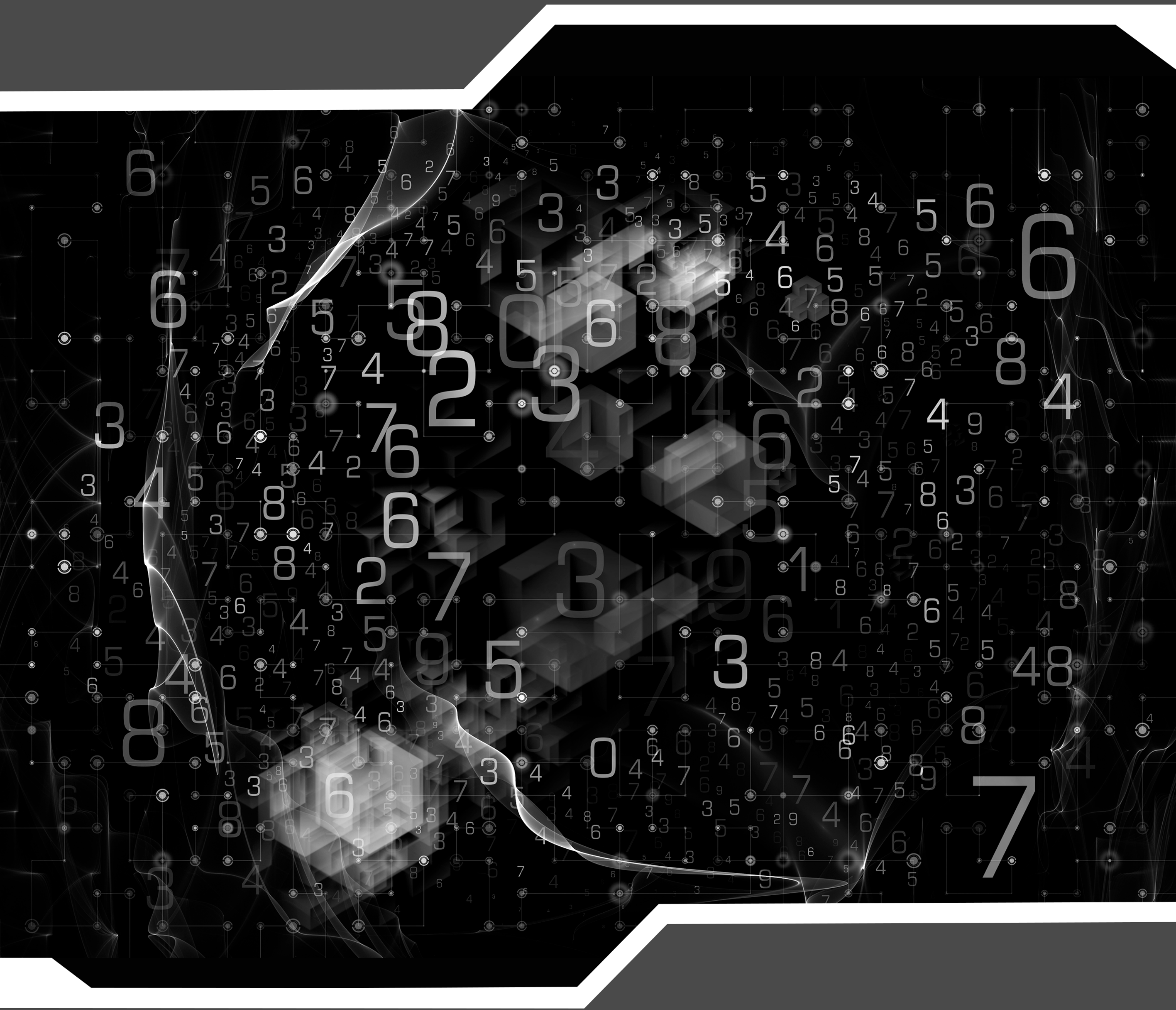
PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)

Atena Editora
Ano 2020

PROSPECÇÃO DE PROBLEMAS E SOLUÇÕES NAS CIÊNCIAS MATEMÁTICAS



FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES
(ORGANIZADOR)

Atena Editora
Ano 2020

2020 by Atena Editora
Copyright © Atena Editora
Copyright do Texto © 2020 Os autores
Copyright da Edição © 2020 Atena Editora
Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Natália Sandrini de Azevedo
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição 4.0 Internacional (CC BY 4.0).

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Conselho Editorial
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas
Profª Drª Adriana Demite Stephani – Universidade Federal do Tocantins
Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Alexandre Jose Schumacher – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Profª Drª Angeli Rose do Nascimento – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior – Instituto Federal do Sudeste de Minas Gerais
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília
Prof. Dr. Carlos Antonio de Souza Moraes – Universidade Federal Fluminense
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Cristina Gaio – Universidade de Lisboa
Profª Drª Denise Rocha – Universidade Federal do Ceará
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia
Prof. Dr. Edvaldo Antunes de Farias – Universidade Estácio de Sá
Prof. Dr. Eloi Martins Senhora – Universidade Federal de Roraima
Prof. Dr. Fabiano Tadeu Grazioli – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Profª Drª Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionele delle Figlie de Maria Ausiliatrice
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense
Profª Drª Keyla Christina Almeida Portela – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso
Profª Drª Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Pereira da Silva – Universidade Federal do Maranhão
Profª Drª Miranilde Oliveira Neves – Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Profª Drª Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Rita de Cássia da Silva Oliveira – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Sandra Regina Gardacho Pietrobon – Universidade Estadual do Centro-Oeste
Profª Drª Sheila Marta Carregosa Rocha – Universidade do Estado da Bahia
Prof. Dr. Rui Maia Diamantino – Universidade Salvador
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. William Cleber Domingues Silva – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

Ciências Agrárias e Multidisciplinar
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano
Prof. Dr. Antonio Pasqualetto – Pontifícia Universidade Católica de Goiás
Profª Drª Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná

Profª Drª Diocléa Almeida Seabra Silva – Universidade Federal Rural da Amazônia
Prof. Dr. Écio Souza Diniz – Universidade Federal de Viçosa
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Prof. Dr. Fágner Cavalcante Patrocínio dos Santos – Universidade Federal do Ceará
Profª Drª Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Júlio César Ribeiro – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Profª Drª Lina Raquel Santos Araújo – Universidade Estadual do Ceará
Prof. Dr. Pedro Manuel Villa – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará
Profª Drª Talita de Santos Matos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Tiago da Silva Teófilo – Universidade Federal Rural do Semi-Árido
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

Ciências Biológicas e da Saúde
Prof. Dr. André Ribeiro da Silva – Universidade de Brasília
Profª Drª Anelise Levay Murari – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás
Prof. Dr. Edson da Silva – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Profª Drª Eleuza Rodrigues Machado – Faculdade Anhanguera de Brasília
Profª Drª Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina
Prof. Dr. Ferlando Lima Santos – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Prof. Dr. Fernando José Guedes da Silva Júnior – Universidade Federal do Piauí
Profª Drª Gabriela Vieira do Amaral – Universidade de Vassouras
Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria
Profª Drª Iara Lúcia Tescarollo – Universidade São Francisco
Prof. Dr. Igor Luiz Vieira de Lima Santos – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará
Profª Drª Magnólia de Araújo Campos – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Mylena Andréa Oliveira Torres – Universidade Ceuma
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federacl do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Paulo Inada – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Renata Mendes de Freitas – Universidade Federal de Juiz de Fora
Profª Drª Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Drª Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias
Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Prof. Dr. Alexandre Leite dos Santos Silva – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás
Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

Conselho Técnico Científico
Prof. Me. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo
Prof. Me. Adalberto Zorzo – Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos – Ordem dos Advogados do Brasil/Seccional Paraíba
Prof. Me. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão

Atena Editora
Ano 2020

Profª Drª Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico
Profª Drª Andrezza Miguel da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Antonio Hot Pereira de Faria – Polícia Militar de Minas Gerais
Profª Ma. Bianca Camargo Martins – UniCesumar
Profª Ma. Carolina Shimomura Nanya – Universidade Federal de São Carlos
Prof. Me. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Prof. Ma. Claúdia de Araújo Marques – Faculdade de Música do Espírito Santo
Prof. Me. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará
Profª Ma. Dayane de Melo Barros – Universidade Federal de Pernambuco
Prof. Me. Douglas Santos Mezacas -Universidade Estadual de Goiás
Prof. Dr. Edwaldo Costa – Marinha do Brasil
Prof. Me. Eliel Constantino da Silva – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita
Profª Ma. Fabiana Coelho Couto Rocha Corrêa – Centro Universitário Estácio Juiz de Fora
Prof. Me. Felipe da Costa Negrão – Universidade Federal do Amazonas
Profª Drª Germana Ponce de Leon Ramírez – Centro Universitário Adventista de São Paulo
Prof. Me. Gevair Campos – Instituto Mineiro de Agropecuária
Prof. Me. Guilherme Renato Gomes – Universidade Norte do Paraná
Profª Ma. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia
Prof. Me. Javier Antonio Albornoz – University of Miami and Miami Dade College
Profª Ma. Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Me. José Luiz Leonardo de Araujo Pimenta – Instituto Nacional de Investigación Agropecuaria Uruguay
Prof. Me. José Messias Ribeiro Júnior – Instituto Federal de Educação Tecnológica de Pernambuco
Profª Ma. Juliana Thaisa Rodrigues Pacheco – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Prof. Me. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa
Profª Ma. Lilian Coelho de Freitas – Instituto Federal do Pará
Profª Ma. Liliani Aparecida Sereno Fontes de Medeiros – Consórcio CEDERJ
Profª Drª Lívia do Carmo Silva – Universidade Federal de Goiás
Prof. Me. Luis Henrique Almeida Castro – Universidade Federal da Grande Dourados
Prof. Dr. Luan Vinicius Bernardelli – Universidade Estadual de Maringá
Profª Ma. Marileila Marques Toledo – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Prof. Me. Rafael Henrique Silva – Hospital Universitário da Universidade Federal da Grande Dourados
Profª Ma. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal
Profª Ma. Solange Aparecida de Souza Monteiro – Instituto Federal de São Paulo
Prof. Me. Tallys Newton Fernandes de Matos – Faculdade Regional Jaguaribana
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

P966 Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena, 2020.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-86002-71-3
DOI 10.22533/at.ed.713200204

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Problemas e soluções. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2020

APRESENTAÇÃO

Esta obra intitulada "Prospecção de problemas e soluções nas ciências matemáticas" contém um aporte teórico vasto no que refere-se ao ensino, aprendizagem e solução de problemas nas ciências matemáticas.

Em tempos atuais esta ciência tem ocupado um papel de grande importância na sociedade, já que representa uma grande ferramenta em mundo repleto de informações expostas pelas mídias, capaz de auxiliar todo cidadão a analisar e inferir sobre tais informações.

Vários temas aqui são abordados, interdisciplinaridade, pensamento matemático, modelagem matemática, formação de professores, dentre outros que permeiam as discussões acerca das ciências matemáticas. Alguns conteúdos específicos também aparecem nesta obra de uma maneira muito significativa, trazendo relatos e estudos relacionados ao ensino e aprendizagem de tais conteúdos em diversas etapas de estudo.

Cabe ressaltar ainda, o viés interdisciplinar deste e-book, apontando a direção para pesquisas que buscam a contextualização da matemática e a sua aproximação com outras áreas de ensino, bem como a modelagem de problemas reais, prospectando problemas e soluções nas ciências exatas, por meio da pesquisa e da tecnologia.

Ao leitor, desejo um bom estudo e que ao longo dos capítulos possa perceber a importância da matemática na solução de problemas que envolvem a sociedade. E que também possa fomentar ainda mais o desejo pelo desenvolvimento de pesquisas científicas que movem o conhecimento nas ciências matemáticas, assim como fazem os autores que compões esta grandiosa obra.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL: ATIVIDADE INTERDISCIPLINAR ENVOLVENDO TEMAS RELACIONADOS À SAÚDE

Data de aceite: 23/03/2020

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

RESUMO: O presente artigo caracteriza-se como um estudo de campo, já que, busca apontar alguns caminhos com relação ao Ensino de Estatística e a interdisciplinaridade no Ensino. Para tanto, desenvolveu-se junto com alunos do 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola particular da cidade de Ponta Grossa, uma pesquisa relacionada aos transtornos alimentares, os padrões de beleza estabelecidos pela sociedade e a influência das redes sociais. Os alunos realizaram uma pesquisa com sete perguntas através do aplicativo de mensagens *whatsaap* conseguindo de volta 72 questionários respondidos. Com o objetivo de conscientização, ao final da pesquisa os alunos realizaram uma apresentação dos resultados para o restante da escola, buscando destacar a influência que as redes sociais podem trazer para os adolescentes. Com a conclusão da proposta, pôde-se observar a motivação dos alunos com a realização das atividades, pois relaciona temas de seu cotidiano e diferencia-se da maneira como vêm sendo ensinados.

PALAVRAS-CHAVE: Estatística; Interdisciplinaridade; Educação e saúde; Transtornos alimentares.

TEACHING AND LEARNING STATISTICS IN FUNDAMENTAL EDUCATION: INTERDISCIPLINARY ACTIVITY INVOLVING HEALTH RELATED TOPICS

ABSTRACT: This article is characterized as a field study, its objective seeks to point out some paths regarding Teaching of Statistics and interdisciplinarity in Teaching Education. To this end, it was developed together with 9th grade students from a private school in the city of Ponta Grossa, a research related to eating disorders, the beauty standards established by society and the influence of social medias. Students conducted a devem questions survey through whatsaap messaging app, getting back 72 answered questionnaires. With the objective of raising awareness, at the end of the research the students created a presentation showing the results to the rest of the school, seeking to highlight the influence that social medias can bring to teenagers. Coming with the proposal conclusion, it was possible to observe the students' motivation with the activities, since it

lists topics from their daily lives and differs from the way they have been taught.
KEYWORDS: Statistic; Interdisciplinarity; Education and health; Eating disorders.

INTRODUÇÃO

Pode-se perceber que em tempos atuais todo cidadão é exposto a uma gama de informações através das mídias- televisão, rádio, internet e entre outros- para tanto não se sabe o quão preparado está este cidadão para analisar e interpretar tais informações que nem sempre são fieis e de boa intenção.

Sabemos que são várias as situações em que a Estatística é primordial para todo cidadão na sociedade em que vivemos. Assim, faz-se necessário que na Educação Básica os alunos possam adquirir o conhecimento Estatístico necessário para a sua atuação na sociedade, daí a grande importância do trabalho deste tema na Educação Matemática.

Aliado a isto, através de experiências práticas em sala de aula observa-se que o ensino como vem sendo desenvolvido atualmente não vem surtindo efeito, através de disciplinas que são desenvolvidas separadamente. A interdisciplinaridade é também um tema muito discutido no âmbito educacional, já que se mostra uma alternativa para romper as barreiras entre disciplinas, mostrando aos alunos a aplicação dos conteúdos no seu dia a dia e em outras áreas de ensino.

Para tanto este artigo busca descrever os resultados obtidos do desenvolvimento uma atividade prática em sala de aula envolvendo um assunto relacionado à saúde: "A influência das redes sociais na determinação dos padrões de beleza e ao desenvolvimento de transtornos alimentares, como a anorexia, bulimia e vigorexia".

Com base neste tema os alunos puderam trabalhar os conteúdos estatísticos na disciplina de Matemática através de uma pesquisa, onde se tornou possível oportunizá-los além da aprendizagem dos conteúdos em uma abordagem interdisciplinar, a discussão sobre o assunto que permeia os adolescentes em fase escolar.

O Ensino de Estatística

Percebe-se que a Estatística está presente no cotidiano das pessoas de diversas formas, a todo tempo se deparamos com a exposição de informações pela mídia, jornais, revistas, que buscam na estatística uma maneira de levar as informações até o espectador. Chamando a atenção para o fato de quão preparado está este cidadão para compreender e analisar tais informações, e quais os impactos que a má interpretação pode causar na sua vida e na sociedade em que vive.

No que se refere ao Ensino de Estatística, cabe ressaltar a importância do trabalho de tal conteúdo na Educação Básica, já que é neste momento que os alunos têm a oportunidade de refletir sobre temas que podem inferir sobre a sociedade. “A utilização da Estatística para descrever e interpretar dados específicos do cotidiano faz dela uma poderosa ferramenta, quer para a solução de problemas reais, quer para a fundamentação de decisões” (FERREIRA; et. al, 2013, p.1).

Por esta razão a Estatística faz parte dos currículos da Educação Básica, sendo indispensável e presente em diversas áreas de ensino, não ficando restrita a disciplina de Matemática, a prova disto é a presença da Estatística na grade curricular de diversos cursos de graduação, que fazem uso da Estatística como ferramenta para tratar e analisar os dados. Para Walichinski e Santos Junior (2013, p. 35) “cabe ressaltar a necessidade de se propiciar ao aluno a construção de tais conhecimentos desde o ensino fundamental”

Pode-se notar também uma rápida mudança na sociedade, que se movimenta rapidamente em torno da tecnologia e globalização, necessitando ainda mais cada cidadão estar preparado para tais mudanças. Lopes (2008) verifica o objetivo de desenvolvermos a capacidade crítica e autônoma dos alunos de Educação Básica, para que este exerça sua cidadania, ampliando possibilidades de êxito pessoal e profissional.

É importante que se possibilite aos alunos o confronto com problemas variados do mundo real e que tenham possibilidades de escolherem suas próprias estratégias para solucioná-los (LOPES, 2008). A Estatística neste caso é ferramenta de fundamental importância, já que trabalha com as incertezas e previsões de dados, auxiliando na resolução de problemas.

É indispensável no Ensino de Estatística que exista uma relação com o mundo real, já que tal conteúdo não faz sentido quando desvinculado de um problema contextualizado que ao menos simule uma situação cotidiana. Para Pereira (2017, p.11)

> Todas as informações divulgadas nos meios de comunicação social referentes a assuntos políticos, econômicos e sociais, são extraídas de amostras de determinada população, o que exige do cidadão compreensão ampla desses dados estatísticos.

Visto isto, pode-se inferir que o Ensino de Estatística na Educação Básica vai além da aprendizagem de conteúdos desenvolvidos na disciplina de Matemática, pois objetiva também capacitar os alunos a melhor se posicionarem diante dos problemas advindos da sociedade, analisando com consciência questões que envolvem diversos assuntos de responsabilidade social.

A INTERDISCIPLINARIDADE COMO FACILITADORA DO ENSINO E APRENDIZAGEM DE ESTATÍSTICA

Para elucidar as possibilidades de ações interdisciplinares no ensino, teceremos aqui algumas considerações a cerca da interdisciplinaridade e também com a sua estreita relação com o Ensino de Estatística.

A Estatística está presente em diversas áreas do conhecimento,já que e essencial para o tratamento dos dados e também para a veiculação de informações, pra muitos autores existe uma natureza interdisciplinar nos conteúdos de Estatística. Batanero (2001) reforça a ideia da natureza interdisciplinar da Estatística, que faz que os conceitos estatísticos apareçam em diversas disciplinas.

Ao quantificar as produções acadêmicas (dissertações) dos mestrados profissionais voltados ao desenvolvimento de propostas interdisciplinares para o Ensino de Estatística e Probabilidade, Gonçalves e Santos Junior (2016) afirmam que dos trabalhos pesquisados que envolvem a Estatística e Probabilidade quase 61% reconhece esta natureza interdisciplinar intrínseca à Estatística, esta busca foi realizada a partir dos cursos recomendados pela Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) na área de Ensino no Brasil. Foram pesquisados 49 programas de instituições de Ensino Superior do país, através do site de cada instituição entre os anos de 2006 a 2014.

A teoria a cerca da interdisciplinaridade ainda é muito incipiente, alguns autores se diferem ainda em conceituações que dizem respeito a interdisciplinaridade. Para Fazenda (2014) a interdisciplinaridade tem uma relação de reciprocidade, de mutualidade, de interação, que possibilita o diálogo entre os interessados, para a autora, depende de uma mudança de atitude perante o problema do conhecimento, da substituição de uma concepção fragmentária pela unitária do ser humano.

Ainda sobre a conceituação interdisciplinar Piaget (1972, p.166) registra que

> *A* interdisciplinaridadetrata de um “segundo nível” de colaboração entre disciplinas diversas, ou entre setores heterogêneos de uma mesma ciência, que conduz a interações propriamente ditas, isto é, certa reciprocidade dentro das trocas, de maneira que aí haja um total enriquecimento mútuo[...]
>
> É necessário considerar naturalmente as situações de hierarquização, não por simples superposição de níveis, como quando se atem aos observáveis, mas pelas articulações estruturadas comparáveis às reações entre grupos e subgrupos, destacando-se aí, por exemplo, as relações interdisciplinares entre a química e a física, podendo se esperar uma integração análoga da biologia na mesma hierarquia.

Percebe-se então que a interdisciplinaridade concebe-se em um patamar que vai além da justaposição de disciplinas, ficando evidente a necessidade de troca entre as áreas e interação entre elas. Reynaut (2011, p.103), ainda afirma: “a interdisciplinaridade é sempre um processo de diálogo entre disciplinas firmemente estabelecidas em sua identidade teórica e metodológica, mas conscientes de seu limite e do caráter parcial do recorte da realidade sobre a qual operam.”

No que diz respeito ao Ensino, a interdisciplinaridade vem se fazendo muito presente, no discurso, e também no currículo das escolas. No nosso país encontra-se em vigor os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), os quais estabelecem os conteúdos, metodologias e aportes para a educação básica nacional.

Nos PCN a interdisciplinaridade é trazida de uma maneira muito ampla. Para o BRASIL (2000), a interdisciplinaridade e contextualização são recursos complementares para ampliar as inúmeras possibilidades de interação entre disciplinas e entre as áreas nas quais as disciplinas venham ser agrupadas.

Alguns autores como Fazenda (2014) e Gacia (2008) colocam-se avessos as concepções interdisciplinares contidas nos PCN. Garcia (2008) faz uma análise textual[1] nos PCN e afirma encontrar a interdisciplinaridade exposta nos documentos oficiais com vários sentidos; como abordagem epistemológica; modo de articular conteúdos; forma de contribuição das disciplinas; forma de organizar as disciplinas em projetos; perspectiva de reorganização curricular; instrumento para articular conhecimento e processo de integração das disciplinas.

Para Fazenda (1995), a teoria interdisciplinar ainda encontra-se em construção, e também aponta a existência de projetos que se julgam interdisciplinares, mas que pouco dialogam com a literatura existente.

> O número de projetos educacionais que se intitulam interdisciplinares vem aumentando no Brasil, numa progressão geométrica, sejam em instituições públicas ou privadas, em nível de escola ou de sistema de ensino. Surgem da intuição ou da moda, sem lei, sem regras, sem intenções explícitas, apoiando-se numa literatura provisoriamente difundida (FAZENDA, 1995, p.34).

Pensando nesta discussão interdisciplinar, e sua real concepção para o Ensino, Petraglia (1993, p. 35) coloca que “para um projeto educacional interdisciplinar desenvolva-se é fundamental que seja iniciado pela preparação do corpo docente”. Isto nos mostra a necessidade das universidades focarem em um processo de aprendizagem sobre a abordagem interdisciplinar durante a graduação e pós-graduação, assim os futuros professores poderão desenvolver com mais propriedade, ações interdisciplinares no Ensino.

Segundo Greco (1994, p. 161), “A interdisciplinaridade é um tema novo de algo antigo”, afirmando que vários fatos antigos como a construção das pirâmides do Egito dos faraós só foram possíveis através de um trabalho interdisciplinar.

Japiassú (1976, p.43) coloca que a interdisciplinaridade apresenta-se como três protestos:

---

1. O autor utiliza um método de investigação proposto por Coombs e Daniels (1991) que, segundo ele, fornece uma interessante alternativa para investigar o significado de um conceito em um texto ou em um conjunto de textos.

> a) contra um saber fragmentado, em migalhas, pulverizado numa multiplicidade crescente de especialidades, em que cada uma se fecha como que pra fugir ao verdadeiro conhecimento; b) contra o divórcio crescente, ou esquizofrenia intelectual, entre uma universidade cada vez mais compartimentada, dividida, subdividida, setorizada e subsetorizada, e a sociedade em uma realidade dinâmica e concreta, onde a "verdadeira vida" sempre é percebida como um todo complexo e indissociável [...];c) contra o conformismo das situações adquiridas e das "ideias recebidas" ou impostas.

Logo, a interdisciplinaridade mostra-se uma real alternativa para a quebra de paradigmas a que se procura integrar as disciplinas, de modo a mostrar aos alunos a relação existente entre as mesmas. No que se refere à construção deste trabalho a interdisciplinaridade foi a forma de abordagem do conhecimento, objetivando ensinar os conteúdos de Estatística de uma forma diferenciada, na qual os alunos poderão ser agentes da sua própria prática e construtores do seu conhecimento.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente trabalho caracteriza-se como estudo de campo, já que procura-se atestar através da observação da prática a elucidação dos fatos e assim dialogar com a literatura que trata deste tema.

Do ponto de vista da forma de abordagem do problema esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa, de cunho descritivo e interpretativo, pois objetivou-se descrever os resultados interpretando-os a fim de cumprir com os objetivos propostos.

A coleta de dados se deu através da observação do pesquisador e também através da construção de um diário de observação que foi preenchido durante a aplicação das atividades do projeto.

Participaram das atividades cinco alunos do 9°ano do Ensino Fundamental II em uma escola particular da cidade de Ponta Grossa, a escolha destes alunos se deu devido ao número reduzido dos alunos desta turma, podendo assim, o professor-pesquisador observar mais atentamente os resultados obtidos. Para Frasson e Oliveira Junior (2009, p.83) "o pesquisador é central nesse processo, pois participa, compreende e interpreta os dados pesquisados".

RESULTADO E DISCUSSÃO

As atividades realizadas com os alunos pressupõem uma atividade diferenciada para o Ensino de Estatística, buscou-se entre tanto, estabelecer uma proposta de Ensino pautada nos moldes interdisciplinares para o Ensino de Estatística.

A primeira etapa para a realização do trabalho foi a discussão para o estabelecimento do tema. Juntamente com os alunos o professor relatou a forma como se daria o trabalho, através de uma pesquisa onde eles seriam responsáveis por toda a coleta e análise dos dados. Porém, o tema surgiu em conjunto, aos poucos foram se direcionando para o assunto “Redes Sociais” e aliado a isto os problemas relacionados a saúde.

O tema definido para a pesquisa então denominou-se “A influência das redes sociais na determinação dos padrões de beleza e ao desenvolvimento de transtornos alimentares, como a anorexia, bulimia e vigorexia”, e com base nele foram criadas 7 perguntas, sendo 6 perguntas fechadas e 1 pergunta aberta.

A coleta de dados se deu através de um questionário virtual, através do aplicativo de mensagens “Whatsapp”, assim os alunos puderam utilizar o aplicativo-muito comum entre os jovens- para fins educativos, mostrando-se uma grande alternativa para a aplicação de questionários, já que possui uma veiculação rápida e instantânea. Os alunos digitaram as questões na forma de mensagem e assim remeteram para o seu grupo de contatos. Assim como mostra a imagem a seguir:

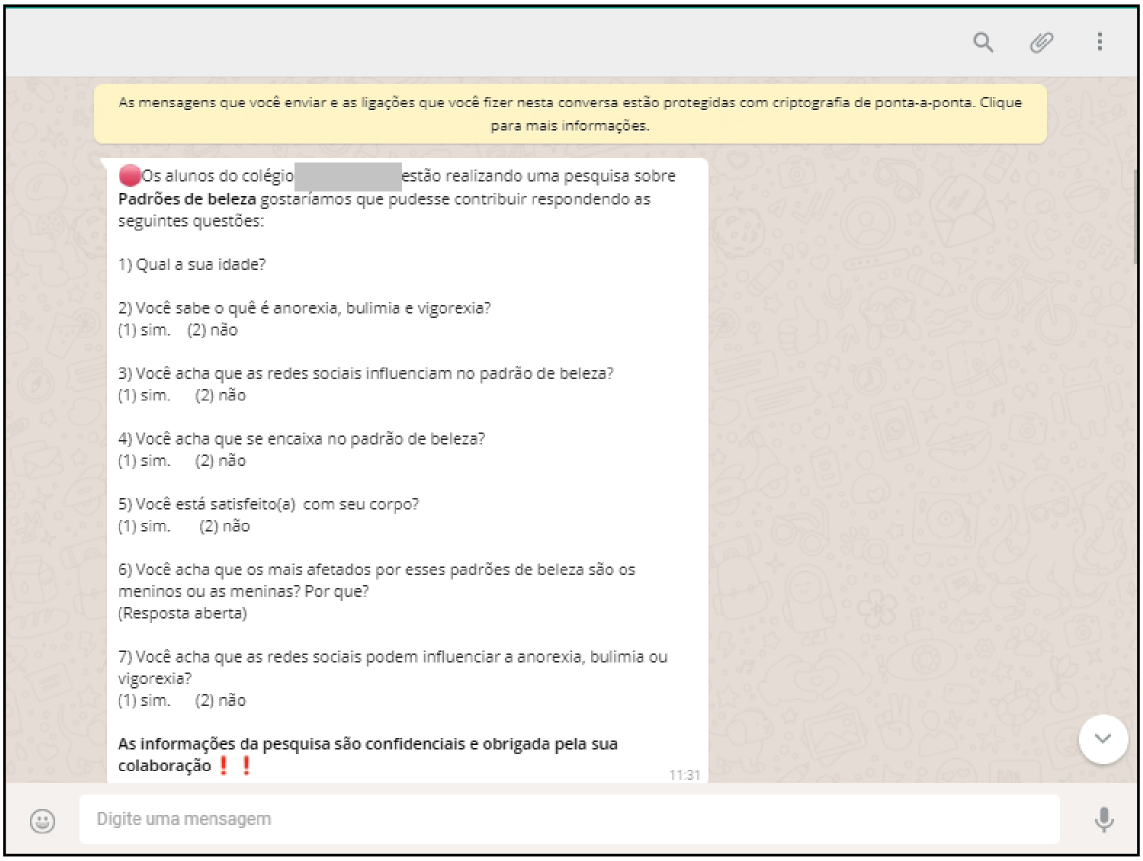


Figura 1: Questionário da pesquisa enviado pelo aplicativo de mensagens “Wathsapp”

Fonte: Alunos

Neste momento da aula pôde-se observar a grande motivação dos alunos, o que nos mostra uma das grandes vantagens do uso de tecnologias no Ensino.

A seguir em uma segunda etapa, os alunos realizaram a análise dos dados de sua pesquisa, primeiramente computando o número de respondentes e também as respectivas porcentagens das respostas, começando ai o trabalho com alguns conteúdos de Estatística- porcentagens, e distribuição de frequências relativas.

Os alunos contaram com a resposta de 72 pessoas, estes dados foram usados e analisados através de tabelas e gráficos que foram construídos usando o software de planilhas eletrônicas “Excel”.

A primeira questão da pesquisa buscava descrever qual a idade do público alvo da pesquisa, e os resultados encontram-se na tabela abaixo:

Idade	Frequência
10 ⊢ 20	79,72 %
20 ⊢ 30	9,46 %
30 ⊢ 40	4,06 %
40 ou mais	6,76 %

Tabela 1: Distribuição de frequência. Idade dos respondentes da pesquisa

Fonte: alunos

Buscado perceber o conhecimento do público alvo da pesquisa sobre o assunto, os alunos formularam a segunda questão: “Você sabe o que é Anorexia, Bulimia e Vigorexia?”. E o resultado da pesquisa mostrou que 15% dos respondentes desconhecem o assunto assim como mostra o gráfico a seguir:

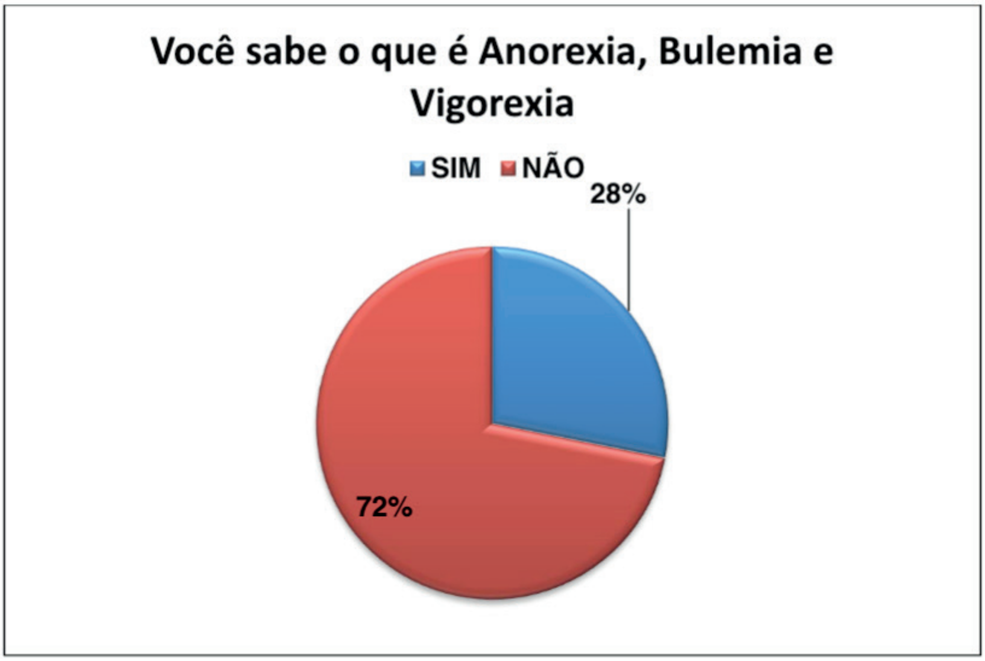


Figura 2: Resultado percentual em resposta a questão 2

Fonte: alunos

Mesmo sendo um assunto muito recorrente nas mídias podemos perceber através do resultado da pesquisa que algumas pessoas ainda desconhecem este assunto, ficando alheias a influências externas, como o das redes sociais.

A terceira questão buscava verificar se os entrevistados tinham acreditavam que as redes sociais podem influenciar estes transtornos alimentares de alguma maneira. A questão foi formulada da seguinte maneira: “Você acha que as redes sociais influenciam nos padrões de beleza?”. O resultado mostrou que também 15 % dos entrevistados acreditam que não existe tal influência, discordando dos demais entrevistados.

Visando observar qual o posicionamento dos entrevistados em uma questão pessoal, os alunos formularam a quarta questão buscando verificar se os entrevistados consideravam-se dentro dos padrões de beleza.

Figura 3: Resultado percentual em resposta a questão 4.

Fonte: alunos

Nota-se com os resultados apresentados acima, que grande parte das pessoas entrevistadas acredita na existência de um padrão de beleza ao qual não pertencem, totalizando 69% das pessoas que responderam ao questionário. Aliado a esta mesma questão através da questão 5 pôde-se perceber que 53% das pessoas afirmaram não estar satisfeitas com o seu corpo, fato preocupante, visto que uma grande parte dos respondentes são adolescentes, sujeitos que estão mais suscetíveis aos transtornos alimentares e também aos meios sociais.

Sabe-se também que a anorexia e bulimia, são doenças muito presentes em meio às meninas, pois tal gênero tem uma preocupação maior com o corpo, sendo mais vaidosas que os meninos. Porém, em tempos recentes pesquisas apontam para um quadro um pouco deferente, verificando muitos casos da doença entre os meninos. Já a vigorexia, o transtorno em que a obsessão é por um corpo musculoso e definido se faz presente em sua maioria entre os meninos, que geralmente em uma fase da adolescência busca um corpo ideal, visionando exemplos que em geral encontram entre os meios sociais.

Os entrevistados em resposta a questão 6- você acha que os mais afetados por esses padrões de beleza são os meninos ou as meninas?- posicionaram-se em 78% das respostas que as meninas são mais afetadas, seguido de 4% que afirmou ser os meninos e ainda 14% acredita que os dois sexos são afetados.

A questão que finalizou o questionário, buscou identificar se os entrevistados acreditavam que as redes sociais podem de alguma forma influenciar os transtornos alimentares- anorexia, bulimia e vigorexia. Assim, 77% dos respondentes acreditam que sim, que as redes sociais muito presente na vida das pessoas pode ter forte contribuição para o estabelecimento de padrões de beleza e assim forçar as pessoas a buscarem tais atitudes contra o seu próprio corpo.

Ao fim do trabalho com a pesquisa os alunos produziram uma apresentação para o restante da escola, expondo os resultados de sua pesquisa. Este momento caracterizou-se como momento de avaliação para o professor, já que, com esta atividade os alunos puderam expressar a sua interpretação sobre os resultados, mostrando aos demais alunos o que se pode inferir através dos resultados obtidos.

Durante este processo pôde-se perceber a relevância da realização de um trabalho com viés interdisciplinar, o fato das aulas ocorrerem de maneira diferenciada, abordando temas que não dizem respeito só a matemática, motivam os alunos através da curiosidade.

Um fator observado também como um ponto positivo, que contribui para o ensino como um todo, mas especificamente para o Ensino de Estatística, é a utilização de temas do cotidiano dos adolescente, o uso de celulares, computadores, redes sociais, metodologias como estas, podem ser usadas a favor do ensino facilitando a aprendizagem dos alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Observou-se ao fim do trabalho realizado que a contribuição de um Ensino pautado em moldes interdisciplinares pode contribuir de uma maneira muito significativa para o Ensino de Estatística, e de uma forma geral para o Ensino Básico.

Observou-se também ao fim da presente pesquisa, que a relevância de atividades como esta vão além do aprendizado escolar, questões como esta, que envolvem saúde, devem ser abordadas mais vezes na escola, a fim de conscientizar os adolescentes e prevenindo problemas futuros.

Com relação ao Ensino de Estatística, assim como delineado no referencial teórico, os conteúdos de estatística estão presentes de uma maneira muito rica dentre as áreas do conhecimento, facilitando a aproximação com outras disciplinas e também o desenvolvimento de ações interdisciplinares.

Por fim cabe destacar a escassez de propostas de cunho interdisciplinar no Ensino Básico, logo, com este trabalho objetiva-se além dos objetivos já expostos, fomentar ações e projetos interdisciplinares para as diversas áreas, visto a sua relevância e contribuição para a Educação.

REFERÊNCIAS

BATANERO, C. **Didáctica de La Estadística.** Granada. Universidad de Granada, Espanha, 2001.

BRASIL/PCN. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Brasília Ministério da Educação, 2000.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade**: História, teoria e pesquisa. 2ª edição. Campinas, SP. Papirus, 1995. 143 p.

_______________ **Interdisciplinaridade:** Um projeto em parceria. 7ª edição. São Paulo. Edições Loyola, 2014. 130 p.

_______________ **O que é interdisciplinaridade?**. São Paulo, Cortez, 2008. 200 p.

FERREIRA, D. H. L.; JACOBINI, O. R; CAMPOS, C. R; WODEWOTZKI, M. L. L. O ensino da estatística num contexto interdisciplinar relacionado com a área profissional do estudante. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE EDUCACÍON MATEMÁTICA, 7., 2013. **Anais...** Montevideo. Montevideo, 2013, p. 2091-2098.

FRASSON, A. C; OLIVEIRA JUNIOR, C. R. **Licenciatura em educação física:** Metodologia da pesquisa científica. Ponta Grossa. UEPG. 2009. 173 f.

GARCIA, J. A Interdisciplinaridade Segundo os PCN. **Revista de Educação Pública**, Cuiabá, 17. set. 2008. Disponível em: <http://periodicoscientificos.ufmt.br/index.php/educacaopublica/article/view/494>. Acesso em: 13 abr. 2016.

GONÇALVES, F. A. M. F; SANTOS JUNIOR, G. Pesquisas que visam propostas interdisciplinares para o Ensino de Estatística e Probabilidade no Brasil: produções nos últimos anos. **Revista Espacios**. Caracas, v. 37, n. 21, p. E-1, 2016.

GRECO, M. **Interdisciplinaridade e revolução do cérebro**. São Paulo, Pancast editora, 1994. 174 p.

JAPIASSÚ, H. **Interdisciplinaridade e Patologia do Saber**. Rio de Janeiro. Editora Imago, 1976, 220 p.

LOPES, C. E. O Ensino da Estatística e da Probabilidade na Educação Básica e a formação de professores. **Caderno CEDES**. Campinas, vol. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008.

PEREIRA, L. B. C. **Ensino de estatística na escola do campo**: uma proposta para um 6º ano do ensino fundamental. 2013. 115 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia.) Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2013.

PETRAGLIA, I. C. **Interdisciplinaridade**: o cultivo do professor**.** São Paulo, Pioneira, 1993. 82 p.

PIAGET, J. L'epistemologie dês relatiosinterdisciplinaires. In: APOSTEL, L. et al. **L'interdisciplinarité: problèmes d'enseignement et de recherchedans lês universités.** Paris: Ceri/OCDE, 1972, p. 131-144.

REYNAUT, C. Interdisciplinaridade: mundo contemporâneo, complexidade e desafios à produção e à aplicação de conhecimentos. In: PHILIPPI JUNIOR, A.; SILVA NETO. **Interdisciplinaridade em Ciência, Tecnologia e Inovação**. São Paulo, Manoele, 2011, p. 69-105.

WALICHINSKI, D; SANTOS JÚNIOR. G dos. Educação Estatística: Objetivos, Perspectivas e Dificuldades. **Imagens da Educação**, Maringá, v. 3, n. 3, p. 31-37, 2013. Disponível em: <http://www.periodicos.uem.br/ojs/index.php/ImagensEduc/article/view/21578/pdf_1> Acesso em: 25. jun. 2015.

CAPÍTULO 2

O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO A PARTIR DE QUESTÕES SOBRE FUNÇÕES ELEMENTARES NO ENSINO MÉDIO

Data de aceite: 23/03/2020

Wagner Gomes Barroso Abrantes
UFRR-EAgro
Boa Vista/RR
http://lattes.cnpq.br/5843918062848558

Felipe da Silva Souza
Colégio Pedro II
Rio de Janeiro/RJ
http://lattes.cnpq.br/5213597672875380

RESUMO: Essa pesquisa tem como objetivo evidenciar indícios do Pensamento Matemático Avançado (PMA) em questões da matemática elementar. Foram propostas quatro questões sobre funções a doze alunos do Ensino Médio que estão se preparando para o processo seletivo de ingresso em um curso de graduação na área de exatas. Utilizando a teoria apresentada por Tommy Dreyfus, é possível verificar que alguns alunos conseguiram realizar todos os processos do PMA. Outros tiveram certas dificuldades. O principal obstáculo encontrado por alguns alunos foi no processo de sintetização.

PALAVRAS-CHAVE: Pensamento Matemático Avançado; Funções; Abstração; Representação.

ADVANCED MATHEMATICAL THINKING FROM ISSUES ON ELEMENTARY SCHOOL FUNCTIONS

ABSTRACT: This research aims to show evidence of Advanced Mathematical Thinking (AMT) in matters of elementary mathematics. Four job questions were proposed to twelve high school students who are preparing for the selection process for entering an undergraduate degree in the exact field. Using the theory presented by Tommy Dreyfus, it is possible to verify that some students were able to perform all the processes of AMT. Others had certain difficulties. The main obstacle encountered by some students was in the synthesis process.

KEYWORDS: Advanced Mathematical Thinking; Functions; Abstraction; Representation.

1 I INTRODUÇÃO

A pesquisa sobre o pensamento matemático avançado se consolidou na década de 80, durante o encontro anual do *International Group for Psychology of Mathematics Education*, a partir da constituição do grupo *Advanced Mathematical Thinking Group*. A proposta desse grupo seria o aprofundamento das questões relativas ao ensino e ao aprendizado da matemática por alunos adultos (PINTO, 2002).

Alguns pesquisadores se destacaram no busca de explicações relacionadas ao pensamento matemático avançado, dentre eles estão Dreyfus (2002), Tall (2002), Grey et al. (1999) e Resnick (1987).

As pesquisas decorrentes mostram que o Pensamento Matemático Avançado traz ingredientes adquiridos na educação básica e que todo o processo para que o aluno consiga alcançar o estágio avançado do pensamento matemático pode ser estimulado antes mesmo dele ingressar no ensino superior.

Para Dreyfus (2002), não há uma nítida distinção entre muitos dos processos dos pensamentos matemáticos elementar e avançado, embora a matemática avançada seja mais focada na abstração da definição e dedução. O pesquisador acredita que é possível pensar sobre tópicos da matemática elementar de modo avançado, assim como também é possível pensar sobre tópicos da matemática avançada de modo elementar, pois a diferença entre eles está apenas na complexidade e no tratamento de cada tópico.

Professores da educação básica podem buscar desenvolver uma maior capacidade de abstração do aluno, mesmo utilizando objetos considerados da matemática elementar, de maneira a minimizar o impacto sofrido no momento do ingresso nos cursos de graduação.

Nasser (2013) afirma que a abstração em matemática é uma habilidade que nem sempre é dominada pelos alunos ingressantes no Ensino Superior, e seu desenvolvimento deve ser estimulado pelos professores das disciplinas básicas.

Esse processo de estímulo trará ao aluno um novo conhecimento, que poderá se somar ou entrar em conflito com aquele conhecimento que o aluno já possuía. Moreira e David (2016) destacam que é um processo de contradição dialética que se estabelece entre o conhecimento “novo” e “antigo”. Os autores acrescentam que o conhecimento anterior do aluno pode servir de obstáculo para o avanço no aprendizado, por outro lado, é indiscutível que os processos de abstração e generalização se desenvolvem essencialmente com esses conhecimentos.

Nesse sentido, a presente pesquisa foi realizada com alunos do Ensino Médio, que estão se preparando para realizar seleção de ingresso em cursos de graduação na área de exatas, cujo objetivo é analisar o pensamento matemático avançado desses alunos sob as orientações teóricas de Tommy Dreyfus, a partir de tópicos da matemática elementar.

2 I PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

O pensamento matemático avançado, para Dreufys (2002), está relacionado à interação entre diversos processos mentais, tais como representação, transformação, visualização, generalização, entre outros. Dois processos ganham destaque: a representação e a abstração.

Dreyfus (2002) explica que os processos envolvidos na representação se subdividem em três outros processos: a representação, a mudança entre representações e a modelação.

1) A representação, por sua vez, divide-se em representação simbólica e representação mental.

1.a) A representação simbólica é responsável por explicitar, através de símbolos, o conhecimento implícito do aluno.

1.b) A representação mental corresponde a um esquema interno que o aluno utiliza com o intuito de interagir com o mundo exterior.

2) A mudança entre representações sugere a capacidade do aluno de transitar entre as diversas representações do objeto em estudo, conforme a conveniência para a solução do problema. Sendo assim, destaca-se a relevância de conhecer as diversas representações de um objeto, a fim de flexibilizar o uso do objeto na solução de um dado problema.

3) A modelação corresponde a encontrar uma representação matemática para um objeto que não é matemático.

Já os processos envolvidos na abstração são divididos em dois pré-requisitos, somados à representação, segundo Dreyfus (2002): a generalização e a sintetização.

1) Generalizar é tomar um caso particular, verificar semelhanças com outros casos e expandir validades.

2) Sintetizar é combinar objetos matemáticos distintos com o intuito de solucionar um problema.

Nessa perspectiva, dentre os processos relacionados ao pensamento matemático avançado, o mais importante é a abstração. Dreyfus (2002) afirma que, ao conseguir desenvolver a habilidade de fazer conscientemente abstrações a partir de situações matemáticas, o aluno alcança o nível avançado do pensamento matemático. Dessa forma, os professores da educação básica devem estar engajados em contribuir com o desenvolvimento dessa capacidade de abstração do aluno, sendo o objetivo principal daqueles que visam à educação matemática avançada.

3 | ASPECTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa, de cunho qualitativo, foi feita com doze alunos do Ensino Médio que estão se preparando para realizar seleção para ingressarem em cursos de graduação na área de exatas. Essa investigação visa fazer uma análise, a partir de temas da matemática elementar, sobre o estágio de abstração desses alunos e, consequentemente, o quão avançado está o nível do pensamento matemático desses alunos, segundo o olhar de Tommy Dreyfus (2002).

A intervenção consiste em quatro questões discursivas entregues simultaneamente aos alunos, sem quaisquer restrições quanto a consultas, discussões entre discentes ou métodos de resolução. O tempo estimado para realização das atividades foi de uma hora e quarenta minutos, sendo uma média de vinte e cinco minutos por questão. As quatro questões abordam o tema de Funções, nas suas diferentes representações. As três primeiras questões envolvem temas contextualizados de Função Afim, enquanto a última questão envolve temas gerais de Função.

A primeira questão divulga dados no seu enunciado e, ao mesmo tempo, por meio do gráfico. Cabe ao aluno interpretar o enunciado e o gráfico para traçar sua estratégia para a solução do problema.

Abaixo, está apresentada a primeira questão da atividade:

Questão 1: O gráfico abaixo mostra a posição do CARRO 1, em função do tempo, a partir da cidade A até a cidade B, que distam 600 Km uma da outra. Um segundo carro, o CARRO 2, saiu da cidade C, situada entre as cidades A e B e distante 150 Km de A, no mesmo instante em que o CARRO 1 iniciou o seu deslocamento. Considerando que o CARRO 2 também está indo para a cidade B, determine a velocidade média adotada por ele para chegar na cidade B no mesmo instante que o CARRO 1.

