que segundo Baudelot e Establet apud Saviani, (1999, p.34) é consequência da desestruturação socioeconômica da família na qual "os filhos da classe dominada mal têm acesso aos cursos noturnos, sem possibilidade alguma de frequentar cursos noturnos complementares e de aperfeiçoamento".

Quanto ao questionamento estabelecido no gráfico - 02, a respeito do local ou momento na qual aprenderam porcentagem, é bastante pertinente que se frise com relação a essa importante ferramenta matemática, que a mesma se destaca como um conteúdo que está presente na área da matemática financeira e também se encontra inserida em diversas atividades do cotidiano; inclusive na atividade pesqueira.

Sendo assim, a questão do conhecimento existente ou não da porcentagem na atividade pesqueira por parte dos pesquisados [pescadores], de acordo com o exposto no gráfico - 03, mostrou de modo geral que grande parte desses profissionais apresentam dificuldades com relação à utilização dessa importante ferramenta matemática.

GRÁFICO 03



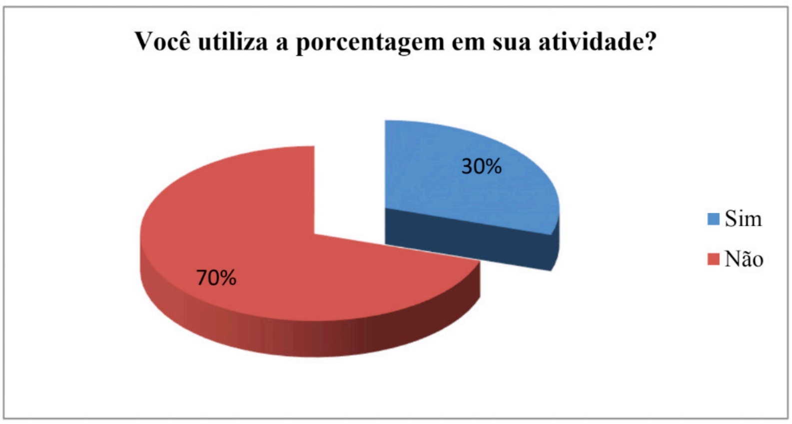
Fonte de Pesquisa: Pesquisa de Campo - 2017

De acordo com o contexto acima com relação à questão e os dados expressos no gráfico – 03; a resposta negativa a referida questão, deixa explicito a falta de conhecimento dos pesquisados com a relação à porcentagem e principalmente sobre a utilização desta dentro da atividade pesqueira. É notório também destacar que tal fato é proveniente do baixo nível de escolaridade dos pesquisados.

Quanto à questão abordada anteriormente Werebe (1997) e Mello (1995) frisam [reforçam] que o a mesma está também direcionada o grande problema do país que reside nas desigualdades econômicas, sociais e culturais.

Na questão referente à utilização da porcentagem na atividade pesqueira – gráfico - 04, grande parte dos pescadores, por conta do nível de escolaridade pouco desenvolvido, mais uma vez deixaram transparecer suas dificuldades referentes à temática em estudo.

GRÁFICO 04



Fonte de Pesquisa: Pesquisa de Campo - 2017

Tomando como base a questão abordada no gráfico em análise [gráfico 04], verificou-se que a maioria dos pesquisados não relacionam a porcentagem a sua atividade profissional [a pesca]; e desconhecem a presença desta, como uma ferramenta matemática.

A negativa a questão em análise também expõe de forma concisa não apenas a falta de conhecimento dos pesquisados sobre "porcentagem", mas também a realidade de nossos pesquisados junto à rotina imposta por sua profissão. Nessa conjuntura Mello (1995, p.34) salienta com relação à questão em análise, que tal fato emerge da "desestruturação socioeconômica da família caracterizando-se concomitantemente como uma variável extraescolar decorrente do contexto político, socioeconômico..." a qual, o individuo está inserido.

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os objetivos gerais da educação dizem respeito às propostas válidas para todos os indivíduos, sem exceção. O objetivo específico da Matemática é desenvolver em cada cidadão, habilidades e competências que lhe permitam comparar, analisar e sintetizar, tornando-o capaz de fazer uso concreto do conhecimento matemático que se faz necessário em atividades quantitativas.

Por meio da realização desta pesquisa verificamos, através dos resultados obtidos, o pouco contato dos pescadores do município de Salinópolis em relação a porcentagem, mais especificamente ao uso dessa ferramenta matemática, que é de suma importância na sua prática profissional, de modo que certamente isso venha a ser um reflexo da pouca escolaridade deles e do fato de não terem consciência da importância da porcentagem em suas práticas de venda do pescado, não tendo a noção exata de lucro e prejuízo.

Não podemos deixar de frisar que, provavelmente, o pouco contato dessas pessoas com os estudos, está ligado aos resultados negativos obtidos neste trabalho, e que possibilidades de implantação de projetos, em parceria com as escolas, que venham a conscientizar os pescadores da importância dessa ferramenta matemática, devem ser fomentados e tratados como prioridade, por se tratar de uma região em que a pesca é uma das principais economias, de modo que a comunidade pesqueira possa perceber que o conhecimento matemático é algo que está bem próximo de seu cotidiano, e que ele pode ser muito útil se usado de maneira correta.

O que devemos entender enquanto professores é que a matemática, como área de conhecimento, precisa romper os muros escolares e aliar seus elementos à práticas contextuais, como por exemplo a venda de pescados, e dessa forma fazer valer o uso da matemática como algo palpável a todos que quiserem fazer uso dos benefícios que ela possa vir a proporcionar.

REFERÊNCIAS

COLÔNIA Z-29/ SALINÓPOLIS – PA; Departamento de Finanças: **Livro de Registro de Mensalidade**. p.04 -54. 2016.

FERRO, A. S. **Diagnóstico participativo qualitativo sobre a pesca artesanal no município de Salinópolis - PA**. 2010. 159 p. Dissertação (Mestrado em Gestão dos Recursos Naturais e Desenvolvimento) - Programa de Pós-Graduação em Gestão dos Recursos Naturais e Desenvolvimento Local, Universidade Federal do Pará, Belém, 2010.

GIOVANNI, J. R; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: **A mais nova**. São Paulo, FTD, 2002.

LELLO, José; LELLO, Edgar. **Lello Universal: Dicionário enciclopédico Luso- Brasileiro.** Volume 2 (L-Z).Porto: Lello & Irmão, 1981.

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Biblioteca digital – Câmara, Ed. 5ª; 2010; http://bd.camara.gov.br.

MELLO, Guiomar Namo de. O Magistério de 1º grau da competência técnica ao Compromisso politico – 10 edição, São Paulo, Cortez, 1995.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática em sala de aula: Tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. Natal: Flecha do Tempo, 2006.

PAULICS, Verônika. **Escola de Pesca de Piúma (ES).** Guarapari. Espírito Santo, 2000.

SANTOS, G. M.; SANTOS, A. C. M. Sustentabilidade da pesca na Amazônia. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 19, n. 54, p. 165-182, 2005.

SAVIANI, D. Escola e democracia: teorias da educação, curvatura de vara. Onze teses sobre educação e política. 32. Ed. Campinas/SP: Autores Associados, 1999.

SEEPOF – Secretaria Executiva de Estado de Planejamento, Orçamento e Finanças: **Diagnóstico Participativo dos** Municípios. Pará, (2005).

VIEIRA. V. A. & TIBOLA. F. Pesquisa Qualitativa em Marketing e suas Variações: **Trilhas para Pesquisas Futuras**. *Revista de Administração Contemporânea (RAC),9*(2), 9-33.; 2005.

WEREBE, M.J.G. Grandezas e misérias do ensino no Brasil. São Paulo: Editora Ática, 1994.

CAPÍTULO 13

UMA NOVA ABORDAGEM DE RESIDÊNCIA INTELIGENTE BASEADA EM APRENDIZADO DE MÁQUINA INSERIDA EM UMA REDE NEBULOSA

Data de aceite: 05/06/2020

Suelio Lima de Alencar
Departamento de Eletroeletrônica, IFMA, São Luís, MA

Orlando Donato Rocha Filho
Departamento de Eletroeletrônica, IFMA, São Luís, MA

Danúbia Soares Pires
Departamento de Eletroeletrônica, IFMA, São Luís, MA

Lorenna Maria Figueiredo Albuquerque
Departamento de Eletroeletrônica, IFMA, São Luís, MA

RESUMO: De forma geral, hoje não é tão difícil ver lâmpadas que se acendem sozinhas, ou portões que se abrem ao clique de um botão. Entretanto, a automação residencial tem um potencial ainda não explorado. Seja pelo ainda alto custo de implementação, ou outros fatores. Com a chamada "Indústria 4.0", veio também o conceito de *Internet das Coisas*, que promove a conexão entre usuários e dispositivos. Se o mercado já vende diversas soluções de automação residencial, a maioria esbarra em um empecilho, a falta de individualidade. Os Sistemas inteligentes vem como forma de solucionar problemas e agregar novas formas de realizar muitas tarefas antes feitas de outras maneiras. Isso inserido em ambientes residenciais gera casas mais funcionais, econômicas e confortáveis. Já que com o passar dos anos, a sociedade passou a enxergar as residências não mais como simplesmente um local para descanso e proteção, mas como um local com mais possibilidades. Este trabalho teve como objetivo criar um sistema de inteligência computacional capaz de automatizar uma casa, gerando conforto aos usuários, bem como economia de energia.

PALAVRAS - CHAVE: Fuzzy, Sistemas Inteligentes, Automação.

ABSTRACT: In general, today it is not so difficult to see lamps that self-light, or gates that open at the click of a button. However, home automation has an untapped potential. Whether due to the still high cost of implementation, or other factors. With the so-called "Industry 4.0", the Internet of Things concept also came about, which promotes the connection between users and devices. If the market already sells several home automation solutions, most of them are hindered by a lack of individuality. Intelligent systems come as a way to solve problems and add new ways to perform many tasks previously

done in other ways. This inserted in residential environments generates more functional, economical and comfortable houses. Since over the years, society has come to see homes no longer as simply a place for rest and protection, but as a place with more possibilities. This work aimed to create a computational intelligence system capable of automating a home, generating comfort for users, as well as energy savings.
KEYWORDS: Fuzzy, smart systems, automation.

1 I INTRODUÇÃO

O conceito de automação e controle residencial está aos poucos se tornando de comum uso e implementação na sociedade. Embora ainda tenha custos relativamente elevados, a depender da complexidade do que se propõe, a onda tecnólogica do século XXI chamada de Indu´stria 4.0 impulsiona a implementação. Um sistema inteligente pode ser dito como a aplicação de Inteligência Artificial para diversos fins, de modo que a atuação do sistema, sem a interferência humana direta, possa ser parecida e, por vezes mais eficiente que a atuação com interferência (COPPIN, 2004). O conceito de Inteligência Artificial pode ser entendido com o estudo de sistemas que agem de uma forma que a qualquer observador parece ser inteligente(COPPIN, 2004). Existem diversas modelagens matemáticas para este fim, dos quais podemos citar: Algoritos Genéticos, Redes Neurais, Redes Nebulosas e Redes Neuro-Nebulosas. Nesse trabalho utizamos uma Rede Nebulosa. Rede Nebulosa ou Sistema Fuzzy é um método de controle que foi proposto pela primeira vez em 1965 por Zadeh (ZADEH, 1965). Ele se contrapõe ao método binário de sim ou não, e leva, de certa forma, para os sistemas, o que podemos chamar de ”quantificação da incerteza”.

2 I BREVE FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLOGIA

Foi proposto a criação de um sistema robusto, que depende de muitos fatores.

De maneira resumida e inteligível, as etapas são descritas abaixo conforme a ordem:

1. Estudo bibliográfico do caso, buscando embasamento teórico necessário para a total execução do projeto.

2. Testes e discussões sobre quais variáveis seriam mais importantes inicialmente e quais seriam adicionadas depois.

3. Em caso de dúvida sobre quais modelos neuro-nebulosos seriam mais vantajosos, fazer testes a fim de determinar um.

4. Desenvolvimento e otimização da rede neuro nebulosa usando dados genéricos para os sensores da casa, outrora definidos como os iniciais citados no item 2.

5. Implementação de dados reais, coletados por sensores, no modelo criado no item 4.

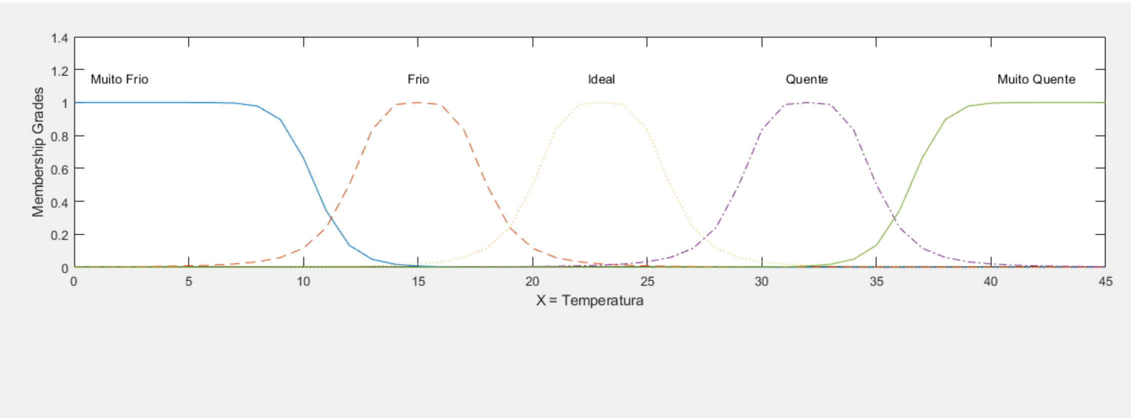
6. Ampliação do modelo com os dados de cada usuário individualmente, novamente com dados genéricos, para fins de testes.

7. Aquisição dos dados de cada usuário individualmente e inserção dos mesmos no modelo já ampliado e testado, citado no item 6.

8. Testes e otimizações do modelo final.

As variáveis consideradas inicialmente foram as que podem ser coletadas na casa e independem dos usuários como fator individualista, a saber: Temperatura, Umidade e Horário. é feita com o uso de alguns Esp-8266® que é um módulo Wifi® conectados a um Esp-32® central, responsável por gerenciar e tratar os dados.

A figura abaixo representa a quantificação da variável temperatura:



Para a variável temperatura, como mostra a imagem, foi optado por trabalhar com 5 conjuntos: *muito frio, frio, ideal, quente e muito quente*.

Escolhidas as variáveis, deu-se início a uma pesquisa de implementação. O sistema fuzzy escolhido foi o Takagi-Sugeno, que tem a seguinte relação de entrada/saída:

x é A e y é B, Então z=f(x,y)

Isso significa que a saída depende diretamente das entradas. A escolha das variáveis é explicável pelo fato de elas serem as que mais devem influenciar no controle genérico da residência. A escolha dessa inferência deu-se por fatores consideráveis. O primeiro ponto, é que esse tipo de modelagem tem uma grande aceitação no meio acadêmico, o que atesta a confiabilidade. À nível de pesquisa, esse tipo de escolha pode facilitar a implementação, tendo em vista que existe uma boa bibliografia. O segundo ponto é que um sistema desse tipo pode ser mais facilmente implementado, linguagens como Python e Matlab tem bibliotecas específicas para ele. O terceiro e certamente mais decisivo ponto, é que nos testes iniciais, e, em casos de projetos com problemática semelhante estudados durante a pesquisa bibliográfica, os resultados foram satisfatórios.

Depois, deu-se a implementação de uma rede de coleta dos dados dos sensores. A rede consiste basicamente na ligação entre uma placa Esp-32 e os sensores, através de fios e resistores. O motivo da escolha do Esp em detrimento do Arduino, devido à flexibilidade do mesmo, além de preço, tensão de alimentação (3,3v, o Arduino é 5v) e etc. Os sensores utilizados foram o DHT11, para coleta de Umidade e Temperatura, e o LDR, para coleta de luminosidade ambiente.

Os dados coletados passam por um filtro digital à nível de código, a fim de minimizar possíveis erros de medição e jogar na rede Nebulosa apenas dados que possam ser relevantes. Os parâmetros desse filtro são simples, apenas para evitar o envio duplicado de dados, e padronizar as medições. Nesse caso em específico, consideramos o meio em que os dados são obtidos como estável, sendo, portanto, desconsiderado possíveis aumentos ou diminuições bruscas no padrão de medição. O uso dessa ferramenta faz-se justificável pelo fato de que em meios físicos podemos desconsiderar esse tipo de aumento. Por exemplo, se o padrão de temperatura na média das últimas medições for 30º C, considerando um intervalo de medição de dois décimos de segundos, podemos considerar impossível que a décima primeira medição dê um valor de 55º C, porque mesmo em um caso de explosão ou incêndio, 0,2s não é tempo suficiente para que os sensores consigam captar essa alteração. Portanto, nesse caso, consideramos que uma possível alteração muito grande em um intervalo de 0,2s entre uma medição e outra seja um erro de medição.

Na última etapa de desenvolvimento, propôs-se o desenvolvimento de um protocolo que ligasse todos os dispositivos, a fim de que os dados fossem coletados pelos sensores e transmitidos com confiabilidade até o computador com a Rede Neuro-Nebulosa treinada, e que após o cálculo das saídas, essas pudessem ser levadas para os atuadores de forma rápida, a fim de se obter um ambiente agradável.

O protocolo foi divido em duas etapas, e envolve três tipos de dispositivos diferentes para a comunicação.

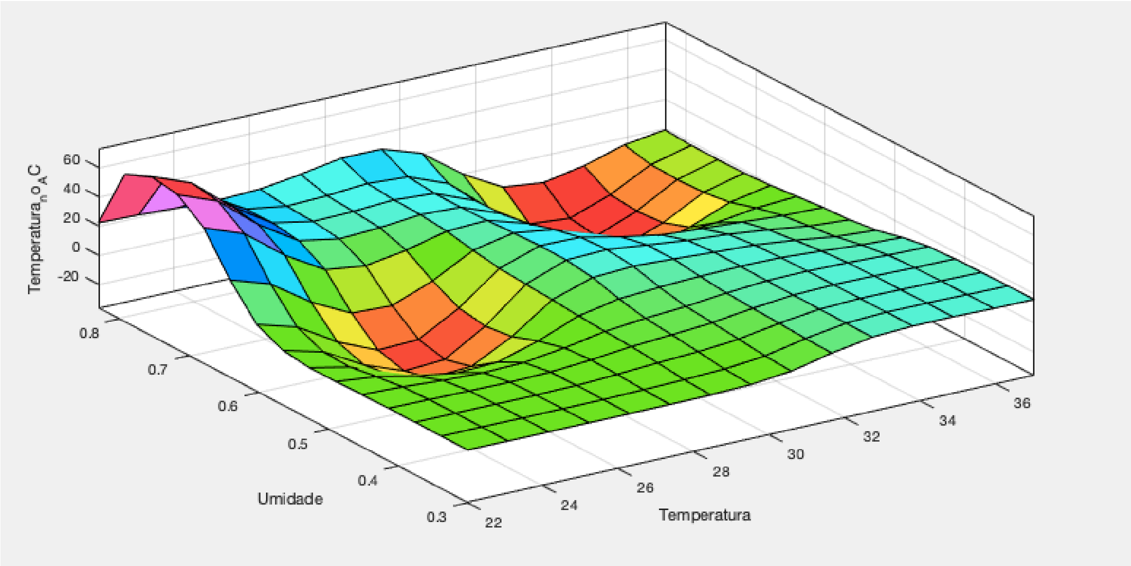
Na primeira etapa, os dados dos sensores são coletados e pré-tratatos pelos dispositivos Esp8266®, e aproveitando-se do fato destes dispositivos terem Wifi® integrados, esses dados são transmitidos para um Esp32® central. O Esp32® é responsável por fazer a ponte entre os Esp8266® e o computador com a Rede Neuro-Nebulosa. Todos os Esp8266® foram configurados para enviar os dados de forma sequencialmente lógica, a fim de que o Esp32® possa identificar de que sensor veio um determinado dado num momento X. Após receber os dados de todos os Esp8266® , o Esp32® tem o trabalho de organizar esses dados para enfim enviá-los à entrada do sistema treinado.

Nesse ponto, deixamos de usar o Wifi® para a comunicação e passamos a usar comunicação Serial. A explicação para o último fato citado dá-se pelo fato de que além de poder deixar a comunicação Wifi® do Esp32® central totalmente livre para a devida recepção e tratamento dos dados, a comunicação serial garante uma velocidade maior na comunicação entre Esp32® e Computador. Esse ponto da comunicação é considerado altamente crítico, pois uma entrada errada no sistema pode fazer com que as saídas sejam totalmente alteradas, causando situações inconvenientes, e, a depender da gravidade do erro, podem ser causados problemas físicos ao sistema. Aqui, ressalva-se que caso o computador estivesse em local remoto, de forma que não pudesse ser conectado diretamente ao resto do sistema por comunicação serial, uma alternativa viável seria o da comunicação via ethernet, embora, como no caso do Wifi®, esse tipo de comunicação pode causar alguma demora. Nesse caso, a solução empregada para garantir a confiabilidade dos dados de entrada seria a mesma que foi utilizada no resto do sistema conectado por Wifi® , a saber: O receptor (Esp32®) sabe o formatado normatizado em que os dados devem chegar, e quando recebe-os, ele faz uma espécie de checagem para saber se o formato de entrada obedece ao padrão. Caso não, presume-se que houver perda nos dados, então o receptor solicita ao Esp8266® uma nova coleta de dados, e segura os dados que tiverem vindo corretos, a fim de que todos sejam enviados normatizados.

Na segunda etapa, o computador calcula as saídas e envia de volta ao Esp32® central, que compara com as saídas anteriores, e caso haja mudança, as novas saídas são repassadas por Wifi® para os Atuadores.

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste trabalho propôs-se a implantação de um sistema inteligente baseado em uma Rede Nebulosa de arquitetura Takagi-Sugeno em uma residência. O desenvolvimento do sistema deu-se de forma satisfatória, assim como a aquisição e tratamentos dos dados. Os testes comparativos atestaram a eficiência do método na economia de energia, bem como no bem estar. O sistema tornou-se seguro quanto `a tomada de decisões, garantindo confiabilidade, robustez e boa aplicabilidade. A figura abaixo demonstra o comportamento do sistema quando levadas em consideração as variáveis Temperatura e Umidade.



Todas as alterações feitas no comportamento do sistema manualmente pelos usuários, são guardadas em um banco de dados, e esses dados treinam novamente o sistema. Sendo assim, considera-se resolvida a problemática da adaptabilidade. A próxima etapa é expandir o método de controle para uma Rede Neuro-Nebulosa, adicionando ao sistema Fuzzy uma Rede Neural Artificial e também coletar informações dos usuários através de Dispositivos Vestíveis, tais como Smartwatches e/ou Smartbands, a fim de, por exemplo, saber quando o usuário está dormindo.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao IFMA e à FAPEMA pelo apoio financeiro.

REFERENCES

B. Coppin, *Artificial intelligence iluminated.* 1. ed. Massachusetts, 2004.

L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets. Information and Control.* Departament of Eletrical Engine- ering and Eletronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, Califor- nia. p. 338-353, 1965. 2004.

J. S. R. Jang, C. T. Sun, E. Mizutani, *Neuro-fuzzy and soft computing: a computati- onal approach to learning and machine inteligence. 1. ed. Prentice-Hall, 1997.*

CAPÍTULO 14

DINÂMICA DO HIV COM TERAPIA ANTIRRETROVIRAL VIA EXTENSÃO FUZZY BIDIMENSIONAL DE ZADEH

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 02/04/2020

Kassandra Elena Inoñan Alfaro
Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística
São Paulo - São Paulo
http://lattes.cnpq.br/8035208349507538

Ana Maria Amarillo Bertone
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática
Uberlândia - Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/0632921389061617

Rosana Sueli da Motta Jafelice
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática
Uberlândia - Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/4014114406515905

RESUMO: O objetivo deste trabalho é a análise qualitativa de um modelo matemático que simula a ação do Vírus de Imunodeficiência Humana (HIV) na corrente sanguínea sob tratamento antirretroviral de indivíduos soropositivos. A modelagem matemática é realizada com parâmetros considerados números fuzzy. Os parâmetros considerados são o retardo e a taxa de mortalidade do vírus, com a finalidade de incluir a incerteza encontrada no fenômeno biológico. A metodologia inclui a construção de um algoritmo baseado em informações provenientes de um autômato celular. O algoritmo descreve uma aproximação numérica de uma solução do sistema que simula a dinâmica do HIV, seguido da fuzzificação através do princípio fuzzy bidimensional da extensão de Zadeh. Uma comparação das soluções fuzzy dos sistemas com e sem retardo é realizada. Ressalta-se que em ambos os modelos têm sido incorporados à terapia antirretroviral, contudo as soluções fuzzy destes sistemas exibem comportamento qualitativo semelhante ao histórico natural do HIV sem tratamento, até a fase assintomática.

PALAVRAS-CHAVE: HIV, Equação diferencial com retardo, Extensão de Zadeh bidimensional.

DYNAMICS OF THE HIV UNDER ANTIRETROVIRAL THERAPY VIA ZADEH'S BIDIMENSIONAL FUZZY EXTENSION

ABTRACT: The aim of this work is the qualitative analysis of a mathematical model that simulates the action of the Human Immunodeficiency Virus (HIV) in the bloodstream under antiretroviral treatment of HIV-positive individuals.

Mathematical modeling is performed with parameters considered as fuzzy numbers. The parameters considered are the delay and the mortality rate of the virus in order to include the uncertainty found in the biological phenomenon. The methodology includes the construction of an algorithm based on information from a cellular automaton. The algorithm describes a numerical approximation of a system solution that simulates the HIV dynamics, followed by fuzzification through the two-dimensional fuzzy principle of the Zadeh extension. A comparison of the fuzzy solutions of the systems, with and without delay, is performed. It is noteworthy that antiretroviral therapy has been incorporated in both models, however the fuzzy solutions of these systems exhibit qualitative behavior like the natural history of HIV without treatment, until the asymptomatic phase.
KEYWORDS: HIV, Delay differential equation, Two-dimensional Zadeh extension.

1 I INTRODUÇÃO

A capacidade de incorporar incertezas provenientes de dados *in vitro* em fenômenos biológicos é um objetivo comum na área de modelagem biomatemática. A teoria dos conjuntos fuzzy constitui uma abordagem apropriada uma vez que transforma a incerteza em um número fuzzy. Em particular, o princípio de extensão de Zadeh bidimensional (NGUYEN, 1978) é a ferramenta utilizada neste estudo com a finalidade de incluir dois parâmetros incertos provenientes da modelagem da dinâmica do HIV com retardo.

O HIV é um retrovírus esférico, isto é, um vírus contendo ácido ribonucleico (RNA) que se replica em uma célula hospedeira que ataca o sistema imunológico, responsável por defender o organismo de doenças. As células mais atingidas são os linfócitos T do tipo CD4+, que são células que fazem parte do sistema imunológico. A Figura 1 mostra um esquema do tempo de percurso da infecção do HIV em um adulto infectado. Nesta figura o comportamento dos linfócitos T CD4+ e dos linfócitos T citotóxico (CTL) são exibidos. Podemos também observar que o tempo médio de infecção da Síndrome de Imunodeficiência Adquirida (AIDS) é 10 anos, sem tratamento com antirretrovirais.

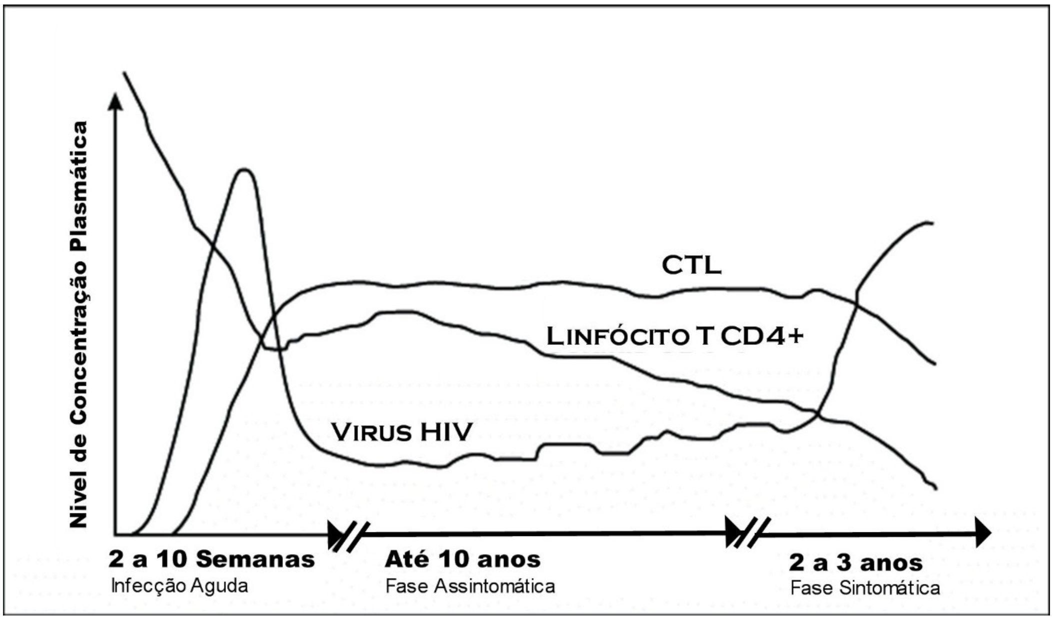


Figura 1: Esquema da história natural da infecção do HIV (SILVA, JAFELICE, 2010).

O objetivo básico deste trabalho é estudar modelos da biomatemática que utilizam equações diferenciais, no estudo das dinâmicas do HIV no contexto da teoria fuzzy (INOÑAN et al., 2019). De fato, a taxa de infecção do linfócito T do tipo CD4+ pelo vírus HIV, que é um parâmetro complexo de ser obtido nas ciências médicas, assim como outros parâmetros do sistema, são obtidos por meio de um Autômato Celular (AC) (JAFELICE et al, 2015). A partir desse ponto, determina-se uma aproximação numérica para uma fuzzificação do modelo desta dinâmica, em que os parâmetros de retardo e taxa de mortalidade do vírus são considerados como dois números fuzzy. Para isto, na Seção 2 são introduzidos os principais conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy, incluindo o dos números fuzzy, que dão o alicerce teórico para os parâmetros incertos da modelagem. A seguir, na Seção 3 exibe-se os modelos da distintas dinâmicas do HIV. Na Seção 4 e 5 apresenta-se o autômato celular e a taxa de infecção respectivamente. Expõe-se na Seção 6 os outros parâmetros do sistema de equações diferenciais. Na Seção 7 explana-se como é obtida uma solução fuzzy do modelo da dinâmica do HIV com retardo, sendo que na Seção 8, obtém-se uma solução fuzzy da mesma modelagem sem retardo. Comparações entre as duas soluções são feitas na Seção 9. Finalmente, na Seção 10 elenca-se aspectos relevantes, conhecimentos adquiridos e a conclusão.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Um conjunto fuzzy A do universo $\mathcal{U}$ é caracterizado por uma função de pertinência: $\mu_A: \mathcal{U} \to [0,1]$.Definimos como α -nível de A ao conjunto:

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathcal{U} |\ \mu_A(x) \geq \alpha\} \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

O nível zero de um conjunto fuzzy A é o fecho topológico do conjunto denominado suporte de A, $\text{supp}(A) = \{x \in \mathcal{U} \mid \mu_A(x) > 0\}$.

Um conjunto fuzzy A é denominado número fuzzy quando $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ existir x tal que $\mu_A(x) = 1$, $[A]^a$ é um intervalo fechado para todo $a \in [0,1]$ e o suporte de A é limitado.

Dados dois números fuzzy A e B de universos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{Z}$ respectivamente, o produto cartesiano fuzzy é dado por:

$$\mu_{A\times B}(x,y) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}.$$

Sendo $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ e $\mu_B : \mathbb{R} \to [0,1]$ as funções de pertinência de A e B, respectivamente e $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, a extensão de Zadeh de (A, B) através de F é o conjunto fuzzy cuja função de pertinência é dada por:

$$\mu_{\hat{F}(A,B)}(z) = \sup_{(x,y)}\left[\min\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right)\right], \text{ em que } z = F(x,y).$$

TEOREMA: Seja $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e A, B números fuzzy. Então

$$\left[\hat{F}(A,B)\right]^\alpha = F([A]^\alpha \times [B]^\alpha), \text{ para todo } \alpha \in [0,1],$$

em que $[A]^a$ e $[B]^a$ representam os -níveis dos números fuzzy A e B , respectivamente (NGUYEN, 1978).

Outro elemento importante da teoria dos conjuntos fuzzy é o Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) que contém quatro componentes: um processador de entrada que realiza a fuzzificação dos dados, uma coleção de regras nebulosas chamada base de regras, uma máquina de inferência fuzzy e um processador de saída que fornece um número real como saída. O método de inferência utilizado neste trabalho é o Método de Inferência de Mamdani e o método de defuzzificação é o Centro de Gravidade (PEDRYCZ, GOMIDE, 1998).

Na próxima Seção explana-se o modelo clássico da dinâmica do HIV.

3 I MODELO DA DINÂMICA DO HIV

Nowak e Bangham (1996) apresentam um modelo da dinâmica do HIV que contém quatro variáveis dependendo do tempo t dadas por:

- $x(t)$ é a população de células não infectadas do linfócito T do tipo CD4+;
- $y(t)$ é a população de células infectadas do linfócito T do tipo CD4+ que produzem o vírus;
- $v(t)$ é a carga viral ou partículas do vírus livre e
- $z(t)$ é a magnitude dos linfócitos T citotóxico,

cujas taxas de mortalidade são d, a, u e b , respectivamente. O valor p é a taxa de mortalidade das células infectadas causadas por CTL e c é a taxa de proliferação do CTL em resposta do antígeno. O modelo supõe que as células não infectadas são continuamente produzidas pelo corpo humano sob um influxo constante λ. Células não infectadas e vírus livres produzem células infectadas a uma taxa β (t) e células infectadas produzem partículas de vírus livres a uma taxa k (t) Assim, o sistema de equações diferenciais é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \lambda - dx - \beta(t)xv \\
\frac{dy}{dt} &= \beta(t)xv - ay - pyz \\
\frac{dv}{dt} &= k(t)y - uv \\
\frac{dz}{dt} &= cyz - bz.
\end{aligned} \qquad (1)$$

O modelo proposto não contém um retardo intracelular de tempo entre a infecção da célula e a produção de novas partículas de vírus. Com o objetivo de incorporar um retardo à modelagem, assume-se que a taxa de mortalidade $\tilde{a}$ para as células infectadas que ainda não produziam vírus, é $e^{-\tilde{a}\tau}$. Interpreta-se assim a probabilidade de sobrevivência no tempo $t - \tau$ para o tempo t (HERZ et al, 1996). Assim, o modelo obtido tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \lambda - dx - \beta(t)xv \\
\frac{dy}{dt} &= \beta(t-\tau)x(t-\tau)v(t-\tau)e^{-\tilde{a}\tau} - ay - pyz \\
\frac{dv}{dt} &= k(t)y - uv \\
\frac{dz}{dt} &= cyz - bz.
\end{aligned} \qquad (2)$$

A partir dessa modelagem, a metodologia segue com as informações obtidas através de um autômato celular, descrito na próxima seção.

4 | AUTÔMATO CELULAR

O autômato celular (AC), estudado por Jafelice et al (2015), representa computacionalmente a corrente sanguínea de um indivíduo soropositivo, sob tratamento antirretroviral, onde vivem artificialmente células não infectadas e infectadas do linfócito T do tipo CD4+, partículas de vírus livres e o linfócito T citotóxico. O linfócito T do tipo CD4+ é o principal linfócito que o vírus ataca ao atingir a corrente sanguínea.

No sistema (2) os parâmetros e os valores da taxa de infecção são obtidos a partir do autômato celular (JAFELICE et al, 2015). Para isso, o modelo AC utiliza a saída do SBRF para a simulação. As variáveis de entrada do SBRF são a adesão ao tratamento e a potência da medicação. Para adesão ao tratamento, o intervalo [0,1] é definido onde 0 significa nenhuma e 1 total da adesão. Também, define-se o intervalo de potência medicação como [0.8,0.9]. As variáveis de saída são a porcentagem de linfócitos CD4+ infectados e o período de replicação do vírus. Para as variáveis de entrada e a primeira variável de saída, os termos linguísticos são: muito baixo, baixo, médio, alto e muito alto, e para a segunda saída são: muito rápido, rápido, médio, lento e muito lento. Para a porcentagem de células CD4+ do HIV infectadas, o intervalo é [0.1,1] e para o período de replicação do vírus é [5,16]. O SBRF é construído com base no conhecimento médico especializado.

A simulação é realizada utilizando os valores de adesão ao tratamento e potência do medicamento de três indivíduos soropositivos ao HIV mostrados na Tabela 1. Nesta tabela, os parâmetros da primeira, segunda e terceira colunas correspondem a indivíduos soropositivos submetidos a três níveis de potência e adesão ao medicamento (JAFELICE et al, 2015). Os valores de saída do SBRF são mostrados na Tabela 2. A primeira linha da Tabela 2 mostra a porcentagem dos linfócitos T do tipo CD4+ infectados e a segunda linha mostra o período de replicação do vírus para os valores de entrada. A simulação é executada em um retângulo com 38 x 38 células com 101 iterações. A escolha do tamanho da grade celular é definida com base em várias execuções experimentais do AC, variando o número de iterações, bem como o número inicial de elementos (linfócitos CD4 + não infectados e infectados, partículas de vírus livres e CTL específicos de vírus) e todos os outros parâmetros AC necessários para as simulações.

	Primeira entrada	Segunda entrada	Terceira entrada
Adesão ao tratamento	0.8	0.85	0.9
Potência da medicação	0.1	0.6	1

Tabela 1: Entradas para o SBRF usado na simulação.

	Primeira entrada	Segunda entrada	Terceira entrada
Porcentagem de linfócitos CD4+ infectados	0.85	0.55	0.1
Período de replicação do vírus	6.35	10.4	16

Tabela 2: Saídas do SBRF e entradas do AC usadas na simulação.

A taxa de infecção para três indivíduos soropositivos sob tratamento antirretroviral, obtidos por AC, são expostos na Seção 5, a seguir.

5 I TAXA DE INFECÇÃO EM FUNÇÃO DO TEMPO

A taxa de infecção β (t) do sistema (2) é um parâmetro importante para o controle da AIDS em indivíduos soropositivos ao HIV. Esta taxa de infecção é calculada usando o quociente do número de linfócitos T do tipo CD4+ infectados pelo produto do número de linfócitos T do tipo CD4+ não infectados e a variação do tempo Δ t, isto é,

$$\beta(t) = \frac{\text{linfócitos CD4+ infectados}}{\text{linfócitos CD4+ não infectados}\cdot\Delta t}.$$

Como o resultado é obtido para cada iteração realizada, a variação de tempo $\Delta t = 1 \; e \; t = 1, \ldots, 100.$ A Figura 2 apresenta o gráfico da taxa de infecção em função do tempo para os três valores de entrada. Observamos que o gráfico é decrescente, o que significa que a taxa de infecção dos linfócitos CD4+ pelo vírus diminui com o tempo. Com os valores obtidos (ver Figura 2), determinam-se três expressões β representando a taxa de infecção em função do tempo *t* para três indivíduos. A Figura 3 representa o ajuste para os pontos discretos β (ver Figura 2), que foi obtida pelo método dos mínimos quadrados (RUGGIERO; LOPES, 1996), de acordo com as regras fuzzy. Assim, as expressões obtidas para β (t) são:

a) $\beta = 0.2703\, e^{-0.005t} + 0.2499$ (1ª entrada);

b) $\beta = 0.333\, e^{-0.005527t}$ (2ª entrada);

c) $\beta = 0.335\, e^{-0.008937t}$ (3ª entrada).

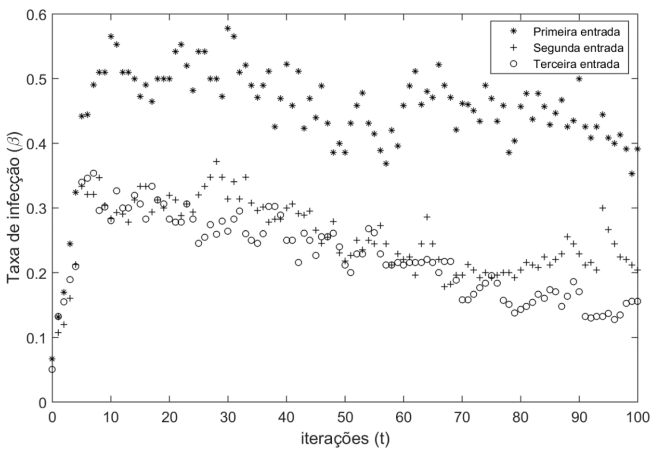


Figura 2: Taxas de infecção β (t) em função do tempo obtido com o autômato celular para as três entradas.

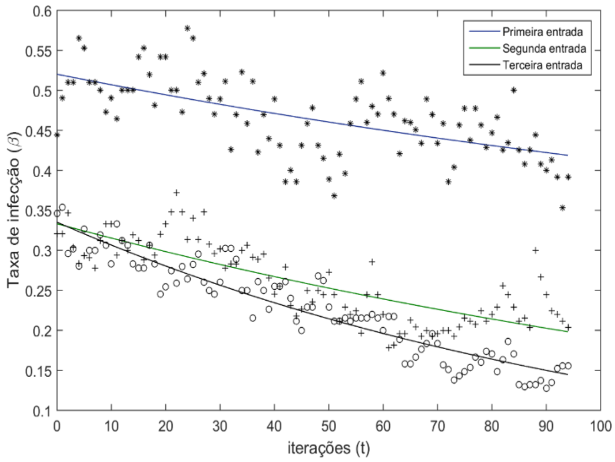


Figura 3: Diagrama de dispersão das taxas de infecção ajustados em função do tempo para as três entradas (JAFELICE et al., 2015).

A seguir, na Seção 6, se introduzem os outros parâmetros do sistema (2).

6 I PARÂMETROS DO SISTEMA DA DINÂMICA DO HIV

As taxas do sistema (2) são consideradas como valores inversos do tempo que no AC é o número de iterações (JAFELICE et al, 2015). Os valores das taxas são:

- λ = 20 que é o influxo constante de células não infectadas produzidas no corpo humano, colocadas aleatoriamente em cada iteração na AC.
- d = 1/4 que é a taxa de mortalidade de células não infectadas, pois no AC o número de iterações para morte de células não infectadas é 4.
- a = 1/5 que é a taxa de mortalidade de células infectadas, pois o número de iterações para morte de células infectadas é 5.
- p = 0.4 que é a taxa de mortalidade de células infectadas devido ao encontro com os CTL, porque nem todo encontro resulta em sucesso.
- u = 1/2 que é a taxa de mortalidade das células do HIV, pois o número de iterações para a morte por HIV é 2.
- c = 1/14 que é a taxa de proliferação dos CTL, uma vez que o número de iterações para a proliferação do CTL é 14.
- b = 1/5 que é a taxa de mortalidade do CTL, pois o número de iterações para morte dos CTL é 15.

Além desses valores para os parâmetros, é encontrado o valor $\tilde{a} = 0.0825$. No AC são contadas todas as células infectadas que morreram e não produziram vírus em cada iteração e depois calcula-se a média dos valores encontrados. O vetor k (t) que representa a reprodução das células infectadas, é obtido a partir do AC, contando o número de células infectadas recentemente reproduzidas em cada iteração .

Seja Φ uma solução numérica do sistema (2). Para a solução numérica do sistema (2), representada na Figura 4, considera-se o ajuste $\beta = 0.333\ e^{-0.005527t}$ que representa o indivíduo soropositivo ao receber potência da medicação média e adesão ao tratamento médio $\tau = 0.5$ e as taxas definidas anteriormente.

As condições iniciais são $x_0 = 0.99$, $y_0 = 0.01$, $v_0 = 0.1$ e $z_0 = 0.01$.

O software Matlab tem sido utilizado para obter a solução numérica para o sistema (2) (ver Figura 4).

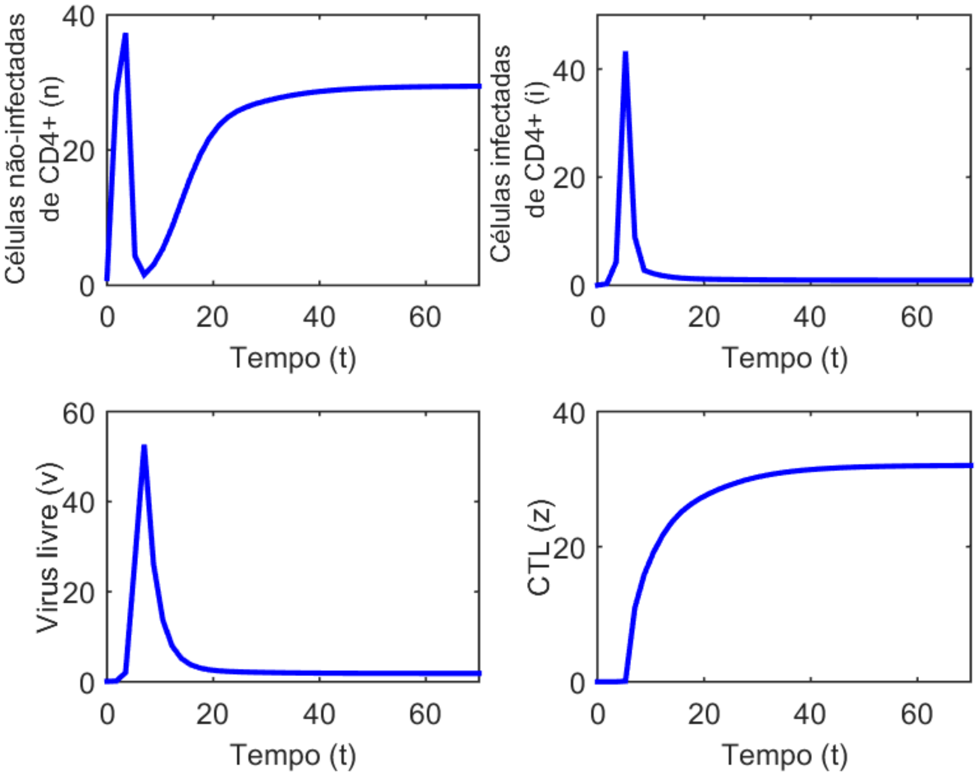


Figura 4: Solução numérica Φ do sistema (2).

O princípio da extensão de Zadeh bidimensional é utilizado para obter uma aproximação numérica de uma solução fuzzy do sistema (2) considerando o retardo e a taxa de mortalidade do vírus como números fuzzy triangulares, como é explanado na Seção 7, a seguir.