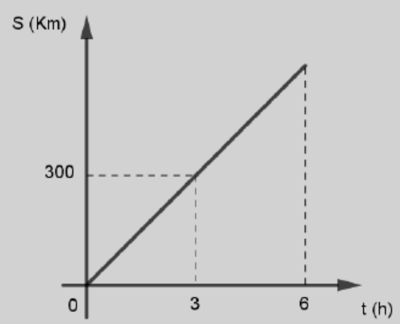


Figura 1 – Primeira questão da atividade de intervenção (Fonte: autor)

Já a segunda questão traz poucos dados no seu enunciado. Os principais dados estão expostos no gráfico. Dessa forma, o aluno deve conseguir extrair os dados do gráfico para solucionar o problema. Cabe ressaltar que a interpretação do enunciado é sempre de grande importância no Pensamento Matemático.

O enunciado da segunda questão está apresentado a seguir:

Questão 2: Uma empresa fabrica um determinado modelo de copo de vidro para venda. Os gráficos abaixo representam as funções G(x) e R(x), que indicam, respectivamente, o gasto e a receita desta empresa em função da quantidade de copos vendidos. Supondo que todos os copos fabricados sejam vendidos, determine a quantidade de copos de vidro que a empresa deve vender para que o seu lucro seja maior que R$1.000,00.

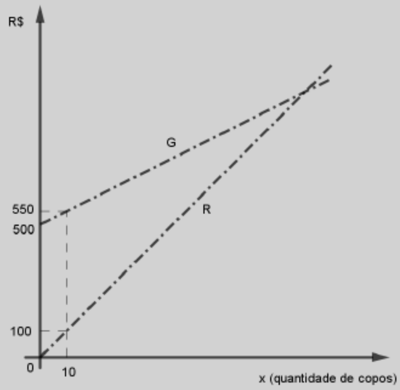


Figura 2 – Segunda questão da atividade de intervenção (Fonte: autor)

A terceira questão traz uma proposta diferente da anterior. Aqui, o aluno não tem o artifício do gráfico para extrair os dados. Ele conta apenas com a interpretação do enunciado para traçar sua estratégia de solução do problema.

Abaixo, segue o enunciado da terceira questão:

Questão 3: Duas lojas oferecem planos para aluguel de máquinas de café expresso. O plano da loja A consiste em uma taxa de adesão de R$1.150,00 mais uma taxa mensal de R$320,00. Já o plano da loja B consiste em uma taxa de adesão de R$500,00 mais uma taxa mensal de R$450,00. Se uma empresa irá adquirir um plano com pagamento da taxa de adesão e da primeira taxa mensal em abril, a partir de que mês o plano A passa a ser mais favorável?

Figura 3 – Terceira questão da atividade de intervenção (Fonte: autor)

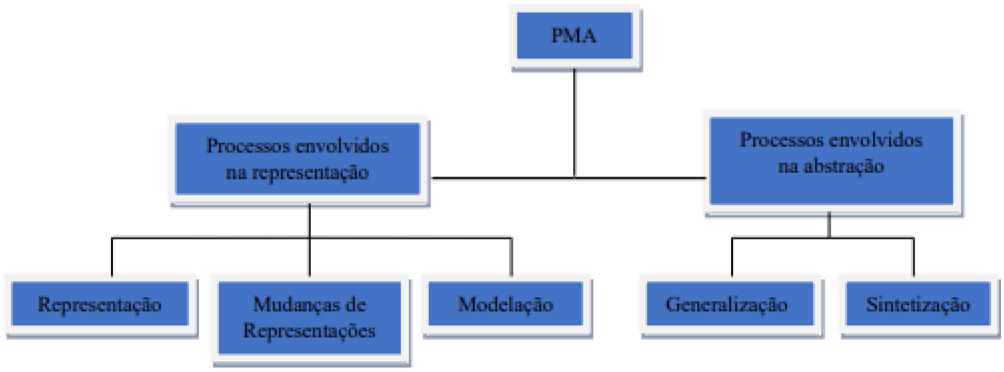
Já a quarta questão é estritamente algébrica. Não há contextualização. O aluno deverá se valer de todos os objetos que compõem uma função para poder solucionar a questão.

O enunciado da quarta questão segue abaixo:

Questão 4: Sejam as funções $f(x) = \sqrt{\frac{x-5}{3-x}}$ e $g(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{3-x}}$. É possível afirmar que *f(x) = g(x)*? Justifique.

Figura 4 – Quarta questão da atividade de intervenção (Fonte: autor)

A análise de dados será feita à luz do olhar de Tommy Dreyfus (2002) sobre o Pensamento Matemático Avançado (PMA), conforme o fluxograma a seguir, elaborado de forma resumida para facilitar a compreensão.



4 I DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A partir dos dados coletados, foi observado que todos os alunos acertaram a primeira questão. De acordo com os processos do PMA envolvidos na representação, é possível fazer a seguinte análise:

I – Representação: Todos os alunos utilizaram a simbologia matemática de forma a contribuir para a solução do exercício;

II – Mudanças de Representações: Todos os alunos conseguiram transitar entre as representações algébrica e gráfica, tendo também interpretado corretamente o enunciado que estava em linguagem natural.

III – Modelação: Apenas cinco alunos descreveram as posições dos carros como função polinomial do 1° grau, tendo como incógnita o tempo t.

Fazendo uma análise conforme os processos do PMA envolvidos na abstração, é possível destacar:

I – Generalização: De acordo com os dados apresentados sobre o deslocamento de ambos os carros em pontos específicos, todos os alunos foram capazes de identificar que se tratava de objetos em Movimento Uniforme. Porém, apenas cinco conseguiram associar o Movimento Uniforme à Função Afim.

II – Sintetização: Todos os alunos foram capazes de utilizar diferentes conceitos para a resolução do problema. Sete alunos utilizaram as fórmulas de física como ferramenta para solucionar a questão, três utilizaram o conceito de taxa de variação média, análise de gráfico e as informações do enunciado para construção das funções e dois utilizaram os pontos do gráfico e as informações do enunciado para construção das funções.

Abaixo, segue um exemplo da solução de um aluno:

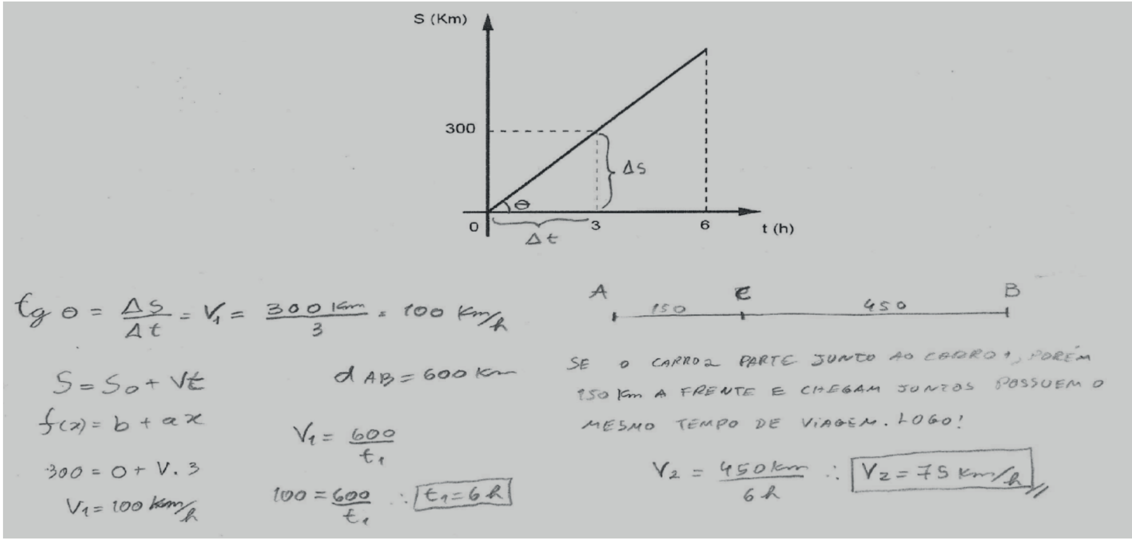


Figura 5 – Solução da questão 1

Na solução apresentada na Figura 5, o aluno transita entre as representações algébrica e gráfica, utiliza o conceito de taxa de variação média para determinar a velocidade média do carro 1, fazendo a prova real por meio da representação algébrica da função afim. O aluno demonstra algebricamente que depois de 6 horas o carro 1 percorre os 600km e utiliza o conceito de taxa de variação média para encontrar a velocidade do carro 2.

A segunda questão apresentou um número de erros significativo. Foram cinco soluções erradas e sete corretas. A maioria dos erros foi devido a não visualização da inequação como ferramenta para resolver a questão. Vamos fazer uma analise sobre os processos do Pensamento Matemático Avançado na representação observados questão:

I – Representação: De uma maneira geral, os alunos conseguiram interpretar as representações gráficas como funções afins, utilizando esta simbologia como forma de iniciar a solução.

II – Mudanças na representação: Os alunos conseguiram transitar entre as representações gráfica e algébrica para possibilitar o desenvolvimento da questão.

III – Modelação: Os alunos conseguiram escrever algebricamente as funções Gasto e Receita. Diferente da questão anterior, nenhum aluno utilizou o conceito de taxa de variação média para determinar os coeficientes angulares das funções. A determinação das funções foi feita a partir das coordenadas dos pontos dados nos gráficos.

Vejamos agora a análise dos processos do Pensamento Matemático Avançado na abstração observados na segunda questão:

I – Generalização: Os alunos conseguiram, a partir das características dadas, generalizar as características da função afim para as funções Gasto e Receita.

II – Sintetização: Todos os alunos utilizaram as propriedades das funções afins nesta questão. Porém, apenas sete alunos conseguiram utilizar corretamente o conceito de inequação como ferramenta para solucionar a questão e cinco usaram de maneira incorreta essa ferramenta, não conseguindo assim chegar à resposta devida.

Abaixo, há duas soluções que serão apresentadas, sendo uma correta e outra incorreta.

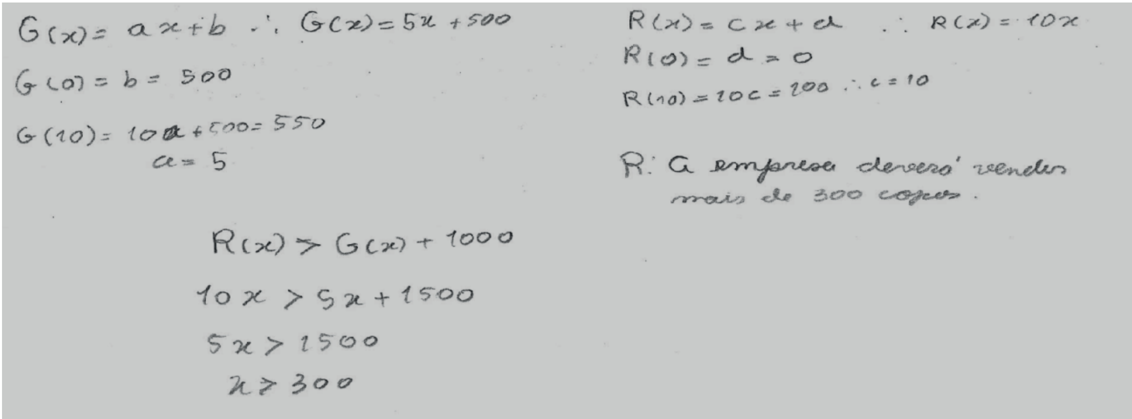


Figura 6 – 1ª Solução da questão 2

Na figura 6, o aluno utiliza as coordenadas dos pontos apresentados no gráfico para construir algebricamente as funções Gasto e Receita. Ao interpretar corretamente que o lucro é a diferença entre a Receita e o Gasto, o aluno lança mão da inequação para chegar ao resultado pedido.

Na solução apresentada na Figura 7 é possível observar que o aluno consegue fazer a mudança de representação das funções Gasto e Receita: da gráfica para a algébrica. O aluno identifica a necessidade de utilização da inequação como ferramenta para a solução da questão, mas não a emprega de maneira correta, obtendo então uma resposta incorreta.

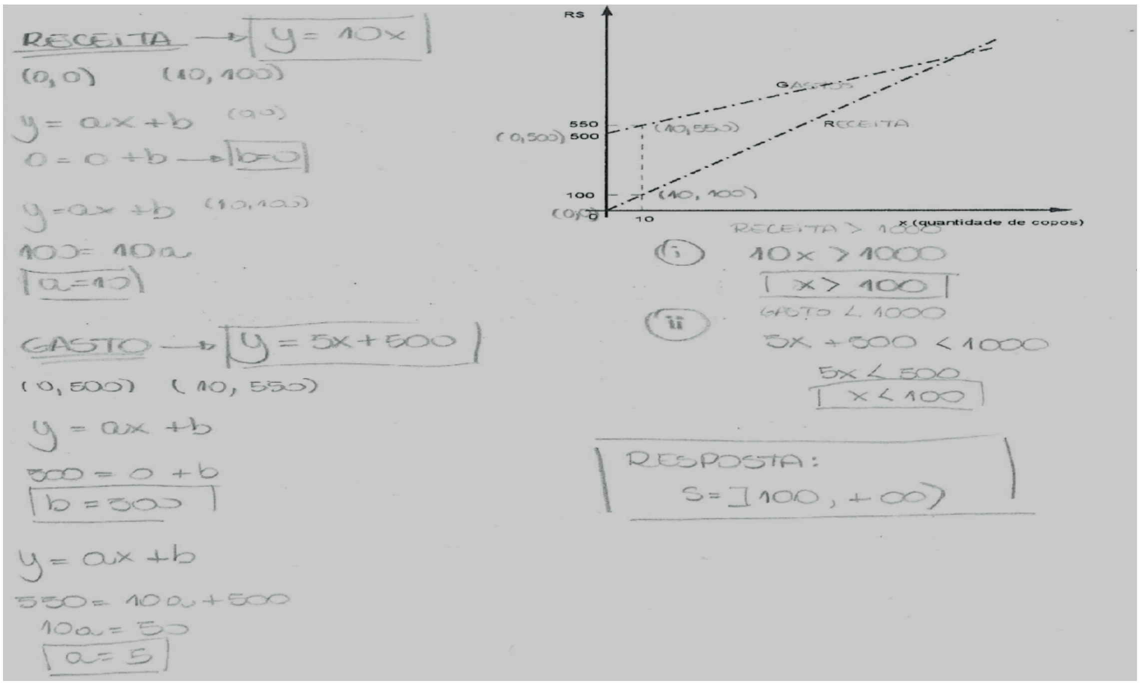


Figura 7 – 2ª Solução da questão 2

A terceira questão apresentou dez acertos e dois erros. Três alunos não resolveram a questão utilizando o conceito de função afim. Esses alunos calcularam o quantitativo pago em cada plano mês a mês e fizeram a comparação. Vamos analisar o desenvolvimento dos processos do Pensamento Matemático Avançado na representação observados nessa questão.

I – Representação: Todos os alunos utilizaram a simbologia matemática para solucionar a questão.

II – Mudança na representação: Nove alunos converteram os dados da linguagem natural para a representação algébrica. Três alunos transitaram entre a representação de linguagem natural e a representação aritmética.

III – Modelação: Apenas nove alunos conseguiram escrever os valores pagos em cada plano como função do mês.

Em relação aos processos do Pensamento Matemático Avançado na abstração, é possível fazer a seguinte análise:

I – Generalização: A partir dos dados divulgados no enunciado, nove alunos conseguiram generalizar as propriedades da função afim para os planos de ambas as empresas. Observou-se que três alunos podem ter apresentado dificuldade de generalização do valor pago em cada plano por terem optado por uma solução aritmética em detrimento da algébrica. Cabe ressaltar que esses alunos não apresentaram dificuldades conceituais sobre Função Afim nas questões anteriores.

II – Sintetização: Nove alunos utilizaram os conceitos de função afim e de inequação para resolver a questão, enquanto três alunos utilizaram operações básicas de aritmética como ferramenta para solução. Dentre aqueles que utilizaram os conceitos de inequação, dois não atingiram a resposta correta por inconsistência no intervalo ao qual pertence a incógnita ***x***.

Abaixo, segue um exemplo de solução da terceira questão:

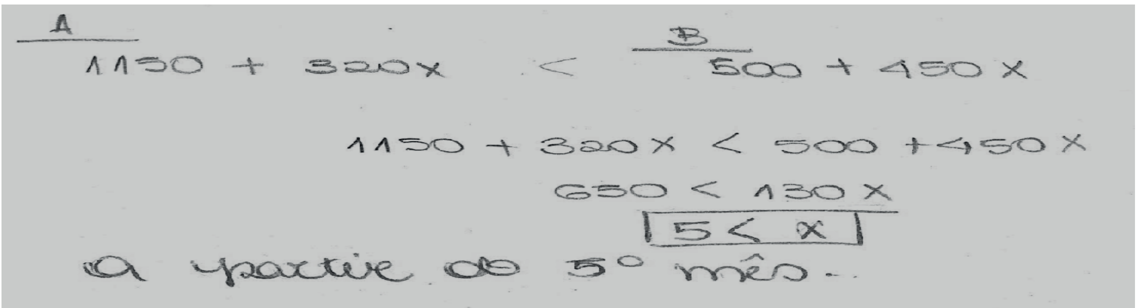


Figura 8 – Solução da questão 3

Note que o aluno representa corretamente como funções afins os valores pagos em cada plano por mês e utiliza a inequação como ferramenta para resolução do exercício. Porém, $x > 5$, logo a resposta seria "*a partir do 6º mês".*

Na quarta questão, cinco alunos conseguiram desenvolver a solução corretamente. Sete não chegaram à resposta correta, sendo que um deixou em branco, cinco tiveram problemas para encontrar os domínios de alguma das funções e um aluno fez atribuindo valor à incógnita e concluindo a igualdade.

A seguir, será feita a análise dos processos do Pensamento Matemático Avançado na representação:

I – Representação: Com exceção do aluno que deixou a questão em branco e do aluno que atribui valor à incógnita, os demais conseguiram expressar algebricamente as condições dos domínios das funções f(x) e g(x).

II – Mudanças de representação: Os cinco alunos que acertaram a questão transitaram entre a representação algébrica das inequações e as representações na reta real. Dentre os alunos que erraram a questão, apenas dois utilizaram desse artifício.

III – Modelação: Entendemos que esse processo não se aplica a essa questão, tendo em vista que ela é puramente algébrica.

Agora, vamos fazer uma análise dos processos do Pensamento Matemático Avançado na abstração que foram observados nessa questão:

I – Generalização: Os cinco alunos que acertaram integralmente essa questão e os cinco que tiveram problemas para encontrar os domínios das funções conseguiram generalizar a condição de igualdade para todas as funções, isto é, a lei de formação, o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem devem ser todos iguais. O aluno que atribuiu valor generalizou de maneira incorreta, sem o formalismo matemático.

II – Sintetização: Os cinco alunos que acertaram a questão utilizaram os conceitos de inequação e conjuntos para resolver a questão. Os cinco alunos que tiveram problemas para a construção dos domínios das funções tiveram problemas exatamente na operação entre conjuntos, obtendo assim o domínio incorreto.

A seguir, seguem duas soluções da quarta questão:

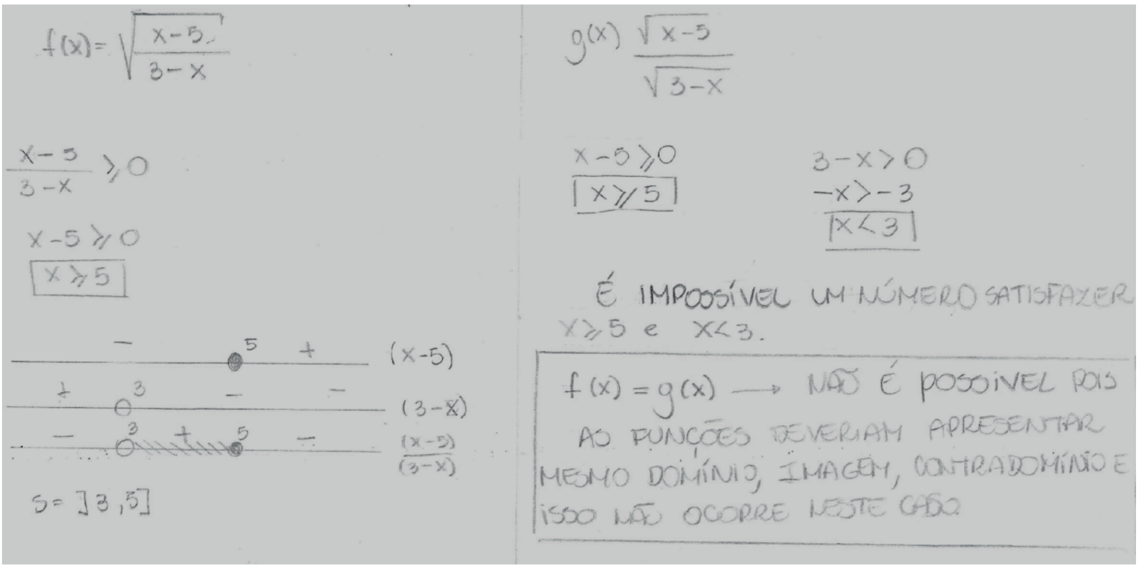


Figura 9 – 1ª Solução da questão 4

Na Figura 9, é possível observar que o aluno utiliza a inequação para o cálculo de ambos os domínios, sendo que no caso da função f(x) o aluno faz a conversão para a representação geométrica com intuito de melhor analisar a questão. No caso da função g(x), o aluno entende que é necessário fazer a interseção dos conjuntos obtidos para determinar seu domínio. Como a interseção é vazia, não há número real que satisfaça o valor de x.

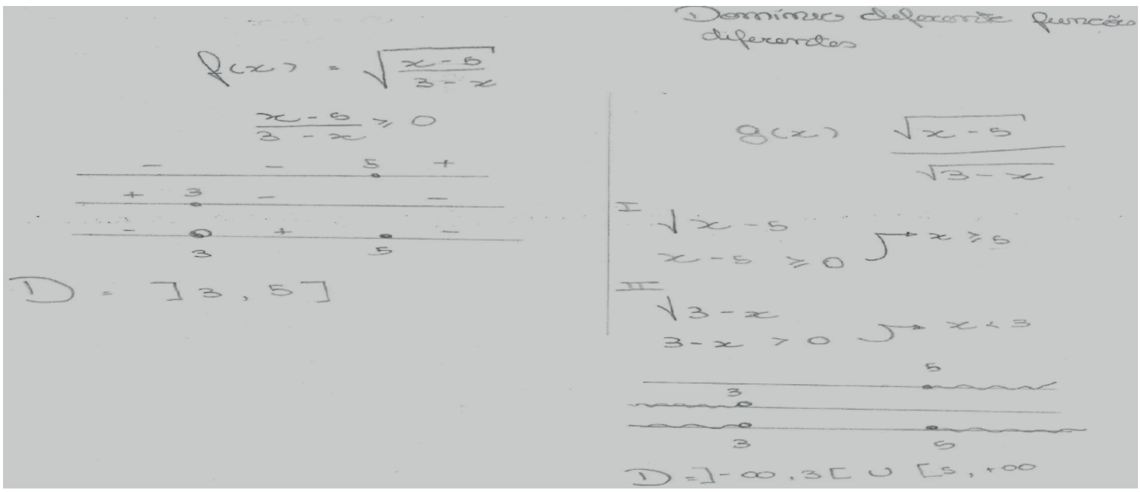


Figura 10 – 2ª Solução da questão 4

Já na segunda solução apresentada, o aluno comete um erro ao fazer a análise dos conjuntos obtidos para determinar o domínio de g(x). Ao invés de fazer a operação de interseção entre os conjuntos, o aluno faz a união entre eles, determinando dessa forma o domínio errado para a função g(x).

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi evidenciar que há indícios do Pensamento Matemático Avançado, mesmo se tratando da Matemática Elementar, sem salientar o caráter comparativo entre os alunos. Foram propostas quatro questões de temas elementares de funções para doze alunos do Ensino Médio que estão se preparando para o processo seletivo de ingresso em curso de graduação na área de exatas.

Todos os alunos acertaram a primeira atividade, mas sete não fizeram a generalização do movimento uniforme como uma função afim. Esses alunos utilizaram fórmulas prontas da física nas suas soluções. Sendo assim, não foi possível identificar de generalização ou se, o fato deles utilizarem os conhecimentos aprendidos na disciplina de física, foi uma questão de estratégia.

A segunda questão apresentou cinco soluções incorretas devido às inconsistências nas inequações utilizadas como ferramenta para solucionar o problema. Isso demonstra a deficiência na capacidade de sintetização do aluno.

A terceira questão apresentou apenas duas soluções erradas em virtude de inconsistências nas inequações e, assim como na questão anterior, evidencia uma deficiência na capacidade de sintetização do aluno. Houve também o fato de que três alunos optaram pela solução aritmética em detrimento da algébrica. Não foi possível identificar se isso se deve a dificuldades de generalização ou se foi uma estratégia de solução.

A quarta questão apresentou seis soluções incorretas e uma em branco. Dentre as seis incorretas, em uma o aluno tentou generalizar por substituição de valores, mas a falta do formalismo ocasionou uma inconsistência matemática. As cinco soluções restantes trouxeram problemas na operação entre conjuntos, o que evidencia deficiência na capacidade de sintetização do aluno.

Sendo assim, foi possível evidenciar que em todas as questões houve alunos que conseguiram realizar os processos do PMA. A abstração foi o principal problema comprovadamente apresentado por alguns alunos, sendo mais evidente no processo de sintetização. A necessidade de utilização de diversos objetos matemáticos na mesma questão pode se tornar um grande obstáculo para os alunos do Ensino Médio. Em alguns casos, não foi possível identificar se houve deficiência na capacidade de generalização dos alunos. Foi possível notar que aqueles alunos que tiveram problemas de abstração, tiveram também problemas na modelação.

REFERÊNCIAS

DREYFUS, T. **Advanced mathematical thinking process**. In: TALL, D. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 25-41.

GREY, E. et al. **Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics**. Educational Studies in Mathematics, v. 38, n. 1-3, p. 111-133. 1999.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

NASSER, L. **O papel da abstração no pensamento matemático avançado**. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, v.1, p. 891-897, 2013.

PINTO, M.M.F. **Educação matemática no ensino superior**. Educação em Revista, Belo Horizonte, n.36, dez, 2002.

RESNICK, L. B. **Education and learning to think**. Washington, National Academy Press, 1987.

TALL, D. **The psychology of advanced mathematical thinking**. In: TALL, D. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 3-21.

CAPÍTULO 3

REFLEXÕES METODOLÓGICAS SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Data de aceite: 23/03/2020

Elisângela Guimarães Firmino
Faculdade de Educação de Jaru - FIMCA
Unicentro

Neivaldo Rodrigues dos Santos
Fundação Universidade Federal de Rondônia - UNIR, campus Porto Velho

RESUMO: A matemática financeira não pode ser exclusiva de profissionais de finanças, ela deve ser de domínio de todos os cidadãos. O trabalho tem como objetivo apresentar diferentes metodologias para se trabalhar os conteúdos de matemática financeira no âmbito da educação básica. Utilizou-se nesse artigo uma abordagem qualitativa, bibliográfico, de cunho descritivo e exploratório. Para isso foi realizado um questionário online para apurar dados sobre o ensino financeiro nas escolas de educação básica no estado de Rondônia. Foi verificado que o conteúdo está sendo aplicado, porém de uma forma engessada sem despertar o interesse de ir além sala de aula. Há ainda um grande desafio, precisamos desengessar o processo de ensino, buscando nos apropriar de metodologias que auxiliem no processo formativo, buscando assim vencer a barreira do ensino formalista e proporcionando assim uma formação dinâmica a qual atrai a atenção dos alunos e não acabe sendo algo que o alunos verão e deixarão de lado. Entre as diversas formas de proporcionar essa evolução na área da educação é mostrar aos professores metodologias que podem ser utilizadas por eles durante o processo de ensinar os conteúdos de matemática financeira.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Financeira; Matemática Financeira; Metodologias de ensino**.**

1 I INTRODUÇÃO

Quando uma sociedade possui o pleno domínio dos conhecimentos de cunho matemáticos, torna-se possível haver uma grande revolução. Como na matemática financeira, por exemplo, que pode trazer esse novo olhar para os estudantes, mostrando o poder de bons investimentos, isso pode acarretar em um futuro mais próspero para o país.

O conhecimento financeiro não pode ser limitado apenas para profissionais na área de finanças como: administração, contabilidade e economia. Pois não são apenas essas pessoas que lidam com dinheiro, todo o cidadão lida com esse recurso. Ele está inserido em toda a vida desde das etapas pré-operatória até a morte.

Dentre o rol de conhecimentos que estão inseridos na grade de conteúdos da educação básica, destaca-se o conteúdo de matemática financeira. Embora a grande relevância desse conteúdo, muitas vezes temos que não é dado a devida atenção ao mesmo, porém, assim como os demais conteúdos de matemática, a educação financeira popularmente denotada como matemática financeira deve ser trabalhada nas salas de aula, visto que, a partir da mesma, torna-se possível formar um cidadão crítico e capacitado para lidar com as condições diárias.

O desafio consiste em mostrar para os estudantes como lidar com as finanças de uma forma interessante para eles, ou seja, o professor deve buscar contextualizar a forma de ensinar podendo apresentar o papel da finanças fora do ambiente escolar, com respeito a isso os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) apresentam:

> Em um mundo onde as necessidades sociais, culturais e profissionais ganham novos contornos, todas as áreas requerem alguma competência em Matemática e a possibilidade de compreender conceitos e procedimentos matemáticos é necessário tanto para tirar conclusões e fazer argumentações, quanto para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional. (Brasil. 1999).

Assim torna-se importante que o professor crie metodologias que visam mostrar a importância da educação financeira para a formação dos alunos. Este trabalho tem como objetivo apresentar diferentes metodologias para se trabalhar os conteúdos de matemática financeira no âmbito da educação básica, visando assim a formação de cidadãos críticos e conscientes. Sendo a escola um agente transformador, os estudantes obtêm conhecimentos cognitivos e técnicas que proporcionam a administrar sua vida financeira e a realização de propostas e escolhas. A educação financeira é entendida como uma ferramenta que interage com as diversas componentes curriculares do sistema de educação básica, que desenvolvido em sala de aula possibilita ao estudante a materializar sonhos em realidade.

Buscando verificar a forma como é trabalhada a matemática financeira nas escolas públicas e particulares do estado de Rondônia, realizou-se uma pesquisa de campo com professores de educação básica em escolas particulares e públicas do estado de Rondônia a fim de apurar como se é aplicado esses conteúdos e de que forma é apresentado.

2 I INADIMPLÊNCIA DAS FAMÍLIAS BRASILEIRAS

Muitas famílias no Brasil estão em uma situação financeira difícil, segundo pesquisa realizada pela PEIC (Pesquisa de Endividamento e Inadimplência do

Consumidor) 60,7% das famílias brasileiras estão inadimplentes, deste percentual 10% afirmam que não possuem meios para quitar as dívidas. Ou seja, mais da metade das famílias não possuem o poder de compra.

De acordo com pesquisa realizada em 2017, pela PEIC, o maior percentual das dívidas é do cartão de crédito, representando 76,7% seguido dos carnês com 15,7% e dos créditos pessoais que representam 10,3%. Evidenciando, assim, a falta de conhecimento de financeiro das famílias brasileiras. Segundo professor economista Ginez Leopoldo Rodrigues de Campos em uma entrevista realizada pela UPF em 2018, afirma que “Nós temos essa carência educacional hoje no Brasil, que é a organização da vida financeira pessoal.”

3 I EDUCAÇÃO FINANCEIRA

A evolução do sistema capitalista com a valorização da propriedade privada e a livre exploração dos recursos de produção baseada na lei da oferta e da demanda, obrigou as pessoas a compreenderem melhor o conceito de dinheiro e suas variáveis mais complexas. Exigiu ainda a divulgação informação que as ajudassem a gerir seus bens e rendimentos de forma adequada e eficaz.

A educação financeira surge então, como resposta para orientar a tomada de decisões financeiras, com informações sobre desejos de consumo, necessidades, poupança e renda.

Dito de outra forma, a educação financeira pode ser entendida como:

> Um processo de transmissão de conhecimento que permite o desenvolvimento de habilidades nos indivíduos, para que eles possam tomar decisões fundamentadas e seguras, melhorando o gerenciamento de suas finanças pessoais. Quando aprimoram tais capacidades os indivíduos tornam-se mais integrados à sociedade e mais atuantes no âmbito financeiro, ampliando o seu bem-estar (SAVOIA; SAITO e SANTANA, 2007, p. 2).

O termo “educação”, no mundo das finanças, significa o conhecimento de termos financeiros, de habilidades, de práticas, de normas para compreender e executar atividades ligadas ao uso do dinheiro e mais ainda, a educação está relacionada também a conhecimentos e habilidade com a matemática financeira, que é uma ferramenta racional de grande utilidade para tomar decisões financeiras inteligentes.

> A educação financeira promove a investigação sobre a importância do dinheiro e a forma de administrá-lo adequadamente ao longo do tempo. Sendo assim, a educação financeira é fundamentada na administração do dinheiro. Disso resulta na execução de um planejamento financeiro pessoal, que consiste em programar e seguir certa estratégia, seja de curto, médio ou longo prazo, com a finalidade de garantir o bem-estar econômico e financeiro das pessoas. (SAVOIA; SAITO e SANTANA, 2007, p. 2).

Mas afinal, qual é a serventia da educação financeira? A pergunta pode ser respondida da seguinte forma: famílias, pessoas, dos mais diversos níveis de renda compartilham aspirações semelhantes, tendem a suprir suas necessidades básicas, educar filhos, adquirir casa e carro próprios, consumir uma diversidade de bens e serviços ofertados pelo mercado. Viver em situação de baixa renda, implica em não possuir condições suficiente para atingir tais objetivos, e para que este grupo de indivíduos possam melhorar suas condições e até mesmo poupar, ainda que quantias pequenas, este grupo de consumidores carece acesso a conhecimentos e informações que lhes possibilite o melhor manejo de seus recursos financeiros.

Com o ensino de boas práticas para o gerenciamento de finanças em relação aos ganhos, gastos, poupança e investimento, a educação financeira pode possibilitar à população de baixa renda, ou mesmo de outras faixas de rendas, melhor gestão de seus recursos financeiros e consequentemente, a melhoria de qualidade de vida.

De forma geral, os objetivos da educação financeira consistem na apropriação e utilização, pelos indivíduos e seus grupos sociais das tecnologias inerentes à matemática financeira, de planilhas eletrônicas, dos conceitos do dinheiro. É, portanto um trabalho de alfabetização financeira para tornar possível que as pessoas sejam capazes de gerenciar suas próprias vidas

No Sistema Educacional Brasileiro, ainda são poucas as ações que consolidam a educação financeira como ciência a ser trabalhado no conjunto das demais ciências desenvolvidas no interior das escolas.

Autores como Domingos (2012, p. 20) classificam a educação financeira como uma das interfaces das ciências humanas "que busca autonomia financeira fundamentada por uma metodologia baseada no comportamento, objetivando a construção de um modelo mental que promova a sustentabilidade, crie hábitos saudáveis e proporcione o equilíbrio entre o ser, o fazer e o ter". Contudo, na escola a educação financeira não tem status de ciência, ficando sempre a cargo dos professores e professoras de Matemática.

Por outro lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs acenam positivamente para e educação financeira ao preconizar a contextualização do ensino, pressupondo um processo de aprendizagem apoiado no desenvolvimento de competências para inclusão dos estudantes na vida adulta através da multidisciplinaridade, do incentivo ao raciocínio e da capacidade de aprender (BRASIL, 2000a).

4 I MATEMÁTICA FINANCEIRA NAS ESCOLAS

Uma das tentativas de institucionalizar a educação financeira no Brasil foi a criação do Comitê de Regulação e Fiscalização dos Mercados Financeiros, de

Capitais, de Seguros, de Previdência e Capitalização – COREMEC, pelo Decreto 5.685 de 25/01/2006. Ficou a cargo deste Comitê estabelecer diretrizes para a implantação de uma educação financeira ampla.

Neste contexto, através da Deliberação nº 5, de 26 de junho de 2008, o COREMEC estabeleceu as diretrizes e objetivos para a implantação da Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF. O documento estabelece que em seu:

> Art.2º Ficam definidos como objetivos da Estratégia Nacional de Educação Financeira:
>
> I - promover e fomentar a cultura de educação financeira no país;
>
> II - ampliar o nível de compreensão do cidadão para efetuar escolhas conscientes relativas à administração de seus recursos; e
>
> III - contribuir para a eficiência e a solidez dos mercados financeiro, de capitais, de seguros, de previdência e capitalização (BRASIL, 2008).

Com a criação desta deliberação, a Educação Financeira torna-se algo mais tangível, possuindo objetivos claros e estratégias determinantes para seu prosseguimento. Esta medida incentiva que a educação financeira seja trabalhada nas escolas brasileiras, isto é o que preconiza o Decreto nº 7.397, de 22 de dezembro de 2010, o qual define em seu Artigo 1° que:

> Fica instituída a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF com a finalidade de promover a educação financeira e previdenciária e contribuir para o fortalecimento da cidadania, a eficiência e solidez do sistema financeiro nacional e a tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores (BRASIL, 2010).

Após a criação da ENEF com a finalidade e promover tanto a educação financeira quanto a previdenciária, foram criados também o Comitê Nacional de Educação Financeira – CONEF e o Grupo de Apoio Pedagógico – GAP, ambos no ano de 2010 para auxiliar na permanência e fortalecimento da educação financeira. O grupo de trabalho estabelecido pela ENEF criou um material didático com a finalidade de proporcionar suporte e conteúdos específicos voltados para essa temática.

A escola tem o "dever" garantir uma formação financeira para esses alunos, pois tem como seu principal papel formar um cidadão crítico, ciente de seus direitos e deveres, assim a partir de uma boa educação financeira, a escola gera oportunidades para gerar um cidadão ativo na sociedade.

> Deve garantir-lhe autonomia de pensamentos, capacidade de tomar iniciativa e de desenvolver o pensamento crítico, para viver em uma grande sociedade em constante e acelerado processo de crescimento e transformação. (Giovanni e Giovanni Jr.2.006)

Buscando metodologias que tornem o ensino de conteúdos de matemática mais interessantes, nesse caso metodologias para ensinar educação financeira de maneira mais prática, onde o aluno tenha a possibilidade de vivenciar situações diárias e não apenas teoria. Assim o aluno tem a possibilidade de aplicar conhecimentos adquiridos na escola no seu dia-a-dia, e o professor tem a possibilidade de aproximar o ensino de matemática a uma realidade que torna-se prática ao aluno, influenciando assim o desejo de aprender.

Segundo Dantes 1999,

> A oportunidade de usar conceitos matemáticos no seu dia-a-dia favorece o desenvolvimento de uma atitude positiva do aluno em relação à Matemática, não basta fazer mecanicamente as operações de adição, subtração e divisão. É preciso saber como e quando auxiliá-los convenientemente na resolução de situações problemas, aprenderem a resolver problemas matemáticos deve ser o maior objetivo da instrução matemática, certamente outros objetivos da Matemática devem ser procurados mesmo para atingir o objetivo da competência em resolução de problemas. (DANTE, p.14)

Aproximar o ensino de matemática a realidade do aluno traz diversas possibilidades que vão além de trabalhar a educação financeira, o fato é que o aluno ao ter a possibilidade de sair da teoria para uma situação na qual o aluno já vivenciou no contexto de sua realidade faz com que o aluno se aproprie melhor do conteúdo.

Ao realizar essa ponte entre o conhecimento teórico e o conhecimento prático o professor está criando mecanismos capazes de colocar em prática o artigo 2.º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação –LBD Nº 9394/96, evidencia que uma nova educação:

> Almeja criar ambientes que possam preparar e educar cidadãos críticos, atuantes e livres, que liberem energia em atividades em grupo; no pensar e no fazer modernos, que sejam questionadores, que participem de uma educação mais humana e fraterna com o emotivo e o artístico presente; enfim, que os futuros cidadãos sejam atuantes e reflexivos em nossa sociedade. (p. 15)

Entre as ferramentas pode-se utilizar panfletos de lojas locais onde encontra-se preços à vista e a prazo, elaborar o cálculo para saber qual a porcentagem de juro foi aplicada e encontrar a diferença de uma forma de pagamento para a outra. Como também fazer pesquisas dos empréstimos e financiamentos em bancos e seguradoras de crédito e analisar se é viável ou não, quanto de juros será aplicado e qual o valor final a ser pago. Pesquisas em jornais e revistas na área financeira como por exemplo, a Bolsa de Valores de São Paulo, inflação, taxa Selic, entre outros, e a importância desse conhecimento para os jovens. Fazer simulações de aplicações financeiras e analisar a porcentagem aplicada e fazer comparações com diferentes bancos e seguradoras de crédito. Fazer análise de gastos mensais da família, buscando o senso crítico de saber o que é necessário e o que não é dentro das despesas familiares, buscando assim, mostrar aos alunos que aquilo que lhe foi apresentado em sala tem relevância no cotidiano.

5 I METODOLOGIAS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Dentre as distintas metodologias que o professor pode fazer uso, temos as tendências da educação matemática, dentre o universo das tendências da educação matemática destacam-se as tecnologias de informação e comunicação – TIC's e os jogos – banco imobiliário e monopólio, softwares – utilizar o Excel para fazer planilhas e cálculos, como também fazer uso de ferramentas como e o site do Banco Central que tem conteúdos voltados a aprendizagem do estudo financeiro.

Segundo Pereira, Pereira e Carão, em 2012:

> A informática, o uso constante do computador tornou-se uma necessidade do mundo globalizado em que vivemos, a instituição de ensino, na missão de preparar e ser responsável pelo indivíduo para a vida sente a necessidade de não fechar os olhos para a realidade em que vivenciamos (PEREIRA, PEREIRA; CARÃO, 2012, p. 05).

Em um mundo onde as tecnologias estão tão presentes na vida do cidadão, fazer uso destas tecnologias no processo de ensino e aprendizado pode auxiliar ao compreendimento por parte dos alunos sobre esse tema tão relevante.

Em relação a utilização de jogos os PCN's enfatizam que:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas (BRASIL, 1998, p. 46).

Outra opção de trabalhar a matemática financeira nas escolas é por forma de competições e/ou gincanas. Os professores podem fazer questionários e trabalhar esse conteúdo de uma forma descontraída.

> Outra forma de incentivar professores e alunos é por meio da realização de concursos de educação financeira. Na Espanha, um concurso de conhecimentos financeiros é realizado anualmente com alunos e professores, no formato de jogo de perguntas e respostas. Além de terem as despesas pagas para participar da final em Madri, as duas melhores equipes recebem diploma individualizado para cada participante, visita guiada ao Banco de España e ao Palacio de la Bolsa de Madrid e prêmio em dinheiro para aquisição de material pedagógico para a escola. A iniciativa, que já está na 6ª edição, é considerada como ferramenta eficaz para gerar engajamento de alunos e professores no tema da educação financeira e pode servir de inspiração para o Brasil. (BANCO CENTRAL DO BRASIL, 2018)

Esse método pode ser adaptado de acordo com a realidade de cada escola ou turma. A ideia é mostrar que é possível, sim, trabalhar o conteúdo da matemática financeira de uma forma não monótona para que não seja esquecido facilmente e que faça despertar um maior interesse. Mostrar a importância que esse conteúdo tem na vida dentro e fora da escola.

6 I ASPECTOS METODOLÓGICOS

Esta pesquisa é de abordagem qualitativa, bibliográfico, de cunho descritivo e exploratório, definida por Bogdan e Biklen (1994) como aquela em que o pesquisador é o principal instrumento; os dados coletados são em sua maioria descritivos; a partir de preocupações com o processo e com o produto através de uma análise indutiva. Partindo disso, foi realizado uma pesquisa com questionário com professores de matemática em 5 escolas de educação básica no estado de Rondônia, nos municípios de Jaru, Ji-Paraná e Porto Velho, com o intuito de apurar como o ensino de matemática financeira está sendo aplicado nas escolas.

No que se refere ao cunho descritivo, uma vez que a mesma visou à identificação de metodologias que auxiliassem ao professor no processo de ensino, buscando assim proporcionar um ensino mais significativo, onde possibilita ao aluno torna-se ativo e participante do processo de ensino e aprendizado.

Pesquisa bibliográfica, pois buscou em diferentes recursos bibliográficos evidenciar metodologias de ensino de matemática financeira, a sua importância e o histórico de ensino durante os anos.

Método de pesquisa exploratório, pois buscou novas metodologias de ensino da matemática financeira para serem aplicadas com o intuito de fazer com que esse conteúdo desperte maior interesse nos alunos.

7 I ANÁLISE DOS RESULTADOS

Foi realizado um questionário com professores de matemática nas escolas públicas e particulares de educação básica de ensino no estado de Rondônia. Esse questionário buscou em suas perguntas entender como o ensino de matemática financeira está sendo realizado e sua relevância, questionando sobre métodos de ensino e postura do professor em sala ao aplicar os conteúdos de sobre finanças. Todos os professores que participaram da pesquisa trabalham o conteúdo de matemática financeira, mostrando assim que esse conteúdo está sim sendo aplicando de acordo com as diretrizes. A maioria dos professores que participaram da pesquisa estão atuando no ensino médio, ou seja, na fase final da educação básica, onde a escola tem papel fundamental na formação dos cidadãos para ingressarem no mundo do trabalho e do controle de suas finanças. Apenas um dos professores entrevistado não atua no ensino médio.

Quando questionados, os professores, sobre a forma de aplicar o conteúdo foi observado que a maioria aplica esse conteúdo de maneira tradicional com o livro didático. Evidenciando assim que o ensino de matemática financeira ainda está estagnado em uma metodologia ultrapassada e que não chama a atenção dos jovens da atualidade. Porém foi observado também que algum professor além do método tradicional também utiliza outras metodologias tais como, resoluções de problemas, dinâmicas em sala e jogos, que como mostrado traz um melhor aprendizado. Nenhum dos professores que participaram da pesquisa utilizam as TICs como metodologia de ensino, evidenciando assim a forma “engessada” de ensino no estado de Rondônia.

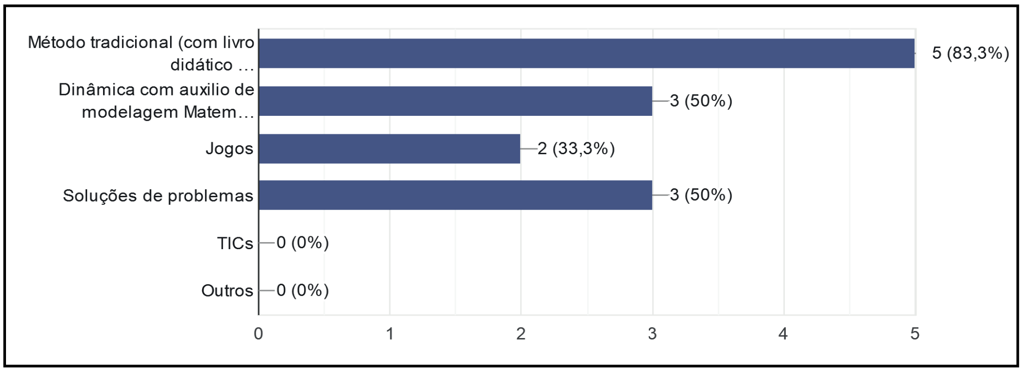


Figura 1: Gráfico 1 – Metodologias utilizadas

Fonte: Elaborado pelos autores

Quando questionados sobre a sua avaliação pessoal quanto a ensino de matemática financeira cerca de 60% responderam que o ensino é bom 16% acha regular e outros 16% julga ser ótimo. De acordo com esses resultados foi possível observar que o ensino na visão desses educadores está de bom, mas esse resultado pode ser bem melhor se aplicados outras metodologias. Quando questionados sobre como é a sua postura referente a mostrar o conteúdo além sala de aula, ou seja, buscar exemplos que fazem com que os estudantes tenham uma visão ampla de como esse conteúdo será importante em suas vidas futuras. Foi observado que houve um empate entre as alternativas apresentadas. Ou seja, alguns professores têm real consciência da importância de buscar uma visão além sala de aula, porém outros apenas apresentam quando surgi oportunidades, outros não buscam ir além dos conteúdos propostos.