7 I SOLUÇÃO FUZZY DO MODELO DA DINÂMICA DO HIV COM RETARDO

Para determinar uma solução fuzzy considera-se o ajuste $\beta = 0.333\, e^{-0.005527t}$ que representa o indivíduo soropositivo ao receber potência da medicação média e adesão ao tratamento médio.

Primeiramente, o retardo e a taxa de mortalidade do vírus são construídos como números fuzzy triangulares $\Gamma = (0.08, 0.5, 1)$ e $U = (0.25, 0.5, 0.75)$, e , respectivamente. As funções de pertinência estão dadas, respectivamente, por:

$$\mu_\Gamma(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{0.42}(\tau - 0.08) & \text{se } 0.08 \le \tau \le 0.5 \\ 2(1-\tau) & \text{se } 0.5 < \tau \le 1, \end{cases}$$

$$\mu_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{0.25}(u - 0.25) & \text{se } 0.25 \le u \le 0.5 \\ \frac{1}{0.25}(0.75 - u) & \text{se } 0.5 < u \le 0.75. \end{cases}$$

Assim, o produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$ (ver Figura 5) de Γ e U é dado por

$$\mu_{\Gamma\times U}(\tau, u) = \min\{\mu_\Gamma(\tau), \mu_U(u)\}.$$

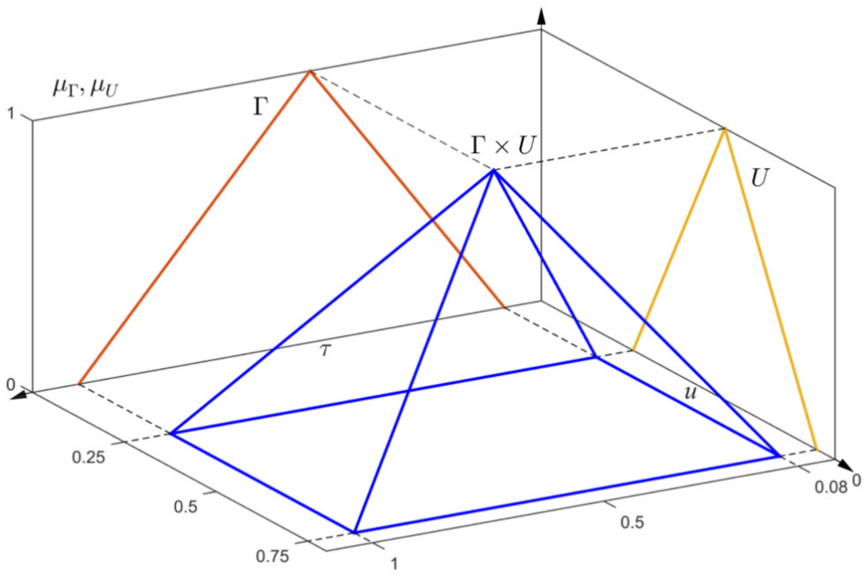


Figura 5: Produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$.

Logo, para determinar uma solução fuzzy do sistema (2), o tempo t é fixado e definimos a seguinte função $S_t(\tau, u) = \phi(t, \tau, u)$.

A seguir, a extensão de Zadeh de via a função $\Gamma \times U$, fixa-se S_t e dada por:

$\mu_{\hat{S}_t(\Gamma,U)}(z) = sup_{(\tau,u)}[\mu_{\Gamma\times U}(\tau, u)]$, em que $z = S_t(\tau, u)$.

Para cada instante t, aplicando a extensão de Zadeh bidimensional $\Gamma \times U$ e o Teorema, implementa-se um algoritmo (ver subseção 7.1) para obter uma solução fuzzy do sistema (2).

7.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA (ALGORITMO)

Nesta subseção, o algoritmo para determinar uma solução fuzzy do sistema (2) é mostrado. Nas simulações numéricas e na fuzzificação, considera-se os números fuzzy triangulares mostrados na Figura 6. Na Figura 5, $\mu_{\Gamma\times U}$ é a função de pertinência associada ao produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$.

Com base no princípio de extensão de Zadeh bidimensional (Teorema) é desenvolvido um algoritmo utilizando o software Matlab baseado no trabalho de Almeida et al (2018). Neste trabalho constrói-se uma fuzzificação de uma solução numérica para um modelo de equações diferenciais parciais através do princípio de extensão de Zadeh unidimensional.

Na Figura 6, do lado esquerdo pode-se observar o produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$., os números fuzzy Γ e U, e os a-níveis de $\Gamma \times U$. No lado direito, mostram-se os a-níveis de $\Gamma \times U$. no plano para poder visualizar a divisão feita no algoritmo.

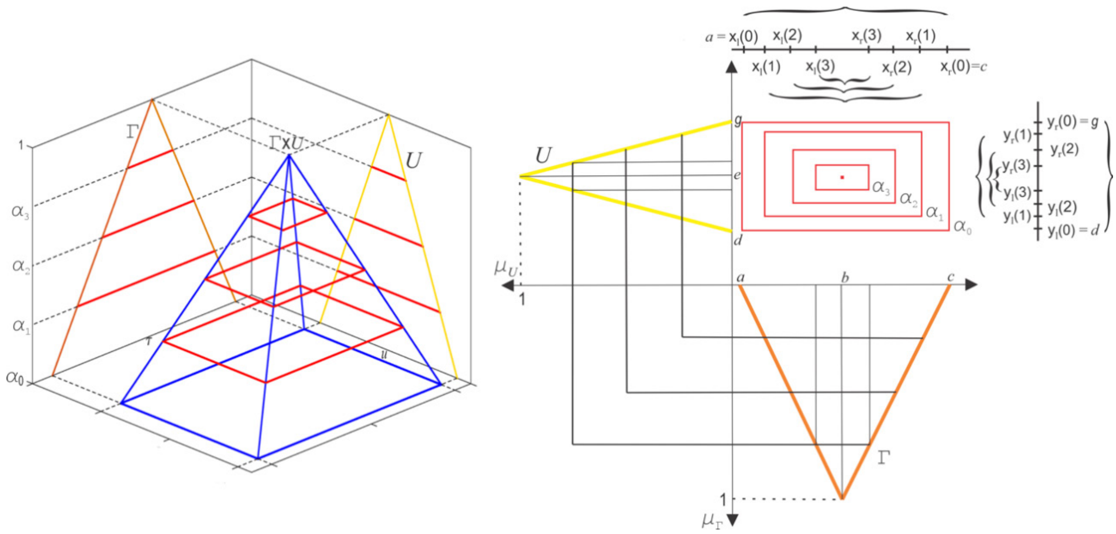


Figura 6: Produto cartesiano fuzzy $\Gamma \times U$ e α -níveis.

O primeiro passo do algoritmo é ilustrado na Figura 6, que exibe uma função de pertinência referente ao produto cartesiano fuzzy $(\Gamma \times U)$ dos números fuzzy Γ e U .

Uma afirmação utilizada no desenvolvimento do algoritmo descrita a seguir:

LEMA: Se $x \in C\,([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$, então é uma função contínua no intervalo $[t_0, t_0 + A]$ (HALE, 1977)..

O algoritmo de construção segue a seguinte sequência de passos:

- Para cada, α_i, $0 \leq \alpha_i < 1$, determine dois intervalos $[x_l(i), x_r(i)]$ e $[y_l(i), y_r(i)]$.
- Comece com os intervalos centrais, considerando uma partição para cada uns dos intervalos $[x_l(i), x_r(i)]$ e $[y_l(i), y_r(i)]$ com pontos igualmente espaçados em que $i = n_\alpha - 1$, em que n_a é o número de a-níveis (ver Figura 6).
- Obtenha a solução numérica do sistema (2) para cada ponto das partições mencionadas anteriormente

$$((\tau, u) \in [x_l(i), x_r(i)] \times [y_l\,(i), y_r(i)]).$$

- Note que estamos obtendo valores para $S_t(\tau, u)$, com

$$(\tau, u) \in [x_l(i), x_r(i)] \times [y_l(i), y_r(i)].$$

- Construa uma função de pertinência para S_t procurando primeiramente os valores mínimos e máximos do conjunto discreto $S_t(\tau, u)$ (ver Teorema).
- Para cada $i = n_\alpha - 1, n_\alpha - 2, \ldots, 1$, considere partições dos intervalos

$[x_l\ (i-1), x_l(i)], \quad [x_r\ (i), x_r\ (i-1)], \quad [y_l(i-1), y_l\ (i)]\ ,\ [y_r\ (i), y_r(i-1)].$

.Utilize a continuidade da função St (Lema), os valores mínimos e máximos do conjunto discreto $\{S_t(\tau, u)\}$, em que

$$(\tau, u)\ \in [x_l\ (i-1), x_r\ (i-1)] \times [y_l\ (i-1), y_r\ (i-1)],$$

são obtidos por comparação entre os valores mínimos e máximos dos conjuntos discretos:

- $\{S\_t\ (\tau, u)^{(l)}\}$ em que
$$(\tau, u)^{(l)} \in [x_l(i-1), x_l(i)] \times [y_l(i-1), y_l(i)];$$
- $\{S\_t\ (\tau, u)^{(c)}\}$, em que
$$(\tau, u)^{(c)} \in [x_l(i), x_r(i)] \times [y_r(i), y_l(i)],$$
- $\{S\_t\ (\tau, u)^{(l)}\}, em\ que$
$$(\tau, u)^{(r)} \in [x_r(i), x_r(i-1)] \times [y_r(i), y_r(i-1)].$$

· Conclua a construção de uma função de pertinência para S_t quando determinar o valor $S_t(b, e)$, em que *b* e e são os pontos que tem grau de pertinência 1.

8 I RESULTADO

Na Figura 7 é exposta a solução fuzzy do sistema (2) contendo suas quatro componentes através do princípio fuzzy bidimensional da extensão de Zadeh. Pode-se observar que, à medida que o tempo passa, as células não infectadas e os CTL aumentam até estabilizar em torno de um número. Notamos também que a carga viral e as células infectadas diminuem drasticamente com o tempo, este comportamento está de acordo com a literatura. A região amarela é a que melhor representa o fenômeno biológico, por ter grau de pertinência próximo de 1.

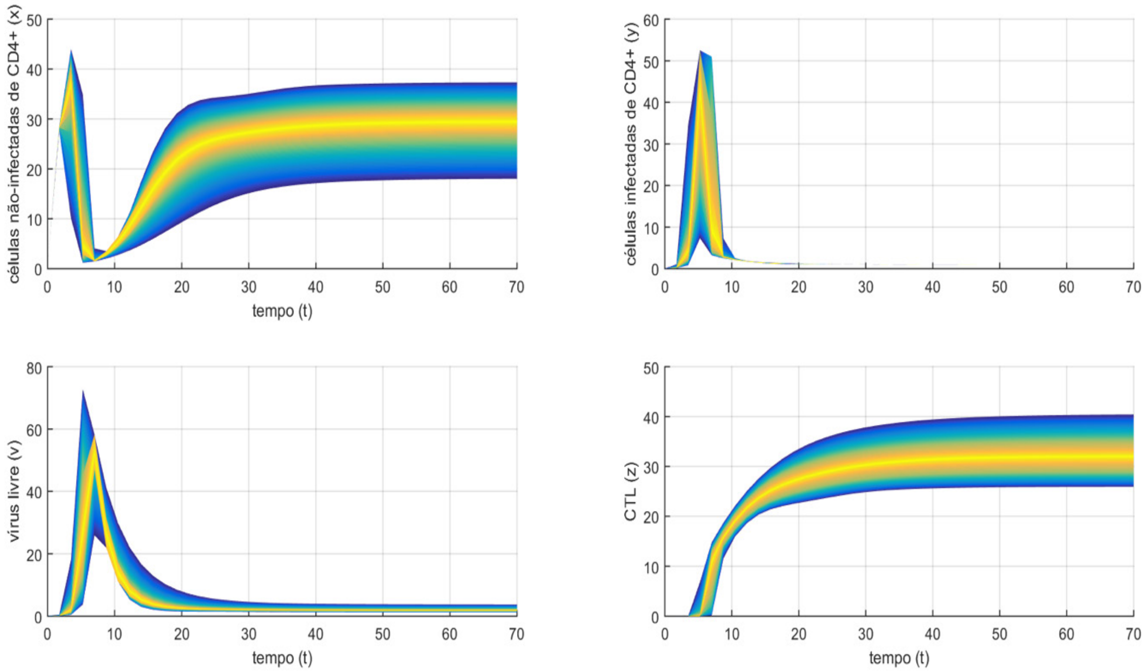


Figura 7: Fuzzificação da solução numérica Φ do sistema (2) via extensão de Zadeh bidimensional.

A seguir é construída uma aproximação da solução fuzzy do sistema (1).

9 I SOLUÇÃO FUZZY DA DINÂMICA DO HIV SEM RETARDO

Para observar como o retardo influencia a solução dos sistemas (1) e (2), são considerados os mesmos parâmetros e taxas obtidas para o sistema de equações diferenciais com retardo (2) para o sistema de equações diferenciais ordinárias sem retardo (1). Além disso, utiliza-se o ajuste $\beta = 0.333\ e^{-0.005527t}$ para a taxa de infeção β (t) e as mesmas condições iniciais.

Considerando a taxa de mortalidade do vírus como parâmetro fuzzy triangular (0.25;0.5;0.75) e se determina uma solução fuzzy do sistema (1). Para isso, primeiramente se reescreve o sistema (1) como $\dot{X}(t) = G\ (x(t), y(t), v(t), z(t), u)$, com a mesma condição inicial dado no sistema (2), $X_0 = (x_0, y_0, v_0, z_0)$ e aplicando o teorema de existência e unicidade, obtém-se a única solução $\Phi\ (t, u)$ em algum aberto que é contínua (HALE, 1977). Logo, fixando t, se define a função $\mathcal{F}^t\ (u) = \Phi\ (t, u)$ que é contínua. Finalmente, pelo Teorema, se determina uma solução fuzzy do sistema (1) (ver Figura 8).

Na Figura 8, mostra-se a solução fuzzy das quatro componentes do sistema (1). Além disso, a região de cor amarelo é a que melhor representa o fenômeno biológico, pois é onde a taxa de mortalidade do vírus u, que é um número fuzzy triangular, tem grau de pertinência próximo de 1.

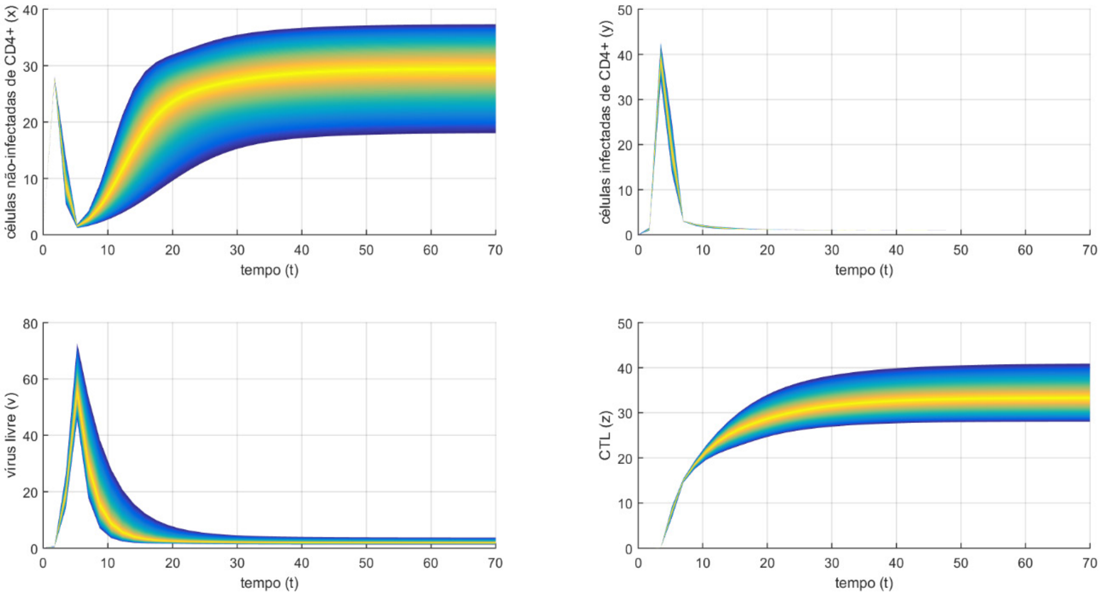


Figura 8 : Solução fuzzy do sistema sem retardo (1) com o parâmetro fuzzy triangular U.

Na Seção 9 descreve-se uma comparação entre a aproximação da solução fuzzy obtida na Seção 7 e a aproximação da solução fuzzy do modelo (1) construída nessa seção.

10 I COMPARAÇÃO ENTRE OS DOIS MODELOS DO HIV

Nesta seção mostramos a comparação da solução fuzzy entre os modelos da dinâmica do HIV com retardo (2) e sem retardo (1).

Na Figura 9, observamos que as células não infectadas e infectadas do linfócito T do tipo CD4+, as partículas de vírus livres e o CTL apresentam o mesmo comportamento das soluções dos ambos sistemas com retardo (2) e sem retardo (1). No início, na solução fuzzy do sistema (1), as células não infectadas e infectadas do linfócito T do tipo CD4+ e o vírus livre, assumem pontos de máximos menores do que a solução fuzzy do sistema (2). O sistema (2) produz valores máximos e mínimos em tempos posteriores comparadas à solução do sistema (1). Finalmente, o CTL cresce previamente na solução do sistema (1) em comparação com a solução do sistema (2).

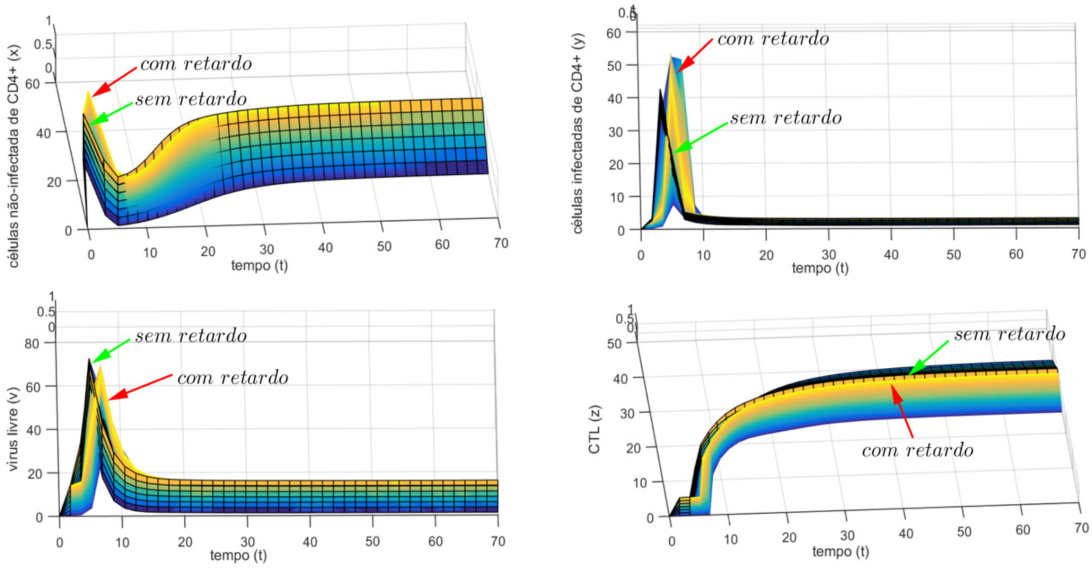


Figura 9: Comparação das soluções fuzzy dos sistemas (1) e (2).

11 | CONCLUSÃO

O comportamento do resultado da fuzzificação através da extensão de Zadeh bidimensional que relaciona dois parâmetros incertos da dinâmica do sistema com retardo (2), é qualitativamente similar à história natural da infecção do HIV (ver Figura 1), com a diferença que o modelo inclui o tratamento antirretroviral. De fato, a diferença é que, neste modelo (2), as células não infectadas do linfócito T do tipo CD4+ tendem a se estabilizar à medida que o tempo passa, enquanto na história natural decresce; o HIV no modelo (2) também se estabiliza com o tempo, contudo no histórico natural, aumenta quando o tempo passa. Além disso, para observar de que maneira o retardo influencia a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias que simula a dinâmica do HIV, tem sido feito uma comparação das soluções fuzzy dos sistemas sem retardo e com retardo. Conclui-se que, de fato, há uma alteração significativa do deslocamento das células e do vírus no tempo.

AGRADECIMENTOS

A primeira autora agradece à CAPES pelo auxílio financeiro.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, C. G.; BERTONE, A. M. A.; JAFELICE R. M. **Fuzzification of the miscible displacement model in heterogeneous porous media.** Journal of Mathematical Analysis and Applications, Amsterdam, v. 463., n. 1, p. 242-267, Julio 2018.

HALE, J. K. **Theory of Functional Differential Equations**. 3ª ed., USA, Applied Mathematical Science, Springer-Verlag New York Inc., 1977.

HERZ, A. V. M.; BONHOEFFER S.; ANDERSON R. M.; MAY R. M.; NOWAK M. A. **Viral dynamics in vivo:** Limitations on estimates of intracellular delay and virus decay. Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, v. 93, n.14, p. 7247-7251, Julio 1996.

INOÑAN, A. K.; JAFELICE, R. M.; BERTONE, A. M. A. **Dinâmica do HIV com retardo sob tratamento antirretroviral com dois parâmetros fuzzy**. In XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2019, Uberlândia.

JAFELICE, R. M.; SILVA, C. A. F.; BARROS, L. C; BASSANEZI R. C. A. **A fuzzy delay approach for HIV dynamics using a cellular automaton**, Journal of Applied Mathematics, p. 1-9, 2015. DOI: https://doi.org/10.1155/2015/378753

NGUYEN, H. I. T. **A note on the extension principle for fuzzy sets.** Journal of Mathematical Analysis and Applications, USA, v. 64, p. 369-380, Agosto 1978.

NOWAK, M. A.; BANGHAM, C. R. M. **Population dynamics of immune responses to persistent viruses.** Science, USA, v. 272, n. 5258, p. 74-79, Abril 1996.

PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. **An introduction to fuzzy sets:** analysis and design. MIT Press, Cambridge,1998.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. R. **Cálculo Numérico:** Aspectos teóricos e computacionais. 2ª ed., Makron Books, São Paulo, 1996.

SILVA, C. A. F.; JAFELICE, R. S. M. **Estudo de modelos microscópico do HIV baseado em autômatos celulares**. In: X Semana da Matemática/ IX Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional, 2010, Uberlândia.

CAPÍTULO 15

ANÁLISE DE UM MODELO MATEMÁTICO PARA IMUNOTERAPIA

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 03/04/2020

Marcelo Oliveira Esteves
Discente da Faculdade de Medicina, Universidade Federal de Juiz de Fora
Juiz de Fora - Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/3179117204966473

Pedro Nascimento Martins
Discente da Faculdade de Medicina, Universidade Federal de Juiz de Fora
Juiz de Fora - Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/7358923620068218

Ana Carolina Delgado Malvaccini Mendes
Discente da Faculdade de Medicina, Universidade Federal de Juiz de Fora
Juiz de Fora - Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/1781367584664826

Sarah Rachid Ozório
Discente da Faculdade de Medicina, Universidade Federal de Juiz de Fora
Juiz de Fora - Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/5642136077232466

Maria Zilda Carvalho Diniz
Discente da Faculdade de Medicina, Universidade Federal de Juiz de Fora
Juiz de Fora - Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/9546088956355665

Valeria Mattos da Rosa
Professora do Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora
Juiz de Fora - Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/0297644115959460

Flaviana Andrea Ribeiro
Professora do Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora
Juiz de Fora - Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/6631597628615120

RESUMO: Os mecanismos pelos quais o sistema imune combate tumores são diversos e ainda não totalmente esclarecidos. A imunoterapia é uma modalidade de tratamento antineoplásico que consiste na manipulação e estimulação desses mecanismos para potencializar a resposta imune do próprio indivíduo contra as neoplasias malignas. Na biomatemática, propõe-se modelos matemáticos para certos fenômenos a fim de prever o seu comportamento. Nesse sentido, a biomatemática tem se empenhado em propor equações para a modelagem do crescimento tumoral e da ação dos diversos tratamentos antineoplásicos, o que é de grande valia na área médica pelo potencial de fornecer maior

previsibilidade e acurácia a determinadas terapêuticas. Objetivo: discutir, do ponto de vista médico e biológico, um modelo matemático de F. Castiglione e B. Piccoli baseado em equações diferenciais, que descreve o crescimento de tumores malignos sólidos quando submetidos à imunoterapia com infusão de células dendríticas. Conclusão: a partir da comparação com os padrões biológicos da resposta imune, percebe-se que o modelo em questão descreve satisfatoriamente a dinâmica de crescimento tumoral, apesar de simplificar componentes imunológicos. Por exemplo, não é abordada no modelo a ação das células NK (Natural Killer), componentes da imunidade inata que possuem uma atuação destrutiva constante sobre o tumor.
PALAVRAS-CHAVE: Modelagem matemática; Imunoterapia; Células dendríticas; Tumores

ANALYSIS OF A MATHEMATICAL MODEL FOR IMMUNOTHERAPY

ABSTRACT: The mechanisms of the immune response to tumors are diverse and still not absolutely understood. The immunotherapy is a type of antineoplastic treatment which consists in manipulating and stimulating these mechanisms in order to potentialize the immune response against malignant tumors. The field of biomathematics studies and proposes models for certain biological phenomena in order to predict their responses and so biomathematicians have been working on equations to model tumor growth and its response to the antineoplastic treatments, which has great value for physicians because of its potential of increasing the accuracy and predictability of therapeutics. Goal: to analyze, from a medical and biological point of view, a mathematical model proposed by F. Castiglione and B. Piccoli to describe the growth of malignant tumors and their response to immunotherapy with infusion of dendritic cells. Conclusions: the model satisfactorily describes the biological response to tumors, although it simplifies some components. For example, it doesn't consider the role of NK (Natural Killer) cells, components of the innate immunity which play a continuous role in fighting the tumor.
KEYWORDS: Mathematical modeling; Immunotherapy; Dendritic cells; Tumors

1 I INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de modelos matemáticos para explicar e prever fenômenos biológicos é um trabalho muito valioso. A biomatemática dedica-se a diversas áreas dentro da Medicina, e, mais recentemente, muita atenção tem sido dada ao estudo do comportamento das neoplasias.

Modelos matemáticos criados para predizer o comportamento de tumores malignos que acometem o ser humano vêm sendo criados desde a década de 1990, baseando-se na interação entre células tumorais, imunológicas e, por vezes, componentes terapêuticos. O modelo de Castiglione Piccoli (2007), publicado em 2007, aplicável para tumores sólidos e que ainda não desenvolveram mecanismos de escape ao sistema imunológico, destaca-se por incluir à dinâmica o tratamento conhecido como imunoterapia.

No tratamento antineoplásico, grandes avanços têm ocorrido no que concerne à imunoterapia, sendo amplamente noticiados na mídia e no meio científico. A imunoterapia consiste na manipulação do sistema imune para o combate ao tumor, estimulando mecanismos pré-existentes de forma a ampliar e direcionar a resposta imune. A imunidade é dividida primordialmente em dois grupos: inata e adquirida.

A primeira é formada pelos mecanismos de defesa inicial do hospedeiro, reconhecendo padrões moleculares genéricos a vários patógenos (PAMP) ou a danos (DAMP), e tem como componentes celulares os fagócitos, as células dendríticas e as células NK. Os fagócitos e células dendríticas são capazes de fagocitar e degradar os agentes nocivos e, após a degradação, apresentar as pequenas estruturas proteicas (antígenos) de cada agente às células da imunidade adquirida, atuando, portanto, como células apresentadoras de antígeno (APC). As células da imunidade adquirida, por sua vez, produzem uma resposta específica contra as células que apresentarem o mesmo antígeno que lhes foi apresentado previamente (ABBAS; LICHTMAN; PILLAI, 2015).

Os principais componentes da imunidade adquirida são os linfócitos B e T. Os linfócitos B têm papel primordial na imunidade humoral, pois se diferenciam em plasmócitos e secretam anticorpos no plasma, enquanto os linfócitos T têm papel importante na imunidade celular. Seus tipos mais conhecidos são o CD4 (linfócito T auxiliar/*helper*) e CD8 (citotóxico). Os linfócitos CD4 tem a função de coordenar a função da defesa imunológica, principalmente através da produção e liberação de citocinas e interleucinas. Os CD8 são ativados pela presença de interleucina 2 (IL-2), secretada por eles próprios após a apresentação de antígeno por uma APC, e agem diretamente no ataque à membrana celular da célula-alvo. A partir da ativação dos linfócitos T CD8, a resposta é altamente específica e muito potente, culminando em morte da célula atacada. (ABBAS; LICHTMAN; PILLAI, 2015)

A imunoterapia é a terapia antineoplásica utilizada por Castiglione e Piccoli (2007) no modelo estudado neste artigo, a qual se baseia na manipulação do sistema imune, estimulando os mecanismos pré-existentes descritos acima, de forma a ampliar a resposta imune direcionada ao tumor. A técnica de imunoterapia utilizada no modelo consiste na infusão de células dendríticas, culminando na indução da apresentação de antígeno dessas células aos linfócitos T, de forma a desencadear sua ativação e replicação e, finalmente, o ataque à membrana das células tumorais. Para isso, é feito um transplante autólogo, isto é, células dendríticas do próprio hospedeiro são extraídas, recebem o antígeno (células tumorais ou proteínas da membrana do tumor) e são injetadas em outra parte do corpo.

2 I OBJETIVOS

O objetivo do trabalho é avaliar como a imunoterapia é capaz de interferir no crescimento de tumores, com base no modelo de crescimento tumoral proposto por Castiglione e Picolli. Ainda, objetiva-se discutir, do ponto de vista médico e biológico, a coerência dos parâmetros utilizados e das variáveis desconsideradas.

3 I MODELO MATEMÁTICO

As equações que descrevem as taxas de crescimento das células T CD4, T CD8, tumorais, dendríticas e da interleucina 2 são, respectivamente:

$$\frac{dH(t)}{dt} = a_0 + b_0 DH\left(1 - \frac{H}{f_0}\right) - c_0 H \quad (1)$$

$$\frac{dC(t)}{dT} = a_1 + b_1 I(M + D)C\left(1 - \frac{C}{f_1}\right) - c_1 C \quad (2)$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = b_2 M\left(1 - \frac{M}{f_2}\right) - d_2 MC \quad (3)$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = -d_3 DC + u \quad (4)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = b_4 DH - e_4 IC - c_4 I \quad (5)$$

nas quais o *H* são as células T CD4 *helpers*; *C* são as células T CD8 citotóxicas; *M* são as células cancerígenas expostas ao antígeno tumoral; *D* são as células dendríticas modificadas com o antígeno; *u* é o controle, isto é, a taxa de injeção de DC (células dendríticas); e *I* é a IL-2 (interleucina 2) secretada por *H* e responsável pelo crescimento populacional das células T. Os parâmetros a_i; b_j; c_k; d_l; e_m e f_n referem-se, respectivamente, à taxa de nascimento das células, à taxa de proliferação, à taxa de morte natural, à taxa de morte de DC marcadas após encontrarem com LT CD8, à ativação de linfócitos T CD8 pela IL-2, e à capacidade de suporte do meio.

É importante destacar que a análise desse modelo matemático é feita em um intervalo de tempo de uma hora. Além disso, os efeitos da *downregulation* das células tumorais e a vascularização tumoral são negligenciados. Em suma, o modelo é aplicável para tumores sólidos, que ainda não criaram mecanismos de escape ao sistema imunológico e que estão em um estágio inicial de desenvolvimento.

Detalhadamente, existem diferentes etapas na evolução tumoral (KUMAR; ABBAS, A; FAUSTO, 2010). O primeiro estágio, chamado *in situ*, vai desde o momento da mutação genética das células por fatores esporádicos ou hereditários até a formação de uma massa tumoral que não invade outros tecidos e que tem o seu tamanho controlado pelo fluxo de nutrientes para o tecido no qual está situada, o que decorre de uma multiplicação descontrolada e irreversível das células neoplásicas após a mutação. Quando a massa tumoral torna-se capaz de invadir outros tecidos, ultrapassando a membrana basal, tem-se o estágio de *neoplasia invasiva*. Por fim, há a formação de novos vasos sanguíneos no tumor (*angiogênese*) e, dessa forma, este tem potencial para se disseminar para tecidos distantes do local de instalação, constituindo as chamadas *metástases*.

Sabe-se que o sistema imunológico atua de forma eficaz antes do crescimento significativo da *neoplasia in situ*. Isso porque essa consolidação da massa tumoral faz com que as células do sistema imune sejam incapazes de entrar em contato com as células malignas que estão na sua parte interna. Porém, as células tumorais possuem outros mecanismos de evasão imunológica que regulam o reconhecimento imunológico. Esses mecanismos não são levados em consideração no presente modelo.

É imprescindível ressaltar que a complexidade e a individualidade do sistema imunológico de cada organismo, assim como as peculiaridades de quaisquer outros sistemas biológicos, dificultam a adequação das modelagens matemáticas à realidade. Apesar disso, considerando todos os pré-requisitos já citados, tem-se que esse modelo matemático, proposto por Castiglione e Piccoli, possui, tanto as variáveis das equações diferenciais, quanto os seus parâmetros, coerentes com o que se pode esperar do crescimento ou decrescimento das células T CDH4 *helpers*, T CD8 citotóxicas, dendríticas, tumorais e da IL-2 durante uma resposta imunológica comum nesse momento inicial de combate às células neoplásicas.

4 I DISCUSSÃO

Em primeira instância, é necessário enfatizar que, recentemente, a imunoterapia vem obtendo significativa evolução no combate aos tumores, e conhecimentos relacionados à imunologia celular e molecular estão cada vez mais sendo utilizados como formas eficazes de se aumentar as respostas antitumorais. Atualmente, em grandes centros oncológicos do mundo, o uso dessa modalidade é expressivo e, geralmente, feito concomitantemente com outras medidas clássicas antineoplásicas (cirurgia, irradiações, quimioterapia). Em casos cirúrgicos, por exemplo, faz-se necessário, inicialmente, realizar a extirpação da massa tumoral por métodos cirúrgicos e depois faz-se algum dos diversos tratamentos baseados no sistema imune como forma profilática de se evitar a reincidência do tumor e de se combater metástases não detectadas. A terapia com células dendríticas, como propõe o modelo em estudo, pode ser particularmente eficaz para retardar ou prevenir recidiva e metástase após os procedimentos invasivos (WCULEK et al., 2019).

Além da importância das DC, há também outras células do sistema imune que são bastante importantes na defesa do organismo contra o tumor. As células NK são células da imunidade inata que mediam uma citotoxicidade espontânea contra células tumorais deficientes em MHC classe I – uma molécula normalmente expressada por todas as células nucleadas (ABBAS; LICHTMAN; PILLAI, 2015), mas não em tumorais, e há muito se sabe que participam da resposta imune contra células alteradas in vivo (SMYTH et al., 2000). Apesar disso, o modelo matemático em estudo não inclui esse grupo celular, importante pela sua atuação destrutiva constante sobre o tumor, em suas equações, o que pode ser atribuído, em parte, à notável complexidade da modelagem matemática de sistemas biológicos.

Além disso, o modelo em discussão foi proposto em 2007 e, desde então, o tratamento dos tumores por meio da estimulação do sistema imune evoluiu bastante. Por último, é importante ressaltar que a história natural de tumores distintos se dá de forma diversa, com peculiaridades no crescimento e nas formas de evasão à resposta imune, bem como a resposta imune em si.

Com isso, faz-se importante que pesquisas com o objetivo de modelar matematicamente o crescimento tumoral e a ação das terapias antineoplásicas considerem não somente as generalidades da resposta imune às neoplasias, mas também as peculiaridades relativas a cada uma delas.

5 | CONCLUSÃO

O modelo analisado descreve o comportamento das células tumorais de forma satisfatória, embora ignore componentes importantes da resposta imune. Se por um lado a estratégia de imunoterapia abordada possui potencial para conter o avanço tumoral e destruir as células malignas já existentes; por outro, não é retratada a ação das células NK, componentes da imunidade inata que possuem uma atuação destrutiva constante sobre o tumor.

Ademais, o modelo analisado desconsidera os mecanismos de escape da resposta imune utilizados pelo tumor, os quais contribuem para a sobrevivência e expansão das células tumorais.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao PICME (Programa de Iniciação Científica e Mestrado) e ao CNPq pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

Abbas, Abul K.; LICHTMAN, Andrew H.; PILLAI, Shiv.. **Imunologia celular e molecular.** 8. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

CASTIGLIONE, F.; PICCOLI, B.. **Cancer immunotherapy, mathematical modeling and optimal control**. **Journal Of Theoretical Biology**, [s.l.], v. 247, n. 4, p.723-732, 21 ago. 2007. Elsevier BV. http://dx.doi.

org/10.1016/j.jtbi.2007.04.003. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022519307001853?via%3Dihub. Acesso em: 10 abr. 2007.

KUMAR, V.; ABBAS, A.; FAUSTO, N. **Robbins** e Cotran – **Patologia** –. **Bases Patológicas** das Doenças. 8. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010

SMYTH, Mark J. et al. **Differential Tumor Surveillance by Natural Killer (Nk) and Nkt Cells**. **The Journal Of Experimental Medicine**, [s.l.], v. 191, n. 4, p.661-668, 21 fev. 2000. Rockefeller University Press. http://dx.doi.org/10.1084/jem.191.4.661. Disponível em: https://rupress.org/jem/article/191/4/661/30050/Differential-Tumor-Surveillance-by-Natural-Killer. Acesso em: 03 abr. 2020.

WCULEK, Stefanie K. et al. **Dendritic cells in cancer immunology and immunotherapy**. **Nature Reviews Immunology**, [s.l.], v. 20, n. 1, p.7-24, 29 ago. 2019. Springer Science and Business Media LLC. http://dx.doi.org/10.1038/s41577-019-0210-z. Disponível em: https://www.nature.com/articles/s41577-019-0210-z. Acesso em: 03 abr. 2020.

CAPÍTULO 16

ANÁLISE DA DEFLEXÃO DE UMA VIGA APOIADA-ENGASTADA

Data de aceite: 05/06/2020

Mariana Coelho Portilho Bernardi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, DACOC – Departamento Acadêmico de Construção Civil
Campo Mourão – Paraná

Adilandri Mércio Lobeiro
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, DAMAT – Departamento Acadêmico de Matemática
Campo Mourão – Paraná

Rogério Zolin Bertechini
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, DACOC – Departamento Acadêmico de Construção Civil
Campo Mourão – Paraná

RESUMO: Neste artigo, apresenta-se a solução analítica e numérica da equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com condições de contorno do tipo *Dirichlet-Neumman*, para um arranjo estrutural utilizado na Engenharia Civil. Para este caso, obtém-se a equação diferencial da linha elástica de uma viga apoiada-engastada com carregamento distribuído. A priori, foi encontrado a solução analítica desta equação e implementou-se um programa em *Matlab*, em que calculou a solução numérica, com base no Método das Diferenças Finitas. Por fim, para validação dos resultados numéricos, os mesmos foram comparados com a solução analítica.

PALAVRAS-CHAVE: Linha elástica; Método das Diferenças Finitas; Vigas.

ABSTRACT: In this article, the analytical and numerical solution of the second-order linear ordinary differential equation is presented, with *Dirichlet-Neumman* boundary conditions, for a structural arrangement used in Civil Engineering. For this case, the differential equation of the elastic line of a supported-crimped beam with distributed loading is obtained. First, the analytical solution of this equation was found and a program was implemented in Matlab, in which the numerical solution was calculated, based on the Finite Difference Method. Finally, to validate the numerical results, they were compared with the analytical solution.

KEYWORDS: Elastic thread; Finite Difference Method; Beams.

1 I INTRODUÇÃO

Vigas são elementos estruturais presentes em quase toda Engenharia Civil, sendo os deslocamentos limitantes em seu projeto. O estudo desses deslocamentos chama-se deflexão e a forma deformada do eixo da viga denomina-se linha elástica. Neste trabalho, apresenta-se a equação diferencial ordinária (EDO) linear de segunda ordem, equação (1), que rege o comportamento da linha elástica, conforme [1] e [3].

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{M}{E_{cs}I_z}, \tag{1}$$

em que, u denota a função que controla a deflexão da viga a uma distância x, conhecida como equação diferencial da linha elástica, M o momento fletor, I_z o momento de inércia da seção transversal e E_{cs} o módulo de elasticidade secante.

A Figura 1, representa uma viga apoiada-engastada, em que, q é a carga uniformemente distribuída, l é o comprimento do vão e R_a a reação de apoio em a.

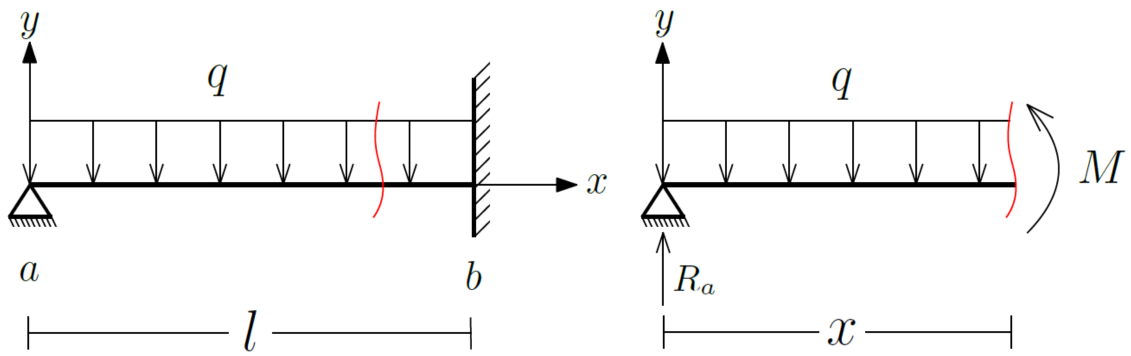


Figura 1 - Viga apoiada-engastada com corte a uma distância x, em que $0 \leq x \leq l$.

A equação do momento fletor pode ser obtida por meio do equilíbrio estático a partir de um corte na seção representado na Figura 1. Dessa forma, ao substituir a equação do momento fletor na EDO (1), encontra-se a equação (2),

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{R_a x - \frac{qx^2}{2}}{E_{cs}I_z}, \tag{2}$$

que representa a equação diferencial da linha elástica para a viga apoiada-engastada, sujeita as condições de contorno dadas em (3),

$$u(0) = 0 \text{ e } \frac{du}{dx}(l) = 0, \tag{3}$$

tais condições de contorno, indicam que o deslocamento na extremidade esquerda é nulo, ou seja, não ocorre deslocamento no apoio. Para a extremidade direita, não ocorre giro, devido ao engaste, o que é indicado pela derivada primeira. As equações (2) e (3) garantem a unicidade da solução do problema de valor de contorno (PVC), conhecido como *Dirichlet-Neumman*, conforme [2].

2 I SOLUÇÃO ANALÍTICA

Ao aplicar a integral em ambos os membros na equação (2) e utilizar as condições de contorno (3), encontra-se a função (4), que representa a solução analítica, cujo o gráfico, Figura 2, é chamado de linha elástica,

$$\begin{aligned} u&: [0, l] \to IR \\ x &\mapsto u(x) = \frac{q}{E_{cs} I_z}\left(\frac{lx^3}{16} - \frac{x^4}{24} - \frac{xl^3}{48}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

em que IR representa o conjunto dos números reais.

3 I SOLUÇÃO NUMÉRICA E RESULTADOS

Para o estudo do caso assumiu-se $q = 2{,}5$ N/mm, $l = 5000$ mm, $I_z = 4{,}5.10^8$ mm^4 e $E_{cs} = 26071{,}6$ MPa para obter a solução analítica e numérica da equação (2). Foi aplicado o *Método das Diferenças Finitas* (MDF) explícito, conforme [2], com $dx = 0{,}9998$ mm, para encontrar a solução numérica, onde desenvolveu-se um algoritmo no *Matlab*.

A Tabela 1 apresenta a comparação entre a solução numérica e a analítica, em que a deflexão máxima ocorreu em $x = 2107{,}68$ mm..

$x_n\ (mm)$	$w_n\ (mm)$	$y_n\ (mm)$	Erro percentual (%)
0	0	0	0
1107,7784	-0,53757172	-0,53757175	0,00000659
2107,5784	-0,72132034	-0,72132043	0,00001194
3107,3785	-0,55415340	-0,55415356	0,00002790
4107,1785	-0,19205997	-0,19206021	0,00012539
5000	0	0	0

Tabela 1 - Comparação dos resultados numéricos e analíticos.

A Figura 2, ilustra o modo com que a deflexão ocorre na viga analisada, em que o deslocamento máximo, flecha, ocorreu na posição x =2107,68 mm, a partir do apoio a, e nos apoios não ocorre deflexão.

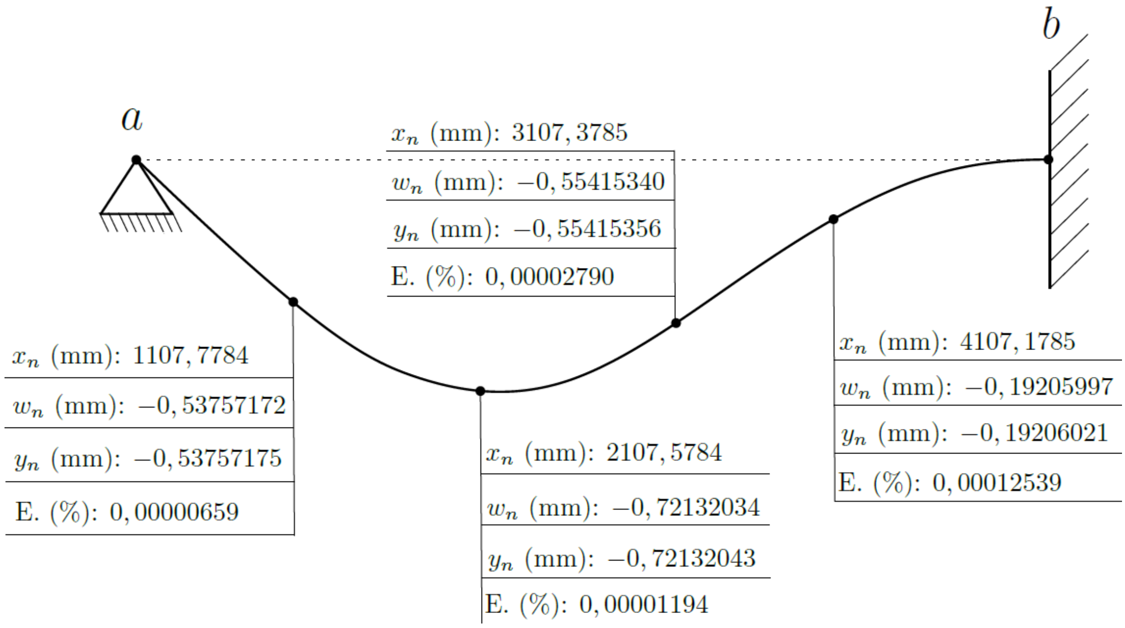


Figura 2 - Deflexão no eixo longitudinal da viga apoiada-engastada.