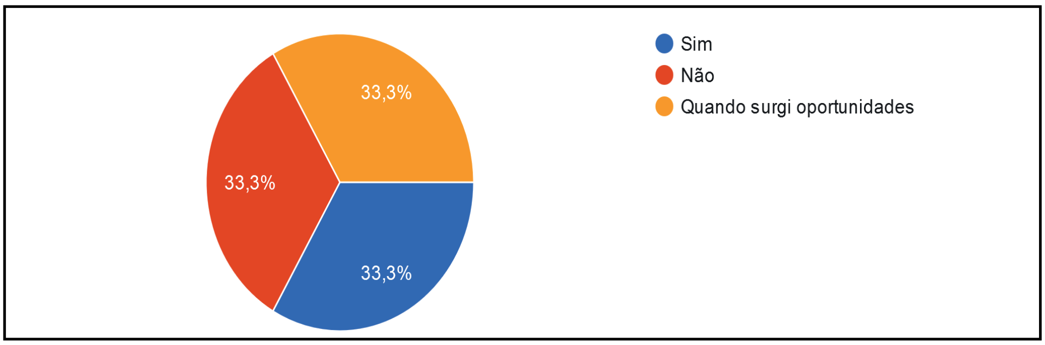


Figura 2: Gráfico 2 – Aplicação do ensino “além sala de aula”

Fonte: Elaborado pelos autores

8 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Educação Financeira pode ser entendida como um processo de ensino-aprendizagem que permite desenvolver a capacidade financeira dos indivíduos, para que esses possam tomar decisões com segurança e fundamento, dotados de competência financeira e assim sejam integrados à sociedade, com uma postura proativa na busca de seu bem-estar.

Na educação brasileira ainda existe muita carência sobre o tema, pouca ou nenhuma ação de forma efetiva. Pouco interesse do Estado em promover políticas públicas que possam modificar a forma de se entender o tema e a consequente diminuição das desigualdades sociais através da Educação Financeira. Contudo, embora o tema Educação Financeira seja relativamente novo no Brasil, começa a surgir preocupação em fornecer suporte e informação à população, preparando-a para convivência em uma sociedade onde a manipulação consciente do dinheiro é importante.

A partir da pesquisa realizada foi possível observar que a educação financeira está sim sendo aplicada em sala nas escolas de Rondônia, porém de uma forma ainda engessada, uma boa parcela dos professores ainda não tomaram a consciência da importância de aplicar esse ensino de forma atraente e que traga maior significado nas vidas dos alunos, para que eles não façam parte das estatísticas de inadimplência em suas vidas adultas. A aplicação da educação financeira traz benefícios à vida do estudante que vão além da sala de aula. A sua aplicação de maneira dinâmica atrai maior interesse fazendo com que o aluno veja a sua aplicação em várias áreas da vida e como pode auxiliar em uma melhor qualidade.

REFERÊNCIAS

Aracy e GRUPIONI, Luis Donisete B. (orgs). A Temática Indígena na Escola. Brasília: MEC/MARI/UNESCO, 1995, 149161.

ANDREOTTI, A. L. A administração escolar na Era Vargas e no nacional-desenvolvimentismo (1930-1964). Revista HISTEDBR *On-line,* Campinas, n. especial, p.102–123, ago. 2006

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. Investigação qualitativa em educação. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: 3oe 4ociclos do ensino fundamental; Brasília, MEC, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: Ensino Médio; Brasília, MEC, 1999.

BRASIL, Banco Central do. Educação financeira nas escolas: desafios e caminhos, 2018. Disponivel em: <https://www.bcb.gov.br/nor/relcidfin/docs/art8_educacao_finanaceira_escolas.pdf >. Acesso em 20 de Março de 2019.

BRASIL, Banco Central do. Caderno de Educação Financeira – Gestão de Finanças Pessoais. Brasília: BCB, 2013. <https://www.bcb.gov.br/pre/pef/port/caderno_cidadania_financeira.pdf> Acesso em: 18 de Dezembro de 2018.

BRASIL. Presidência da República. Casa Civil. Subchefia para Assuntos Jurídicos. Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Brasília, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/l9394.htm>. Acesso em: 12 dez. 2018

BRASIL, Banco Central do. Implementação a Estratégia Nacional de Educação Financeira. 2014. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/pre/pef/port/Estrategia_Nacional_Educacao_Financeira_ENEF.pdf> Acessado em: 18 de dezembro de 2018.

CAMPOS. Jose. Entrevista para UPF. 2018. Disponível em: .<https://www.upf.br/noticia/numero-de-familias-brasileiras-endividadas-chega-a-60-entenda-o-porque> Acesso em: 25 de Março de 2019.

COSTA, Gilberto. Agência Brasil: Inadimplência atinge 62 milhões de brasileiros e afeta 3% do crédito, 2018. Disponível em: <http://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2018-11/inadimplencia-atinge-62-milhoes-de-brasileiros-e-afeta-3-do-credito> Acesso em: 15 de Março de 2019.

COMITÊ NACIONAL DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA - CONEF. Educação Financeira nas Escolas, Ensino Médio. 1. ed. Brasília, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. Didática da Resolução de Problemas de Matemática. 12. ed.-São Paulo: Ática, 1999

D'AQUINO, C. A importância da educação financeira. Fev. 2003. Disponível em: <http://www.psicologia.org.br/internacional/pscl34.htm >Acesso em: 04 de setembro de 2016.

DOMINGOS, Reinaldo. Terapia Financeira: realize seus sonhos com educação financeira.1ª ed. São Paulo: DSOP, 2012.

GIOVANNI & GIOVANNI JÚNIOR. Aprendizagem e Educação Matemática –.São Paulo, Ed. Saraiva, 2006

IEZZI,G. et. al. Matemática: Volume único. São Paulo: Atual, 2017.

MINISTERIO NACIONAL DA EDUCAÇÃO. 2019. Disponível em:<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/docman/fevereiro-2019-pdf/15774-ept-relatorio-06062014/file> Acessado em 02 de fevereiro de 2019.

PEREIRA, R. C. B.; PEREIRA, R. O.; CARRÃO, E. V. A Informática Educativa: professor, aluno e os problemas escolares no ensino aprendizagem. Juíz de Fora: UFJF, 2008. Disponível em: < http://www.ecsbdefesa.com.br/fts/INFOEDU.pdf>. Acesso em: 15 de Março 2019

PILETTI, N.; PILETTI, C. História da Educação. 7.ed. São Paulo: Ática, 2006.

SKOVSMOSE, Ole - Educação Matemática Crítica: a questão da democracia – Editora Papirus: São Paulo, 4ª edição, 2008

SAVIANI, D. Saber Escolar, currículo e Didática: Problemas da Unidade Conteúdo/Método no Processo Pedagógico. São Paulo: Autores Associados, 1998.

Pesquisa Nacional de Endividamento e Inadimplência do Consumidor (Peic Nacional). O perfil do endividamento das famílias brasileiras em 2017. Disponivel em <http://cnc.org.br/sites/default/files/arquivos/perfil_de_endividamento_das_familias_brasileiras_em_2017.pdf> Acesso em 15 de março de 2019.

SILVA, Marcio F. e AZEVEDO, Marta M. Pensando as escolas dos povos indígenas no Brasil: o Movimento dos Professores do Amazonas, Roraima e Acre. In LOPES DA SILVA,

CAPÍTULO 4

O USO DOS JOGOS DE BLOCOS DE MONTAR NO ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Data de aceite: 23/03/2020

Data de submissão: 09/03/2020

Frederico Braida
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Toledo / Universidade Federal de Juiz de Fora
Toledo – Paraná / Juiz de Fora – Minas Gerais
Lattes: http://lattes.cnpq.br/5018338717420441
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7735-8380

Rodolfo Eduardo Vertuan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Toledo
Toledo – Paraná
Lattes: http://lattes.cnpq.br/7270314006427713
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0695-3086

Rodrigo Manoel Dias Andrade
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Toledo
Toledo – Paraná
Lattes: http://lattes.cnpq.br/4540621572563154

RESUMO: Este capítulo aborda o tema do ensino das transformações geométricas nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. O principal objetivo é apresentar os jogos de blocos de montar como recursos didáticos que podem ser explorados pelos professores a fim de criar cenários de aprendizagem lúdicos, capazes de despertar o interesse dos alunos. Metodologicamente, este capítulo é resultado tanto de uma revisão de literatura quanto de uma reflexão crítica sobre o emprego dos blocos de montar no ensino da Geometria. Ao final, pondera-se que os blocos de montar, por serem materiais concretos, manipuláveis e lúdicos, contribuem para a superação do ensino da Matemática (em especial da Geometria) fundamentado meramente na abstração e podem participar de um cenário propício para o ensino e a aprendizagem das transformações geométricas.

PALAVRAS-CHAVE: Jogos. Blocos de montar. Geometria. Transformações geométricas.

TEACHING GEOMETRIC TRANSFORMATIONS WITH BUILDING BRICKS

ABSTRACT: This chapter addresses the theme of teaching geometric transformations in the final years of elementary school and high school. The main aim is to present building bricks as didactic resources that can be explored by teachers to create playful learning scenarios, capable of arousing students’ interest. Methodologically, this chapter is the result of both a literature

review and a critical reflection on the use of building bricks in the teaching of Geometry. In the end, we highlight that the building bricks, as they are concrete, manipulable and playful materials, contribute to overcoming the teaching of Mathematics (especially Geometry) based merely on abstraction and can participate in a propitious scenario for teaching and the learning of geometric transformations.
KEYWORDS: Games. Building bricks. Geometry. Geometric transformations.

1 I INTRODUÇÃO

A Geometria pode ser considerada como uma área da Matemática que "envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento" (BRASIL, [2017], p. 271). A Geometria relaciona-se diretamente com os campos das artes, do design e da arquitetura, entre outros, e contribui para o desenvolvimento da percepção espacial. Portanto, o ensino da Geometria se mostra extremamente relevante na formação dos alunos da Educação Básica.

No entanto, diversos autores, tal como relatado por Rossi (2009), afirmam que o ensino da Geometria na Educação Básica encontra muitas dificuldades. De acordo com Rossi (2009, p.20), generalizando, "as grandes dificuldades dos alunos na compreensão de conceitos geométricos" advêm "de uma prática pedagógica baseada unicamente na memorização de conteúdos e, tendo o quadro verde e giz como única ferramenta pedagógica utilizada".

Diante desse quadro, este capítulo se debruça sobre a seguinte questão: Como os professores de Matemática (em especial os de Geometria) podem contribuir para a construção de cenários educativos inovadores que busquem superar os obstáculos existentes no processo de ensino e aprendizagem da Geometria na Educação Básica? Vislumbra-se que parte da resposta para essa questão encontra-se na utilização de material didático concreto, manipulável e lúdico, que seja capaz de ressignificar o espaço da sala de aula.

Portanto, a busca por materiais didáticos que sensibilizem os alunos e auxiliem na conformação de um ambiente favorável para a construção de novos conhecimentos apresenta-se como um desafio para os licenciados em Matemática. Assim, a utilização de material didático que extrapole o quadro de giz (e as suas variações) deve ser assimilada como uma constante na prática docente.

Partindo-se dessa premissa, este capítulo tem por objetivo principal apresentar os jogos de blocos de montar como material didático para o ensino das transformações geométricas, objetos do conhecimento pertencentes, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aos anos finais do Ensino Fundamental e ao Ensino Médio.

2 I MATERIAIS E MÉTODOS

Este capítulo é fruto de uma pesquisa predominantemente qualitativa, de cunho exploratório, e é resultado de parte de uma pesquisa de pós-doutorado realizada no Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), no campus de Toledo, cujo objetivo geral é investigar o ensino na Geometria para os cursos de Engenharia Civil e de Arquitetura e Urbanismo, a partir de uma perspectiva de diálogo com a Educação Básica.

Levando-se em conta os procedimentos de coleta de dados, bem como as fontes consultadas, este capítulo é decorrente de uma pesquisa bibliográfica e documental. A revisão de literatura incluiu, principalmente, trabalhos científicos que versam sobre o ensino das transformações geométricas na Educação Básica e a utilização de material didático concreto, manipulável e lúdico. A pesquisa documental contemplou a legislação (e suas disposições normativas complementares) que diz respeito à educação brasileira, sobretudo aquela vinculada ao Ministério da Educação (MEC).

Para a ilustração das possibilidades do estudo das transformações geométricas, foram utilizadas as peças de um jogo de blocos de montar semelhante ao LEGO, intitulado Block Mania da marca Alfem Plastic. A versão utilizada é comercializada em uma embalagem (balde de14 cm altura e 16 cm diâmetro) contendo 104 peças de polipropileno atóxico e reciclável (referência 6.000). As peças são monocromáticas, porém, no conjunto, há peças das seguintes cores: azul, vermelho e amarelo (cores primárias), verde (cor secundária), preto e branco (cores neutras) (Figura 1).

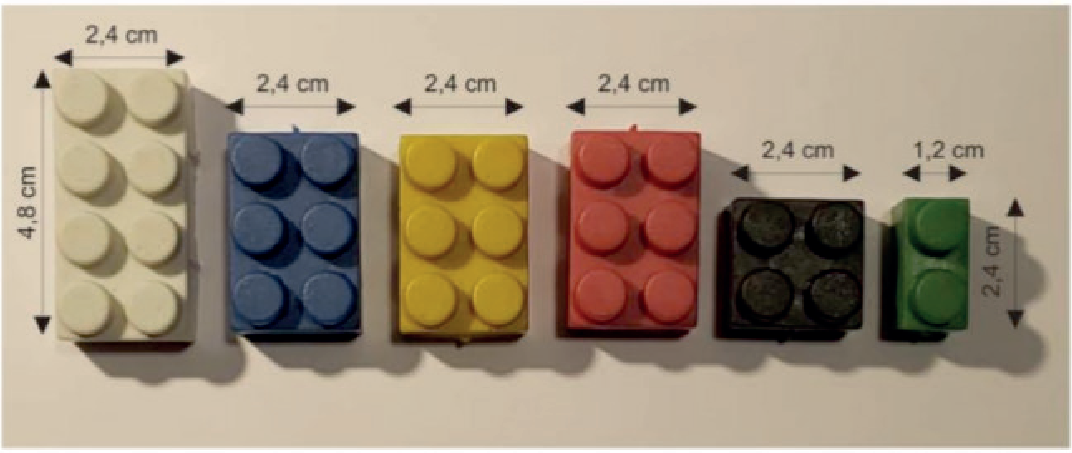


Figura 1 – Peças do jogo de blocos de montar Block Mania.
Fonte: Dos autores.

Essas peças foram utilizadas devido ao seu menor custo, quando comparado com as peças de LEGO, o qual possui valores consideravelmente mais elevados, podendo inviabilizar o seu uso como material didático. No entanto, cabe destacar que, ao se comparar as peças das duas marcas citadas, as da Block Mania apresentam maiores deformações, menor rigor no acabamento e menor rigidez. No entanto, essas características não comprometem sua utilização como material didático para fins do ensino das transformações geométricas.

3 I AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E A BNCC

A partir de uma análise de conteúdo, pode-se verificar que, ao se buscar, no texto da "Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional" (LDB), a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, pela quantidade de vezes que aparece a palavra "geometria", encontramos o resultado nulo. Ou seja, a palavra "geometria" não está presente no referido texto. No entanto, pode-se admitir que a Geometria está subliminarmente contemplada quando se menciona, de maneira geral, o estudo da Matemática, bem como, indiretamente citada quando se aborda "o conhecimento do mundo físico" (BRASIL, [2019]). Também deve-se ressaltar que, tal como na LDB, o termo "geometria" não se encontra nas "Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica" (BRASIL, 2013).

Já nos documentos vinculados ao MEC para a educação brasileira, a palavra geometria se faz presente na BNCC. Cumpre salientar, inclusive, que a Geometria também está consideravelmente contemplada no "Referencial curricular nacional para a educação infantil" (BRASIL, 1998), nos Parâmetros Curriculares Nacionais da Matemática para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1997) e para o Ensino Médio (BRASIL, [1999]), especialmente no documento intitulado "PCN Ensino Médio +: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias" (BRASIL, [2002]).

Na terceira versão da BNCC, o vocábulo "geometria" é mencionado 50 vezes. As variações "geométrica(s)" aparecem nesse documento 55 vezes e as variações "geométrico(s)", 17 vezes. Como pode-se observar, as questões vinculadas à Geometria ganham uma grande importância na BNCC, onde, além de ser considerada um campo da Matemática, está explicitamente presente no campo de experiências "Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações" da Educação Infantil – quando é mencionado o "reconhecimento de formas geométricas" (BRASIL, [2017], p. 43) – e é entendida como uma das cinco unidades temáticas da área da Matemática do Ensino Fundamental.

Sobre a unidade temática Geometria, a BNCC para a etapa do Ensino Fundamental afirma que "estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos" (BRASIL, [2017], p. 271). Por sua vez, no texto da BNCC do Ensino Médio, o radical "geom-" está presente 23 vezes. A Geometria é explicitamente mencionada nos textos explicativos dos seguintes pares de ideias fundamentais: "Certeza e incerteza", "Movimento e posição" e "Relações e inter-relações" (BRASIL, [2018]). Também, de acordo com esse documento, são, entre outras, competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio:

> 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, ***Geometria***, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
>
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, ***geométrico***, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático (BRASIL, [2018], p. 523, grifos nossos).

Sobre o tópico específico do ensino das transformações geométricas, a BNCC lhe atribui um caráter "funcional", afirmando que deve estar presente no Ensino Fundamental, sobretudo ao que diz respeito ao estudo das simetrias, o qual "deve ser iniciado por meio da manipulação de representações de figuras geométricas planas em quadriculados ou no plano cartesiano, e com recurso de *softwares* de geometria dinâmica" (BRASIL, [2017], p. 271 e 272). Esse tópico está explicitamente mencionado na BNCC conforme o quadro a seguir:

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
7º ano	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	**(EF07MA19)** Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. **(EF07MA20)** Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
7º ano	Simetrias de translação, rotação e reflexão	**(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
8º ano	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

Quadro 1 – Habilidades da área de Matemática – Unidade temática "Geometria"

Fonte: Brasil ([2017], p. 308 e 308; p. 314 e 315).

Com relação à BNCC do Ensino Médio, as transformações geométricas aparecem no par de ideias fundamentais intitulado “Movimento e posição”, o qual contempla as “transformações geométricas isométricas (que preservam as medidas) e homotéticas (que preservam as formas)”, e no par denominado “Relações e inter-relações”, que inclui “os movimentos de figuras, como as reflexões em retas, rotações e translações, [que] podem ser expressos por funções, em trabalhos no plano cartesiano, por exemplo” (BRASIL, [2018], p. 521). Também estão relacionadas à seguinte habilidade vinculada à Competência Específica 1: “(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras” (BRASIL, [2018], p. 525).

Ainda relacionado a esse tópico, a BNCC do Ensino Médio menciona que

> em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança (BRASIL, [2018], p. 517).

Como se vê, o tópico sobre as transformações geométricas se faz presente de forma explícita, tanto nos anos finais do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Portanto, a busca por materiais didáticos que visem superar as estratégias baseadas unicamente no pensamento abstrato se faz necessária e se apresenta como um desafio para os licenciados em Matemática.

4 I TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E O USO DOS BLOCOS DE MONTAR

Mabuchi (2000) apresenta uma trajetória histórica, epistemológica e matemática das transformações geométricas, recuperando diversos nomes de pensadores que contribuíram para o desenvolvimento desse tópico, lembrando-se da forte relação entre as artes e a Matemática, por exemplo, no Renascimento.

De forma geral, pode-se dizer que as transformações geométricas dizem respeito às transformações que, quando realizadas, a partir de uma forma geométrica inicial, chega-se a outra forma geometricamente igual ou equivalente, podendo-se, por exemplo, ser preservadas as medidas ou as formas. Translações, reflexões, rotações, ampliações e reduções são exemplos de transformações geométricas.

Constata-se que o ensino das transformações geométricas tem feito parte das preocupações dos professores de Matemática. Silva (2017) apresenta o estado da arte das transformações geométricas ou da geometria das transformações no Brasil, a partir de algumas das pesquisas de mestrado e doutorado mais recentes que abordam esse tema.

No que diz respeito às abordagens que consideram o ensino das transformações geométricas na Educação Básica, verifica-se a adoção de diversos materiais didáticos e estratégias pedagógicas, tais como o uso do Cabri-Géomètre, do Cabri 3D e do GeoGebra. É dentro dessa mesma perspectiva que se vislumbra, neste capítulo, o uso dos jogos de blocos de montar como material didático.

Deve-se recuperar que os jogos de blocos de montar foram amplamente explorados pela pedagogia construtivista de Montessori (BRAIDA et al., 2015) e que, sejam eles de encaixe ou de sobrepor, sobretudo aqueles que possuem formas volumétricas primárias ou simples, prestam-se muito para o ensino da Geometria. Vele também mencionar que, em 1980, George Stiny publicou um artigo intitulado "Gramáticas do Jardim de Infância: projetando com os blocos de montar de Froebel" ("*Kindergarten Grammars: Designing with Froebel's Buildings Gifts*"), em que utilizou os blocos de Froebel no estudo da Gramática da Forma, evidenciando algumas das potencialidades dos blocos de montar no estudo das transformações geométricas (STINY, 1980).

Assim, é dentro dessa perspectiva que se vislumbra a adoção dos blocos de montar como recurso didático, dentro de uma abordagem que privilegia a utilização de materiais concretos, manipuláveis e lúdicos nos processos de ensino e aprendizagem da Geometria.

5 I RESULTADOS E DISCUSSÃO: O USO DOS BLOCOS DE MONTAR COMO RECURSO DIDÁTICO PARA O ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Recorrentemente, as transformações geométricas são ensinadas a partir da manipulação de figuras planas. A própria BNCC propõe que o ensino das transformações inicie por meio do trabalho com as figuras geométricas planas (BRASIL, [2017], p. 272). No entanto, para além da construção geométrica, utilizando-se instrumentos de desenho a mão e computadores, devem ser empregados materiais concretos e manipuláveis. É nesse sentido que os jogos se destacam como materiais didáticos pertinentes, pois, além de serem manipulados pelos alunos, podem contribuir para a construção de um ambiente de ensino e aprendizagem lúdico. O uso do Tangram, entendido como material didático manipulável (SCOLARO, [s.d.]), por exemplo, pode ser empregado para o estudo das transformações geométricas no plano.

No entanto, a utilização de formas espaciais pode agregar um maior grau de complexidade, além de contribuir para o desenvolvimento do pensamento espacial, mais próximo da tridimensionalidade do mundo físico. Portanto, os blocos de montar do tipo LEGO podem ser empregados em sala de aula em exercícios que explorem as transformações geométricas, associando-se formas volumétricas e o uso das cores nos processos de transformação geométrica no espaço.

Com os jogos de blocos de montar, podem ser elaboradas composições que contemplem as translações, reflexões, rotações, ampliações e reduções (Figura 2). Trabalhando em pares, por exemplo, pode-se solicitar que os alunos reproduzam as composições uns dos outros de forma espelhada, fazendo-os empiricamente introjetar a noção de simetria. Assim, a construção do conhecimento teórico pode advir do exercício prático.

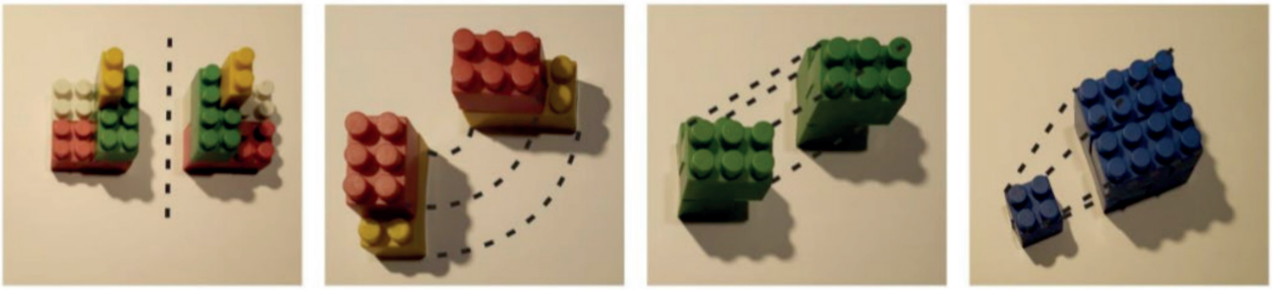


Figura 2 – Transformações: reflexão, rotação, translação e ampliação.

Fonte: Dos autores.

Ressalta-se que não se tem a pretensão, neste capítulo, de apresentar um rol de atividades possíveis. No entanto, o que se propõe é a evidenciação dos blocos de montar como recursos didáticos concretos e possíveis para o ensino das transformações geométricas.

Vale recuperar a afirmação de Braida e Fonseca (2017):

> A construção do conhecimento por parte dos alunos se realiza na dialética entre a prática e a teoria, entre o saber individual e o coletivo, entre o concreto e o abstrato. Assim, a proposição de materiais concretos se apresenta como uma via possível para se chegar à construção dos conceitos de forma plenamente introjetada. Como se sabe, dificilmente um conteúdo é assimilado se não for verdadeiramente construído conciliando-se a abstração à experimentação empírico-material.

O uso dos blocos de montar como recurso didático conecta os alunos ao mundo real e palpável. É com essa finalidade que os professores devem esforçar-se para levar para as salas de aula diversos materiais, a partir dos quais se explorem os conceitos matemáticos e geométricos, ampliando as possibilidades de um pensamento indutivo (da prática para teoria) em oposição ao prevalecente pensamento dedutivo (da teoria para a realidade).

Os jogos de blocos de montar podem ser entendidos também como materiais manipuláveis. De acordo com Silva (2017, p. 37), "os materiais didáticos manipuláveis podem ser ferramentas úteis ao processo de ensino-aprendizagem de matemática". "De fato, os materiais podem tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permitem a aproximação entre a teoria matemática e a constatação na prática, por meio da ação manipulativa (SILVA, 2017, p. 37). De acordo com Leandro, Barbosa e Oliveira (2016, p. 1), "os materiais manipuláveis e concretos ganham relevância, sobretudo, no ensino da geometria, que deve basear-se na experimentação e na manipulação, privilegiando o desenvolvimento da capacidade de visualização espacial".

Deve-se também ponderar que os blocos de montar funcionam como jogos lúdicos, que facilitam a construção de um cenário de ensino-aprendizagem divertido. Alguns autores, dentre os quais destacam-se Alves (2015), Burke (2015) e Huizinga (2007), apontam para as qualidades que os jogos proporcionam no meio social. Já autores como Alexandre e Sabbatini (2013) e Volpato (2002) versam sobre os benefícios dos jogos no contexto da Educação.

De acordo com o professor de Geometria Gildo Montenegro, "pode-se ensinar por meio de jogo, a aula pode ser alegre e divertida e você pode aprender assim. Por sinal, aprende mais" (MONTENEGRO, 2007, p.128). Também Santos (2014, p.109), por exemplo, defende a utilização dos jogos em contexto de ensino, como ferramenta pedagógica e afirma que "... os jogos, o lúdico e as brincadeiras devem ser parceiros do professor, que deve valorizar os aspectos positivos que atividades lúdicas podem trazer aos alunos que participam delas". Nesse sentido, os jogos (de montar), dentro de uma perspectiva construtivista, funcionam como poderosos instrumentos pedagógicos (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2008), o qual também pode estar a serviço do ensino da Geometria e, mais especificamente, das transformações geométricas.

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi recuperado neste capítulo, o ensino das transformações geométricas está previsto na BNCC, especialmente para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio. O conhecimento sobre esse conteúdo da Geometria contribui para o desenvolvimento de habilidades e competências relacionadas ao julgamento estético, tão requerido pelos campos das artes, do design, da arquitetura e das engenharias, entre outros. Portanto, os professores devem esforçar-se para que, de fato, sejam incorporados tais conhecimentos em suas disciplinas, sobretudo propondo sequências didáticas lúdicas e atividades que levem para a sala de aula recursos didáticos diversificados.

É dentro desse contexto que os jogos de blocos de montar do tipo LEGO se apresentam como material que pode ser empregado no ensino das transformações geométricas que ultrapassem a exploração de figuras planas, mas que incorpore formas volumétricas e o uso das cores. As possibilidades de uso dos jogos de montar como materiais didáticos para o ensino da Geometria são inúmeras. O que se buscou neste capítulo foi evidenciar os blocos de montar no contexto do ensino das transformações geométricas, entendendo-os como materiais concretos e manipuláveis.

Por fim, destaca-se que a manipulação dos jogos de montar aliada ao uso de outros recursos didáticos e estratégias de ensino das transformações geométricas pode fazer com que esse conteúdo seja verdadeiramente introjetado pelos alunos, fazendo com que o conhecimento geométrico seja construído a partir da interface entre a prática e a teoria.

7 I OBSERVAÇÕES/ RECONHECIMENTO

Uma versão deste texto foi publicada originalmente nos anais da VII Semana da Matemática UTFPR, Toledo (PR), realizada de 3 a 7 de junho de 2019.

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) – Processos TEC APQ 01041/14 e TEC PPM 00766/15 – pelo financiamento de parte da pesquisa cujos resultados estão apresentados neste capítulo.

REFERÊNCIAS

ALEXANDRE, C.; SABBATINI, M. **A contribuição dos jogos digitais nos processos de aprendizagem.** 2013. Disponível em: encurtador.com.br/ckOSY. Acesso em: 17 jun. 2016.

ALVES, F. **Gamification**: como criar experiências de aprendizagem engajadoras. São Paulo: DVS Editora, 2015.

BRAIDA, F.; FONSECA, J. F. O uso do lego na representação gráfica do projeto de arquitetura e urbanismo. In: GRAPHICA, 12. **Anais...** Araçatuba: UNIP, 2017. Disponível em: https://even3.blob.core.windows.net/anais/49745.pdf. Acesso em: 5 fev. 2019.

BRAIDA, F. et al. A exploração do mundo projetual dos blocos de montar por meio do jogo digital interativo Minecraft. In: SIGraDi, 2015. **Anais...** São Paulo: Blucher, 2015. p.371-377.

BRASIL. Casa Civil. **Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996.** [2019]. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm. Acesso em: 4 abr. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. [2017]. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 5 jan. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**: Ensino Médio. [2018]. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=85121-bncc-ensino-medio&category_slug=abril-2018-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 5 jan. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares nacionais gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file. Acesso em: 5 mar. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: https://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/pcn/volume-03-matematica.pdf. Acesso em: 5 fev. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais Ensino Médio:** Parte III Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, [1999]. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 5 fev. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN Ensino Médio +:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros curriculares nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. [2002]. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 5 mar. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Referencial curricular nacional para a Educação Infantil.** Brasília: MEC/SEF, 1998. v.3. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/volume3.pdf. Acesso em: 5 fev. 2019.

BURKE, B. **Gamificar**: como a gamificação motiva as pessoas a fazerem coisas extraordinárias. São Paulo: DVS Editora, 2015.

HUIZINGA, J. **Homo ludens**: o jogo como elemento da cultural. São Paulo: Perspectiva, 2007.

LEANDRO, B. C.; BARBOSA, D. M. J.; OLIVEIRA, C. G. de. **O geoplano como ferramenta no ensino de geometria plana**. 2016. Disponível em: http://sites.pucgoias.edu.br/puc/pibid/wp-content/uploads/sites/17/2016/04/artigo.pdf. Acesso em: 2 abr. 2019.

MABUCHI, S. T. **Transformações geométricas:** a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

MONTENEGRO, G. **Geometria Descritiva**. 3. reimp. São Paulo: Blucher, 2007.

ROSSI, G. da R. **O ensino e aprendizagem de polígonos e transformações geométricas no plano:** relacionando a arte e matemática por meio dos frisos e dos ladrilhos. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Física e de Matemática (Mestrado Profissional). Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2009.

SANTOS, V. R. **Jogos na escola:** os jogos nas aulas como ferramenta pedagógica. Petrópolis/RJ: Vozes, 2014.

SCOLARO, M. A. **O uso dos materiais didáticos manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de Matemática.** [s.d.]. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1666-8.pdf. Acesso em: 2 maio 2019.

SILVA, P. H. da. **Transformações geométricas no contexto escolar:** uma experiência de aprendizagem no 8º ano do ensino Fundamental. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (Mestrado profissional). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2017.

STINY, G. Kindergarten Grammars: Designing with Froebel's Buildings Gifts. **Environment and Planning B**, v. 7, 409-62, 1980.

VOLPATO, G. Jogo e brinquedo: reflexões a partir da teoria crítica. **Educ. Soc.**, Campinas, n. 23, v. 81, 2002, p.217-226. Disponível em: http://www.cedes.unicamp.br. Acesso em: 5 fev. 2016.

CAPÍTULO 5

O ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO: PRINCÍPIOS DA REFORMA CURRICULAR DE MATEMÁTICA DE PORTUGAL

Data de aceite: 23/03/2020

Data de submissão: 19/12/2019

Júlio César Deckert da Silva
Universidade Anhanguera de São Paulo,
Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação Matemática
São Paulo – São Paulo
http://lattes.cnpq.br/8365752346254327

Ruy César Pietropaolo
Universidade Anhanguera de São Paulo,
Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação Matemática
São Paulo – São Paulo
http://lattes.cnpq.br/2747970094543043

RESUMO: No momento atual as reformas curriculares têm sido objeto de estudo de muitos pesquisadores do campo educacional que intentam compreender as funções educativas dos conteúdos escolares e também os processos de inserção de novos métodos didáticos para o desenvolvimento desses conteúdos nas instituições de ensino. Além disso, o ensino do conteúdo transformações geométricas têm sido enfatizado pelos educadores matemáticos como um recurso didático importante para o desenvolvimento do ensino da Geometria, pois possibilita para os alunos construir alguns conceitos geométricos associados à congruência e à semelhança de figuras planas. As pesquisas referentes ao ensino das disciplinas escolares nas reformas educacionais motivam os pesquisadores a realizar estudos no campo da cultura escolar e dos estudos curriculares. No entanto, as pesquisas bibliográficas que se inserem nesses campos de estudos são limitadas e não podem indicar para os estudiosos se as orientações dos programas curriculares são de fato introduzidas às práticas docentes. Por meio desse trabalho procuramos descrever as principais orientações do currículo de Portugal para o estudo das transformações geométricas no Ensino Médio. Os procedimentos metodológicos adotados em nosso estudo consistem na consulta do programa curricular de matemática mais recente de Portugal para o Ensino Médio e na análise das orientações didáticas do currículo para o ensino das transformações. As indicações do programa curricular de Portugal para o estudo das transformações nos mostram que as atividades de simetrias de reflexão, de rotação e de translação devem ser desenvolvidas pelos professores do Ensino Médio, a fim de fazer com que os estudantes possam estabelecer relações entre a Álgebra e a Geometria,

além de compreender os conceitos de Geometria Projetiva. Esperamos que nosso estudo possa incitar reflexões dos educadores no que concerne à necessidade de reformulação do ensino da Geometria via transformações.
PALAVRAS-CHAVE: Transformações Geométricas. Reforma Curricular. Currículo Prescrito. Geometria. Ensino Médio.

TEACHING GEOMETRIC TRANSFORMATIONS IN SECONDARY EDUCATION: PRINCIPLES OF THE PORTUGUESE MATHEMATICS CURRICULUM REFORM

ABSTRACT: At this present moment curricular reforms have been object of study for many researchers from the educational field with the intent to understand the educational functions of school contents and also the processes of integration of new didactic methods to the development of such contents in the institutions of education. In addition, the teaching of geometric transformations content has been emphasized by mathematics educators as an important didactic resource for the development of Geometry teaching, because it allows for the students to build some of geometric concepts associated with congruence and similarity of plane figures. Researches concerning by teaching of school subjects in educational reforms motivate researchers to carry out studies in the field of school culture and of curriculum studies. However, bibliographical researches that are inserted in these study areas are limited and cannot indicate to researchers if curricular programs guidelines are in fact introduced to teaching practices. Through this work we look for describing of the main curriculum guidelines in Portugal for geometric transformations study in Secondary Education. The methodological procedures adopted in our study consist in the consulation of the most recent mathematics curricular program in Portugal on Secondary Education and on the analysis of the teaching guidelines of this curriculum for the teaching of geometric transformations. The indications of the curricular program in Portugal for the study of the transformations indicate that the reflexion, rotation and translation symmetry activities must be developed by secondary school teachers, in order to make students establish relations between Algebra and Geometry, besides to understand concepts of Projective Geometry. We hope that our paper might incite reflections of educators regarding to the need to recast of Geometry teaching by transformations.
KEYWORDS: Geometric Transformations. Curricular Reform. Prescribed Curriculum. Geometry. Secondary Education.

1 I INTRODUÇÃO

O presente trabalho se insere na linha de Estudos relacionada à Formação Docente. Esse estudo tem como finalidade descrever e analisar as indicações metodológicas do atual programa curricular de Portugal para o Ensino Médio no que tange ao desenvolvimento do ensino das transformações geométricas. Optamos pela análise da reforma curricular de Portugal devido aos recentes avanços que esse país vem atingindo nas avaliações do PISA.

Nesse contexto, a fim de conduzirmos nossos procedimentos investigativos foi consultado o currículo prescrito intitulado “Aprendizagens Essenciais: articulação com o perfil dos alunos” (2018) para o Ensino Médio, em específico, no bloco de conteúdos das disciplinas Matemática A, Matemática B e Geometria Descritiva A.

Dessa forma, procuramos alicerçar nossas convicções nas teorias de Dominique Julia (2001) com relação ao campo da cultura escolar e nos princípios de Gimeno Sacristán (2013) e de Antônio Viñao (2007) para debater as finalidades dos currículos escolares no campo educacional. Nossa expectativa é que esse trabalho possa motivar reflexões dos educadores a respeito da importância da utilização de novos procedimentos e de recursos didáticos no ensino da Geometria.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A cultura que se produz no contexto escolar e que contempla as práticas educativas relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem, tem sido atualmente investigada por estudiosos que intentam compreender o desenvolvimento do campo educacional.

Em sua pesquisa, Julia (2001) salienta que essa cultura é constituída pelas relações que são determinadas entre um conjunto de regulamentos e de práticas educativas por meio dos quais os conhecimentos pertinentes ao ensino escolar são definidos.

> [...] Para ser breve, poder-se-ia descrever a cultura como um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos [...] (JULIA, 2001, p. 10).

As disciplinas do contexto escolar se constituem como produções específicas das instituições de ensino que possibilitam aos pesquisadores analisar os pressupostos dos sistemas educativos.

> A análise precedente remete-nos a um estudo daquilo que hoje se chama disciplinas escolares: estas não são nem uma vulgarização nem uma adaptação das ciências de referência, mas um produto específico da escola, que põe em evidência o caráter eminentemente criativo do sistema escolar [...] (JULIA, 2001, p. 33).

A cultura escolar está presente nas diversas funções educativas das instituições de ensino, as quais interagem de maneira efetiva na reestruturação do seu trabalho. Portanto, as modificações dos programas curriculares pelas quais são reformuladas as disciplinas constituem-se por meio de novos pressupostos culturais do ensino escolar. (JULIA, 2001).

Em nossa pesquisa investigamos as finalidades pelas quais o ensino das Transformações Geométricas é indicado pelo currículo português de Matemática do Ensino Médio, com o intuito de motivar reflexões dos educadores com relação à elaboração de novas reformas curriculares. Assim, procuramos fundamentar nossas convicções no campo dos estudos curriculares, um campo de pesquisa que possibilita aos pesquisadores compreender a dinâmica de funcionamento do contexto escolar, bem como os princípios dos processos de ensino.

O currículo contempla os preceitos do campo educacional, adequando o trabalho pedagógico ao contexto social no qual é concebido. As reformas curriculares são implementadas mediante princípios sociopolíticos distintos, os quais determinam as finalidades do campo disciplinar. Essas reformas motivam questionamentos nos pesquisadores referentes às funções do contexto escolar no ensino dos conteúdos.

Os currículos escolares representam fontes de estudos imprescindíveis às pesquisas referentes ao campo educacional. A análise dessas fontes possibilita aos pesquisadores compreenderem a consolidação dos processos organizativos que gerenciam as atividades do campo educacional, bem como o desenvolvimento do ensino disciplinar. As disciplinas escolares constituem outra forma de investigar os pressupostos dos programas curriculares que contemplam os sistemas educacionais.

Para Gimeno Sacristán (2013), os programas curriculares possuem dupla função no contexto escolar, sendo sistematizadores e unificadores dos processos de ensino e de aprendizagem. Os currículos determinam novas finalidades educativas para as disciplinas escolares. Logo, esses documentos representam recursos que promovem o controle externo do contexto escolar, no qual se constrói uma cultura, orientando o seu funcionamento e o seu ensino. É através dos currículos que os educadores podem planejar as atividades das disciplinas e determinar projetos adequados para o aprimoramento dos processos de ensino.

> Seja por bem ou por mal, o fato é que o ensino, a aprendizagem e seus respectivos agentes e destinatários – os professores e alunos – tornaram-se mais orientados por um controle externo, uma vez que este determinou a organização da totalidade do ensino por meio do estabelecimento de uma ordem sequenciada. Um dos efeitos desse regramento foi o reforço da distinção entre as disciplinas e a determinação concreta dos conteúdos que os professores deveriam cobrir, bem como o refinamento dos métodos de ensino. Dessa maneira, o conceito de currículo delimitou as unidades ordenadas de conteúdos e períodos que têm um começo e um fim, com um desenvolvimento entre esses limites, impondo uma norma para a escolarização. Não é permitido fazer qualquer coisa, fazer de uma maneira qualquer ou fazê-la de modo variável (SACRISTÁN, 2013, p. 18).

Os conteúdos de ensino constituem elementos culturais que possibilitam a construção dos conhecimentos na escola. No campo cultural há diversos significados para os elementos que alicerçam o ensino. É através do processo de interatividade desses elementos que se constrói o conhecimento. Os programas curriculares não são documentos que definem ou organizam as realidades escolares, mas são recursos essenciais no campo educacional devido ao fato de possibilitarem nesse campo a introdução de princípios culturais na construção do ensino. (SACRISTÁN, 2013).

Segundo Sacristán (2013), os pressupostos das reformas curriculares são insuficientes para aprimorar o trabalho educacional se os educadores não possuem conhecimentos e habilidades para auxiliar os estudantes no desenvolvimento de suas capacidades cognitivas de aprendizagem.

As diversas concepções dos educadores referentes às funções das reformas curriculares nos sistemas educacionais atribuíram outras finalidades para o trabalho pedagógico no ensino das disciplinas, tal como a construção de competências relacionadas aos processos de aprendizagem.

Em seu trabalho Viñao (2007) enfatiza que os sistemas educacionais se desenvolvem por meio de um processo de interação entre as diversas culturas escolares e as reformas curriculares o qual define como “gramática escolar”. Por meio dessa interação o contexto escolar passa a seguir um direcionamento no qual se define, em conjunto com docentes e reformadores do currículo suas funções educacionais. Dessa maneira os sistemas educacionais, ao serem modificados, alteram o funcionamento da escola.

Essas transformações podem se manter vigentes durante muitos anos quando são provenientes do contexto sócio-educativo ou podem ser instauradas de maneira parcial nas escolas devido a uma necessidade de reestruturação curricular. Tais mudanças se desenvolvem nas escolas de forma integrada e ambas devem ser analisadas pelos pesquisadores que analisam as relações entre os princípios das reformas curriculares e suas relações com a cultura escolar.

Os currículos prescritos são documentos que seguem uma cultura distinta daquela que provém das práticas escolares. Trata-se da cultura das autoridades reformadoras que visam estruturar os programas curriculares mediante aos seus interesses administrativos.

Para Viñao (2007) as macroreformas, no momento em que são implantadas promovem modificações na cultura do contexto escolar. Os educadores, por desconhecerem a cultura reformadora não conseguem compreender as prescrições dos currículos e integrá-las ao seu trabalho. Dessa forma as reformas sofrem problemas em sua aplicação, seus pressupostos são muitas vezes ignorados pelos professores que, por conta de sua inaptidão cultural, decidem seguir funções burocráticas e diante desses fatos essas macroreformas se deparam com o insucesso.

> As macroreformas estruturais e curriculares elaboradas desde a consolidação dos campos político e administrativo modificam, pois, a cultura das instituições escolares. Em plena supremacia, no geral elas se opõem – por sua característica e natureza omnicompreensiva – esta última, assim como, de modo particular, a cultura acadêmica docente, todo o conjunto de crenças, mentalidades, práticas de interação e de trabalho adquiridas no decurso do tempo, enraizadas e transmitidas, mas não imutáveis, que passam de uma geração para outra, contra as ações dos professores diante de suas tarefas cotidianas, em suas aulas ou fora delas no modo de conceber e aplicar no seu trabalho as prescrições e orientações administrativas. É daí que surgem os atrasos na aplicação das reformas, a desvalorização dos seus objetivos iniciais, sua substituição por procedimentos formais burocráticos e por último o evidente fracasso de todas elas. (VIÑAO, 2007, p. 11, tradução do autor)

Em consequência das pressões que os docentes sofrem para cumprir os pressupostos dos currículos e do desconhecimento de políticas educacionais eles alegam não haver disponibilidade de tempo adequado para discutir ou para seguir as recomendações das reformas curriculares.

3 I O ENSINO SECUNDÁRIO EM PORTUGAL

O Ensino Secundário constitui um ciclo com duração de três anos, sendo esse ciclo equivalente ao Ensino Médio no Brasil. Esse nível de ensino é destinado para estudantes dos 15 aos 18 anos de idade. O nível Secundário possui sete modalidades de cursos específicos que são os seguintes: cursos científico-humanísticos, cursos profissionais, cursos científico-tecnológicos, cursos artísticos, cursos de teorias e procedimentos de aprendizagem, cursos preparatórios para o ingresso no Ensino Superior e também educação secundária na modalidade de ensino recorrente.

4 I A REFORMA CURRICULAR DE PORTUGAL E O ENSINO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO ENSINO MÉDIO

A reforma educacional do Ensino Médio, intitulada “Aprendizagens Essenciais”, foi instituída pelo Decreto nº 55/2018 de 6 de Julho, sendo implantada pelo primeiro ministro Augusto Ernesto Santos Silva no ano de 2018. Trata-se de um documento oficial que explicita para os educadores as finalidades do trabalho pedagógico relacionado ao ensino das disciplinas escolares do Ensino Secundário.

Nessa reforma a matemática é concebida como uma parte indissociável de diferentes contextos culturais e que contribui para que os alunos possam escolher com autonomia os campos profissionais em que pretendem atuar ao término dos estudos secundários, além de auxiliar os estudantes no desenvolvimento de competências de aprendizagem para que eles possam se adaptar as diversas transformações tecnológicas da atualidade. (PORTUGAL, 2018)

O ensino de matemática também contribui no desenvolvimento de habilidades, por parte dos alunos, relacionadas à comunicação viabilizando a interpretação, a compreensão, a escolha, a integração e a avaliação de informações essenciais à apreciação de diversos campos do conhecimento. (PORTUGAL, 2018)

O estudo dos conceitos da matemática escolar pode auxiliar os estudantes a compreenderem de maneira significativa as relações entre os elementos da natureza e possibilitam a interpretação e a compreensão da realidade, fazendo com que os alunos sejam capazes de intervir em diversas situações do contexto sociocultural.

Dessa maneira, o ensino de matemática no Secundário possui as seguintes finalidades:

> Usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.
>
> Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, a percepção espacial e geométrica, assim como a memória, o rigor, o espírito critico e a criatividade.
>
> Contribuir para uma atitude positiva face à Matemática.
>
> Capacitar para uma intervenção social pelo estudo e compreensão de problemas e situações da sociedade atual e bem assim pela discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, contribuindo desse modo na formação para uma cidadania ativa e participativa. (PORTUGAL, 2018, p. 88)

Para verificar como se desenvolve o ensino das transformações geométricas no Ensino Secundário português analisamos a reforma curricular com relação aos blocos de conteúdos das seguintes disciplinas: Matemática A, Matemática B e Geometria Descritiva A.

A disciplina Matemática A é destinada para os cursos de Ciências e Tecnologia e para os cursos de Ciências Econômicas. Essa disciplina abrange os três anos do Ensino Secundário. Através dessa disciplina os alunos estudam Funções e Geometria Analítica no 1º ano, Funções, Estatística e Geometria no 2º ano e Funções, Números Complexos e Probabilidade no 3º ano.

No bloco de conteúdos da disciplina Matemática A para o 1º ano do Secundário o estudo das transformações está presente no ensino de funções. As indicações do documento sugerem para o professor propor para os alunos representar, interpretar e analisar os gráficos de funções reais no plano e suas propriedades geométricas, bem como as representações algébricas dessas funções, utilizando as diferentes representações das funções em problemas de modelagem.

> Reconhecer, representar e interpretar graficamente funções reais de variável real e funções definidas por expressões analíticas e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelação;

> Reconhecer e interpretar as propriedades geométricas dos gráficos de funções e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelagem; (PORTUGAL, 2018 p. 95-96)

Em seguida, os alunos devem ser motivados a identificar e analisar a paridade das funções reais e as simetrias presentes nos gráficos de funções pares e ímpares, entre outras propriedades das funções, tais como monotonia, extremos relativos e extremos absolutos para utilizar esses conceitos em problemas que envolvem modelagem.

> Reconhecer e interpretar a paridade; as simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares; os intervalos de monotonia de uma função real de variável real; os extremos relativos e absolutos e usá-los na resolução de problemas e em contextos de modelagem; (PORTUGAL, 2018, p. 96)

Depois disso, os alunos devem explorar as transformações de funções no plano de maneira algébrica, por meio das modificações dos parâmetros das expressões que representam as funções.