Para melhor visualização marcou-se os pontos ao longo do vão da viga com seus respectivos resultados numéricos w_n e analíticos y_n .

4 I CONCLUSÃO

Pelo fato de a viga ser do tipo apoiada-engastada, essa não sofre deslocamento nas extremidades e não ocorre giro na extremidade direita como indica as condições de contorno, o que faz com que a flecha, ou seja, a deflexão máxima, não ocorra no meio do vão.

A partir daí, implementou um algoritmo no *Matlab* baseado no Método das Diferenças Finitas, onde foi possível obter a solução numérica, w_n e ao comparar com a solução analítica, y_n. Percebe-se que, obteve-se um resultado satisfatório, devido ao baixo erro percentual, mostrando o bom desempenho do algoritmo e verificando a eficiência do método.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Campo Mourão (UTFPR-CM), que proporcionou a possibilidade desse estudo. O primeiro e terceiro autor, agradecem ao Professor Orientador Dr. Adilandri Mércio Lobeiro pela orientação. Agradecemos ainda, a Atena Editora pela oportunidade de publicar esse trabalho.

REFERÊNCIAS

[1] F. P. Beer e E. R. Johnston Jr. **Resistência dos Materiais**, 3 ed. MAKRON Books, São Paulo, 1996.

[2] R. L. Burden e J. D. Faires. **Análise Numérica**. Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2003.

[3] R. C. Hibbeler. **Resistência dos Materiais**, 3 ed. Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2000.

CAPÍTULO 17

ESTUDO DE FUNÇÕES COM O USO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 03/04/2020

Felipe Klein Genz
Instituto Federal Farroupilha – campus São Borja
São Borja – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/7214005764022633

Odair Menuzzi
Instituto Federal Farroupilha – campus São Borja
São Borja – Rio Grande do Sul
http://lattes.cnpq.br/6035158938431316

RESUMO: As Tecnologias Digitais estão cada vez mais presentes na realidade dos educandos, porém tem muito a ser utilizado nas aulas visando a aprendizagem matemática. Em vista disso, este trabalho propõe a construção e análise de funções polinomiais de primeiro grau com o auxílio das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), visando compreender o comportamento desta função a partir da interação com o software. Para a construção e estudo dos gráficos, foram utilizados os softwares Calc (livre) e Excel (pago), nos quais é possível desenvolver planilhas que auxiliam na observação das raízes e na comparação dos gráficos. A utilização destas ferramentas pedagógicas permite que o professor assuma um papel mais ativo e mediador em sala de aula, instigando o aluno a criar seus próprios conceitos a partir do que é analisado no software. Assim, cabe ao docente apenas concretizar o conhecimento adquirido pelo educando. Portanto, o uso das TICs nas aulas de matemática motivam de forma positiva alunos e professores, proporcionando aulas mais dinâmicas e interativas, despertando o interesse do aluno e possibilitando novas maneiras de ensinar e aprender.

PALAVRAS-CHAVE: TICs; ensino-aprendizagem; matemática.

STUDY OF FUNCTIONS WITH THE USE OF TOOLS COMPUTERS

ABSTRACT: Digital Technologies are increasingly present in the reality of students, but there is much to be used in classes aimed at mathematical learning. In view of this, this work proposes the construction and analysis of polynomial functions of the first degree with the help of Information and Communication Technologies (ICTs), aiming to understand the behavior of this function from the interaction with the software. For the construction and study of the graphs, the software Calc (free) and Excel

(paid) were used, in which it is possible to develop spreadsheets that assist in the observation of the roots and in the comparison of the graphs. The use of these pedagogical tools allows the teacher to assume a more active and mediating role in the classroom, instigating the student to create his own concepts from what is analyzed in the software. Thus, it is up to the teacher to concretize the knowledge acquired by the student. Therefore, the use of ICTs in mathematics classes positively motivates students and teachers, providing more dynamic and interactive classes, arousing student interest and enabling new ways of teaching and learning.
KEYWORDS: ICTs; teaching-learning; mathematic.

1 I INTRODUÇÃO

O uso das TICs (Tecnologias de Informação e Comunicação) está ligado a todas as áreas da vida, inclusive nas escolas, devido ao aumento da disponibilização e facilidade de acesso de equipamentos e programas computacionais. Segundo Ribeiro e Paz (2012) os docentes devem utilizar as novas tecnologias como aliados no processo de construção do conhecimento e ensino da Matemática. Para Oliveira, Moura e Souza (2015), o uso de recursos tecnológicos no processo de ensino é necessário para propor aulas diferenciadas e atrativas, proporcionando aos alunos novas experiências de ensino. Além disso, devido a forma dinâmica que os computadores funcionam, o seu uso pode despertar o interesse e entusiasmar os educandos a estudar. (BORBA, 2016).

O trabalho propõe a construção de funções e suas análises através de planilhas em softwares livres e pagos. A partir disso, construiu-se planilhas para as funções polinomiais de primeira ordem $y = ax + b$ e segunda ordem $y = ax^2 + bx + c$, que também são encontradas no blog Trabalhando com Funções, onde os alunos constroem suas próprias funções de maneira simples.

2 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para a construção desses ambientes foram utilizadas planilhas Calc que são gratuitas e planilhas do Excel que é um software pago. Na Figura 1 pode-se observar a entrada de dados e a estrutura que o aluno constrói. As cores e as informações ficam a critério de cada estudante, contudo alguns aspectos são obrigatórios como a entrada dos coeficientes e as condições de existência de cada função.

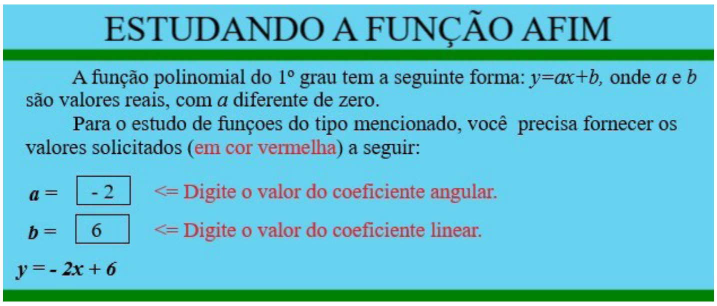


Figura 1: Entrada de coeficientes para uma função afim.

Na Figura 2 tem-se a solução gráfica para a entrada da Figura 1. Nesta etapa é importante o professor instigar o aluno a perceber o que muda quando colocamos valores positivos e negativos para o coeficiente angular, a mesma análise para o coeficiente linear.

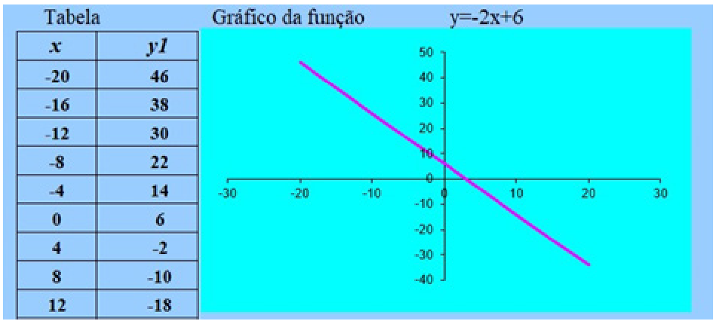


Figura 2: Representação gráfica da função afim para os coeficientes digitados.

O uso de TICs nas aulas de matemática motivam de forma positiva alunos e professores, proporcionando tanto curiosidade quanto apreensão pela possibilidade de experimentar uma nova maneira de ensinar e aprender. Nesta perspectiva, a utilização de mídias e tecnologias nas aulas deixa de ser um fator diferencial e se torna uma necessidade.

REFERÊNCIAS

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2016. 104 p.

OLIVEIRA, C.; MOURA, S. P.; SOUSA, E. D. **TIC's na Educação: A Utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação na Aprendizagem do Aluno**. Revista Pedagogia em Ação, V. 7, N. 1, p. 75 – 94, dez. 2015.

RIBEIRO, F. M.; PAZ, M. G. **O ensino da matemática por meio de novas tecnologias**. Revista Modelos – FACOS/CNEC Osório Ano 2, V. 2, N. 2, p. 12 – 21, ago. 2012.

CAPÍTULO 18

DIFUSÃO DE INOVAÇÕES: ANÁLISE DE UMA ABORDAGEM POR MEIO DE PROJETOS

Data de aceite: 05/06/2020

Cassio Cristiano Giordano
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
ccgiordano@gmail.com.

Douglas Borreio Maciel dos Santos
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
douglas.borreio@gmail.com.

Eliana Calixto Santos
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
elianacalixto@icloud.com.

Jailma Ferreira Guimarães
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo,
jailmaibicarai@hotmail.com.

RESUMO: Este artigo apresenta um estudo de caso envolvendo três turmas de alunos do Ensino Médio de uma escola estadual paulista, sobre o desenvolvimento de um projeto interdisciplinar de Matemática e Língua Portuguesa, analisado à luz do quadro teórico da Teoria da Difusão de Inovações. Pretendemos discutir as possíveis contribuições de uma abordagem por meio de projetos de temas curriculares aparentemente distantes, como funções trigonométricas e a estética literária do Romantismo, destacando a utilização do aplicativo para smartphones GeoGebra. Neste caso, a ponte entre essas duas disciplinas foi estabelecida por meio da música. A mediação tecnológica se deu por meio do acesso a músicas, vídeos, poemas e, sobretudo, pela exploração dos recursos algébricos e geométricos do GeoGebra. Consideramos, ao final do projeto, a experiência positiva, tanto nos aspectos atitudinais, como mobilização do interesse e motivação dos alunos, quanto nos aspectos cognitivos, expressos pela qualidade dos produtos finais dos trabalhos apresentados.

PALAVRAS-CHAVE: Difusão de Inovações, Projetos Interdisciplinares; GeoGebra.

ABSTRACT: This article presents a case study involving three classes of high school students from a state school in. On the development of an interdisciplinary project of Mathematics and Portuguese Language, analyzed under the theoretical framework of the Theory of the Diffusion of Innovations. We intend to discuss the possible contributions of an approach through projects of apparently distant curricular themes, such as trigonometric functions and the literary aesthetic of Romanticism, highlighting the use of the application for GeoGebra smartphones. In this case, the bridge between these two disciplines was established through music. Technological mediation took place through access to music, videos, poems and,

above all, by the exploitation of GeoGebra's algebraic and geometric resources. At the end of the project, we consider the positive experience, both in the attitudinal aspects, as the mobilization of interest and motivation of the students, as well as in the cognitive aspects, expressed by the quality of the final products of their researches presented.
KEYWORDS: Diffusion of Innovations, Interdisciplinary Projects; GeoGebra.

1 I INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta uma pesquisa sobre gestão e desenvolvimento de um projeto de parceria entre professores das disciplinas Matemática e Língua Portuguesa que utilizou como instrumento de mediação tecnológica o aplicativo para *smartphone GeoGebra*. Tal projeto foi realizado em 2016, em uma escola da rede estadual paulista, com alunos do Ensino Médio e explorou conteúdos de Literatura e Trigonometria, utilizando a Música como fio condutor. Embora os uso de *smartphones* por adolescentes não constitua, de modo algum, uma novidade, sua utilização no contexto da sala de aula representou uma inovação para aqueles alunos, uma vez que existe uma lei estadual paulista que inibe a presença de aparelhos de telefonia móvel em sala de aula. O objetivo foi o de identificar as possíveis contribuições de uma abordagem por meio de projetos interdisciplinares para o exploração contextualizada de temas curriculares: funções trigonométricas e a estética literária do Romantismo, utilizando como recurso tecnológico o aplicativo para *smartphone GeoGebra*.

O aplicativo *GeoGebra* foi desenvolvido como um *software* gratuito multiplataforma de matemática dinâmica para PCs pelo austríaco Markus Hohenwater, em 2001, com o propósito de ser utilizado em sala de aula, tanto no estudo de Álgebra quanto Geometria, integrando recursos gráficos, numéricos, simbólicos e até mesmo estatísticos. De fácil manipulação, por meio de sua interface gráfica possibilita construção e exploração de objetos matemáticos visualmente ou através de comandos de programação. Seu uso se disseminou rapidamente nas escolas do Ensino Fundamental, Médio e Superior, que reúne geometria, álgebra, cálculo e estatística.

Em nosso trabalho, os alunos exploraram o *GeoGebra*, a princípio, na representação algébrica e geométrica de funções trigonométricas envolvendo seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante. Rezende, Pesco e Bortolossi (2012) citam algumas vantagens no estudo de funções mediado pelo *GeoGebra*:

> No ***GeoGebra***, pontos podem ser criados sobre gráficos de funções de modo que, ao movê-los, eles continuem sempre sobre o gráfico da função. Os valores das coordenadas desses pontos podem ser então recuperados e usados em cálculos ou na criação de outros elementos geométricos (pontos, segmentos e retas). Esse tipo de recurso permite ao usuário estudar (graficamente, algebricamente e numericamente) como, por exemplo, características locais da função (taxas de variação média e instantânea) mudam de acordo com a posição do ponto sobre o gráfico da função. No ***GeoGebra***, funções podem ser definidas em termos de parâmetros. Estes, por sua vez, podem ser alterados dinamicamente através de controles deslizantes (***sliders)***. Esse tipo de recurso permite

> ao usuário visualizar e perceber como, por exemplo, características variacionais da função (crescimento, concavidade e extremos) mudam de acordo com esses parâmetros (REZENDE, PESCO e BORTOLOSSI 2012, p.78).

A princípio os alunos confirmaram por meio do *GeoGebra* o que haviam representado em papel milimetrado. Num segundo momento, pesquisaram sobre as aplicações de funções trigonométricas, em particular na transformada de Fourier. Finalmente, explorando as ferramentas do *GeoGebra*, modificando parâmetros por meio de controles deslizantes, elaboraram criações artísticas, apresentando-os em um painel e explicando para o público (outros alunos, professores, coordenação, direção, demais funcionários) como a figura foi gerada a partir de funções matemáticas. Isso ocorreu no encerramento do projeto, no momento de divulgação dos resultados de pesquisa, por parte dos alunos que desenvolveram o projeto.

Para analisar o desenvolvimento deste projetos recorremos à teoria da Difusão das Inovações, criada por Everett M. Rogers (1931- 2004). Ele nasceu em Carroll (Iowa), E.U.A., em uma família de agricultores, estudou agricultura na Universidade Estadual de Iowa, onde defendeu seu Doutorado em Sociologia e Estatística (1957), com tese sobre a resistência dos agricultores em Iowa às inovações em processos de produção. Trabalhou nas universidades Ohio State, Nacional da Colômbia, Estado de Michigan, Stanford, Sorbonne, Califórnia e Novo México. Focado no estudo da relação entre comunicação e implementação de novas aplicações tecnológicas, inicialmente no campo da agricultura americana, foi ampliando seu trabalho para as nações em desenvolvimento e inovação cenários mais amplos. Foi influenciado por Daniel Lerner e sua obra sobre a influência da mídia no processo de modernização, bem como Wilbur Schramm em seus estudos sobre comunicação para o desenvolvimento. Ao longo de sua carreira acadêmica publicou cerca de trinta livros, dos quais o mais conhecido é *Diffusion of Innovations*.

As primeiras pesquisas com Difusão de Inovações datam dos anos 40 aos 50 do século passado, investigando questões como aspectos sociológicos relacionados à implementação de inovações agrícolas. A principal motivação de Rogers, segundo ele mesmo, ao escrever o primeiro livro sobre este tema, Difusão de Inovações, em 1962, foi tentar descrever modelos de difusão em geral e promover maior conscientização em meio às pesquisas tradicionais, aquelas que, segundo ele resultam de uma série de investigações sobre um tema semelhante, no qual estudos sucessivos são influenciados pelas investigações anteriores, sendo, portanto, mais adequadas a reproduzir modelos que gerar inovações e romper paradigmas.

2 I METODOLOGIA

Realizamos uma pesquisa qualitativa, como definida por Bogdan e Biklen (1994), mais especificamente um estudo de caso, na concepção de Fiorentini e Lorenzato (2007).

Os sujeitos de pesquisa foram 104 alunos oriundos de três turmas da segunda série do Ensino Médio de uma escola estadual paulista, organizados em grupos de até seis alunos cada.

Buscamos identificar as possíveis contribuições de uma abordagem por meio de projetos dos temas curriculares funções trigonométricas, em Matemática e estética literária do Romantismo, em Língua Portuguesa, por meio da implementação e difusão do uso do aplicativo *GeoGebra*.

3 I O CONTEXTO DA PESQUISA

Durante os primeiros bimestres letivos de 2016, respeitando a proposta curricular da rede paulista (SÃO PAULO, 2012), a professora da disciplina Língua Portuguesa tinha o objetivo de abordar o movimento cultural do Romantismo, enquanto o professor de Matemática se debruçava sobre as questões de Trigonometria do material institucional Caderno do Aluno – V. 1 (SÃO PAULO, 2014). Eles buscavam um tema motivador para os seus alunos.

Acreditando na impregnação mútua dessas duas disciplinas, na concepção de Machado (2004), partindo de experiências prévias de parceria entre as duas disciplinas em projetos na mesma unidade escolar, resolveram desenvolver um projeto que aproximasse, novamente, Língua Portuguesa e Matemática. A partir dessa demanda, ouvindo os alunos, confrontaram elementos da música clássica e do *heavy metal*, tanto das letras quanto da harmonia, contando com a colaboração dos professores de Língua Inglesa, de Biologia e de Artes. Buscaram elementos culturais na História, nas Artes, na Biologia, na Filosofia e na Sociologia, além, é claro, da Língua Portuguesa e da Matemática, como sugere Fazenda (2008, p.25) num contínuo "... navegar entre dois polos – da pesquisa de sínteses conceituais dinâmicas e audazes à construção de formas de intervenção diferenciadas". Valorizaram a historicidade do *heavy metal* e sua forte influência do ultrarromantismo, como sugere Christe (2010). Alguns poemas de nossa literatura foram selecionados para comparação de elementos similares encontrados em músicas clássicas e *heavy metal*, como podemos observar nos Quadros 1 e 2, a seguir:

Intertextualidade: exemplo de exploração

Tema do Romantismo	Poema	Música Erudita	*Heavy Metal*
Morbidez	"Noturno" **Fagundes Varella**	"Danse macabre" **Camille Saint Seaëns**	"Dance of death" **Iron Maiden**
Nacionalismo	"Canção do Exílio" **Gonçalves Dias**	"Polonaise" **Fréréric Chopin**	"Exiled" **Judas Priest**
Infância	"Meus oito anos" **Casimiro de Abreu**	"Träumerei" **Robert Schumann**	"Forever" **Stratovarius**
Paixão	"Luar de verão" **Álvares de Azevedo**	"Sonata ao Luar" **Ludwig van Beethoven**	"Parisiense Moonlight" **Anathema**

Quadro 1 – Exploração de intertextualidade entre Literatura e Música

Fonte: Autoria própria

Língua Portuguesa & Música

Estética Literária do Romantismo

- Liberdade de criação (I)
- Liberdade de expressão (II)
- Nacionalismo (III)
- Historicismo (IV)
- Medievalismo (V)
- Tradições populares (VI)
- Egocentrismo (VII)
- Pessimismo (VIII)
- Escapismo (IX)
- Crítica social (X)
- Ultrarromantismo (XI)

Hard Rock & Heavy Metal

- Symphonic Metal (I)
- Progressive Metal (II)
- Viking & Celtic Metal (III)
- Folk Metal (IV)
- Medieval Metal (V)
- Pagan Metal(VI)
- Grunge (VII)
- Doom Metal (VIII)
- Power Metal (IX)
- Punk (X)
- Death Metal (XI)

Quadro 2 – Comparação: Estética Literária do Romantismo e música Hard Rock /Heavy Metal

Fonte: Autoria própria

Paralelamente, buscaram um contexto para a aplicação das funções trigonométricas, como as curvas senoidais. Novamente, valorizando a historicidade, trouxeram para as aulas a contribuição das séries de Fourier, com aplicações nas artes, em especialmente na música, pois como nos lembra Reginatto e Menoncini (2016, p.1): "[...] a matemática possui aplicações em diferentes áreas do conhecimento, inclusive em áreas que muitas vezes não se imagina estar presente, como é o caso da música".

Para atingir tais objetivos, utilizaram o aplicativo para *smartphones GeoGebra*. Embora a exploração do mesmo por meio de *desktops*, *notebooks* ou, na pior das hipóteses, *tablets*, fosse mais adequada, uma vez que não dispunham do recurso da sala de informática, com a autorização da direção da unidade escolar (pois o uso de aparelhos celulares é, a princípio, proibida nas escolas estaduais paulistas), orientaram os alunos a baixar tal aplicativo para seus *smartphones*. Abar (2014) recomenda, para fins educacionais, o *software*/aplicativo livre e gratuito *GeoGebra*:

> [...] por seu manuseio simples e dinâmico que dá aos alunos a possibilidade de explorar, visualizar, elaborar conjecturas, analisar, verificar ideias, redescobrir e construir novos conhecimentos sem limites para a sua curiosidade e criatividade. [...] o programa *GeoGebra* tem sido aceito e difundido rapidamente, por sua facilidade de uso e variedade

> de ferramentas, que permitem manipular construções geométricas, expressões numéricas, algébricas ou tabulares, descobrir relações e propriedades matemáticas, o que gera motivação para investigar e aprofundar aplicações. (ABAR, 2014, p. 5-6)

Explorações similares já foram realizadas por outros pesquisadores em nossa área, como aquelas realizadas por Bulegon e Trevisan (2016), abordando a Física (acústica) e a Matemática (funções trigonométricas). Os alunos, organizados em grupos de até seis alunos, investigaram história e aplicações cotidianas das séries de Fourier, como a digitalização das músicas baixadas para celulares, com vantagens, como redução do tamanho do arquivo. Tentaram responder questões como: "Quem foi Jean-Baptiste Joseph Fourier?"; "O que são séries de Fourier?"; "O que é uma transformada de Fourier?"; "Quais as aplicações artísticas da transformada de Fourier?"; "Qual o papel da transformada de Fourier na digitalização da música?"; "Qual o papel da transformada de Fourier na geração de imagens artísticas criativas?"; "Que imagens podemos criar utilizando o *GeoGebra*?". Pesquisaram sobre aplicações artísticas visuais das transformadas de Fourier, como aquelas encontradas no site Fourier Art (http://www.fourierart.com/).

Figura 1 – Representações artísticas geradas por combinações de funções trigonométricas

Estes alunos, sob orientação dos professores de Matemática e Língua Portuguesa, apresentaram os resultados de sua pesquisa em um painel, na concepção de Severino (2007). Neste painel, apresentaram: uma letra de música no estilo *heavy metal*, traduzida, comparando-a, obrigatoriamente, com uma poesia ou trecho em prosa da estética literária do Romantismo, e opcionalmente, com música clássica do movimento do Romantismo; análise intertextual, comparando ambos; aplicação cotidiana das séries de Fourier; representação gráfica de caráter artístico, criada a partir do *software*/aplicativo *GeoGebra;* apresentação comentada da função que gerou, por meio do *GeoGebra*, tal representação artística.

Ao fundo, no telão do anfiteatro da escola, um *Datashow* projetava vídeos com músicas clássicas e *heavy metal*, que contemplavam a estética literária do Romantismo. Alunos das demais turmas do período matutino dessa unidade escolar, bem como professores e equipe de gestão escolar, participaram da apresentação, com perguntas e comentários sobre as pesquisas ali expostas.

Finalmente, no encerramento das apresentações, houve uma apresentação de dança, orientada pela professora de Artes, com alunos vestidos com roupas que caracterizavam tanto o estilo *heavy metal*, quanto o período do Romantismo (séculos XVIII e XIX).

A possibilidade de tratar assuntos tão distantes, alguns mesmo ausentes, no currículo formal da rede estadual paulista se deu graças às características típicas da abordagem por meio de projetos interdisciplinares.

4 I INTERDISCIPLINARIDADE E A ABORDAGEM POR MEIO DE PROJETOS

Interdisciplinaridade é uma palavra polissêmica de difícil definição. Defini-la reflete uma dada perspectiva de educação. Fazenda (2008), afirma que:

> A pesquisa interdisciplinar somente torna-se possível onde várias disciplinas se reúnem a partir de um mesmo objeto, porém é necessário criar uma situação problema no sentido de Freire (1974), onde a ideia nasça da consciência comum, da fé dos investigadores no reconhecimento da complexidade do mesmo e na disponibilidade destes em redefinir o projeto a cada dúvida ou a cada resposta encontrada. Nesse caso, convergir não no sentido de uma resposta final, mas para a pesquisa do sentido da pergunta inicialmente enunciada (FAZENDA, 2008, p. 27).

Essa leitura de pesquisa interdisciplinar vai ao encontro das propostas apresentadas no PCN para o Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 2000), a respeito da organização de um núcleo comum de temas matemáticos a serem abordados em uma turma de Ensino Médio:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (BRASIL, 2000, p. 43).

Nossa geração de professores se formou discutindo interdisciplinaridade. Contudo, na prática, os projetos interdisciplinares se limitavam, em sua maioria, à soma de iniciativas individuais isoladas. Era comum definir um tema gerador e distribuir tarefas. Nossa perspectiva não é essa, mas sim a de Tomaz e David (2012), segundo a qual a abordagem intersciplinar dos conteúdos de ensino:

> [...] ajudaria a construir novos instrumentos cognitivos e novos significados, extraindo da interdisciplinaridade um conteúdo constituído do cruzamento de saberes que traduziria os diálogos, as divergências e confluências e as fronteiras das diferentes disciplinas. Supõe-se que construiríamos, assim, novos saberes escolares, pela interação entre as disciplinas (TOMAZ e DAVID, 2012, p. 17).

Uma forma de buscar tal interdisciplinaridade e contextualização é a proposta de trabalho por meio de Projetos de Aprendizagem. Porciúncula-Samá (2015) expõem que:

> Segundo Hernández (1998), projeto não é uma metodologia, mas uma forma de refletir sobre a escola e sua função. [...] Em Fagundes, Sato e Laurindo-Maçada (1999) encontramos a proposta pedagógica de Projetos de Aprendizagem, a qual busca o engajamento dos estudantes a partir do que estes já sabem e de seus interesses. [...]

> Projetos de Aprendizagem podem ser uma estratégia pedagógica para o Letramento Estatístico (PORCIÚNCULA; SAMÁ, 2015, p. 134-135).

Pensando assim, organizamos uma abordagem por meio de projetos para, no campo da interdisciplinaridade, tratar assuntos aparentemente tão distintos, como trigonometria e literatura. Segundo Machado (1993), existe uma relação de complementaridade e de impregnação mútua entre Língua Materna (polissêmica) e Matemática (sem ambiguidades), contemplando as orientações presentes na Proposta Curricular do Estado de São Paulo:

> A Matemática compõe com a Língua Materna um par fundamental, mas de caráter complementar: é impossível reduzir um dos sistemas simbólicos ao outro. Se uma língua se aproximar demasiadamente do modo de operar da Matemática, resultará empobrecida, e o mesmo poderia ocorrer com um texto matemático que assumisse a ambivalência, apropriada apenas à expressão linguística. A multiplicidade de sentidos em um mesmo elemento simbólico ou combinação de elementos é própria da língua natural e é intencionalmente controlada na expressão matemática (SÃO PAULO, 2010, p.33).

Ele considera fundamental para o ensino e aprendizagem de Matemática o reconhecimento da complementaridade Matemática/Língua Portuguesa:

> Entre a Matemática e a Língua Materna existe uma relação de impregnação mútua. Ao considerar-se esses dois temas enquanto componentes curriculares, tal impregnação se revela através de um paralelismo nas funções que desemprenham, uma complementaridade nas metas que perseguem, uma imbricação nas questões básicas relativas ao ensino de ambas. É necessário reconhecer a essencialidade dessa impregnação e tê-la como fundamento para a proposição de ações que visem a superação das dificuldades com o ensino de Matemática (MACHADO, 1993, p.10).

Assim, o estudo da Língua Materna auxiliaria a aprendizagem de Matemática. Em contrapartida, Fux (2010, p.12) ressalta a importância da Matemática no estudo da Língua Materna, mais especificamente da Literatura, ao afirmar que que “Unir matemática e literatura pode ser uma forma de utilizar a ciência como uma nova lógica, um novo conceito, uma nova sustentação e potencialidade da literatura [...]”. E o autor vai mais além, ao extrapolar as fronteiras desses dois campos do conhecimento humano:

> A negação da escrita automática e a visão do escritor como um trabalhador de palavras, acompanhadas da utilização consciente da matemática, não almejam tanto responder aos problemas que a matemática e a literatura colocam, mas sim levantar outras questões, sejam estruturais, sejam ficcionais. (FUX, 2013, p.246)

5 I DIFUSÃO DE INOVAÇÕES

Nosso referencial teórico é a Teoria da Difusão das Inovações, de Rogers (2003). Difusão é um processo no qual uma inovação é comunicada por meio de certos canais ao longo do tempo, entre membros de um sistema social. É um tipo especial de comunicação no qual as mensagens se referem à novas ideias. Comunicação é um processo no qual cada participante cria e compartilha informações com um outro, de forma à atingir uma compreensão mútua.

Alguns autores limitam o termo difusão à processos espontâneos, não planejados, de disseminar novas ideias. Rogers (2003, p.5) utiliza difusão para os dois casos (planejado e espontâneo). Aliás, esse autor não considera que suas ideias constituam uma teoria, de fato. No entanto, a publicação de centenas de investigações fundamentadas na Difusão de Inovações a consagraram como um sólido quadro teórico para pesquisa acadêmica, como observam Giacomini Filho, Goulart e Caprino (2008):

> Conquanto muitos autores apresentem os estudos de Rogers como "Teoria" da Difusão de Inovações (LEE e SCHUMMAN, 2002, SURRY, 1997, FRANK *et al*, 2004) o próprio autor não tem denominado seus estudos como "teoria" [...] Difusão é o processo pelo qual uma inovação é comunicada por certos canais dentre os membros de um sistema social. [...] Aliás, Rogers, ao atribuir tal conceito de "difusão" torna o termo equivalente à comunicação. (GIACOMINI FILHO, GOULART e CAPRINO, 2008, p.42)

Dentre os principais elementos que caracterizam a Difusão de Inovações, Rogers (2003) destaca: I – **Inovação**: uma ideia, prática ou objeto percebido como novo por um indivíduo ou grupo; II – **Canais de Comunicação**: meios pelos quais uma mensagem é transmitida de um indivíduo a outro; III – **Tempo**: necessário para produzir uma inovação, para transmiti-la e para que ela seja aceita; IV – **Sistema Social**: Conjunto de unidades inter-relacionadas envolvidas na resolução conjunta de problemas, buscando alcançar um objetivo comum; V – **Agente de Mudança**: Pessoa externa ao sistema, com conhecimentos sobre a inovação, com papel de transmitir esse conhecimento aos demais.

Segundo Faria e Abar (2011) a inovação é percebida com as características:

> [...] vantagem relativa (conveniência, satisfação, prestígio social), ou seja é "o grau pelo qual uma inovação é percebida como sendo melhor do que a idéia que a precede" (ROGERS, 2003, p. 15). Quanto maior a vantagem relativa é percebida, mas rápida ela será adotada; compatibilidade: é o nível de percepção consistente com os valores pessoais, as experiências passadas e as necessidades dos adotantes em potencial; complexidade: é o grau de percepção de dificuldade para entender e usar a inovação; experimentação: nível de testagem de uma inovação, o que determinará a intensidade do grau incerteza para o indivíduo que está considerando a possibilidade de adoção da inovação; observabilidade: a facilidade de se observar os resultados da inovação. (FARIA e ABAR, 2011, p.3)

Abar (2015) associa as inovações à abordagem por meio de projetos:

> Pesquisas, como a de Motejunas (1980), Cardoso (1997) Fullan e Hargreaves (2000), Hernandez *et al* (2000), Farias (2006) e Fullan (2009), entre outras, fazem referências a mudanças que acontecem na escola por meio da reestruturação curricular, pela inserção de novos métodos de ensino ou pela implementação de projetos. (ABAR, 2016, p.725)

Faria (2012) complementa:

> Muitas dessas iniciativas de inovação têm origem em instituições governamentais ou particulares, outras são formuladas pela escola e, ainda, existem aquelas que emergem dos anseios dos próprios professores. A inserção da informática na escola ou a adoção de novos métodos de ensino são situações que promovem discussões acerca da entrada e da permanência da inovação no meio educacional (FARIA, 2012, p. 14)

Essa autora acrescenta que quando as decisões são adotadas verticalmente possuem pouco grau de adesão na comunidade escolar, sobretudo dos professores. Na unidade escolar alvo de nossa pesquisa, a opção por trabalhar com projetos, particularmente aqueles que envolvem Matemática e Língua Portuguesa, surgiu do reconhecimento da necessicade de aproximar as duas disciplinas mediante o reconhecimento das dificuldades dos alunos do Ensino Médio, em especial no que se refere às suas habilidades de letramento, e se fortaleceu com a anuência dos alunos, quando consultados sobre essa proposta.

A escolha pela abordagem por meio de projetos não é nada inovadora, de um modo geral, mas como Rogers (2003, p.12) observa, a inovação não precisa ser um aideia objetivamente nova, mas deve ser percebida como tal por um indivíduo ou unidade de adoção. A esse respeito, Giacomini Filho, Goulart e Caprino (2008) observam:

> Uma inovação é uma ideia, prática ou objeto que é percebido como novo [...]. Uma contribuição substantiva de Rogers se refere ao conceito de “reinvenção”, que seria o grau que uma inovação é mudada ou modificada por um usuário no processo de adoção e implementação (GIACOMINI FILHO, GOULART e CAPRINO, 2008, p.43-44)

Hoje as contribuições da pesquisa em difusão são impressionantes. Rogers (2003) ressalta, no entanto, que embora no início ela tenha oferecido importantes e criativas contribuições sobre técnicas de pesquisa, conceitos, metodologias, formulação de hipóteses, acabou por se tornar, por ironia, um campo de pesquisa tradicional. As quatro maiores críticas à ela são: I – **O viés pró-inovação**: a crença de que uma inovação pode ser difundida e assimilada rapidamente por todos os membros de um sistema social; II – **O viés da culpa individual**: atribuir a um indivíduo a responsabilidade pelos problemas de um dado sistema social; III- **O problema da recordação**: imprecisões quando os respondentes precisam informar em que momento cada um adotou uma nova ideia; IV – **A questão da igualdade**: lacunas socioeconômicas entre membros de um sistema social muitas vezes se alargam como resultado da propagação de novas ideias.

Rogers (2003) sugere a classificação dos membros de um sistema social em categorias de adotantes, de acordo com o grau de inovatividade de cada um. A adoção de categorias é um processo de tomada de decisão individual em um sistema social. Ele elenca, nesse processo, cinco categorias distintas, a saber: I – **Inovadores**: normalmente os primeiros a adotar inovações, (representam 2,5% do total de unidades do sistema); II – **Adotantes iniciais**: mais integrados ao sistema social, em geral são respeitáveis e integram o grupo de formadores de opinião. (representam 13,5% do total); III – **Maioria inicial**: Se caracterizam pela ponderação. Os que decidem pela adoção somente quando os resultados estão bem comprovados e os riscos são toleráveis. (34% do total); IV – **Maioria tardia**: os integrantes desse segmento adotam a inovação depois que a maioria do sistema já o fez - são os conservadores. (34% do total); V – **Retardatários**: são os últimos a adotar a inovação, em geral resistentes **às** mudanças, e provavelmente adotam a inovação somente quando não têm outra escolha. (16% do total), como podemos observar na figura 2:

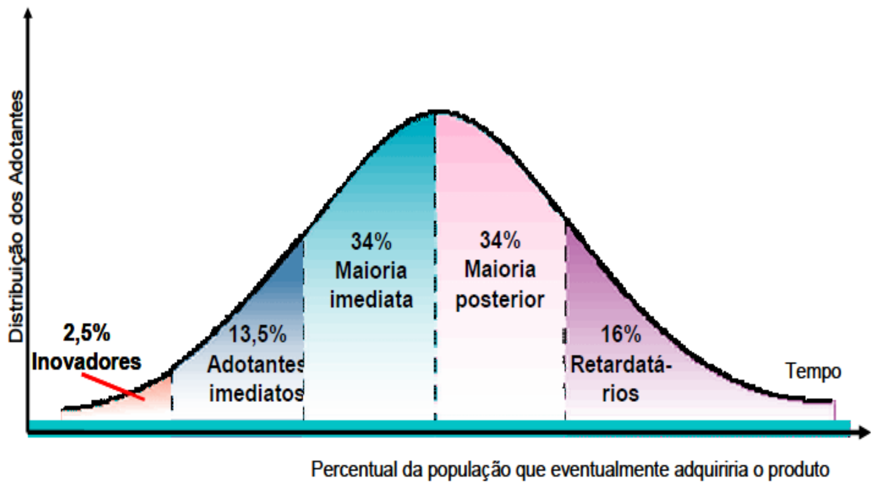


Figura 2 - Sequência e Proporção das categorias de adotantes entre a população que eventualemnte adotaria a idéia.

Fonte: Rogers, 2003

A curva de difusão nos mostra o processo de adoção de inovações no tempo:

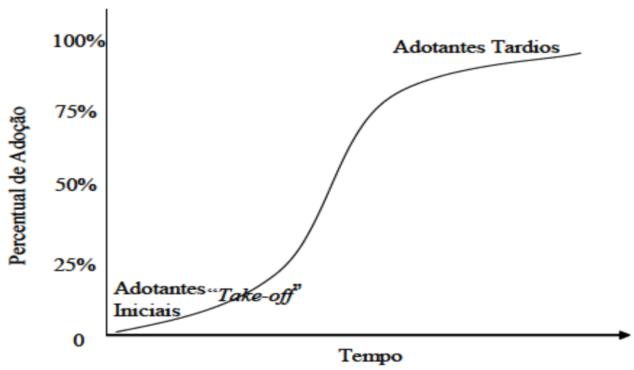


Figura 3 - Curva de difusão

Fonte; Rogers, 2003

Quanto às características das categorias de adoção, Rogers (2003) destaca as categorias socioeconômicas, variáveis de personalidade, comunicação e comportamento.

Um papel de destaque é dado aos líderes responsáveis pela implementação das inovações. Aqui, a liderança de opinião é considerada como um estágio em que um indivíduo é capaz, informalmente, de influenciar a atitude e o comportamento de outros indivíduos com relativa frequência.

Outro aspecto importante para a compreensão desse processo é o fator hemophilia x heterofilia. Evidencia-se, aqui, a comunicação pela característica da *homofilia*, ou seja, "o nível em que dois ou mais indivíduos que interagem são semelhantes em determinados atributos, tais como crenças, educação, situação socioeconômica, e assim por diante"

6 I DIFUSÃO DE INOVAÇÕES E CONSEQUÊNCIAS

As consequências são as mudanças que ocorrem a um indivíduo ou a um sistema social como resultado da adoção ou rejeição de uma inovação. Podem ser classificadas em: I - **Desejáveis** - são os efeitos funcionais de uma inovação; II - **Indesejáveis** – são os efeitos disfuncionais de uma inovação; III - **Diretas** – são as consequências que ocorrem em resposta imediata à adoção de uma inovação; IV - **Indiretas** - são as mudanças que ocorrem como resultado da adoção direta de consequências de uma inovação.

7 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Projetos interdisciplinares oferecem oportunidade para os alunos desenvolverem diversas habilidades de letramento. Soares (2003) nos lembra que:

> [...] letramento é também um contínuo, mas um contínuo não linear, multidimensional, ilimitado, englobando múltiplas práticas, com múltiplas funções, com múltiplos objetivos, condicionados por e dependentes de múltiplas situações e múltiplos contextos, em que consequentemente são múltiplas e muito variadas as habilidades, conhecimentos, atitudes de leitura e de escrita [...]. (SOARES, 2003, p. 95)

Além de possibilitar desenvolvimento de tais habilidades, o desenvolvimento desse projeto permitiu promover autonomia dos alunos. Para a maioria deles, foi a primeira experiência com apresentação em formato painel.

A opção por trabalhar com projetos permitiu a manifestação de diferentes habilidades por diferentes alunos, cada um dando a sua contribuição à sua maneira, contemplando aqueles que lidavam melhor com música, literatura, desenho artístico, desenho geométrico, história, informática, matemática. Eles puderam, ainda, explorar os recursos do *GeoGebra*, utilizando, autorizadamente, seus *smartphones*, geralmente proibidos nas escolas estaduais paulistas. Como já dissemos, o uso de *smartphones* não foi novidade para eles, mas sim o seu uso numa situação didática. Os canais de comunicação foram a rede de relações interpessoais entre alunos e professores no contexto da sala de aula bem como pelas redes sociais *WhatsApp* e *Facebook/Messenger.*

Os adotantes iniciais coincidiram com as lideranças intelectuais de cada grupo, já identificadas por meio de seu desempenho escolar pelos professores de Língua Portuguesa e Matemática. O sistema social envolvido foi a rede de inter-relações constituido, *a priori*, pelos professores de Lingua Portuguesa e Matemática, considerados aqui como agentes de mudança, e seus alunos do segundo ano do Ensino Médio, mas se estendeu, no decorrer do processo, a outros professores, funcionários, coordenação, direção, alunos de outras turmas e familiares, que tiveram acesso ao projeto, em maior ou menor grau, tanto em sua construção quando na apresentação final do painel.

Uma das críticas mais contundentes sofridas pela teoria da Difusão das Inovações se refere à questão da igualdade social: as lacunas socioeconômicas entre membros de um sistema social poderiam aumentar como resultado da propagação de novas ideias. Quando pensamos em utilizar o *GeoGebra* em *smartphones*, para compensar a ausência de uma sala de informática na unidade escolar, tomamos o cuidado de fazer um levantamento junto aos alunos para garantir que em cada grupo existisse ao menos um aparelho com este aplicativo instalado. Para nossa surpresa todos os alunos, sem exceção, possuiam smartphones com sistema *Android*, *IOS* ou *Windows Phone*, embora muitos relutassem em instalar, contando que alguém no grupo o faria e garantiria a nota. Somente com a insistente visita de orientação grupo a grupo pudemos superar a relutância daqueles que resistiam à instalação do aplicativo sem justificativa séria. Uma vez que o aplicativo era gratuito, leve e poderia facilmente ser desisntalado após o projeto, porque não fazê-lo? Mas acreditamos que muitos não queriam instalá-lo para não ser copbrado pelos colegas em termos de produtividade. Entretanto quando alguns começaram ser ameaçados de ser desligados de seus grupos pelos próprios colegas essa reistência da maioria tardia e sobretudo dos retardatários foi resolvida.

A principal consequência desejável da adoção desta inovação foi constatada em 2017 quando, já no terceiro ano do Ensino Médio e estudando conteúdos Matemática de Geometria Analítica, cerca de 70% dos alunos voluntariamente utilizaram o *GeoGebra* para resolver problemas ou confirmar resultados. Quando os primeiros alunos pediram orientações sobre o uso do aplicativo nas novas questões e foram incentivados pelo professor, foram rapidamente seguidos pela maioria da turma. A principal consequência indireta foi o uso do *GeoGebra* nas aulas de Física em uma turma de terceiro ano que teve aulas dessa disciplina com o antigo professor de Matemática do segundo ano.

8 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que iniciativas intercisciplinares que contemplem a pluralidade cultural, mediadas por tecnologias digitais, possam contribuir sobremaneira para a aprendizagem significativa de nossos alunos. Consideramos, ao final do projeto, a experiência positiva, tanto nos aspectos atitudinais, como mobilização do interesse e motivação dos alunos, quanto nos aspectos cognitivos, expressos pela qualidade dos produtos finais dos trabalhos apresentados, por meio de um painel, para a comunidade escolar.

REFERÊNCIAS

ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira. *GeoGebra – na produção do conhecimento matemático*. Ed. Iglu. São Paulo, 2014.

ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira. Model of Innovation: Process of Integrating Technology in Mathematics Education. *Acta Scientiae*, v. 18, n. 3, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares* *nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto, 1994.

BULEGON, Ana Marli; TREVISAN, Maria do Carmo Barbosa. *O uso do GeoGebra, Funções Trigonométricas e sons musicais como recursos motivacionais para o ensino de Acústica no ensino médio.* Anais da 6ª Conferência Latino Americana de Objetos de Aprendizagem LACLO 2011 - Disponível em http://docplayer.com.br/11071350-O-uso-do-geogebra-funcoes-trigonometricas-e-sons-musicais-como-recursos-motivacionais-para-o-ensino-de-acustica-no-ensino-medio.html. *Acesso em 27 de dezembro de 2017.*

CHRISTE, Ian. *Heavy Metal: a história completa*. São Paulo: Arx, 2010.

FARIA, Elisabeth Cristina de. *Do Ensino Presencial ao Ensino à Distância: A inovação na Prática Pedagógica de Professores de Matemática.* Tese de Doutorado em Educação Matemática. PUC/SP, 2012.

FARIA, Elisabeth Cristina de; ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira. A Difusão de Inovação em um curso de Licenciatura em Matemática na modalidade a distância. *Anais do10º Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sudeste*. UFRJ, 2011.

FAZENDA, Ivani. (Org.). *O que é interdisciplinaridade*. São Paulo: Cortez Editora, 2008.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 2. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2007.

FUX, Jacques. *Literatura e matemática: Jorge Luis Borges, Georges Perec e o OULIPO*. KBR Editora Digital, 2013.

GIACOMINI FILHO, G.; GOULART, E. E.; CAPRINO, M. P. Difusão de inovações: apreciação crítica dos estudos de Rogers. *Revista FAMECOS*, v. 14, n. 33, p. 41-45, 2008.

MACHADO, Nilson José. *Matemática e Língua Materna – 3ª ed*. Editora Cortez: São Paulo, 1993.

MACHADO, Nilson José. *Educação: projetos e valores*. 5. ed. São Paulo: Escrituras, 2004.

PORCIÚNCULA, Mauren; SAMÁ, Suzi. Projetos de aprendizagem: uma proposta pedagógica para a sala de aula de estatística. In. SAMÁ, S.; PORCIÚNCULA, M. (Orgs.). In: *Educação estatística: ações e estratégias pedagógicas no ensino básico e superior*. Curitiba: CRV, 2015.

REGINATTO, Junior J.; MENONCINI, Julia. *Série de Fourier e Aplicação*. Disponível em https://www.unochapeco.edu.br/static/data/portal/downloads/1434.pdf. *Acesso em 27 de dezembro de 2017.*

ROGERS, Everett. M. *Diffusion of Innovations.* 5th ed. New York: Free Press, 2003.

SÃO PAULO. Proposta curricular do Estado de São Paulo - Língua Portuguesa. São Paulo: SE/CENP, 2010.