> Reconhecer e interpretar graficamente a relação entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções a.f(x), f(b.x), f(x c) e f(x) d sendo a, b, c e d números reais, a e b não nulos e usá-las na resolução de problemas e em contextos de modelagem; (PORTUGAL, 2018, p. 97)

Assim, os estudantes podem observar que os deslocamentos das funções no plano são obtidos de acordo com as operações algébricas realizadas. As reflexões, as rotações, as translações e as dilatações dos gráficos das funções podem ser melhor compreendidas pelos alunos quando eles conseguem transformar as funções manipulando os coeficientes de suas expressões analíticas.

No bloco da disciplina Matemática A para o 2º ano do Ensino Médio o currículo prescreve o ensino de Geometria com ênfase no estudo de razões trigonométricas no círculo unitário, na resolução de equações trigonométricas, na construção de ângulos entre vetores, na determinação de lugares geométricos, na utilização de equações vetoriais de retas e de equações cartesianas de planos em diversos contextos e na resolução de problemas que envolvam posições relativas entre planos e retas.

Para o 3º ano o bloco de conteúdos da disciplina Matemática A abrange o ensino dos números complexos com ênfase nas representações dos complexos no plano e na exploração das propriedades geométricas dos complexos.

> **NÚMEROS COMPLEXOS**
>
> [...] Representar geometricamente números complexos [..]
>
> [...] Explorar geometricamente as operações com números complexos e resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas e geométricas dos números complexos [...] (PORTUGAL, 2018, p. 105)

A utilização das transformações geométricas é fundamental para desenvolver noções e conceitos relacionados ao ensino dos números complexos. Por meio do estudo das transformações os alunos podem compreender a invariância geométrica entre as propriedades dos complexos, identificando e analisando as transformações de polígonos e de quadriláteros no plano complexo, as quais são obtidas através de operações entre complexos.

A disciplina Matemática B é destinada para os alunos dos cursos de Artes Visuais e também é uma disciplina opcional para estudantes de outros cursos. Essa disciplina abrange o 1º ano e o 2º ano do Ensino Secundário. Para o 1º ano os conteúdos curriculares da disciplina Matemática B estão organizados em três blocos: Geometria, Funções e Estatística.

Em Geometria o estudo das transformações está presente na exploração de padrões geométricos do plano, isto é, na exploração de frisos que são padrões que se repetem de maneira indefinida e que apresentam simetrias de translação com a mesma direção. Além disso, os alunos devem estudar as composições e decomposições de figuras geométricas no espaço e diversos problemas geométricos de cunho histórico.

> GEOMETRIA
>
> Resolver problemas de geometria no plano e no espaço (alguns padrões geométricos planos (frisos),estudo de problemas de empacotamento, composição e decomposição de figuras tridimensionais, um problema histórico e sua ligação com a História da Geometria). (PORTUGAL, 2018, p. 116)

Depois dessa etapa, o programa curricular prescreve o estudo das transformações no bloco da disciplina Matemática B no ensino de funções lineares e quadráticas com o objetivo de capacitar os alunos a identificar e analisar, além de outras propriedades, as simetrias das funções através de suas representações gráficas no plano. Os estudantes também devem estar aptos a analisar as transformações da função quadrática no plano por meio das modificações dos parâmetros dessa função em sua representação algébrica.

> Reconhecer propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, nomeadamente domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, extremos e simetrias. Analisar e compreender os efeitos das mudanças de parâmetros com particular incidência nos gráficos da família das funções quadráticas. (PORTUGAL, 2018, p. 117)

Por meio das atividades de construção de gráficos da função quadrática os alunos podem observar as transformações desses gráficos no momento em que eles modificam os parâmetros da função na sua forma algébrica.

No estudo da translação da função quadrática os estudantes devem ser capazes de analisar a transformação dos gráficos quando modificam os valores do parâmetro b ou do parâmetro c. Os alunos devem perceber que, quando os valores do coeficiente b se alteram os gráficos da função são transladados horizontalmente em relação ao eixo x e quando os valores do parâmetro c se alteram os gráficos são transladados verticalmente em relação ao eixo y.

Além disso, os alunos podem verificar que os gráficos se deslocam no plano de acordo com as unidades representadas pelos valores numéricos que os parâmetros b ou c assumem durante a aplicação da transformação. Objetiva-se fazer com que os alunos sejam capazes de concluir que os eixos de simetria dos gráficos obtidos por meio de translação vertical não se alteram, mas os eixos de simetria dos gráficos obtidos por meio de translação horizontal são modificados.

Esse trabalho tem como finalidade fazer com que os alunos sejam capazes de utilizar as transformações de funções em contextos de modelagem matemática, a partir dos quais podem identificar e analisar determinados fenômenos físicos e as variações dos mesmos.

No ensino de função exponencial o estudo das transformações geométricas também está presente. As indicações do currículo sugerem para o professor propor para os alunos que identifiquem as relações entre as transformações dos gráficos de uma determinada função e as transformações da família de funções exponenciais no plano com o auxílio de tecnologias digitais, para que os alunos possam analisar as propriedades geométricas dessas funções, bem como os padrões e regularidades obtidos através das transformações dos seus gráficos.

> Usar a tecnologia para interpretar uma função e esboçar o gráfico em possíveis mudanças dos parâmetros na família de funções y $a.b^x$. Descrever regularidades e diferenças entre os padrões lineares e exponenciais. (PORTUGAL, 2018, p. 125)

É importante que os alunos se familiarizem com as transformações de diferentes tipos de funções no plano e suas relações para compreender melhor as principais características dessas funções e utilizar suas transformações em situações de aprendizagem que abrangem problemas de modelagem em diversos campos do conhecimento.

A disciplina Geometria Descritiva A abrange o 1º ano e o 2º ano do Ensino Secundário. Nessa disciplina é fundamental que os professores procurem fazer com que os alunos desenvolvam habilidades de aprendizagem relacionadas à visualização e à percepção espacial. Os conteúdos dessa disciplina estão relacionados ao estudo da Geometria no Espaço, com ênfase no estudo dos principais aspectos da Geometria Projetiva.

Para o 1º ano os conteúdos da disciplina Geometria Descritiva A abrangem o estudo de noções e conceitos da Geometria no espaço, no que se refere às definições de ponto, reta e plano e no estudo das posições relativas de retas e de planos no espaço. Além disso, os alunos devem estudar os conceitos da geometria projetiva, a fim de que sejam capazes de identificar os principais elementos que caracterizam uma projeção. A caracterização das representações diédricas pelos alunos é fundamental no estudo das propriedades geométricas dos sólidos tridimensionais e também das superfícies cônicas.

No bloco da disciplina Geometria Descritiva A o estudo das transformações é indicado pelo currículo com a finalidade de capacitar o estudante a explorar as transformações das projeções de entes geométricos no espaço. As indicações do documento enfatizam para o professor explorar com os alunos as rotações de pontos, retas e de planos de projeção. Os alunos devem ser capazes de aplicar o teorema de Desargues para identificar os eixos de rotação das projeções obtidas por transformação.

> Mudança de Diedros de Projeção
>
> Mudança de diedros de projeção (casos que impliquem apenas uma mudança) para transformar as projeções:
>
> de um ponto;
>
> de uma reta;
>
> dos elementos definidores de um plano.
>
> Rotações
>
> Rotações (casos que impliquem apenas uma rotação) para proceder:
>
> à rotação de um ponto
>
> à rotação de uma reta
>
> à rotação de um plano projetante:
>
> ao rebatimento de planos de perfil
>
> ao rebatimento de planos verticais
>
> ao rebatimento de planos de topo.
>
> [..] Identificar o eixo de rotação ou charneira do
>
> rebatimento como eixo de afinidade, por aplicação do
>
> teorema de Desargues. (PORTUGAL, 2018, p. 143)

Para o 2º ano do Secundário o estudo da transformação geométrica rotação é prescrito pelo currículo no bloco da disciplina Geometria Descritiva A com a finalidade de fazer com que os alunos sejam capazes de transformar entes geométricos contidos em planos não projetantes. Nesse estudo enfatiza-se a composição de rotações, o que também pode ser utilizado pelos estudantes para produzir simetrias de reflexão em pontos, retas e figuras contidas em um plano que não possui propriedades geométricas de projeção.

Já no ensino de geometria projetiva as transformações são utilizadas com o intuito de habilitar os estudantes a identificar as principais características e propriedades dos elementos geométricos que constituem planos bidimensionais e tridimensionais.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio da análise das prescrições da reforma curricular de Portugal para o Ensino Médio, podemos notar que o estudo das transformações geométricas foi prescrito pelo currículo com o objetivo de fazer com que os alunos possam identificar e analisar, de forma minuciosa, as propriedades das curvas representadas no plano, bem como para desenvolver o seu pensamento geométrico através da exploração das aplicações das transformações de pontos, de retas e de planos de projeção em contextos diversificados.

No estudo das curvas no plano o currículo do Secundário enfatiza o aspecto funcional das transformações. Os estudantes devem realizar transformações de retas, parábolas, curvas exponenciais, logarítmicas e trigonométricas de maneira algébrica.

Na abordagem de geometria projetiva o currículo prescreve o estudo das transformações a fim de fazer com que os alunos possam identificar as principais características do plano projetivo.

Muito embora *a análise dos pressupostos* do currículo de Portugal para o ensino das transformações geométricas nas escolas secundárias tenha explicitado as intenções dos reformadores do currículo em promover um ensino diferenciado dos conceitos de Geometria e de Álgebra, não se pode afirmar que o ensino das transformações tenha sido adotado pela cultura dos professores e integrado ao ensino escolar, devido às divergências culturais existentes entre os docentes e os legisladores que elaboram os programas curriculares seguindo os princípios das políticas públicas.

REFERÊNCIAS

JULIA, D. **A cultura escolar como objeto histórico.** História da Educação, Campinas/SP, n. 1, p. 10-47, jun. 2001.

PORTUGAL. Ministério da Educação. **Aprendizagens essenciais:** Articulação com o perfil dos alunos. Lisboa, p.75-167, jul. 2018.

SACRISTÁN, J. G. **Saberes e incertezas sobre o currículo.** Porto Alegre: Penso, 2013.

VIÑAO, A. **Culturas escolares y reformas (sobre la natureza histórica de los sistemas e instituciones educativas).** Historia de la educación, Múrcia, v. 9, n. 13, p.1-25, set. 2007.

CAPÍTULO 6

ALGUMAS DISCUSSÕES SOBRE O TEOREMA DE LAGRANGE E OS TEOREMAS DE SYLOW

Data de aceite: 23/03/2020

Data da submissão: 02/01/2020.

Adina Veronica Remor
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Toledo- Paraná
http://lattes.cnpq.br/0248330031742746

Wilian Francisco de Araujo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Toledo- Paraná
http://lattes.cnpq.br/7249767497977388

RESUMO: O presente artigo tem como objetivo apresentar o estudo que foi desenvolvido no PICME - Programa de Iniciação Científica e Mestrado, na área de Álgebra - Teoria de Grupos, sob orientação do professor Wilian Francisco de Araujo. Após estudar vários tópicos referentes a Teoria de Grupos, que serão apresentados neste trabalho, alguns questionamentos surgiram. Sabemos, pelo Teorema de Lagrange, que a ordem de um subgrupo sempre divide a ordem do grupo. Mas dado um número que divide a ordem do grupo, nem sempre existe um subgrupo com esta ordem. Então, será que é possível determinar em quais casos é possível garantir a existência de subgrupos com uma dada ordem? Assim apresentamos neste trabalho os Teoremas de Sylow, cujos resultados estão próximos de responder o questionamento acima e, além disso, fornecem outras características importantes a respeito do grupo e seus subgrupos.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de grupos; Teorema de Lagrange; Teoremas de Sylow.

SOME DISCUSSIONS ABOUT LAGRANGE'S THEOREM AND SYLOW'S THEOREMS

ABSTRACT: This article aims to present the study that was developed PICME- Scientific Initiation Program and Master's degree, in the area of Algebra- Group Theory, under the orientation of professor Wilian Francisco de Araujo. After the study of various topics about Group Theory, which will be presented in this paper, some questions appeared. We know from Lagrange's Theorem that the order of a subgroup always divides the order of the group. However given a number that divides the group order, there is not always a subgroup with this order. So, is it possible to determine in which cases it is possible to ensure the existence of subgroups with a given order? Thus, we present in this paper the Sylow's Theorems, which results are close to answering the above question, and furthermore they provide other

important characteristics about the group and its subgroups.
KEYWORDS: Group Theory; Lagrange's Theorem; Sylow's Theorems.

1 I INTRODUÇÃO

A Teoria de Grupos é uma das ferramentas mais utilizadas na linguagem moderna. Podemos encontrar tal teoria presente em inúmeras áreas, como teoria quântica de campos, as estruturas atômicas e, em particular, cristalografia, além da álgebra abstrata, onde esse conceito é fundamental para o estudo das demais estruturas algébricas, como anéis, corpos e espaços vetoriais, que são construídos a partir do conceito de grupo.

A Teoria de Grupos teve origem por meio das ideias do matemático francês Evariste Galois (1811-1832), a partir da tentativa de resolver equações algébricas de grau maior ou igual a 5 por meio de radicais. Mas ao longo do tempo outros matemáticos renomados contribuíram nessa área, como o suíço Leonard Euler (1707-1783), o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o francês Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e o britânico Arthur Cayley (1821-1895), que foi o primeiro a introduzir o conceito de grupo como conhecemos hoje. Atualmente a Teoria de Grupos está dividida em diversas subáreas, no qual vários problemas têm sido atacados e solucionados, destacando o nome de muitos outros matemáticos e físicos.

Neste trabalho apresentaremos alguns conceitos primordiais da Teoria de Grupos, bem como buscaremos investigar a validade da recíproca do Teorema de Lagrange, no qual dado um número que divide a ordem do grupo, é possível garantir a existência de subgrupos com esta ordem. Para tal, demonstraremos os Teoremas de Sylow, que além de responderem parcialmente à questão acima, fornecem outras informações importantes a respeito dos grupos e subgrupos.

2 I METODOLOGIA

O presente trabalho possui cunho bibliográfico, dessa forma foi realizado um estudo utilizando-se principalmente os livros *Álgebra moderna*, cujos autores são Hygino H. Domingues e Gelson Iezzi, publicado em 2003, e *Elementos de Álgebra* de autoria de Arnaldo Garcia e Yves Iequain, publicado em 2013. Foram estudados vários tópicos presentes nesses livros. Os mais pertinentes para nosso trabalho serão aqui apresentados, mas para quem possui interesse em se aprofundar nesta área ou conhecer um pouco mais sobre a Teoria de Grupos recomenda-se fortemente uma leitura desses materiais.

3 I DESENVOLVIMENTO

Nesta subseção apresenta-se algumas definições e teoremas importantes para o desenvolvimento da Teoria de Grupos. Algumas demonstrações serão ocultadas devido ao objetivo do nosso trabalho. Todas elas podem ser encontradas em Garcia e Iequain (2013) e Domingues e Iezzi (2003).

Definição 3.1: Um sistema matemático constituído de um conjunto G, tal que $G \neq \emptyset$, e uma operação $(x,y) \rightarrow x * y$ sobre G é chamado *grupo* se as seguintes condições são satisfeitas:

- Associatividade (Propriedade 1): $(\alpha * b) * c = \alpha * (b * c)$, quaisquer que sejam $\alpha,b,c \in G$.
- Existência do elemento neutro (Propriedade 2): existe um elemento $e \in G$ tal que $\alpha * e = e * \alpha = \alpha$, qualquer que seja $\alpha \in G$.
- Existência do simétrico (Propriedade 3): para todo $\alpha \in G$ existe um elemento $\alpha' \in G$ tal que $\alpha' * \alpha = \alpha * \alpha' = e$.

Podemos perceber que é possível obter subconjuntos de G, que com a operação $*$ definida em G satisfazem as mesmas propriedades elencadas acima. Estes subconjuntos, com a operação $*$ são chamados subgrupos. Assim, podemos escrever a seguinte definição:

Definição 3.2: Seja $(G,*)$ um grupo. Um subconjunto $H \subseteq H, H \neq \emptyset$ é dito *subgrupo* se, com a operação $*$ satisfaz as seguintes propriedades:

- Fechado para a operação (Propriedade 0): $h_1 * h_2 \in H, \forall\, h_1, h_2 \in H$.
- Associatividade (Propriedade 1): $(h_1 * h_2) * h_3 = h_1 * (h_2 * h_3), \forall\, h_1,h_2,h_3 \in H$
- Existência do elemento neutro (Propriedade 2): $\exists\, e\ H$ tal que $e * h = h * e = h, \forall\, h \in H$.
- Existência do elemento simétrico (Propriedade 3): Para cada $h \in H$, existe $h' \in H$ de forma que $h * h' = h' * h = e$.

Além disso, alguns conjuntos possuem uma quantidade finita de elementos. Neste caso, são chamados *grupos finitos.* Assim, o número de elementos de G é chamado *ordem* do grupo, eventualmente representada por o(G) ou IGI, e a tábua da operação $*$ (que mostra como todos os elementos se relacionam) se denomina *tábua do grupo*. Para cada elemento α de G também é possível associar uma ordem, que é o inteiro $h > 0$ tal que $\alpha^h = e$ e $\alpha^r \neq e$ sempre que $0 < r < h$. Por fim, se $\forall x,y \in G$ temos $x * y = y * x$, então o grupo é chamado *grupo abeliano.*

A seguir apresentaremos alguns exemplos de grupos e subgrupos.

1. O conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ munido com a operação + é subgrupo do grupo dos números reais $\mathbb{R}$ munido com esta mesma operação. Para tal, basta verificar que todas as propriedades exigidas pela definição de

subgrupo são satisfeitas.

2. Podemos determinar outro exemplo de grupo, que não é tão trivial como o acima. Assim, seja C um conjunto qualquer e defina o conjunto $Bij(C) = \{f : C \rightarrow C /\ f$ é uma bijeção$\}$. Provaremos que $Bij(c),\circ)$ é um grupo. Assim, sejam $f,g,h \in Bij(C)$ e x є C. Temos: $((f \circ g) \circ h)\ (x) = (f \circ g)(h(x)) = f\ (g(h(x))) = f(g \circ h)(x) = f \circ (g \circ h))\ (x)$. Logo a propriedade associativa é válida. Como sabemos, a função identidade Id é bijetora, assim $Id \in Bij(C)$. Além disso, $\forall f \in Bij(C)$ tem-se $f \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ f = f$, ou seja, Id é o elemento neutro de $(Bij\ (C), \circ)$. E como toda função bijetora possui inversa, que também é bijetora, basta tomar $f^{-1} \in Bij(C)$ tal que $\forall f \in Bij(C)$, tem-se $f \circ f^{-1} = f^{-1}\ f = Id$, logo f^{-1} é o elemento simétrico de f com relação a operação $\circ$. Assim $(Bij(C), \circ)$ é grupo.

Agora, tome C = {1,2,3,...,n} em que n ≥ 1. Neste caso, o conjunto das permutações de C será representado por S_n. Observe que para cada permutação dos elementos de C, se está definindo uma função bijetora que associa os elementos 1,2, ..., n a permutação que foi realizada. Assim, temos que $(S_n \circ)$ é um grupo, cuja ordem é n!

Por exemplo, vamos considerar n = 3, ou seja, tomaremos o grupo das permutações S_3. Os elementos desse grupo são as permutações: *Id*, que é a identidade; (12), que leva o elemento 1 em 2 e o elemento 2 em 1 e mantém o elemento 3 fixo; (13) que leva o elemento 1 em 3 e vice-versa, fixando o elemento 2; (23) que leva o elemento 2 em 3 e vice-versa, fixando o elemento 1; (123) que leva 1 em 2, 2 em 3 e 3 em 1 e por fim a permutação (132) que leva 1 em 3,3 em 2 e 2 em 1. Estas são todas as possíveis permutações dos elementos 1, 2 e 3. Assim, obtemos que $(S_3 = \{Id,(12), (13), (23), (123), (132)\}, \circ)$ é grupo. Através de composições entre essas permutações, que são funções bijetoras, podemos calcular a ordem de cada elemento, o seu elemento simétrico, o resultado de cada possível operação, etc.

A partir desta notação definida para grupo de permutações, cada permutação $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3... \alpha_r)$, onde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ são inteiros distintos e $\sigma \in S_n$ é uma permutação tal que $\sigma(\alpha_1) = \alpha_2$, $\sigma(\alpha_2) = \sigma^2(\alpha_1) = \alpha_3, ..., \sigma\ (\alpha_{r-1}) = \sigma^{r-1}(\alpha_1) = \alpha_r$, $\sigma(\alpha_r) = \sigma^r(\alpha_1) = \alpha_1$ e $\sigma(x) = x$ para todo $x \in C- \{\alpha_1,\alpha_2, ..., \alpha_r\}$ se diz que σ é um *r-ciclo.* Se r = 2 então σ é chamado de *transposição.* Assim, as permutações (12), (13) e (23) є S_3 são transposições. Dessa forma, podemos elencar uma proposição muito importante apresentada por Domingues e Iezzi (2003):

Proposição 3.3: Toda permutação $\sigma \in S_n$, exceção feita à permutação *Id*, pode ser escrita univocamente (salvo a ordem dos fatores) como um produto de transposições distintas.

A demonstração desse resultado não será feita neste trabalho, mas pode ser encontrada em Domingues e Iezzi (2003), p. 202.

Este resultado acima é muito importante para conhecermos um novo grupo: o grupo A_n.

Definição 3.4: Uma permutação $\sigma \in S_n$ é chamada *par* ou *ímpar* conforme possa ser expressa como um produto de um número par ou ímpar de transposições. O conjunto das permutações pares do S_n é indicado por A_n.

Proposição 3.5: Para todo $n > 1$ o conjunto A_n é subgrupo do S_n de ordem $\frac{n!}{2}$

A demonstração pode ser encontrada em Domingues e Iezzi (2003), p. 206.

Classes laterais e Teorema de Lagrange

Nesta seção enunciaremos um conhecido teorema da Teoria de Grupos Finitos, muito importante para o nosso trabalho e ponto inicial das discussões que serão realizadas posteriormente. Mas antes de enunciá-lo, introduziremos o conceito de classes laterais, que é necessário para o Teorema de Lagrange.

Proposição 3.1.1: Seja $(G, *)$ um grupo e *H* um subgrupo de G. A relação ~ definida sobre G por "$y \sim x$ se e somente se $\exists\, h \in H$ tal que $y = x * h$" é uma relação de equivalência.

Mostraremos que ~ define uma relação de equivalência, ou seja, ~ satisfaz as propriedades reflexiva, transitiva e simétrica.

- Reflexiva: Observe que por H ser subgrupo de G, $\exists\, e \in H$ tal que $x = x * e$. Dessa forma $x \sim x$.

- Transitiva: Se $x \sim y$ e $y \sim z$ então $\exists h_1 \in H$ e $\exists h_2 \in H$ tal que $x = y * h_1$ e $y = z * h_2$. Logo $y = x * h^{-1}{}_1$. Portanto $z * h_2 = x * h^{-1}{}_1 \Rightarrow z * h_2 * h_1 = x \Rightarrow x = z * (h_2 * h_1) \Rightarrow x \sim z$, já que $h_2 * h_1 \in H$.

- Simétrica: Observe que se $x \sim y$ então $\exists\, h \in H$ tal que $x = y * h$. Assim $y = x * h^{-1}$. Portanto $y \sim x$.

Logo "$y \sim x$ se e somente se $\exists h \in H$ tal que $y = x * h$" é uma relação de equivalência.

Por definição, a classe de equivalência de x é o conjunto $\{y \in G \mid y \sim x\} = \{x * h \mid h \in H\}$, que é denotada por xH e chamada de *classe lateral à esquerda de H em G,* que contém x, já que a relação definida é de equivalência. Da mesma forma podemos definir as classes laterais à direita de H em G, basta tomar a relação de equivalência "$y \sim x$ se e somente se $\exists h \in H$ tal que $y = h * x$". Assim $Hx = \{ h * x \mid h \in H\}$. Observe que em particular tem-se $H = eH = He$.

Definição 3.1.2: O conjunto das classes laterais de H em G será denotado por $\frac{G}{H}$. Assim $\frac{G}{H} = \{\alpha H \mid \alpha \in G\}$

Como a relação de equivalência cima determina uma partição de G, temos $\alpha_i H = \alpha_i H$ ou $\alpha ij \cap \alpha ijH = \emptyset$ sempre que $i \neq i$ e assim, se G é finito, vamos tomar $\frac{G}{H}$ o conjunto de todas as classes laterais distintas. O número de elementos de $\frac{G}{H}$ é chamado de *índice* de H em G e é denotado por (G:H). Além disso, $G = \alpha_1 H \cup \alpha_2 H$

$\cup \ldots \cup a_n H$.

Podemos observar certas relações entre as classes laterais, como a seguinte:

Proposição 3.1.3: Todas as classes laterais de H em G têm a mesma cardinalidade, que é igual a cardinalidade de H.

Demonstração: Domingues e Iezzi (2003), p. 189.

O resultado acima é importante para a demonstração do Teorema de Lagrange, que será enunciada agora:

Teorema 3.1.4 (Teorema de Lagrange): Seja *H* um subgrupo de um grupo finito *G* . Então $\circ(G) = \circ(H) \cdot (G: H)$ e portanto $\circ(H) \mid \circ(G)$.

Demonstração: Seja n o número de classes laterais à esquerda distintas de H em G. Assim, sabemos que n = (G:H) Considere o conjunto $\frac{G}{H} = \{\alpha_1 H, \alpha_2 H, \ldots, \alpha_n H\}$. Como a relação de equivalência determina uma partição de G, sabemos que $G = \alpha_1 H \cup \alpha_2 H \cup \ldots \cup \alpha_n H$ e $\alpha_i H \cap a_j H = \varnothing$ sempre que $i \neq j$ (já que todas as classes são distintas). Mas, devido a proposição anterior, sabemos que todas as classes laterais possuem a mesma cardinalidade, que é igual a de H. Logo $G = \alpha_1 H \cup \alpha_2 H \cup \ldots \cup \alpha_n H$ então $\circ(G) = \circ(\alpha 1H) + \circ(\alpha_2 H) + \cdots + \circ(\alpha_n H)$ o que implica que $\circ(G) = \circ(H) + \circ(H) \ldots + \circ(H)$. Como o número de classes distintas é n, obtemos $\circ(G) = \circ(H) \cdot n$. Mas $n = (G:H)$; logo $\circ(G) = \circ(H) \cdot (G:H)$ e, portanto. $\circ(H) \mid \circ(G)$.

Vamos mostrar um exemplo. Considere o grupo $(S_3, \circ)$ apresentado anteriormente. Sabemos que $S_3 = \{Id, (12),(13),(23),(123),(132)\}$, portanto $\circ(S_3) = 6$ Ao calcular os subgrupos de S_3, encontramos os seguintes exemplos:

- Há um subgrupo de ordem 1, que é $(\{Id\} \circ)$
- Há três subgrupos de ordem 2, que são $(\{Id,(12)\}, \circ)$, $(\{Id,(13)\}, \circ)$ e $(\{Id,(23)\}, \circ)$
- Há apenas um subgrupo de ordem 3 que é $(\{Id,(123), (132)\}, \circ)$.
- Há um subgrupo de ordem 6 que é o próprio grupo $(S_3, \circ)$.

Esses são todos os subgrupos do grupo $(S_3, \circ)$ Em todos os casos, temos que a ordem do subgrupo divide a ordem do grupo.

Por fim, apresentaremos a seguinte definição, que também será importante para as discussões a seguir.

Definição 3.1.5: Um subgrupo N de um grupo G é chamado subgrupo *normal* se $\forall g \in G$ se verifica a igualdade $gN = Ng$. Ou seja, a classe lateral à esquerda de g em N é igual a classe lateral à direita de g em N, $\forall g \in G$.

A notação utilizada para subgrupo normal é $N \lhd G$ A fim de simplificar a notação também denotaremos $x * y = xy$. A partir de agora também ocultaremos a operação dos subgrupos relacionados ao $(S_3, \circ)$, visto que sempre será composição de funções.

3 I ESTUDO DE CASO

Após estudar o Teorema de Lagrange, surgiu o seguinte questionamento: será que a recíproca do Teorema de Lagrange é válida? Ou seja, será que sempre que um número dividir a ordem de um grupo G é possível garantir que exista ao menos um subgrupo com esta ordem? Assim, analisando alguns exemplos chegamos à conclusão que a resposta é não, ou seja, nem sempre existem subgrupos para um número que divide a ordem de um grupo . Dessa forma, apresentaremos um contraexemplo.

Considere o grupo . Sabemos que a ordem deste grupo é $\frac{4!}{2} = 12$. Assim, os divisores de 12 são 1,2,3,4,6 e 12, logo se a recíproca do Teorema de Lagrange fosse válida, obteríamos ao menos um subgrupo para cada divisor acima. Em busca de determinar todos os subgrupos, construímos a tábua do grupo A_4

$\circ$	I	(12)(13)	(13)(12)	(14)(12)	(12)(14)	(14)(13)	(13)(14)	(24)(23)	(23)(24)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
I	I	(12)(13)	(13)(12)	(14)(12)	(12)(14)	(14)(13)	(13)(14)	(24)(23)	(23)(24)	(12)(34)	(13)(24)	(14)(23)
(12)(13)	(12)(13)	(13)(12)	I	(23)(24)	(14)(23)	(12)(34)	(12)(14)	(14)(13)	(13)(24)	(24)(23)	(14)(12)	(13)(14)
(13)(12)	(13)(12)	I	(12)(13)	(13)(24)	(13)(14)	(24)(23)	(14)(23)	(12)(34)	(14)(12)	(14)(13)	(23)(24)	(12)(14)
(14)(12)	(14)(12)	(14)(13)	(14)(23)	(12)(14)	I	(13)(24)	(23)(24)	(13)(12)	(12)(34)	(13)(14)	(12)(13)	(24)(23)
(12)(14)	(12)(14)	(13)(24)	(24)(23)	I	(14)(12)	(12)(13)	(12)(34)	(14)(23)	(13)(14)	(23)(24)	(14)(13)	(13)(12)
(14)(13)	(14)(13)	(14)(23)	(14)(12)	(12)(34)	(24)(23)	(13)(14)	I	(13)(24)	(12)(13)	(13)(12)	(12)(14)	(23)(24)
(13)(14)	(13)(14)	(23)(24)	(12)(34)	(13)(12)	(13)(24)	I	(14)(13)	(12)(14)	(14)(23)	(14)(12)	(24)(23)	(12)(13)
(24)(23)	(24)(23)	(12)(14)	(13)(24)	(14)(13)	(12)(34)	(14)(23)	(13)(12)	(23)(24)	I	(12)(13)	(13)(14)	(14)(12)
(23)(24)	(23)(24)	(12)(34)	(13)(14)	(14)(23)	(12)(13)	(14)(12)	(13)(24)	I	(24)(23)	(12)(14)	(13)(12)	(14)(13)
(12)(34)	(12)(34)	(13)(14)	(23)(24)	(24)(23)	(14)(13)	(12)(14)	(12)(13)	(14)(12)	(13)(12)	I	(14)(23)	(13)(24)
(13)(24)	(13)(24)	(24)(23)	(12)(14)	(13)(14)	(13)(12)	(23)(24)	(14)(12)	(12)(13)	(14)(13)	(14)(23)	I	(12)(34)
(14)(23)	(14)(23)	(14)(12)	(14)(13)	(12)(13)	(23)(24)	(13)(12)	(24)(23)	(13)(14)	(12)(14)	(13)(24)	(12)(34)	I

Figura 1: Tábua do grupo A_4

Fonte: Os autores.

Mas ao construir a tábua, obtivemos os seguintes subgrupos:

$$\{Id\}$$

$$\{Id, (13)(24)\}$$

$$\{Id, (12)(34)\}$$

$$\{Id, (14)(23)\}$$

$$\{Id, (12)(13), (13)(12)\}$$

$$\{Id, (12)(14), (14)(12)\}$$

$$\{Id, (13)(14), (14)(13)\}$$

$$\{Id, (23)(24), (24)(23)\}$$

$$\{Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

$$A_4$$

Observe que A_4 não possui subgrupo de ordem 6 , embora 6 I 12.

4 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após perceber que a recíproca do Teorema de Lagrange não é válida, podemos nos questionar: Será possível determinar em quais casos de fato ela é válida? Se sim, como?

Assim, estudamos os Teoremas de Sylow, que respondem parcialmente o questionamento acima. Mas antes de enunciá-los, precisamos de algumas definições que serão utilizadas na demonstração desses teoremas. Todas as definições e teoremas desta seção podem ser encontrados em Garcia e Iequain (2013).

Definição 5.1: Seja G um grupo. O centro de G, denotado por Z(G), é o subconjunto Z(G) = x є G I xg = gx, ∀ g є G). Sabemos que Z(G) é um subgrupo de G.

Definição 5.2: Seja G um grupo e C um conjunto. A aplicação p: G → P(C) é dita uma representação de G no grupo das permutações de C se p é um homomorfismo de grupos.

Definição 5.3: Seja G um grupo e C um conjunto. Seja p:G →(C) uma representação de G e seja x є C.

- A *órbita* de x é o conjunto D(x) = {p(g)(x) I g є G}.
- O *estabilizador* de x é o conjunto de elementos de G que deixam o elemento x fixo, isto é, E(x) = {g є G I p(g)(x) = x}. O estabilizador E(x) é subgrupo de G.

Teorema 5.4: Seja p: G → P(C) uma representação do grupo G no grupo de permutações do conjunto C. Seja x є C. Então a aplicação ψ é uma bijeção:

$$\begin{aligned} \psi: \quad D(x) \quad &\rightarrow \{Classes\ laterais\ à\ esquerda\ de\ E(x)\ em\ G\} \\ \rho(g)(x) \quad &\mapsto gE(x) \end{aligned}$$

Em particular, no caso de G ser finito, temos #(D(x)) = (G:E(x)) e que #(D(x)) divide ∘(G).

Demonstração: Ver Garcia e Iequain (2013), p. 255.

Agora, considere um grupo G. Seja

$$\begin{aligned} I: \quad G \quad &\rightarrow P(G) \\ g \mapsto I_g: \ G &\rightarrow G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

Seja x є G. A órbita D(x) = {Ig(x) I g є G} = {gxg^{-1} I g є G} de um elemento x є G nesta representação por conjugação se chama *classe de conjugação de x*, e se denota Cl (x). Os elementos de Cl (x) se chamam *conjugados* de x є G.

Observe que temos Cl(x) = {x} se e somente gxg^{-1} = x, ∀ g є G. Assim x є Z(G). O estabilizador E(x) = {g є G I Ig(x) = x} = {g є G I gxg^{-1} = x} = {g є G I g comuta com x} de um elemento x ϵ G nesta representação por conjugação se chama o centralizador de x, e se denota por Z(x).

Dessa forma, o teorema anterior nos dá o(Cl(x)) = #{Conjugados de x em G}= (G:Z(x)).

Naturalmente, o conjunto G é igual a união disjunta das classes de conjugação. Em cada classe escolhemos um representante x_α Então temos $o(G) = \sum_\alpha o(Cl(x_\alpha))$, logo

$$o(G) = o\big(Z(G)\big) + \sum_{x_\alpha \notin Z(G)} o(Cl(x_\alpha)) \qquad (1)$$

Essa igualdade se chama *a equação das classes de conjugação.* Por fim, seja G um grupo e C = {subgrupos de G}. Considere a aplicação:

$$\begin{aligned} I: \quad G &\to P(C) \\ g &\mapsto I_g: C \to C \\ &\qquad\quad H \mapsto gHg^{-1} \end{aligned}$$

A órbita D(H) = {I_g(H) I gHg^{-1} I g ϵ G} de um subgrupo H se chama a classe de conjugação de H. Os elementos de D(H) se chamam os *subgrupos conjugados de H*. Observe que D(H) = {H} se e somente se H◁G.

O estabilizador E(H) = {g ϵ G I I_g(H) = (H)} = {g ϵ G I gHg^{-1} = H} se chama o *normalizador* de H em G e é denotado por N_g(H). Observe que N_g(H) é o maior subgrupo de G no qual H é normal e também N_g(H) se e somente se H ◁ G. Aqui temos #{conjugados de H em G} = (G:N_g(H)).

Estes conceitos introduzidos acima serão importantes para as demonstrações dos teoremas de Sylow. Mas antes de enunciar o primeiro Teorema de Sylow, precisamos do seguinte lema:

Lema 5.5 (Cauchy): Seja G um grupo finito abeliano. Seja p um número primo que divide o(G). Então existe x ϵ G de ordem p.

Demonstração: Ver Garcia e Iequain (2013), p. 258.

Agora, apresentaremos o Primeiro Teorema de Sylow.

Teorema 5.6 (Primeiro Teorema de Sylow): Sejam p um número primo e G um grupo de ordem $p^m b$, com (p,b) = 1. Então, para cada n, 0 ≤ n ≤ m existe um subgrupo H de G tal que o(H) = p^n.

Demonstração: A prova também será feita por indução sobre o(G). Se o(G) = 1 o resultado é válido. Se o(G)>1 então vamos supor que para todos os grupos de ordem menor que o(G) o teorema é válido. Assim, vamos mostrar que para o(G) o teorema também vale.

Agora, seja n um inteiro positivo tal que $p^n \mid o(G)$. Vamos dividir a demonstração em dois casos:

- Caso 1: Se existir um subgrupo H de G tal que p^n divida a ordem de H, pela hipótese de indução sabemos que existe um subgrupo K de H de ordem p^n mas como H é subgrupo de G, concluímos que K é subgrupo de G e portanto o teorema está sendo válido.

- Caso 2: Se não existir um subgrupo H de G tal que p^n divida a ordem de H, vamos considerar a Equação (1) determinada anteriormente:

$$o(G) = o\big(Z(G)\big) + \sum_{x_\alpha \notin Z(G)} o(Cl(x_\alpha)) = o\big(Z(G)\big) + \sum_{x_\alpha \notin Z(G)} (G:Z(x_\alpha))$$

Para cada $x_\alpha \notin Z(G)$, temos $Z(x_\alpha) \subsetneq G$, assim como supomos que não existe um subgrupo H de G tal que p^n divida $o(H)$, concluímos que $p^n \nmid o(Z(x\alpha))$ e consequentemente $p \mid (G:Z(x\alpha))$. Como $p \mid o(G)$ obtemos que $p \mid o(Z(G))$ Como Z(G) é grupo abeliano, sabemos pelo Lema de Cauchy que existe ao menos um elemento $x \in Z(G)$ tal que $x^p = e$. Como $x \in Z(G)$, x comuta com todos os elementos de G e dessa forma sabemos que $\langle x \rangle$ é um subgrupo normal de G. Assim, podemos considerar o grupo quociente $\frac{G}{\langle x \rangle}$. Sabemos que $o\left(\frac{G}{\langle x \rangle}\right) < o(G)$ e pelo Teorema de Lagrange $p^{n-1} \mid o\left(\frac{G}{\langle x \rangle}\right)$, já que $o(\langle x \rangle) = p$ e $p^n \mid o(G)$. Logo pela hipótese de indução sabemos que $\frac{G}{\langle x \rangle}$ possui um subgrupo K' tal que $o(K') = p^{n-1}$. Agora, considere o homomorfismo canônico $\phi: G \to \frac{G}{\langle x \rangle}$ e tome $K = Ø^{-1}(K')$. Então K é um subgrupo de G e $o(K) = o(\ker Ø) \cdot o(K') = o(\langle x \rangle) \cdot o(K') = p \cdot p^{n-1} = p^n$.

O resultado acima nos fornece a resposta parcial que estávamos procurando. Assim, sempre que for dada a ordem de um grupo, saberemos em quais casos é possível determinar a existência de ao menos um subgrupo com esta ordem: basta que a ordem do subgrupo dada seja uma potência de um primo p que divide a ordem de G. Quando ela for a maior potência que divide a ordem de G, os subgrupos com esta ordem recebem um nome especial:

Definição 5.7: Sejam G um grupo finito, p um número primo e p^m a maior potência de p que divide $o(G)$. Os subgrupos de G que têm ordem p^m são chamados de p-*subgrupos de Sylow.*

Observe que se p é um número primo que não divide $o(G)$., então {e} é o único p-subgrupo de Sylow.

Outra definição importante para os próximos resultados é:

Definição 5.8: Seja p um número primo. Um grupo G no qual todo elemento tem sua ordem igual a uma potência de p é chamado p-grupo.

Assim, os próximos Teoremas de Sylow vão além do questionamento que possuíamos e nos fornecem outras informações muito interessantes que merecem ser estudadas. Dessa forma, vamos enunciar primeiramente um lema que será necessário e depois os demais Teoremas de Sylow:

Lema 5.9: Sejam G um grupo finito e p um número primo. Sejam S um p-subgrupo de Sylow de G e P um p-subgrupo qualquer de G. Então $P \cap N_G(S) = P \cap S$.

Demonstração: Ver Garcia e Iequain (2013), p. 262.

Teorema 5.10 (Segundo Teorema de Sylow): Sejam G um grupo, p um número primo e n_p o número de p-subgrupos de de Sylow de G. Então:

a. Todos os p-subgrupos de Sylow são conjugados entre si. Em particular, um p-subgrupo de Sylow S de G é normal em G se e somente se S é o único p-subgrupo de Sylow de G. Neste caso S é um subgrupo característico de G.

b. Se P é um p-subgrupo de G, existe um p-subgrupo de Sylow S de G tal que $P \subseteq$ .s

c. Se S é um p-subgrupo de Sylow, temos $n_p = (G: N_G(S))$

Demonstração: Seja S um p-subgrupo de Sylow qualquer de G. Considere a representação por conjugação $\rho{:}G \rightarrow P(D)$, onde D representa o conjunto dos subgrupos de G Por definição, $C = \{\text{conjugados de } S\} = \{gSg^{-1} \mid g \in G\}$ é a órbita de S nesta representação. Assim, pelas equações já estudadas anteriormente temos $\circ(C) = (G: N_G(S))$

Itens a) e b): Precisamos mostrar que se P é um p-subgrupo qualquer de G, então P está contido em um conjugado de S em G. Assim, considere a representação

$$
\begin{aligned}
I: \quad P &\rightarrow P(C) \\
a &\mapsto I_a : C \rightarrow C \\
&\qquad gSg^{-1} \mapsto agSg^{-1}a^{-1}
\end{aligned}
$$

Vamos tomar todas as órbitas distintas $D_1, D_2, \ldots D_k$ desta representação e para cada órbita D_i vamos escolher um representante $S_i = g_i S g^{-1}_i$ em . Como C é a órbita de S na representação anterior, obtemos que $\circ(G) = \sum_{i=1}^{k} o(D_i)$ .Além disso, pelo Teorema 5.4 temos $\circ(D_i) = (P{:}E(S_i)) = (P{:}P \cap N_G(S_i))$ e pelo Lema 5.9, temos $(P{:}\ P \cap N_G(S_i)) = (P{:}\ P \cap S_i)$. Portanto, obtemos $(C) = \circ \sum_{i=1}^{k}(P: P \cap S_i)$ Das duas expressões obtidas para $\circ(C)$ temos que $(G: N_G(S)) = \sum_{i=1}^{k}(P: P \cap S_i)$

Cada parcela $(P : P \cap S_i)$ é igual a 1 ou a um múltiplo de p, pois P é um p-grupo. Como S é um p-subgrupo de Sylow, sabemos que (G:S) não contém fator p , logo p não divide (G: $N_G(S)$), já que $\circ(S) \mid \circ(N_G(S))$. Consequentemente, existe i tal que p não divide (P: $P \cap S_i$), assim (P: $P \cap S_i$) = 1 e portanto $P \subseteq .S_i$.

Item c): Pelo item a), temos {p-subgrupos de Sylow} = {conjugados de S}. Dessa forma concluímos que n_p = (G: $N_G(S)$).

Após obter as informações acima, temos condições de determinar algumas características do inteiro (G: $N_G(S)$). Elas não vão caracterizá-lo, mas serão suficientes para localizá-lo em um conjunto pequeno de divisores da $\circ(G)$.

Teorema 5.11 (Terceiro Teorema de Sylow): Sejam p um número primo e G um grupo finito de ordem $p^m b$, com (p,b) Seja n_p o número de p-subgrupos de Sylow de G. Então

- n_p divide b;
- $n_p \equiv 1\ (mod\ p)$.

Demonstração: Ver Garcia e Iequain (2013), p. 264.

Observe que os Teoremas de Sylow são muito importantes para garantir a existência de determinados subgrupos, bem como fornecer outras informações importantes a respeito dos elementos e até mesmo do grupo. Assim, apresentaremos algumas discussões a respeito dos Teoremas de Sylow utilizando exemplos.

Dessa forma, considere o grupo A_4. Nós já calculamos quais são seus subgrupos para cada uma das seguintes ordens: sabemos que há um subgrupo de ordem $1 = 2^0 = 3^0$ (que é {e}); subgrupos de ordem $2 = 2^1$, um subgrupo de ordem $4 = 2^2$ e subgrupos de ordem $3 = 3^1$. A existência de tais subgrupos está garantida pelo Primeiro Teorema de Sylow.

Observe também que, ao calcularmos, por exemplo, o normalizador do subgrupo H = (Id, (12)(13),(13)(12)} obtemos o próprio H. Como pelo Segundo Teorema de Sylow, n_p = (G: $N_G(S)$) , então n3 = (A_4: N_{A4} (H)), o que implica que $n_3 = (A_4 : H) = \frac{12}{3} = 4$ E, de fato há 4 3-subgrupos de Sylow. Da mesma forma, ao calcularmos $N_{A4}(K)$, onde K = {Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)}, obtemos $N_{A4}(K)$, assim n2 = (G:$N_G(K)$) implica que n2 = (A_4:A_4) = 1, e de fato, há apenas um subgrupo de ordem $4 = 2^2$, que é o 2-subgrupo de Sylow de A_4 e pelo fato de ser único, é normal em A_4.

Também podemos ver outras aplicações dos Teoremas de Sylow ainda neste exemplo. Considere novamente H, que é um 3-subgrupo de Sylow. Sabemos que todos os p-subgrupos de Sylow são conjugados entre si, assim, basta tomar g= (12(14) por exemplo, e conseguiremos gerar o 3-subgrupo de Sylow J, onde J = gHg^{-1} = {Id, (13)(14),(14)(13)}. Podemos ver também que todos os 2-grupos do estão contidos em K que é o 2-subgrupo de Sylow.

Observe que todas essas informações facilitam a compreensão dos Teoremas de Sylow. Mas neste caso, nós já conhecíamos a estrutura do grupo dado, como todos os elementos se relacionam, os subgrupos que ele possui, etc.

Porém, nem sempre teremos tais informações. Neste caso, os Teoremas de Sylow são ferramentas que nos auxiliam a compreender melhor a estrutura do grupo. Por exemplo, considere um grupo G de ordem $56 = 2^3 \cdot 7$. Podemos mostrar que G possui um subgrupo normal de ordem 7 ou um subgrupo normal de ordem 8.

Para isso, vamos calcular n_7. Pelo Terceiro Teorema de Sylow, $n_7 \mid 2^3 = 8$ logo $n_7 = 1,2,4$ ou 8. Mas $n_7 \equiv 1 \mathrm{mod}(7)$, logo concluímos que $n_7 = 1$ ou $n_7 = 8$. No primeiro caso, já temos o desejado, visto que se há apenas um 7-subgrupo de Sylow, ele será normal em G. Agora analisaremos o caso $n_7 = 8$. Assim, teremos 8 subgrupos distintos de ordem 7. Ao retirar o elemento neutro de cada subgrupo, restam $8 \cdot 6 = 48$ elementos de ordem 7, pois 7 é primo, assim tais subgrupos são cíclicos e os elementos são geradores. Como haviam inicialmente 56 elementos neste grupo, restam $56 - 48 = 8$ elementos. Sabemos pelo Primeiro Teorema de Sylow, que existe ao menos um subgrupo de ordem $2^3 = 8$ neste grupo. Como restaram exatamente 8 elementos, concluímos que G possui exatamente um subgrupo de ordem 8, o 2-subgrupo de Sylow, que será normal em G.

Agora, considere este outro exemplo. Seja G um grupo de ordem $380 = 2^2 \cdot 5 \cdot 19$. Através dos Teoremas de Sylow, podemos mostrar que G possui exatamente um subgrupo de ordem 5 e um subgrupo normal de ordem 19. Assim, vamos iniciar calculando n_5. Pelo Terceiro Teorema de Sylow, sabemos que n_5 divide $2^2 \cdot 19 = 76$, logo $n_5 = 1,2,4,19,38$ ou 76. Mas $n_5 \equiv 1(\mathrm{mod}5)$, logo concluímos que $n_5 = 1$ou $n_5 = 76$. Da mesma forma, vamos calcular n_{19} . Pelo Terceiro Teorema de Sylow, sabemos que n_{19} divide $2^2 \cdot 5 = 20$, logo $n_{19} = 1,2,4,5,10$ ou 20. Mas $n^{19} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}19)$, assim $n_{19} = 1$ ou $n_{19} = 20$. Queremos mostrar que $n_5 = 1$ e $n_{19} = 1$.