SÃO PAULO. *Currículo do estado de São Paulo*: Códigos, Linguagens e suas tecnologias: ensino fundamental ciclo II e ensino médio. São Paulo: SE/CENP, 2012.

SÃO PAULO. *Proposta curricular*: caderno do aluno – ensino médio: matemática. São Paulo: IMESP, 2014. v. 1.

REZENDE, Wanderley Moura; PESCO, Dirce Uesu; BORTOLOSSI, Humberto José. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do *GeoGebra*. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657*, v. 1, n. 1, p. 74-89, 2012.

SEVERINO, Antônio Joaquim. *Metodologia do trabalho científico.* São Paulo: Cortez, 2007.

SOARES, Magda. Letramento e escolarização. In: RIBEIRO, V. M. (Org.). *Letramento no Brasil*. São Paulo: Global, 2003. p. 89-113.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

CAPÍTULO 19

PRÁTICAS TEATRAIS COMO ORGANIZADOR DIDÁTICO-PEDAGOGICO PARA O ENSINO-APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE NÚMERO

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 06/05/2020

Rizaldo da Silva Pereira
Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica
Belém-PA
Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/6404018682980903

Arthur Gonçalves Machado Júnior
Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica
Belém-PA
Currículo Lates: http://lattes.cnpq.br/3148593292236740
Orcid: https://orcid.org/0000-0002-9933-2894

RESUMO: O presente artigo apresenta uma proposta de trabalho para o ensino de matemática, por meio de práticas teatrais, que teve por objetivo investigar qual a contribuição dessas práticas para o processo de ensino-aprendizagem do conceito de número a partir das experiências vividas em uma turma de 1° ano do Ensino Fundamental em uma escola da rede pública municipal de Castanhal/Pa. A investigação foi orientada a partir de uma abordagem qualitativa do tipo observação participante. As atividades se desenvolveram em sala de aula e os dados foram coletados através de diário de bordo do pesquisador e de registros fotográficos. As lentes teóricas utilizadas para compreensão dos achados foram os estudos de Kamii, Piaget, Spolin, Reverbel, Neves e Santiago, entre outros. Constatou-se que as práticas teatrais são geradoras de uma ambiência agradável para o ensino-aprendizagem de matemática, em especial, para a construção do conceito escolar de número.

PALAVRAS-CHAVE: Práticas Teatrais; Ensino de Matemática; Conceito de Número.

THEATRICAL PRACTICES AS A DIDACTIC-PEDAGOGICAL ORGANIZER FOR THE TEACHING-LEARNING OF THE NUMBER CONCEPT

ABSTRACT: This article presents a work proposal for teaching mathematics, through theatrical practices, which aimed to investigate what is the contribution of those practices to the teaching-learning process of the concept of number from the experiences lived in a 1st year class of elementary public school in Castanhal/PA. The investigation was conducted based on a qualitative approach participating observation

type. All activities were developed in the classroom and the data were collected through the researcher's logbook and photographic records. The theoretical lenses used to understand the findings were the studies by Kamii, Piaget, Spolin, Reverbel, Neves and Santiago, among others. It was found that theatrical practices generate a pleasant environment for the teaching-learning of mathematics, especially for the construction of the school concept of number.
KEYWORDS: Theatrical Practices; Mathematics Teaching; Number Concept.

1 I INTRODUÇÃO

A Matemática sempre foi vista como uma disciplina complexa e de um alto grau de dificuldades para os alunos em todas as faixas etárias e níveis de ensino. Nesses termos, documentos oficiais, entre eles, Direitos de Aprendizagem (2012), Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1997) e Base Nacional Comum Curricular - BNCC (2017), apontam organizações de ensino com o propósito de produzir ambientes prazerosos, com o intuito de auxiliar na construção de conceitos matemáticos pelos alunos na interação com o professor, bem como desnaturalizar - criar outras formas, não com objetivo de abandonar, mas propor mudanças para melhor - o chamado "ensino tradicional/paradigma do exercício", conforme nos alerta Skovsmose (2007, 2008), herança de uma didática onde o professor era considerado o detentor do conhecimento e o aluno um mero receptor de um conhecimento pronto e acabado, onde o quadro e o giz eram os únicos recursos utilizados nesse processo de ensinar e aprender.

Entretanto, essa situação, com o decorrer do tempo, principalmente em função de uma nova configurarão social, a chamada sociedade da informação e da comunicação, necessitou de mudança de prática/postura por parte do professor, ou seja, passando de detentor do conhecimento para mediador deste, num processo em que o aluno com auxílio e não dependente do professor, possa ser capaz de buscar e de se apropriar dos conhecimentos eleitos pela escola para auxiliar em sua formação no espaço escolar (MORETTO, 2003).

Outra importante mudança está relacionada com o processo ensino-aprendizagem, que deixa de ter foco apenas na "alfabetização" - estudo dos objetos de conhecimento - e passa a adotar também o conceito de "letramento" - utilização dos objetos de conhecimento para compreensão de mundo -, não como processos estanques, mas como posturas/práticas imbricadas, ou seja, "o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas" (BRASIL, 2017, p. 222).

Ao considerarmos esse novo contexto educacional, para que o professor cumpra com seu papel de mediador dessa aprendizagem, faz-se necessário que conheça e se aproprie dos conteúdos e das práticas que possibilitem ensinar bem os alunos para que eles se apropriem desses conhecimentos e utilize-os em seus convívios sociais.

Nesses termos, selecionamos algumas atividades teatrais que foram aplicadas numa turma de primeiro ano de uma Escola Municipal do Ensino Fundamental, localizada na cidade de Castanhal/PA, que juntamente com o aporte teórico, os caminhos metodologicos utilizados no processo investigativo e as análises narrativas das situações em foco apresentaremos no decorrer da trama.

2 I TEATRO E EDUCAÇÃO

O teatro está presente na história do homem, das mais diferentes formas, desde os primórdios. Segundo Berthold, a arte teatral é tão antiga quanto à humanidade e surge da necessidade do homem de se expressar. Assim, relacionar o teatro com a educação não é algo novo. O primeiro relato sobre o uso da arte teatral na educação ocidental surge com os gregos, que enfaticamente valorizavam, além do teatro, a música, a dança, a escultura e a literatura (BERTHOLD, 2008).

Platão e Aristóteles, como nos alertam Neves e Santiago (2010), consideravam fundamental o uso do teatro na educação, apesar de expressarem divergências. Platão dizia que o teatro imita a realidade, já Aristóteles, afirmava que o teatro não imita os fatos, mas as ideias abstratas.

Já Richard Courtney (2010) inicia o primeiro capítulo de uma das obras que trariam as bases intelectuais para o teatro escolar – *Jogo, teatro e pensamento*, afirmando que a imaginação é característica essencial do homem e que a imaginação criativa é essencialmente dramática em sua natureza o que torna a atuação indispensável para conviver com o meio e compreende-lo. Nesses termos o autor sugere que a iniciação da criança com a dramatização ocorra logo nos primeiros contatos com a escola, com o mundo externo, com o desconhecido. Ressalta que esse contato não seja um contato qualquer, mas que tenha a finalidade de promover a aprendizagem (NEVES e SANTIAGO, 2010).

Rousseau (1979) talvez não tenha tido a intenção de estabelecer uma teoria sobre o uso de práticas teatrais para a organização do ensino, mas seus ensinamentos motivaram uma relação entre o teatro e a educação, contribuindo com o que hoje conhecemos por jogos teatrais, quando assevera que, a primeira educação da criança deveria ser trabalhada quase que inteiramente pelo jogo. Para o autor, jogo, são práticas relacionadas ao uso de instrumentos de variados ofícios, vivências e experiências que remetem a representação da realidade, contribuindo nesses termos, com um ensino de qualidade diferenciado para melhor.

3 I O TEATRO E O ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Novas formas de organizar o ensino da matemática são necessárias para que ocorram mudanças na forma como é vista e aprendida, em especial pelas crianças, para que de fato ensinamentos sejam construídos, num ambiente prazeroso e motivador. Não podemos continuar trabalhando com uma matemática afastada da realidade, de difícil compreensão, encarada como um mero conhecimento transmitido, e de constante memorização.

Documentos orientadores e mais recentemente a base nacional comum curricular (BRASIL, 2017), no que diz respeito ao ensino da matemática, tem auxiliado com a implementação de atividades diferenciadas de ensinar-aprender, dando ênfase a construção de conhecimentos a partir de metodologias que os alunos sejam os principais responsáveis por seus processos de aprendizagem, aprendizagem com significado, e, o professor orientador desse processo.

Aprender com significado, conforme Moreira e Masini (2001, p.17), "é um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo". Assim, essa aprendizagem se dá quando o indivíduo consegue abstrair novas informações para seu universo, a partir de informações que já tinha, ou seja, a aprendizagem se torna significativa quando o novo conhecimento é incorporado aos conhecimentos prévios do aluno, dando significado ao "novo" conhecimento a partir desse contato com o "velho" conhecimento.

Segundo Moreira (2003, p.6), duas condições são fundamentais para que essa aprendizagem ocorra. A primeira "é que o aluno tenha disposição para aprender e, a segunda é que o conteúdo seja de fato significativo".

> [...] matemática e redação são melhor assimilados quando a criança deseja fazê-lo; se conseguirmos obter a mesma vitalidade de que a criança dispõe em seus momentos de recreação e canalizá-la para suas lições, teremos a base de uma verdadeira e permanente educação. (COURTNEY, 2010, p. XIX).

Nesses termos, o fazer teatral, pode oferecer um ambiente capaz de levar o aluno, de forma espontânea, a estudar arte e outras áreas do conhecimento, em especial a matemática, valorizando essa relação entre conhecimento prévio e a busca por novos conhecimentos, possibilitando ao aluno esse acesso tão necessário para sua aprendizagem, segundo nos adverte Reverbel (1997, 2001).

4 I AS PRÁTICAS TEATRAIS NO PROCESSO DE AQUISIÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO

Uma das intenções deste trabalho é refletir sobre a inserção das práticas teatrais nas aulas de matemática como ferramenta do processo de ensinar-aprender do professor, em outras palavras, colocar em foco possibilidades de desenvolver a comunicação, a expressão corporal, o trabalho coletivo, associando aos contextos teatrais e aos conteúdos matemáticos, em especial relacionados ao conceito de número.

Nosso objetivo não é trabalhar a fundo com os conteúdos do teatro, mas com técnicas e conhecimentos básicos que podem contribuir com a organização didático-pedagógica da matemática, ou seja, que possam possibilitar a aproximação das atividades diárias dos alunos com a matemática, através das práticas teatrais.

Assim, entendemos que o teatro tem a capacidade de explicar à criança o mundo, através do entretenimento, da observação e da análise crítica, características que denota o quanto essa expressão artística tem relevância no desenvolvimento intelectual e na capacidade de auxiliar o sujeito a refletir sobre o mundo a seu redor. (SPOLIN, 2017)

Entretanto, para que haja realmente um significativo aproveitamento dessa prática em sala de aula é necessário que o educador tenha em mente, bem amarrados, seus objetivos e procedimentos, “os quais deverão ficar bem claros para o alunado, para que eles compreendam de fato cada etapa do trabalho a ser executado e se interessem em fazer parte dele” (CARTAXO, 2001, p. 65).

Deste modo, ao considerarmos o paradigma do exercício (Cf. SKOVSMOSE, 2007), ambiente hegemônico na maioria das escolas brasileiras, onde os alunos em sua grande maioria apenas internalizam/memorizam o novo conhecimento apresentado pelo professor, sem necessariamente atribuir sentido e significado a sua função social, percebemos um ambiente pouco propício para a construção do conceito de número pelo aluno, pois para esse fim, precisa perpassar por um longo caminho, que vai além da memorização.

Nesses termos, no que tange a construção do conhecimento pela criança, conforme os escritos de Kamii (2012), amparados nos estudos de Piaget, são necessários dois tipos de abstração: a empírica (ou simples) e a reflexiva (ou construtiva). Segundo o autor, o sujeito só poderá abstrair reflexivamente esse conceito caso tenha construído as relações de ordem e inclusão hierárquica, pois, o número em seus achados é uma síntese dessas duas relações que a criança elabora entre os objetos por abstração reflexiva (Cf. KAMII, 2012).

Na tentativa de criar condições para que se estabeleçam as relações necessárias para a abstração reflexiva capaz de propiciar a construção do conceito de número pela criança, é que apresentamos as práticas teatrais como ambiente capaz de proporcionar momentos prazerosos, ambiência propicia para esse fim.

5 I RELATANDO O CONTEXTO E OS SUJEITOS

O trabalho em foco tem como objetivo analisar a organização do professor e a compreensão do aluno frente o trabalho com o conceito de número em contextos de práticas teatrais. Como modalidades das práticas teatrais, utilizamos o jogo dramático (dramatização), o jogo teatral e a improvisação (FERREIRA e FALKEMBACH, 2012).

Assim a pesquisa foi desenvolvida com uma turma 1° ano do ensino fundamental, sob a responsabilidade da professora Cristina em conjunto com o professor pesquisador, em uma Escola Municipal de Ensino Fundamental, localizada na cidade de Castanhal, no estado do Pará.

Com o propósito de inferirmos resultados a partir da experiência, foram registrados um conjunto de práticas teatrais que foram desenvolvidas com as crianças em sala de aula e os dados foram coletados através de diário de bordo do pesquisador e por registros fotográficos. Os dados, depois de selecionados e organizadas em episódios, foram analisados narrativamente segundo as lentes teóricas apresentadas nos estudos de Kamii (2012), Spolin (2017), Reverbel (2001), Courtney (2010), entre outros.

Os primeiros encontros foram organizados a partir da leitura de um livro de literatura infantil contendo discussões referentes ao conteúdo matemático. Ao final de cada leitura, eram feitas reflexões, organizados em um grande círculo, sobre os contextos colocados em foco durante a leitura. Para introduzir as práticas teatrais em sala de aula, em comum acordo com a professora regente, iniciamos um trabalho com alguns jogos, pré-selecionados, com o propósito de aproximar os alunos do teatro, ou seja, ajuda-los na descoberta de si, do outro e do mundo que o rodeia, como nos alerta Reverbel (1997, 2001), para que esse contexto favorecesse tanto sua aprendizagem no contexto da arte, quanto das disciplinas que fazem parte do currículo escolar.

Assim, o trabalho foi iniciado com atividades globais de expressão que procuravam trabalhar o relacionamento (contato com os companheiros, aquecimento, movimentos, confiança no outro, hipnotismo e outros); para depois, dentro dos jogos que trabalham espontaneidade, imaginação e percepção, trabalhar a matemática. Para essa organização nos baseamos nas obras de Olga Reverbel (2001) e Viola Spolin (2017), que apresentam roteiros detalhados para o desenvolvimento de um trabalho eficaz com jogos teatrais na sala de aula.

6 I ANALISANDO NARRATIVAMENTE AS PRÁTICAS TEATRAIS NO ENSINO-APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Cartaxo (2001, p.65) ressalta a "importância da criança compreender cada etapa do trabalho para que se interesse em fazer parte dele, e mais, que sejam capazes e construir eles mesmos, seus próprios caminhos".

Assim, os episódios apresentados a seguir são oriundos dessa organização, ou seja, de contextos onde as práticas teatrais e os conteúdos eram escolhidos em comum acordo entre os alunos e os professores, pois como nos alerta Cartaxo (2001), é importante que os contextos teatrais e os conteúdos escolares sejam desenvolvidos de maneira prazerosa e com significado para os participantes. Por essa razão, sempre antes das atividades eram apresentadas, considerando a falta de vivências e de experiências dos alunos nesse nível de ensino, duas ou três opções de práticas teatrais para que os alunos pudessem escolher as que utilizaríamos.

A seguir apresentaremos dois episódios que procuram refletir sobre o ensino-aprendizagem de números a partir das práticas teatrais em uma turma do primeiro ano do Ensino Fundamental.

Estes episódios são recortes de uma atividade, dramatização, que tinha como objetivo organizar uma pequena apresentação de teatro, baseada na leitura de um texto trabalhado com a turma em sala de aula. O texto escolhido para atividade foi os "Dez amigos" de Inês Rosales e Elena Odriozola (2003). Como o contexto do texto apresenta dez personagens, os "dez amigos", a turma foi organizada para que durante a atividade ocorressem duas rodadas de leitura para que todos pudessem participar, hora encenando, hora observando a encenação dos colegas.

Após a distribuição dos personagens da história entre os alunos iniciamos a leitura encenada - leitura dramática, ou seja, à medida que era feita a leitura, cada criança levantava do seu lugar, se encaixando na história e dava vida ao texto, interpretando o personagem por ele escolhido. O livro começa com a expressão: "*Uma tartaruga foi passear. Encontrou um ratinho. E agora? Já são dois".*

A cada passagem da história e o aparecimento de um novo amigo, a partir das encenações dos alunos, procurávamos fazer uma recapitulação do contexto, refletindo sobre "quem" e "quantos" eram os amigos. "*Encontraram um peixe. E agora? Já são três"*. Esse foi o roteiro da encenação dos alunos, cada criança representava um personagem e um número de acordo com ordem prescrita no enredo do livro, até chegar em dez.

No decorrer da atividade, **episódio 1**, os alunos queriam misturar os personagens, que a priori, ficariam na ordem do enredo do livro. Os excertos apresentam as negociações entre o professor pesquisador e dois alunos da turma na tentativa de compreender a troca de posição entre os alunos e suas relações com os números:

> Criança A: Professor, mas eu era o três, não quero ficar com o sete.
>
> Professor: Mas você ainda é o terceiro a entrar na história?
>
> Criança A: Não.
>
> Professor: Quantos colegas tem antes de você, agora?
>
> Criança A: [Após contagem dos colegas, responde]. Seis.
>
> Criança B: Por isso você tem que ser o sete.
>
> Professor: E antes de você mudar a ordem?
>
> Criança A: Antes só tinha dois antes de mim.

Essas negociações de significados em relação a posição do número, nos remete aos achados de Kamii (2012), quando assevera que é através da utilização da abstração reflexiva pela criança que ocorre a internalização, a conquista do saber matemático, através de referências determinadas.

Ao retomarmos a leitura do livro, **episódio 2**, um dos alunos pede a professora para ir ao banheiro e não retorna até o momento em que deveria entrar em cena. O aluno era o sexto personagem, com sua saída mudou a ordem de entrada dos alunos, o que gerou certa confusão entre as crianças em função do número que representava. Os excertos apresentam as negociações entre o professor pesquisador e dois alunos da turma na tentativa de compreender a situação:

> Criança D: Mas tio, eu sou o sete. Não posso ser o seis.
>
> Professor: Pra você ser o sete quantos coleguinhas precisam estar antes de você?
>
> Criança D: Nenhum, eu sou o sete.
>
> Criança E: Não! Saiu a Criança C, bagunçou tudo. Você só pode ser o sete quando ela voltar. Agora você é o seis.

Fica evidente, a partir do excerto, que quando um dos colegas deixou de participar da brincadeira somente a criança E percebeu que precisaria alterar a numeração, afirmando que com a saída de um dos personagens a contagem foi modificada, a ordem que cada personagem ocupava na história não era mais a mesma, precisava ser alterada e o regresso à numeração original dependeria do retorno da criança que saiu. A criança E, apesar da idade, demonstrou indícios de ter compreendido aquilo que Kamii (2012) chama de ordem e inclusão hierárquica.

7 I A TÍTULO DE CONSIDERAÇÕES

A partir dos estudos, fica claro que não adianta a criança saber contar, de forma memorizada, pois, nesse estágio em que a criança se encontra deve-se primar pela construção da estrutura lógica do número, ou seja, compreender princípios básicos como: que a quantidade dos elementos de um conjunto não muda, quando ocorrem mudanças espaciais; que o número se constrói por meio da criação e coordenação das pelas relações que se faz; que o número é uma síntese de dois tipos de relação que se elabora entre os objetos - a ordem e a inclusão hierárquica, dentre outros. Dessa forma, esse trabalho mostra a relevância do uso de práticas teatrais como organizador didático-pedagógico no processo de ensino-aprendizagem do conceito de número.

REFERÊNCIAS

BERTHOLD, Margot. **História Mundial do Teatro.** 4. ed. Trad. Maria Paula Zurawski, J. Guinsburg, Sergio Coelho e Clóvis Garcia – São Paulo: Perspectiva, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Elementos conceituais e metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização:** (1º, 2º e 3º anos) do ensino fundamental. Brasília, DF: MEC/SEB, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CARTAXO, C. **O ensino das artes cênicas na escola fundamental e média**. João Pessoa: Carlos Cartaxo, 2001. 204p.

COURTNEY, Richard. **Jogo, teatro & pensamento**: as bases intelectuais do teatro na educaçao. 4. ed. Trad. Karen Astrid Müller e Silvana Garcia - São Paulo: Perspectiva, 2010.

FERREIRA, Taís. FALKEMBACH, Maria Fonseca. **Teatro e Dança nos anos iniciais**. Porto Alegre: Mediação, 2012.

KAMII, Constance. **A criança e o número:** Implicações educacionais da teoria de Piaget para a atuação com escolares de 4 a 6 anos. Trad. Regina A. de Assis. Campinas: Papirus, 2012.

MOREIRA, Marco Antonio. **Aprendizagem significativa como referencial teórico para a pesquisa em ensino de ciências**. In: Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências, IV. Bauru. 2003.

MOREIRA, Marco Antonio; MASINI, Elcie F. Salzano. **Aprendizagem Significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

MORETTO, Vasco Pedro. **Construtivismo**: a produção do conhecimento em aula. 3 Edição. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.

NEVES, Libéria Rodrigues. SANTIAGO, Ana Lydia Bezerra. **O uso dos jogos teatrais na educação**. 2. ed. Trad. Roxane Rojo. Campinas: Papirus, 2010.

REVERBEL, Olga Garcia. **Jogos Teatrais na Escola** – Atividades globais de expressão. São Paulo: Scipione, 2001.

REVERBEL, Olga Garcia. **Um caminho do teatro na escola**. 2ª ed. São Paulo: Scipione, 1997

ROSALES, Inés; ODRIOZOLA, Elena. **Dez amigos.** Saragoça: Imaginarium, 2003.

ROUSSEAU, Jean-Jacques. **Emilio ou da educação**. 3. ed. Trad. Sérgio Milliet. Paris: Difel, 1979.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica**. Campinas, SP: Papirus, 2008.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação crítica**: incerteza, matemática e responsabilidade. Trad. Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Cortez, 2007.

SPOLIN, Viola. **Jogos teatrais para a sala de aula:** um manual para o professor. 3. ed. Trad. Ingrid Dormien Koudela. São Paulo: Perspectiva, 2017.

CAPÍTULO 20

A PESQUISA ESTATÍSTICA NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ESTATÍSTICOS PARA O ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO NA PERSPECTIVA VYGOTSKYANA

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 20/05/2020

Celia Alves Pereira
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Londrina – Paraná
http://lattes.cnpq.br/4752749821616987

Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Londrina – Paraná
http://lattes.cnpq.br/6374015489865372

Leonardo Sturion
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Londrina – Paraná
http://lattes.cnpq.br/7994134300926513

RESUMO: O presente trabalho trata-se de um relato de experiência cujo a atividade foi realizada em uma escola pública de uma cidade do Noroeste do Estado do Paraná, com estudantes de nono ano das séries finais do Ensino Fundamental II. Fundamenta-se na teoria de aprendizagem de Vygotsky, em que o professor atua na mediação do processo de ensino e aprendizagem. O conteúdo abordado foi frequência estatística, tendo como instrumento didático a pesquisa estatística, elaborada e aplicada pelos alunos na comunidade escolar. O objetivo foi investigar como o uso da pesquisa estatística desta prática pode auxiliar o estudante na compreensão de conceitos científicos de estatística, analisando os benefícios da associação teoria/prática para a aprendizagem e, também, estimular o desenvolvimento da capacidade de reflexão e construção de novos conhecimentos embasado nos pressupostos da Teoria Sócio Histórica de Vygotsky. Apresenta metodologia qualitativa, interpretativa, mediante uma descrição detalhada dos dados, com foco no processo de análise dos resultados obtidos na pesquisa realizada pelos estudantes. Os resultados veiculam a relevância do processo de mediação quando se utiliza essa estratégia didática, possibilitando assim, a compreensão de conceitos estatísticos de forma dinâmica e prazerosa.

PALAVRAS - CHAVE: Educação. Aprendizado. Mediação. Interação.

STATISTICAL RESEARCH IN LEARNING STATISTICAL CONCEPTS FOR FUNDAMENTAL EDUCATION: A STUDY FROM THE VYGOTSKYANA PERSPECTIVE

ABSTRACT: The present work is an experience report whose activity was carried out in a public school in a city in the Northwest of the State of Paraná, with ninth-grade students in the final grades of Elementary School II. It is based on Vygotsky's theory of learning, where the teacher acts in mediating the teaching and learning process. The content covered was statistical frequency, using statistical research as a teaching tool, developed and applied by students in the school community. The objective was to investigate how the use of statistical research in this practice can assist the student in understanding scientific concepts of statistics, analyzing the benefits of the theory / practice association for learning and also stimulating the development of the capacity for reflection and construction of new ones. Knowledge based on the assumptions of Vygotsky's Socio-Historical Theory. It presents qualitative, interpretative methodology, through a detailed description of the data, focusing on the process of analyzing the results obtained in the research carried out by the students. The results convey the relevance of the mediation process when using this didactic strategy, thus enabling the understanding of statistical concepts in a dynamic and pleasurable way.
KEYWORDS: Education. Learning. Mediation. Interaction.

1 I INTRODUÇÃO

A abordagem pedagógica de conceitos de estatística, de modo geral, tem deixado a desejar, pois é comum nas escolas básicas que seu trato ocorra de forma mecânica, baseada em exercícios, o que pode comprometer seu processo de ensino e aprendizagem. Batanero (2013) atesta que uma possível explicação para esta situação é a forma de ensino rotineiro, o qual enfatiza fórmulas e definições, sem ater-se a atividades que exijam interpretação e dados contextualizados, e considera ser um absurdo transmitir uma Estatística sem sentido, sem levar em consideração sua própria natureza.

Neste sentido, faz-se necessário buscar meios e estratégias para propiciar aos estudantes uma vivência que permita fugir da abordagem que utiliza somente os exercícios presentes nos livros didáticos. E assim, propõem-se uma atividade de realização de pesquisa estatística com foco em coleta e análise dos dados que possa propiciar a abordagem metodológica diferenciada que possibilita ao estudante o protagonismo no processo de ensino e aprendizagem no sentido de promover a compreensão de conceitos científicos, tendo o professor como o medidor desta ação.

Desta forma, o presente trabalho se justifica, pois proporciona aos estudantes, por meio da realização de uma pesquisa estatística, uma experiência educativa que pode permitir a relação de conteúdos matemáticos com situações de aplicabilidade em seu cotidiano.

Um dos aspectos importantes na formação estatística durante a educação básica, refere- se ao fato de proporcionar aos estudantes condições para o desenvolvimento da capacidade de perceber a existência da variação, da necessidade de descrever populações a partir de coleta de dados, e a necessidade de reduzir dados primitivos em informações tratadas, observando tendências e características através de sínteses e apresentação de dados. Assim, os estudantes podem progredir em seus conhecimentos ao lidar com investigações estatísticas, entendendo a necessidade de compreender esses conceitos (LOPES, 2008).

Neste processo o professor, como mediador da aprendizagem atua como elo entre o objeto de estudo e o aluno, portanto, a aprendizagem não é direta, mas indireta, sendo mediada por signos e instrumentos (OLIVEIRA, 2010).

Posto isso, o presente artigo investiga como a utilização de uma pesquisa estatística pode auxiliar os estudantes na compreensão de conceitos científicos de estatística, em especial, a frequência estatística no ensino fundamental, no sentido de verificar os benefícios da associação teoria/prática para o processo de ensino e aprendizagem, e, para tanto, apresenta reflexões pautadas nos pressupostos teóricos de Vygotsky. Face aos resultados, espera-se que os professores estejam atentos às dificuldades dos estudantes e ao modelo de aprendizagem que embasa as necessidades atuais, bem como às ações pedagógicas potenciais para o exercício do protagonismo dos discentes como corresponsáveis por suas aprendizagens.

2 I CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA ESTATÍSTICA

O ensino da Matemática na educação básica é norteado por documentos tais como Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática- do estado do Paraná (DCE) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que enfatizam a relevância do ensino da estatística nesta etapa de ensino, haja vista a relação deste campo da matemática com as situações cotidianas que permitem aos estudantes participarem efetivamente do processo de construção de conceitos.

Na organização da disciplina de Matemática, no estado do Paraná, a estatística é parte do conteúdo estruturante “Tratamento da Informação”, e tem como objetivo prover condições para que os estudantes possam realizar uma leitura crítica de fatos sociais, interpretação de tabelas e gráficos diversos, evidenciando assim, que se tratam de formas de representação e descrição de informações (PARANÁ, 2008).

Com perceptível ligação com os fatos cotidianos, não é possível desconsiderar a importância da abordagem dos conteúdos relacionados a estatística, bem como trata-lo de forma mecânica e descontextualizada. Freitas (2011) argumenta que para muitos professores o estudo de estatística é tão somente um conjunto de fórmulas e de procedimentos a serem memorizados pelos alunos e aplicados à problemas rotineiros. Entretanto, a autora ressalta que este fato é objeto de estudo de pesquisadores que visam mudança nas práticas letivas.

Desta forma, este trabalho se propõe a relatar uma experiência educacional com foco no ensino e aprendizagem de estatística, envolvendo estudantes da educação básica na realização de uma pesquisa estatística como instrumento de aprendizagem, onde a professora- pesquisadora buscou indícios das vantagens de uma abordagem prática que corrobore com a aprendizagem e aquisição de conceitos. Considera-se, neste estudo, o sentido da palavra instrumento na perspectiva de Vygotsky, ou seja, como algo que é feito ou buscado especialmente para certo objetivo. Ele carrega consigo, portanto, a função para a qual foi criado e o modo de utilização desenvolvido durante a história do trabalho coletivo (VYGOTSKY, 2000).

De acordo com Oliveira (2010), Vygotsky trabalha com a noção de que a relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas, fundamentalmente, uma relação mediada. As funções psicológicas superiores apresentam uma estrutura tal que, entre o homem e o mundo real, existem mediadores, ferramentas auxiliares da atividade humana.

Nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do estado (Paraná, 2008), é salientada a relevância do trabalho com estatística, e este deve ocorrer por meio de um é salientada a relevância do trabalho com estatística, e este deve ocorrer por meio de um processo investigativo, em que o estudante possa interagir com os dados desde sua coleta. Desta forma, a construção dos conceitos se estabelece a partir da análise e contextualização da realidade. Em consonância com o que prevê as Diretrizes Curriculares de Matemática do Paraná, Lopes (2008) destaca a importância de práticas em sala de aula em que os estudantes sejam confrontados a realizar atividades que considerem seus ambientes e sejam capazes de observar e construir situações por meio de uma experimentação real.

Conforme Vygotsky (2000), salienta que, em relação ao processo de ensino e de aprendizagem, é fundamental apreciar a aprendizagem como a agente do desenvolvimento humano, concedendo à educação e ao ensino um importante papel nesse processo de aprendizagem. Este pressuposto é relevante para a educação escolar, pois segundo a perspectiva vygotskyana, a aprendizagem sai da conjuntura da mecanização e do treinamento de habilidades que, na maioria das vezes, ficam limitadas às funções elementares e, consequentemente, pouco influenciam as funções psicológicas superiores (memória, atenção, pensamento, consciência).

Neste sentido é que se faz necessário estabelecer, sempre que possível, a relação entre conteúdos Matemáticos e situações de aplicabilidade cotidiana e, até mesmo, propiciar o protagonismo do estudante na execução de tarefas que exijam mais do que cálculos mecânicos.

Nesse sentido, Martins (2005) afirma que

> [...] é o exercício social do conhecimento que permitirá aos alunos dar sentido próprio para o conhecimento oferecido na escola. Essa concepção revela o movimento na avaliação, buscando dar conta da complexidade do ensinar e aprender, como elementos essenciais à promoção humana. (MARTINS, 2005, p. 56).

Apoiando-se no que afirma Martins (2005), justifica-se a pertinência do tema da pesquisa realizada pelos alunos, ou seja, questionário com perguntas relacionadas com a temática “O Dia da Consciência Negra”. Os resultados da pesquisa, além se servirem para o estudo de conteúdos matemáticos, permitiram a reflexão dos estudantes decorrentes das discussões ocorridas durante todo processo.

Segundo Lopes (2008) um dos desafios presentes na prática do professor é possibilitar ao estudante a percepção de que ele é produtor de conhecimento. Neste sentido é responsável juntamente com o professor por sua aprendizagem e capaz de trabalhar de maneira colaborativa. Atividades como a desenvolvida neste trabalho, podem possibilitar aos estudantes significar conceitos matemáticos de maneira dinâmica e não apenas de forma mecânica e descontextualizada, permitindo uma conexão de trabalho aluno-aluno e aluno-professor.

3 I PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa é do tipo qualitativa, empregando a observação participante. Desta forma, a investigação está embasada na abordagem de Bogdan e Biklen (1994), quando afirmam ser a pesquisa qualitativa uma fonte direta dos dados, proveniente do ambiente natural, neste caso, a sala de aula em que a professora atua, já que este estudo foi realizado em condições de ensino habituais, preservando as características do contexto real do lócus de investigação, o que possibilita compreender as ações desenvolvidas pelos participantes da pesquisa visto que foram observadas no ambiente habitual da ocorrência.

São participantes dessa investigação a professora e os estudantes, a professora é primeira autora deste trabalho, docente da disciplina de Matemática responsável pela realização da proposta e denominada, neste relato de experiência, como professora-pesquisadora.

O lócus de investigação contou com 57 estudantes de duas turmas de nono ano do ensino fundamental, de uma escola pública, localizada na região noroeste do Estado do Paraná.

Para coleta de dados, foram utilizados como instrumentos os registros escritos desses estudantes e o diário de campo da professora-pesquisadora. A obtenção dos dados ocorreu a partir de aulas em que os discentes foram convidados a organizar e executar uma pesquisa estatística, assim, a partir dos resultados obtidos nesse estudo, explorar os conceitos de frequência absoluta e frequência relativa. A abordagem do conteúdo distribuição de frequência a partir da realização da pesquisa visou possibilitar maior envolvimento dos alunos nas aulas e, consequentemente, a apropriação deste conteúdo.

A professora-pesquisadora, primeira autora deste relato, organizou um planejamento em que os alunos iriam desenvolver uma pesquisa estatística. Para tanto foi necessário a organização de um questionário que foi construído pela professora em parceria com os alunos. Os estudantes organizaram-se em equipe e ficaram responsáveis pela coleta, tabulação e análise dos dados. Durante o processo de reflexão sobre os resultados obtidos pelos discentes, o conceito de frequência absoluta e relativa foram discutidos, caracterizando uma possibilidade para que os alunos compreendam o conceito e a aplicabilidade em situação real. Dessa maneira, optou-se por um processo de avaliação contínuo, considerando-se todas as fases da realização da atividade.

A discussão dos resultados observados neste trabalho foi realizada considerando referencial teórico de Vygotsky. Deste modo, foram examinados os dados coletados durante o processo de execução da proposta de ensino e aprendizagem, à procura de indícios que configurassem o envolvimento e a participação dos estudantes no processo face a apropriação de conceitos científicos do conteúdo em foco.

Os procedimentos aqui apresentados subsidiam uma pesquisa qualitativa de caráter interpretativo, em que o objeto de estudo foi investigar a utilização de "uma tarefa realizada pelos alunos a partir da adaptação da prova escrita em fases" como processo de investigação da aprendizagem.

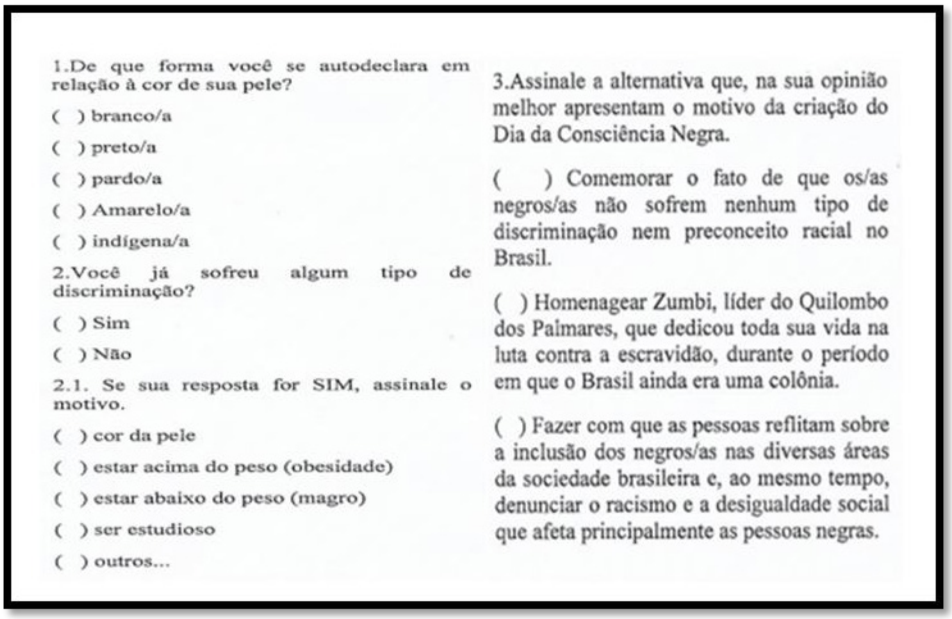
4 I DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A apresentação da proposta de trabalho aos estudantes iniciou-se com a explanação do que havia sido planejado, ressaltando-se as atividades que seriam desenvolvidas, o processo avaliativo e uma introdução a Estatística, dando ênfase a algumas de suas aplicações na sociedade contemporânea. A utilização da pesquisa estatística, proposta de ensino aplicada neste estudo, visou o envolvimento dos alunos nas tarefas a serem feitas. Haja vista que estávamos em meados do terceiro trimestre escolar, os estudantes em sua maioria apresentavam média suficiente para aprovação e por esse motivo permaneciam alheios as aulas de Matemática, que, de modo geral, eram ministradas de forma mecânica, sem qualquer contextualização com o cotidiano. Vale ressaltar que, em contraponto a esse tipo de abordagem, a professora-pesquisadora já havia vivenciado uma experiência com aplicação de tarefas mais interativas para uma de suas turmas e, naquela ocasião, se surpreendeu de modo positivo com os resultados, episódio este que lhe incentivou a realizar o projeto de ensino mediante a prática da pesquisa estatística.

Neste contexto, convém ressaltar a relevância de fazer uso de uma ação pedagógica que objetiva o caráter de autonomia da "aprendizagem do pensar criticamente, implicando o desenvolvimento de competência cognitivas do aprender a aprender e instrumentos conceituais para interpretar a realidade e intervir nela” (LIBÂNEO, 2009, p.81).

A prática iniciou-se com questionamentos sobre qual o significado de estatística para os estudantes, assim como o que seria uma pesquisa e, finalmente, uma pesquisa estatística. Após algumas observações por parte dos alunos e intervenções da professora-pesquisadora, houve um consenso de que a prática de pesquisa se tratava de um conjunto de ações como: a coleta de dados, a organização, a análise dos dados e a divulgação dos resultados. Durante a discussão, foi informado que a proposta de trabalho era a realização de uma pesquisa estatística na qual os resultados seriam divulgados na semana do dia 20 de novembro, “Dia da Consciência Negra”. Sendo assim, os tópicos da pesquisa estavam relacionados a esta temática.

Os estudantes juntamente com a professora-pesquisadora, organizaram o questionário que foi aplicado a toda comunidade interna do colégio. As questões tratavam de assuntos como: de que forma a pessoa se autodeclarava em relação a cor de pele, se já havia sido discriminado e que tipo de discriminação ocorreu e se sabiam os motivos da existência do dia 20 de novembro no calendário escolar. Tais questionamentos estão apresentados na figura 1, a seguir.



1.De que forma você se autodeclara em relação à cor de sua pele?

( ) branco/a

( ) preto/a

( ) pardo/a

( ) Amarelo/a

( ) indígena/a

2.Você já sofreu algum tipo de discriminação?

( ) Sim

( ) Não

2.1. Se sua resposta for SIM, assinale o motivo.

( ) cor da pele

( ) estar acima do peso (obesidade)

( ) estar abaixo do peso (magro)

( ) ser estudioso

( ) outros...

3.Assinale a alternativa que, na sua opinião melhor apresentam o motivo da criação do Dia da Consciência Negra.

( ) Comemorar o fato de que os/as negros/as não sofrem nenhum tipo de discriminação nem preconceito racial no Brasil.

( ) Homenagear Zumbi, líder do Quilombo dos Palmares, que dedicou toda sua vida na luta contra a escravidão, durante o período em que o Brasil ainda era uma colônia.

( ) Fazer com que as pessoas reflitam sobre a inclusão dos negros/as nas diversas áreas da sociedade brasileira e, ao mesmo tempo, denunciar o racismo e a desigualdade social que afeta principalmente as pessoas negras.

Figura 1: Questionário Utilizado para Coleta de Dados da Pesquisa

Fonte: Arquivo dos Autores

Em seguida os alunos dividiram-se em grupos, sendo esta divisão por afinidade entre eles. Estes grupos foram responsáveis pela aplicação do questionário, mediante os quais os dados foram coletados. Cada equipe recebeu quatro turmas em que deveriam aplicar o questionário, e foi enfatizado que se tratava de um trabalho coletivo e que a confiabilidade dos dados era de suma importância e da responsabilidade de cada equipe. Esta ação permitiu aos alunos perceberem como se dá a origem dos dados de pesquisas, que muitas vezes são apresentados já prontos dispostos em gráficos e tabelas. Com essa tarefa, eles puderam exercer certo protagonismo ao elaborar, coletar e fazer a leitura dos dados obtidos durante esse processo. Este fato de poder coletar os dados das atividades realizadas criou uma nova expectativa nos alunos sobre a aplicação dos conceitos estatísticos motivando-os sobre a possibilidade de manipular os dados e ficaram ansiosos para verificar os resultados que iriam obter da experencia que para eles era inédita fruto da realidade do seu cotidiano escolar.

A figura 2 a seguir representa o término da etapa da coleta de dados realizada pelos alunos.

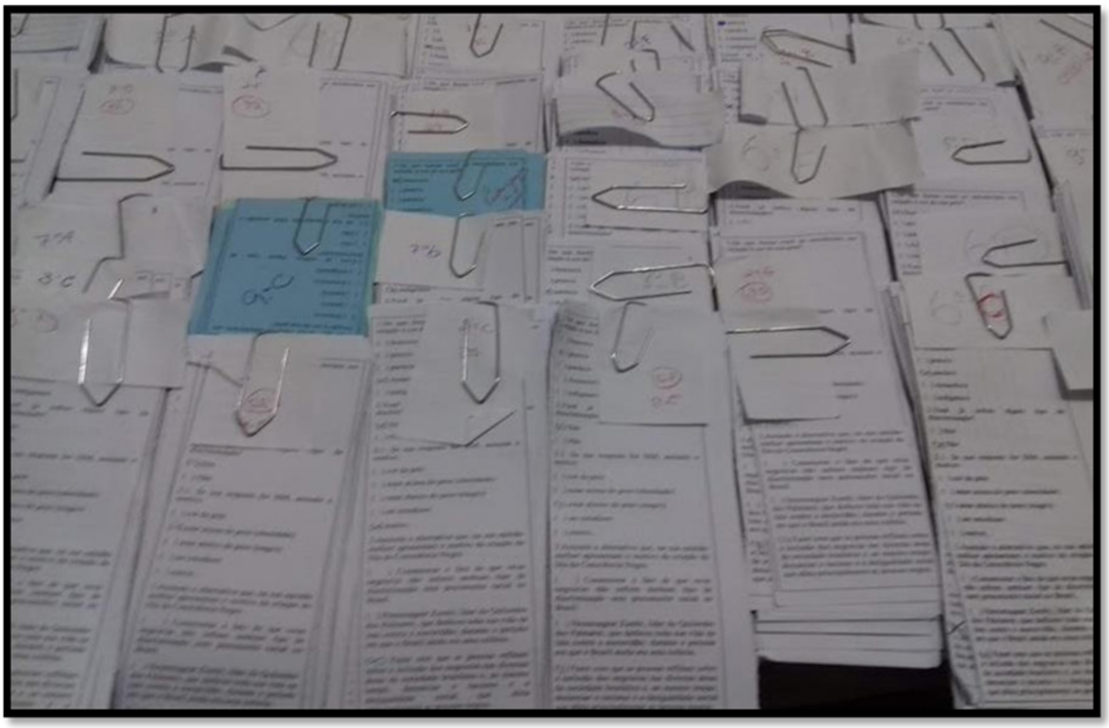


Figura 2: Representação do Término da Coleta de Dados

Fonte: Arquivo dos Autores

Os alunos relataram que foi trabalhoso fazer a coleta de dados, mas muito interessante saber como essas informações são conseguidas, salientaram que na pesquisa realizada por eles os dados eram confiáveis, sem manipulação dos dados visando adulteração dos resultados e uma representatividade de 87% dos entrevistados na comunidade escolar.

Assim, de posse dos dados, as equipes seguiram para a organização, análise, interpretação e representação dos resultados. Realizaram a contagem das respostas apresentadas a cada pergunta do questionário, tabulando para organizar os dados em tabelas, neste momento exploraram o conceito de frequência absoluta, que representa a quantidade de resposta para cada questão. Com esses dados coletados os alunos foram convidados a realizar a análise dos mesmos. Perceberam que por se tratar de informações oriundas de diversos grupos (alunos, professores e demais profissionais da escola) era difícil analisar os dados de modo comparativo. A partir desta dificuldade, os alunos foram questionados sobre estes dados, buscando relacioná-los a exploração dos conceitos chaves, frequência absoluta e frequência relativa. Deste modo, concluíram que as quantidades observadas até então tratava-se de frequência absoluta, e para estabelecer comparações seriam necessários cálculos de frequência relativa.

Ao considerar a percepção dos estudantes descrita, tem-se uma situação ancorada em Oliveira (2010), que ressalta a ideia de Vygotsky quando afirma que a escola precisa pautar- se no “bom ensino”, ou seja, admite que o estudante não tem condições de percorrer sozinho o caminho do aprendizado e precisa da intervenção de outras pessoas. Na escola estas pessoas são seus colegas e professores.

Essa nova informação, a frequência estatística dada em percentual, possibilitou a visualização dos dados e permitiu aos alunos realizarem discussões a partir dos dados onde foi possível perceber a compreensão dos conceitos aqui propostos. Como exemplo, um dos dados discutidos foi que: 61% dos profissionais da escola declararam-se brancos e 39% declararam-se como pertencententes a outras etnias, já entre os alunos foram 29% declararam- se brancos e 71% pertencentes a outras etnias. Os estudantes associaram fatores de ordem social que poderiam justificar tais resultados como: grau de escolaridade, marginalização econômica, evasão escolar e suas consequências, entre outros. Vygotsky corrobora ao considerar que o sujeito é ativo e produtor de conhecimento e não alguém que apenas recebe informações, sendo capaz de agir em seu mundo real (Oliveira, 2010).