Pelo Primeiro Teorema de Sylow, a existência de ao menos um subgrupo de cada ordem que divide a ordem do grupo está garantida. Assim, sejam H um subgrupo de G tal que $o(H) = 5$ e K um subgrupo de G tal que (K) = 19. Podemos concluir que ou $n_5 = 1$ ou $n_{19} = 1$ visto que se $n_5 = 76$, o grupo G possuiria $74 \cdot 4 = 304$ elementos de ordem 5, e se $n_{19} = 20$, G possuiria $20 \cdot 18 = 360$ elementos de ordem 19, totalizando $304 + 360 = 664$ elementos em G. Absurdo. Portanto, ou H ou K são normais em G e assim podemos considerar o subgrupo HK. Como H tem ordem 5, ele é cíclico, e da mesma forma, como K tem ordem 19, K também é cíclico. Logo $H \cap K = \{e\}$, e assim $o(HK) = \frac{o(H)\cdot o(K)}{o(H\cap K)} \Rightarrow o(HK) = \frac{5\cdot 19}{1} = 95.$

Agora, aplicaremos o Terceiro Teorema de Sylow no grupo HK. Como $o(HK) = 5 \cdot 19$, sabemos que $n_5 \mid 19$, logo $n_5 = 1$ ou $n_5 = 19$. Mas $n_5 \equiv 1(\mathrm{mod}5)$, logo concluímos que $n_5 = 1$. Da mesma forma, $n_{19} \mid 5$, assim $n_{19} = 1$ ou $n_{19} = 5$. Mas $n_{19} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}19)$ logo concluímos que $n_{19} = 1$. Assim, HK contém apenas um subgrupo de ordem 5, que necessariamente é H, e apenas um subgrupo de ordem 19 que necessariamente é K. Logo H é normal em HK, e assim HK $\subseteq$ $N_G(H)$ Dessa forma o(HK) o(NG(H)) , o que implica pelo Teorema de Lagrange que $(G:N_G(H)) \leq (G:HK)$ Como sabemos que (G: HK) = $\frac{o(G)}{o(HK)} = \frac{380}{95} = 4$ concluímos que $(G: N_G(H)) \leq 4$. Mas pelo Segundo Teorema de Sylow,$(G:N_G(H)) = n_p$, logo $n_5 = (G: N_G(H)) \leq 4$. Como inicialmente havíamos obtido que $n_5 = 1$ ou $n_5 = 76$, concluímos que $n_5 = 1$ Da mesma forma, como K é normal em HK, sabemos que NK $\subseteq$ $N_G(K)$, logo $o(HK) \leq o(N_G(K))$ e assim $(G: N_G(K)) \leq (G:HK)$. Mas, como n_{19} = (G:NG(K)), concluímos que n_19≤4, logo como havíamos obtido que $n_{19} = 1$, ou $n_{19} = 20$, concluímos que n_{19} só pode ser 1. Assim G possui exatamente um subgrupo normal de ordem 5 e um subgrupo normal de ordem 19.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após realizar os estudos acima, bem como construir a tábua e verificar que de fato o grupo A_4 não possui subgrupo de ordem 6, mas possui subgrupos próprios de ordem 2,3 e 4, podemos perceber as aplicações dos Teoremas de Sylow, visto que eles garantem a existência de determinados subgrupos (os p-subgrupos). Assim, podemos concluir que os Teoremas de Sylow são muito importantes para a Teoria de Grupos Finitos, pois além de garantir a existência de tais subgrupos, podem, a partir desses subgrupos, determinar outras características importantes sobre o grupo, como normalidade, ordem dos elementos, quantidade de subgrupos, entre outras.

REFERÊNCIAS

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

GARCIA, A.; IEQUAIN, Y. **Elementos de álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

CAPÍTULO 7

A RELEVÂNCIA MATEMÁTICA DOS NÚMEROS IMAGINÁRIOS E COMPLEXOS

Data de aceite: 23/03/2020

Data de submissão: 02/01/2020.

Bruno Luiz Silva Rodrighero
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia (IFRO)
Ji-Paraná, RO
http://lattes.cnpq.br/9454531890361792

Daiane Ferreira da Silva Rodrighero
Universidade Federal de Rondônia (UNIR)
Ji-Paraná, RO
http://lattes.cnpq.br/1013373319584013

RESUMO: Este trabalho visa esclarecer a relevância matemática dos números imaginários e complexos. Por meio de uma análise dos conjuntos de uma forma geral e pela história de seu desenvolvimento, são analisadas as dificuldades históricas encontradas para o estabelecimento definitivo de alguns desses conjuntos, assim como do número zero. Posteriormente, chega-se por consequência ao conjunto dos números complexos que surgem do estudo das raízes de funções polinomiais em que a raiz quadrada de números negativos são as únicas soluções possíveis. Tais números são explicados buscando mostrar sua existência e realidade, a despeito de sua pecha de irreais e irrelevantes. Finalmente, são analisadas algumas das propriedades dos números complexos, sua aplicação no plano complexo e também sua representação gráfica para uma função quadrática sem raízes reais, desenhada com suas raízes complexas.

PALAVRAS-CHAVE: Conjuntos numéricos; Números Complexos; Plano Complexo; Funções Polinomiais.

THE MATHEMATICAL RELEVANCE OF IMAGINARY AND COMPLEX NUMBERS

ABSTRACT: This paper aims to clarify the mathematical relevance of imaginary and complex numbers. Through an analysis of the numerical sets in general and the history of their development, analyzing the historical difficulties found for the definitive establishment of some of these sets, as well as the number zero. Subsequently, the study of the set of complex numbers that arise from the study of the roots of polynomial functions in which the square root of negative numbers is the only possible solution. Such numbers are explained in an attempt to show their existence and reality, despite their unreal and irrelevant streak. Finally, some of the properties of complex numbers, their application in the complex plane, and their graphical

representation for a quadratic function without real roots, designed with their complex roots, are analyzed.
KEYWORDS: Numerical sets; Complex numbers; Complex plane; Polynomial functions.

1 I INTRODUÇÃO

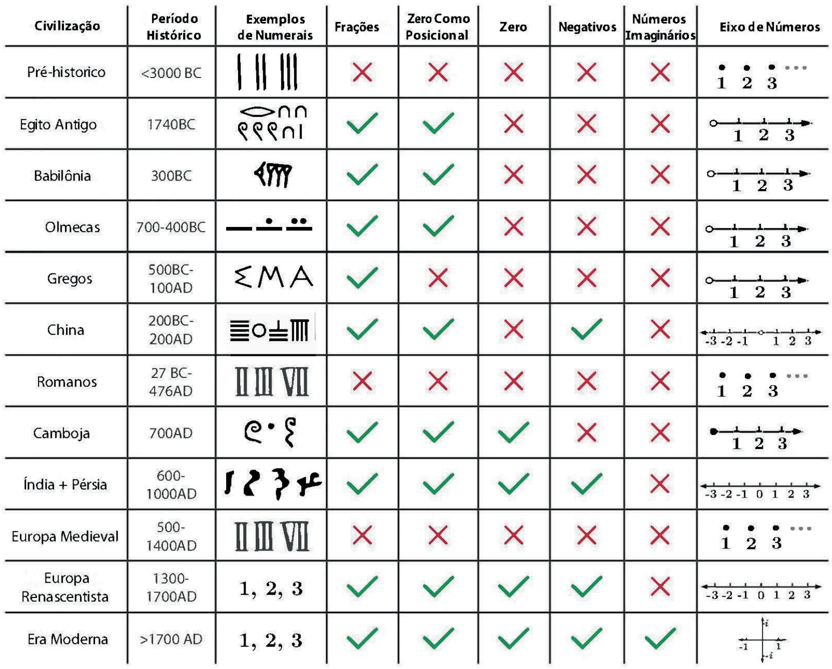
Tendo em vista a melhor compreensão dos conjuntos numéricos, especialmente dos conjuntos dos números imaginários e complexos, é preciso retroceder e esclarecer os conceitos relativos aos conjuntos existentes mais conhecidos, oferecendo um histórico de seu desenvolvimento e de sua importância na álgebra. Pelo exame das propriedades de tais conjuntos, dos números inteiros, racionais, irracionais, reais etc., e de suas relações algébricas é possível um melhor entendimento do surgimento e da importância do conjunto dos números imaginários e complexos. Mesmo com seu surgimento histórico relacionado ao estudo das funções polinomiais que exigem raízes não existentes no conjunto dos números reais, i.e., a raiz quadrada de números negativos, tais números foram por muito tempo desprezados por não terem uma nomenclatura apropriada e uma exemplificação mais clara. Assim, a clássica representação do conjunto dos números não-complexos por meio de uma linha, em duas dimensões, é suficiente para a compreensão de tais números, porém não para os imaginários e complexos. Tal limitação gráfica é eliminada pelo estabelecimento do plano complexo que permite também a representação gráfica das funções polinomiais e de suas raízes de forma completa. Portanto, partindo desta ampliação necessária para a representações dos conjuntos numéricos por meio do plano complexo que completa a representação gráfica das funções polinomiais, será possível afastar a pecha, infundada, de que os números complexos e imaginários não existem, ou mesmo, que não têm importância ou relevância no estudo da Matemática.

2 I OS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Para assimilar o estudo dos números imaginários e complexos, convém recuar e analisar os conceitos básicos de conjunto numérico, o surgimento histórico dos principais conjuntos e seu desenvolvimento, para então tratar dos imaginários e complexos.

Os conjuntos numéricos são grupos de números com características comuns. Cada grupo tem características específicas, porém há grupos numéricos que contém outros grupos. Cada grupo numérico têm sua história particular, cf. Figura 1.

O mais conhecido e antigo conjunto numérico representa os números naturais não nulos, que surgiu em tempo imemorial da necessidade de contagem dos povos primitivos. Já o aparecimento do zero como número em si levou muitos séculos para se desenvolver por não ter um conceito tangível. O fato de ele não fazer muito sentido lógico, quanto a operações de contagem simples, atrasou seu surgimento. Já o zero como notação posicional, por outro lado, surgiu possivelmente no XVIII século a.C., com a civilização Egípcia. Entretanto, o zero como número em si surgiu possivelmente entre os anos 600 e 700 d.C., por meio das civilizações na Índia, Pérsia e Camboja (KAPLAN, 2008).



Civilização	Período Histórico	Exemplos de Numerais	Frações	Zero Como Posicional	Zero	Negativos	Números Imaginários	Eixo de Números
Pré-historico	<3000 BC		✗	✗	✗	✗	✗	1 2 3 ...
Egito Antigo	1740BC		✓	✓	✗	✗	✗	1 2 3
Babilônia	300BC		✓	✓	✗	✗	✗	1 2 3
Olmecas	700-400BC		✓	✓	✗	✗	✗	1 2 3
Gregos	500BC-100AD	ΣΜΑ	✓	✗	✗	✗	✗	1 2 3
China	200BC-200AD		✓	✓	✗	✓	✗	-3 -2 -1 1 2 3
Romanos	27 BC-476AD	II III VII	✗	✗	✗	✗	✗	1 2 3 ...
Camboja	700AD		✓	✓	✓	✗	✗	1 2 3
Índia + Pérsia	600-1000AD		✓	✓	✓	✓	✗	-3 -2 -1 0 1 2 3
Europa Medieval	500-1400AD	II III VII	✗	✗	✗	✗	✗	1 2 3 ...
Europa Renascentista	1300-1700AD	1, 2, 3	✓	✓	✓	✓	✗	-3 -2 -1 0 1 2 3
Era Moderna	>1700 AD	1, 2, 3	✓	✓	✓	✓	✓	

Figura 1: Classificação das civilizações antigas até a era moderna quanto aos tipos numéricos existentes e sua possível data de surgimento

Fonte: Adaptado de apud Welch (2016).

O conjunto dos números inteiros, excluindo o zero, inclui o conjunto dos números naturais. Ele surgiu posteriormente, encontrando resistência pela introdução do conceito de números negativos. Ao contar produtos, como laranjas, podemos ter o seguinte exemplo representado na Figura 2:

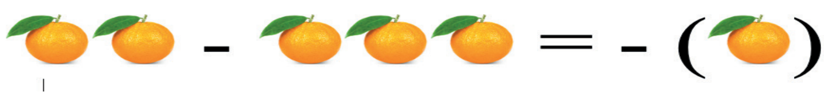


Figura 2: Exemplo de operação que produz o conceito de número inteiro negativo

Fonte: dos autores.

Subtraindo três laranjas de um grupo de duas levaria ao “absurdo” lógico de “uma laranja negativa”. Tais conclusões ambíguas geravam confusão e fizeram com que os números negativos fossem postos à margem por um longo período.

Assim como demonstrado na figura 1, possivelmente a primeira civilização a utilizar números negativos foi a Chinesa, entre os anos 200 a.C a 200 d.C.

Os números racionais, por sua vez, são mais antigos que o conjuntos dos números inteiros negativos. Aquele conjunto também inclui os números inteiros e naturais. Os racionais são os números que se formam pela razão ou fração de dois inteiros, tal que o denominador seja diferente de zero. A divisão de quantidades, i.e., as frações, foram de grande necessidade para o desenvolvimento civilizacional. Os Egípcios, por exemplo, necessitavam dividir quantidade de grãos, pães e cerveja, que foram usados como o único meio de pagamento por séculos para este povo. Assim também a construção civíl não seria possível sem o uso de proporções em suas medidas e cálculos.

Os números irracionais, por outro lado, são números que não podem ser expressos por frações, tais como Sendo assim, por característica própria, este conjuntos está separado do conjunto dos números racionais. O surgimento histórico deste conjunto remete a Hipaso de Metaponto, um seguidor de Pitágoras, no século V a.C.

Quanto aos números reais, este contém os números racionais e irracionais, os inteiros incluindo o zero e os naturais. Assim, este conjunto contém todos os conjuntos anteriores já descritos. Assim, os conjuntos numéricos podem ser representados graficamente por uma linha horizontal ou vertical, infinita de ambos os lados, em que todos os números anteriormente tratados podem ser localizados individualmente, não existindo *espaços vazios*, cf. Figura 3.

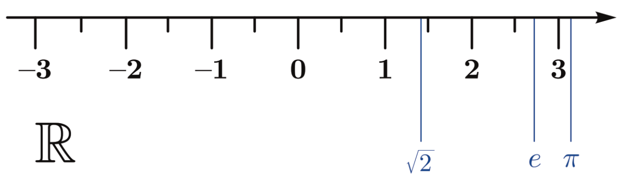


Figura 3: Linha que pode representar o conjunto dos números Reais

Fonte: Disponível em: <http://www.ams.org/tex/type1-fonts.html> . Acessado em 29 de setembro de 2019.

Assim, observando também a figura 4, abaixo, os conjuntos numéricos são agrupamentos que mantêm uma série de propriedades estruturais para cada conjunto.

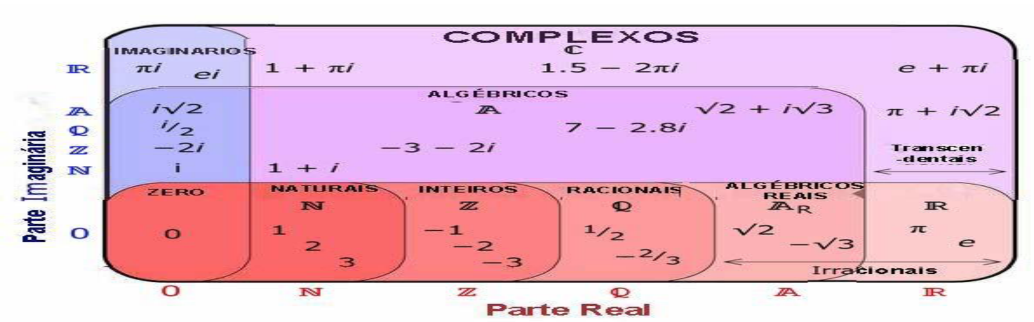


Figura 4: Conjuntos numéricos excluindo os números imaginários e complexos

Fonte: Adaptado de <https://www.quora.com/How-are-imaginary-numbers-useful>. Acessado em 29 de setembro de 2019.

Logo uma questão que pode ser levantada: tais conjuntos numéricos representam todos os números existentes? Existe algum vazio a ser preenchido?

3 I OS NÚMEROS IMAGINÁRIOS E COMPLEXOS

Os números imaginários são todos que formam raízes quadradas de números negativos. Os complexos são aqueles que contém uma parte real e outra imaginária. Os números imaginários têm forma geral: αi, e os números complexos: $\alpha + bi$, em que $i = \sqrt{-1}$ e $\alpha, b \in R$.

Tal como os números inteiros e o zero foram desprezados por longo tempo por ser considerada absurda e inútil a existência de quantidades negativas ou de um número que representa nada, os números imaginários e complexos foram, e por vezes são, considerados aberrações irreais, meros truques da matemática pura, o que não é verdadeiro. A própria nomenclatura de tais conjuntos contribui para tais conclusões incorretas. Como escreveu o grande matemático Carl Friedrich Gauss, (1777-1855):

> O fato de esse assunto [números imaginários] ter sido até agora cercado por misteriosa obscuridade deve ser atribuído em grande parte a uma notação mal adaptada. Se, por exemplo, +1, -1 e a raiz quadrada de -1 tivessem sido denominadas unidades diretas, inversas e laterais, em vez de positivas, negativas e imaginárias (ou mesmo impossíveis), essa obscuridade estaria fora de questão (KASTNER, 2015, p. 43, tradução nossa).[1]

O nome dado ao conjunto dos números imaginários e complexos, portanto, pode ser considerado inadequado. Eles foram originalmente cunhados no século XVII por René Descartes, (1596-1650), em sua obra *La Géométrie,* (DESCARTES, 1637), como termos depreciativos, por serem estes números considerados fictícios ou impossíveis. Leonhard Euler, (1707-1783), foi o criador do símbolo *i* para

1. That this subject [imaginary numbers] has hitherto been surrounded by mysterious obscurity, is to be attributed largely to an ill adapted notation. If, for example, +1, -1, and the square root of -1 had been called direct, inverse and lateral units, instead of positive, negative and imaginary (or even impossible), such an obscurity would have been out of the question (KASTNER, 2015, p. 43).

representar √-1, (GIAQUINTA; MODICA, 2004). Não obstante, foram Gerolamo Cardano (1501-1576) e Rafael Bombelli (1526-1572) os grandes precursores do estudo dos números imaginários e complexos por meio da análise das raízes de funções polinomiais, (BOMBELLI, 1629). Ainda assim, o uso de números imaginários só começou a ser amplamente aceita com a publicação do trabalho de Leonhard Euler e Carl Friedrich Gauss e a descrição dos números complexos como pontos em um plano com a publicação de Caspar Wessel (1745-1818).

Agora analisando e respondendo a questão levantada no ponto anterior, pela perspectiva de que a linha que representou os números reais, na Figura 3, inclui infinitos números, tanto negativos como positivos, inicialmente existe a tentação de responder que todos os números existentes estão, sim, representados ali. Porém, com o surgimento de funções polinomiais que necessariamente não possuíam raízes representáveis pelo conjunto dos números reais, juntamente com o Teorema Fundamental da Álgebra[2], que estabelece que todo polinômio de grau *n* diferente de zero, de variável única, tem exatamente *n* número de raízes, verificou-se que os números reais estavam de fato incompletos e que o *infinito* é um conceito matemático muito mais amplo. Por conseguinte, a raiz quadrada de números negativos, base para os números imaginários e complexos, ainda que intuitivamente contraditória, efetivamente representa números verdadeiros, porém, que não se enquadravam aos limites conceituais matemáticos nos primórdios de seu surgimento.

4 I AS RAÍZES DE FUNÇÕES POLINOMIAIS E OS NÚMEROS COMPLEXOS

Será proveitoso para a compreensão plena dos números imaginários e complexos uma breve análise das funções polinomiais que propiciaram o surgimento de tais números. Uma das propriedades mais importantes do estudo das funções são as suas raízes, ou seja, os pontos em que a função toca o eixo das abscissas. Para encontrá-las existem fórmulas matemática bem divulgadas, dependendo do grau da função. Por exemplo, para a função quadrática, $\alpha x^2 + bx + c = 0$, com teremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, tal\ que\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}\ ou\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

2. Euler, Leonhard (1751), “Recherches sur les racines imaginaires des équations”, Histoire de l’Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin, Berlin, 5, pp. 222–288. & GAUSS, Carl Friedrich (1799), Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, Helmstedt: C. G. Fleckeisen (tr. New proof of the theorem that every integral rational algebraic function of one variable can be resolved into real factors of the first or second degree).

E para as funções de terceiro grau, $x_3 + a_1 x_2 + a_2 x + a_3$, teremos a seguinte fórmula inicialmente desenvolvida por Carnado:

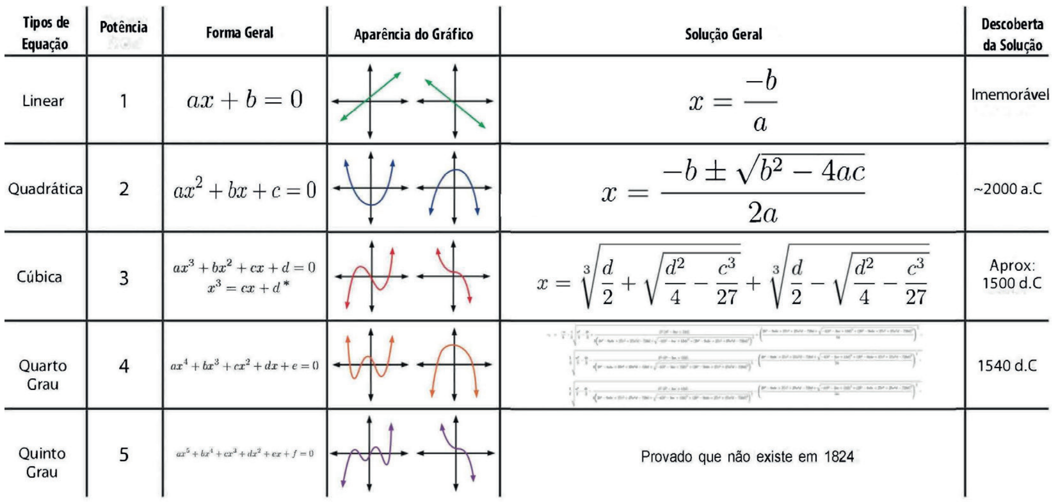
$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}, \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54},$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \quad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$\begin{cases} x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}\,(S-T) \\ x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}\,(S-T) \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a_1, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a_2, \quad x_1x_2x_3 = -a_3$$

Quanto às funções de segundo grau, por serem parábolas, é possível que nunca toquem o eixo das abscissas, não tendo raízes reais. No entanto, as de terceiro grau sempre terão pelo menos uma raiz real, pelo comportamento de seu gráfico, cf. Figura 5. Com isso, Bombelli utilizou da característica destas funções para, utilizando números imaginários e o método de Cardano, conseguir o correto resultado para a única raiz real da função $x^3 = 15x + 4$, $x_1 = 4$, , demonstrando a utilidade e importância dos números imaginários.



Tipos de Equação	Potência	Forma Geral	Aparência do Gráfico	Solução Geral	Descoberta da Solução
Linear	1	$ax + b = 0$		$x = \frac{-b}{a}$	Imemorável
Quadrática	2	$ax^2 + bx + c = 0$		$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	~2000 a.C
Cúbica	3	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $x^3 = cx + d$*		$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}}$	Aprox: 1500 d.C
Quarto Grau	4	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$		[illegible]	1540 d.C
Quinto Grau	5	$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$		Provado que não existe em 1824	

Figura 5: As soluções gerais das equações polinomiais, com os dados de suas formas gerais, a aparência de seus gráficos, assim como a possível data de sua descoberta.

Fonte: Adaptado de apud Welch (2016).

Nos remetendo novamente ao Teorema Fundamental da Álgebra, ao contrário do que é frequentemente ensinado no Ensino Médio, toda função quadrática tem necessariamente duas raízes, toda função cúbica tem três raízes, etc., sem exceção.

Pelo pouco foco dado ao conteúdo relativo a números imaginários e complexos no Ensino Médio, funções estudadas que contenham raízes com números imaginários ou complexos são tratadas, de imediato, como raízes inexistentes, levando, portanto, a uma contradição. Os alunos, pela definição dada de *raíz de um função*, são levados a se perguntar: Como funções, como por exemplo,$x^2 + 0x + 1$, que nunca interceptam o eixo *x*, podem ter duas raízes? Tal pergunta demonstra que a negligência do estudo dos números complexos e imaginários cria uma lacuna na compreensão das funções polinomiais, assim como suas potenciais aplicações. Sem o conjunto dos números complexos é impossível, de fato, representar ou determinar as soluções para todas as funções polinomiais, criando uma grande vaziez no estudo das funções.

5 I O PLANO COMPLEXO

A solução para a representação de todas as raízes das funções deve-se a criação do plano complexo, que representa os números complexos graficamente, lateralmente à linha dos números reais. Esta nova ferramenta matemática, o plano complexo, tornou possível o estudo completo das funções polinomiais. Como foi citado na página 4 deste trabalho, (KASTNER, 2015), C. F. Gauss relata a incoerência criada pela nomenclatura dos conjuntos imaginários e complexos. Um melhor nome para eles, como proposto por Gauss, seriam: Conjunto dos números laterais, exatamente por causa do Plano Complexo, também conhecido como Plano de Argand-Gauss ou Diagrama de Argand. Este plano possibilita a representação gráfica dos números complexos, estando estes números localizados ao lado da linha dos números reais, cf. Figura 6.

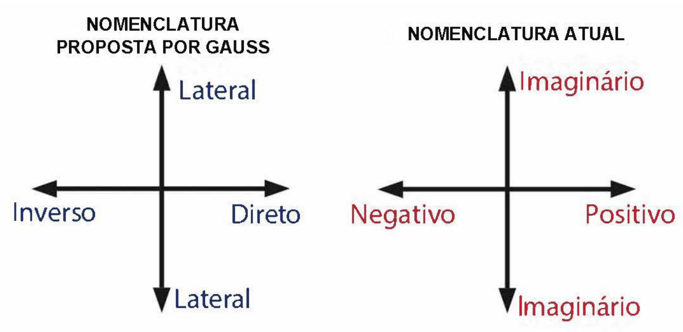


Figura 6: Plano de Argand-Gauss ou Diagrama de Argand comparado com o atual

Fonte: dos autores.

Deste modo, os conjuntos numéricos ganham uma nova dimensão, completando os conjuntos numéricos e abrindo novas portas para o estudo da álgebra. Neste plano os números imaginários estão localizados exatamente na linha vertical, ou eixo *y*, chamado imaginário, e os números complexos são a relação entre o eixo *x, real,* & *y, imaginário.* Na Figura 7 temos um exemplo de número complexo, com parte real e imaginária.

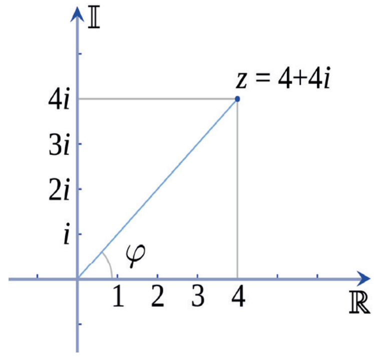


Figura 7: Ilustração de número complexo no plano complexo.

Fonte: Disponível em: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5d/Imaginarynumber2.PNG>. Acessado em 29 de setembro de 2019.

Já que uma segunda dimensão dos números é demonstrada pelo plano complexo, e toda uma infinitude de novos números surgem dessa nova dimensão, números imaginários e complexos, talvez uma terceira dimensão possa ser imaginada como possível. Existiria algum número que não poderia ser representado nem pela linha dos números reais nem pelo plano complexo? O pensamento lógico para tais novos números seria, aparentemente, a raiz quadrada de um número imaginário negativo, $x = \sqrt{-1}$. Entretanto, avaliando-a com o plano complexo, e com coordenadas polares, chegamos a $\sqrt{-1} = X = 1 < -45°$ ou $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Portanto, $\sqrt{-i}$ pode ser encontrada no plano complexo em $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, cf. Figura 8.

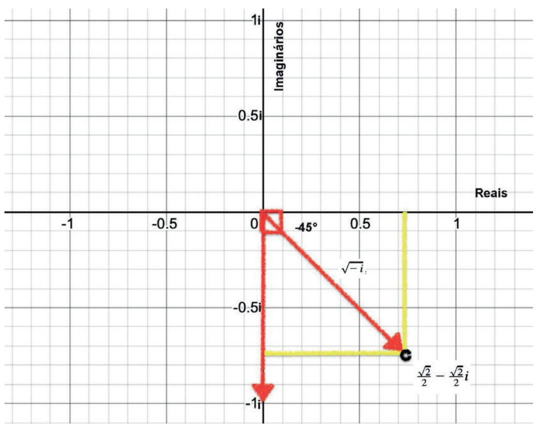


Figura 8: Demonstra a existência do número complexo √-i no plano complexo, tendo por solução $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Fonte: dos autores.

Ou seja, outras dimensões de números podem ser representados facilmente com o uso de planos complexos. Ele permite que se visualize graficamente, como foi dito no ponto anterior, as raízes das funções polinomiais quando estas são imaginárias ou complexas. No entanto, para tal, é necessária a utilização de quatro dimensões pela mescla do plano z(x,y) com o plano w(u,v). Ou seja, para , temos:

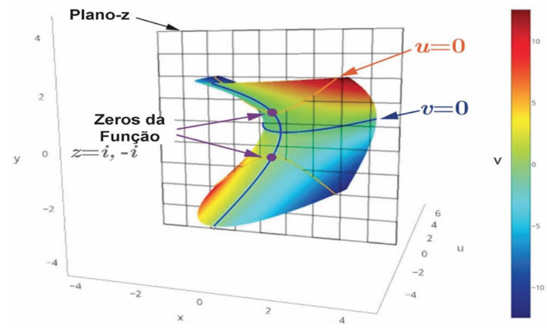


Figura 9: Gráfico da função com suas raízes imaginárias representadas graficamente.

Fonte: Adaptado de apud Welch (2016).

Com a ajuda da computação para o desenho de gráficos, a realidade do comportamento das funções polinomiais, como no exemplo da Figura 9, de uma função quadrática, é levado a um nível de profundidade muito maior, abrangendo até mesmo outras dimensões do comportamento destas funções.

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pela compreensão do conjuntos numéricos existentes, juntamente com o teorema fundamental da álgebra e sua aplicação nas funções polinomiais com o plano complexo, percebe-se que a nomenclatura dada aos conjuntos dos números complexos e imaginários levam a uma percepção incorreta da realidade de tais números e de sua importância para a matemática como um todo. Assim como os números negativos, o número zero e os números irracionais tiveram resistência para serem aceitos, causando atrasos ao desenvolvimento da Matemática, nos dias atuais também, os números imaginários e complexos ainda têm uma aura de números impossíveis ou irreais, limitando os horizontes da compreensão algébrica e reduzindo drasticamente a representação gráfica de diversas funções polinomiais existentes.

REFERÊNCIAS

BOMBELLI, Rafael. L'Algebra Opera. Giouanni Rofsi, Bologna: 1629.

DESCARTES, René. **Discours de la méthode plus La Dioptrique, Les Météores et la Géométrie**. Jan Maire, 1637, p. 296-413. Disponível em: <https://fr.wikisource.org/wiki/La_G%C3%A9om%C3%A9trie_(%C3%A9d._1637)> Acesso em 29 de setembro de 2019.

EULER, Leonard. On transcending quantities arising from the circle of Introduction to the Analysis of the Infinite, 1748, p. 214.

GAUSS, C. F. New Proof of the Theorem That Every Algebraic Rational Integral Function In One Variable can be Resolved into Real Factors of the First or the Second Degree. 1799.

GAUSS, C. F. **Theoria Residuorum Biquadraticorum. Commentatio Segunda**. pp. 93–148, 1799.

GIAQUINTA, Mariano; MODICA, Giuseppe. Mathematical Analysis: Approximation and Discrete Processes (illustrated ed.). Springer Science & Business Media. 2004, 121 p. ISBN 978-0-8176-4337-9.

CARRERA, Josep. **The fundamental theorem of algebra before Carl Friedrich Gauss**. 1992. Disponível em: <http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/PUBLICACIONSMATEMATIQUES_1992_36_2B_10.pdf>. Acessado em: Acesso em 29 de setembro de 2019.

KASTNER, Ruth E. Understanding Our Unseen Reality: Solving Quantum Riddles. Imperial College Press: 2015. p. 43.

KAPLAN, R. **O nada que existe:** Uma história natural do zero. 1 ed. Rio de Janeiro. Editora Rocco, 2001, 208 p.

LITTLEWOOD, J. E. **Mathematical Notes (14): Every polynomial has a root**. J. London Math. Soc. 16, 1941, pp. 95–98. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1112/jlms/s1-16.2.95> Acesso em 29 de setembro de 2019.

WESSEL, Caspar. **On the analytic representation of direction, an effort applied in particular to the determination of plane and spherical polygons.** Copenhagen: Royal Danish Academy of Sciences and Letters, 1799, pp. 469–518.

WELCH, Stephen. **Imagine numbers are real.** Workbook. 2016. 96 p. Disponível em: <https://static1.squarespace.com/static/54b90461e4b0ad6fb5e05581/t/5a6e7bd341920260ccd693cf/1517190204747/imaginary_numbers_are_real_rev2_for_screen.pdf>. Acesso em 29 de setembro de 2019.

CAPÍTULO 8

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA AO CRESCIMENTO POPULACIONAL DA CIDADE DE TUPÃSSI/PR

Data de aceite: 23/03/2020

Data de submissão: 02/01/2020

Vitória Fenilli Vidaletti
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Toledo - Paraná
http://lattes.cnpq.br/7257268287275091

Jahina Fagundes de Assis Hattori
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Toledo - Paraná
http://lattes.cnpq.br/3879634832607156

Thays Menegotto de Freitas
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Toledo - Paraná
http://lattes.cnpq.br/2016803922322022

RESUMO: Neste trabalho será realizado um estudo sobre o crescimento populacional da cidade de Tupãssi/PR ao longo do tempo, por meio da Modelagem Matemática. Serão utilizados o Modelo de Malthus e o Modelo de Verhulst, já existentes na literatura. O trabalho se iniciou com o estudo dos modelos que serão usados, e posteriormente a coleta de dados no site oficial do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Em seguida foram realizadas as simulações computacionais e uma comparação com os dados empíricos. Para a validação dos resultados utilizou-se do erro relativo e por meio dele pode-se concluir que o modelo que mais se adequa ao crescimento em questão é o modelo de Verhulst.

PALAVRAS-CHAVE: Modelos Matemáticos; Crescimento Populacional; Malthus; Verhulst.

MATHEMATICAL MODELING APPLIED TO THE POPULATION GROWTH OF TUPÃSSI/PR CITY

ABSTRACT: This work will be carried out a study on the population growth of the city of Tupãssi/PR over time, by means of mathematical modeling. Will be used the model of Malthus and the model of the Verhulst, already existing in the literature. The work began with the study of models that will be used, and subsequently the data collection on the official website of the Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE). Then the computational simulations were performed and a comparison with the empirical data. For the validation of the results used the relative error and through him we can conclude that the model that best fits the growth in question is the model of the Verhulst.

KEYWORDS: Mathematical Models; Population Growth; Malthus; Verhulst.

1 I INTRODUÇÃO

A qualidade de vida tem sido uma preocupação constante nas sociedades mais contemporâneas, e um dos fatores preponderantes é o crescimento populacional. De acordo com Oliveira (2014), a compreensão dos fenômenos naturais e as leis que o delimitam tem sido causas persistentes na sociedade, buscando favorecer a qualidade de vida do ser humano em seu meio social. Por isso, é de grande importância averiguar alternativas, as quais retratam melhorias no desenvolvimento populacional e social. Visto que a população é um elemento político essencial que caracteriza uma comunidade e que, consequentemente, tornam-se necessários compreender a fim de tornar possível o planejamento econômico, social, cultural ou político.

Uma das alternativas para a previsão de situações que podem fazer parte do nosso cotidiano é a Modelagem Matemática. Segundo Bassanezi (2002), "A Modelagem Matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Isto é, a Matemática e a realidade são conjuntos disjuntos que podem ser levadas à interação por meio da Modelagem. Assim, utiliza-se a modelagem como suporte para aplicações das definições, teoremas e propriedades, resultando em modelos matemáticos que contribuem para a estimativa de vários aspectos de nosso cotidiano e mais especificamente para esse trabalho o de crescimento populacional. Para tanto, serão empregados esses modelos matemáticos de Malthus e de Vehuslt para estimar o crescimento populacional da cidade de Tupãssi.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Modelo de Malthus

De acordo com Henriques (2007), Thomas Robert Malthus, responsável pela criação do modelo malthusiano, nasceu dia 14 de Fevereiro de 1766 em Rookery, falecendo dia 23 de Dezembro de 1834 em Bath. O crescimento da população, os meios de subsistência e as causas da pobreza em plena Revolução Industrial são os problemas centrais analisados por ele. Ao criar este modelo, em 1798, Malthus tinha em mente a preocupação com a alta taxa de natalidade que estava acontecendo, provocando assim um aumento significativo da população, o que consequentemente provocaria fome e miséria. Umas das soluções que ele propõe para esse problema é a redução da taxa de natalidade por parte dos governantes de cada país. Considerando essas informações, o modelo de Malthus assume que a taxa de variação da população é diretamente proporcional ao tamanho da população em um determinado instante de tempo. Para Malthus o modelo poderia ser utilizado pelos governadores para ter uma ideia do comportamento da população por um período de até 20 anos.

Vale ressaltar que, segundo Sodré (2007), o modelo de Malthus não é apropriado para descrever populações humanas, mas este tipo de modelo é utilizado em muitas outras situações, por ser um modelo do tipo exponencial.

Porém, segundo Pugens et al. (2012), este modelo é suficientemente simples e válido, se o crescimento da população está sujeito apenas às taxas de natalidade e mortalidade, sem que sejam consideradas no modelo as taxa de migração. Pensando nisto o modelo não considera os fatores inibidores, como por exemplo, uma determinada bactéria que causa a morte de parte da população.

Para o uso dessa modelagem devem-se considerar alguns aspectos, como por exemplo,

- Não existem fatores inibidores;
- A quantidade de indivíduos reprodutores sempre se mantém constante durante o crescimento da população;
- A taxa de natalidade e de mortalidade é sempre constante.

Considerando os aspectos apresentados, seja P(t) a quantidade de indivíduos no instante t, $n > 0$ o coeficiente de natalidade, e $m > 0$ o coeficiente de mortalidade. O modelo pressupõe que as taxas de natalidade de mortalidade são proporcionais à população em determinado instante e é descrito pela equação de diferenças,

$$P(t+1) - P(t) = nP(t), \tag{1}$$

no caso de um crescimento, e pela equação,

$$P(t+1) - P(t) = -mP(t), \tag{2}$$

no caso de um decrescimento. Unificando as equações (1) e (2),

$$P(t+1) - P(t) = (n-m)P(t), \tag{3}$$

De acordo com o que foi descrito, tem-se que a taxa α de crescimento da população P (t) é sempre constante, e é obtida por meio da diferença entre a taxa de natalidade n e a taxa de mortalidade m, isto é,

$$\alpha = n - m$$

Tem-se,

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t) \tag{4}$$

Resolvendo o modelo,

$$P(t+1) = \alpha P(t) + P(t) \tag{5}$$

assim,

$$P(t+1) = P(t)(\alpha+1) \tag{6}$$

com condição inicial P(0) = P_0.

Por indução tem-se,

$$\begin{cases} P(1) = (1+\alpha)P(0); \\ P(2) = (1+\alpha)P(1) = (1+\alpha)(1+\alpha)P(0) = (1+\alpha)^2P(0); \\ \vdots \\ P(t) = (1+\alpha)P(t-1) = \cdots = (1+\alpha)^tP(0) \end{cases} \tag{7}$$

Usando a condição inicial,

$$P_{0+1} = P_0(\alpha+1) \Longrightarrow P_1 = P_0(\alpha+1) \tag{8}$$

generalizando,

$$P_t = P_0(\alpha+1)^t \tag{9}$$

ou ainda,

$$P(t) = P_0e^{\ln(\alpha+1)t} \tag{10}$$

Portanto, conhecendo a população em t = 0 e o valor de t no instante desejado, isto é P(0) = P_0 e P(t) = P_t é possível calcular a taxa demográfica no instante, fazendo,

$$\frac{P_t}{P_0} = (\alpha+1)^t \Longrightarrow \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} = \alpha+1 \Longrightarrow \alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \tag{11}$$

Modelo de Verhulst

De acordo com Tavoni (2013), Pierre François Verhulst foi um matemático belga que em 1838 introduziu a equação de crescimento logístico onde a população deverá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar num determinado valor. O modelo de Verhulst é, essencialmente, o modelo de Malthus modificado, considerando que a variação de crescimento depende da própria população em cada instante e satisfaz algumas propriedades.

Segundo Sodré (2007), a adequação ao modelo de Verhulst já foi comprovada para muitas espécies, em experiências de laboratório e também em modelos populacionais estáveis.

$$\frac{dP}{dt} = \beta(P)P \tag{12}$$

podendo ser reescrito como,

$$\beta = r\left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty}\right) \qquad (13)$$

sendo, r = n - m , com r > 0, n taxa de natalidade, m taxa de mortalidade e P_{oo} o valor de limite da população, isto é, o valor que P estabiliza.

Os valores de n e m devem ser obtidos realizando uma média das taxas de natalidade e mortalidade dos anos anteriores. O valor de P_{oo}, pode ser determinado através da comparação entre a linearização do Modelo de Verhust e o ajuste linear dos dados reais pelo método dos mínimos quadrados. Observa-se que o β(P) tende a zero quando o P tende a P_{oo} . Substituindo (13) em (12) e considerando que P(0) = P_0, tem-se,

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP\left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty}\right) \Longrightarrow rP\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) = \frac{dP}{dt} \\ P(0) = P_0, \quad r > 0 \end{cases} \qquad (14)$$

Deve-se observar que e, são ambas soluções para a equação diferencial obtida anteriormente. Agora, para encontrar as outras soluções, considerando e tem-se,

$$\frac{dP}{P(1-\frac{P}{P_\infty})} = rdt \qquad (15)$$

integrando ambos os membros da equação (15) obtém-se (16),

$$\int \frac{dP}{P(1-\frac{P}{P_\infty})} = \int rdt \qquad (16)$$

utilizando o método de frações parciais se adquire,

$$\int \frac{dP}{P(1-\frac{P}{P_\infty})} = ln\left|\frac{P}{1-\frac{P}{P_\infty}}\right| \qquad (17)$$

e

$$\int rdt = rt + c \qquad (18)$$

portanto, a equação integral (16) fica na forma,

$$ln\left|\frac{P(t)}{1-\frac{P(t)}{P_\infty}}\right| = rt + c \qquad (19)$$

usando a condição inicial ,P(0) = P_0

$$ln\left|\frac{P(0)}{1-\frac{P(0)}{P_\infty}}\right| = r.0 + c \qquad (20)$$

$$c = ln\left|\frac{P_0}{1-\frac{P_0}{P_\infty}}\right| = ln\left|\frac{P_0}{\frac{P_\infty - P_0}{P_\infty}}\right| = ln\left|\frac{P_0 P_\infty}{P_\infty - P_0}\right| \qquad (21)$$

logo,

$$ln\left|\frac{\frac{P(t)P_\infty}{P_\infty - P(t)}}{\frac{P_0P_\infty}{P_\infty - P_0}}\right| = rt \qquad (22)$$

aplicando as propriedades de logarítmo e isolando P(t) obtém-se,

$$P(t) = \frac{P_0P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \qquad (23)$$

considerando , pode-se isolar o valor de ,

$$r = \frac{-1}{t}.\left[\ln\left(P_0\left(\frac{P_\infty}{P_t} - 1\right)\right) - \ln(P_\infty - P_0)\right] \qquad (24)$$

3 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

Crescimento Populacional

De acordo com IBGE (2017), na época da colonização, que ocorreu no século XVI, a região de Tupãssi era povoada por índios guaranis e possuía uma intensa extração de erva mate.

Em 30 de Janeiro de 1967 a pequena cidade do Oeste do Paraná se tornou um dos distritos do município de Assis Chateaubriand. Seu plebiscito ocorreu em 25 de Novembro de 1979 pela lei nº 7270 de 27 de Dezembro de 1979. Porém, foi apenas em 01 de Fevereiro de 1983 que a cidade se tornou município.

Tendo em vista a rápida criação do município sua população teve uma variação considerável. Diante do fato de ter sido parte do município de Assis Chateaubriand, a população inicial que era de 8829, por ação de diversos fatores, sejam eles, ambientais, habituais, naturais, financeiros e territoriais, foi decrescendo até o ano de 2007.

Visto que os modelos visam a estimativa do crescimento, serão utilizados os dados a partir do ano de 2007, tendo em vista que o crescimento da população começou neste ano.

Na Tabela 1 estão os dados da população referente aos respectivos anos de pesquisa do IBGE. Serão utilizados os dados coletados para exemplificar dois modelos estudados, sendo eles, o de Malthus e o de Verhulst.

Ano	População
2007	7755
2010	7997
2018	8128

Tabela 1: Senso da População de Tupãssi/PR

Fonte: IBGE

Modelo de Malthus

Vale ressaltar que para Tavoni (2013), o modelo de Malthus não considera a taxa de migração. Pensando nisto o modelo não considera os fatores inibidores, como por exemplo, uma determinada bactéria que pode causar a morte de parte da população. Para aplicar o modelo de Malthus precisa-se encontrar o α ou seja,

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1 \tag{25}$$

Escolhemos P_t = 7997 e P_0 = 7755, deste modo,

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{7997}{7755}} - 1 \tag{26}$$

$$\alpha = 0{,}0102955296 \tag{27}$$

Descoberto o valor de α pode-se calcular segundo Malthus a população nos respectivos anos a partir do resultado,

$$P(t) = P_0 e^{\ln(\alpha+1)t} \tag{28}$$

Substituindo os valores, tem-se,

$$P_{(2010)} = P_{(2007)} e^{\ln(1+0{,}0102955296).3} \tag{29}$$

$$P_{(2010)} = 7755\ .\ e^{0{,}0102428916.3} \tag{30}$$

$$P_{(2010)} = 7755\ .\ e^{0{,}0307286749} \tag{31}$$

$$P_{(2010)} = 7755\ .1{,}0312056739 \tag{32}$$

$$P_{(2010)} = 7997 \tag{33}$$

$$P_{(2018)} = P_{(2007)} e^{\ln(1+0{,}0102955296).11} \tag{34}$$

$$P_{(2018)} = 7755\ .\ e^{0{,}0102428916.11} \tag{35}$$

$$P_{(2018)} = 7755\ .\ e^{0{,}1126718078} \tag{36}$$

$$P_{(2018)} = 7755\ .\ 1{,}1192645388 \tag{37}$$

$$P_{(2018)} = 8680 \tag{38}$$

Modelo de Verhulst

Para a aplicação deste modelo se faz necessário realizar um ajuste de curva, para isto dispõe-se dos pontos da Tabela 2,

P_n	P_{n+1}
7755	7997
7997	8128

Tabela 2: Pontos de ajuste de curva

Fonte: Autores (2019).

Utilizando o método ajuste de curvas do software Excel, tem-se a reta a seguir,

$$f(x) = 0{,}541x + 3799 \tag{39}$$

Tendo encontrado a reta que melhor se ajusta aos pontos acima, deve-se considerar *f* (x) = x, ponto fixo (p_∞),

$$x = 0{,}541x + 3799 \tag{40}$$

$$x - 0{,}541x = 3799 \tag{41}$$

$$x(1 - 0{,}541) = 3799 \tag{42}$$

$$x = \frac{3799}{(1 - 0{,}541)} \tag{43}$$

$$x = 8277 \tag{44}$$

Para encontrar o parâmetro *r*, foi utilizada a expressão encontrada na dedução do modelo de Verhulst, assim como deve-se considerar os valores para o tempo da Tabela 2.

$$r = \frac{-1}{t}.\left[\ln\left(P_0\left(\frac{P_\infty}{P_t} - 1\right)\right) - \ln(P_\infty - P_0)\right] \tag{45}$$

Para t = 0, r não está definido.

Para t = 3

$$r = \frac{-1}{3}.\left[\ln\left(7755\left(\frac{8277}{7997} - 1\right)\right) - \ln(8277 - 7755)\right] \tag{46}$$

$$r = \frac{-1}{3}.\left[\ln\left(7755\left(\frac{8277}{7997} - 1\right)\right) - \ln(522)\right] \tag{47}$$

$$r \cong 0{,}217868886 \tag{48}$$

Para

$$r = \frac{-1}{11}.\left[\ln\left(7755\left(\frac{8277}{7997}-1\right)\right)-\ln(8277-7755)\right] \quad (49)$$

$$r = \frac{-1}{11}.\left[\ln\left(7755\left(\frac{8277}{7997}-1\right)\right)-\ln(522)\right] \quad (50)$$

$$r \cong 0{,}118245485 \quad (51)$$

Assim, obtém-se a Tabela a seguir,

t	r
3	0,217869
11	0,118245485

Tabela 3: Valores de r

Fonte: Autores (2019).