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017), o papel da escola é formar alunos com conhecimentos e capacidades que os tornem capazes de discriminar informações, identificar valores associados a elas e realizar escolhas relativas ao assunto. De acordo com esse documento, o aluno precisa estar preparado para

> [...] fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes. (BRASIL, 2017, p. 223)

Além das discussões em sala, com os dados em mãos, os alunos dos nonos anos elaboraram cartazes com registros dos dados coletados em tabelas e gráficos (de barras e colunas) que apresentavam os dados e estes foram expostos em mural da escola. Como indica a figura 3.

Figura 3: Exposição dos Resultados da Pesquisa

Fonte: Registro dos autores

De acordo com Lopes (2008), “ [...] é necessário desenvolver uma prática pedagógica na qual sejam propostas situações em que os estudantes realizem atividades, as quais considerem seus contextos e possam observar e construir os eventos possíveis, por meio de experimentação concreta, de coleta e de organização de dados” (LOPES, 2008, p.58).

No decorrer das discussões, percebe-se que o trabalho junto aos alunos requer que o professor busque as características apontadas por Vygotsky, de acordo com Freitas (2000), ou seja, aquele que possui mais experiência, com função de mediar a relação do aluno com o conhecimento, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

No ensino de Matemática, o estudo da Estatística, especialmente no ensino fundamental, é um conhecimento relevante para a formação dos alunos, uma vez que esta caracteriza-se pela capacidade de simplificação de dados que facilitam o entendimento de informações existentes em seu cotidiano. A necessidade de propiciar aos alunos um estudo sobre estatística de forma relevante motivou o planejamento de uma atividade de estatística que permitisse aos discentes uma experiência de pesquisa e manipulação dos dados e não apenas atividades do livro didático, onde o foco, em sua maioria, é apenas quantitativo.

Neste contexto, se desenvolveu uma proposta de ensino e aprendizagem, tendo como fio condutor a pesquisa estatística sobre temas que fazem parte do contexto do estudante, permitindo assim, colocar os alunos como produtores de conhecimentos; pois foram responsáveis por realizar a tarefa de planejamento, coleta, organização, análise e interpretação dos dados; e tais ações favoreceram a construção de uma postura crítica, ao oportunizar discussões, criticarem e questionarem sobre situações pertinentes a temática explorada nesse estudo. Freire (1997) considera que a produção do conhecimento com criticidade é parte do trabalho conjunto do professor e do aluno, que o pensar certo, que supera o ingênuo, precisa ser produzido pelo próprio aprendiz, em comunhão com o professor-formador.

O trabalho de pesquisa estatística, enquanto um meio de envolver os alunos na abordagem de conteúdo, em um momento em que os mesmos estavam sem interesse, tornou- se propício no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, haja visto que durante a realização os estudantes se tornaram participativos, apropriaram-se da atividade como produção deles possibilitando o protagonismo.

Outro ponto de destaque da pesquisa foi que a vivência em atividades de investigação estatística possibilitou aos estudantes terem contato com a seriedade e a postura imparcial, necessária no trabalho do pesquisador, em relação ao levantamento e apresentação dos seus resultados, visto que qualquer erro nas etapas da pesquisa pode comprometer os dados, tornando-os inválidos ou apresentando baixa confiabilidade.

A experiência dos estudantes enquanto pesquisadores foi relevante para a busca de certa autonomia na aprendizagem, pois houve momentos em que puderam discutir em equipe e tomar decisões em conjunto, contudo, quando dúvidas surgiram, como por exemplo, sobre interpretação dos dados, a professora atuou como mediadora do percurso proposto, colaborando na condução desse processo no sentido de permitir a eles o protagonismo almejado. A participação na realização da atividade por parte dos alunos de cada equipe contribuiu para o sucesso dos resultados obtidos. O expressivo envolvimento dos discentes na atividade ocorreu pelo fato de os mesmos se sentirem sujeito em todo processo, e saber que os dados que coletaram fariam parte de dados do Projeto Político Pedagógico da escola, o que corrobora com essa perspectiva de aprendizagem no sentido de permitir aos educandos uma interação nos projetos de ensino, reforçando a importância do trabalho por eles realizados.

Trabalhar com os alunos mediante experiências educativas que apresentem o conteúdo matemático como uma ferramenta para compreensão da realidade, em que este possa participar como pesquisador, pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática de forma dinâmica, possibilitando a construção de conhecimentos para a formação de nossos estudantes.

Por fim, não existem soluções mágicas, no que se refere a utilização e aplicação dos recursos tecnológicos no estudo de estatística. Diante da diversidade de vantagens e algumas dificuldades, o fato é que muitas são as possibilidades e perspectivas do desenvolvimento de ação pedagógica que pode contribuir para o ensino e aprendizagem, precisa-se de mais investigações sobre a aplicação sobre o tema proposto no ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS

BATANERO, José María Fernandes. Competencias docentes y educación inclusiva. **Revista electrónica de investigación educativa**, v. 15, n. 2, p. 82-99, 2013.

BIKLEN, S.; BOGDAN, R. C. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, p. 134-301, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/ Acesso em: 26 mar. 2017.

PARANÁ, Secretaria de estado da educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Curitiba: Seed/DEB-PR, 2008.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. Rio de Janeiro: Paz & Terra, 1997.

FREITAS, C. M. P. **O desenvolvimento da literacia estatística no 5. ° ano: Uma experiência de ensino**. 2011. Tese de Doutorado.

FREITAS, M. T. A. As apropriações do pensamento de Vygotsky no Brasil: um tema em debate. In: Psicologia da Educação. **Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Psicologia da Educação.** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, n.10/11, p. 9-28, dec.2000.

OLIVEIRA, M. K. Vygotsky: **Aprendizado e desenvolvimento**: um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 2010.

LIBÂNEO, C. J. **Adeus professor, adeus professora? Novas exigências educacionais e profissão docente**. 11 ed. São Paulo: Cortez, 2009.

LOPES, C. E. **O Ensino da Estatística e da Probabilidade na Educação Básica e a Formação dos Professores**. **Cedes**, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008. Disponível em <http://www.cedes.unicamp.br> Celi Espasandin Lopes.

MARTINS, L. M. **Psicologia sócio-histórica**: o fazer científico. In: ABRANTES, A. A.; SILVA, N. R.; MARTINS, S. T. F. Método histórico-social na psicologia social. Petrópolis-RJ: Vozes, 2005. p. 118-138.

VYGOTSKY, L.S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

CAPÍTULO 21

O BICENTENÁRIO GEORGE GABRIEL STOKES (1819 – 1903)

Data de aceite: 05/06/2020

Liliane Silva Nascimento Coelho
Mestanda do PPGEM da Universidade do Estado do Pará (UEPA). E-mail: lililsncoelho3@gmail.com

Ana Paula Nunes Felix
Mestanda do PPGEM da Universidade do Estado do Pará (UEPA). E-mail: apnfelix01@gmail.com

Miguel Chaquiam
Professor do PPGEM da Universidade do Estado do Pará (UEPA). E-mail: miguelchaquiam@gmail.com

RESUMO: Em comemoração ao bicentenário George Gabriel Stokes decidiu-se apresentar traços biográficos deste matemático e físico, com ênfase as pesquisas desenvolvidas por ele, em particular, para uma de seus principais resultados na área da Matemática, o Teorema de Stokes. Destaca-se inicialmente a importância das biografias para o processo de ensino da matemática. Tendo em vista o bicentenário do nascimento de George Stokes, aportados numa revisão bibliográfica, buscou-se elementos para mostrar a importância que a Matemática teve para Stokes, destacar quais foram as teorias que ele abordou e quais resultados o elevam a categoria de matemáticos que produziram conteúdos significativos para as ciências, em particular, os campos de pesquisa modernos que surgiram de seu trabalho em física e matemática. Nessa revisão bibliográfica constatou-se também que a Matemática foi de fundamental importância para as demonstrações de suas teorias

PALAVRAS-CHAVE: História da Matemática. Biografia. George Gabriel Stokes. Teorema de Stokes.

1 I INTRODUÇÃO

Todo conhecimento humano perpassa por um processo de construção que pode ser entendido por meio da História. O desenvolvimento da humanidade se dá pelas construções sociais, históricas e culturais representadas pelos objetos de estudo do homem. Neste processo encontram-se os objetos matemáticos, o que torna a Matemática, dentre outras coisas, uma ciência gerada para atender às demandas da sociedade.

Muito se tem discutido acerca da utilização da história da matemática no ensino de conteúdos matemáticos como recurso didático. Estabelecer conexões entre um conceito matemático e sua história pode contribuir para a formação do geral e profissional do indivíduo, bem como evidenciar o processo dinâmico de elaboração desse conhecimento de maneira significativa.

> O percurso histórico baseado no diálogo entre o passado e o presente torna o conhecimento matemático público, de modo a valorizar não só o produto, mas o processo do conhecimento construído, transpondo as barreiras do que antes era desconhecido, proporcionando maior criatividade ao processo investigativo e aos sujeitos atuantes nele (professores e alunos). (SILVA e MIRANDA, 2013, p. 2)

Os documentos oficiais, inclusive os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), mencionam a importância do uso da história em aulas de matemática, pois favorece o desenvolvimento de atitudes e valores positivos no aluno diante desta disciplina, neste sentido argumentam que:

> [...] ao verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração (BRASIL, 1998, p. 43).

Diante da necessidade de abordar a História da Matemática de diferentes formas e contextos em sala de aula, a biografia – estudo documental sobre a vida e a época de uma determinada pessoa, onde é narrado acontecimentos marcantes de sua vida ou destacado uma experiência específica – é uma das possibilidades que podem contribuir para o processo de associação da história da matemática e o ensino de conteúdos matemáticos.

Leandro (2015) enumera 13 argumentos em relação ao papel pedagógico da História para o ensino de Matemática, descritos nos estudos de Miguel (1993; 1997). Dentre estes argumentos é ressaltado que as biografias de matemáticos podem incentivar os alunos durante o processo de ensino da Matemática; podem contribuir para a formalização de conceitos matemáticos a partir das contribuições do biografado e podem proporcionar uma visão dos vários campos da Matemática a partir dos campos de atuação do matemático de interesse.

Por outro lado, Carino (1999) aponta que as biografias apresentam a singularidade de indivíduos, que através de suas vidas tornam-se tanto efeito quanto causa das transformações ocorridas em sua época histórica. “O mistério do singular é, também, fortíssimo como elemento constitutivo do imaginário cultural de qualquer sociedade ou mesmo civilização.” (CARINO, 1999, p. 154)

As biografias, em sua função educativa, constituem-se como instrumentos para a defesa de paradigmas vigentes, representando o conservadorismo, bem como para a ruptura dos mesmos, tornando a educação como incentivo à renovação. Neste sentido, a história da vida de um indivíduo pode ser utilizada em prol da coletividade.

> A biografia trata do individual, da trajetória de uma dada vida, específica, concreta. A educação, por seu turno, embora lidando com cada indivíduo, trata do coletivo: dos conhecimentos, normas, valores etc., com os quais esse ser individual irá participar da vida da sociedade, isto é, da instância coletiva (CARINO, 1999, p.169).

Com o intuito de mostrar que as realizações de um indivíduo podem influenciar o coletivo, cumprindo sua instrumentalidade educativa, apresentamos traços biográficos de George Gabriel Stokes, notável físico e matemático, de modo que seus feitos e exemplos impulsionem novos estudos e esclareçam a origem de muitos conhecimentos que hoje utilizamos. Considerando as comemorações do bicentenário do nascimento de George Stokes, balizado pela questão Que contribuições de George Gabriel Stokes estão associadas à Matemática? Para tanto, objetivou-se apresentar traços biográficos deste matemático e físico, com ênfase as pesquisas desenvolvidas por ele, em particular, para uma de seus principais resultados na área da Matemática, a partir do desenvolvimento de uma pesquisa qualitativa, de caráter bibliográfico, pautada nas possibilidades do uso de biografias no processo de ensino de conteúdos matemáticos.

2 I TRAÇOS BIOGRÁFICOS

George Gabriel Stokes nasceu há 200 anos, em 13 de agosto de 1819, em Skreen, condado de Sligo, na Irlanda do Norte. Passou toda a sua carreira na Universidade de Cambridge e, em 1889, recebeu do monarca britânico o título de 1º Baronete (Cavaleiro Hereditário). Morreu em 1 de fevereiro de 1903, aos 83 anos, onde findou sua carreira, em Cambridge, Inglaterra. Em 2019 foi realizado o Simpósio Stokes 200, no Pembroke College, Cambridge, Inglaterra, local onde trabalhou e fez contribuições excepcionais para ciências e matemática.

Figura 1: George Gabriel Stokes (1819 – 1903)

Fonte: http://www.flickr.com/photos/stokesblandfullerkingancestry/, 2018.

Filho de Gabriel Stokes (1762 – 1835) e Elizabeth Haughton (1781 – 1866), família de origem anglo-irlandesa. Seu pai foi ministro protestante da paróquia de Skreen, no condado de Sligo, e sua mãe, filha de um ministro da igreja da Kilrea, no condado de Londonderry. George Stokes era o mais novo dos seis filhos de uma família muito religiosa, fato que pode ter contribuído para que três de seus irmãos se tornassem sacerdotes.

Iniciou sua própria família ao casar-se com Mary Susanna Robinson em 4 de julho de 1857, na Catedral de São Patrício, Armagh. Deste relacionamento nasceram cinco filhos - Arthur Romney (1858 - 1916), Susanna Elizabeth (1859 - 1963), Isabella Lucy (1861 - 1934), William George Gabriel (1863 - 1893) e Dora Susanna (1868 - 1868). Passaram por alguns momentos familiares muito conturbados, visto que as filhas Susanna Elizabeth Stokes e Dora Susanna Stokes, primeira e última, morreram na infância. Posteriormente, o filho médico William George Gabriel Stokes (1863 - 1893) cometeu suicídio aos 30 anos. O mais velho, Arthur Romney, herdou sua baronia, a qual será abordada mais adiante e, a segunda filha, Isabella Lucy Stokes Humphry, em prol da memória do pai, contribuiu para a edição de “Memórias e Correspondência Científica do falecido Sir George Gabriel Stokes, Bart”, publicado pela primeira vez em1907.

George Stokes teve uma educação muito influenciada pela formação religiosa de sua família, principalmente pelo pai que o iniciou em gramática latina. Em Skreen, frequentou a escola até 1832. A partir de então foi para a escola em Dublin. Após o falecimento de seu pai, em 1835, Stokes mudou-se para Bristol College, Inglaterra, onde lá permaneceu por dois anos.

Durante sua passagem em Bristol College, Stokes formou a base de seus estudos em matemática pura, além de estudos sobre *Os Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* de Newton, também enveredou sobre tópicos de hidrostática, óptica e astronomia, aos quais se dedicou em toda sua carreira. A maior influência que recebeu naquela ocasião foi do matemático e classicista Francis William Newman, um dos professores de Bristol College.

Em 1837 ingressou para o *Pembroke College*, uma das instituições universitárias da Universidade de Cambridge. Em Cambridge, sofreu forte influência matemática do professor William Hopkins. Após quatro anos se formou como *Sênior Wrangler*, isto é, como o melhor aluno de matemática da Universidade de Cambridge, ou seja, pessoa que alcançou a maior nota geral entre os *Wranglers*, prêmio concedido aos estudantes de Cambridge que ganham graus de primeira classe em matemática. Posteriormente, em 1841 foi agraciado com do prêmio Smith – criado em homenagem ao matemático inglês Robert Smith (1689 – 1768) pelo legado – prêmio concedido anualmente para dois estudantes pesquisadores de física teórica, matemática e matemática aplicada da Universidade de Cambridge desde 1769, feitos que lhe renderam uma bolsa de estudos.

Delineando o início de sua carreira, Stokes tornou-se, aos 30 anos, professor lucasiano, cátedra de matemática da Universidade de Cambridge, criada em 1963. Stokes ocupou esta cadeira até sua morte, entretanto, devida a baixa remuneração, na década de 1850 lecionou na Escola de Minas do Governo, em Londres, para complementar sua renda.

George Stokes viveu uma brilhante trajetória na Royal Society, destinada à promoção do conhecimento científico. Em ordem cronológica, foi eleito em 1851 e, no ano seguinte, conquistou a medalha *Rumford*, condecoração que surgiu com o incentivo financeiro de Benjamin Thompson, concedida a cada dois anos a quem desenvolve pesquisas relevantes sobre calor e luz. Em 1854 foi nomeado secretário, cargo que permaneceu até 1885 quando foi eleito presidente dessa sociedade, cargo ocupado por ele durante cinco anos. Assim, se tornou o primeiro homem desde Isaac Newton, que ocupou as três posições: professor lucasiano, secretário e presidente da Royal Society.

A produção de artigos de Stokes caiu rapidamente na década de 1850, muito provavelmente em decorrência das atribuições como secretário da Royal Society a partir de 1854 e, em parte, consequências do casamento em 1857. Frequentemente assumia pesados deveres administrativos, o que o impedia de conduzir qualquer pesquisa. A partir de 1860, muitas de suas publicações relacionavam-se a pontos decorrentes de seu dever oficial de ler artigos submetidos à Royal Society.

Embora tenha enfrentado diversos problemas, sua carreira foi tão movimentada quanto o volume de seus estudos. Ocupou vários cargos paralelamente, tornando-se um grande influenciador em vários ramos da ciência. O quadro abaixo organiza as atividades desenvolvidas por Stokes durante um largo período.

PERÍODO	POSIÇÃO / CARGO
1849 – 1903	Professor lucasiano
1854 – 1885	Secretário da *Royal Society*
1859 – 1861	Presidente da Cambridge *Philosophical Society*
1885 – 1890	Presidente da *Royal Society*
1886 – 1903	Presidente do *Victoria Institute of London*
1887 – 1891	Membro do Parlamento Europeu
1887 – 1892	Câmara dos Comuns britânica
1902 – 1903	Mestre do *Pembroke College*

Quadro 1: Ocupações de Stokes

Fonte: Elaborado pelos autores, 2018.

Sempre representando a Universidade de Cambridge, mantinha uma postura conservadora. Também colaborou para a criação do Laboratório Cavendish, em meados da década de 1880, espaço criado com o objetivo agregar e orientar mentes brilhantes de Cambridge relacionadas as questões experimentais em física e matemática. Sem interesse na liderança do novo laboratório, deixou-o para físico britânico J. J. Thomson (1856 – 1940).

Em decorrência do matrimônio, assumiu o risco de perder sua bolsa no Pembroke College. No entanto, uma mudança nas regras em 1862 permitiu a permanência de homens casados, conseguindo assim retomar para a irmandade.

Além de ocupar importantes cargos, Stokes recebeu muitas condecorações por sua representatividade e contribuição para a física e a matemática. Dentre estas, recebeu o título de Baronet em 1889, dignidade hereditária britânica, criada pela primeira vez por Rei James I, da Inglaterra, em maio de 1611. Um baronete fica abaixo dos barões, mas acima de todos os cavaleiros. Na Inglaterra e na Irlanda, um baronetismo é herdado pelo herdeiro do sexo masculino, exatamente como ocorreu com seu primogênito Arthur Romney.

Um de seus reconhecimentos mais importantes foi o recebimento da Medalha Copley, em 1893, por suas pesquisas e descobertas na física. Essa medalha é considerada a de maior prestígio conferida pela Royal Society desde 1731, além de ser a mais antiga das dez medalhas concedidas.

A Universidade de Cambridge profusamente celebrou seu jubileu como professor lucasiano em 1 de junho de 1899, cerimônia foi celebrada com a participação de numerosos delegados da Europa e universidades americanas. Uma medalha de ouro comemorativa foi apresentada a Stokes pelo chanceler da universidade e os bustos de mármore de Stokes, por Hamo Thornycroft, foram formalmente oferecidos ao Pembroke College e à universidade por Lord Kelvin. Três anos depois o Pembroke College lhe concedeu sua mais alta honraria elegendo-o como mestre, pouco tempo antes de sua morte.

Figura 2: Medalha comemorativa – Sir G. G. Stokes

Fonte: https://www.flickr.com/photos/stokesblandfullerkingancestry/, 2018.

Stokes foi uma influência importante na formação das gerações posteriores em Cambridge. Foi o mais antigo do trio de filósofos naturais, a saber, os outros dois foram James Clerk Maxwell e Lord Kelvin , que contribuíram especialmente para a fama da escola de física e matemática da Universidade de Cambridge em meados do século XIX.

Seguiu o trabalho dos franceses, especialmente Lagrange, Laplace, Fourier, Poisson e Cauchy. As decorrências são notórias em seus estudos teóricos nas áreas de óptica e hidrodinâmica. Mesmo na graduação, Stokes desenvolveu muitos trabalhos experimentais, no entanto, seus interesses e investigações se estenderam para além da física, visto que seu conhecimento de química e botânica era extenso.

O catálogo de artigos científicos da Royal Society registra títulos de mais de cem memórias por ele publicadas até 1883. Algumas delas são apenas notas breves, outras são concisas declarações, todos muito bem tratados e elaborados. Alguns desses trabalhos são apresentados na seção a seguir.

3 I TRABALHOS PRODUZIDOS POR STOKES

George Gabriel Stokes foi um grande pesquisador, explorou os campos da elasticidade dos sólidos e o comportamento das ondas em sólidos elásticos, inclusive a difração da luz e a hidrodinâmica. É importante ressaltar que Stokes sempre se preocupou em investigar problemas fisicamente importantes e, procurou demonstra-los ndo matematicamente todos os resultados necessários às suas pesquisas.

Em 1842, um ano após a sua formação, Stokes começou a investigar as análises do movimento regular de um fluido incompressível em duas dimensões, dando continuidade no ano seguinte. Três anos depois divulgou a análise do atrito interno dos fluidos.

Ainda em 1845 concentrou seus estudos na natureza do éter para realizar as suas primeiras pesquisas sobre a teoria ondulatória da luz. Fresnel também investigou esta teoria, mas sua demonstração era que a Terra passava livremente pelo éter.

Um importante relatório matemático sobre suas recentes pesquisas na área da hidrodinâmica foi apresentado por ele à Associação Britânica para o Avanço da Ciência. Este fato, ocorrido em 1846, tornou Stokes conhecido na Inglaterra.

Em 1847, investigou o tema das ondas oscilatórias na água, fazendo a ressalva, em seu relatório, que necessitava de uma maior investigação a respeito deste tema. Vale ressaltar que Poison e Cauchy tinham feito uma investigação complexa a respeito deste assunto, mas com enfoque nas produções das ondas por perturbações arbitrárias no fluido, contudo, Stokes investigou as propagações de ondas oscilatórias considerando a altura comparada ao seu comprimento de onda.

Stokes retorna em 1848 a sua pesquisa feita três anos antes sobre a teoria ondulatória da luz e examina matematicamente as propriedades do éter, pois iniciou suas pesquisas nesta teoria investigando a natureza deste elemento. Ao analisar as propriedades do éter, Stokes o tratou como um meio elástico sensivelmente incompressível. Além disso, as fontes consultadas dizem que Stokes

> empregou a teoria ondulatória da luz para calcular a intensidade do ponto central dos anéis de Newton para além do ângulo crítico da luz incidente que os anéis desaparecem, deixando apenas o ponto negro central. (GILLISPIE, 2007, p. 2469)

Stokes realizou um trabalho sobre o movimento dos pêndulos em fluidos para considerar a variação da gravidade em diferentes pontos da terra. Esta publicação feita em 1849, foi uma importante contribuição para a área de Geodesia, ciência que estuda as dimensões, forma e o campo de gravidade da Terra.

George Stokes obteve como resultado, em 1849, o Teorema de Clairault, resultado da relação que ele fez da forma da superfície da Terra com a força da gravidade sobre ela. Publicou em 1850 um artigo que aplicava sua teoria do atrito interno dos fluidos ao comportamento dos pêndulos. Neste mesmo artigo

> mostrou que o comportamento das gotas d'água na atmosfera dependia quase completamente do atrito interno do ar, e com isso explicou como era possível a formação de nuvens na atmosfera terrestre. (GILLISPIE, 2007, p. 2469)

Stokes ainda contribuiu com artigos na área da matemática pura, pois eram resultados utilizados para os seus desenvolvimentos de pesquisa na física. No ano de 1852, Stokes publicou uma análise matemática sobre a composição e resolução de feixes de luz polarizada originários de fontes diferentes. Escreveu sobre as séries periódicas, em 1847, conhecidas como séries de Fourier, além disso, também desenvolveu trabalhos conhecidos como fenômenos de Stokes, linhas de Stokes e, o mais conhecido, Teorema de Stokes, o qual faremos um estudo mais detalhado na seção seguinte.

4 I TEOREMA DE STOKES

O Teorema de Stokes tem uma importância fundamental no estudo dos campos vetoriais, principalmente na análise de movimentos das rotações dos fluidos. Segundo Ávila (2011, p. 217), "permite transformar certas integrais de superfície em integrais de linha sobre os bordos das superfícies".

Vamos enunciar, a seguir, o Teorema de Stokes segundo o livro de Guidorizzi (2011, p. 253 a 255). Vale ressaltar que este teorema também está presente nos livros de Ávila (2011), Stewart (2016) e Kaplan (2016), o que diferencia-os é a notação utilizada por cada autor.

O Teorema de Stokes, segundo Guidorizzi (2011, p. 253) é enunciado da seguinte forma:

Seja $\sigma : K \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma porção de superfície regular dada por

$$\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

onde

$$x = x(u,v), y = y(u,v) \text{ e } z = z(u,v)$$

são supostas de classe $\boldsymbol{C^2 C^2}$ num aberto contendo $\boldsymbol{KK}$. Seja

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

um campo vetorial de classe $\boldsymbol{C^1 C^1}$ num aberto que contém $\operatorname{Im} \sigma$.

Nestas condições, tem-se

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{\sigma} (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n} \; dS$$

onde $\Gamma\Gamma$ é uma curva fronteira de $\boldsymbol{\sigma\sigma}$ orientada positivamente em relação à normal

$$\vec{n} = \frac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|}$$

Como neste artigo o enfoque é estudar a importância dos estudos de personagens para a História da Matemática não iremos nos ater à demonstração do teorema de Stokes. Contudo, caso queira estudá-la, pode-se aprofundar nos livros estudados neste artigo, em Ávila (2011, p. 217 a 220), Guidorizzi (2011, p. 253 a 255), Stewart (2016, p. 1004) e Kaplan (2016, p. 269 a 270). É importante notarmos que

> O teorema que hoje chamamos Teorema de Stokes foi, na verdade, descoberto pelo físico escocês sir William Thompson (1824- 1907, conhecido como lorde Kelvin). Stokes soube desse teorema por uma carta de Thomson em 1850 e pediu a seus estudantes que o demonstrassem em um exame em Cambridge, em 1854. Não se sabe se algum de seus estudantes foi capaz de fazê-lo. (STEWART, 2016, P. 1003)

Stokes, Green e William Thomson tinham o objetivo de usar dois teoremas (Teorema de Green e Teorema de Stokes) para explicar e antecipar fenômenos físicos em eletricidade e magnetismo e em escoamento de fluidos, segundo consta em Stewart (2016, p. 1007).

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudar a História da Matemática e seus personagens engrandece o conhecimento, assim como é importante estudarmos as biografias dos pesquisadores de Matemática no nível superior, campo de muitas pesquisas. Entender o processo que levou a descobertas e demonstrações instigam o pensamento científico de investigar e reinventar.

Desta forma, compreender um objeto de estudo através da História, especialmente através das biografias, é de suma importância para o desenvolvimento de novos conhecimentos que podem ser desenvolvidos a partir de um conceito existente. Conhecer a origem e contextos em que um estudo foi produzido pode levar a nuances nunca antes percebidas. Podemos encontrar a saída para questões que não foram respondidas. Entender o "como" e o "porque" enriquece tanto o processo de ensino quanto de aprendizagem.

Stokes foi um grande pesquisador principalmente na área da Física, e conhecendo sua história podemos perceber que a Matemática foi de importantíssima valia para que ele pudesse demonstrar as suas teorias. Ele tornou-se um matemático pois necessitava da Matemática para comprovar as suas hipóteses.

Retomando que o objetivo principal deste trabalho foi responder qual a importância que a Matemática teve para a vida e para as teorias estudadas por George Gabriel Stokes, concluímos que nosso personagem foi fortemente influenciado por matemáticos ao longo da vida e que a Matemática foi de fundamental importância para as demonstrações de suas teorias, era a ferramenta necessária e suficiente para a comprovação de suas pesquisas.

Com este trabalho esperamos incentivar novas produções que abordem a biografia de matemáticos de modo a contribuir para a elucidação de conteúdos e estimular a aprendizagem e a pesquisa nesta disciplina.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. *Cálculo: das funções de múltiplas variáveis*. v. 3. 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARINO, Jonaedson. *A biografia e sua instrumentalidade educativa*. Educação & Sociedade [on line], 1999. Ano XX. nº 67. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/es/v20n67/v20n67a05.pdf. Acesso em: 10/12/2018.

GILLISPIE, Charles Coulston (org.). *Dicionários de Biografias Científicas*. Tradução Carlos Almeida Pereira, et al. Rio de Janeiro: Contraponto, 2007.

GUIDORIZZI, Hamilton Luis. *Um curso de cálculo*. v. 3. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

KAPLAN, Wilfred. *Cálculo Avançado*. Tradução Frederic Tsu. 11ª reimpressão. São Paulo: Edgard Blücher, 2016.

LEANDRO, Everaldo Gomes. *As produções de um grupo de pesquisa sobre o Ensino de Matemática na Perspectiva Lógico-Histórica: estudo dos elementos históricos correlatos*. XIX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2015. Anais... Disponível em: http://www.ufjf.br/ebrapem2015/files/2015/10/gd5_everaldo_leandro.pdf. Acesso em: 10/12/2018

MIGUEL, A. *Três estudos sobre História e educação matemática*. Tese – (Doutorado em Educação) Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). São Paulo, 1993. Disponível em: http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000069861. Acesso em: 06/02/2015.

____________. *As potencialidades da História da Matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores*. Zetetike. Campinas, 1997.

SILVA, Everaldo Raiol da; MIRANDA, Tatiana Lopes de. *A investigação em História da Matemática*. X seminário nacional de história da matemática, 2013. Anais ... Disponível em: www.cle.unicamp.br/eprints/

index.php/anais---xsnhm. Acesso em: 01/06/2018.

STEWART, James. *Cálculo*. v. 2. Tradução EZ2 Translete. 5ª reimp. 3ª ed. de 2013. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

SITES CONSULTADOS

STOKES, GEORGE GABRIEL. Dicionário Completo de Biografia Científica. Disponível em: https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/stokes-george-gabriel. Acesso em: 05/12/2018.

SIR GEORGE GABRIEL STOKES, 1° BARONETE: matemático e físico britânico.
Enciclopédia britânica. Disponível em:
https://www.britannica.com/biography/Sir-George-Gabriel-Stokes-1st-Baronet#accordion-article-history. Acesso em: 05/12/2018.

GEORGE GABRIEL STOKES. Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/George_Gabriel_Stokes. Acesso em: 05/12/2018.

Teresa Mary Stokes. https://www.flickr.com/photos/stokesblandfullerkingancestry/

CAPÍTULO 22

DISCUSSÃO E ANÁLISE: UM PASSEIO NA LÓGICA LPA2V, CONCEITOS E APLICAÇÕES

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 26/06/2020

Rafael Luis da Silva
Centro Universitário São Lucas
Porto Velho - Rondônia
https://bit.ly/2UTQRMK

Clewton Rodrigues Rúbio
Universidade Federal de Rondônia - UNIR
Porto Velho - Rondônia
https://bit.ly/2CoT0tv

Natanael Camilo da costa
Universidade Federal de Rondônia – UNIR
Porto Velho-Rondônia
https://bit.ly/2Nf8r9U

Renato Lima dos Santos
Faculdades Integradas Aparício carvalho-FIMCA
Porto Velho – Rondônia
https://bit.ly/2zQPCXk

Fabio Herrera Fernandes
Centro Universitário São Lucas
Porto Velho - Rondônia
https://bit.ly/2YckFGE

Marcus Vinícius Oliveira Braga
Centro Universitário São Lucas
Porto Velho - Rondônia
https://bit.ly/2NIYR4M

Junior Cleber Alves Paiva
Faculdade de Ciências Tecnológica de Rondônia-FATEC
Porto Velho - Rondônia
https://bit.ly/31hb57a

RESUMO: Este trabalho é um recorte de um trabalho de conclusão de curso e tratará de uma família de lógicas denominadas Paraconsistente. Esta lógica pretende mostrar o tratamento de situações onde ocorrem inconsistências, ou seja, as informações tratadas não podem ser definidas pelos valores lógicos de “verdadeiro ou Falso”. Existem diversas famílias (tipos) de lógicas paraconsistentes, e neste trabalho (em particular) serão abordadas as lógicas paraconsistentes anotadas, mais especificamente, a lógica paraconsistente anotada de dois valores (LPA2v), com o objetivo de mostrar suas características significativas e exibir áreas na qual a mesma pode ser aplicada.

PALAVRAS-CHAVE: Lógica Paraconsistente Anotada.

DISCUSSION AND ANALYSIS: A WALK IN LPA2V LOGIC, CONCEPTS AND APPLICATIONS

ABSTRACT: This work is an excerpt from a course conclusion paper and will deal with a family of logic called Paraconsistent. This logic intends to show the treatment of situations where inconsistencies occur, that is, the treated information cannot be defined by the logical values of "true or false". There are several families (types) of paraconsistent logics, and in this work (in particular) the annotated paraconsistent logics will be approached, more specifically, the annotated paraconsistent logic of two values (LPA2v), in order to show their significant characteristics and show areas in the which it can be applied.
KEYWORDS: Annotated Paraconsistent Logic.

1 I INTRODUÇÃO

A lógica como matéria acadêmica é tratada em seu aspecto clássico e que remonta os primeiros estudos desenvolvidos na área, mas que sofreu alterações com o desenvolvimento de novas áreas de estudo, as lógicas não clássicas. Essas novas áreas possuem, por enquanto, um campo de atuação restrito, mais voltado à pesquisa teórica e encontram cada vez mais espaço em estudos práticos.

Por séculos predominou o pensamento aristotélico (base da lógica clássica) de atribuição de apenas dois valores lógicos, o verdadeiro e o falso, e também obedecendo a alguns princípios que serão mostrados adiante. O desenvolvimento de novas classes de lógicas, em especial, a lógica paraconsistente, trouxe uma nova gama de pensamentos e raciocínio que difere da lógica clássica.

A Lógica Paraconsistente tem especial atenção por permitir o tratamento de valor lógico com a atribuição de diversos valores, e não apenas verdadeiro e falso, permitindo tratar valores intermediários entre estes dois extremos e também valores que não conseguem encontrar nenhuma relação em valores expressos entre o valor de Verdade (V) e Falsidade (F).

2 I OBJETIVO

É discursar sobre as variadas famílias de lógicas Paraconsistente. E esta lógica pretende trabalhar com o tratamento de situações onde ocorrem inconsistências, ou seja, as informações tratadas não podem ser definidas pelos valores lógicos de Verdadeiro e Falso, e diante disso verificar suas características significativas e exibir áreas na qual a mesma pode ser aplicada.

3 I METODOLOGIA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Trata-se de um trabalho de cunho bibliográfico com o objetivo de buscar diversos autores da área com o intuito a se ter um melhor embasamento bibliográfico do assunto e com isso caracterizar, conceituar e mostrar as principais características das variadas famílias de lógicas paraconsistentes. Simultaneamente é apresentada toda a fundamentação teórica dos conceitos referente às principais diferenças das lógicas clássicas e não clássica com a lógica Paraconsistente e que esta última consiste em uma família de lógicas não clássicas que tem encontrado diversas aplicações, dentre as quais, seu uso no processo de tomada de decisão. Situações onde incerteza ou contradição se façam presentes são sérias candidatas à análise pela lógica paraconsistente. A lógica paraconsistente difere qualitativamente da assim chamada lógica clássica, a qual é bivalente e possui como valores verdade somente dois estados, verdadeiro ou falso. O princípio basilar da lógica paraconsistente consiste em derrogar um dos princípios básicos da lógica clássica, a saber, o princípio da não contradição.

4 I LÓGICA CLÁSSICA

A lógica que neste trabalho é chamada de clássica pode muito bem ser chamada de Aristotélica, dada que sua origem remonta ao período de vida do estagirita. Esta lógica possui algumas características (além da ambivalência), as quais aqui serão referidas como princípios: a) Princípio da identidade proposicional: toda proposição é igual (ou idêntica) a si mesma; b) Princípio do terceiro excluído: uma proposição assume somente dois possíveis de valores, ou ela é verdadeira (V) ou falsa (F), não sendo possível (e admissível) um valor intermediário; c) Principio da não contradição: Se uma proposição assume um valor verdade, digamos (V), então não é possível que a sua negação tenha o mesmo valor lógico, isto é, não é cabível que esta última tenha o valor (V).

5 I LÓGICAS NÃO CLÁSSICAS

As lógicas não clássicas podem ser classificadas em dois tipos: as complementares da lógica clássica e as que competem (rivalizam) com a esta última. Uma caracterização a respeito destas duas classes de lógicas é encontrada em (CARVALHO e ABE 2011):

> As lógicas pertencentes à primeira categoria são chamadas de complementares da clássica e, como o próprio nome diz, complementam aspectos que a lógica clássica não é capaz de expressar. Elas têm por base a lógica clássica e ampliam seu poder de expressão.
>
> No segundo grupo encontram-se as lógicas que rivalizam com as clássicas (também cognominadas heterodoxas). Elas restringem ou modificam certos princípios fundamentais da lógica tradicional.

6 | LÓGICA PARACONSISTENTE

A Lógica Paraconsistente teve como precursores o lógico russo N. A. Vasiliev (ARRUDA, 1990) e é apresentado em um apanhado dos trabalhos do lógico polonês J. Lukasiewicz (LUKASIEWICZ, 1971). Ambos, em 1910, independentemente publicaram trabalhos nos quais tratavam da possibilidade de uma lógica que não eliminasse, *abi nitio*, as contradições. Todavia, os trabalhos desses autores, no tocante a paraconsistência, se restringiram à lógica aristotélica tradicional. Somente em 1948 e 1954 que o lógico polonês S. Jaskowski (ver (JASKOWSKI, 1969)) e o Lógico brasileiro Newton C. A. da Costa (ver (COSTA, 1993)), respectiva e independentemente, construíram a lógica paraconsistente. Um relato mais aprofundado de cunho histórico do desenvolvimento da lógica paraconsistente pode ser encontrado em (ARRUDA, 1980).

Dito de outra forma, a lógica paraconsistente é um tipo de lógica não clássica, heterodoxa e que revoga o princípio da não contradição. De forma mais técnica, uma lógica paraconsistente é aquela que pode ser empregada como fundamento para teorias inconsistentes, mas não triviais (ver (COSTA, 1993)). Assim, uma lógica paraconsistente permite a separação dos conceitos de trivialidade e inconsistência (ver (CARVALHO e ABE, 2011) e (COSTA, 1993)), mais especificamente, uma teoria é dita ser consistente se entre seus teoremas não existirem aqueles que negam outros teoremas pertencentes à mesma teoria. Se isto acontecer, a teoria é dita se inconsistente. Assim, uma teoria dedutiva T, que tem a lógica L subjacente, é dita ser consistente se entre seus teoremas não existirem (pelo menos) dois que sejam a negação um do outro, caso contrário, a teoria T e considerada inconsistente. Ainda, se na teoria T todas as fórmulas fechadas (sentenças) de sua linguagem forem teoremas, então a mesma é dita ser trivial, caso contrário a teoria T é dita ser não trivial. Se a linguagem L for uma lógica como a clássica, a teoria T é trivial se, e somente se, for inconsistente. Contudo, se a lógica L puder servir de fundamento para teorias inconsistentes, mas não triviais, então ela é chamada de lógica paraconsistente.

7 I LÓGICA PARACONSISTENTE ANOTADA

Na lógica Paraconsistente Anotada as fórmulas proposicionais são acompanhadas de uma anotação que é a uma atribuição de valor a respeito do grau de certeza, expresso em escala numérica no intervalo real unitário [0, 1]. Intuitivamente, valores menores expressam menores graus de certeza; valores maiores expressam valores mais altos de certeza (ao leitor interessado em lógicas anotadas, ver (ABE, AKAMA e NAKAMATSU, 2015) Como o grau de certeza é tomado a partir de uma determinada informação não categórica, mas que traz evidência de fato a ser analisado, a Lógica Paraconsistente Anotada pode ser classificada como uma lógica evidencial.

8 I LÓGICA PARACONSISTENTE ANOTADA COM DOIS VALORES (LPA2V)

Denomina-se Lógica Paraconsistente Anotada com Dois Valores (LPA2v) a lógica anotada que possui duas anotações, representadas por um par ordenado (m; l), anexadas à proposição. A primeira anotação é considerada como sendo o grau de crença positiva (ou crença afirmativa/evidência favorável) e representa o quanto se crê que a proposição seja verdadeira. A segunda anotação é considerada como sendo o grau de descrença (crença negativa/evidência desfavorável), e representa o quanto se crê que a proposição seja falsa. Simbolicamente, uma proposição p em LPA2v é denotada por p(m, l).

9 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

9.1 Algoritmo de análise paraconsistente

Para que seja possível a análise paraconsistente de uma proposição utiliza-se o Algoritmo Para-Analisador, sendo seu objetivo dar uma resposta esclarecendo em qual estado lógico se encontra uma proposição.

O Algoritmo Para-Analisador tem como entrada os graus de evidência favorável (μ) e desfavorável (λ). Os valores de controle de certeza (Vscc - valor superior de controle de certeza; Vicc - valor inferior de controle de certeza) e contradição (Vscct - valor superior de controle de contradição; Vicct - valor inferior de controle de contradição) são inicializados dentro do algoritmo. A partir disto são calculados os graus de certeza ($Gc = \mu - \lambda$) e contradição ($Gct = \mu + \lambda - 1$) resultantes. Por fim, é determinado o estado lógico resultante.

A Tomada de decisão através da Lógica Paraconsistente, é uma importante ferramenta de análise em situações de inconsistência. Ela permite atribuir parecer favorável ou desfavorável conforme o Grau de Certeza (GC) definido para um empreendimento qualquer, que esteja sendo alvo de estudo para a tomada de decisão.

Conforme (CARVALHO e ABE, 2011) uma decisão, que deverá ser sensata, ou seja, baseado em um estudo, deve levar em conta uma série de fatores, onde cada um terá sua influência na decisão de realizar (parecer favorável) ou não realizar (parecer não-favorável) uma atividade em estudo.

Grande parte dos estudos que envolvem a LPA2v encontra-se ainda no campo teórico, dado que esta área desenvolveu-se muito recentemente. Assim, a maior parte das aplicações de LPA2v ainda está engatinhando de trabalhos puramente teóricos para a prática.

Uma das aplicações mais importante e que merece destaque é o uso da LPA2v para a tomada de decisão quando se apresentam dados inconsistentes (ver (CARVALHO e ABE, 2011)). Mas há um importante desenvolvimento em outras áreas, podendo citar-se, por exemplo, aplicações na área médica (MARIO, ABE, et al., 2013), redes neurais

(LOPES e ABE, 2013), inteligência artificial e robótica (FILHO, TORRES e ABE, 2006).

Outro exemplo é a aplicação em circuitos eletrônicos (FILHO, 1997). Como sabido, os circuitos eletrônicos atuais trabalham com dados compostos de uma sequência binária, ou seja, dois estados para determinar um sinal lógico. Nesse sistema os valores são exprimidos usando-se o dígitos binários 0 e 1 de conformidade com as regras da lógica clássica. Se houver uma situação em que não é possível definir um número de uma sequência para o processamento, a máquina não poderá dar nenhuma resposta, e ocorrerá o - travamento do sistema. Quando o circuito recebe dois sinais logicamente diferentes, onde deveriam ser iguais, devem-se analisar suas anotações e tomar uma decisão, estabelecendo-se qual é o valor lógico, evitando a paralisação do sistema. Assim o sistema buscará a melhor solução baseada em diversos tipos de evidência, que comparada à tradicional forma como os circuitos eletrônicos trabalham ampliariam o poder de processamento.

Assim, a Lógica Paraconsistente pode contribuir para a melhora de desempenho de vários tipos de sistemas. No caso dos circuitos lógicos, estes podem ser utilizados em várias áreas de engenharia eletrônica, principalmente Sistemas Digitais e Inteligência Artificial, onde é comum se deparar em situações em que dois sinais de valores lógicos distintos são verdadeiros, mas não se tem certeza no que se refere às conclusões que devem ser tomadas no circuito.

10 | CONCLUSÕES

No presente trabalho foi apresentada a caracterização da lógica clássica e como a mesma não traz em sua estrutura a capacidade de lidar com situações contraditórias. As Lógicas não clássicas foram apresentadas como novas formas lógicas que auxiliam ou derrogam alguns princípios básicos da lógica clássica, assim, pode-se determinar a distinção entra a Lógica Clássica e a Lógica Não Clássica, e assim permitir a abordagem da Lógica Paraconsistente. A fim de lidar com situações/informações contraditórias, foi criada uma classe de lógicas denominadas paraconsistentes, da qual a Lógica Anotada Paraconsistente é somente uma de suas variações. Em relação a esta última, foram apresentadas as suas principais características, bem como foi exposto o Algoritmo Para-Analisador, que tem como escopo produzir uma resposta (lógica) para situações em que tanto indeterminação quanto inconsistência podem estar presentes.

A principal ferramenta mostrada para aplicação de Lógica Paraconsistente é o Método de Tomada de Decisão. Dada as diversas situações de inconsistência encontradas no mundo real, e a impossibilidade de aplicação da Lógica Clássica nestas situações, faz-se necessário o uso da Lógica Paraconsistente e mais especificamente a LPA2v. Essa ferramenta mostrou potencial uso nos exemplos mostrados, e revelou uma grande simplicidade na organização de dados, que foram caracterizados por meio de valores em par ordenado.

Também foram mencionadas áreas na qual a LPA2v tem encontrado sucesso e aplicação, como a robótica, computação e circuitos eletrônicos.

Assim, com base no que foi mostrado, é válido mencionar que o estudo na área de Lógica Paraconsistente mostra-se promissora e com crescente interesse científico em seu estudo.

REFERÊNCIAS

ABE, J. M.; AKAMA, S.; NAKAMATSU, K**. Introduction to Annotated Logics - Foundations for Paracomplete and Paraconsistent Reasoning.** Heidelberg: Springer, 2015.

ARRUDA, A. I. **A Survey of Paraconsistent Logic.** IV Latin-American Symposium on Mathematical Logic, held in Santiago, December 1978. Amsterdam: North-Holland. 1980. p. 1-40.

ARRUDA, A. I. N. A. **Vasiliev e a Lógica Paraconsistente.** 1ª. ed. Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 1990.

CARVALHO, F. R. D.; ABE, J. M. **Tomadas de Decisão com Ferramentas da Lógica Paraconsistente Anotada.** São Paulo: Edgar Blücher, 2011.

COSTA, N. A. C. D**. Sistemas Formais Inconsistentes.** Curitiba: Editora UFPR, 1993.

FILHO, J. I. D. S. **Implementação de Circuitos Lógicos Fundamentados em uma Classe de Lógicas Paraconsistentes Anotadas.** São Paulo: USP, 1997.

FILHO, J. I. D. S.; TORRES, C. R.; ABE, J. M. **Robô Móvel Autônomo Emmy: Uma Aplicação eficiente da Lógica Paraconsistente Anotada.** Revista Seleção Documental, Santos, p. 19-26, Parlogike 2006. ISSN 1809-0648.

JASKOWSKI, S. **Propositional calculus for contradictory deductive systems.** Studia Logica, v. 24, n. 1, p. 143-157, 1969. ISSN 0039-3215.

LOPES, H. F. D. S.; ABE, J. M. **Aspectos práticos da implementação de Redes Neurais Artificiais Paraconsistentes.** In: ABE, J. M. **Aspectos de Computação Inteligente Paraconsistente.** São Paulo: Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo, 2013. p. 208-219. ISBN 978-85-63007-05-6.

LUKASIEWICZ, J. **On the Principle of Contradiction in Aristotle.** The Review of Metaphysics, v. 24, n. 3, p. 485-509, Mar. 1971.

MARIO, M. C. et al. **Análise cefalométrica para auxílio ao diagnóstico ortodôntico utilizando as Redes.** In: ABE, J. M. **Aspectos da Computação Inteligente Paraconsistente.** São Paulo: Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo, 2013. p. 88-107. ISBN 978-85-63007-05-6.

CAPÍTULO 23

COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS DE EULER E HEUN NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM PROVENIENTES DE APLICAÇÃO NA ENGENHARIA QUÍMICA

Data de aceite: 05/06/2020

Data da submissão: 04/04/2020

Anne Karolyne Maia Vieira
Universidade Federal Rural do Semiárido
Mossoró – Rio Grande do Norte
http://lattes.cnpq.br/5933851972088367

Matheus da Silva Menezes
Universidade Federal Rural do Semiárido
Mossoró – Rio Grande do Norte
http://lattes.cnpq.br/7790866637385232

RESUMO: A eficiência de um método numérico na resolução de uma equação diferencial varia em funções de vários fatores, como precisão, tempo de processamento, capacidade da máquina, tipo de problema, entre outros. Portanto, a análise dessa eficiência é bastante complexa. A análise desse trabalho se concentrará em um problema de valor inicial de primeira ordem, onde serão revisados métodos e técnicas já consolidadas pela literatura, como o método de Euler, que se trata de um método direto e considerado elementar para resolução de EDO's; e o método de Heun, que pode ser analisado de forma direta ou iterativa. Tais análises serão feitas a partir de aplicações comparativas, em que serão aplicados em dois estudos de caso da Engenharia Química, e serão analisados indicadores de rapidez e precisão de cada método.

PALAVRAS-CHAVE: Métodos Numéricos; Equações Diferenciais; Análises Numéricas.

COMPARISON BETWEEN EULER AND HEUN'S NUMERICAL METHODS IN RESOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER FROM APPLICATION IN CHEMICAL ENGINEERING

ABSTRACT: The efficiency of a numerical method in solving a differential equation varies in function of several factors, such as accuracy, processing time, machine capacity, type of problem, among others. Therefore, the analysis of this efficiency is quite complex. The analysis of this work will focus on a first-order initial value problem, where methods and techniques already consolidated in the literature will be reviewed, such as the Euler method, which is a direct method and considered elementary for solving ODE's; and Heun's method, which can be analyzed directly or iteratively. Such analyzes will be made from comparative applications, in which they will be applied in two case studies of

Chemical Engineering, and indicators of speed and precision of each method will be analyzed.
KEYWORDS: Numerical methods; Differential Equations; Numerical Analysis.

1 I INTRODUÇÃO

Muitos problemas fundamentais da engenharia são dados em termos de variações espaciais e temporais, e definem mecanismos de variação [4]. A abordagem de tais problemas é feita através de Equações Diferenciais, que envolve uma função desconhecida e suas derivadas. Processos químicos, fenômenos de transporte, e transferência de calor e massa são exemplos de tais fenômenos, presentes na engenharia química.

Em problemas envolvendo misturas químicas é bastante comum encontrarmos equações diferenciais lineares de primeira ordem. As misturas são constituídas por duas ou mais substâncias, sendo estas simples ou compostas, onde suas propriedades vão variar de acordo com a proporção de seus componentes e essas proporções podem ser alteradas por processos químicos [4].

Uma equação diferencial é dita ordinária (EDO) quando as derivadas da equação pertencem a uma única variável, caso contrário, se trata de uma equação diferencial parcial (EDP). Há também a classificação quanto ao índice, ou ordem, da derivada presente na equação. Sendo assim, de acordo com [2], uma ED pode ser de ordem *1, 2, 3..., n, ...*

A resolução de uma equação diferencial implica em uma família de curvas, chama-se de solução geral. Porém, na maioria dos problemas, é necessário especificar uma curva para descrever o fenômeno apresentado. Segundo [10], se existir condições cujo número coincide com a ordem da EDO, tem-se um problema de valor inicial – PVI, onde a solução geral se reduz a uma solução particular, baseada nas condições apresentadas.

A determinação dessas soluções é um dos grandes desafios da ciência. Para esse fim, há vários métodos que resolvem analiticamente uma EDO, contudo nem sempre é possível obter a solução analítica de uma EDO, neste caso, os métodos numéricos são a saída para se encontrar uma solução aproximada [2]. Outro desafio é obter uma solução numérica que se encaixam dentro de limites razoáveis, com o mínimo de erro possível. A análise desse erro, assim como apresentação de melhorias é o campo de estudo do presente trabalho.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Equações diferenciais

A fim de gerar uma melhor compreensão acerca dos estudos desenvolvidos neste trabalho, será apresentado um breve resumo da teoria fundamental relacionada as equações diferenciais. As demonstrações dos teoremas mais gerais fogem do escopo do presente trabalho e serão omitidas em seu texto, podendo serem vistas na bibliografia básica dos cursos de equações diferenciais. Para iniciar-se o estudo, faz-se necessário entender as classificações de uma equação diferencial. Entre outros autores, [4] vem mostrar que:

> **Definição 2.1** *Uma equação que contém as derivadas (ou diferencias) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial (ED).*

Tais equações, podem ser classificadas por tipo, ordem e linearidade. Quanto ao tipo, podem ser ordinárias ou parciais, onde a equação que apresenta derivadas com relação a uma única variável independente é chamada de equação diferencial ordinária (EDO).

Entretanto, se a equação apresenta derivadas com relação a duas ou mais variáveis independentes é denominada de equação diferencial parcial (EDP). A classificação por ordem, corresponde a derivada de maior ordem na equação. Quanto à linearidade, dada a EDO de *n* - ésima ordem por:

$$\frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}\right)$$

O problema a ser tratado em Equações Diferenciais Ordinárias, consiste em encontrar uma função *y* (ou solução) que satisfaça a equação citada anteriormente. Esta solução é uma função que não possui derivadas nem diferenciais e ela podendo ser considerada geral ou particular.

Uma solução particular é obtida a partir da solução geral, dando-se valores específicos às constantes. Frequentemente são dadas as seguintes condições que permitem encontrar os valores das constantes obtidas pelas integrações:

$$\begin{gathered} \mathrm{y}\,(x_0) = y_0 \\ \mathrm{y}'\,(x_1) = y_1 \\ \mathrm{y}''\,(x_2) = y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y^{(n-1)}x_{(n-1)} = y_{(n-1)} \end{gathered}$$

Para tais casos, se $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}$ então o problema é dito ser de valor inicial. Caso contrário, o problema é de valor de contorno.

Neste trabalho, serão tratados métodos numéricos para se conseguir os valores de *y(x)* a partir de problemas de valor inicial.

2.1.2 Problema de Valor Inicial (PVI)

Em geral, os métodos matemáticos utilizados para resolver uma E.D.O. de primeira ordem, fornecem como resultado uma solução geral. Contudo, na prática é de maior interesse uma solução particular, ou seja, uma função *y(x)* que satisfaça determinadas condições de contorno que são impostas sobre ela e suas derivadas, e o problema para encontrar tal função dada as condições iniciais sobre x_0, é chamado de problema de valor inicial (PVI).

Para resolver numericamente uma E.D.O. de primeira ordem com P.V.I., demonstrado na equação (2), supõem-se que ela satisfaz as condições de existência e unicidade. Esta solução numérica será encontrada para um conjunto finito de pontos (um intervalo fechado *[a, b]*) no eixo das abscissas.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

Considerando *m* subintervalos deste intervalo *[a, b],* sendo $m \geq 1$, é possível determinar $m + 1$ pontos onde as soluções numéricas devem ser calculadas. Estes pontos x_j є [a, b] são igualmente espaçados entre si por um tamanho de passo *h*, onde $x_j = x_0 + j \cdot h$. O conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ obtido denomina-se rede ou malha de *[a, b].* A solução numérica é uma funcão linear por partes, em que é aplicada a cada subintervalo, cujo gráfico apresenta-se como uma poligonal com vértices nos pontos (x_j, y_j). Embora existam métodos que apresentem uma boa precisão, os métodos numéricos sempre apresentarão erros quando comparados com as soluções exatas obtidas de um estudo analítico.

2.2 Abordagem dos métodos numéricos para resolução de equações diferenciais

2.2.1 Série de Taylor de função de uma variável

Uma função a uma variável *x*, contínua e indefinidademente derivável e aproximada em torno do ponto
x = *a*, pode ser representada por uma série de potências da forma:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \cdots \tag{3}$$

Em aplicações práticas, a Série de Taylor é utilizada em métodos numéricos, não é possível computar todos os seus termos. O que se faz, então, é considerar apenas um número finito deles, truncando a série após o n-ésimo termo, na forma:

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n(x) \qquad (4)$$

O termo apresentado como $R_n(x)$ corresponde ao erro de truncamento, que é expresso pela equação:

$$R_n(x) = f^n(\varepsilon)\frac{(x-a)^n}{n!} \qquad (5)$$

Em que $a < \varepsilon < x$.

2.2.2 Método de Euler

O método de Euler é o método mais antigo e simples para resolução de equações diferenciais ordinárias. Desenvolvido por Euler (1707 – 1783) por volta de 1768, esse método é também chamado de método da reta tangente, pois sua abordagem é feita a partir da equação da reta tangente [4]. Em um PVI, deseja-se obter as aproximações $y_1, y_2, \ldots, y_n$, para as soluções exatas $y\,(x_1), y\,(x_2), \ldots, yx_n$ uma vez que estas últimas são desconhecidas. Segundo Chapra (2006, p.555), a primeira derivada da função $y = f(x)$, em x_0, fornece uma estimativa direta da inclinação em x_o. Portanto, para determinar a projeção aproximada de um ponto seguinte (x_1) em y, é feita uma estimativa através desta inclinação, que é definida pela função da reta tangente a curva y no ponto (x_o,y_o):

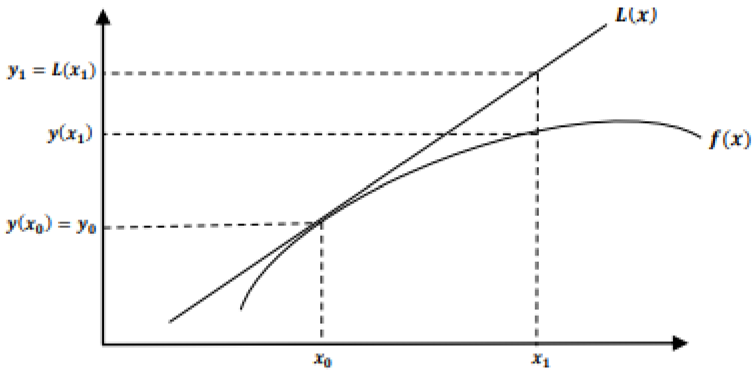


Figura 1 – Gráfico de *L(x)*

Fonte: Gráfico de *L(x) [7].*

Sabendo que o ponto inicial (x_o,y_o) é fornecido pelo problema, o primeiro passo torna-se a determinação de um valor para y_1. Para tal, aproximando-se a solução y(x) por uma série de Taylor no ponto $x=x_o$ e truncando o segundo termo, tem-se:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0).(x - x_0) \quad (6)$$

Para $x = x_1$:

$$y(x_1) = y(x_0) + (x_1 - x_0).y'(x_0) \quad (7)$$

Tendo em vista que, como valores exatos para $y\,(x_j)$ são desconhecidos, faz-se uso de valores aproximados y_j e que $(x_1 - x_0) = h$ e $y'(x_0) = f(x_0 - y_0)$, onde h é a distância entre os pontos x_j, então:

$$y_1 = y_0 + h.f\,(x_0 - y_0) \quad (8)$$

Aplicando a formulação de Taylor para todos os subintervalos, pode-se definir uma regra geral para o Método de Euler:

$$y_{j+1} = y_j + h.f\,(x_j - y_j) \quad (9)$$

Em que *j* pode assumir valores de *0,1, 2, ..., m – 1.*

2.2.3 Método de Heun

Segundo Chapra (2013, p. 561), uma grande fonte de erro, no método de Euler, é considerar que a derivada no início do intervalo pode ser usada em todo o intervalo. O método de Heun, que também é chamado de método de Euler melhorado, apresenta uma estratégia para melhorar a precisão da solução numérica. Uma das estratégias abordadas nesse método, segundo o mesmo autor, consiste em envolver a determinação de duas derivadas, uma no ponto inicial e outra no ponto final, onde a nova inclinação será dada pela média das duas derivadas. As Figuras 2 e 3 ilustram essa abordagem.

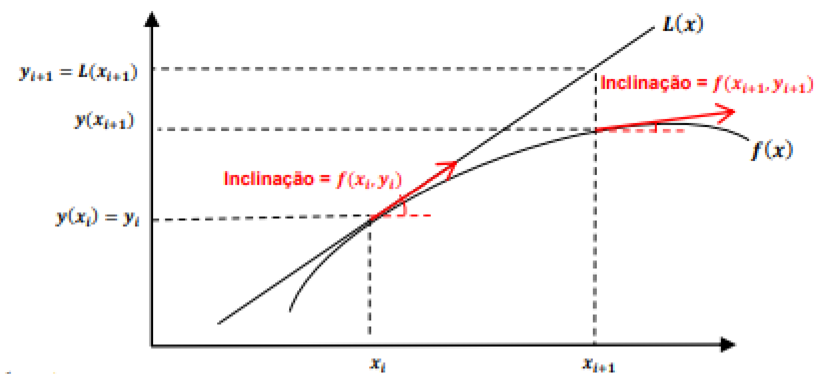


Figura 2 – Gráfico mostrando as inclinações em (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1})

Fonte: Gráfico mostrando as inclinações em (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}) [7].

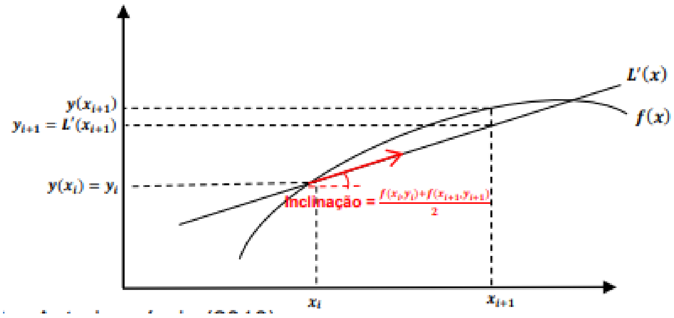


Figura 3 - Gráfico mostrando as inclinações em (x_i,y_i) formando uma nova reta $L\ (x)$ [7].

Fonte: Gráfico mostrando as inclinações em formando uma nova reta [7].

Neste método, uma estimativa antiga pode ser usada repetidamente para obter uma estimativa melhorada de $y_{i\ +\ 1}$, convergindo para uma estimativa de erro de truncamento finito.

Pode-se então considerar [10]:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(y'(x_i) + y'(x_{i+1})) \tag{10}$$

Usando o PVI, pode-se escrever as equações:

$$y'(x_i) = f\ (x_i, y_i) \tag{11}$$

$$y'(x_{i+1}) = f\ (x_{i+1,} y_{i+1}) \tag{12}$$

A partir de uma aproximação dada por:

$$y(x_{i+1}) = y_i + hf\ (x_{i,} y_i) \tag{13}$$

Tem-se:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f\ (x_{i,} y_i) + f(x_{i+1}, hf\ (x_{i,} y_i)) \tag{14}$$

Pode-se então considerar o algoritmo de Heun, dados $x_0, y_0, h.$ Gera-se aproximações para y_i para $y\ (x_i)$ através de *i = 0, 1, 2, 3...*

$$\begin{cases} k_1 = f\ (x_{i,} y_i) \\ k_2 = f\ (x_{i,} + h, y_i + hk_1) \\ \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}$$

3 I METODOLOGIA

Este estudo almeja ilustrar uma situação analítica e sua respectiva solução numérica, como também sua comparação com a solução computacional, a partir da abordagem de duas problemáticas diferentes, o Problema 1, "*P1*", que trata da análise de mistura em um tanque com salmoura e o Problema 2 "*P2*" que trata da análise de concentrações das substâncias e da temperatura em função do tempo em um motor, onde há trocas de calor. As análises e comparações serão feitas a partir da aplicação dos métodos numéricos de Euler e Heun, que possibilitarão não só a resolução das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, como também a observação das diferenças entre os métodos e suas funções computacionais.

A aplicação dos métodos nos problemas selecionados, foram feitos com auxílio computacional. As configurações do computador utilizado no teste estão indicadas nos quadros a seguir:

CARACTERÍSTICAS GERAIS	
Fabricante:	Lenovo
Modelo:	50GA
Processador:	Intel® Core™ i3-4005U CPU @ 1.70GHz
Memória RAM:	4GB
HD:	1000GB

Quadro 1 – Dados referentes ao computador utilizado nos testes

Fonte: Manual do fabricante (2015).

CARACTERÍSTICAS GERAIS	
Fabricante:	Lenovo
Modelo:	Windows 10 Profissional 64 bits

Quadro 2 – Dados referentes ao sistema operacional utilizado nos testes

Fonte: Manual do fabricante (2015).

3.1 Problemas Teóricos

Os problemas que vamos solucionar a seguir, constituem parte da análise teórica e abordam dois casos de aplicação na engenharia química, onde são aplicados os métodos numéricos citados anteriormente. Vejamos seus enunciados:

Problema 1 [2]: Considerando um tanque contendo inicialmente 300 galões de salmoura, com taxa de entrada da salmoura 3gal/min, concentração de 2lb/gal, e taxa de saída de 2gal/min. Com essas informações nota-se que o líquido acumulará no tanque a uma taxa de 1gal/min, logo em um tempo tem-se um volume de (300 + t) galões e uma taxa de entrada do sal igual a (3gal/min) * (2lb/gal) = 6lb/min. A concentração no fluxo de saída é A(t)/(300 + t), em que A(t) é a quantidade de sal no interior do tanque e a quantidade fluxo de saída de sal é A(t)/(300 + t) * (2lb/gal). Descrevendo a variação da quantidade de sal A em função do tempo t, tem-se:

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{2A}{300 + t}$$

Problema 2 [5]: Um motor resfriado a ar que gera calor com uma taxa constante $Q_{geração} = 8530\ Btu/min$.

O ar no invólucro do motor circula rápido o suficiente para que sua temperatura seja considerada uniforme e igual à temperatura do ar de saída. O ar passa através do invólucro do motor com uma vazão de 6,00 lb.mol/min, entrando com uma temperatura de 65°F, uma média de 0,200 lb.mol de ar está contida no invólucro do motor. (Desprezaremos a variação desta quantidade com a mudança da temperatura do ar.) O calor é érdido do invólucro para as vizinhanças com uma taxa de

$$\dot{Q}_{geração}\left(\frac{Btu}{min}\right) = \left[33{,}0\frac{Btu}{°F.\ min}\right](T - 65°F)$$

Suponha que o motor é ligado com a temperatura do ar dentro do invólucro igual a 65°F.

Deduza uma equação diferencial para a variação da temperatura de saída com o tempo desde a partida e a resolva.

Dados:

M = 0,2 lb.mol
C_v = 5,00 Btu/(min.°F)
$\dot{Q}_{gerado} = 8530\ \mathrm{Btu/min}$
$\dot{Q}_{perdido}$ = 33,0(T - 65) (Btu/min)

3.2 Estratégias de resolução

- Análise da resolução no tamanho do passo *h*;
- Análise de erros cometidos: erros absolutos (médio e máximo) e relativo (médio e máximo).

3.3 Algoritmos

A seguir, estão representados os algoritmos utilizados nas simulações dos métodos numéricos.

3.3.1 Algoritmo para o Método de Euler

No método, após a inicialização dos parâmetros, o laço é iniciado executando o método de Euler e, consequentemente, novos valores de y são retornados ao passo que o valor de x (i) é atualizado a cada operação com um acréscimo h no seu valor. O processo termina quando o método tiver percorrido todo o intervalo [x $_{\text{inicial}}$, x $_{\text{final}}$]. O gráfico contendo a função solução analítica e a função aproximada pelo método é gerado simultaneamente.

Método de Euler

Declare

$x_{inicial}$	(variável com o início do intervalo em x)
x_{final}	(variável com o fim do intervalo em x)
$y_{inicial}$	(variável com o valor inicial de y)
h	(variável com o tamanho do passo)
x	(vetor com os valores de x)
y_e	(vetor com o valor da solução numérica)
f	(função na variável x e y, da equação diferencial)
SA	(solução analítica do problema)

Leia $x_{inicial}, x_{final}, y_{inicial}, h, f$

$x \leftarrow vetor[x_{inicial}: h: x_{final}]$

$y_e \leftarrow y_{inicial}$

Para i **de** 1 **até** $(x_{final}$ - $x_{inicial})/h$ **faça**

$y_e \leftarrow y_e + h * f(x(i), y_e(\mathrm{i}))$

Fim para

Escreva y_e

Plot y_e , SA

Figura 4 – Algoritmo para o Método de Euler

Fonte: Autoria própria (2018).

3.3.2 Algorítimo para o método de Heun

No método, após a inicialização dos parâmetros, o laço é iniciado gerando novos valores de y partir da média das inclinações ao passo que o valor de x (i) é atualizado a cada operação com um acréscimo h no seu valor. O processo termina quando o método tiver percorrido todo o intervalo [x $_{\text{inicial}}$, x $_{\text{final}}$]. O gráfico contendo a função solução analítica e a função aproximada pelo método é gerado simultaneamente.

Método de Heun

Declare

$x_{inicial}$ (variável com o início do intervalo em x)
x_{final} (variável com o fim do intervalo em x)
$y_{inicial}$ (variável com o valor inicial de y)
h (variável com o tamanho do passo)
x (vetor com os valores de x)
y_e (vetor com o valor da solução numérica)
$k1$ (valor da primeira inclinação de cada iteração)
f (função na variável x e y, da equação diferencial)
SA (solução analítica do problema)

Leia $x_{inicial}, x_{final}, y_{inicial}, h, f$

$x \leftarrow vetor[x_{inicial}: h: x_{final}]$
$y_e \leftarrow y_{inicial}$

Para i **de** 1 **até** $(x_{final}$ - $x_{inicial})/h$ **faça**
$k1 \leftarrow y_e + h * f(x(i), y_e(i))$
$y_e \leftarrow y_e + \left(\frac{h}{2}\right) * \{[k1] + (f(x(i), y_e) \ + \ f(x(i+1), \mathrm{k1})$
Fim para
Escreva y_e
Plot y_e, SA

Figura 5 - Algorítimo para o Método de Heun

Fonte: Autoria própria (2018).

4 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

A seguir serão apresentados os resultados e discussões relacionados aos problemas teóricos propostos e a análise comportamental em diferentes casos de processos químicos.

Para resolver os problemas citados nesta análise comparativa, os métodos numéricos se apresentam como uma alternativa válida para encontrar uma solução aproximada. No presente estudo foi utilizado o cálculo analítico, e comparado o desempenho dos métodos numéricos de Euler e Heun, onde ambos são classificados como método de passo único. Segundo [2], métodos de passo único trabalham com base apenas na informação de um único ponto, e calculam uma predição futura. Os problemas envolvendo misturas químicas trabalham com problema de valor inicial, portanto esse primeiro ponto é sempre conhecido.

4.1 Resultados

4.1.1 Problema 1

A priori, analisou-se as condições estabelecidas pelo problema, juntamente com a E.D.O. fornecida:

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{2A}{300 + t}$$

Tal equação diferencial, possui a seguinte solução analítica segundo a substituição dos dados abordados pelo problema:

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{(2(t^3 + 900t^2 + 270000t + 2250000))}{(t + 300)^2}\right)$$

A partir do enunciado, sabe-se que a quantidade de sal envolvida no tanque é de 50*lb,* portanto *A (0) = 50*. Considerou-se

Na modelagem do problema em questão, foram considerados dois tamanhos de passo *h* para a análise comparativa, no algorítimo dos dois métodos, sendo eles *h = 1* e *h = 10*. A partir disso, obteve-se os seguintes resultados:

Considerando a resolução pelo método de Euler:

h	Iterações	Erro absoluto médio	Erro absoluto máximo	Erro relativo médio	Erro relativo máximo
1	401	6.7425×10^{-1}	8.1724×10^{-1}	0.1091%	0.2024 %
10	41	6.8137	8.3979	1.0969%	2.1143 %

Tabela 1 – Resultados do método de Euler para o Problema 1

Fonte: Autoria própria (2018).

Pode-se destacar a influência da utilização dos tamanhos de passo *h = 1* e *h = 10* na Figura 6:

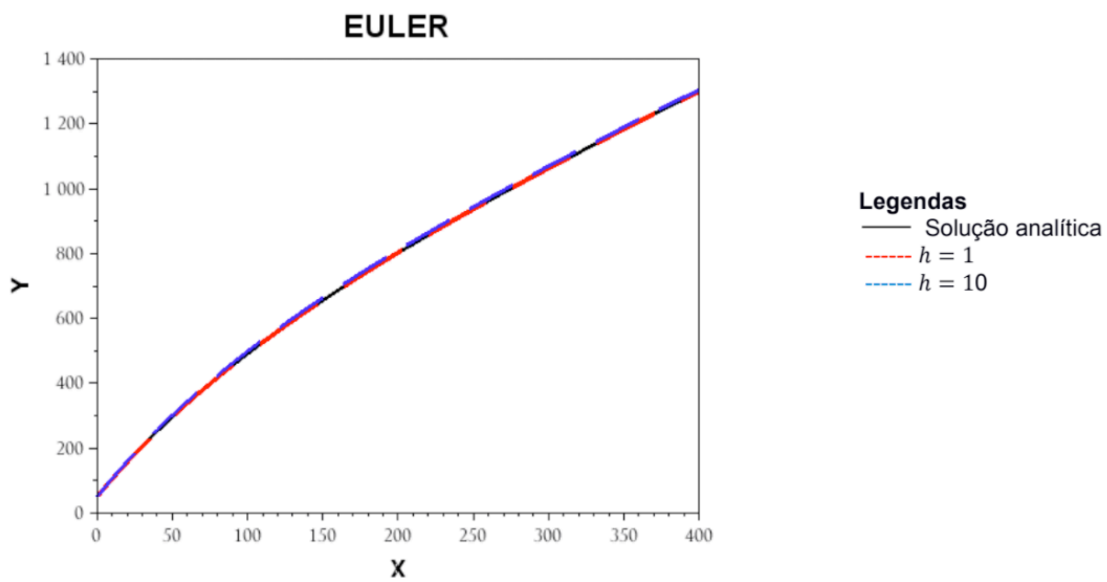


Figura 6 – Aplicação do método de Euler no Problema 1

Fonte: Autoria própria (2018).

Considerando a resolução pelo método de Heun:

h	Iterações	Erro absoluto médio	Erro absoluto máximo	Erro relativo médio	Erro relativo máximo
1	401	0.0006	0.0008	0.0001 %	0.0002 %
10	41	0.0621	0.0797	0.0105%	0.0224%

Tabela 2 – Resultados do método de Heun para o Problema 1

Fonte: Autoria própria (2018).

Pode-se destacar a influência da utilização dos tamanhos de passo *h = 1* e *h = 10* na Figura 7:

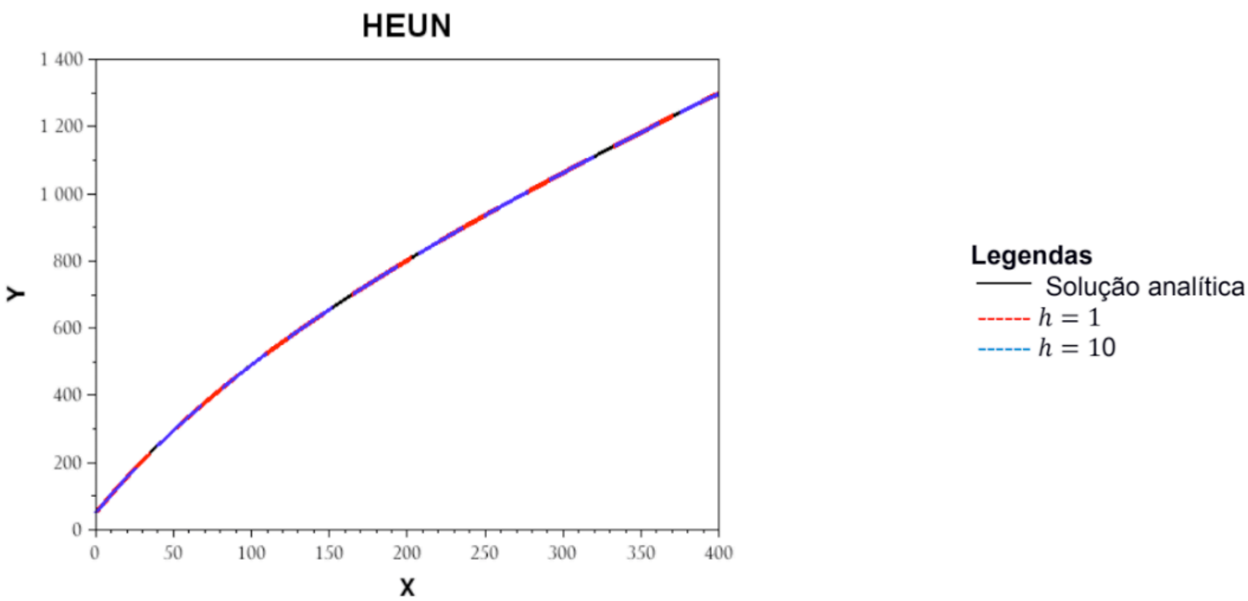


Figura 7 – Aplicação do método de Heun no Problema 1

Fonte: Autoria própria (2018).

4.1.2 Problema 2

Inicialmente é feita uma análise sobre as condições de contorno fornecidas no enunciado do problema, e a partir disso deu-se prosseguimento aos balanços de massa e energia em estado transiente, em que:

$$MC_v\frac{dT}{dt} = \dot{m}C_p(65°F - T) + \dot{Q}_{gerado} - \dot{Q}_{perdido}$$

Substituindo-se os dados destacados do enunciado, chegamos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = -74{,}9T + 13.400°C/min$$

Com PVI definido por: t = 0 e T = 65°F.

A resolução desta equação diferencial leva ao seguinte resultado analítico:

$$y(x) = -113{,}905\, e^{-74{,}9x} + 178{,}905$$

Na modelagem do problema em questão, foram considerados três tamanhos de passo *h* para a análise comparativa no algorítimo dos dois métodos, sendo eles h = 0.01, h = 0.001 e h = 0.0001. A partir disso, obteve-se os seguintes resultados:

h	Iterações	Erro absoluto médio	Erro absoluto máximo	Erro relativo médio	Erro relativo máximo
0.01	31	2.0646	25.2687	1.4223%.	20.2075%
0.001	301	0.1918	1.6206	0.1326%	1.2599%
0.0001	3001	0.0192	0.1576	0.0132%	0.1218%

Tabela 3 – Resultados do método de Euler para o Problema 2

Fonte: Autoria própria (2018).

Pode-se destacar a influência da utilização dos tamanhos de passo *h = 0.01*, *h = 0.001* e *h = 0.0001* na Figura 8:

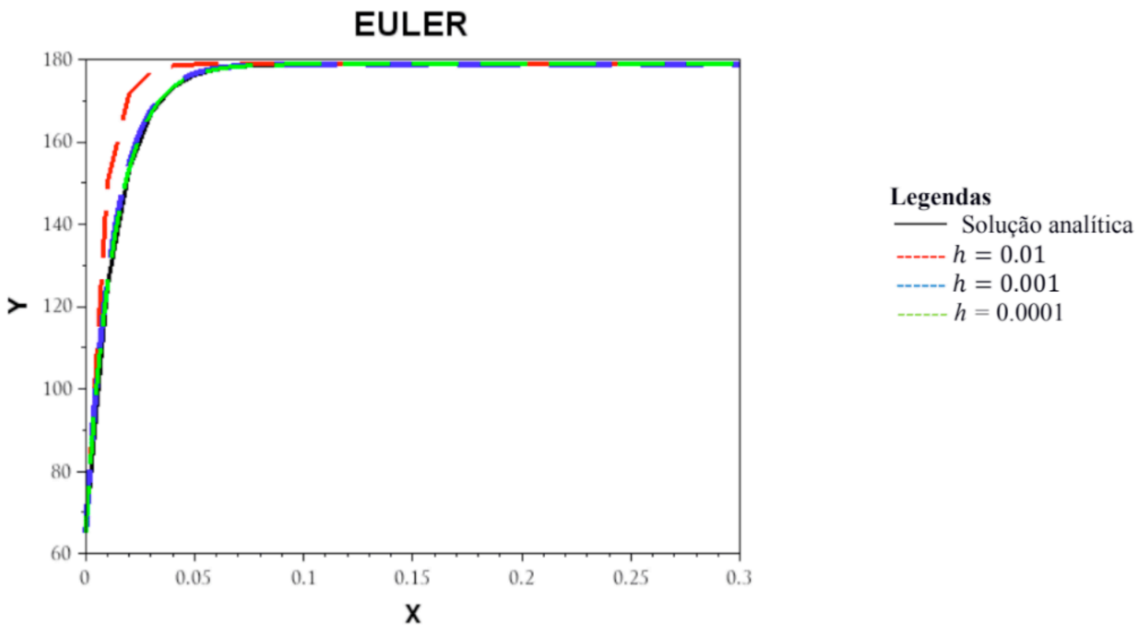


Figura 8 – Aplicação do método de Euler no Problema 2

Fonte: Autoria própria (2018)

Considerando a resolução pelo método de Heun:

h	Iterações	Erro absoluto médio	Erro absoluto máximo	Erro relativo médio	Erro relativo máximo
0.01	31	0.8726	6.7107	0.5692 %	5.3434 %
0.001	301	0.0050	0.0413	0.0035 %	0.0320%
0.0001	3001	0.0002%	0.0003	0.0001%	0.0002%

Tabela 4 – Resultados do método de Heun para o Problema 2

Fonte: Autoria propria (2018).

Pode-se destacar a influência da utilização dos tamanhos de passo *h = 0.01*, *h = 0.001* e *h = 0.0001* na Figura 9:

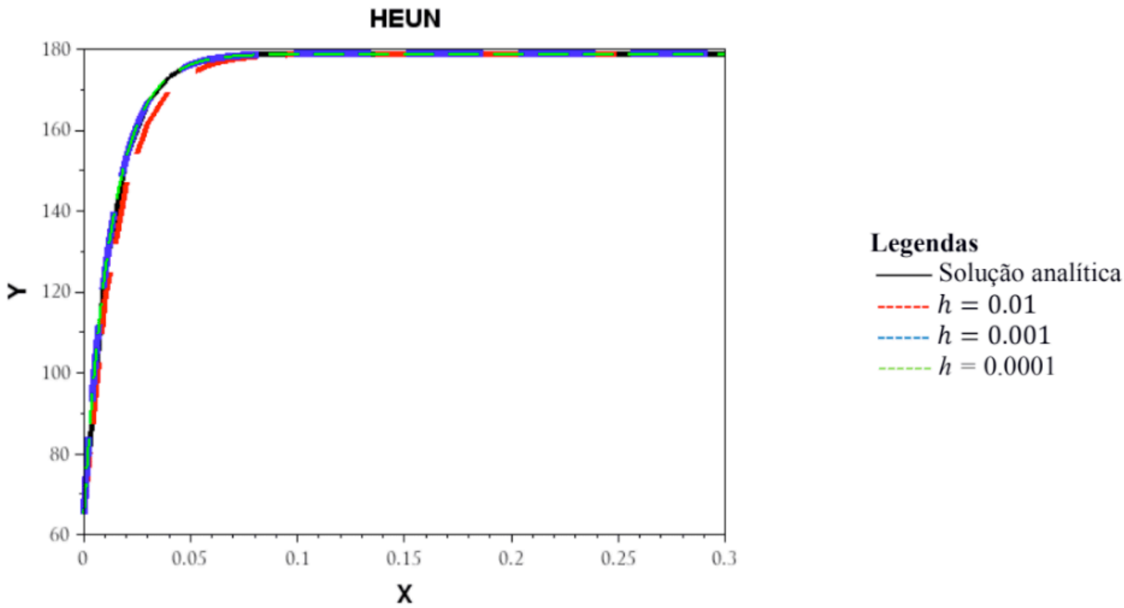


Figura 9 - Aplicação do método de Heun no Problema 4

Fonte: Autoria própria (2018).

4.2 Discussões

A partir da análise computacional comparativa dos Métodos Numéricos de Euler e Heun para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, a influência do tamanho de passo *h* no desenvolvimento dos problemas aplicados à engenharia química abordados neste trabalho, foi o que mais se destacou na comparação entre os métodos, onde a diminuição do tamanho de passo *h* acarretou diretamente na diminuição dos erros associados aos métodos, tornando-os quase nulos. Tal efeito traduz-se em um comportamente bastante aproximado ao comportamento da curva do resultado analítico. Outro efeito observado neste estudo foi o do aumento de operações diretamente proporcional à diminuição do tamanho de passo *h*, nos dois problemas abordados, em decorrência do aumento da precisão.

5 I CONCLUSÕES

Mediante apresentação dos resultados obtidos neste estudo, conclui-se que o método de Heun apresentou um menor erro em relação ao método de Euler, sendo mais apropriado para resolução destes tipos de problemas, embora a diferença entre os erros dos dois métodos possa ser considerada mínima. Além disto, obteve-se resultados importantes quanto a influência do tamanho de passo utilizado h, onde constatou-se que quanto menor o tamanho de passo h, para os dois estudos de caso considerados no presente trabalho, mais parecido se torna o comportamento da curva expressa pelos métodos de Euler e Heun com o comportamento da curva expressa a partir do resultado obtido analiticamente. Deste modo, comprova-se a melhor eficiência da utilização do método numérico de Heun na resolução dos problemas utilizados na análise comparativa deste trabalho, no ramo da Engenharia Química.

REFERÊNCIAS

[1] ALENCAR, M. S. et al. **Comparativo entre as soluções analítica e numérica de um modelo de mistura de soluções salinas.**

[2] Chapra. S. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas**. 3 ed., Bookman, Porto Alegre, 2013.

[3] CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos numéricos para engenharia: QUINTA EDIÇÃO**. 5 ed. São Paulo: Mc Graw Hill, 2006. 785 p.

[4] D.G. Zill. **Equações Diferenciais com aplicações em modelagem.** 9 ed., Cengage Learning, São Paulo, 2011.

[5] FELDER, Richard M.; ROUSSEAU, Ronald W.. **Princípios elementares de processos químicos: TERCEIRA EDIÇÃO**. 3 ed. São Paulo: LTC, 576 p.

[6] FREITAS, Igor R. B. De; MENEZES, Matheus Silva De**. Analise diferencial da vibração livre com amortecimento viscoso de um sistema massa-mola para diferentes fluidos.**

[7] FREITAS, Sérgio Roberto De. **Métodos numéricos: métodos numéricos.** 1 ed. Mato Grosso do Sul: UFMGS, 2000. 224 p.

[8] MENDONÇA, Pedro Thiago Vilela**. Comparativo entre os métodos numéricos de euler, heun e runge-kutta na resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.**

[9] PEDROSA, **Diogo Pinheiro Fernandes. Resolução numérica de equações diferenciais ordinárias.**

[10] T. Brown, H.E. Lemay, B.E. Bursten **Química: a ciência central**. 9 ed., Prentice Hall, São Paulo, 2005.

CAPÍTULO 24

A NUMERICAL APPROXIMATION FOR SOLUTIONS OF FREDHOLM FUNCTIONAL-INTEGRAL EQUATIONS BY CHEBYSHEV TAU METHOD

Data de aceite: 05/06/2020
Data de submissão: 03/04/2020

Juarez dos Santos Azevedo
Universidade Federal da Bahia, Instituto de Ciência, Tecnologia e Inovação - ICTI
Camaçari – Bahia
http://lattes.cnpq.br/1750344103498728

Suzete Maria Silva Afonso
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Rio Claro – São Paulo
http://lattes.cnpq.br/3759335100023544
https://orcid.org/0000-0003-3070-5856

Mariana Pinheiro Gomes da Silva
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, CETEC - Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Cruz das Almas – Bahia
http://lattes.cnpq.br/1848784077302555
https://orcid.org/0000-0003-1801-4227

Adson Mota Rocha
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, CETEC - Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Cruz das Almas – Bahia
http://lattes.cnpq.br/5772070728434925

ABSTRACT: In this work we consider the general functional-integral equation:

$$u(x) = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x,y) g\big(y, u(y)\big) dy\right) + h(x), \qquad x \in [0,1]$$

We use Chebyshev Tau method to determine the approximations of the solutions and provide a convergence analysis in the space of square-integrable function. We added some numerical experiments to illustrate the results of this work.

KEYWORDS: Fredholm functional-integral equation, Chebyshev Tau method.

UMA APROXIMAÇÃO NUMÉRICA PARA SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES INTEGRAL-FUNCIONAIS DE FREDHOLM PELO MÉTODO DE TAU CHEBYSHEV

RESUMO: Neste trabalho consideramos a equação integral-funcional geral:

$$u(x) = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x,y) g\big(y, u(y)\big) dy\right) + h(x), \qquad x \in [0,1]$$

Usamos o método de Tau Chebychev para determinar as aproximações das soluções e fornecemos uma análise de convergência no espaço das funções quadrado integráveis. Adicionamos alguns exemplos numéricos para ilustrar os resultados deste trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: Equação integral-

funcional de Fredholm, Método de Tau Chebyshev.

1 I INTRODUCTION

Functional-integral equations of several type have been studied in a vast literature (Browder, 1971, Sheng et al., 2016, Rocha et al., 2018) and references therein. Motivated by these works, we consider the following nonlinear functional-integral

$$u(x) = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x,y) g\big(y, u(y)\big) dy\right) + h(x), \qquad x \in [0,1]. \qquad (1.1)$$

Equations of this type arise very often in many applications in engineering, economics and mathematical physics (Banaś; Knap, 1989, Emmanuele, 1991), justifying the importance of your study.

The main purpose is to implement the Tau method for nonlinear functional-integral equation and produce an error analysis which theoretically justifies an exponential-like rate of convergence. The numerical discretization is done with the Chebyshev Tau method (Ansari and Mokhtary, 2019), resulting in a system of nonlinear equations that are subsequently solved by using a Picard iterative method (Rocha et al., 2018). In this step we show that the approximate solution converges, under particular conditions, to an exact solution in space of square-integrable function, and finally analyze the rate of its convergence.

In the following section, we present preliminary concepts and highlight that, under certain conditions, eq. (1.1) has a unique solution in L^2 ([0,1]) space, which can be obtained as the limit of successive approximations.

2 I PRELIMINARIES

Let $h: [0,1] \to \mathbb{R}$ be a Lebesgue measurable function. We say that h is square integrable in [0,1] or that h belongs to L^2 ([0,1]) space if

$$\int_0^1 |h(x)|^2 dx < \infty.$$

Moreover, if $h \in L^2([0,1])$, we define

$$||h||_2 = \left(\int_0^1 |h(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

In what follows, we assume that $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is square integrable in [0.1] and the function $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ in (1.1) satisfies the Caratheodory conditions, that is,

i. $f(x,y)$ is continuous in x for each fixed y;

ii. $f(x,y)$ is measurable in x for each fixed y;

iii. .There is a non-negative Lebesgue-integrable function $m:[0,1]\to\mathbb{R}$ such that

$$|f(x,y)|\leqslant m(x), \text{ for all } (x,y)\in[0,1]\times\mathbb{R}.$$

Theorem 2.1. Assume that the following conditions are satisfied:

(A1) There are a non-negative function $h_1\in L^2([0,1])$ and a non-negative constant b_1 such that

$$|f(x,y)|\leqslant h_1(x)+b_1|y|,$$

for almost every $x\in[0,1], y\in\mathbb{R}$.

(A2) The kernel *k* $(x,.)$ is measurable, belongs to the space for all L^2 ([0,1]), x є [0,1], and

$$\left(\int_0^1|\kappa(x,y)|^2dy\right)^{1/2}\leq M_1(x),\quad \text{for any } x\in[0,1],$$

where M_1 is a non-negative function in $L^2([0,1])$.

(A3) The function $g:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfies Caratheodory conditions and

$$|g(s,z)|\leqslant b_0(s)+c_0|z|,$$

where b_0 is a non-negative function in L^2 ([0,1]) and C_0 is a non-negative constant.

(A4) The function $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfies Lipschitz condition in the second variable, i.e., there is $M>0$ such that

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant M|y_1-y_2|,\qquad \text{for any } x\in[0,1] \text{ and } y_{1,}\ y_2\in\mathbb{R}.$$

(A5) The function $g:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfies Lipschitz condition in the second variable, i.e., there is $L>0$ such that

$$|g(s,z_1)-g(s,z_2)|\leqslant L|z_1-z_2|,\qquad \text{for any } s\in[0,1] \text{ and } z_{1,}\ z_2\in\mathbb{R}.$$

Under such hypotheses, the successive approximation

$$\begin{cases} u_0(x)=0, \\ u_{n+1}(x)=f\left(x,\int_0^1\kappa(x,y)g(y,,u_n(y))dy\right)+h(x), \quad n=0,1,2,3,\dots \end{cases}$$

converges almost everywhere to the exact solution of (1.1) provided

$$\int_0^1 C^2|M_1(x)|^2dx := \Gamma^2 < 1, \quad \text{where } C = ML. \qquad (2.1)$$

Therefore, eq. (1.1) has a unique solution in $L^2([0,1])$, which can be obtained as the limit of successive approximations.