Para se descobrir o valor de r a ser utilizado precisa-se fazer uma média dos valores obtidos acima.

Assim, foi encontrado r = 0,168057242. Será utilizada todas as casas decimais para uma maior aproximação.

Então, encontra-se os parâmetros para substituí-los na equação de Verhulst.

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \quad (52)$$

$$P(t) = \frac{7755.8277}{(8277-7755)e^{-0{,}168057242.t} + 7755} \quad (53)$$

$$P(t) = \frac{7755.8277}{520e^{-0{,}168057242.t} + 7755} \quad (54)$$

Por fim, é necessário verificar o modelo encontrado. Para isto, basta substituir o tempo e assim encontrar o valor de P(t).

Para t = 3

$$P(3) = \frac{7755.8277}{520e^{-0{,}168057242.3} + 7755} \quad (55)$$

$$P(3) = 7954 \quad (56)$$

Para t = 11

$$P(11) = \frac{7755.8277}{520e^{-0{,}168057242.11} + 7755} \quad (57)$$

$$P(11) = 8190 \quad (58)$$

Comparação dos Modelos

Com a utilização do software Excel foram calculados os valores para o modelo de Malthus e Verhulst para todos os intervalos de tempo, como se pode visualizar na Tabela 4,

Ano	População	Malthus	Verhulst
2007	7755	7755	7755
2008	-	7835	7833
2009	-	7916	7898
2010	7997	7997	7954
2011	-	8079	8003
2012	-	8163	8004
2013	-	8247	8079
2014	-	8331	8109
2015	-	8417	8134
2016	-	8504	8156
2017	-	8591	8174
2018	8128	8680	8190

Tabela 4: Comparação dos Modelos

Fonte: Autores (2019).

Deste modo, pode-se vislumbrar no gráfico, Figura 1, os dados do modelo e os dados empíricos.

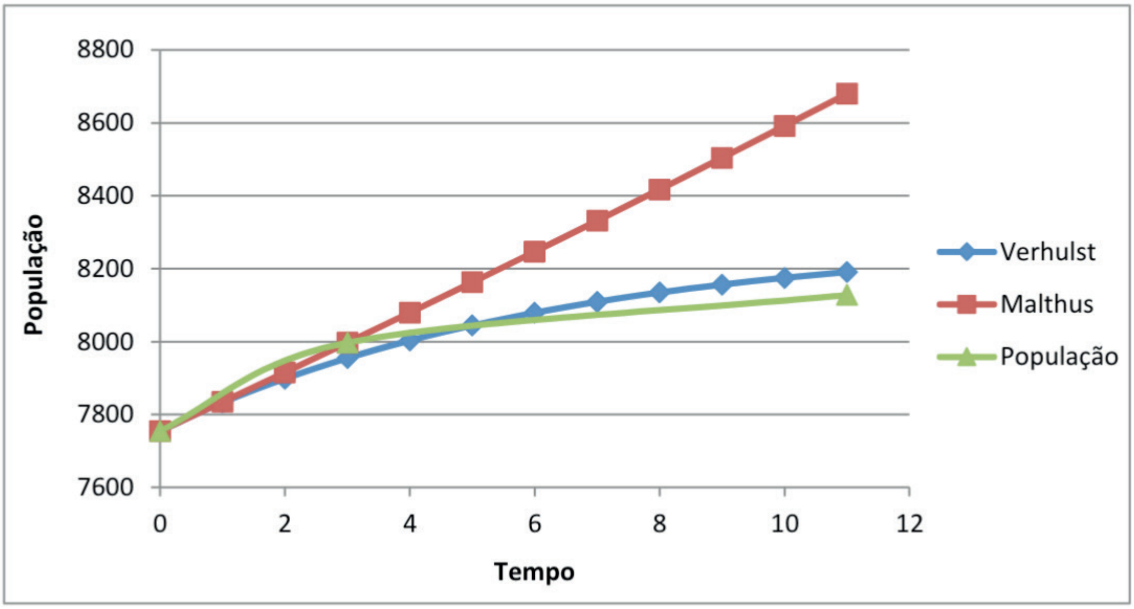


Figura 1: Comparação dos Modelos

Fonte: Autores (2019).

Erro gerado pelos modelos

Para verificar a relação entre os modelos e os dados obtidos, procede-se com o cálculo do maior erro relativo. No modelo de Malthus foi encontrado um erro de 6,8%, já no Modelo de Verhulst encontrou-se um erro de 0,8%.

Analisando a Tabela 4, a Figura 1 e os erros obtidos para cada um dos modelos, pôde-se verificar que o modelo que mais se adequouaos dados reais da população de Tupãssi foi o modelo de Verhulst.

4 I CONCLUSÃO

Ao analisar o estudo aqui abordado, percebe-se que a modelagem matemática, é uma ferramenta importante para resolução de problemas do cotidiano, além de perceber quão interessantes podem ser os problemas aplicados que podem ser descritos ou resolvidos a partir de modelos matemáticos.

Desse modo, ao aplicar modelos de crescimento populacional para o estudo em questão tivemos a oportunidade de verificar a proximidade que eles promovem dos dados reais, visto que isso pode auxiliar os gestores e servir de base para tomada de decisões.

O modelo de Malthus deve ser usado para simular o crescimento em pequenos intervalos de tempo. Variando-se os parâmetros, o modelo de Verhulst simula bem a população brasileira. Deste modo, foi o modelo que mais se aproximou dos dados coletados da cidade de Tupãssi/PR, visto que, foi o menor erro relativo constatado sendo de 0,8%, diferente do erro de 6,8% apurado nas aplicações do modelo de Malthus.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI R. C.: **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** 2002.

HENRIQUES, A.: **Thomas Robert Malthus, a teoria malthusiana.** Coimbra. 2007.

IBGE.: **História de Tupãssi.** 2017.

OLIVEIRA, V. A. B.: **O estudo da população na geografta escolar com o uso de tecnologias e metodologias diferenciadas.** PDE. 2014.

PUGENS, B. P. SILVA, JF. GODINHO, D.: **Modelos Matemáticos que descrevem o crescimento populacional: aplicados e contextualizados aos dados no município de Osório.** 2012.

SODRE, U. **Modelos Matemáticos.** Londrina. 2007.

TAVONI, R.: **Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais.** Rio Claro. 2013.

CAPÍTULO 9

MODELO MATEMÁTICO DE UM PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO DE PLÁSTICO EM MOLDE

Data de aceite: 23/03/2020
Data de submissão: 07/01/2020

Santiago del Rio Oliveira
Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho; Faculdade de Engenharia de Bauru, Bauru – São Paulo
http://lattes.cnpq.br/6469406277752689

André Luiz Salvat Moscato
Instituto Federal do Paraná, Jacarezinho – Paraná
http://lattes.cnpq.br/1744149363927228

RESUMO: Processos de solidificação são de grande importância na indústria, em especial no segmento metalúrgico. Modelos matemáticos podem ser construídos e testados com o intuito de se obterem informações mais detalhadas de um processo de solidificação, como por exemplo, tempo de solidificação, posição da frente de solidificação e a distribuição de temperaturas no meio. Essas informações podem ser utilizadas, por exemplo, para aperfeiçoar um processo de solidificação. O objetivo desse trabalho é modelar matematicamente um processo de solidificação de plástico em molde utilizando um modelo transiente e unidimensional de transferência de calor por condução térmica. Efeitos de convecção térmica são ignorados. São obtidos resultados analíticos para a distribuição de temperaturas nas fases líquida e sólida e também uma equação algébrica não linear para a determinação da posição da frente de solidificação. Foi realizado um estudo de caso numérico para verificar o comportamento das equações resultantes.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática Aplicada à Engenharia. Solidificação. Condução Térmica.

MATHEMATICAL MODEL OF A MOLD PLASTIC SOLIDIFICATION PROCESS

ABSTRACT: Solidification processes are of great importance in the industry, especially in the metallurgical segment. Mathematical models can be constructed and tested in order to obtain more detailed information from a solidification process, such as solidification time, solidification front position and distribution of temperatures in the middle. This information can be used, for example, to improve a solidification process. The objective of this work is to mathematically model a process of plastic solidification in mold using a transient and one-dimensional model of heat transfer by thermal conduction. Thermal convection effects are ignored. Analytical results are obtained for the distribution of temperatures in the liquid and solid phases and also a

nonlinear algebraic equation for determining the position of the solidification front. A numerical case study was conducted to verify the behavior of the resulting equations.
KEYWORDS: Mathematics Applied to Engineering. Solidification. Thermal Conduction.

1 I LISTA DE VARIÁVEIS

Grandezas

A	Área [m²]
c	Calor específico/latente [kJ/(kg.K)]
h	Entalpia específica [kJ/kg]
k	Condutividade térmica [W/(m.K)]
$\dot{Q}$	Taxa de transferência de calor [kW]
t	Tempo [s]
T	Temperatura [K]
U	Velocidade [m/s]
x	Distância [m]

Símbolos gregos

á	Difusividade térmica [m²/s]
è	Excesso de temperaturas [adimensional]
h	Variável de similaridade [adimensional]
ñ	Massa específica [kg/m³]

Subscritos

C	Referente ao molde
condução	Referente à condução
convecção	Referente à convecção
entra	Referente à entrada
F	Referente ao ponto de fusão
i	Referente ao plástico fundido no material
L	Referente ao líquido
p	Referente à pressão
S	Referente ao sólido
SL	Referente à solidificação
sai	Referente à saída

2 I INTRODUÇÃO

Solidificação ocorre em diversas aplicações ambientais, de engenharia, médicas, dentre outras. No nosso ambiente, solidificação ocorre em lagos, estuários e no mar durante o inverno em locais com climas frios. O gelo formado subsequentemente derrete na primavera ou no verão. Com relação a aplicações de engenharia, solidificação ocorre em dispositivos de armazenamento de energia, trocadores de calor, processos de soldagem, processos de fundição e revestimento, remoção de material utilizando feixes de laser com alta potência, dentre outros. Aplicações médicas envolvendo solidificação são exemplificadas pelo congelamento de tecidos em crio cirurgias e a preservação de órgãos humanos e de animais em laboratório.

Na literatura existem inúmeros trabalhos envolvendo solidificação, desde aqueles que envolvem modelos matemáticos até aqueles que envolvem procedimentos experimentais. Merecem destaque os trabalhos de Alexiades e Solomon (1993), Gupta (2003) e de Mohs e Kulacki (2015). No primeiro e segundo trabalhos são apresentadas diversas soluções analíticas e exemplos de cálculo enquanto no terceiro trabalho são apresentados diversos aparatos experimentais envolvendo solidificação. Atualmente, solidificação é um dos tópicos contemporâneos em transferência de calor e massa, envolvendo um grande número de pesquisas, com ênfase em trabalhos numéricos e validação com soluções analíticas clássicas e procedimentos experimentais.

Nesse trabalho será analisada condução de calor unidimensional na presença de solidificação, com efeitos de convecção na fase líquida sendo ignorados. Será assumido que a transição de fase ocorre em uma única temperatura e que as duas fases são separadas por uma interface delgada. Esse é o caso, por exemplo, de solidificação de substâncias puras ou ligas eutéticas.

Serão obtidos resultados analíticos para a distribuição de temperaturas nas fases líquida e sólida e também uma equação algébrica não linear para a determinação da posição da frente de solidificação. Será realizado um estudo de caso numérico para verificar o comportamento das equações resultantes.

3 I MODELO MATEMÁTICO

Inicialmente é dado enfoque a uma característica que surge na análise de problemas de solidificação, a chamada frente de solidificação. A Figura. 1 mostra essa frente separando a região sólida da região líquida. As linhas horizontais tracejadas na Figura 1 representam um volume de controle infinitamente fino em torno dessa frente.

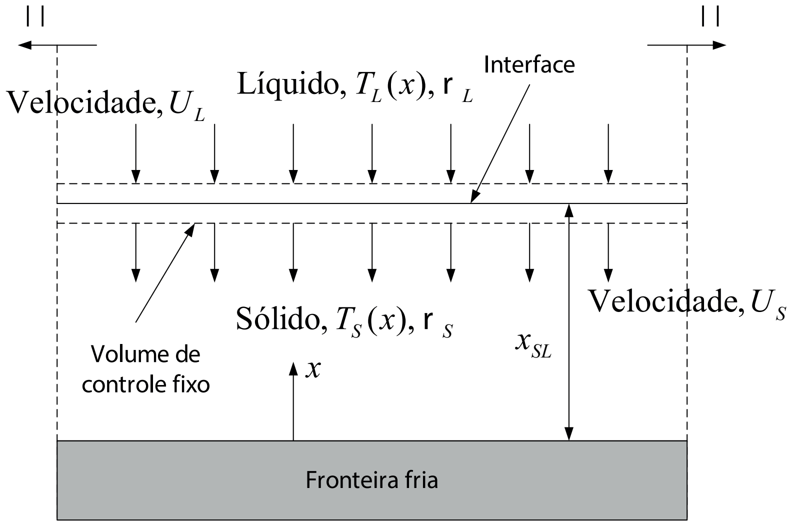


Figura 1: Solidificação a partir de uma fronteira fria.

É assumido que a solidificação ocorre no líquido devido a presença de uma fronteira fria, conforme a Figura 1. Conforme a solidificação avança, a interface desloca-se para cima (na direção *x* positiva) em um meio estacionário. Em geral, é mais fácil modelar a transferência de calor no processo de solidificação se, ao invés disso, assumirmos que a interface e o volume de controle em seu entorno são estacionários e assim o meio desloca-se para baixo (na direção *x* negativa) através da interface. Dessa forma, líquido com massa específica P_L e velocidade U_L entra pela face superior do volume de controle e sólido com massa específica P_S e velocidade U_S sai pela face inferior do volume de controle. A conservação da massa na interface requer que:

$$\rho_L U_L A = \rho_S U_S A \tag{1}$$

onde *A* é a área de cada lado do volume de controle. Um balanço de energia no volume de controle fornece:

$$\dot{Q}_{entra,condução} + \dot{Q}_{entra,convecção} - \dot{Q}_{sai,condução} - \dot{Q}_{sai,convecção} = 0 \tag{2}$$

onde $\dot{Q}_{entra,condução}$ é a energia (calor) transferido para o interior do volume de controle por condução, $\dot{Q}_{entra,convecção}$ é a energia transferida para o interior do volume de controle por convecção (visto que o meio se move através do volume de controle) e $\dot{Q}_{sai,condução}$ e $\dot{Q}_{sai,convecção}$ são as quantias análogas saindo do volume de controle. As taxas de energia por condução são escritas utilizando a lei de Fourier da condução, atentando para o fato que ambas estão na direção *x* negativa:

$$\dot{Q}_{entra,condução} = k_L A\left(\frac{\partial T_L}{\partial x}\right)_{x=x_{SL}} \quad (3)$$

$$\dot{Q}_{sai,condução} = k_S A\left(\frac{\partial T_S}{\partial x}\right)_{x=x_{SL}} \quad (4)$$

Além disso, a taxa de energia convectada para dentro e para fora do volume de controle podem ser escritas como:

$$\dot{Q}_{entra,convecção} = \rho_L U_L A h_L \quad (5)$$

$$\dot{Q}_{sai,convecção} = \rho_S U_S A h_S \quad (6)$$

onde h_L e h_S são as entalpias específicas das fases líquida e sólida nas fronteiras do volume de controle. Substituindo as Equações 3 a 6 na Equação 2 e rearranjando obtém-se:

$$k_L A\left(\frac{\partial T_L}{\partial x}\right)_{x=x_{SL}} - k_S A\left(\frac{\partial T_S}{\partial x}\right)_{x=x_{SL}} + \rho_L U_L A h_L - \rho_S U_S A h_S = 0 \quad (7)$$

O calor latente de solidificação pode ser escrito como:

$$h_{SL} = h_L - h_S \quad (8)$$

Substituindo as Equações 1 e 8 na Equação 7 e rearranjando obtém-se:

$$k_L\left(\frac{\partial T_L}{\partial x}\right)_{x=x_{SL}} - k_S\left(\frac{\partial T_S}{\partial x}\right)_{x=x_{SL}} + \rho_S U_S h_{SL} = 0 \quad (9)$$

A velocidade da interface pode ser escrita como:

$$U_S = \frac{dx_{SL}}{dt} \quad (10)$$

Substituindo a Equação 10 na Equação 9 obtém-se:

$$k_L\left(\frac{\partial T_L}{\partial x}\right)_{x=x_{SL}} - k_S\left(\frac{\partial T_S}{\partial x}\right)_{x=x_{SL}} + \rho_S h_{SL}\frac{dx_{SL}}{dt} = 0 \quad (11)$$

A Equação 11 é um resultado direto de um balanço de energia na frente de solidificação e fornece uma condição de acoplamento necessária para a solução da distribuição de temperaturas no meio. O problema que será analisado pode ser descrito da seguinte forma: imediatamente após o vazamento de plástico fundido com temperatura T_i em um molde retangular conforme a Figura 2, a parede inferior do molde é resfriada a uma temperatura T_C, bem abaixo da temperatura de fusão do material plástico, T_F. Como resultado, acontece solidificação primeiro próximo da parede inferior. Com o passar do tempo a frente de mudança de fase desloca-se para cima. Por simplicidade, pode-se assumir que tanto a solidificação quanto o fenômeno da transferência de calor por condução são unidirecionais (na direção x positiva da Figura 2). Além disso, é assumido que o molde é alto o suficiente de forma que mesmo para um longo período de tempo a parede superior do molde não afeta o processo de solidificação. Quer-se então obter a distribuição unidimensional de temperaturas no molde em função do tempo e a posição da interface sólido-líquido.

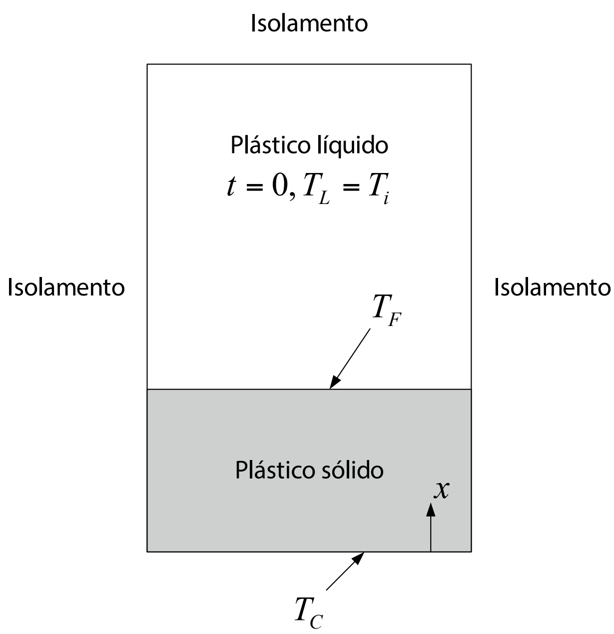


Figura 2 – Solidificação de plástico em molde.

Existem duas regiões distintas no sistema da Figura 2: a região sólida (S) e a região líquida (L). A equação de condução de calor para essas duas regiões, considerando condução transiente unidimensional com propriedades constantes é escrita como:

$$\frac{1}{\alpha_S}\frac{\partial T_S}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_S}{\partial x^2} \qquad 0 < x < x_{SL} \tag{12}$$

$$\frac{1}{\alpha_L}\frac{\partial T_L}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_L}{\partial x^2} \qquad x_{SL} < x < \infty \tag{13}$$

Para completar o modelo matemático são necessárias duas condições iniciais e quatro condições de contorno, escritas como:

$$t=0: \qquad T_S = T_i \tag{14}$$

$$t=0: \qquad T_F = T_i \tag{15}$$

$$x=0: \qquad T_S = T_C \tag{16}$$

$$x=x_{SL}: \qquad T_S = T_L = T_F \tag{17}$$

$$x=x_{SL}: \qquad k_L \frac{\partial T_L}{\partial x} - k_S \frac{\partial T_S}{\partial x} + \rho_S h_{SL} \frac{dx_{SL}}{dt} = 0 \tag{18}$$

$$x \to \infty: \qquad T_L \to T_i \tag{19}$$

Define-se inicialmente uma variável chamada excesso de temperaturas $\Theta(x,t) = T(x,t) - T_i$ de tal forma que as Equações 14 a 19 são reescritas como:

$$\frac{1}{\alpha_S}\frac{\partial \theta_S}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_S}{\partial x^2} \qquad 0 < x < x_{SL} \tag{20}$$

$$\frac{1}{\alpha_L}\frac{\partial \theta_L}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2} \qquad x_{SL} < x < \infty \tag{21}$$

$$t=0: \qquad \theta_S = 0 \tag{22}$$

$$t=0: \qquad \theta_F = 0 \tag{23}$$

$$x=0: \qquad \theta_S = T_C - T_i = \theta_{SC} \tag{24}$$

$$x=x_{SL}: \qquad \theta_S = \theta_L = \theta_F \tag{25}$$

$$x=x_{SL}: \qquad k_L \frac{\partial \theta_L}{\partial x} - k_S \frac{\partial \theta_S}{\partial x} + \rho_S h_{SL} \frac{dx_{SL}}{dt} = 0 \tag{26}$$

$$x \to \infty: \qquad \theta_L \to 0 \tag{27}$$

Para resolver o modelo matemático composto pelas Equações 20 a 27 pode-se utilizar a técnica da similaridade definindo uma variável de similaridade na seguinte forma:

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}} \tag{28}$$

Reescrevendo as derivadas das Equações 20, 21 e 26 em termos da variável de similaridade obtém-se:

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial x} = \frac{d\theta_S}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d\theta_S}{d\eta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_S t}}\frac{d\theta_S}{d\eta} \tag{29}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_S}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \theta_S}{\partial x}\right) = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_S t}}\frac{d\theta_S}{d\eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_S t}}\frac{d^2\theta_S}{d\eta^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}}\right) = \frac{1}{4\alpha_S t}\frac{d^2\theta_S}{d\eta^2} \tag{30}$$

$$\frac{\partial \theta_S}{\partial t} = \frac{d\theta_S}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\theta_S}{d\eta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}}\right) = -\frac{\eta}{2t}\frac{d\theta_S}{d\eta} \tag{31}$$

$$\frac{\partial \theta_L}{\partial x} = \frac{d\theta_L}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d\theta_L}{d\eta}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_S t}}\frac{d\theta_L}{d\eta} \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_L}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \theta_L}{\partial x}\right) = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha_S t}}\frac{d\theta_L}{d\eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_S t}}\frac{d^2\theta_L}{d\eta^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}}\right) = \frac{1}{4\alpha_S t}\frac{d^2\theta_L}{d\eta^2} \tag{33}$$

$$\frac{\partial \theta_L}{\partial t} = \frac{d\theta_L}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\theta_L}{d\eta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_S t}}\right) = -\frac{\eta}{2t}\frac{d\theta_L}{d\eta} \tag{34}$$

$$\frac{dx_{SL}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2\eta_{SL}\sqrt{\alpha_S t}\right) = \eta_{SL}\sqrt{\frac{\alpha_S}{t}} \tag{35}$$

Substituindo as Equações 29 a 35 nas Equações 20 a 27 e rearranjando obtém-se o modelo matemático escrito em termos da variável de similaridade, ou seja:

$$\frac{d^2\theta_S}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta_S}{d\eta} = 0 \qquad 0 < \eta < \eta_{SL} \tag{36}$$

$$\frac{\alpha_L}{\alpha_S}\frac{d^2\theta_L}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta_L}{d\eta} = 0 \qquad \eta_{SL} < \eta < \infty \tag{37}$$

$$t = 0: \qquad \theta_S = 0 \tag{38}$$

$$t = 0: \qquad \theta_F = 0 \tag{39}$$

$$\eta = 0: \qquad \theta_S = T_C - T_i = \theta_{SC} \tag{40}$$

$$\eta = \eta_{SL}: \qquad \theta_S = \theta_L = \theta_F \tag{41}$$

$$\eta = \eta_{SL}: \qquad k_L \frac{d\theta_L}{d\eta} - k_S \frac{d\theta_S}{d\eta} + 2\alpha_S \rho_S h_{SL} \eta_{SL} = 0 \tag{42}$$

$$\eta \to \infty: \qquad \theta_L \to 0 \tag{43}$$

Na formulação anterior $\Theta_S = T_S = T_i$, $\Theta_L = T_L - T_i$ e $\Theta_F = T_F - T_i$ Introduzindo P = $d\Theta_S/d\eta$ e Q = $d\Theta_L$ respectivamente nas Equações 36 e 37, separando as variáveis, integrando em η e voltando nas variáveis Θ_S e Θ_L obtém-se:

$$\frac{d\theta_S}{d\eta} = Ae^{-\eta^2} \tag{44}$$

$$\frac{d\theta_L}{d\eta} = Be^{-(\alpha_S/\alpha_L)\eta^2} \tag{45}$$

onde A e B são constantes de integração. Integrando a Equação (44) em η de η = 0 a η e integrando a Equação (45) em η de η = η_{SL}= a η obtém-se:

$$\theta_S(\eta) - \theta_S(0) = A\int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \tag{46}$$

$$\theta_L(\eta) - \theta_L(\eta_{SL}) = B\int_{\eta_{SL}}^{\eta} e^{-(\alpha_S/\alpha_L)\eta^2} d\eta \tag{47}$$

Utilizando as condições de contorno nas Equações 46 e 47 obtêm-se expressões para A e B:

$$A = \frac{\theta_F - \theta_{SC}}{\int_0^{\eta_{SL}} e^{-\eta^2} d\eta} \quad (48)$$

$$B = \frac{-\theta_F}{\int_{\eta_{SL}}^{\infty} e^{-(\alpha_S/\alpha_L)\eta^2} d\eta} \quad (49)$$

Substituindo as Equações 48 e 49 nas Equações 46 e 47, utilizando $\Theta_S = T_S - T_i$, $\Theta_L = T_L - T_i$ e $\Theta_F = T_F - T_i$ e utilizando as definições matemáticas das funções erro e erro complementar obtém-se:

$$\frac{T_S(\eta) - T_C}{T_F - T_C} = \frac{\mathrm{erf}(\eta)}{\mathrm{erf}(\eta_{SL})} \quad (50)$$

$$\frac{T_L(\eta) - T_i}{T_F - T_i} = \frac{\mathrm{erfc}(\sqrt{\alpha_S/\alpha_L}\,\eta)}{\mathrm{erfc}(\sqrt{\alpha_S/\alpha_L}\,\eta_{SL})} \quad (51)$$

Deve ser notado que o valor de η_{SL} ainda é desconhecido. Para determiná-lo, pode-se utilizar a Equação 42 avaliada em η_{SL} substituindo os resultados das Equações 50 e 51 para avaliar as derivadas parciais, obtendo-se:

$$\frac{T_F - T_i}{T_F - T_C}\frac{k_L}{k_S}\sqrt{\frac{\alpha_S}{\alpha_L}}\frac{e^{-(\alpha_S/\alpha_L)\eta_{SL}^2}}{\mathrm{erfc}(\sqrt{\alpha_S/\alpha_L}\,\eta_{SL})} + \frac{e^{-\eta_{SL}^2}}{\mathrm{erf}(\eta_{SL})} - \mathrm{Ste}_S\sqrt{\pi}\,\eta_{SL} = 0 \quad (52)$$

$$\mathrm{Ste}_S = \frac{h_{SL}}{c_{pS}(T_F - T_C)} \quad (53)$$

Ste_S é o número de Stefan da fase sólida. A Equação 52 é uma equação algébrica não linear para η_{SL}. Para um conjunto de parâmetros (temperaturas iniciais e propriedades das duas fases) a Equação 52 pode ser resolvida numericamente para η_{SL}. Com η_{SL} conhecido, as Equações 50 e 51 são utilizadas para calcular a temperatura em qualquer ponto do meio para qualquer instante de tempo.

4 I RESULTADOS

Os resultados são obtidos a partir de um conjunto de parâmetros fornecidos e a utilização das Equações 50 a 53. Inicialmente calcula-se o número de Stefan da fase sólida pela Equação 53. Na sequência calcula-se η_{SL} pela Equação 52, que é uma equação transcendental a ser resolvida numericamente. Após isso pode-se então calcular a temperatura em qualquer posição η utilizando as Equações 50 ou 51. Uma característica importante da formulação anterior é que ela pode ser utilizada também para um processo de fusão, bastando fornecer parâmetros físicos adequados. O meio utilizado para exemplificar as equações resultantes é um poliuretano, inicialmente a $T_i = 85\ ^{o}C$. Suas propriedades termo físicas podem ser vistas na Tabela 1:

PROPRIEDADE	VALOR
Massa específica	$\rho = 1460\ kg/m^3$
Temperatura de solidificação	$T_F = 32\ ^{o}C$
Calor latente de solidificação	$h_{SL} = 251{,}21\ kJ/kg$
Calor específico da fase líquida	$c_{pL} = 3{,}31\ kJ/(kg.K)$
Calor específico da fase sólida	$c_{pS} = 1{,}76\ kJ/(kg.K)$
Condutividade térmica da fase líquida	$k_L = 0{,}59\ W(m.K)$
Condutividade térmica da fase sólida	$k_S = 2{,}16\ W(m.K)$
Difusividade térmica da fase líquida	$\alpha_L = 1{,}22 \times 10^{-7}\ m^2/s$
Difusividade térmica da fase sólida	$\alpha_S = 8{,}4 \times 10^{-7}\ m^2/s$

Tabela 1: Propriedades termo físicas do poliuretano.

Expõe-se o poliuretano a uma temperatura $T_C = 10\ ^{o}C$. Com os dados da Tabela 1 obtém-se $Ste_S = 0{,}049$ e $\eta_{SL} = 0{,}52$ Com esses valores pode-se calcular a temperatura das fases líquida e sólida em qualquer posição e qualquer instante de tempo pelas Equações 50 e 51.

5 I CONCLUSÕES

O modelo matemático apresentado pode ser utilizado como uma estimativa inicial de parâmetros pertinentes à processos de solidificação/fusão tais como posição da interface sólido-líquido (frente de solidificação/fusão) e a distribuição de temperaturas nas fases líquida e sólida. Esses parâmetros podem ser utilizados como uma primeira aproximação para aperfeiçoar processos que envolvem mudança da fase. Deve ser enfatizado que o modelo desenvolvido não inclui efeitos de convecção térmica na fase líquida, levando em consideração somente efeitos de condução térmica. Modelos mais complexos, envolvendo convecção térmica na fase líquida podem ser encontrados na literatura. Entretanto, tais modelos dificilmente possuem uma solução analítica fechada, sendo necessária uma abordagem numérica. O modelo apresentado foi desenvolvido convenientemente em coordenadas retangulares. Entretanto, os conceitos apresentados aqui podem ser facilmente transponíveis para problemas que devem ser modelados em coordenadas cilíndricas e esféricas.

6REFERÊNCIAS

ALEXIADES, V.; SOLOMON, A. D. **Mathematical Modelling of Melting and Freezing Processes**. 1. Ed. New York: Taylor & Francis, 1993.

GUPTA. S. C. **The Classical Stefan Problem: Basic Concepts, Modelling and Analysis**. 1. Ed. Amsterdan: Elsevier, 2003.

MOHS, W. F.; KULACKI, F. A. **Heat and Mass Transfer in the Melting of Frost**. 1. ed. New York: Springer, 2015.

CAPÍTULO 10

MODELAGEM MATEMÁTICA DO ATRASO NO SINAL DE SONDAS DE OXIGÊNIO DISSOLVIDO EMPREGANDO TRANSFORMADA DE LAPLACE

Data de aceite: 23/03/2020

Samuel Conceição de Oliveira
http://lattes.cnpq.br/2041303049625571
UNESP – Universidade Estadual Paulista, FCF – Faculdade de Ciências Farmacêuticas, PPG-EBB – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Biomateriais e Bioprocessos
Araraquara – SP

RESUMO: Neste trabalho, uma equação que considera o atraso no sinal de sondas utilizadas para medir o nível de oxigênio dissolvido (OD) em bioprocessos de produção de antibióticos é desenvolvida e recomendada para o tratamento de dados experimentais de OD visando à estimativa correta do coeficiente volumétrico de transferência de oxigênio ($k_L\alpha$), um parâmetro chave no controle da oxigenação do meio fermentativo. Para o desenvolvimento de tal equação, utilizou-se o método da transformada de Laplace para resolver a equação diferencial que descreve o atraso no sinal de resposta da sonda, o qual é caracterizado por uma constante de *delay* k_d. Simulações da equação proposta e da equação tradicional utilizando valores de $k_L\alpha$ e k_d iguais a 400 h^{-1} e 350 h^{-1}, respectivamente, evidenciaram que o atraso no sinal de resposta da sonda interfere nos níveis medidos de OD, levando a uma estimativa incorreta de $k_L\alpha$ caso a equação tradicional seja utilizada para tratar dados obtidos em um ensaio típico de determinação deste parâmetro. Embora a equação proposta contenha um parâmetro adicional (k_d), a determinação deste parâmetro não deve acarretar dificuldade em seu uso uma vez que k_d pode ser estimado juntamente com $k_L\alpha$ por um procedimento de regressão não linear ou determinado experimentalmente por um ensaio apropriado.

PALAVRAS-CHAVE: modelagem matemática, bioprocessos, atraso no sinal, oxigênio dissolvido, transformada de Laplace

MATHEMATICAL MODELING OF THE DELAY IN THE SIGNAL OF DISSOLVED OXYGEN PROBES EMPLOYING LAPLACE TRANSFORM

ABSTRACT: In this work, an equation that considers the delay in the signal of probes used to measure the level of dissolved oxygen (DO) in antibiotic production bioprocesses is developed and recommended for the treatment of experimental DO data aiming at the correct estimate of the volumetric coefficient of oxygen transfer ($k_L\alpha$), a key parameter in controlling the oxygenation of the fermentation medium. For

the development of such an equation, the Laplace transform method was used to solve the differential equation that describes the delay in the probe's response signal, which is characterized by a delay constant k_d. Simulations of the proposed equation and the traditional equation using values of $k_L\alpha$ and k_d equal to 400 h^{-1} and 350 h^{-1}, respectively, showed that the delay in the probe's response signal interferes with the measured DO levels, leading to an incorrect estimate of $k_L\alpha$ if the traditional equation is used to treat data obtained in a typical assay to determine this parameter. Although the proposed equation contains an additional parameter (k_d), the determination of this parameter should not cause any difficulty in its use since k_d can be estimated together with k_L by a nonlinear regression procedure or determined experimentally by an appropriate test.
KEYWORDS: mathematical modeling, bioprocesses, signal delay, dissolved oxygen, Laplace transform

1 I INTRODUÇÃO

No desenvolvimento de bioprocessos, além dos objetivos econômicos, busca-se atender às exigências crescentes de confiabilidade e reprodutibilidade dos produtos obtidos, o que vem aumentando a necessidade de melhoria no monitoramento e controle de tais processos, cenário no qual a modelagem matemática e a simulação configuram-se como ferramentas muito úteis.

Entre os produtos obtidos por processos biotecnológicos, destacam-se os antibióticos devido à importância clínica que estes representam, permitindo o tratamento de diversas doenças infecciosas e cancerígenas (MENEZES et al., 2000). A produção industrial de antibióticos é realizada utilizando-se fungos e bactérias em processos que, em sua ampla maioria, são aeróbios estritos, embora haja relatos na literatura de estudos sobre a produção destes bioprodutos em condições anaeróbias por bactérias isoladas do solo (EZAKI et al., 2008, BEHNKEN; HERTWECK, 2012)

Na biossíntese de antibióticos, o oxigênio tem como função atuar como aceptor final de elétrons, participando ao término da cadeia respiratória da reoxidação das moléculas transportadoras de elétrons e gerando moléculas de ATP (trifosfato de adenosina) ricas em energia que é utilizada nas reações anabólicas.

Para que ocorra a síntese de ATP é necessário que os microrganismos oxidem uma matéria orgânica tal como são os açúcares, os quais são muito solúveis em água, podendo-se atingir concentrações da ordem de centenas de gramas por litro. Diferentemente, o oxigênio é muito pouco solúvel em água, como também o são os demais gases, podendo-se atingir, no máximo, concentrações da ordem de miligramas por litro (ppm). Desta forma, os bioprocessos de produção de antibióticos são geralmente conduzidos em reatores convencionais de tanque agitado e aerado, submetidos a altas velocidades de agitação visando favorecer a dissolução do oxigênio no meio fermentativo, principalmente quando são utilizados fungos filamentosos, os quais aumentam a viscosidade do meio, o que dificulta a transferência de oxigênio da fase gasosa para a fase líquida (CRUZ, 1996).

A produtividade em fermentações antibióticas é fortemente dependente da concentração de oxigênio dissolvido (OD), sendo a concentração crítica (concentração abaixo da qual ocorre limitação do bioprocesso), por exemplo, em torno de 30% do valor da saturação para a produção de penicilina pelo fungo *Penicillium chrysogenum* (MENEZES et al., 1994). Desta forma, torna-se evidente a necessidade de manter a concentração de OD acima do valor crítico para um determinado microrganismo produtor de antibiótico a fim de não limitar o bioprocesso em termos de capacidade respiratória dos microrganismos por uma oxigenação insuficiente do meio fermentativo, conforme mostra a Figura 1, na qual está apresentado o comportamento da velocidade específica de respiração microbiana (Q_{O_2}) em função da concentração de oxigênio dissolvido no meio (*C*).

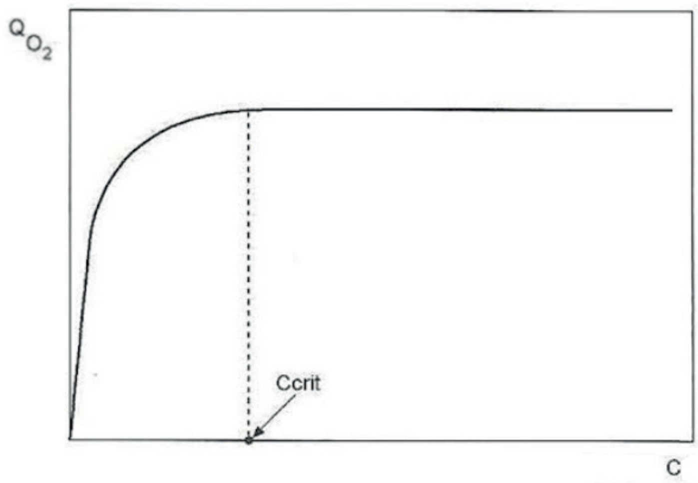


Figura 1 - Comportamento de Q_{O_2} em função de C

De acordo com a Figura 1, Q_{O_2}, para um dado microrganismo, pode ser correlacionada com *C* segundo uma equação do tipo de Monod, conforme equação a seguir, na qual $Q_{O_{2máx}}$ é o valor máximo de Q_{O_2} e K_{O_2} é a constante de saturação para o O_2 (SCHMIDELL, 2001):

$$Q_{O_2} = Q_{O_{2máx}} \frac{C}{K_{O_2} + C}$$

O controle da concentração de OD pode ser realizado manipulando-se o valor do coeficiente volumétrico de transferência de oxigênio ($k_L\alpha$), o qual está diretamente relacionado com a agitação e a aeração praticadas no biorreator. Portanto, há a necessidade de se determinar o valor de $k_L\alpha$ para um dado sistema de agitação e aeração a fim de se fazerem os ajustes necessários neste parâmetro visando atender à demanda de oxigênio durante o bioprocesso.

Existem alguns métodos de determinação de $k_L\alpha$ estabelecidos na literatura, dentre os quais aqueles que empregam sondas (eletrodos) para a medida da concentração de OD, gerando dados experimentais que, convenientemente tratados por meio de um modelo matemático adequado, fornecem uma estimativa do valor de $k_L\alpha$. Em se utilizando este método, cuidado se deve ter quanto ao atraso na resposta da sonda quando o valor de $k_L\alpha$ a determinar for elevado, pois caso contrário, a determinação de $k_L\alpha$ ficará prejudicada como será demonstrado no presente trabalho. Este atraso no sinal da sonda é caracterizado por uma constante de *delay* (k_d) cujo recíproco fornece uma noção do tempo de atraso no sinal.

Este trabalho visa demonstrar que, dependendo dos valores relativos de $k_L\alpha$ e k_d, o atraso no sinal da sonda interfere na determinação do valor de $k_L\alpha$ caso um modelo matemático apropriado não seja empregado para tratar os dados de medidas de OD com atraso. Para o desenvolvimento de tal modelo, assume-se que a taxa de variação temporal da concentração de OD medida pela sonda (C_S) é proporcional à diferença entre o valor real da concentração de OD (C) e aquele medido pela sonda, sendo k_d a constante de proporcionalidade. Introduzindo-se a expressão C=C(t), obtida a partir da integração do balanço de massa de OD em um ensaio típico de determinação de $k_L\alpha$, na equação diferencial que descreve a taxa de variação temporal de C_S, obtém-se uma nova equação diferencial no tempo, cuja solução, obtida por transformada de Laplace, incorpora os dois parâmetros $k_L\alpha$ e k_d, configurando-se como a equação a ser usada quando o atraso no sinal da sonda não for desprezível.

2 I MODELAGEM MATEMÁTICA

O balanço de massa de oxigênio dissolvido durante o bioprocesso de produção de antibiótico em reator batelada, considerando o suprimento e o consumo de oxigênio no meio é dado pela seguinte equação (SCHMIDELL, 2001):

$$\frac{dC}{dt} = k_L a(C^* - C) - Q_{O_2} X \qquad (1)$$

onde C é a concentração real de OD, C^* é a concentração de OD na saturação, $k_L\alpha$ é o coeficiente volumétrico de transferência de oxigênio, Q_{O_2} é a velocidade específica de consumo de oxigênio para respiração microbiana e X é a concentração celular.

No caso do emprego de sondas para a medida da concentração de OD visando à determinação de $k_L\alpha$ para um dado sistema de agitação e aeração, o procedimento consiste em se utilizar meio isento de células (X=0), reduzindo-se inicialmente a zero a concentração de OD pela dispersão de gás nitrogênio no meio. Em seguida, agita-se e aera-se o meio, registrando-se a concentração de OD no decorrer do tempo. Em tais condições, a Equação (1) se reduz à Equação (2) (SCHMIDELL, 2001):

$$\frac{dC}{dt} = k_L a(C^* - C) \tag{2}$$

Separando as variáveis na Equação (2), integrando e aplicando a condição inicial $C(0)=0$, obtém-se a Equação (3) :

$$\frac{C}{C^*} = (1 - e^{-k_L at}) \tag{3}$$

Os valores de C/C^* fornecidos pela Equação (3) correspondem à razão entre o valor real da concentração de OD num dado instante e aquele de saturação, devendo esta razão ser o valor registrado pela sonda caso o atraso no sinal seja desprezível, isto é, a sonda previamente calibrada de 0 a 100 % (saturação) registra a concentração de OD como uma porcentagem daquela de saturação. Entretanto, se o atraso no sinal não puder ser desprezado, uma nova equação deve ser desenvolvida visando à determinação correta do valor de $k_L\alpha$. O atraso no sinal da sonda é decorrente das resistências difusionais ao transporte de oxigênio até a superfície do cátodo, onde é reduzido, gerando um fluxo de elétrons que é proporcional à sua concentração.

Assumindo que a taxa de variação temporal da concentração de OD medida pela sonda (C_S) seja proporcional à diferença entre o valor real da concentração de OD (C) e aquele medido pela sonda, pode-se escrever (SCHMIDELL, 2001):

$$\frac{dC_s}{dt} = k_d(C - C_s) \tag{4}$$

onde k_d é a constante de atraso da sonda, $C_S(0)=0$ e $C_S(\infty)=C^*$.

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Solução da Equação Diferencial representativa do Atraso no sinal da Sonda

Dividindo ambos os membros da Equação (4) por C^*, obtém-se:

$$\frac{d(C_s / C^*)}{dt} = k_d(C / C^* - C_s / C^*) \tag{5}$$

Introduzindo $y = C_S/C^*$ e a Equação (3) na Equação (5), resulta:

$$\frac{dy}{dt} = k_d\left[(1 - e^{-k_L at}) - y\right] \tag{6}$$

Reescrevendo a Equação (6) em um outro formato, obtém-se a Equação (7):

$$\frac{dy}{dt} + k_d y = k_d(1 - e^{-k_L at}) \tag{7}$$

A Equação (7) está sujeita à condição inicial *y*(0)=0. Resolvendo esta equação por transformada de Laplace (ZILL, 2014), tem-se:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt} + k_d y\right] = \mathcal{L}\left[k_d(1 - e^{-k_L at})\right] \Rightarrow \tag{8}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + k_d\,\mathcal{L}[y] = k_d\,\mathcal{L}\left[(1 - e^{-k_L at})\right] \Rightarrow \tag{9}$$

$$sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0} + k_d\,Y(s) = k_d\left\{\frac{1}{s\left[\left(\frac{1}{k_L a}\right)s + 1\right]}\right\} \Rightarrow \tag{10}$$

$$Y(s) = k_d\left\{\frac{1}{s\left[\left(\frac{1}{k_L a}\right)s + 1\right]}\right\}\left\{\frac{1}{(s + k_d)}\right\} \Rightarrow \tag{11}$$

$$Y(s) = \left\{\frac{1}{s\left[\left(\frac{1}{k_L a}\right)s + 1\right]}\right\}\left\{\frac{1}{\left[\left(\frac{1}{k_d}\right)s + 1\right]}\right\} \tag{12}$$

Aplicando-se a transformada inversa de Laplace (ZILL, 2014) à Equação (12), obtém-se a solução da Equação (5), conforme desenvolvimento apresentado nas Equações (13) a (17):

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\left\{\frac{1}{s\left[\left(\frac{1}{k_L a}\right)s + 1\right]}\right\}\left\{\frac{1}{\left[\left(\frac{1}{k_d}\right)s + 1\right]}\right\}\right] \Rightarrow \tag{13}$$

$$y(t) = 1 + \left[\frac{1}{\left[\left(\frac{1}{k_d}\right) - \left(\frac{1}{k_L a}\right)\right]}\right]\left[\left(\frac{1}{k_L a}\right)e^{-k_L at} - \left(\frac{1}{k_d}\right)e^{-k_d t}\right] \Rightarrow \tag{14}$$

$$y(t)=1+\left[\frac{k_d k_L a}{k_L a-k_d}\right]\left[\left(\frac{1}{k_L a}\right)e^{-k_L a t}-\left(\frac{1}{k_d}\right)e^{-k_d t}\right]\Rightarrow \tag{15}$$

$$y(t)=\frac{C_s}{C^*}=1+\left[\frac{1}{k_L a-k_d}\right]\left[k_d e^{-k_L a t}-k_L a e^{-k_d t}\right]\Rightarrow \tag{16}$$

$$\frac{C_s}{C^*}=1+\left(\frac{k_L a}{k_d-k_L a}\right)e^{-k_d t}-\left(\frac{k_d}{k_d-k_L a}\right)e^{-k_L a t} \tag{17}$$

A Equação (17) é a equação que deve ser empregada para tratar dados experimentais de medidas de OD realizadas com sondas com atraso no sinal de resposta visando à correta determinação do valor de $k_L\alpha$.

3.2 Exemplo Ilustrativo

Como ilustração, as Equações (3) e (17) foram simuladas para valores de k_La e k_d respectivamente iguais a 400 h^{-1} e 350 h^{-1}, visando comparar a evolução temporal do nível real de OD (C/C^*) e aquele fornecido pela sonda (C_S/C^*). Os resultados mostrados na Figura 2 evidenciam claramente que o atraso no sinal da sonda interfere significativamente nos valores medidos do nível de OD, devendo a Equação (17) ser usada para o tratamento dos dados registrados pela sonda visando a estimativa correta do valor de $k_L\alpha$.

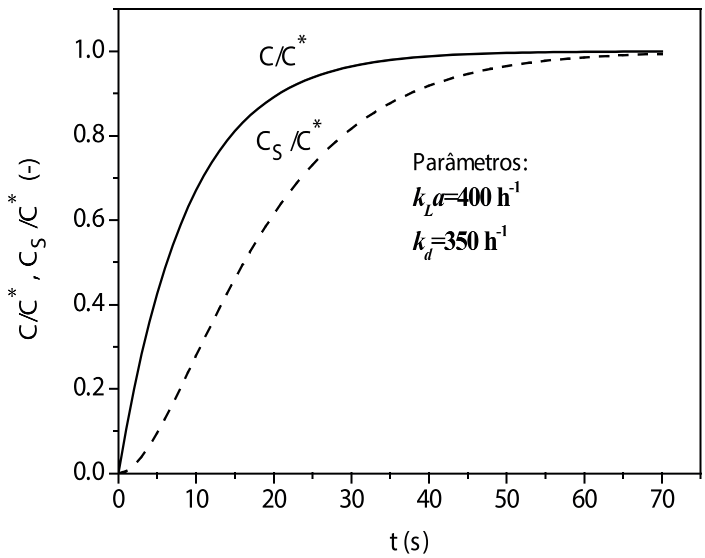


Figura 2 - Evolução temporal do nível de OD real e aquele registrado pela sonda

Para se ter uma noção da magnitude do erro cometido na determinação de $k_L\alpha$ quando dados de medidas de OD com atraso são tratados por uma versão linearizada do modelo tradicional (Equação (3)), uma regressão linear dos pontos

[-ln(1-C/C^*)] versus t foi realizada (Figura 3), obtendo-se um valor de $k_L α$ (coeficiente angular da reta) igual a 277 h^{-1}, resultado que representa um erro relativo percentual de -30.75% quando comparado ao valor correto de $k_L α$ (400 h^{-1}).