Proof. The ideas to prove this result follow from (Afonso et al., 2019). Basically, we consider the operator

$$(Au)(x) = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x,y)g\big(y,u(y)\big)dy\right) + h(x), \qquad x \in [0,1],$$

and we show that it is a map from $L^2([0,1])$ into $L^2([0,1])$.

By virtue of condition (2.1), $A: L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ is a contractive map. We apply Banach's fixed point theorem and obtain a unique solution to the abstract equation $Au = u$. Consequently, it is possible to guarantee the unique solvability of (1.1), where the method of successive approximation converges for starting point $u_0 \equiv 0$.

3 I NUMERICAL METHOD

Let us suppose that

$$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\phi_j(x), \qquad (3.1)$$

and $u_N(x)$ represents the Tau approximation, i.e.,

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j\phi_j(x) = \boldsymbol{u}_N^T\boldsymbol{\Phi}(x), \qquad (3.2)$$

where

$$\boldsymbol{u}_N = (a_1, a_2, \dots, a_N, 0, \dots)^T \text{ and } \boldsymbol{\Phi}(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_N(x), 0, \dots)^T$$

are shifted Chebyshev polynomials of degree defined on interval [0,1].

Assume also that

$$h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j\phi_j(x) = \boldsymbol{h}_N^T\boldsymbol{\Phi}(x), \qquad (3.3)$$

with $\boldsymbol{h}_N = (h_1, h_2, \dots, h_N, 0, \dots)^T$.

Substituting relations (3.2) and (3.3) in (1.1), we get

$$\boldsymbol{u}_N^T\boldsymbol{\Phi}(x) = \boldsymbol{h}_N^T\boldsymbol{\Phi}(x) + f\left(x, \int_0^1 \kappa(x,y)g\big(y, \boldsymbol{u}_N^T\boldsymbol{\Phi}(y)\big)dy\right). \qquad (3.4)$$

Let $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ be the Chebyshev nodes and the vector that contains values of the integral (3.4) at the same nodes. Following (Driscoll, 2010), the integral into (3.4) can be approximated in matrix form

$$\boldsymbol{V} = \left[\begin{pmatrix} \kappa(x_1,x_1) & \kappa(x_1,x_2) & \cdots & \kappa(x_1,x_N) \\ \kappa(x_2,x_1) & \kappa(x_2,x_2) & \cdots & \kappa(x_N,x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(x_N,x_1) & \kappa(x_N,x_2) & \cdots & \kappa(x_N,x_N) \end{pmatrix}\right] \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_N \end{bmatrix} g\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_N^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\right), \quad (3.5)$$

where

$$g\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_N^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\right) = \left(g\left(x_1, \boldsymbol{u}_N^T \boldsymbol{\Phi}(x_1)\right), g\left(x_2, \boldsymbol{u}_N^T \boldsymbol{\Phi}(x_2)\right), \dots, g\left(x_N, \boldsymbol{u}_N^T \boldsymbol{\Phi}(x_N)\right)\right)^T$$

and the set $\{w_i\}$ for fixed i are quadrature weights relative to integration interval [0,1], with the integration nodes $\{x_i\}$. For more details on the numerical implementation of this integral see (Trif; Ionescu, 2011).

Note that expression (3.5) can be written as

$$\boldsymbol{V} = \mathbf{K}\boldsymbol{W} g\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_N^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\right). \quad (3.6)$$

Using collocation about N Chebyshev nodes and substituting relation (3.6) into (3.4), we obtain

$$\boldsymbol{u}_N \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}_N^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) + f\left(\boldsymbol{X}, \mathbf{K}\boldsymbol{W} g\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}_N^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\right)\right).$$

Due to the nonlinearity of this expression, we resort to an iterative procedure. In this case we choose the Picard iterative method that consists of determining a sequence (u_N^{k+1}) in which the following relation of recurrence holds

$$\boldsymbol{u}_N^{(\mathbf{k+1})} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}_N^T \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) + f\left(\boldsymbol{x}, \mathbf{K}\boldsymbol{W} g\left(\boldsymbol{x}, \left(\boldsymbol{u}_N^{(K)}\right)^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\right)\right), \quad k \geq 0.$$

The procedure is terminated provided that one of the following criteria is satisfied

$$k > k_{max} \qquad \text{or} \qquad r_k = ||\boldsymbol{u}_N^{(k)} - \boldsymbol{u}_N^{(k-1)}|| < tol_1.$$

Once we get the solution vector $\boldsymbol{u}_N^{(k)}$ we have to relate it to the basis functions $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ as follows

$$\boldsymbol{u}_N^{(k)} \boldsymbol{\Phi}(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j^{(k)} \phi_j(x) = u_N^{(k)}(x).$$

Finally, we obtain a solution $u_N^{(k)}$ that must satisfies

$$u_N^{(k)}(x) = h(x) + f\left(x, \int_0^1 k(x,y)g\left(y, u_N^{(k)}(y)\right)dy\right) + h(x), \forall x \in [0,1].$$

4 I CONVERGENCE ANALYSIS

We provide a convergence analysis of the proposed method for the numerical solution of (1.1) In our subsequent analysis, some definitions and results are needed.

Firstly, we introduce the orthogonal projection

$$\Pi_N : L^2([a,b]) \to \mathcal{P}_N$$

which is a mapping that, for any $v \in L^2([0,1])$, satisfies

$$(v - \Pi_N v, \phi) = 0, \qquad \forall \phi \in \mathcal{P}_N,$$

where P_N is the space of all algebraic polynomials of degree up to N. Concerning the truncation error of a Chebyshev interpolation, the following estimates holds (Atkinson; Han, 2009)

$$\|v - \Pi_N v\|_2 \leq N^{-m}|v|_m, \qquad |v|_m = \left\|\frac{\partial^m v}{\partial x^m}\right\|_2 \tag{4.1}$$

for $m > 0$.

The next result is devoted to provide a convergence analysis for the numerical scheme showing that the rate of convergence is exponential. Consider integral operator

$$(Ku)(x) = \int_0^1 \kappa(x,y)g(y,u(y))dy$$

and Nemytskii operator

$$(Fu)(x) = f(x,u(x)).$$

Theorem 4.1. Let u_N be the Tau approximation $e_N(x) = u(x) - u_N(x)$ of the exact solution of the Fredholm nonlinear functional-integral equations and consider the error function $e_N(x) = u(x) - u_N(x)$ and the operator

$$(FKu_N)(x) = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x,y)g(y,u_N(y))dy\right).$$

If the functions k, f and g are sufficiently smooth and satisfy assumptions (A2), (A4) and (A5), respectively, moreover condition is satisfied, then we have

$$\|e_N\|_2 \leq D\left(N^{-k_1}|h|_{k_1} + N^{-k_2}|(FKu_N)(x)|_{k_2} + N^{-k_3}|\kappa|_{k_3}\|u_N\|_2\right),$$

where $k_i \geq 0, i = 1,2,3$, given that is sufficiently large and D is a constant independent of N.

Proof. The ideas of this proof come from (Ansari; Mokhtary, 2019). Let

$$\begin{aligned} e_N(x) &= h(x) - \Pi_N h(x) \\ &\quad + f\left(x, \int_0^1 \kappa(x,y) g(y, u(y)) dy\right) - \Pi_N f\left(x, \int_0^1 \Pi_N \kappa(x,y) g(y, u(y)) dy\right) \\ &= (FKu)(x) - (FKu_N)(x) + J_0 + J_1 + J_2 \end{aligned}$$

and consider the difference

$$J_0 = h(x) - \Pi_N h(x),$$

with

$$J_1 = f\left(x, \int_0^1 \kappa(x,y) g(y, u_N(y)) dy\right) - \Pi_N f\left(x, \int_0^1 \kappa(x,y) g(y, u_N(y)) dy\right),$$

and

$$J_2 = \Pi_N\left(f\left(x, \int_0^1 \kappa(x,y) g(y, u_N(y)) dy\right) - f\left(x, \int_0^1 \Pi_N \kappa(x,y) g(y, u_N(y)) dy\right)\right).$$

Since f and g are Lipschitz in the second variable, from conditions (A4) and (A5), we have

$$\begin{aligned} |e_N(x)| &\leq |(FKu)(x) - (FKu_N)(x)| + |J_0| + |J_1| + |J_2| \\ &\leq ML\left|\int_0^1 \kappa(x,y) e_N(y) dy\right| + |J_0| + |J_1| + |J_2| \\ &\leq ML\left(\int_0^1 |\kappa(x,y)|^2 dy\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |e_N(y)|^2 dy\right)^{1/2} + |J_0| + |J_1| + |J_2| \\ &\leq MLM_1(x)\left(\int_0^1 |e_N(y)|^2 dy\right)^{1/2} + |J_0| + |J_1| + |J_2|, \end{aligned}$$

where the last inequality was obtained using condition (A2).

Applying the L^2 norm for both members of the above inequality we have

$$\|e_N\|_2 \leq \Gamma\|e_N\|_2 + \|J_0\|_2 + \|J_1\|_2 + \|J_2\|_2,$$

whence we have

$$(1-\Gamma)\|e_N\|_2 \leq \|J_0\|_2 + \|J_1\|_2 + \|J_2\|_2.$$

By (2.1), $\Gamma < 1$, thus we obtain $C_1 > 0$ such that

$$\|e_N\|_2 \leq C_1 \left(\|J_0\|_2 + \|J_1\|_2 + \|J_2\|_2\right). \tag{4.2}$$

Employing inequality (4.1), an estimate for J_0 is given below

$$\|J_0\|_2 \leq N^{-k_1}|h|_{k_1}, \tag{4.3}$$

where K_2 > exists by virtue of smoothness of

Using again , we get

$$\|J_1\|_2 \leq N^{-k_2}|(FKu_N)(x)|_{k_2}, \tag{4.4}$$

where $k_2 > 0$ exists due to smoothness of f.

Since Π_N is an orthogonal projection, then $\|\Pi_N\|_2 = 1$. Moreover, as f and g are Lipschitz in the second variable and , we get

$$\begin{aligned}
\|J_2\|_2 \ &\leq \left\| f\left(x, \int_0^1 \kappa(x,y) g\big(y, u_N(y)\big) dy\right) - f\left(x, \int_0^1 \Pi_N \kappa(x,y) g\big(y, u_N(y)\big) dy\right)\right\|_2 \\
&\leq M \left\| \int_0^1 |\kappa(x,y) - \Pi_N\kappa(x,y)| \left|g\big(y, u_N(y)\big) - g(0,0)\right| dy \right\|_2 \\
&\leq ML \left\| \int_0^1 |\kappa(x,y) - \Pi_N\kappa(x,y)|\, |u_N(y)| dy \right\|_2 \qquad\qquad (4.5) \\
&\overset{(*)}{\leq} C \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \big(\kappa(x,y) - \Pi_N\kappa(x,y)\big)^2 dy \right) \left(\int_0^1 \big(u_N(y)\big)^2 dy \right) dx \right)^{1/2} \\
&\leq CN^{-k_3}|\kappa|_{k_3}\|u_N\|_2,
\end{aligned}$$

where $k_3 > 0$ exists thanks to smoothness of k, and $C = ML$ as in (2.1). We note that to obtain inequality $(*)$ it was used Hölder's inequality (Folland, 1999).

Combining (4.3), (4.4) and (4.5) in (4,2) we have

$$\|e_N\|_2 \leq C_1\big(N^{-k_1}|h|_{k_1} + N^{-k_2}|(FKu_N)(x)|_{k_2} + CN^{-k_3}|\kappa|_{k_3}\|u_N\|_2\big). \tag{4.6}$$

Let $C_2 \geqslant max\{1, C\}$ be a constant such that

$$N^{-k_1}|h|_{k_1} \leq C_2 N^{-k_1}|h|_{k_1}, \tag{4.7}$$

$$N^{-k_2}|(FKu_N)(x)|_{k_2} \leq C_2 N^{-k_2}|(FKu_N)(x)|_{k_2} \tag{4.8}$$

and

$$CN^{-k_3}|\kappa|_{k_3}\|u_N\|_2 \leq C_2 N^{-k_3}|\kappa|_{k_3}\|u_N\|_2. \tag{4.9}$$

Therefore, $D = C_1 C_2$ taking , we conclude, by (4.6), (4.7), (4.8) and (4.9), that

$$\|e_N\|_2 \le D\left(N^{-k_1}|h|_{k_1} + N^{-k_2}|(FKu_N)(x)|_{k_2} + N^{-k_3}|\kappa|_{k_3}\|u_N\|_2\right),$$

which completes the proof.

5 I NUMERICAL EXAMPLES

For the numerical application, we use Picard iterative process and admit that the convergence is achieved when the stopping criterion has tolerance $tol = 1e - 12$ in L^2 in norm and $tol = 1e - 12$ in L^2 norm and $k_{max} = 1000$.The error was computed using the following relative measures

$$err = \frac{\left\|u - u_N^{(k)}\right\|_2}{\|u\|_2}. \tag{5.1}$$

Here we employ the Chebyshev series and in the computation MATLAB package Chebpack available at the Mathworks website:

https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/32227-chebpack as a stand-alone algorithm for solving nonlinear systems and investigating the performance of the numerical solution.

Example 1. Consider the nonlinear functional-integral equation with exact solution $u(x) = sin(x)$ Take

$$\kappa(x,y) = sin(x+y), \;\; f(x,y) = sin(y)$$

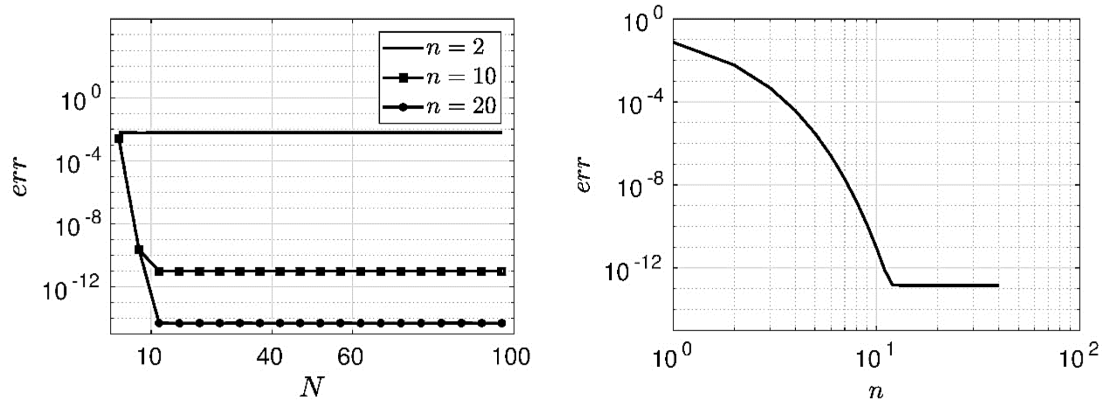
and

$$g(x,y) = \frac{|y|}{10}.$$

The function is defined by

$$h(x) = -\sin\left(\frac{(\cos(x) - \cos(1+x)\sin(1))}{20}\right) + \sin(x).$$

We point out that all of the hypotheses of Theorem 2.1 are satisfied and there exists a unique solution for this equation. Furthermore, the hypotheses of Theorem 4.1 are also satisfied and we can guarantee the convergence for this solution.



(a) (b)

Figure 1. Relative error corresponding to Example 1: (a) of the numerical solution in relation to number of integration points N putting the iterations $n = 2, 10, 20$ using semi-log scale; (b) of the numerical solution on iterations number from to 0 using log-log scale.

Figure 1(a) establishes the minimum number of integration points in terms of error on L^2 norm. We noticed that 10 integration points are enough to have convergence as the number of iterations increases. It suggests us to conclude that few integration points are sufficient to preserve the convergence of the method when the hypotheses of Theorem 4.1 are satisfied.

Figure 1(b) depicts the exponential decay of the relative error considering a variation in the iterations number n, from 1 to 40. Recalling Fig. 1(a), note that for $n > 10$ this decay becomes almost imperceptible.

Example 2. Let us consider the nonlinear functional-integral equation:

$$u(x) = x^2 - \sin\left(\frac{51 + 8x}{192}\right) - \sin\left(\int_0^1 \kappa(x,y)u(y)\,dy\right),$$

with kernel

$$\kappa(x,y) = \begin{cases} 1 + x - y & 0 < y \leq 1/2, \\ -1 & \frac{1}{2} < y \leq 1. \end{cases}$$

Here the exact solution in is given by

$$u(x) = x^2.$$

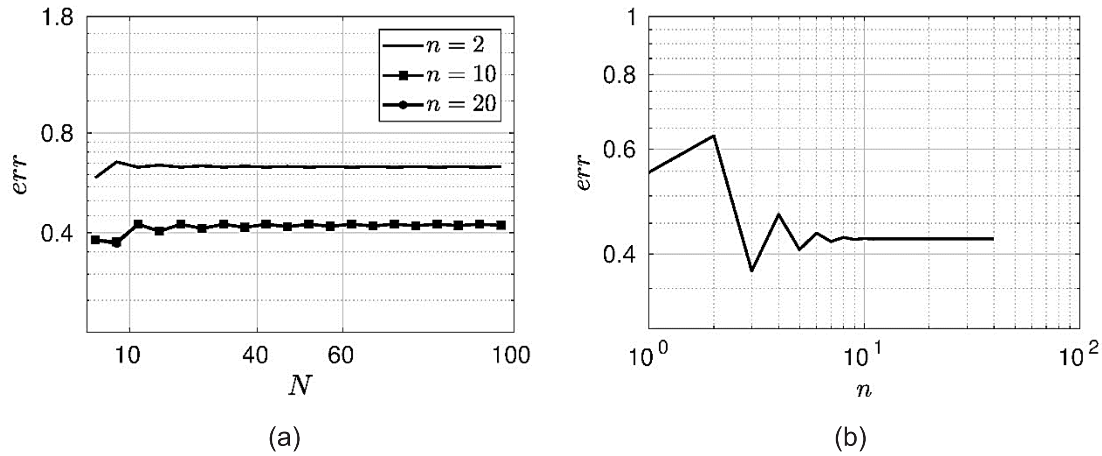


Figure 2. Relative error corresponding to Example 2: (a) of the numerical solution in relation to number of integration points N putting the iterations $n = 2, 10, 20$ using semi-log scale; (b) of the numerical solution on iterations number n, from 1 to 40 using log-log scale.

In this example we can see that the kernel is discontinuous, contrary to the hypotheses of Theorem 4.1. Consequently, disagreeing with the previous experiment, Fig. 2(a) shows that the increase in the number of integration points does not contribute satisfactorily to the convergence of the method. This is confirmed by Fig. 2(b), whose exponential convergence is violated.

CONCLUSION

This paper proposes a numerical method for Fredholm functional-integral equations based on Chebyshev basis functions considering the Tau method. The hypotheses of Theorem 2.1 are sufficient for conclude that the functional-integral equation (1.1) has a unique solution in $L^2([0,1])$ space. Moreover, Example 1 shows that assumptions from Theorem 4.1 were satisfactory to ensure the convergence of the Tau method for a moderate number of iterations. On the other hand, through Example 2 we can infer that piecewise continuous kernel causes damage to exponential convergence, restricting the results to a sufficiently regular kernel.

REFERENCES

AFONSO, S. M. et al. **Existence, uniqueness, and approximation for solutions of a functional-integral equation in Lp spaces**. TEMA, São Carlos, n. 3, v. 20, p. 403 – 415, 2019.

ANSARI, H.; MOKHTARY, P. **Computational Legendre Tau method for Volterra Hammerstein pantograph integral equations**. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, Iran, v. 45, p. 475-493, April 2019.

ATKINSON, K.; HAN, W. **Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework**, Texts in Applied Mathematics, New York: Springer, 2009. 576 p.

BANAŚ, J.; KNAP, Z. **Integrable solutions of a functional-integral equation**. Revista Matemática de la

Universidad Complutense de Madrid. Madri, n. 1, v. 2, p. 31-38, 1989.

BROWDER, F. E. **Nonlinear functional analysis and nonlinear integral equations of Hammerstein and Urysohn type**. In: Zarantonello, E. H. (Ed.), Contributions to Nonlinear Functional Analysis. New York: Academic Press, 1971, p. 425 – 500.

DE FIGUEIREDO, D. G.; GUPTA, C. P. **On the variational method for the existence of solutions of nonlinear equations of Hammerstein type**. Proceedings of the American Mathematical Society, Providence, n. 2, v. 40, p. 470 – 476, October 1973.

DRISCOLL, T. A. **Automatic spectral collocation for integral, integro-differential, and integrally reformulated differential equations**. Journal of Computational Physics, United States, n. 17, v. 229, p. 5980 – 5998, August 2010.

EMMANUELE, G. **About the existence of integrable solutions of a functional-integral equation**. Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid. Madri, n. 1, v. 4, p. 65 - 69, 1991.

EMMANUELE, G. **Integrable solutions of a functional-integral equation**. The Journal of Integral Equations and Applications, n. 1, v. 4, p. 89 – 94, 1992.

FOLLAND, G. B. **Real analysis: modern techniques and their applications.** Pure and Applied Mathematics, New Jersey: Wiley, 1999.

IBRAHIM, I. A. **On the existence of solutions of functional integral equation of Urysohn type**. Computers & Mathematics with Applications, n. 10, v. 57, p. 1609 – 1614, 2009.

KAROUI, A. **On the existence of continuous solutions of nonlinear integral equations**. Applied Mathematics Letters, n. 3, v. 18, p. 299 – 305, 2005.

KWAPISZ, M. **Bielecki's method, existence and uniqueness results for Volterra integral equations in Lp space**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, n. 2, v. 154, p. 403 – 416, 1991.

ROCHA, A. et al. **Numerical analysis of a collocation method for functional integral equations**. Applied Numerical Mathematics, v. 134, p. 31 – 45, 2018.

SHENG, C.; WANG, Z.-Q; GUO, B.-Y. **An hp-spectral collocation method for nonlinear Volterra functional integro-differential equations with delays**. Applied Numerical Mathematics, v. 105, p. 1-24, 2016.

TRIF, D.; IONESCU, C. M. **Matrix based operatorial approach to differential and integral problems**. In MATLAB-A Ubiquitous Tool for the Practical Engineer. IntechOpen, 2011.

CAPÍTULO 25

REALCE DA IMAGEM COM PRESERVAÇÃO DO BRILHO MÉDIO BASADA NA TRANSFORMADA TOP-HAT MULTI-ESCALA

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 13/04/2020

Julio César Mello Román
Facultad Politécnica, Universidad Nacional de Asunción, San Lorenzo, Paraguay
https://orcid.org/0000-0002-3698-4043

Horacio Legal-Ayala
Facultad Politécnica, Universidad Nacional de Asunción, San Lorenzo, Paraguay
https://orcid.org/0000-0002-1790-2559

José Luis Vázquez Noguera
Facultad Politécnica, Universidad Nacional de Asunción, San Lorenzo, Paraguay
https://orcid.org/0000-0002-9766-4182

Diego P. Pinto-Roa
Facultad Politécnica, Universidad Nacional de Asunción, San Lorenzo, Paraguay
https://orcid.org/0000-0003-2479-9876

RESUMO: A transformada top-hat multi-escala é uma operação da morfologia matemática utilizada para realçar a qualidade visual de diferentes tipos de imagens. Esta técnica melhora o desempenho da transformada clássica de top-hat, mas normalmente introduz distorções no processo de realce da imagem. Este trabalho apresenta um algoritmo para melhorar o contraste das imagens e preservar a luminosidade média. O algoritmo é baseado na transformada top-hat multi-escala. Nesta transformada top-hat são utilizados dois elementos estruturantes de diferentes áreas, mais de estruturas semelhantes e planas. Os resultados numéricos e visuais mostram que o algoritmo realza o contraste das imagens. Deve-se notar que ele não gera tanta distorção e mantém a naturalidade da imagem.

PALAVRAS-CHAVE: Transformada top-hat multi-escala, morfologia matemática, brilho médio, elementos estruturantes, melhoramento do contraste

IMAGE ENHANCEMENT WITH MEAN BRIGHTNESS PRESERVATION BASED ON MULTISCALE TOP-HAT TRANSFORM

ABSTRACT: Multi-scale top-hat transform is one operation of the mathematical morphology used to enhance the visual quality of different types of images. This technique improves the performance of the classic top-hat transform, but usually introduces distortions into the image enhancement process. In order to solve this problem, in this work we propose an algorithm that improves the contrast of the images and preserve the average brightness. The algorithm

is based on the multi-scale top-hat transform. In the top-hat transform two similar and flat structuring elements of different areas are used. The numerical and visual results show that the algorithm improves the contrast of the images. It should be noted that it does not generate as much distortion and maintains the naturalness of the image.
KEYWORDS: Multi-scale top-hat transform, mathematical morphology, average brightness, structuring elements, contrast enhancement

1 I INTRODUCTION

Contrast enhancement in digital images is an important technique in image processing. This image enhancement technique helps human vision to better value details (MUKHOPADHYAY, 2000). Moreover, it is used as a preprocessing for other applications that need to enhance image quality.

Contrast enhancement techniques can be classified in different ways. Currently there are many proposals in the state of the art. There are algorithms that enhance contrast (AQUINO-MORÍNIGO, 2017), enhance color images (MENDEZ, 2018) and others that enhance grayscale images with noise (CHAN, 2005). Histogram-based enhancement algorithms are widely used to enhance the brightness zones of an image, but they can introduce saturation into the image (ABDULLAH-AL-WADUD, 2007; AQUINO-MORÍNIGO, 2017; CABALLERO, 2019; PINEDA, 2019). Filters are generally used to improve images with noise (CHAN, 2005). Algorithms in the wavelet domain (DEMIREL, 2009) improve image resolution. Mathematical morphology is a widely used tool in image processing (SOILLE, 2013) and uses morphological operators to extract different type's characteristics of the image, which can be used to perform an image enhancement.

Top-hat transform is one operation of the mathematical morphology used to enhance the contrast of different types of images (ROMÁN, 2017; ARYA, 2020). Image enhancement by top-hat transform consists of adding bright areas and subtracting dark areas of the original image. Multi-scale mathematical morphology has improved the performance of the classic top-hat transform and has been shown to be efficient in enhancing the contrast of grayscale images. (MUKHOPADHYAY, 2000; BAI, 2012; ROMÁN, 2020). They are also useful in multiple applications such as retina study (LIAO, 2014), ultrasound image enhancement (PENG, 2010), infrared and visible image enhancement (MELLO ROMÁN, 2019; ROMÁN, 2020), image fusion (BAI, 2013; BAI, 2018) and small object detection (YE, 2002).

The purpose of image enhancement is to enhance features such as brightness, darkness, shapes, etc., in the images. Multi-scale top-hat transform can enhance the useful features of the image which will then be used to enhance the image (MUKHOPADHYAY, 2000; BAI, 2012; MELLO ROMÁN, 2019; ROMÁN, 2020). The aim of this work is to improve the image in terms of contrast and preserve the natural brightness of the images.

For this reason, we propose a method to improve the image using the multi-scale top-hat transformation using two structuring elements. The novelty of the proposal is that two structuring elements are used in the basic operations of mathematical morphology (ROMÁN, 2017). However, by adding this variation it is possible to improve the contrast of the images, improve the mean brightness and introduce distortions in a moderate way (ROMÁN, 2020).

Sections of the article are: Section 2 presents the MSTH2SE algorithm, Section 3 shows the numerical and visual results and finally Section 4 presents the conclusion.

2 I IMAGE ENHANCEMENT

Mathematical morphology is based on two basic operations: dilation and erosion. The dilation is defined as:

$$I \oplus B = \max_{(u,v)\in B} \{I(x+u, y+v) + B(u,v)\}, \tag{1}$$

and erosion is defined as:

$$I \ominus B = \min_{(u,v)\in B} \{I(x+u, y+v) - B(u,v)\}, \tag{2}$$

where *I* is the original image and *B* is the structuring element (BURGER, 2016).

The top-hat transform is a mathematical morphology operation that is used to make improvements in digital images (SOILLE, 2013). It is widely used in different applications such as medicine (LIAO, 2014; PENG, 2010; ARYA, 2020) and engineering (HAN, 2019). The top-hat transform is defined as follows:

$$WTH = I - \big((I \ominus B) \oplus B\big), \tag{3}$$

$$BTH = \big((I \oplus B) \ominus B\big) - I, \tag{4}$$

where WTH is the top-hat transform by opening, BTH is the top-hat transform by closing, $\big((I \ominus B) \oplus B\big)$ is the morphological opening, $\big((I \oplus B) \ominus B\big)$ is the morphological closing, and are morphological operators of erosion and dilation. The bright areas are obtained by WTH and the dark areas are obtained by BTH.

Classic top-hat transform uses only one structuring element. In order to improve its performance, two structuring elements are proposed (BAI, 2013). For this reason, we will use two proportional and flat structuring elements in the top-hat transform.

Let the structuring elements be *B* and *B'* geometrically proportional and flat. Taking into account the two increasing structuring elements, the top-hat transform is finally defined as follows (ROMÁN, 2017):

$$TH = I - \big((I \ominus B) \oplus B'\big), \tag{5}$$

$$BH = \big((I \oplus B) \ominus B'\big) - I. \tag{6}$$

Equations (5) and (6) will be used to perform the image enhancement in the multi-scale morphological approach.

The image enhancement by the multi-scale top-hat transform will be performed by initially configuring the following parameters: The original image **I**, the number of iterations *n* in the range i={1,2,…n} and the two structuring elements *B* and *B'*. The features of the structuring elements are: disk and flat.

The image enhancement process is then described in the following Algorithm 1.

Algorithm 1: Multi-Scale Top-Hat transform for contrast enhancement with two Structuring Elements (MSTH2SE)

Input: *I, B, B', n*

Output: I_{en} (Enhanced image)

Initialize the size and shape of *B* and *B'*

for *i=1* **to** *n* **do**

Calculation of top-hat transform

$TH_i = I - ((I \ominus B_i) \oplus B_i'),$

$BH_i = ((I \oplus B_i) \ominus B_i') - I.$

Calculation of subtractions from neighboring scales, obtained through the top-hat transform

if *n>1* **then**

$STH_{i-1} = TH_i - TH_{i-1},$

$SBH_{i-1} = BH_i - BH_{i-1},$

end if

end for

Calculation of the maximum values of all the multiple scales obtained

$MTH = \max_{1 \le i \le n}\{TH_i\},$

$MBH = \max_{1 \le i \le n}\{BH_i\},$

$MSTH = \max_{1 \le i \le n-1}\{STH_i\},$

$MSBH = \max_{1 \le i \le n-1}\{SBH_i\},$

Image enhancement calculation

$I_{en} = I + (MTH + MSTH) - (MBH + MSBH).$

return I_{en}

3 I RESULTS AND DISCUSSIONS

The relative performance of MSTH2SE was compared with the Histogram Equalization (HE), Multi-scale Morphological Approach to Local Contrast Enhancement (MMALCE) (MUKHOPADHYAY, 2000) and Multi-Scale Top-Hat transform for contrast enhancement (MSTH) (BAI, 2012) algorithms. The evaluation of the results was carried out using Standard

Deviation (SD) (ROMÁN, 2017), Peak Signal to Noise Ratio (PSNR) (HORE, 2010; BAI, 2012) that quantifies the relationship between the signal-noise introduced in the image enhancement process and Absolute Brightness Error (MABE) (AQUINO-MORÍNIGO, 2017) that quantifies the conservation of the mean brightness of the processed image. For the tests, 100 images from the test folder belonging to the public database BSDS500 (ARBELAEZ, 2007) were used. The HE, MMALCE, MSTH and MSTH2SE algorithms were implemented by the "ImajeJ" framework (BURGER, 2016) and for contrast enhancement algorithms based on the multi-scale top-hat transform the "MorphoLibJ" library (LEGLAND, 2016) was used.

The parameters of the experiments are defined in Table 1.

Algorithms	*B*	*B'*	*n*
MMALCE	r=1	–	10
MSTH	r=1	–	10
MSTH2SE	r=1	r=10	10

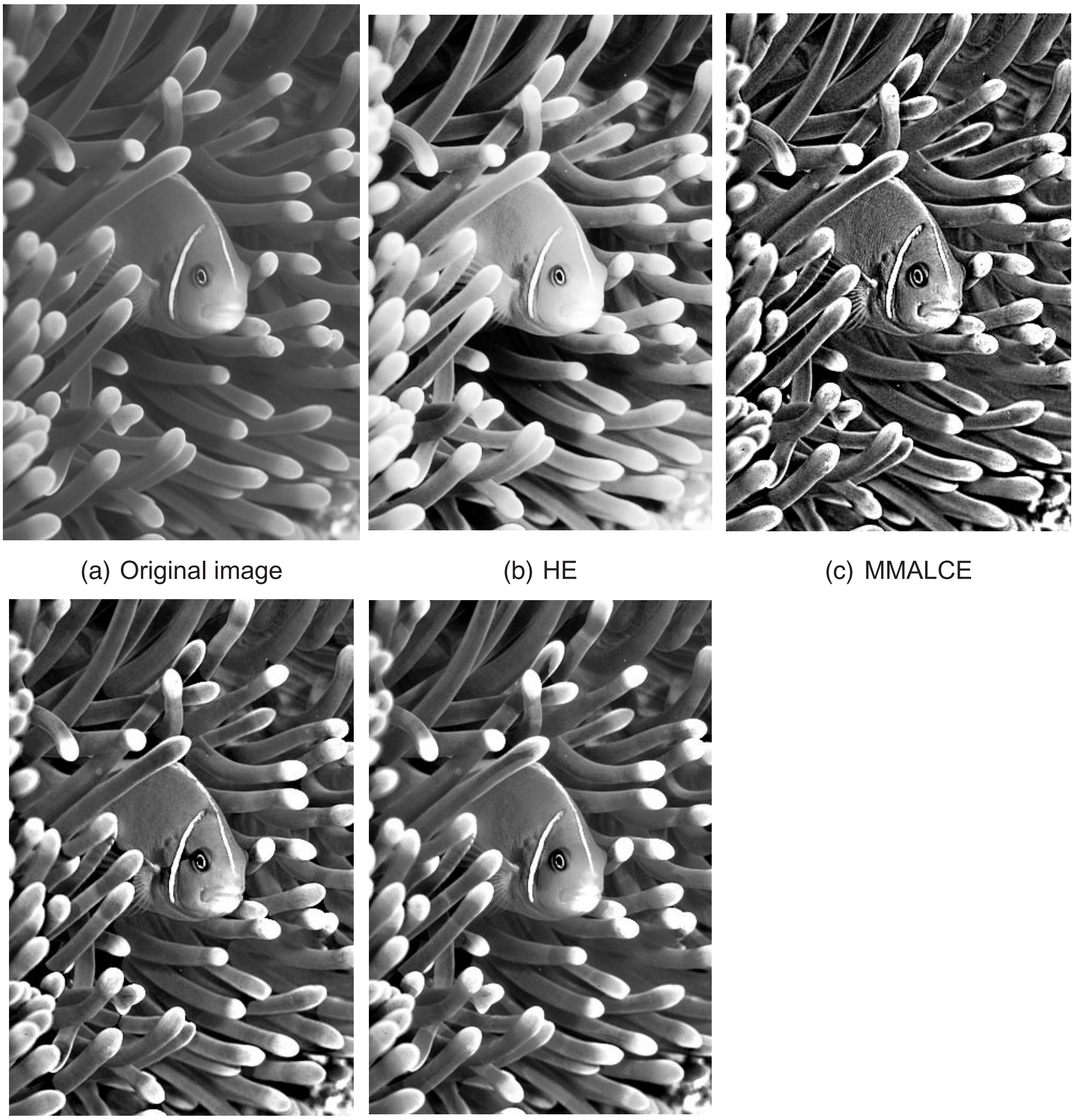
Table 1. Parameter setting

In Table 2 we can see that on the average, the MMALCE algorithm is numerically better for the SD evaluator, however the MSTH2SE in the average obtained better results for the PSNR and MABE evaluators. The best average results are in bold.

Algorithms	SD	PSNR	MABE
I	50,160	-	-
HE	73,458	15,557	31,147
MMALCE	**80,661**	14,620	4,465
MSTH	74,485	17,142	4,690
MSTH2SE	74,735	**17,159**	**3,953**

Table 2. Average of the evaluations obtained with HE, MMALCE, MSTH and MSTH2SE algorithms.

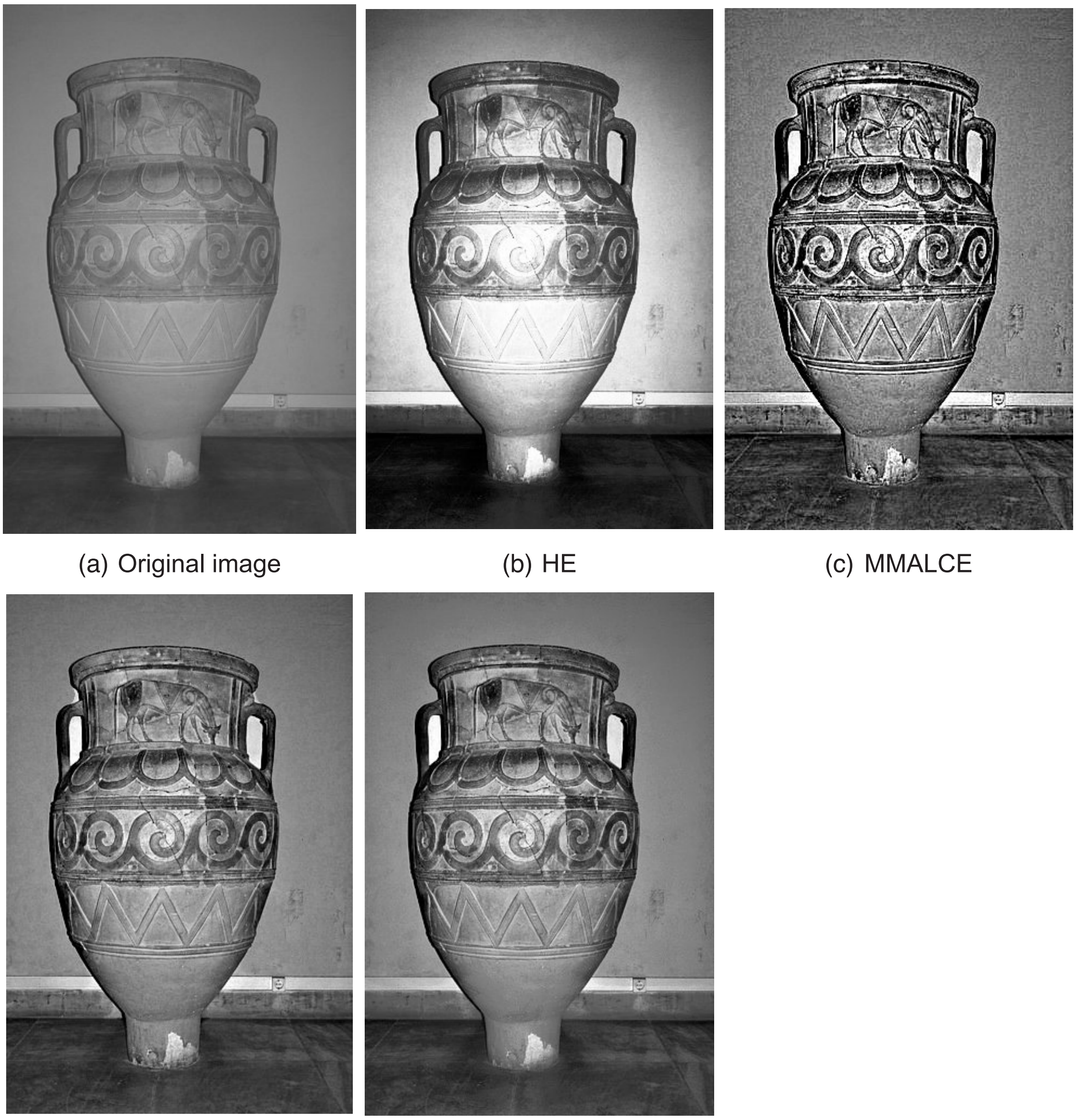
The images enhanced with the different algorithms are shown in Figures 1 and 2. HE introduces a lot of brightness to the image causing loss of details. MMALCE improves the contrast but introduces saturations at the edges. MSTH improves the contrast but introduces artifacts at the edges of the images. Besides, MSTH2SE improves the contrast, smoothes the image and reduces the artifacts.



(a) Original image (b) HE (c) MMALCE

(d) MSTH (e) MSTH2SE

Figure 1. Visual results obtained by applying different enhancement algorithms to the Fish image



(a) Original image (b) HE (c) MMALCE

(d) MSTH (e) MSTH2SE

Figure 2. Visual results obtained by applying different enhancement algorithms to the Vase image

CONCLUSION

In this work the MSTH2SE algorithm was presented and is used to improve the image contrast. Also, the proposed method preserves the average brightness. MSTH2SE is based on the multiscale top-hat transform. The relative performance of MSTH2SE was evaluated with: Standard Deviation (SD), Peak Signal to Noise Ratio (PSNR) and Mean Absolute Brightness Error (MABE).

The proposed algorithm was compared with state-of-the-art algorithms and proved to be competitive, It is worth mentioning that MSTH2SE distorts images less.

REFERENCES

ABDULLAH-AL-WADUD, Mohammad, et al. A dynamic histogram equalization for image contrast enhancement. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2007, vol. 53, no 2, p. 593-600.

AQUINO-MORÍNIGO, Pabla B., et al. Bi-histogram equalization using two plateau limits. Signal, Image and Video Processing, 2017, vol. 11, no 5, p. 857-864.

ARBELAEZ, Pablo; FOWLKES, Charless; MARTIN, David. The Berkeley segmentation dataset and benchmark. Computer Science Department, Berkeley University.[Online]. Available: http://www.eecs.berkeley.edu/Research/Projects/CS/vision/bsds, 2007.

ARYA, Anu, et al. Enhancement of brain MR-T1/T2 images using mathematical morphology. En Information and Communication Technology for Sustainable Development. Springer, Singapore, 2020. p. 833-840.

BAI, Xiangzhi; ZHOU, Fugen. A unified form of multi-scale top-hat transform based algorithms for image processing. Optik, 2013, vol. 124, no 13, p. 1614-1619.

BAI, Xiangzhi; ZHOU, Fugen; XUE, Bindang. Image enhancement using multi scale image features extracted by top-hat transform. Optics & Laser Technology, 2012, vol. 44, no 2, p. 328-336.

BAI, Xiangzhi; ZHOU, Fugen; XUE, Bindang. Image fusion through local feature extraction by using multi-scale top-hat by reconstruction operators. Optik-International Journal for Light and Electron Optics, 2013, vol. 124, no 18, p. 3198-3203.

BAI, Xiangzhi; GUO, Sheng. Weight strategy aided infrared and visible image fusion utilizing the center operator from opening and closing based toggle operator. Infrared Physics & Technology, 2018, vol. 92, p. 190-196.

BURGER, Wilhelm; BURGE, Mark J. Digital image processing: an algorithmic introduction using Java. Springer, 2016.

CABALLERO, Rubén Darío Medina, et al. Quadri-Histogram Equalization for infrared images using cut-off limits based on the size of each histogram. Infrared Physics & Technology, 2019, vol. 99, p. 257-264.

CHAN, Raymond H.; HO, Chung-Wa; NIKOLOVA, Mila. Salt-and-pepper noise removal by median-type noise detectors and detail-preserving regularization. IEEE Transactions on image processing, 2005, vol. 14, no 10, p. 1479-1485.

DEMIREL, Hasan; ANBARJAFARI, Gholamreza. Satellite image resolution enhancement using complex wavelet transform. IEEE geoscience and remote sensing letters, 2009, vol. 7, no 1, p. 123-126.

HAN, Zhao; WANG, Xiaoli. A Signal Period Detection Algorithm Based on Morphological Self-Complementary Top-Hat Transform and AMDF. Information, 2019, vol. 10, no 1, p. 24.

HORE, Alain; ZIOU, Djemel. Image quality metrics: PSNR vs. SSIM. En 2010 20th International Conference on Pattern Recognition. IEEE, 2010. p. 2366-2369.

LEGLAND, David; ARGANDA-CARRERAS, Ignacio; ANDREY, Philippe. MorphoLibJ: integrated library and plugins for mathematical morphology with ImageJ. Bioinformatics, 2016, vol. 32, no 22, p. 3532-3534.

LIAO, Miao, et al. Retinal vessel enhancement based on multi-scale top-hat transformation and histogram fitting stretching. Optics & Laser Technology, 2014, vol. 58, p. 56-62.

MENDEZ, Raul, et al. Color Image Enhancement Using a Multiscale Morphological Approach. En Argentine Congress of Computer Science. Springer, Cham, 2018. p. 109-123.

MELLO ROMÁN, Julio César, et al. Entropy and contrast enhancement of infrared thermal images using the multiscale top-hat transform. Entropy, 2019, vol. 21, no 3, p. 244.

MUKHOPADHYAY, Susanta; CHANDA, Bhabatosh. A multiscale morphological approach to local contrast enhancement. Signal Processing, 2000, vol. 80, no 4, p. 685-696.

PENG, Bo; WANG, Yang; YANG, Xianfeng. A multiscale morphological approach to local contrast enhancement for ultrasound images. En 2010 International Conference on Computational and Information Sciences. IEEE, 2010. p. 1142-1145.

PINEDA, Isidro Augusto Brizuela, et al. Quadri-histogram equalization using cutoff limits based on the size of each histogram with preservation of average brightness. Signal, Image and Video Processing, 2019, vol. 13, no 5, p. 843-851.

ROMÁN, Julio César Mello; AYALA, Horacio Legal; NOGUERA, José Luis Vázquez. Top-hat transform for enhancement of aerial thermal images. En 2017 30th SIBGRAPI Conference on Graphics, Patterns and Images (SIBGRAPI). IEEE, 2017. p. 277-284.

ROMÁN, Julio César Mello, et al. Image enhancement with mean brightness preservation based on multiscale top-hat transform. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 2020, vol. 7, no 1.

SOILLE, Pierre. Morphological image analysis: principles and applications. Springer Science & Business Media, 2013.

YE, Bin; PENG, Jia-xiong. Small target detection method based on morphology top-hat operator. Journal of Image and Graphics, 2002, vol. 7, no 7, p. 638-642.

CAPÍTULO 26

EXTENSÃO VIA E-OPERADOR DE IMPLICAÇÕES FUZZY VALORADAS EM RETICULADO

Data de aceite: 05/06/2020

Data de Submissão: 03/04/2020

Mariana Rosas Ribeiro
Universidade Estadual de Santa Cruz, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
Ilhéus – BA
lattes.cnpq.br/9279906398973616

Eduardo Silva Palmeira
Universidade Estadual de Santa Cruz, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas
Ilhéus – BA
lattes.cnpq.br/9061067320839776

Wendy Díaz Veldés
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática
Uberlândia – MG
lattes.cnpq.br/2964788260846431

Giovanny Snaider Barrera Ramos
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática
Uberlândia – MG
lattes.cnpq.br/7712580527096221

RESUMO: Este trabalho tem como objetivo principal comparar métodos de extensão em implicação fuzzy. O foco nesse conectivo lógico justifica-se por sua aplicabilidade, especialmente em memórias associativas fuzzy implicativas. O resultado essencial da pesquisa é o fato de que o método via e-operador preserva todas as propriedades algébricas testadas, o que não ocorre com o método via retração. Além disso, em se tratando do método via e-operador há uma espécie de comutatividade entre extensões para dois tipos especiais de implicação fuzzy: a R-implicação e a (S,N)-implicação. Tais resultados apontam que o método de extensão via e-operador é promissor, excepcionalmente no que diz respeito ao conectivo lógico implicação fuzzy.

PALAVRAS-CHAVE: conectivos fuzzy; retração; R-implicação; (S,N)-implicação; sub-reticulado.

EXTENSION VIA E-OPERATOR OF LATTICE-VALUED FUZZY IMPLICATION

ABSTRACT: This paper deals with the comparison between two extension methods in fuzzy implication. This approach is justified by the wide application of fuzzy implication, mainly in associative fuzzy memories. From the obtained results it was concluded that the method via e-operator preserves all the algebraic properties tested, which does not happen with the method via retraction. In addition, was observed that

there is a kind of commutativity between extensions for two special types of fuzzy implication: the R-implication and the (S,N)-implication, when the e-operator method was used. These results indicate that the extension method via e-operator is promising, exceptionally with regard to the logical connective fuzzy implication.

KEYWORDS: fuzzy connectives; retraction; R-implication; (S,N)-implication; sub-lattice.

1 I FUNDAMENTAÇÃO

O problema da extensão de funções é muito conhecido em matemática. Palmeira (2013) discute a extensão de conectivos fuzzy valorados em reticulados limitados e desenvolve dois métodos de extensão, chamados “via retração” e “via e-operador”. Neste trabalho, testamos o via e-operador em implicações fuzzy e obtivemos bons resultados.

Inicialmente, o primeiro ponto motivador dessa pesquisa é a diversidade de aplicações da lógica fuzzy, especialmente no que diz respeito à inteligência artificial. Outro ponto chave é quanto à escolha por valor em reticulados, que oferece mais generalização para modelar situações nas quais nem sempre há relação de ordem total (para mais detalhes, consultar Ouncharoen, Kreinovich e Nguyen (2015)). Por fim, a ideia de avançar a pesquisa proposta por Palmeira (2013) na investigação de implicações fuzzy vem pela importância que esse conectivo lógico apresenta; em especial, implicações fuzzy vem sendo usadas em memórias associativas, conforme podemos ver em Mesquita (2007).

Encontraremos dentro da teoria de reticulados algumas definições preliminares para o desenvolvimento das técnicas de extensão elaboradas em Palmeira (2013). Com esse aporte, Palmeira (2013) define uma noção mais geral de subreticulado, o (r,s)-subreticulado, na qual a estrutura de conjunto associada a um subreticulado não precisa estar contida no reticulado em que ele está inserido.

Ainda como aparato preliminar, é importante entender o que são os conectivos lógicos fuzzy. Quando Zadeh (1965) estende a lógica clássica, ganhamos uma possibilidade maior de definir os conectivos lógicos “conjunção”, “disjunção”, “negação”, “implicação”. Neste trabalho, a conjunção clássica é generalizada pela t-norma, a disjunção pela t-conorma, a negação pela negação fuzzy e a implicação clássica pela implicação fuzzy.

As implicações podem apresentar algumas propriedades, nomeadas: condição da fronteira à esquerda, à direita ou 4 (CFE, CFD ou CF4, respectivamente), princípio da neutralidade à esquerda (NE), princípio da troca, da identidade ou da ordenação (PT, PI ou PO, respectivamente), lei da iteratividade Booleana, da contraposição, da contraposição à esquerda ou à direita (LIB, LC, LC-E ou LC-D, respectivamente) ou positividade (P). Podemos, ainda, considerar dois tipos especiais de implicação fuzzy: a (S,N)-implicação e a R-implicação, oriundas de relações lógicas clássicas.

Diante desse quadro preliminar, Palmeira (2013) debruça sob o problema da extensão. Ele está interessado em, tendo um conectivo fuzzy definido em M, um subreticulado de L no sentido mais geral ((r,s)-subreticulado), estender esse conectivo para L. E a princípio o método desenvolvido é o método via retração, que usa a ideia de retração citada anteriormente.

Ao investigar essa técnica de extensão, observa-se que algumas daquelas propriedades de implicação não são carregadas através desse método. A fim de obter melhores resultados, Palmeira et al. (2014a) cria um segundo método de extensão, que utiliza um operador de extensão chamado “e-operador” e um par de retrações. A ideia desse método é mostrada na Figura 1 a seguir.

$$
\begin{tikzcd}
L \times L \arrow[rr, dashed, "\Gamma^{E}_{\odot}"] \arrow[d, "(r_1 \times r_1, r_2 \times r_2)"'] & & L \\
(M \times M) \times (M \times M) \arrow[rr, "\Gamma \times \Gamma"'] & & M \times M \arrow[u, "\odot"']
\end{tikzcd}
$$

Figura 1 – Extensão via e-operador ⊙ (com auxílio de duas retrações r_1 e r_2) de um conectivo fuzzy r definido em M para L (M é um (r,s)-subreticulado de :L)

Fonte: Compilação dos autores

Palmeira et al. (2014b) demonstrou proposições acerca da extensão via retração de operadores fuzzy, inclusive das implicações fuzzy. Tendo em vista a importância desse conectivo lógico, em virtude da sua imprescindibilidade para a programação, investigamos o método via e-operador aplicado a implicações fuzzy.

2 I RESULTADOS NOVOS

Utilizando o método via e-operador para a implicação fuzzy, provamos neste trabalho que, assim como o método via retração, o via e-operador também estende a implicação. Além disso, ao testarmos aquelas doze propriedades da implicação, temos como resultado que esse método preserva todas elas. A Figura 2 compara os resultados do método via retração e o método via e-operador para implicações.

I. fuzzy	CFE	CFD	CF4	NE	PT	PI
I^E	✓	✓	✓	×	✓	✓
$I^E_{\odot}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
I. fuzzy	**PO**	**LIB**	**LC**	**LC-E**	**LC-D**	**P**
I^E	×	✓	✓	✓	✓	×
$I^E_{\odot}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Figura 2 – Comparação dos resultados da extensão de implicação via retração I^E e via e-operador $I^E{}_{\odot}$

Fonte: Compilação dos autores

Ao testar para a (S,N)-implicação e a R-implicação foram obtidos os resultados a seguir.

Proposição 1. Sejam M um (r_1, r_2, s)-subreticulado de L, S uma t-conorma, N uma negação fuzzy, $I_{S,N}$ uma (S,N)-implicação e ⊙ um e-operador, todos definidos em M (⊙ definido em $M x M$). Então $(I_{S,N})^E_{\odot} = I_{S^E_{\odot},N^E_{\odot}}$..

Proposição 2. Sejam M um (r_1, r_2, s)-subreticulado de L, com M, L reticulados completos, T uma t-norma, I_T uma R-implicação e ⊙ um e-operador, todos definidos em M (definido em $M x M$). Então $(I_T)^E_{\odot} = I_{T^E_{\odot}}$..

Essas relações são de desigualdade quando utilizada a extensão via retração. Como pode ser visto em Palmeira et al. (2014b), $I_{S^E,N^E} \leq (I_{S,N})^E$ e $(I_T)^E \leq I_{T^E}$. Logo, concluímos que há uma espécie de comutatividade envolvendo a extensão via e-operador das t-conorma e negação fuzzy e a extensão da (S,N)-implicação, bem como entre a extensão da t-norma e a extensão da R-implicação. A Figura 3 contém a ideia dessas comutatividades, que expressam as Proposições 1 e 2.

$$\begin{tikzcd}
S, N \arrow[r, "I"] & I_{S,N} \arrow[r, "\odot"] & (I_{S,N})^E_{\odot} \arrow[d, equal] \\
S, N \arrow[r, "\odot"] & S^E_{\odot}, N^E_{\odot} \arrow[r, "I"] & I_{S^E_{\odot},N^E_{\odot}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "I"] & I_T \arrow[r, "\odot"] & (I_T)^E_{\odot} \arrow[d, equal] \\
T \arrow[r, "\odot"] & T^E_{\odot} \arrow[r, "I"] & I_{T^E_{\odot}}
\end{tikzcd}$$

Figura 3 – A comutatividade da Proposição 1 (parte superior) e da Proposição 2 (parte inferior)

Fonte: Compilação dos autores

Esse é mais um resultado que indica a eficácia desse método de extensão. Assim, o e-operador, diferentemente do método de extensão via retração, mostrou-se bom em preservar as estruturas verificadas. Como perspectiva para trabalhos futuros, pretendemos aplicar essa extensão no contexto das memórias associativas fuzzy implicativas.

REFERÊNCIAS

MESQUITA, M. V., **Fundamentos e Aplicações de Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas.** 2007. 124 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade de Campinas, Campinas, 2007.

OUNCHAROEN, R., Kreinovich, V. e Nguyen, T. H.. **Why lattice-valued fuzzy values? A mathematical justification**, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, v. 29, p. 1421-1425, out. 2015.

PALMEIRA, E. S., **On Extension of Fuzzy Connectives**. 2013. 169 p. Tese (Doutorado em Sistemas e Computação) – Departamento de Informática e Matemática Aplicada, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

PALMEIRA, et al. **A new way to extend t-norms, t-conorms and negations**, Fuzzy Sets and Systems, v. 240, p. 1-21, abr 2014.

______. **On the extension of lattice-valued implications via retractions,** Fuzzy Sets and Systems, v. 240, p. 66-85, abr 2014.

ZADEH, L. A.. **Fuzzy sets**, Information and Control, v. 8, p. 338-353, jun. 1965.

CAPÍTULO 27

AVALIAÇÃO COMO OPORTUNIDADE DE APRENDIZAGEM: UMA DISCUSSÃO ACERCA DO POTENCIAL DE UMA PROVA ESCRITA EM FASES E INTERVENÇÕES ESCRITAS

Data de aceite: 05/06/2020

Data de submissão: 05/04/2020

Celia Alves Pereira
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Londrina – Paraná
http://lattes.cnpq.br/4752749821616987

Marcele Tavares Mendes
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Londrina – Paraná
http://lattes.cnpq.br/3399032085207656

Zenaide de Fátima Dante Correia Rocha
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Londrina – Paraná
http://lattes.cnpq.br/6374015489865372

RESUMO: Este artigo, fundamentado em uma perspectiva de avaliação da aprendizagem como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem, apresenta uma discussão acerca do potencial de uma prova escrita em fases. A pesquisa, de natureza qualitativa de cunho interpretativo, teve como sujeitos a professora e 23 alunos matriculados em uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual do noroeste do Paraná. A prova foi realizada em 3 fases e foi possível reconhecer a prova em fases e as intervenções escritas e orais da professora como um recurso de ensino, de aprendizagem e de avaliação, assim como um meio que favorece que professor e aluno se comuniquem de forma individualizada.

PALAVRAS - CHAVE: Avaliação da Aprendizagem. Prova Escrita em Fases. Regulação da Aprendizagem.

EVALUATION AS A LEARNING OPPORTUNITY: A DISCUSSION ABOUT THE POTENTIAL OF A WRITTEN TEST IN WRITTEN PHASES AND INTERVENTIONS

ABSTRACT: This article, based on a perspective of learning assessment as a research practice and learning opportunity, presents a discussion about the potential of a written test in phases. The research, of a qualitative nature of an interpretative nature, had as subjects the teacher and 23 students enrolled in a class of the 6th year of Elementary School
of a state school in northwest Paraná. The test was carried out in 3 phases and it was possible to recognize the test in phases and the written and oral interventions of the teacher as a teaching,

learning and assessment resource, as well as a means that favors the teacher and student to communicate individually.
KEYWORDS: Learning Assessment. Written Test in Phases. Learning Regulation

1 I INTRODUÇÃO

A avaliação, no meio escolar é prática indispensável ao processo de ensino e aprendizagem, no entanto é comum que esta atividade se limite ao julgamento sobre se o estudante sabe ou não sabe, em atribuição de notas ou conceitos que podem não representar aprendizagem. Neste trabalho, resultado de reflexões da disciplina de avaliação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, foi possível experimentar por meio de uma adaptação da prova em fases, o que é ter a avaliação como prática de investigação para o professor e oportunidade de aprendizagem para os alunos (BURIASCO, FERREIRA, PEDROCHI JUNIOR, 2014).

A avaliação escolar vai além de detectar acertos e erros, é um meio para que "exponha os processos de aprendizagem e forneça um repertório de habilidades, conhecimentos e insights dos estudantes em um dado momento" (TREVISAN, 2013, p.74).

Nesta perspectiva revela-se a importância da relação professor-aluno, na qual as intervenções do professor têm a função de conduzir o aluno na construção de conhecimentos. De modo específico, neste trabalho buscou-se investigar como a intervenção do professor por meio da escrita em fases pode contribuir no processo ensino e aprendizagem em aulas de matemática.

A investigação baseou-se na análise da produção escritas de alunos ao realizar uma prova em fases e nas intervenções escritas e orais da professora durante esse processo de realização, que é a primeira autora deste texto. A prova foi resolvida por 23 alunos de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental I de uma escola estadual da região noroeste do Paraná, a competência base para lidar com as questões da prova era saber interpretar situações problemas e resolver operação de subtração.

Para apresentação e discussão da prática avaliativa vivenciada, esse texto traz, em sua segunda seção, aspectos teóricos acerca da avaliação da aprendizagem, em seguida são apresentados em seções próprias: procedimentos metodológicos, discussão do potencial da análise das produções escritas e das intervenções da professora para regular os processos de ensino e de aprendizagem. Por fim, são apresentadas considerações finais e as referências utilizadas.

2 I UM REPESAR DA AVALIAÇÃO ESCOLAR

Na escola, a avaliação sempre assumiu um papel de protagonista - a vilã do ponto de vista dos alunos e a justiceira na perspectiva de professores. A avaliação que ocorre em sala de aula não tem contribuído para subsidiar os processos de ensino e de aprendizagem. Conforme Buriasco, Ferreira e Ciani (2009), ainda hoje, na escola, a execução do rito avaliar – aplicar uma prova ou um teste escrito e converter as resoluções e respostas de cada estudante a um valor numérico – parece ser suficiente para fazer acreditar que se cumpriu o esperado que é medir e classificar de maneira precisa os estudantes.

Frente a esse contexto, a necessidade de repensar a avaliação em contexto escolar para além de um instrumento de medição e de verificação do desempenho dos alunos, baseado na quantificação de erros e acertos se faz pertinente. Para tanto, direcionamos nosso olhar para perspectivas de avaliação em que a primeira finalidade é servir aos processos de ensino e de aprendizagem, favorecendo que o professor regule seu processo de ensino e alunos os seus processos de aprendizagem. A avaliação que se situa no centro de formação é chamada de formativa, "inscrevendo-se na continuidade da ação pedagógica, ao invés de ser simplesmente uma operação externa de controle, cujo agente poderia ser totalmente estrangeiro à atividade pedagógica" (HADJI, 2001, p. 21).

Esteban (2008) enfatiza que em contexto escolar a avaliação não deve ter a pretensão de controlar e classificar o rendimento do estudante, mas de promover uma reflexão que leva em conta a experiência de ensinar e de aprender. Ainda, por ser a avaliação uma atividade social que parte de um amplo conjunto de relações, dependendo do foco dado, mesmo a avaliação formativa pode se associar a técnicas e vincular-se ao caráter classificatório, sendo "preciso explorar esse conceito, expressando com clareza as características que deve assumir a fim de participar de um amplo processo de democratização da dinâmica pedagógica" (ESTEBAN, 2008, p. 12).

De Lange (1999) afirma que o principal, propósito da avaliação é auxiliar o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem, e que os métodos de avaliação devem viabilizar aos estudantes condições de mostrarem o que sabem, não o que não sabem, os mesmos, precisam ter a oportunidade de receber *feedback* de qualidade de seus trabalhos em um processo avaliativo que possui uma natureza didática.

A avaliação é uma oportunidade de aprendizagem e desta forma, avaliação, ensino e aprendizagem são processos entrelaçados. Para Esteban (2002), a prática avaliativa

> [...] traz ao mesmo tempo os saberes e os não-saberes de quem ensina e de quem aprende, mostrando que não é só a professora quem ensina, nem é só o/a aluno/a quem aprende. Avaliando as crianças, as professoras também se avaliam; indagando sobre o processo de aprendizagem, também indagam sobre o processo de ensino (ESTEBAN, 2002, p. 137).

No Paraná temos o Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação e Matemática – GEPEMA - Universidade Estadual de Londrina que há quase duas décadas tem refinado o conceito de uma prática avaliativa como prática de investigação e oportunidade de aprendizagem. Conforme Buriasco, Ferreira e Ciani (2009),

> [...] assumir uma postura investigativa, o professor pode questionar-se a respeito de qual matemática os seus estudantes estão aprendendo, que entendimentos estão tendo do que está sendo trabalhado em sala de aula, do que já sabem, que dificuldades encontram, e o que pode ser feito para auxiliá-los na superação destas. Deste modo, a avaliação adquire um novo sentido: deixa de ser uma prática apenas realizada sobre o estudante e passa a ser realizada também sobre e para o professor, de modo a orientar e contribuir com a aprendizagem de ambos. A avaliação ao ser impregnada da ideia de investigação deixa de ser tomada como a etapa final de um ciclo e passa a ser realizada constantemente durante todo o processo de ensino e de aprendizagem. Além disso, deixa de ser vista como um elemento de ameaça e punição e passa a ser uma oportunidade de aprendizagem. (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009, p. 78).

Neste contexto, tarefas (problemas, situações) exercem importante papel, haja visto que por meio delas, o professor, pode-se ter informações a respeito das aprendizagens dos estudantes, bem como viabilizar intervenções que sejam oportunidade de aprendizagem aos alunos. Essas intervenções podem ocorrer de formas diversificadas, e uma delas é a utilização de *feedback*.

Na perspectiva da avaliação formativa, o *feedback* é considerado por Semana e Santos (2010), um processo que permite a comunicação entre professor e alunos, e possibilita condições para aprendizagem quando é considerado como capaz de construir o caminho seguinte, e, assim, proporciona ao professor a condição de partilha com o aluno em se tratando da responsabilidade do aprender, além de incentivar a percepção e reflexão sobre as tarefas feitas. As autoras reiteram que nem todo o *feedback* tem as mesmas características e potencialidades, é importante diferenciá-lo, quanto à sua natureza e contribuição para o ensino e aprendizagem, haja vista que não existe uma receita, além de o *feedback* ser eficaz ou não, de acordo com o contexto.

Um fator de relevância no processo de busca por um ensino e aprendizado de boa qualidade, há que se considerar o papel da intervenção do professor. A metodologia de sala de aula com foco na melhoria do processo ensino aprendizagem precisa viabilizar a constante interação professor-aluno, por meio de diversas intervenções, sendo uma delas o *feedback* (DIAS, 2013).

Segundo Dias e Semana (2009), o fornecimento de *feedback* escrito e oral favorece a aprendizagem, porque os alunos apresentam produções de qualidade progressivamente superior. Ao encontro da proposta deste trabalho Dias (2013) considera que uma maneira produtiva para desenvolver uma avaliação reguladora da aprendizagem "é permitir que o aluno aperfeiçoe uma primeira versão de um trabalho realizado, podendo assim repensar a situação. Para que esse trabalho possa ser mais formativo, o professor deverá comentar uma primeira versão" (DIAS, 2013 p. 70).

A intervenção do professor, de acordo com Allal (1986), deve ser como um andaime – estrutura montada para dar acesso ou escorar a algo ou algum lugar. É desejável que a intervenção se baseie em questionamentos capazes de influenciar a regulação do aluno de modo que o mesmo possa levantar hipótese e discuti-las e solucioná-las.

Silva (2018), apresenta a Prova em Fases como um instrumento de avaliação utilizada na sala de aula e deve permitir que professores e alunos retirem dela informações que possam reorientar sua prática, oportunizem a reflexão e favoreçam a aprendizagem.

Uma possibilidade de realização de uma prova em duas fases poderia ser no seguinte formato: 1) o professor elabora a prova e os alunos, em uma primeira fase, resolvem sem nenhuma indicação do professor, em tempo determinado; 2) o professor avalia as resoluções iniciais dos alunos e tece comentários pedindo justificativas e esclarecimentos; 3) na segunda fase, os alunos tentam responder as questões postas pelo professor, podendo dispor de um tempo maior que na primeira fase. Nessa etapa, espera-se que os alunos melhorem as respostas dadas na primeira fase (PONTE, BOAVIDA E ABRANTES, 1997).

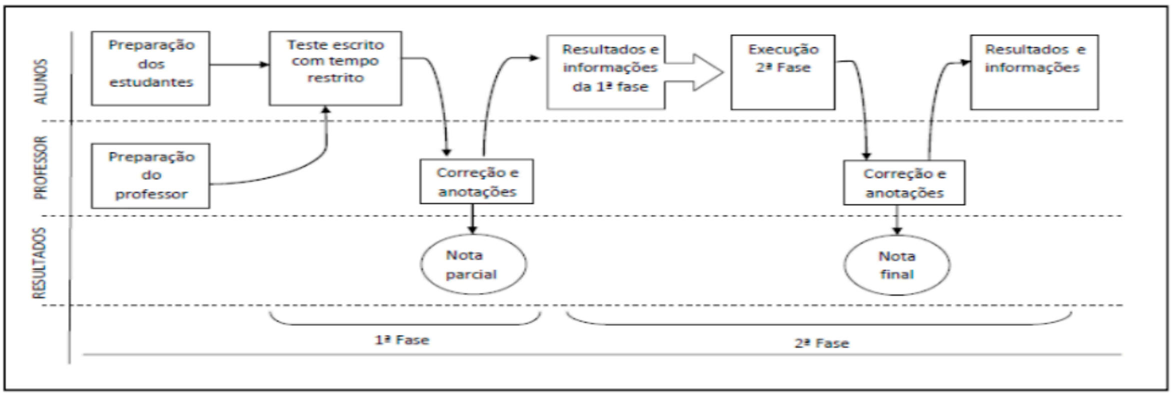


Figura 1 - Esquema para a prova escrita em fases

Fonte: Mendes (2014, p. 46)

Uma característica importante da Prova em Fases é a possibilidade que os estudantes têm para corrigir os erros, dar sequência a resoluções que ficaram incompletas, não sendo apenas uma devolução do professor que não permite ao aluno mudança de resultados.

3 I PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Os procedimentos aqui apresentados subsidiam uma pesquisa qualitativa de caráter interpretativo, em que o objeto de estudo foi investigar a utilização de “uma tarefa realizada pelos alunos a partir da adaptação da prova escrita em fases” como processo de investigação da aprendizagem.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa caracteriza-se por ter a fonte direta dos dados o ambiente natural do pesquisador, ou seja, a sala de aula em que a professora atua e em condições de ensino habituais preservando as características do contexto real *do lócus* de investigação. Em relação a coleta de dados devem ser registrados, visto que os indícios veiculados na análise são oriundos de imagens e escritos feitos pelos participantes envolvidos na investigação (BOGDAN e BIKLEN,1994).

A Prova em Fases aplicada neste trabalho seguiu o modelo utilizado por Silva (2018), Pires (2013), Prestes (2015) e Paixão (2016), que utilizaram a Prova em Fases realizando intervenções a cada fase. Quando o estudante resolvia alguma questão, o pesquisador fazia uma pergunta ou dava alguma tarefa ao estudante para que ele continuasse trabalhando na sua prova. Nesse modelo de prova, não se espera que as questões sejam todas resolvidas na primeira fase.

Os participantes foram a professora, que é professora regente da disciplina de Matemática na instituição de ensino em que fez a aplicação da tarefa, sendo também ela a primeira autora deste artigo. A investigação contou com 23 alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública, da região noroeste do Estado do Paraná no primeiro trimestre de 2019.

Como instrumento para coleta de dados foram utilizados os registros escritos desses alunos constando as estratégias por eles utilizadas e as intervenções escrita da professora, diário de campo da professora.

Para obtenção dos dados, foi organizada uma tarefa que visava explorar as ideias associadas a operação de subtração com Números Naturais. Essa tarefa foi entregue aos alunos para que resolvessem individualmente em sala de aula e sem a intervenção da professora. E nos momentos seguintes que foram três, os alunos receberam a tarefa com anotações da professora que objetivava oportunizar a análise da solução apresentada, repensar seus procedimentos e reelaborar conceitos.

A análise dos dados teve como recurso metodológico a análise da produção escrita que buscou por indícios de uma prática avaliativa a serviço da aprendizagem do aluno e não apenas constatador de erros. Na discussão foram consideradas as observações feitas pela professora, em seu diário de campo, com relação ao modo e comportamento dos alunos lidar com a prova em fases. Para indicar registros e/ou fala dos alunos e professora foi utilizado A1, A2, A3 e A4 para alunos e P para professora. Nas produções escritas apresentadas na discussão, etapas realizadas ao longo da aplicação da Prova em fase, foram indicadas por (1), (2), (3) e (4).

4 I DA TEORIA AOS RESULTADOS: UMA PRÁTICA COM ALUNOS DO 6° ANO

Por meio da tarefa, a professora tinha por intenção avaliar aspectos relacionados a compreensão e a maneira de lidar de seus alunos com relação a interpretação de situações-problemas e a utilização da operação de subtração. O contexto da questão foi uma eleição para escolher o prefeito de uma cidade. A partir dos dados da Tabela 1 os alunos tiveram que responder: a) Juntos, quantos votos esses candidatos receberam?; b) Quantos votos o primeiro colocado desta eleição recebeu a mais que o último colocado?; c) Qual a diferença da quantidade de votos entre Paulo e Ana?; d) Paulo, o segundo colocado nessas eleições, obteve 570.308 votos. Para que ele tivesse vencido essas eleições, quantos votos a mais ele precisaria ter recebido?

Candidato	Número de Votos
Paulo	507.308
Márcia	610.017
Ana	390.879
Rafael	240.920

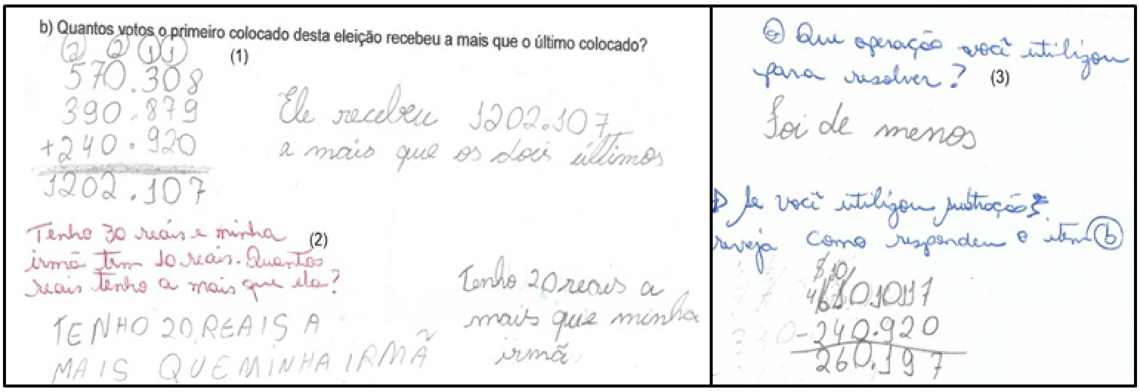
Tabela 1: Dados Utilizados no Enunciado do Tarefa

Fonte: arquivo das autoras

Na primeira fase, a professora entregou uma cópia da tarefa para cada aluno e eles resolveram individualmente. Para a segunda fase, a professora forneceu *feedback* escrito para os alunos a partir da primeira produção, os comentários foram feitos de forma a oportunizar aos alunos repensar a situação proposta tanto em relação a pergunta, como a resposta dada.

Ao receber as provas, na segunda fase, os alunos realizaram o proposto (interpretar suas produções e lidar com as intervenções da professora), mas ficaram indignados pelo fato de não ter nada apontando seus acertos e erros e pelo fato da professora não responder objetivamente se a resposta estava certa ou errada, no entanto realizava intervenções por meio de questões que objetivava incentivá-los a releitura da questão de suas resoluções.

Ao realizar a análise das produções, foi possível reconhecer que os alunos tiveram avanços na compreensão da questão, em especial com relação a estratégia escolhida para resolver o que se pediu. Segue no Quadro 1, a produção do aluno A1 e intervenções da professora.

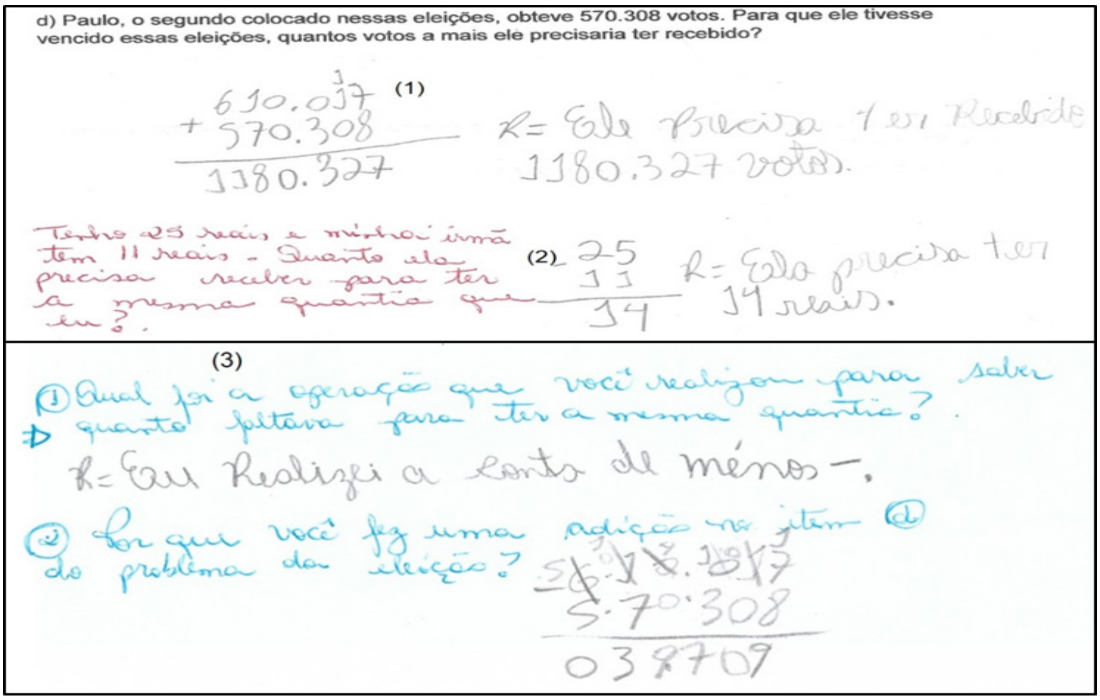


Quadro 1: Registro das Etapas da Produção do Aluno A1 E Intervenções da Professora

Fonte: Arquivo das Autoras

Na produção do aluno A1 na primeira fase, a estratégia utilizada foi a de realizar uma adição **(1)**, esse caminho pode ter sido utilizado devido a presença da expressão “a mais” no questionamento. A professora realizou uma intervenção, por meio de um questionamento que utiliza a mesma expressão, e uma situação próxima ao cotidiano dos alunos **(2)**. Nesta etapa o aluno apresenta uma resposta que atende ao questionamento **(2)** e utiliza o cálculo mental. Com intuito de verificar se o aluno havia associado à sua estratégia a operação de subtração a professora interviu questionando **(3)**, e o aluno responde utilizando a subtração como uma estratégia para solução da situação, no entanto, não realiza o procedimento corretamente. A partir dessa informação, a professora retomou com o aluno ações para regulação do procedimento subtração, uma ação a partir de informações recolhidas em uma prática avaliativa a serviços dos processos de ensino e de aprendizagem.

As etapas desta produção podem indicar, conforme Allal (1986), as intervensões do professor podem ser caracterizados como um andaime para as construções dos alunos. O aluno A2, em sua produção apresentada no Quadro 2, utilizou uma adição **(1)**. No momento em que a professora propos uma situação mais simples, mas com os mesma expressão “a mais”, **(2)**, de pronto, ele utilizou uma subtração e, ao entregar a resolução para professora, relatou que esse problema foi muito fácil. Isso pode estar associado a necessidade do aluno além de escolher uma estratégia, de ter que retirar os valores na tabela.

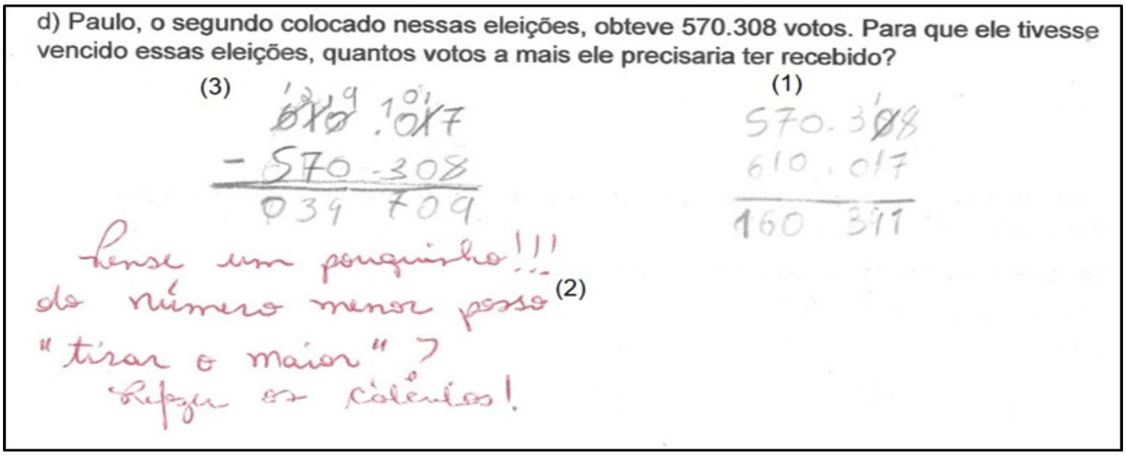


Quadro 2: Registro das Etapas da Produção do Aluno A2 E Intervenções da Professora

Fonte: arquivo das autoras

Na fase seguinte, com a intervenção **(3)** o aluno identifica que a tática para resolução tratava-se de uma subtração. Esse aluno alem de regular a estratégia que resolve o problema, apresenta ao professor a execução de uma subtração corretamente. O professor não ensinou o aluno durante a prova, não disse como fazer, apenas lhe deu oportunidades de revelar o que ele já sabia. Dias e Semana (2009), apresenta a ideia de que a utilização de feedback escrito e oral pode colaborar com a aprendizagem devido ao fato de os alunos apresentar produções de qualidade gradativamente superior.

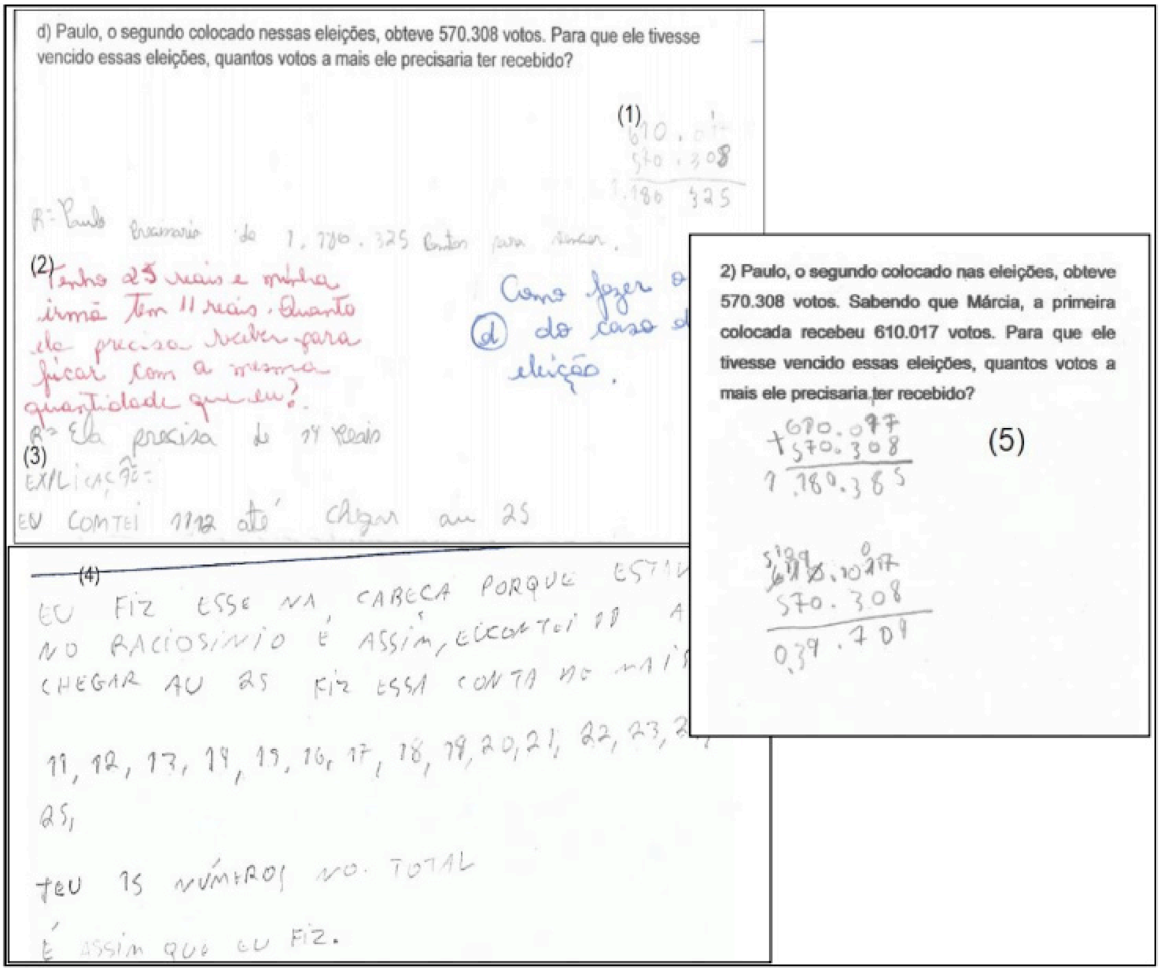
Para alguns alunos a escolha da estratégia, realizar uma subtração, não foi uma dificuldade. Entretanto, muitos apresentaram erros ao realizá-la, como a produção **(1)** apresentada no Quadro 3. O professor a partir do diagnóstico dessa dificuladde poderia ter retomado aulas, ou lidar com a situação a partir de uma intervenção. Não se trata de dizer qual caminho é o melhor, são caminhos, são possibilidades. Neste caso, aluno A3, ao realizar a intervenção **(2)** a professora direcionou o seu olhar, lidou com a situação de forma individualizada e, na produção **(3),** ele evidencia que compreendeu o que foi questionado e solicitado em **(2)**.



Quadro 3 - Registro das Etapas da Produção do Aluno A3 E Intervenções da Professora

Fonte: Arquivo das Autoras

O processo apresentado pelo aluno A4, produção do Quadro 4, evidencia um aluno que teve a oportunidade de revelar para professor mais de um modo de lidar com uma mesma situação. Essas estratégias são também informações para o professor, permitem que ele regule o modo de se comunicar com o aluno e com isso, gerar intervenções de qualidade. O aluno A4 realizou uma adição para responder à pergunta da questão **(1)**. Com isso, a professora fez uma intervenção utilizando uma situação simplificada com valores numéricos menores indicada por **(2)**. O estudante por sua vez, conseguiu resolver esta nova situação, no entanto não utilizou o algoritmo e fez a explicação mostrada em **(3)**. Com vistas a perceber se o aluno havia reconhecido a necessidade de realizar uma subtração, a professora questionou sobre como a explicação poderia auxiliá-lo a responder a primeira questão "o caso da eleição" e o aluno reiterou a forma que resolveu a situação proposta em **(2)**, apresentada em **(4)**. Diante da exposição do aluno, a professora reorganizou o enunciado inicial, um novo enunciado que requisitava a mesma subtração **(5)**.



Quadro 4 - registro das etapas da produção do aluno a4 e intervenções da professora

Fonte: arquivos das autoras

Após a leitura do enunciado e observação do cálculo **(5)**, seguiu o seguinte diálogo entre o aluno A4 e a professora:

Aluno A4: Professora acho que isso está errado. Ele vai precisar de tudo isso?

Professora P: Se está errado! Então o que fazer?

Aluno A4: Fazer outra conta.

P: Releia a questão novamente. E me diga que outra conta usar?

Aluno A4: É de menos.

P: Por que você escolheu primeiro uma conta de mais?

Aluno A4: Por causa do mais da pergunta. Mas agora vi que não manda somar e só ver quanto faltava.

Professora P: Muito Bem!

(Transcrição de diálogo da professora e o aluno na etapa final)

Mendes (2014) salienta que o professor pode aproveitar “todas as situações emergentes ou propostas num contexto de sala de aula, fazendo delas o veículo por meio do qual ensina e oportuniza a aprendizagem aos seus estudantes (MENDES, 2014, p. 36)”.

Na primeira devolutiva e demais etapas propostas observou-se que ao receber a tarefa para análise e possíveis alterações, os alunos reclamaram dizendo “*de novo professora!?*

Agente já fez isso! É só corrigir e pronto!”. Os comentários dos alunos retratam a prática de avaliação somativa com caráter de constatar erros, atribuir uma nota e fim. Processo que despreza o potencial de por meio de práticas avaliativas regular os processos de ensino e de aprendizagem.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho o foco se deu na prova em fases e na análise da produção escrita como instrumentos em prol dos processos de ensino e de aprendizagem, sendo meios de promover “diálogo” entre professor e alunos. A interação desses pares pode possibilitar ao aluno demonstrar o que sabe, revelar suas dificuldades, tornar-se mais autônomo em suas estratégias para resolver uma situação, e assim, regular a construção de conhecimento. Em contrapartida o professor tem a possibilidade de intervir considerando a produção individual dos alunos e suas diferenças, contribuindo com o processo educativo.

Percebeu-se que durante as fases os alunos estranharam e reclamaram pelo fato de terem que repensar uma situação, mas no decorrer das etapas foram revelando capacidade de interpretação e argumentação ao reelaborar suas respostas, o que de modo direto e indireto essas características proporcionam contribuição para qualidade da aprendizagem. Se mais práticas como essas se tornarem rotineiras, pode ser que a reclamação dos alunos diminua, já que não é uma prática comum para eles a ação de regular suas aprendizagens por meio da reflexão sobre suas próprias produções. Sendo esse um desafio ao professor, repensar e planejar práticas avaliativas formativas, ou tarefas de modo a contribuir com o ensino e aprendizagem, desvinculando-se da avaliação como um produto acabado que requer apenas ser julgado e quantificado.

REFERÊNCIAS

ALLAL, L. **Estratégias de avaliação formativa: concepções psicopedagógicas e modalidades de aplicação.** In: ALLAL, L.; CARDINET, J.; PERRENOUD, P. (org.). A avaliação num ensino diferenciado. Coimbra: Almedina, p. 175-209, 1986.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Ed. Porto, 1994.

BURIASCO, R. L. C. de; FERREIRA, P. E. A.; PEDROCHI JUNIOR, O. **Aspectos da avaliação da aprendizagem escolar como prática de investigação.** In: BURIASCO, R. L. C. de (Org.). GEPEMA: espaço e contexto de aprendizagem. Curitiba, PR: CRV, 2014, 1. ed, p. 13-32.

BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **BOLEMA** - Boletim de Educação Matemática, UNESP - Rio Claro, v. 22, n. 33, p. 69-96, 2009.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. 1ª ed. Utrecht: Freudenthal Institute and National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 1999.

DIAS, P. J. R. **Práticas letivas promotoras da regulação da aprendizagem matemática pelos alunos.** 2013. 380f. Tese de doutoramento, Educação (Didática da Matemática), Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Lisboa, 2013.

DIAS, P.; SEMANA, S. Avaliar, ensinar e aprender: Dimensões pedagógicas distintas nas aulas de matemática. In: **X Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia. Braga**. 2009.

ESTEBAN, M. T. Silenciar a polissemia e invisibilizar os sujeitos: indagações ao discurso sobre a qualidade da educação. **Revista portuguesa de Educação**, v. 21, n. 1, p. 5-31, 2008.

ESTEBAN, M. T. A avaliação no processo ensino/aprendizagem: os desafios postos pelas múltiplas faces do cotidiano. **Revista Brasileira de Educação**. Rio de Janeiro, n. 19, p. 129-137, 2002.

HADJI, C. **Avaliação Desmistificada**. Porto Alegre: ARTMED, 2001.

MENDES, M. T. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo.** 2014. 275f. Trabalho Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PAIXÃO, A. C. G. **Uma prova em fases de matemática: da análise da produção escrita ao princípio de orientação.** 2016. 103f. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) –Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

PIRES, M. N. M. **Oportunidade para aprender: uma prática da reinvenção guiada na prova em fases**. 2013. 122f. Tese de Doutorado. Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e educação matemática. Londrina: Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PONTE, J. P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M., ABRANTES, P. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: DES do ME, 1997.

PRESTES, D. B. **Prova em fases de Matemática: uma experiência no 5º ano do Ensino Fundamental.** 2015. 122f. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

SEMANA, S.; SANTOS, L. O feedback em relatórios escritos na aula de Matemática. **Investigação em Educação Matemática**, p. 180, 2010.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Um olhar para os processos de aprendizagem e ensino por meio de uma trajetória de avaliação.** 2018. 166f. Tese de Doutorado (Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

TREVISAN, André Luis. **Prova em Fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática**. 2013. 168f. Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

SOBRE O ORGANIZADOR

JOSÉ ELYTON BATISTA DOS SANTOS: Graduado em Matemática pela Universidade Federal de Alagoas (UFAL) e graduado em pedagogia pelo Centro Universitário Internacional – UNINTER. Especialização em Metodologia do Ensino da Matemática e Física pelo Centro Universitário Internacional – UNINTER e especialização em Educação Infantil e Anos Iniciais pela Faculdade Venda Nova do Imigrante (FAVENI). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIMA) da Universidade Federal de Sergipe (UFS). Integrante do Núcleo Colaborativo de Práticas e Pesquisas em Educação Matemática (NCPPEM). Membro de corpo editorial do Boletim GEPEM (Online). Professor formador de professores da Educação Básica para a Prova Brasil. Atualmente sou professor efetivo do ensino fundamental da Secretaria Municipal de Educação de Maragogi-Alagoas.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

L

M

V

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

INVESTIGAÇÃO, CONSTRUÇÃO E DIFUSÃO DO CONHECIMENTO EM MATEMÁTICA

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020