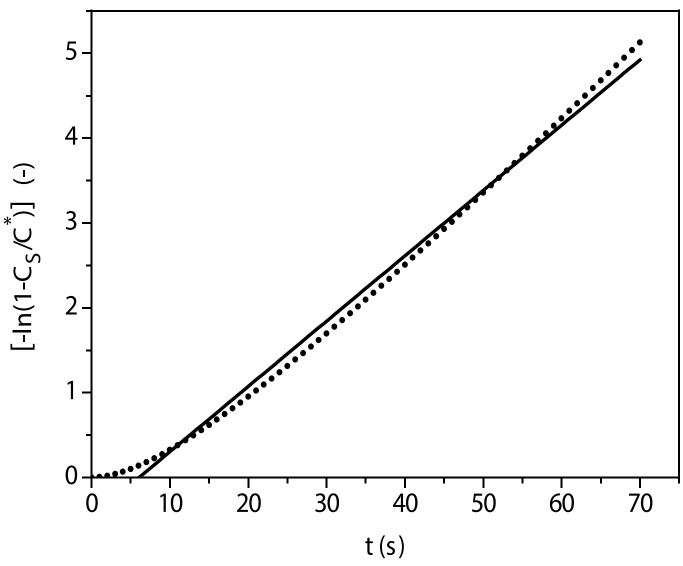


Figura 3 - Determinação de $k_L a$ utilizando-se o modelo tradicional linearizado e as medidas de OD realizadas com atraso pela sonda

A Equação (17), além de conter o parâmetro $k_L α$, contém o parâmetro k_d, o qual também deve ser determinado, não constituindo-se esta determinação numa dificuldade para o uso da Equação (17). Para a determinação de k_d há duas alternativas possíveis. A primeira, consiste em estimar este parâmetro juntamente com $k_L α$ na etapa de estimação de parâmetros por regressão não linear, uma vez que a Equação (17) não é possível de ser linearizada. A outra alternativa seria determinar experimentalmente este parâmetro realizando um ensaio degrau, no qual a sonda estaria inicialmente em equilíbrio com um meio saturado em nitrogênio (OD = 0%), sendo em seguida exposta repentinamente a um meio saturado em oxigênio (OD = 100%). Em tais condições, tem-se desde o instante inicial do degrau que C=C^* na Equação (4), obtendo-se a Equação (18):

$$\frac{dC_s}{dt} = k_d (C^* - C_s) \qquad (18)$$

A integração da Equação (18), sujeita à condição inicial $C_S(0)$=0, resulta na Equação (19):

$$\frac{C_s}{C^*} = (1 - e^{-k_d t}) \qquad (19)$$

A partir da Equação (19) pode-se concluir que ao plotar [-ln(1-C_S/C^*)] em função do tempo t, utilizando-se os dados experimentais obtidos no ensaio descrito, deve-se obter uma reta cujo coeficiente angular corresponde ao valor de k_d.

De acordo com informações fornecidas pelos fabricantes de eletrodos, uma sonda razoavelmente rápida atinge 90% do valor de C^* em 20 segundos no ensaio degrau, o que permite estimar, pela Equação (19), um valor de k_d de aproximadamente 415 h^{-1}.

Por fim, analisando-se a Equação (17) para os casos em que $k_d >> k_L\alpha$, verifica-se que $\left(\frac{k_L a}{k_d - k_L a}\right) \to 0$, $e^{-k_d t} \to 0$ e $\left(\frac{k_d}{k_d - k_L a}\right) \to 1$, de modo que a Equação (17) recai na Equação (3), não havendo necessidade de corrigir o sinal da sonda em tais condições. A fim de ilustrar numericamente estes casos, tem-se que uma sonda que apresente um k_d da ordem de 400 h^{-1}, permite estimar, com razoável precisão, valores de $k_L\alpha$ inferiores a 200 h^{-1}. Acima destes valores de $k_L\alpha$, os erros cometidos na determinação deste parâmetro seriam muito elevados, exigindo que a correção aqui proposta fosse efetuada.

4 I CONCLUSÕES

Baseado nos resultados obtidos neste trabalho, as seguintes conclusões podem ser realizadas:

- a transformada de Laplace mostrou-se uma ferramenta muito útil para a resolução da EDO (equação diferencial ordinária) que descreve o atraso no sinal de resposta de sondas empregadas na medição de níveis de OD em bioprocessos de produção de antibióticos, permitindo obter a solução da equação com rapidez, simplicidade e reduzido esforço analítico;
- o atraso no sinal da sonda interfere nas medidas de OD, levando a obtenção de dados experimentais que, se não tratados por uma equação apropriada que considere este atraso, acarretará significativos erros na determinação do valor do coeficiente volumétrico de transferência de oxigênio (k_La);
- a equação desenvolvida para o tratamento de dados de medidas de OD com atraso contém dois parâmetros ajustáveis $k_L\alpha$ e k_d, os quais podem ser determinados simultaneamente por regressão não linear usando-se a própria equação e os dados experimentais obtidos em um ensaio típico de determinação de $k_L\alpha$.

REFERÊNCIAS

BEHNKEN, S.; HERTWECK, C. **Anaerobic bacteria as producers of antibiotics**. Applied Microbiology and Biotechnology, v. 96, n. 1, p. 61-67, 2012.

CRUZ, A. J. G. **Modelagem fenomenológica e simulação por redes neuronais do bioprocesso de produção da penicilina-G**. 150f. 1996. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) – UFSCar, São Carlos, 1996.

EZAKI, M.; MURAMATSU, H.; TAKASE, S.; HASHIMOTO, M. **Naphthalecin, a Novel Antibiotic Produced by the Anaerobic Bacterium, *Sporotalea colonica sp*.** The Journal of Antibiotics. nov., v. 61, n. 4, p. 207–212, 2008.

MENEZES, J. C.; ALVES, S. S.; LEMOS, J. M.; AZEVEDO, S. F. **Mathematical modelling of**

industrial pilot-plant penicillin-G fed-batch fermentations. Journal of Chemical Technology and Biotechnology., v. 61, n. 2, p. 123-138, 1994.

MENEZES, J. C.; ALVES, T. P.; CARDOSO, J. P. **Biotecnologia microbiana: a produção de penicilina.** In: LIMA, N.; MOTA, M. (Eds.) Biotecnologia: fundamentos e aplicações. DIFEL, 2000, cap.12, p.267-282.

SCHMIDELL, W. **Agitação e aeração em biorreatores.** In: SCHMIDELL, W.; LIMA, U. A.; AQUARONE, E.; BORZANI, W. (Coords.) Biotecnologia Industrial: engenharia bioquímica. São Paulo: Edgard Blücher, 2001, v.2, p.277-371.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

CAPÍTULO 11

ESPAÇO E FORMA: A FORMAÇÃO DO PEDAGOGO E A LEGISLAÇÃO PARA O ENSINO DE GEOMETRIA NAS SÉRIES INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Data de aceite: 23/03/2020

Data de submissão: 17/01/2020

Luciano Tadeu Corrêa Medeiros
Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências da Educação.
Belém - Pará
http://lattes.cnpq.br/1840780705200819

RESUMO: Este artigo trata da analise teórica da relação estabelecida entre a Educação Matemática e a legislação brasileira de ensino. O objetivo é verificar de que forma o curso de Pedagogia desenvolve suas abordagens para o ensino da matemática nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental e como, dentro do processo formativo, se trabalham as questões que envolvem o ensino dessa linguagem e seu alinhamento com as leis que norteiam a educação. Para a realização do trabalho, utilizou-se o método qualitativo, desenvolvido através de pesquisa bibliográfica, observações e análises de atividades desenvolvidas por graduandos do curso de Pedagogia de uma Universidade pública como proposta de ensino do bloco Espaço e Forma, nos segmentos da Geometria, para os alunos das Séries Iniciais do Ensino Fundamental. Os resultados apontam um alinhamento entre as propostas de ensino do curso de Pedagogia e a legislação para o ensino da Matemática nessa etapa da educação escolar. Sinaliza-se, então, um entendimento do ensino da linguagem Matemática nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental como importante instrumento de desenvolvimento humano, cognitivo e social, reconhecidos tanto pelo curso de formação como pela legislação brasileira de educação.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino; Matemática; Geometria; Séries Iniciais.

SPACE AND FORM: TRAINING OF PEDAGOGUE AND LEGISLATION GEOMETRY EDUCATION IN THE INITIAL SERIES OF ELEMENTAR SCHOOL

ABSTRACT: This article deals with the theoretical analysis of the relationship established between Mathematics Education and Brazilian teaching legislation. The objective is to verify how the Pedagogy course develops its approaches to the teaching of mathematics in the Initial Series of Elementary Education and how, within the formative process, the issues involving the teaching of this language and its

alignment with the laws that work guide education. For the accomplishment of this article, the qualitative method was used, developed through bibliographic research, observations, and analysis of activities developed by undergraduate students of the Pedagogy course of a public University as a teaching proposal of space and form block, in the segments of Geometry, for students in the Initial Series of Elementary Schools. The results point to an alignment between the teaching proposals of the Pedagogy course and the legislation for the Mathematics teaching at this stage of school education. Therefore, an understanding of the teaching of mathematical language in the Initial Series of Elementary Education is signaled as an important instrument for human, cognitive and social development, recognized both by the training course and by Brazilian education legislation.
KEYWORDS: Teaching; Mathematics; Geometry; Series of Elementar School.

1 I INTRODUÇÃO

A educação é um importante instrumento para o desenvolvimento humano e para a formação de um sujeito crítico e reflexivo. Nesse sentido, compreendemos a necessidade de promover uma educação que se pretenda emancipadora, democrática e libertadora, capaz de fazer com que esses sujeitos se reconheçam parte integrante do mundo e responsáveis pelas transformações humanas e sociais desenvolvidas a partir de suas ações.

Nosso foco, neste trabalho, foi investigativo. O tratamento deste assunto requer cuidado para não analisarmos questões que envolvem a Educação de forma isolada, pois o educador e seu posicionamento teórico devem direcionar suas práticas educativas, porém, essas devem estar alinhadas à legislação do ensino. Consideramos essas relações, no processo de escolarização, como o elemento principal de nossa discussão.

Quando falamos de Educação escolar, inicialmente, idealizamos um espaço pensado e desenvolvido para a aprendizagem, socialização e desenvolvimento dos sujeitos, um espaço onde os saberes são construídos e transmitidos por profissionais formados e preparados para esse fim, lugar onde se tem contato, já nos primeiros momentos, ainda na Educação Infantil, com as mais diversas linguagens e suas expressões, como a oralidade, a escrita, a arte, entre tantas outras. Assim, se encontra também a linguagem matemática, ciência que se consolida como um importante instrumento para o desenvolvimento cognitivo, social e humano.

A utilização adequada da linguagem matemática pelos professores na Educação Infantil pode ajudar os alunos na aquisição de elementos importantes dessa ciência durante esse momento da infância e contribui para dinamizar, nas séries iniciais do Ensino Fundamental, a formação desse sujeito, que se quer desenvolver crítico, reflexivo, autônomo e ativo, contribuindo para que o mesmo consiga compreender o mundo e seu lugar, reconhecendo os espaços e se localizando a partir do reconhecimento dos diversos formatos com que ele se apresenta e que fazem parte de seu cotidiano e de suas vivências, e das formas que configuram os ambientes representados nesse cotidiano. Dessa forma, compreende-se que, nessa fase da infância, o lúdico é uma proposta que deve estar sempre presente no desenvolvimento dos alunos e deve servir de instrumento para a aplicação de ensinamentos não apenas da matemática, como dos campos diversos da Educação Infantil e Séries Iniciais do Ensino Fundamental. Porém, se o educador não estiver atento às questões norteadoras dessa possibilidade de desenvolvimento pretendido, o mesmo pode desencadear o fracasso de uma educação matemática que se determine a formar o sujeito que se quer reflexivo, determinando-se às perspectivas contrárias a essa proposta.

Com o objetivo de compreender essas relações sobre a linguagem matemática e a proposta de sua utilização para o ensino nas séries iniciais do Ensino Fundamental, desenvolvemos esse trabalho, que traz uma reflexão sobre o uso da Geometria nessa etapa da educação, por isso, com base em pressupostos teóricos e tendências para o ensino da matemática escolar construídos durante o processo formativo e que consideramos parte da formação do educador, desenvolvemos uma pesquisa bibliográfica e usamos, como instrumentos, nossas observações e, para tanto, selecionamos três tarefas desenvolvidas em sala de aula durante a disciplina Abordagens Teórico-metodológicas da Matemática Escolar, no quinto eixo do curso de Pedagogia de uma universidade Pública, entre os meses de agosto a dezembro do ano de 2019. A partir disso, realizamos uma análise sobre as atividades que podem ser desenvolvidas para que esses ensinamentos demonstrem eficácia na introdução de componentes da matemática, referentes ao bloco de ensino sobre Espaço e Forma, dentro dos segmentos da Geometria, determinados pelos *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN).

A *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC) estabeleceu cinco unidades temáticas para o ensino da matemática escolar, que devem fazer parte das abordagens no ensino das crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental, que são: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, e probabilidade e estatística.

Outra análise que desenvolvemos é em relação às leis educacionais, norteadoras do Ensino de matemática nas escolas, pois as práticas educativas, bem como os instrumentos utilizados para o ensino da matemática escolar, juntamente com o conteúdo a ser trabalhado com as crianças, devem seguir as orientações e a aplicação da matéria de leis e outros dispositivos, onde se encontram, além da BNCC e dos PCN, o *Pacto Nacional Para a Alfabetização na Idade Certa* (PNAIC) e a *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional* (LDBEN).

As áreas de conhecimento a serem trabalhadas nos currículos escolares das séries iniciais do Ensino Fundamental para o ensino da matemática escolar, de acordo com os PCN, encontram-se divididas em quatro blocos: Números e operações (Aritmética e Álgebra); Espaço e formas (Geometria); Grandezas e medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria); e Tratamento da informação (Estatística, Combinatória e Probabilidade). Este trabalho tem por finalidade analisar especificamente o segundo bloco estabelecido por esta legislação, que diz respeito ao Espaço e Forma (Geometria).

As relações estabelecidas entre essa legislação e as práticas educativas de ensino da matemática desenvolvidas pelos professores nas escolas, bem como as atividades propostas por eles nesse segmento, devem partir do princípio de que as mesmas precisam estar orientadas a partir dos determinantes legais, que findam por se tornar o ponto de partida e o Norte para o ensino da matemática nas escolas. Porém, entendemos que as relações humanas de ensino e aprendizagem da matemática comportam elementos que se direcionam para além de uma determinação linear encontrada nos textos desses dispositivos.

2 I SÉRIES INICIAIS: ESPAÇO, FORMA E COTIDIANO.

Uma das áreas de conhecimento a ser trabalhada nos currículos escolares das séries iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997), a matemática, deve ser reconhecida pela escola como um dever, pois os mesmos não estão ligados apenas a questões de cálculos e números, ela está ligada também a fatores que envolvem os sujeitos na sua dinâmica cultural e social, se fazendo presente nas mais diversas situações experimentadas por eles (MONTEIRO, 2010). Para os PCN, as questões educacionais também estão ligadas a questões de cidadania:

> A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (BRASIL, 1996, p. 1).

A partir desse ponto, compreende-se o ensino da matemática como fator indispensável para o desenvolvimento dos sujeitos nessa perspectiva cidadã, pois a mesma tem o potencial de desenvolver, nos sujeitos, possibilidades de uma percepção e compreensão mais elaborada do seu meio (BRASIL, 1997).

Sabemos da importância de uma investigação acerca das práticas docentes e perspectivas educacionais de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental sobre seus ensinamentos e a importância dos mesmos nas aulas por eles desenvolvidas, que objetivam trazer, a partir do conhecimento científico, as relações entre a natureza e o humano, mas que, muitas vezes, em nada identificam a realidade vivida e observada pelo aluno (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2019). Configuram-se, então, ações experimentadas por professores que não atentam para a função social de seus ensinamentos e findam por experimentarem situações onde a vivência e experiência do aluno desafiam esses professores para uma reflexão, não apenas sobre o que ensinam, mas como e por que ensinam, e ainda sobre quais suas perspectivas como educadores. Segundo os PCN, "a Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente" (BRASIL, 1997, p. 19). Para Monteiro (2010, p. 2), isso se traduz da seguinte forma:

> A finalidade central do ensino da matemática para os pequenos é começar a introduzi-los em um modo próprio de produção de conhecimento, uma parcela da cultura que a escola tem o dever de transmitir. Para tanto, é preciso instalar nas turmas [...] atividades de certa maneira análogas às desenvolvidas pelos matemáticos em sua tarefa: fazer perguntas, procurar soluções, buscar pontos de apoio no que se sabe para encontrar o que não se sabe, experimentar, errar, analisar, corrigir ou ajustar as buscas, comunicar procedimentos e resultados, defender um ponto de vista e considerar a produção dos outros, estabelecer acordos e comprovar.

O ensino da matemática escolar nos PCN está divido em blocos. Em um desses blocos, se encontra a obrigatoriedade de ensinar Geometria e, no conteúdo de ensino dessa, há questões sobre Espaço e Forma (BRASIL, 2017). Segundo os PCN, para o ensino de Geometria no Ensino Fundamental deve-se observar os seguintes argumentos:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. (BRASIL, 1997, p. 56)

Durante o processo de formação dos professores que irão atuar ante à demanda das séries iniciais do Ensino Fundamental, os alunos do curso de Pedagogia são provocados a realizarem questionamentos e reflexões sobre o significado do ensino da matemática para os alunos dessa etapa do ensino escolar e, através de atividades desenvolvidas em sala, são estimulados a identificarem e trabalharem situações que vão estar presentes em seus fazeres como docentes. Para Silva Júnior e Borges Netto, isso se traduz da seguinte forma:

> Um dos desafios dos professores da Educação Infantil ao propor reflexões sobre as noções de tempo e espaço é conhecer as representações das crianças acerca de determinadas experiências históricas e geográficas e, assim, reconstruí-las, levando em conta a historicidade, o diálogo entre diversos saberes, fontes, problemas e metodologias. (SILVA JÚNIOR; BORGES NETTO, 2012, p. 281).

Observamos, nas tarefas apresentadas aos alunos, a possibilidade de desenvolver uma crítica pertinente aos cursos de formação de professores, pois os mesmos devem estar atentos para as situações que tenham como pauta a compreensão da realidade do aluno, pois esse é um principal ponto a ser observado, visto que se o professor, em seu processo formativo, deve desenvolver a capacidade profissional de identificar os sujeitos como imersos em uma realidade cultural e, principalmente, social. Por isso, é importante que os cursos de formação desenvolvam estratégias formativas para que os professores reconheçam seu papel formador e qual a consequência de ensinar os alunos sobre assuntos que entendemos como descontextualizados de suas realidades (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2019). Os PCN indicam, na matemática, um papel essencial na formação o sujeito:

> Matemática desempenha papel decisivo [na aprendizagem escolar], pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno. (BRASIL, 1997, p. 15).

A primeira atividade desenvolvida pelos alunos da disciplina ATM da Matemática Escolar foi a representação, por meio de um mapa, de parte do Campus Universitário, a partir de onde esses alunos encontravam-se localizados. Tratava-se de uma tarefa de representação do espaço, por meio de uma visão superior, na qual se poderiam evocar imagens mentais dessa localização num lugar que, em certa medida, faz parte de seus espaços cotidianos (MONTEIRO, 2010), uma vez que, nesse mapa, haveriam de representar, dentre outros setores, seu instituto, sua faculdade, seu bloco de salas de aula, passarelas, estacionamentos, bibliotecas e outros locais de seu entorno.

O objetivo da atividade era situarem-se espacialmente num lugar supostamente conhecido. Essa questão da localização espacial e de suas representações tem ocupado lugar de destaque nas propostas curriculares para o ensino de matemática, porque, atualmente, existem proposições de que a compreensão acerca de localização espacial ajuda a dinamizar nossa movimentação, organizando a vida de maneira mais prática e as formas com que se constroem essa paisagem cotidiana se tornaram figuras comuns, incorporadas em nossos saberes através de nossas vivências e experiências cotidianas (BRASIL, 1988). Por isso, passamos a excluir as dificuldades de localização e movimentação nesses espaços. Para Monteiro, é necessário que a escola desenvolva essas habilidades nos alunos e, em suas observações, isso se resume da seguinte forma:

> No nosso cotidiano existe uma série de problemas que envolvem conhecimentos espaciais: orientar-se por meio de um mapa da região, produzir instruções para ir de um lugar a outro, seguir as instruções elaboradas por outro, encontrar um objeto a partir de indicações orais ou escritas, etc. Para resolver esse tipo de problema,

> é necessário colocar em jogo conhecimentos espaciais que não são espontâneos e, portanto, a escola tem a responsabilidade de ensinar. (MONTEIRO, 2010, p. 04).

A criança é um ser que está em pleno desenvolvimento e, nessa fase, a curiosidade de entender questões ligadas ao mundo é latente nesses sujeitos. Segundo Nacarato, Mengali e Passos (2019), essa curiosidade também não é diferente, nem tão pouco é algo nocivo, ao contrário, é algo que estimula o professor a canalizar o ensino da matemática, a rever suas práticas, suas perspectivas educacionais e, mais ainda, a compreender que a curiosidade infantil é um ponto a favor da educação e do sujeito que se pretende formar, pois esses são os que estão dispostos ao aprendizado e proporcionam, ao professor, a possibilidade de uma relação de ensino e aprendizagem onde o resultado seja positivo.

Estimular a criança na construção de um mapa que possibilite que as mesmas identifiquem onde está a localização de lugares próprios de seu cotidiano, como sua casa, sua escola, o mercado do bairro, a praça onde elas costumam brincar e outros locais que as mesmas costumam frequentar, é uma atividade bastante significativa para a compreensão do espaço e como ele se organiza, das formas que nele estão envolvidas em suas experiências cotidianas (SILVA JÚNIOR; BORGES NETTO, 2012). Essas noções de significados sobre o espaço e nossa localização dentro do mesmo, deve ser trabalhada nas séries iniciais nesse segmento (MONTEIRO, 2010), pois as crianças devem aprender a se localizar nos espaços, tendo como referências a si mesmas, e todos os objetos, construções e sinalizações, que se apresentam e se constituem das mais variadas formas geométricas. No Caderno de Geometria do PNAIC, é feita essa referência e, segundo o mesmo, a criança deve: "[...] reconhecer seu próprio corpo como referencial de localização e deslocamento no espaço [...]" (BRASIL, 1997, p. 5). Ainda, identificamos nos PCN, que:

> [...] a construção do espaço pela criança [...] se inicia, desde muito cedo, pela constituição de um sistema de coordenadas relativo ao seu próprio corpo. É a fase chamada egocêntrica, no sentido de que, para se orientar, a criança é incapaz de considerar qualquer outro elemento, que não o seu próprio corpo, como ponto de referência. Aos poucos ela toma consciência de que os diferentes aspectos sob os quais os objetos se apresentam para ela são perfis de uma mesma coisa, ou seja, ela gradualmente toma consciência dos movimentos de seu próprio corpo, de seu deslocamento. (BRASIL, 2000, p. 125-126).

O *caput* do artigo 5º da portaria nº 826, de 07 de julho de 2017, que institui o PNAIC, traz, em seu texto, a indicação dos objetivos do programa e este artigo, em seu inciso III, identifica a alfabetização matemática como um objetivo a ser alcançado até o terceiro ano do ensino fundamental (BRASIL, 2017), por isso, desenvolver atividades que permitam que a matemática, em especial a geometria, seja introduzida de forma significativa na vida dos alunos torna-se uma ação importante por parte dos educadores, para que seja possível a apropriação e o desenvolvimento de saberes relacionados tanto a compreensão do espaço, como do reconhecimento da forma e como isso tudo está representado na vida cotidiana do aluno (SILVA JÚNIOR; BORGES NETTO, 2012). Essas afirmações coadunam com o que nos declara Sousa: “[...] observamos que os conteúdos destacados pelos professores são importantes, e constituem diferentes possibilidades dos alunos construírem ideias sistematizadas acerca tanto do espaço quanto das formas que nele podemos encontrar” (SOUSA, 2011, p. 12).

Outra atividade desenvolvida durante uma das aulas da disciplina ATM da Matemática Escolar no decorrer do curso de Pedagogia e que foi usada para fonte de observação e análise foi a de construção de objetos tridimensionais – cubos, paralelepípedos, pirâmides triangulares ou quadrangulares, cones e cilindros. O reconhecimento dessas formas pelas crianças deve ser uma habilidade a ser desenvolvida nas séries iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017). A atividade consistia em produzir uma dobradura do objeto, a partir do desenho plano desses rascunhado em uma folha de papel ofício A4, para que, então, se trouxesse a realidade espacial do desenho. Ao fazer a leitura do desenho, compreende-se que o mesmo se trata da planificação do objeto e, com isso, identifica-se que ele pode ser trazido a sua condição espacial.

Para o desenvolvimento cognitivo da criança, essas tarefas se mostram essenciais nos PCN:

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. (BRASIL, 1997, p. 37).

A compreensão dessa relação também deve ser trabalhada nas séries iniciais, para que a criança desenvolva noção de que a imagem plana do objeto, em sua forma tridimensional ou não, pode representar o meio físico em sua forma espacial (MONTEIRO, 2010), como podemos observar no desenvolvimento da primeira atividade do mapa planificado do campus, que simulava uma visão aérea do mesmo, mas que representa o espaço físico tridimensional de nossa realidade. Isso se evidencia nos PCN no seguinte momento:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. A geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. (BRASIL, 1997, p. 55).

Entre os inúmeros objetivos que se apresentam para a necessidade de se ensinar sobre as questões da forma, tem-se o de fazer com que os alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental comecem a reconhecer as formas geométricas na condição plana e tridimensional, assim como suas semelhanças e diferenças (BRASIL, 2010). Dessa maneira, a partir do contato com essas formas, objetiva-se conseguir identificar as mesmas no seu ambiente, na natureza, em toda e qualquer situação cotidiana (MONTEIRO, 2010). De acordo com Sousa:

> Os PCN ressaltam a importância do constante trabalho de observação e construção de figuras para que o aluno possa perceber as semelhanças e diferenças entre elas, e a partir dessa exploração, reconhecer figuras tridimensionais e bidimensionais, bem como a identificação de suas propriedades. (SOUSA, 2011, p. 6).

Outra atividade desenvolvida pelos alunos do curso de Pedagogia destacada para que pudéssemos analisar as relações do ensino da geometria dentro das questões relacionadas ao quesito Espaço e Forma, conforme as determinações dadas pelas leis que orientam o ensino da matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Essa foi a tarefa posterior à construção do objeto tridimensional. Essa atividade foi desenvolvida da seguinte forma: com o objeto já produzido, os alunos deviam desenhar outros objetos na forma plana, que reconhecessem presentes no mundo físico, em seu cotidiano e que se assemelhassem às formas por eles produzidas, descrevendo suas características. Verificamos, no PNAIC, que essa também é uma proposta fundamental no ensino da matemática nas séries iniciais: “[...] descrever, comparar e classificar verbalmente figuras planas ou espaciais por características comuns, mesmo que apresentadas em diferentes disposições [...]” (BRASIL, 2017, p. 6).

Essas atividades, quando propostas nas séries iniciais do Ensino Fundamental, contribuem para que o aluno se reconheça em um mundo composto por formas geométricas diversas e, ainda que essas formas, em sua realidade, não se configurem com a exatidão proposta pela geometria matemática, elas podem ser representadas pela mesma:

> [...] representar informalmente a posição de pessoas e objetos e dimensionar espaços por meio de desenhos, croquis, plantas baixas, mapas e maquetes, desenvolvendo noções de tamanho, de lateralidade, de localização, de direcionamento, de sentido e de vistas [...]. (BRASIL, 1997, p. 5).

O reconhecimento feito pelos alunos de que as formas estão presentes em todas as coisas e seres que nos rodeiam e que podem ser percebidas no nosso dia a dia possibilita, a esse aluno, a compreensão de que todos esses elementos podem ser identificados a partir de uma forma geométrica, e, ainda, que todos eles ocupam um espaço físico e uma localização dentro do espaço (SILVA JÚNIOR; BORGES NETTO, 2012). Segundo os PCN, o desenvolvimento das atividades ligadas à Geometria ajuda no desenvolvimento dos alunos de forma significativa e estimula os mesmos a criarem possibilidades positivas entre suas relações com seu meio e outras áreas de conhecimento:

> [...] estimula a criança a observar, perceber semelhanças, diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir de exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 56).

A partir da análise, identificamos que as atividades matemáticas que envolvem as questões relacionadas à Geometria – propostas para as séries iniciais do Ensino Fundamental – desenvolvidas pelos estudantes de Pedagogia estão alinhadas à legislação do ensino e, se bem aplicadas nas sérias iniciais do Ensino Fundamental, os alunos poderão adquirir aprendizados importantes para o seu desenvolvimento e para o exercício das relações estabelecidas, que envolvem a compreensão do espaço e o reconhecimento das formas geométricas com as quais os mesmos se encontram envolvidos.

3 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa investigação permitiu compreendermos que não existe apenas uma única ação para o ensino da matemática escolar que seja capaz de aplicá-la de forma adequada e eficaz entre os alunos da Educação infantil. Precisamos considerar que a legislação que estabelece as orientações para esse ensino, organiza diretrizes para que ações em conjunto com as práticas educativas proposta pelos professores sejam desenvolvidas de forma a proporcionar um efeito positivo no aprendizado dos alunos dessa etapa da educação escolar, portanto essa relação requer desde o processo formativo o envolvimento desses profissionais com a legislação para o ensino da matemática escolar para que suas práticas estejam alinhadas a elas.

O curso de Pedagogia da universidade Pública pesquisada demonstra estar habilitando profissionais aptos para atuarem em meio às demandas da Educação infantil, no que se refere ao ensino de matemática, mas reconhecemos que apenas a formação inicial não é suficiente para que esses profissionais desenvolvam através de suas práticas educativas, elementos consistentes no que se refere não apenas a educação matemática, mas também relacionadas a outras áreas de conhecimento, sendo a Formação Continuada, um excelente suporte para a reafirmação daquilo que se propõe desenvolver enquanto profissionais da educação.

Identificamos claramente, durante as observações, a realidade dos alunos presentes nas atividades desenvolvidas, pois, em nosso atual contexto social, reconhecemos que muitas vezes até o próprio direito à educação é sonegado a esses sujeitos. Partindo desse princípio, a leitura a ser feita da disciplina e do curso nos direciona para o entendimento de que os professores devem reconhecer, em seus fazeres, a necessidade de incorporar, na formação desses sujeitos, a compreensão daquilo que está presente em sua realidade, seja ela cultural, natural ou social, para que esses ensinamentos matemáticos tenham um significado e produzam um efeito positivo no desenvolvimento do ser crítico, reflexivo e autônomo que deve se tornar esse aluno.

As práticas de ensino desenvolvidas pelos professores das séries iniciais do Ensino Fundamental devem ser orientadas com base nas finalidades propostas nas leis que regulamentam essas práticas. Embora a LDBEN, no segundo inciso do parágrafo terceiro garanta a liberdade não apenas no que diz respeito ao aprender, mas também ao ensinar, compreendemos a necessidade de uma regulamentação para identificar o quê, como e quais conteúdos disciplinares devem ser ensinados, e que devem ser incluídos nos currículos escolares, para que essa liberdade possa verdadeiramente ter um significado.

Esse entendimento deve não apenas permitir que ao professor sejam destinadas somente orientações para o repasse de um conteúdo, mas também expressará um significado plausível para o desenvolvimento da educação dos sujeitos que se encontram em formação. Assim, os processos podem se consolidar potencializados por meio dos significados que o professor ajuda a construir, tendo como base as experiências pessoais dos alunos. Isso significa compreender que o ensino objetivado em si mesmo deve abarcar sentidos que tenham relações com as vivências e experimentações vividas por esses alunos.

Em relação ao ensino da matemática proposta, entendemos que é preciso se dispor a desconstruir a ideia pensada a respeito desse ensino nas escolas e em relação a ela mesma, principalmente no que se refere à Educação infantil. Ela deve estar pautada no universo lúdico da criança, e sob essa ludicidade instrumentalizada, ter o objetivo de estabelecer uma relação entre a criança e a matemática, envoltas em ações que sejam identificadas pelos alunos como algo útil e divertido de se aprender. Dessa forma, ocorrerão resultados positivos na incorporação dessa linguagem pelos alunos, pois a referência comum construída identifica a matemática apenas como uma disciplina enfadonha, que se determina a desenvolver cálculos descontextualizados, que não trazem um sentido para as relações desenvolvidas pelos sujeitos que se utilizam dela.

Portanto, deve-se levar em conta que o ensino da matemática, não deve estar arraigado no desenvolvimento de cálculos e fórmulas sem significado algum para a vida do aluno, nem qualquer relação com a sua realidade. A matemática deve ser um elemento humanizador na educação das crianças, principalmente na que se refere à desenvolvida nas escolas em que frequentam, pois, compreendemos que é na infância que se começa a ter as primeiras noções sobre o mundo exterior e a internalizar as questões relacionadas a ele. O desenvolvimento do aluno nessa fase também deve estar alinhando às questões discutidas por outras ciências, como a Psicologia, Sociologia, Filosofia, Antropologia, Neurociência, dentre outras.

A matemática é uma ciência essencial para a construção e desenvolvimento das relações humanas que historicamente se estabelecem. Ela está presente em todos os momentos da vida humana, por isso se compreende que o ensino da mesma não deve estar segmentado por leis reguladoras, mas sua função social pode e deve ser utilizada para além de compreensões minimalistas na formação de sujeitos. Esse tipo de compreensão incompleta muitas vezes se alinha unicamente ao atendimento do mercado e com a manutenção do sistema capitalista, que tem por objetivo formar apenas mão de obra com conhecimento e uso técnico da matemática, desconsiderando a necessidade de formar sujeitos humanizados e conscientes de sua realidade e seu meio, seja ele natural ou social.

Por meio da análise das atividades desenvolvidas durante a disciplina ATM da Matemática Escolar, foi possível romper com a ideia de uma matemática voltada apenas para números e cálculos nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Não é apenas o contar que se faz importante para o desenvolvimento e para vida do aluno, mas "o porquê" contar instiga um ser humano à maiores reflexões, e que compreende que a utilização da matemática exerce também uma função social, com a qual o mesmo pode dinamizar sua ação como sujeito ativo e construtor da sua realidade e de seu mundo.

A importância de se ensinar geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental é identificada em todos os documentos legais formulados com o objetivo de regulamentar o ensino no país. Isso mostra a concepção que se tem sobre a mesma e sobre sua influência, necessária para o desenvolvimento dos alunos. Embora não se permita mostrar explicitamente a serviço de que interesses estão essas diretrizes, o ensino de geometria permite ao professor desenvolver, no aluno, noções sobre as formas planas e tridimensionais, o espaço, a localização dos objetos no espaço e como a compreensão disso tudo nos permite organizar nossa vida pessoal, coletiva, nossas relações sociais, nosso tempo e espaço, e toda e qualquer situação em que a ação humana esteja presente.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as **Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília: Diário Oficial, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: Caderno de Geometria. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Referencial Curricular Nacional para Educação Infantil**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciclo II: Ensino e Aprendizagem de Matemática no 2º ciclo. Brasília: MEC/SEF. Brasília, 2000.

BRASIL. **Portaria nº 826, de 07 de julho de 2017**. Dispõe sobre o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa - PNAIC, suas ações, diretrizes gerais e a ação de formação no âmbito do Programa Novo Mais Educação - PNME. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf. Acesso em: 24 nov. 2019.

NACARATO, A. M; MENGALI, B. L. S; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: Tecendo fios do ensinar e do aprender.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

MONTEIRO, P. **As Crianças e o Conhecimento Matemático: experiências de exploração e ampliação de conceitos e relações matemáticas**. In: I SEMINÁRIO NACIONAL: CURRÍCULO EM MOVIMENTO, 1., 2010, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: Perspectivas Atuais, 2010.

SILVA JÚNIOR, A. F; BORGES NETTO, M. **Noções De Tempo E Espaço E Literatura Na Educação Infantil: Diálogos Em Sala De Aula**. Ensino Em Re-Vista, Uberlândia, v. 19, n. 2, dez. 2012.

SOUZA, G. R. **O Ensino Da Geometria Nos Anos Iniciais Do Ensino** Fundamental. Revista Pandora Brasil, n. 27, fev. 2011.

CAPÍTULO 12

ABRINDO PORTAS: UMA GENERALIZAÇÃO DO PROBLEMA DE MONTY HALL

Data de aceite: 23/03/2020

Data de submissão: 17/01/2020

Ana Caroline de Almeida Silva
Universidade Federal Fluminense - UFF
Niterói – Rio de Janeiro
http://lattes.cnpq.br/3657350923435278

João Vitor Teodoro
Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Campus Universitário de Iturama
Iturama – Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/9933198615339867

Douglas Silva Maioli
Universidade Estadual de Campinas - Unicamp
Campinas – São Paulo
http://lattes.cnpq.br/4477954531441251

RESUMO: Este texto apresenta uma simulação computacional e uma modelagem, por meio de probabilidade condicional, das probabilidades de uma generalização do problema de Monty Hall, que envolve um jogo tradicional de escolha e abertura de portas e premiação do participante com o objeto escondido por estas, considerando que haja mais portas no palco, generalizando a situação original de apenas três, objetivando verificar se nesta situação é mais vantajoso trocar ou manter a porta escolhida inicialmente. Foi possível concluir que sempre é viável efetuar a troca, de forma a maximizar a probabilidade de obter a melhor premiação.

PALAVRAS-CHAVE: Monty Hall, Probabilidade, Jogo, Simulação.

OPENING DOORS: A GENERALIZATION OF THE MONTY HALL PROBLEM

ABSTRACT: This text presents a computational simulation and a conditional probability modeling of the probabilities of a generalization of the Monty Hall problem, which involves a traditional game of choice and opening of doors and prize of the participant with the object hidden by them, considering that there are more doors on the stage, generalizing the original situation of only three, aiming to verify if in this situation it is more advantageous to change or maintain the door initially chosen. It was possible to conclude that it is always feasible to make the exchange, in order to maximize the probability of obtaining the best award.

KEYWORDS: Monty Hall, Probability, Game, Simulation.

1 I INTRODUÇÃO

O problema de Monty Hall, também

conhecido como o problema das três portas, surgiu a partir de um jogo do programa televisivo americano *Let's Make a Deal* (Vamos Fazer um Acordo) apresentado por Monty Hall. No palco se encontrava três portas, de modo que, atrás de uma delas havia um carro e em cada uma das demais, um bode. E o jogo se desenvolve da seguinte maneira:

- Primeiramente o participante escolhe uma das três portas.
- Logo após, o apresentador do programa, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas pelo participante, revelando um bode.
- Então, o convidado pode optar em permanecer com a porta selecionada inicialmente ou trocar pela outra porta que ainda permanece fechada, sendo contemplado com o prêmio correspondente à porta de sua escolha.

O problema está em determinar se a melhor opção é mudar de porta ou, se em ambas as alternativas, o jogador tem a mesma probabilidade de ganhar o carro, já que restaram duas portas.

Assim que o problema foi lançado, houve várias tentativas de resolvê-lo, causando calorosas discussões entre matemáticos famosos sobre a solução correta. O problema foi enviado a Marilyn vos Savant, famosa por entrar no Guinness Book por ter o maior QI registrado. Ela afirmou que era vantajoso trocar de porta, porém, 92% dos norte-americanos, quase mil PhDs e o renomado matemático Paul Erdös achavam que ela estava errada (MLODINOW, 2009).

Intuitivamente, pode-se pensar que após o apresentador abrir uma porta que contém um bode, o participante tem um novo dilema de escolha que envolve duas portas e um prêmio desejado, tendo 50% de chance de ganhar este prêmio, ou seja, a mesma chance de ganhar trocando ou mantendo a porta inicial e, ainda, com alguma vantagem, já que a probabilidade de escolher a porta correta inicialmente era de 33,33% e passou a ser 50%. No entanto, esta resposta está incorreta.

2 I EXPLORANDO O JOGO TRADICIONAL COM TRÊS PORTAS

Diferente do que muita gente acredita, o melhor é trocar de porta, uma vez que a escolha da porta que será aberta pelo apresentador não é feita aleatoriamente, ela depende da primeira escolha do participante. O apresentador nunca abrirá uma porta premiada! Ao abrir uma porta não premiada ele não gera um novo jogo, mas dá informações adicionais ao participante sobre a localização do prêmio. Mudar de porta também depende da porta escolhida inicialmente, aumentando as chances de ganhar. Mostraremos que, após aberta uma porta pelo apresentador, a probabilidade de ganhar o prêmio trocando de porta passa de 33,33% para 66,67%.

Como há uma porta com carro e duas com cabra, então, inicialmente a probabilidade de escolher a porta com o carro é de 1⁄3 e a de escolher uma porta com cabra é de 2⁄3, entretanto, após uma das portas com uma cabra ser descartada pelo apresentador, devemos utilizar probabilidade condicional, ou seja, calcular a probabilidade do jogador ganhar o carro, dado que determinada porta foi descartada, para tal, é apresentado o diagrama da figura 1.

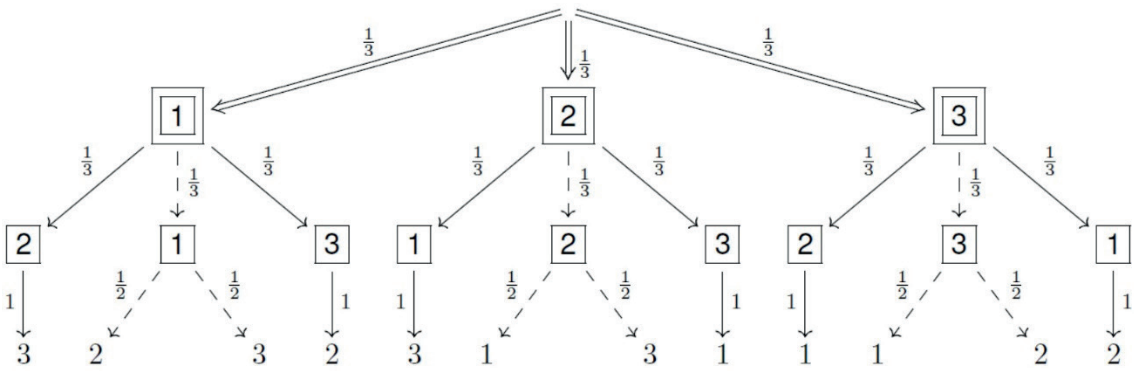


Figura 1. Diagrama de árvore para o caso de três portas no jogo das portas.

Sejam os números em caixa dupla as portas com o carro, os números em caixa simples as portas escolhidas pelo jogador, e os números não envoltos por caixa as portas abertas pelo apresentador. Além disso, cada caminho representa um possível evento, de forma que, aqueles demarcados por setas tracejadas representam os casos em que a porta escolhida inicialmente pelo jogador é a premiada, aqueles demarcados por setas simples representam os casos cuja porta escolhida inicialmente pelo jogador não é a premiada e as setas duplas determinam os casos possíveis para porta premiada. Os valores em meio às setas, determinam a probabilidade correspondente ao evento desta seta. Sendo assim, o cálculo da probabilidade de eventos sucessivos é dado pelo produto das probabilidades das setas associadas. Deste modo, para calcular a probabilidade de o jogador ganhar o carro sem trocar a porta escolhida desde o início, multiplicamos as probabilidades de cada caminho demarcado por setas pontilhadas e depois somamos esses resultados:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

De forma similar, calculemos a probabilidade de o jogador ganhar o carro se trocar de porta, ou seja, nos casos onde as setas são simples:

$$\frac{1}{3}\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}\frac{1}{3}1=\frac{2}{3}$$

O cálculo das probabilidades associadas ao problema de Monty Hall também pode ser realizado utilizando o teorema de Bayes, que se utiliza das probabilidades condicionadas.

A partir desta ideia surgiram inúmeras variações do problema. Um problema similar, porém, mais complexo, pode ser obtido considerando que haja mais portas no palco. Neste cenário ainda continua sendo mais vantajoso trocar de porta?

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Diante à necessidade de uma análise prévia desta situação, utilizou-se simulação computacional para obter valores aproximados para as probabilidades. Para tal, empregando o software estatístico R, foi implementado um algoritmo que simula 1 milhão de ensaios para cada número de portas dentre 3, 4, 5, 10, 50, 100 e 1000. Representamos pelo gráfico da figura 2 a comparação das frequências relativas de vitória do competidor quando troca e quando permanece na porta escolhida a priori, estabelecendo relação com a concepção frequentista de probabilidade (DANTAS, 2008):

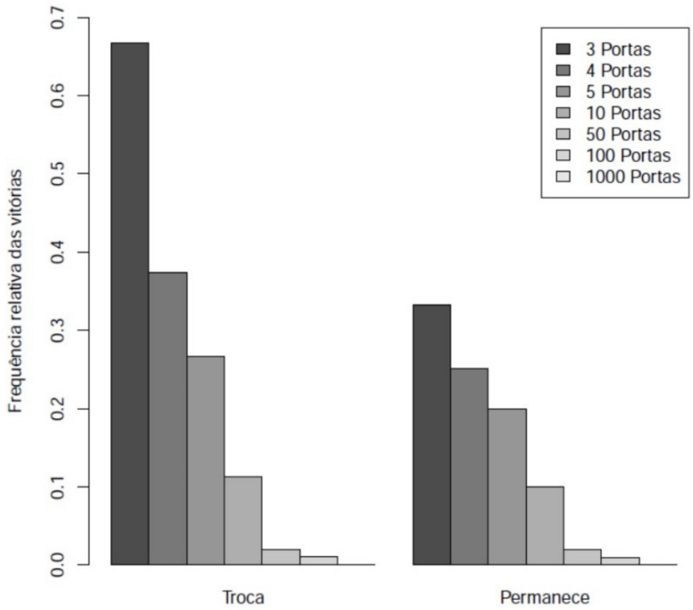


Figura 2. Gráfico de frequência relativa da simulaçãodo jogo para 3, 4, 5, 10, 50, 100 e 1000 portas.

Portanto, por meio da avaliação gráfica, é possível concluir que, para estes casos, com o número maior de portas, é viável trocar. Mas, apenas com a simulação não é possível obter os valores exatos das probabilidades, o que impossibilita estudar os resultados para uma quantidade qualquer de portas, principalmente maiores que 1000. Assim, elaboramos, por meio de uma análise sistemática, expressões que determinam as probabilidades conforme o número de portas.

Utilizando um diagrama de árvore para o caso geral de n portas, com $n \geq 3$ (o jogo não faz sentido quando há menos que três portas), podemos determinar uma expressão matemática para calcular a probabilidade de ganhar trocando ou não de portas.

Para facilitar o estudo sistemático do problema é conveniente dividi-lo em dois casos que dependem da escolha inicial do participante, sendo o primeiro quando ele escolhe inicialmente a porta premiada e o segundo quando escolhe inicialmente uma porta não premiada.

É importante salientar que o interesse do jogador é sempre ganhar, por isto, deve-se supor as condições necessárias para que esse desejo se concretize, portanto, nos dois casos que apresentaremos iremos calcular a probabilidade de o participante ganhar. Sem perda de generalidade, consideraremos o caso em que a porta número 1 seja premiada. Os casos em que outras portas são premiadas são equivalentes, e são contabilizados ao considerar o número total de portas existentes no jogo, multiplicando-o às probabilidades. Os valores nas setas determinam a probabilidade correspondente ao evento da mesma, e em ambos os casos o cálculo da probabilidade de eventos sucessivos é dado pelo produto das probabilidades das setas associadas.

3.1 Caso 1: Participante escolhe inicialmente a porta premiada

É evidente que, ao escolher inicialmente a porta premiada, o participante ganha se, e somente se, mantém a porta escolhida até o fim. Portanto, este caso determina a probabilidade de ganhar dado que o participante mantém a porta escolhida inicialmente como consta no diagrama da figura 3.

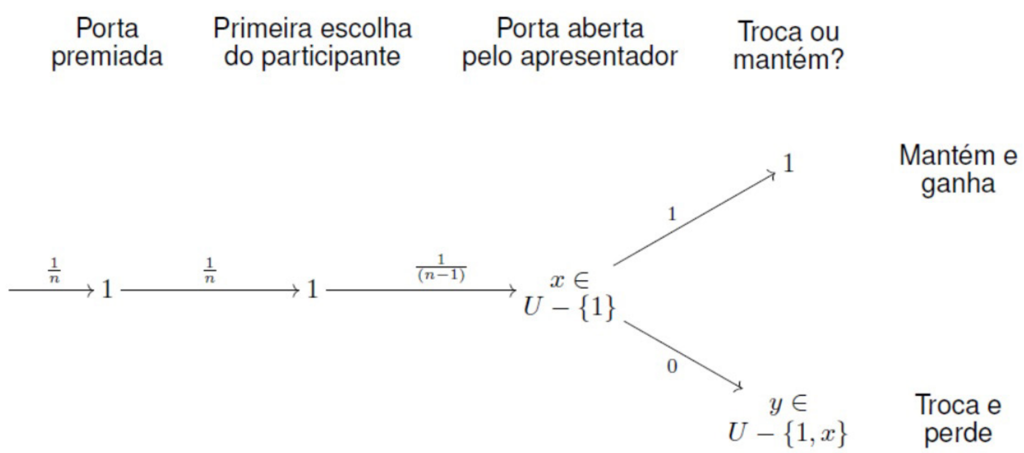


Figura 3. Diagrama de árvore para o caso em que o participante escolhe inicialmente uma porta premiada no jogo das portas.

Em que, U é o conjunto das portas dispostas no palco.

O participante pode escolher apenas um elemento no conjunto universo de portas U, e para satisfazer este primeiro caso, sua escolha deve ser o único elemento premiado do conjunto de portas. O apresentador pode escolher um elemento qualquer do conjunto de portas, não premiada, e para que o jogador ganhe, é necessário que ele mantenha a porta. Sendo assim, diante a probabilidade a ser calculada (P(GIM)), a probabilidade de ele trocar de porta, é nula, pois a priori já é certo que ele mantém. Observe que manter e perder ou trocar e ganhar não são cenários possíveis, mesmo sem a informação a priori.

Pode-se determinar P(GIM) como o produto das probabilidades das ocorrências associadas ao evento em que ele mantém e ganha, multiplicado pelo número de portas que pode ser a premiada (n) e pelo número de portas que o apresentador pode abrir (n-1):

$$P(G|M) = n(n-1)\left[\frac{1}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n-1}1\right] = \frac{1}{n}$$

3.2 Caso 2: Participante escolhe inicialmente uma porta não premiada

Indiscutivelmente, nessas condições, o jogador ganha somente se trocar de porta. Logo, este caso define a probabilidade de ganhar dado que o participante troca de porta (PGIT)) como mostra o diagrama apresentado na figura 4:

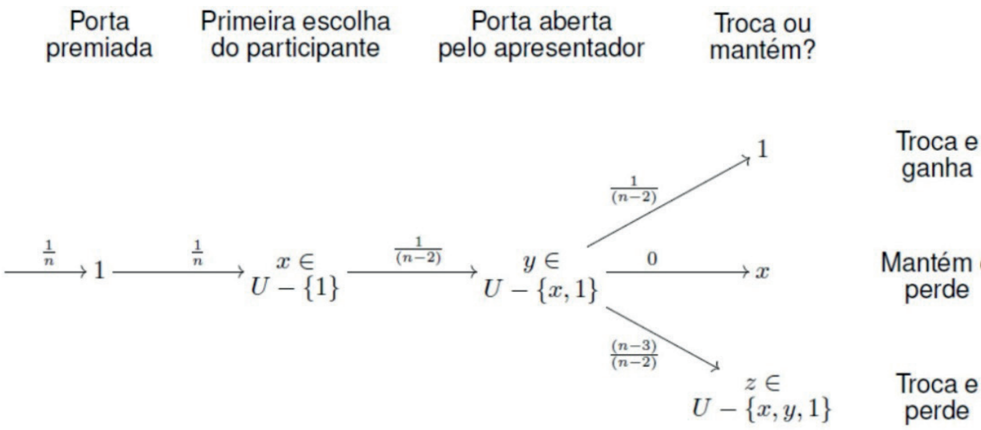


Figura 4. Diagrama de árvore para o caso em que o participante escolhe inicialmente uma porta não premiada no jogo das portas.

Em que, U é o conjunto das n portas dispostas no palco.

Neste caso, o participante pode escolher um elemento qualquer do conjunto de portas não premiadas, então o apresentador pode escolher um elemento qualquer do conjunto universo exceto a porta premiada e a escolhida pelo jogador. Para que o jogador ganhe nesta situação, é necessário que ele troque de porta. Porém, ao trocar, ele pode fazer uma boa ou uma má escolha, trocando pela porta premiada e ganhando ou trocando por uma outra porta sem o prêmio (ou porta com o bode) e perdendo. Assim, a probabilidade de ele ganhar dado que troca fica dividida entre dois casos, um de sucesso e um de fracasso, enquanto que, diante a probabilidade a ser calculada (P(GIT)), manter a escolha inicial não pode ocorrer, dado a informação a priori que ele troca. Observemos que, manter e ganhar é um cenário impossível, mesmo sem a informação a priori.

Para determinar (P(G|T) faz-se o produto entre o número de portas que podem estar premiadas (η), o número de portas não premiadas cujo participante pode escolher (η -1), o número de portas que o apresentador pode abrir (n -2) e o produto das probabilidades das ocorrências associadas ao evento em que ele troca e ganha:

$$P(G|T) = n(n-1)(n-2)\left[\frac{1}{n}\frac{1}{n}\frac{1}{n-2}\frac{1}{n-2}\right] = \frac{n-1}{n(n-2)}$$

Os valores de probabilidade calculados por meio da expressão probabilística foram confrontados com os valores obtidos na simulação (Figura 2) e, assim, pôde-se verificar a sua validade, conforme apresentado na tabela 1.

Número de portas (n)	Probabilidade de Ganhar	
	Trocando $\left(\frac{n-1}{n(n-2)}\right)$	Mantendo $\left(\frac{1}{n}\right)$
3	0,66	0,33
4	0,37	0,25
5	0,26	0,2
10	0,1125	0,1
50	0,0204	0,02
100	0,0101	0,01
1000	0,001002	0,001

Tabela 1. Probabilidade de ganhar trocando ou mantendo a porta, por número de portas.

Após resolver apenas o problema original pode-se conjecturar que as probabilidades de ganhar trocando e mantendo são sempre complementares, quando na verdade não são, fato evidenciado na tabela 1. O jogo com três portas é um caso especial do problema, em que no Caso 2, onde o participante escolhe inicialmente uma porta não premiada ao trocar de porta ele tem apenas uma opção de escolha que é a porta premiada, enquanto nos outros casos é possível trocar e perder.

É possível perceber, através do estudo de limites das expressões obtidas que, conforme o número de portas aumenta, as probabilidades de vencer tendem a zero.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n(n-2)} = 0$$

Já que esta probabilidade de ganhar, trocando ou não, fica reduzida conforme se aumenta o número de portas no jogo, pois, se considerarmos $n_1 < n_2$ teremos $\frac{1}{n_2} < \frac{1}{n_1}$ e $\frac{n_2-1}{n_2(n_2-2)} < \frac{n_1-1}{n_1(n_1-2)}$. . Este fato também pode ser observado no gráfico (figura 2), pois ele decresce.

Note que $\frac{n-1}{n(n-2)} > \frac{1}{n}$ é sempre verdade para todo n ≥ 3 com n natural.

Com efeito, pois

$$-1 > -2$$

$$n-1 > n-2$$

$$n(n-1) > n(n-2)$$

$$\frac{n-1}{n(n-2)} > \frac{1}{n}$$

Em que, na última passagem, houve a multiplicação por $\frac{1}{n^2(n-1)}$.

Além disso, a diferença entre a probabilidade de ganhar trocando e a de ganhar mantendo a porta diminui quando n cresce, pois $\frac{n_2-1}{n_2(n_2-2)} - \frac{1}{n_2} < \frac{n_1-1}{n_1(n_1-2)} - \frac{1}{n_1}$ se $n_1 < n_2$.

De qualquer forma, trocar de porta sempre fornece maior chance de ganhar.

É possível determinar também, a probabilidade de ganhar (P(G)), utilizando o Teorema de Probabilidade Total:

$$P(G) = P(T)P(G|T) + P(M)P(G|M)$$

Em que, P(T) é a probabilidade de o jogador trocar a porta e P (M) é a probabilidade de o jogador manter a porta escolhida inicialmente.

De modo que P (T) = 1 - P(M), ou seja, as probabilidades de o jogador trocar e de manter são complementares.

Podemos supor, por exemplo, que o jogador decide aleatoriamente entre trocar e manter, com mesmo peso, ou seja, $P(T) = P(M) = \frac{1}{2}$, então P(G) = $\frac{1}{2}P(G|T) + \frac{1}{2}P(G|M)$, assim, dados P(G|T) e P(G|M) já calculados, temos:

$$P(G) = \frac{1}{2}\frac{n-1}{n(n-2)} + \frac{1}{2}\frac{1}{n} = \frac{2n-3}{2n(n-2)}$$

Perder é o complementar de ganhar, assim, P(P) = 1 - P(G)

Para $n = 3,\ P(G) = P(P) = \frac{1}{2}$, ou seja, no caso em que o jogador não sabe que manter é mais vantajoso e decide aleatoriamente se troca ou não, tem mesma probabilidade de ganhar ou perder.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mesmo aumentando o número de portas, ainda é vantajoso para o participante trocar de porta, uma vez que a probabilidade de ele ganhar trocando é sempre maior que a probabilidade de ele ganhar mantendo a porta escolhida inicialmente. Trocar de porta não garante a vitória, mas é a melhor estratégia. Outros estudos podem ser realizados variando o número de portas abertas pelo apresentador, o número de portas que o competidor pode escolher e o número de portas premiadas.

REFERÊNCIAS

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade:** Um Curso Introdutório. Vol. 10. 3 ed. São Paulo: Edusp, 2008.

MLODINOW, L. **The drunkard's walk**: How randomness rules our lives. 1 ed. London: Penguin Books, 2009.

CAPÍTULO 13

O JOGO CORRIDA DE CAVALOS COMO RECURSO PEDAGÓGICO NO ENSINO DA COMBINÁTORIA E DA PROBABILIDADE COM ALUNOS DO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Data de aceite: 23/03/2020

Data de submissão: 05/02/2020

Patricia de Medeiros Silva
Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Educação e Saúde
Cuité – PB
http://lattes.cnpq.br/7297418381162966

Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos
Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste
Caruaru – PE
http://lattes.cnpq.br/4866964083641498

RESUMO: O presente trabalho foi delineado para identificar os conceitos sobre combinatória e probabilidade e os problemas que emergem em situações de jogo. A pesquisa possui cunho qualitativo e procura compreender o que se revela em um trabalho pedagógico com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental feito a partir da perspectiva da problematização para responder ao problema de investigação "Quais as contribuições do jogo desenvolvido em uma prática problematizadora no desenvolvimento dos conceitos combinatórios e probabilísticos dos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II?" Os objetivos são: identificar as ideias sobre combinatória que surgem do processo presente a problematização em sala de aula e buscar indicativos da contribuição de um estudo com jogos para o desenvolvimento de conceitos combinatórios. Para tanto, foi desenvolvido o jogo "Corrida de Cavalos" em contexto de sala de aula. Os sujeitos da pesquisa foram 27 alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental, com idades entre 12 e 18 anos. Os dados foram analisados qualitativamente, os resultados mostraram que no contexto de jogo os alunos observaram diversas possibilidades e reflexões para uma melhoria ou aperfeiçoamento das estratégias de jogo e o desenvolvimento de conceitos de combinatória e probabilidade aperfeiçoando seus conceitos matemáticos. A pesquisa possibilitou aos alunos observar possibilidades combinatórias, a regularidade de possibilidades de somas que os levaram a conjecturar hipóteses, a levantar dados, a fazer registros e analisar os procedimentos decorrentes das atividades relacionadas aos jogos. Além disso, instigou-os a leitura e interpretação de regras dos jogos, a resolução de problemas e a realização de registro.

PALAVRAS-CHAVE: Jogo. Combinatória. Probabilidade. Ensino e aprendizagem. Ensino Fundamental.

THE HORSE RACING GAME AS A PEDAGOGICAL RESOURCE IN THE TEACHING OF COMBINATIRIA AND PROBABILITY WITH STUDENTS OF THE 8TH YEAR OF ELEMENTARY SCHOOL

ABSTRACT: The present work was outlined to identify the concepts about combinatorial and probability and the problems that emerge in game situations. The research has a qualitative nature seeks to understand what is revealed in a pedagogical work with students of the 8th year of elementary school done from the perspective of problematization to respond to the research problem "What contributions of the game developed in a problematizing practice in the development of the combinatorial and probabilistic concepts of 8th graders of Elementary School II?" The objectives are: to identify the ideas about combinatorial that arise from the present process problematization in the classroom and seek indicative of the contribution of a study with games to the development of combinatorial concepts. To do so, the game "Horse Racing" was developed in the context of the classroom. The research subjects were 27 students from the 8th Year of Elementary School, aged between 12 and 18 years. The data were analyzed qualitatively, the results showed that in the context of the game the students observed several possibilities and reflections for the improvement of game strategies, and consequently the development of concepts of and probability by perfecting their mathematical concepts. The research allowed students to observe combinatorial possibilities, the regularity of sum possibilities that led them to conjecture hypotheses, collect data, make records and analyze the procedures arising from the activities related to games. In addition, it urged them to read and interpret game rules, problem solving and record.
KEYWORDS: Game. Combinatorial. Probability. Teaching and learning. Elementary school.

1 I INTRODUÇÃO

A pesquisa que apresentamos neste texto teve como foco o ensino da análise combinatória e o pensamento probabilístico no Ensino Fundamental II por meio de jogo. O motivo que nos instigou foi pensar em uma maneira de estudar a combinatória e a probabilidade com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental visando que conceitos fossem desenvolvidos de forma significativa e de maneira interativa. Desse modo, optamos pelo trabalho com jogo, uma vez que essa prática pedagógica não é comum com a turma investigada.

Diante do exposto, entendemos que o jogo pode trazer contribuições para o ensino de combinatória e probabilidade em perspectiva problematizadora que possibilita um aprendizado significativo.

A partir de tais considerações, iniciamos nossa pesquisa objetivando responder a seguinte questão de pesquisa:

- Quais as contribuições dos jogos desenvolvidos em uma prática problematizadora no desenvolvimento de conceitos combinatórios e probabilísticos dos alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II?
- Tal questão nos conduziu aos seguintes objetivos:
- Identificar conceitos de combinatória e probabilidade tendo como contexto a problematização em sala de aula;
- Buscar indicativos da contribuição de um estudo com jogo para o desenvolvimento de conceitos combinatórios.

Para tanto, selecionamos o jogo "corrida de cavalos" em uma perspectiva problematizadora.

O jogo possibilita uma educação diversificada devido à participação criativa, livre e crítica que transforma o ambiente de estudo estimulando à autonomia dos alunos ao ser inseridos numa vivência de relações. Apresentar um ensino qualificativo e de teor significativo por meio das potencialidades do jogo representa estimular o pensar, (re) criar, analisar e relacionar habilidades de resolução de problemas, pois:

> [...] o jogo é mais que um problema, é um problema dinâmico, limitado pelas regras e dependente da ação do adversário, por meio de suas jogadas, sendo que tudo isto é realizado num ambiente de trocas entre os sujeitos que jogam. Jogar é uma forma lúdica de resolver um problema e/ou vários problemas, motivando, naturalmente, o aluno a pensar... Assim sendo, o que motiva o aluno a solucionar o problema do jogo (vencer!) é seu próprio conteúdo, que gera a necessidade do domínio de diversas formas de resolver o problema (GRANDO, 1995, p. 118).

Ao se pensar no jogo como metodologia de ensino pode se ponderar que possam surgir dificuldades para esse tipo de trabalho em sala de aula, visto que tanto os alunos como os professores estão adaptados ao ensino tradicional e de início podem confundir com brincadeiras sem intenção pedagógica.

> Os jogos representam um papel importante. Por outro lado, permitem que comece a haver na aula mais trabalho independente por parte dos alunos: estes aprendem a respeitar as regras, a exercer papéis diferenciados e controles recíprocos, a discutir, a chegar a acordos. [...] Estes jogos utilizados em função do cálculo mental, podem ser um estímulo para a memorização, para aumentar o domínio de determinados cálculos (GRANDO, 2004, p. 44).

Para o desenvolvimento de conceitos matemáticos Grando (2004) apresenta a posição do professor em sete "momentos de jogo". A autora defende que ao se pensar no jogo como recurso pedagógico em sala de aula, tais momentos são relevantes:

1. Momento: Familiarização dos alunos com o material do jogo:

Este momento consiste no primeiro contato dos alunos com o material do jogo, construindo ou experimentando e identificando os objetos já conhecidos, por exemplo, os dados, o tabuleiro e as peças; fazendo as simulações de quais jogadas seriam possíveis ou não.

2. Momento: Reconhecimento das regras

No segundo momento os alunos reconhecem as regras do jogo que podem ser expostas de várias maneiras: lidas pelos próprios alunos, explicadas pelo professor, seguida de exemplos para tornar mais explicito o que se pede no jogo, etc.

3. Momento: O "jogo pelo jogo"

É um momento em que a espontaneidade se destaca, possibilitando ao aluno jogar para garantir a prática que foi exposta nas regras; algumas noções matemáticas podem estar presentes no jogo, aprimorando a compreensão por meio do cumprimento das regras.

4. Momento: Intervenção pedagógica verbal

Nesse momento nas intervenções verbais do professor surgem vários questionamentos, além das observações feitas por ele para que os alunos desenvolvam o senso crítico e lógico para analisar suas jogadas e os procedimentos utilizados na resolução de problemas do jogo.

5. Momento: Registro do jogo

Utilizando a linguagem matemática os alunos anotam os pontos, os procedimentos e os cálculos utilizados no jogo. Partindo destes registros, o professor pode conhecer melhor os alunos, por saber quais estratégias foram utilizadas e o raciocínio envolvido nas ações.

6. Momento: Intervenção escrita

Este é o momento da problematização das situações do jogo a partir dos registros feitos pelos alunos. Ele é de suma importância nas relações professor-aluno e aluno-aluno para observarem e resolverem as situações-problema apresentadas durante o jogo e os limites e as possibilidades dos alunos. O professor neste momento tem o papel de registrar os conceitos matemáticos apresentados no jogo.

7. Momento: Jogar com competência

Neste momento o aluno se envolve na situação real do jogo; é capaz de analisar todas as situações e elaborar as suas próprias estratégias, percebidas e analisadas durante a resolução de problemas intervinda dos momentos anteriores.

Dentre os sete momentos do jogo propostos por Grando (2004), destaca-se a estrutura de um trabalho pedagógico no qual o jogo é uma ferramenta importante nas aulas de matemática. Nesse contexto, o professor tem o papel importante, ele vai ser o mediador entre o jogo, os conceitos matemáticos e o aluno. Desse modo, os sete momentos propostos por Grando (2004) indicam que o jogo proporciona um importante recurso no ensino da matemática.

O resgate da vontade de apreender, é um dos objetivos que o jogo oferece, testando as habilidades matemáticas dos alunos, bem como a compreensão de regras por meio da concentração, da autoconfiança e de relações estabelecidas com situações-problema vivenciadas em seu dia-a-dia. O jogo dispõe de regras e interação social que oferece possibilidades de tomada de decisões, reunindo e desenvolvendo competências a cerca da essência das regras, de conceitos diversos, além das relações afetivas que partem do jogo. Nesta situação, a linguagem tem papel importante, pois por meio dela o aluno toma consciência das ações que desenvolve no jogo.

A convivência em grupo indica a importância da busca pelos métodos, objetivos e conteúdos necessários para o processo educativo coletivo, possibilitando com este trabalho o desenvolvimento de conceitos matemáticos significativos.

Durante o jogo, os alunos criam estratégias de jogadas, fazem e refazem as ações, aperfeiçoando suas estratégias a partir de cada jogada, propondo ao adversário um nível mais difícil, gerando assim, em ambos, novos conhecimentos e pensamentos que os levam a um ciclo de reflexão, no qual utilizam as habilidades lógicas e de resolução de problemas, deixam de seguir "roteiro" e analisam cada erro ou acerto, desenvolvem assim, conhecimentos sobre o movimento do jogo.

Alguns alunos podem não compreender a relação entre a matemática e o jogo, por suas características de tempo, espaço e troca de conhecimentos. O jogo nas aulas de matemática possibilita discussões a partir de hipóteses e estratégias para tornar-se vencedor. A troca de informações e opiniões possibilita que novas estratégias sejam desenvolvidas pelos alunos.

De acordo com Morgado *et al* (1991, p. 1) "de modo geral, podemos dizer que a análise combinatória é a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas" e "fundamentalmente, a formação de agrupamentos de elementos, numa abordagem quantitativa, a partir de um determinado conjunto, sendo esses elementos submetidos a condições previamente estabelecidas" Julianelli *et al* (2009, p. 1).

Para Dornelas (2004), a análise combinatória pode ser descrita como "o campo da matemática que se ocupa em estudar, examinar, descrever e determinar as diferentes e possíveis classificações que podemos obter e observar de um conjunto dado e de seus elementos constitutivos" (p. 20-21).

Como indica os PCN, a principal finalidade para o estudo de combinatória são os problemas de contagem, pois tem como objetivo:

> [...] levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades (BRASIL, 2001, p.52).

Segundo Morgado et al (1991, p. 119) "A definição de probabilidade como quociente do número de "casos favoráveis" sobre o número de "casos possíveis» foi a primeira definição formal de probabilidade, e apareceu pela primeira vez em forma clara na obra de Liber de Ludo Aleae de Jerônimo Cardano (1501-1576)".

De acordo com os PCN, a principal intenção para se estudar probabilidade:

> [...] é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 2001, p.52)

Os jogos, de acordo com os PCN, favorecem o trabalho com resolução de problemas em sala de aula:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 2001, p.46).

De acordo com Grando e Marco (2007, 101), no jogo “o inesperado traz para o aluno um misto de sensações de ansiedade, medo, angústia, incerteza, hesitação, alegria, ou seja, a situação dilemática em que se sente desfiado a resolver o problema para, assim, vencer o jogo”. Além disso, o diálogo estabelecido em momentos de jogo avalia o desempenho do grupo ao organizar e argumentar o pensamento utilizado de forma a contribuir nas atitudes apresentando desafios e soluções, desenvolvendo o senso crítico e a criação de estratégias podendo, assim, alterar os resultados caso não sejam positivos para determinada situação problema.

2 I METODOLOGIA

As características da pesquisa qualitativa são abordadas na Educação por diversos autores, mas nos pautamos em D’Ambrósio e D’Ambrósio (2006), que são pesquisadores na área da Educação Matemática. Eles destacam que nas últimas décadas a pesquisa qualitativa tem sido considerada a mais adequada para a Educação, uma vez que “tem como foco entender e interpretar dados e discursos mesmo quando envolve grupos de participantes” (D’AMBRÓSIO; D’AMBRÓSIO, 2006, p. 78) e depende da relação observador-observado.

Os dados desta pesquisa foram produzidos a partir dos seguintes instrumentos:

- Registros escritos (RE) dos grupos de alunos em folha impressa fornecida pela professora, realizados durante as atividades;
- Registros escritos pela professora-pesquisadora no diário de campo (DC);
- Gravações de áudio (GA) de diálogos estabelecidos com os alunos.

A pesquisa de campo teve início com a seleção da tarefa para o desenvolvimento em sala de aula. Dessa forma, antes de começar a pesquisa de campo, elaboramos o seguinte roteiro para o desenvolvimento da tarefa:

A partir do roteiro, o material utilizado na tarefa foi organizado previamente e incluía:

- Folha impressa com a apresentação da tarefa e situações-problemas;
- Dados coloridos;
- Tabuleiro/folhas impressas dos jogos;
- Canetas coloridas.

Ao desenvolver a tarefa, tínhamos como objetivo verificar as ideias sobre combinatória na tarefa que se refere ao jogo “Corrida de Cavalos” Santos (2015, p. 185), que apresentamos na sequência.

Tarefa “Corrida de Cavalos”

Regras do jogo:

- Os números do tabuleiro correspondem aos cavalos.
- Cada jogador pode apostar em três cavalos.
- A aposta pode ser em um único cavalo, em dois ou em três.
- A aposta deve ser registrada sob o(s) número(s) do(s) cavalo(s) escolhido(s).
- O cavalo avança a partir da soma dos números extraídos do lançamento de dois dados que representa o número do cavalo.
- O avanço é marcado com um x no diagrama em frente ao número obtido.
- Vence o cavalo que primeiro se colocar na linha de chegada.

CHEGADA													
5													
4													
3													
2													
1													
LARGADA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
REGISTRO DAS APOSTAS													

Tabuleiro: Jogo “corrida de cavalos”

Situações-problemas

1. Registrem na tabela o número dos cavalos que venceu em cada jogada?

1ª jogada	2 ª jogada	3 ª jogada	4 ª jogada	5 ª jogada

2. Há algum cavalo que tem mais ou menos chances de vencer que o outro? Justifique sua resposta.

3. O registro feito no tabuleiro ajudou você a fazer uma análise do jogo? Por quê?

Para o desenvolvimento da pesquisa os alunos foram agrupados em duplas, pois compreendemos que a quantidade de alunos depende dos seus objetivos da tarefa. No caso específico do jogo, entendemos que agrupar mais que dois alunos podem dificultar os resultados da pesquisa. As duplas foram formadas aleatoriamente, pois consideramos que a troca de opiniões/informações com diversos colegas de classe tem a oportunidade de conhecer outros pontos de vista e aperfeiçoar os próprios. Consideramos ainda, que alguns alunos se destacam perante seu colega de dupla, pois embora os alunos trabalhassem coletivamente, cada um tem seu potencial intelectual e de liderança, por exemplo, a responsabilidade, a agilidade, a perspicácia e perseverança para descobrir sempre novas estratégias para testar suas habilidades.

Diante de tais considerações e dos nossos objetivos de pesquisa, escolhemos como tarefa o jogo “corrida de cavalos”. Esse jogo possibilita a articulação do raciocínio combinatório e probabilístico, pois a melhor estratégia para vencer o jogo consiste em analisar as várias possibilidades apresentadas no decorrer do jogo.

Para desenvolver a tarefa selecionada para a pesquisa levamos em consideração o ambiente de aprendizagem nos pautamos na proposta de Grando (2004) que indica os “momentos de jogo”. Para tanto, organizamos o ambiente de aprendizagem de nossa pesquisa em sete momentos que são: familiarização dos alunos com o material do jogo; reconhecimento das regras; o “jogo pelo jogo”: jogar para garantir regras; intervenção pedagógica verbal; registro do jogo; intervenção escrita; jogar com “competência”.

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise do jogo desenvolvido com os alunos do 8º ano foi organizada no primeiro eixo buscamos identificar as ideias sobre combinatória do jogo “Corrida de Cavalos”. No segundo eixo apresentamos indicações por meio das contribuições que o referido jogo propõe a partir do desenvolvimento de conceitos combinatórios.

O ambiente de aprendizagem que escolhemos em nossa pesquisa foi pautado nos sete momentos destacados por Grando (2004). Os dados da pesquisa foram coletados na sala de aula, especificamente no mês de abril de 2016 e foram produzidos a partir dos seguintes instrumentos: registros escritos (RE); diário de campo da professora-pesquisadora (DC) e gravações de áudio (GA) com transcrições das conversas.

A proposta de ensino por meio de situações-problema com o jogo “corrida de cavalos” articula ideia de combinatória e probabilidade dos alunos durante o jogo, contribui para (re) significar conceitos e ampliar o vocabulário probabilístico que não é muito presente na vida de alguns alunos. O objetivo de ter selecionado essa tarefa foi observar a circulação de ideias e o complemento para os conceitos de combinatória e probabilidade.

Alguns alunos, logo nas primeiras jogadas, perceberam a impossibilidade do jogador apostar nos números 1 e 13, pois não era possível obter soma 1 e 13 no lançamento de dois dados e outros precisaram de mais tempo.

No seguinte quadro, apresentamos uma síntese das respostas dadas pelos alunos.

DUPLAS	QUESTÃO 1					QUESTÃO 2		QUESTÃO 3	
	Número dos cavalos que venceram em cada jogada					Cavalo (s) com mais chance de vencer	Cavalo (s) com menos chance de vencer	O registro feito no tabuleiro ajudou no registro do jogo?	
	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª			SIM	NÃO
JL	3	8	5	7	7	7	1 e 13	X	
CR	6	3	6	6	8	Do 2 ao 12	1 e 13	X	
GM	7	6	4	6	9	6	*	X	
DE	8	6	6	6	7	6	*	X	
CJ	7	8	9	9	7	7 e 9	8	X	
BR	7	7	5	7	7	7	1 e 13	X	
MR	8	8	7	9	8	8	1 e 13	X	
KI	7	8	7	7	7	7	1 e 13	X	
CE	5	7	8	7	8	8	1 e 13	X	
IL	5	6	6	6	6	6	*	X	
WM	10	7	9	8	5	7	*	X	
FJ	8	6	4	7	6	6	1	X	

Quadro - Síntese das respostas da tarefa: “pensamentos probabilísticos”

Fonte: Diário de campo da pesquisadora.

No decorrer das jogadas e dos diálogos conceitos de combinatória e de probabilidade foram apresentadas pelas duplas a partir dos jogos, das problematizações propostas a partir deles e da intervenção da professora-pesquisadora nos diálogos.

4 I CONCLUSÃO

Nossa investigação analisou a contribuição do jogo "Corrida de Cavalos", no ensino da combinatória e probabilidade no Ensino Fundamental. A inserção de tais conteúdos é de suma importância aos alunos devido ao contato com informações que condizem ao tratamento e interpretação dos dados, a temática presente não apenas no contexto escolar como também cotidiano.

Quanto a proposta do jogo que foi apresentada na sala de aula os alunos mostraram curiosidade e interesse, já que geralmente essa não é uma prática comum. O nosso desafio foi aliar as concepções de Grando (2004) e o desenvolvimento da cognição matemática associada aos jogos que despertam curiosidades quanto a combinatória e a probabilidade foi desafiador resultando no complemento de tal aprendizado.

Os registros efetuados pelos alunos esclareceram o processo de raciocínio desenvolvido, analisando-os com diferentes formas de análise sobre as problematizações do jogo. Nessas problematizações que envolveram o "jogar com competência" analisamos o contato com os tabuleiros do jogo, o registro das jogadas realizadas, da resolução de situações-problema perceptíveis no decorrer das jogadas, os jogadores observavam o jogo com mais atenção a cada nova jogada.

Compreendemos que a comunicação desenvolvida nos momentos de socialização tem papel importante, pois por meio dela os alunos podem tomar consciência das ações que desenvolvem no jogo. Além disso, analisar os recursos necessários para o trabalho, assim como o tempo, respeitando o ritmo dos alunos, a relação professor-aluno o que ao serem analisados, na maioria das vezes, marcados e delineados diante das respectivas experiências os modificam e redirecionam instigando o seu desempenho.

Os jogadores atuaram cooperativamente, em movimento coletivo de aprendizagem. O resgate da vontade de aprender que é um dos objetivos que o jogo tem e foi executado naturalmente durante o jogo.

Durante todo o processo de intervenção pedagógica, realizado pela pesquisadora, neste cenário composto pelo jogo envolvendo regras e estratégias (Corrida de Cavalos), a análise dos resultados mostrou os procedimentos dos sujeitos nos jogos e evidenciou-se o processo de formação de diversos conceitos e habilidades matemáticas.

A importância do jogo como recurso pedagógico envolve os alunos ao movimento de conceitos combinatórios e probabilísticos, que são desenvolvidos de forma articulada e significativa, dessa forma, contribuem com o desenvolvimento dos referidos conceitos, importantes para os alunos da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental.** Brasília: MEC / SEF, 2001.

D'AMBRÓSIO, Beatriz Silva; D'AMBRÓSIO, Ubiratan Formação de professores de matemática: professor-pesquisador. **Atos de pesquisa em educação**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 75-85, jan.-abr. 2006.

DORNELAS, Augusto César Barbosa. **Resolução de Problemas em Análise Combinatória: Um Enfoque Voltado para Alunos e Professores do Ensino Médio.** SBEM: VII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula.** São Paulo: Paulus, 2004. 115 p.

GRANDO, Regina Célia; MARCO, Fabiana. O movimento da resolução de problemas em situações com jogo na produção do conhecimento matemático. In: MENDES, Jaqueline Rodrigues; GRANDO, Regina Célia (Org.). **Múltiplos olhares**: matemática e produção de conhecimento. São Paulo: Musa Editora, 2007.

JULIANELLI, José Roberto; DASSIE, Bruno; LIMA, Mário Luiz. **Curso de Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2009.

MORGADO, Augusto; CARVALHO, João; CARVALHO, Paulo; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

SANTOS, Jaqueline. **A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do ensino fundamental a partir de uma prática problematizadora.** Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação, Universidade São Francisco, Itatiba, 2015. 191 p.

CAPÍTULO 14

DISCURSO DE ESTUDANTES DO 7º PERIODO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA ACERCA DO ERRO DE ALUNOS RESOLVENDO ATIVIDADES MATEMÁTICAS

Data de aceite: 23/03/2020

José Ferreira dos Santos Júnior
Universidade Estadual da Paraíba – UEPB
http://lattes.cnpq.br/3447794460981921

Pedro Lucio Barboza
Universidade Estadual da Paraíba – UEPB
http://lattes.cnpq.br/1399033210518957

RESUMO: Na sala de aula de matemática a comunicação entre professor e aluno é um elemento essencial para o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Neste sentido, o discurso do professor de matemática assume relevância. Para Bakhtin, o discurso não transmite apenas o que está sendo afirmado, mas também o estado de espírito e a maneira do falante, que se expressa no conteúdo e também nas formas do discurso, que pode ser expresso na entonação da voz. Em sala de aula nem sempre o professor escolhe o melhor caminho para se posicionar acerca do que o aluno produz ou acerca dos resultados que apresenta sobre questões matemáticas que lhe são solicitadas a solução. Se realiza a análise da resposta apresentada pelo aluno, mas não se questiona sobre as razões da resposta que o aluno apresenta. Existe indícios de que conhecer as razões e as preferências do aluno por seguir este ou aquele caminho para resolver uma questão é fundamental. Como reage o futuro professor de matemática diante do erro que o aluno comete ao resolver atividades matemáticas? Esta é a nossa pergunta de pesquisa. Este estudo tem o objetivo de analisar o discurso de futuros professores acerca do erro do aluno quando está resolvendo atividades matemáticas, adotamos uma abordagem qualitativa e utilizamos conceitos bakhtinianos na busca de compreender o fenômeno que estudamos. Para a obtenção dos dados foi aplicado um questionário em uma turma de 23 alunos do 7º período do curso de licenciatura em matemática de uma instituição pública. Os resultados mostram que os participantes da pesquisa realizaram um discurso em diversas direções, predominando dois tipos de discursos: 1) Os futuros professores que compreendem as razões do erro do aluno; 2) Futuros professores atribuem ao aluno a responsabilidade pelo erro, ou seja, os alunos erram por falta de atenção ou por falta de interesse.

PALAVRAS-CHAVE: Discurso. Futuros professores. Aprendizagem matemática. Erro.

ADDRESS OF STUDENTS OF THE 7TH PERIOD OF LICENSING IN MATHEMATICS

ABOUT THE STUDENT ERROR RESOLVING MATHEMATICAL ACTIVITIES

ABSTRACT: In the math classroom, communication between teacher and student is na essential elemento in the processo of teaching and learning mathematical contente. In this sense, the mathematics teacher's discourse takes on relevance. For Bakhtin, the speech does not convey only what is being affirmed, but also the speaker's mood and manner, which is expressed in the content and also in the forms of the speech, which can be expressed in the intonation of the voice. In the classroom, the teacher does not always choose the best way to position himself on what the student produces or on the results he presents on mathematical questions that are asked for a solution. The analysis of the answer presented by the student is carried out, but there is no question about the reasons for the answer that the student presents. There is evidence that knowing the student's reasons and preferences for following this or that way to resolve an issue is fundamental. How does the future math teacher react to the mistake the student makes when solving math activities? This is our research question. This study aims to analyze the speech of future teachers about the student's error when solving mathematical activities, we adopt a qualitative approach and we use bakhtinian concepts in the search to understand the phenomenon we study. To obtain the data, a questionnaire was applied to a class of 23 students from the 7th period of the degree course in mathematics at a public institution. The results show that the research participants delivered a speech in several directions, with two types of speeches prevailing: 1) The future teachers who understand the reasons for the student's error; 2) Future teachers attribute to the student the responsibility for the error, that is, the students make mistakes due to lack of attention or lack of interest.

KEYWORDS: Discourse. Future teachers. Mathematical learning. Mistak.

1 I INTRODUÇÃO

A atitude do professor diante do erro do aluno ao resolver uma atividade matemática nem sempre pode ser considerada a mais adequada. Dizemos mais adequada para a aprendizagem. Mais apropriada como atitude de um educador. Este, muitas vezes desconsidera por completo o que o aluno fez e as razões da solução apresentada.

Compreender o porquê do erro é fundamental para a ação do professor de matemática em sala de aula. Os caminhos escolhidos pelo aluno precisam ser identificados pelo professor e levados em consideração. Faz parte da compreensão do processo de ensino e aprendizagem pelo professor.

No entendimento de Buriasco e Santos (2008), quando o aluno comete um erro o professor recebe um indicativo do que está faltando para o aluno entender determinado conteúdo. Em decorrência disto o professor tem a oportunidade de avaliar o aluno pelo que ele não sabe, tendo como objetivo ajudá-lo a superar as dificuldades que está enfrentando.

Na opinião de Miranda (2013), o erro expõe alguma coisa que ocorre em alguma situação processo, considerando esse fato, apresenta contribuições que a identificação e análise do erro pode oferecer ao professor de matemática. Identificando a partir do erro as dificuldades do aluno para que possa escolher a metodologia mais adequada para uma aprendizagem mais eficaz.

No entendimento de Nagy e Buriasco (2008), analisar o erro não é tarefa apenas do professor, mas também do aluno "identificar e compreender seus erros, podendo, assim, em outras ocasiões, geri-los, isto é, desenvolver processos de verificação e autocorreção que o ajudem, se necessário, a refazer os caminhos para sua resposta" (p.39). Mas, o aluno deve contar com o estímulo, a orientação e colaboração do professor para despertar e compreender quando comete um erro.

O objetivo central desta pesquisa é analisar o discurso de futuros professores acerca do erro do aluno quando está resolvendo atividades de matemática. Por meio de uma abordagem qualitativa utilizamos conceitos de Bakhtin (2003; 2006) para compreender o fenômeno que estudamos.

Para obter os dados foi aplicado um questionário com cinco perguntas em uma turma de 23 alunos do 7º período do curso de licenciatura em matemática de uma Universidade Pública. Aos 23 alunos restam dois períodos para a conclusão do curso e todos realizaram seus estudos no ensino médio em escola pública.

2 I ALGUNS FUNDAMENTOS

Nem sempre sabemos as intenções de alguém quando realiza determinado discurso. Barros (2005), um dos estudiosos de Bakhtin, afirma que o discurso não é individual, porque ele se realiza entre, pelo menos, dois indivíduos, não é individual porque um discurso sempre dialoga com outro discurso.

Acerca desta questão, Bakhtin (2006) afirma que a palavra discurso é uma palavra indefinida, ele o considera como algo que, "pode designar linguagem, processo de discurso, ou seja, o falar, um enunciado particular ou uma série indefinidamente longa de enunciados e um determinado gênero discursivo" (BAKHTIN, 2006, p. 274).

O discurso pode se manifestar em diversas formas de comunicação, pode ser considerado como uma ação ou um gesto, também pode se apresentar de forma escrita ou oral da linguagem.

Entretanto, neste estudo consideramos apenas o discurso em sua forma escrita, para compreender o discurso que futuros professores realizam acerca do erro do aluno ao resolver atividades de matemática. O discurso afirma a maneira como os significados são definidos pelos sujeitos que participam de um processo de diálogo.

Buscamos então, compreender o discurso que o futuro professor de matemática realiza sobre o erro do aluno resolvendo tarefas de matemática. “Compreender a enunciação de outrem significa orientar-se em relação a ela, encontrar o seu lugar adequado no contexto correspondente” (BAKHTIN, 2006, p. 136).

Tão importante quanto compreender o discurso do professor sobre o erro do aluno, é entender porque este erra. Diagnosticar as razões e implicações do erro matemático, pode contribuir tanto no processo de ensino e aprendizagem quanto ao desenvolvimento cognitivo do aluno, assim como pode influenciar no desenvolvimento de práticas pedagógicas eficientes pelo professor.

Um estudo de revisão de literatura de Cury (2008) analisa como os erros são interpretados nas pesquisas de educação matemática. Esta autora afirma ser frequente a elaboração de uma tipologia de erros.

Para De La Torre (2007), quando visto apenas como resultado, o erro apresenta um significado negativo; por outro lado, quando visto como componente de um processo, pode resultar em algo construtivo, algo que colabora com a prática pedagógica do professor e com a aprendizagem do aluno.

Já Rocha e Santos-Wagner (2017) afirmam que esta temática tem sido analisada de diversas maneiras, “em alguns estudos, quantificam-se erros que foram cometidos, em outras registram-se os tipos de erros, em outras procedem-se a analisar e categorizar os tipos de erros cometidos por estudantes” (p. 368). Os autores também afirmam que algumas procuram compreender as possíveis causas de determinados tipos de erros.

Na pesquisa de Buriasco, Ferreira e Ciani (2009) os autores destacam que a análise da produção escrita pode apontar os caminhos percorridos pelos alunos interpretando situações, como procedem para solucionar problemas, quais as dificuldades demonstradas para solucionar um problema.

3 I DISCURSOS DE FUTUROS PROFESSORES

Vejamos agora o que dizem os futuros professores sobre o aluno quando erra resolvendo atividades de matemática. Aos 23 futuros professores participantes da pesquisa foram atribuídos os códigos de FP1 a FP23.

Quando perguntamos “o que você pensa acerca do erro do aluno quando está resolvendo atividades matemáticas?”. Um dos participantes da pesquisa, assim se posicionou:

> A falta de atenção do aluno o leva ao erro, pois os alunos têm uma certa dificuldade com a disciplina da matemática e com isso não tem interesse para estudar (FP9).

Este futuro professor está atribuindo ao aluno a responsabilidade pelo erro. O aluno erra por “falta de atenção”, pelas dificuldades que tem com a matemática, pelo desinteresse com os estudos. De certo modo, indica uma posição cômoda, pois ao invés de refletir sobre erros que possa ter cometido quando ensinou os conteúdos, por não ter levado os alunos a compreensão do que explicou, FP9 transfere todas as responsabilidades ao aluno.

Nas afirmações de Bakhtin (2003), o discurso é pensado sempre em termos de resposta. Aquele que discursa, em qualquer circunstância é um contestador, “ele não é o primeiro falante, o primeiro a ter violado o eterno silêncio do universo (...). Cada enunciado é um elo na corrente complexamente organizada de outros enunciados” (BAKHTIN, 2003, p. 272). Este autor observa que tanto o falante, quanto o ouvinte, não têm atribuições estabelecidas, mas são portadores de um conjunto de responsabilidades no processo de comunicação e na ação discursiva.

Dois participantes da pesquisa responderam sobre a mesma pergunta formulada acima do seguinte modo:

> O erro do aluno reflete o nível de aprendizado dele e onde está suas maiores dificuldades. Serve também para explicar para o professor onde ele (o professor) tenha falhado e possa usar outra abordagem ou metodologia de ensino (FP4).

> Que ele necessita de uma maior assistência em seu aprendizado, ou seja, os professores precisam estar atentos ao nível do aluno e em que devem ajudá-los (FP5).

Os discursos de FP4 e FP5 são bem diferentes do que afirmou FP9, agora não há a responsabilização do aluno. O viés agora é compreender a realidade, encontrar possíveis caminhos de superação. Podemos identificar, neste caso, FP4 está dizendo que o diálogo entre professor e aluno é necessário, o diálogo como uma forma de aprendizagem. Bakhtin (2006) afirma que o diálogo constitui uma das formas mais importantes da interação verbal, que vai além da comunicação em voz alta entre as pessoas.

Temos FP4 observando que o erro ajuda ao professor reconhecer onde falhou quando ensinou, ou utilizou uma metodologia inadequada, quando diz o erro serve para, “explicar para o professor onde ele tenha falhado”. O que FP4 está de fato afirmando é a necessidade do professor compreender onde falhou em suas explicações ao ensinar e com isto levou o aluno ao erro. Na perspectiva bakhtiniana, a compreensão é uma forma de diálogo. Já FP5 aponta que o professor deve estar atento para identificar onde o aluno precisa de ajuda para superar o erro.

Os discursos de FP4 e FP5 apontam para a necessidade do professor refletir sobre o erro. Estas falas estão em consonância com o que propõe a autora a seguir: “o erro quando submetido à reflexão, poderá desencadear um questionamento de todo o processo de ensino e transformar-se numa estratégia didática inovadora”

(PINTO, 2000, p. 24). Por oferecer ao professor elementos para modificar a prática pedagógica e também atuar de uma maneira mais efetiva sobre o erro do aluno, contribuindo para ampliar a aprendizagem.

Solicitamos dos nossos interlocutores que justificassem se o erro do aluno quando resolve questões matemáticas contribui ou não para a aprendizagem, vejamos algumas falas:

> Talvez, muitas vezes errando se aprende e pode despertar um interesse no aluno para aprender e não errar mais. Já por outro lado, o aluno pode se achar incapaz de aprender e se desestimular (FP1).

> Acredito que sim, pois quando ele tenta, mesmo errado, ele tá fazendo alguma coisa, e quando o professor explica o erro ele aprende e não erra mais naquilo (FP14).

> Sim. Quando o aluno erra, pode-se a partir do erro mostrar como se poderia chegar a solução desejada. Não criticando o mesmo mas mostrando e incentivando de maneira criativa a buscar a solução (FP16).

Nos três posicionamentos acima os futuros professores apresentam um discurso que mostra uma compreensão construtiva do erro, sinalizando que os erros podem evidenciar dificuldades em relação à aprendizagem, mas ao mesmo tempo não devem ser punidos pelo professor.

Perguntamos também se, "quando se tornar professor faz sentido ter preocupação com o erro do aluno quando está resolvendo atividades matemáticas?". Os futuros professores afirmaram:

> Sim, pois daí será possível perceber falhas na forma de ensinar, melhorando esse processo ao passar do tempo (FP8).

> Sim, pois estudos já mostraram que o erro pode ser aproveitado como forma de aprendizagem uma vez que seu advento foi ocasionado na tentativa de acertar (FP12).

> Sim, pois o professor não pode passar batido esta questão, pois o objetivo do professor é fazer com que o aluno aprenda, e não apenas passar conteúdo (FP4).

Respondendo questionamentos diferentes os participantes da pesquisa mostram cuidados especiais com a aprendizagem do aluno, como no questionamento acima, FP8, FP12 e FP4 apresentam o entendimento de que o erro do aluno é um momento que deve ser aproveitado e oferecer ao aluno mais aprendizagem.

Ramos (2015) afirma ser preciso o professor tratar o erro de maneira didática e para que isso ocorra "é fundamental o professor identificar, analisar e categorizar o erro do aluno" (RAMOS, 2015, p. 132). O que segundo teóricos construtivistas, resulta na reconstrução do conhecimento, e por outro lado, pode levar a superação do erro cometido.

Perguntamos quais as principais razões para o erro do aluno, e obtivemos respostas assim:

> A falta de concentração, a falta de interesse, as dificuldades acumuladas ao longo da trajetória escolar, problemas psicológicos (raros), a falta de estrutura da escola (pois existem conteúdos que exigem outros recursos) e a metodologia adotada, isto é a forma do professor ensinar (FP4).
>
> Não entender o assunto, muitas vezes falta de estudo fora da aula, ou desinteresse, etc (FP21)
>
> O fato de que nem todos aprendem no mesmo ritmo, como também a forma de ensino do professor (FP5).

Observamos que os futuros professores estão respondendo esta questão com os mesmos argumentos apresentados para responder a primeira questão (o que você pensa acerca do erro do aluno quando está resolvendo atividades matemáticas?). Insistem em responsabilizar o aluno pelo erro.

Recorrendo a Botelho et al. (2006), o mesmo faz a catalogação do erro em dois grupos: o erro conceitual e o erro procedimental. Segundo este autor, no erro conceitual, o aluno apresenta limite de compreensão acerca do que lhe está sendo solicitado resolver. Enquanto o erro procedimental são aqueles que ocorrem durante o procedimento de solução da questão.

Perguntamos ainda aos futuros professores: você considera que existe alguma estratégia metodológica para tentar diminuir os erros do aluno quando está resolvendo atividades matemáticas? Algumas das respostas obtidas abaixo:

> Acho que não existe uma estratégia para diminuir o erro, pois nesse aspecto são problemas, na minha opinião, inerentes ao aluno (FP7).
>
> Não. Porque se o aluno não tem interesse, não importa a metodologia (FP22).
>
> Sim. Acho que estimular mais a criatividade do aluno faz com que ele tenha mais facilidade em resolver problemas. Segundo, a maneira como é proposto o trabalho com resolução de problemas (FP19).
>
> Nem sempre é possível transformar o conteúdo em algo “real”, que faça parte da vida do aluno, mas acredito que esse é um bom método. Praticar a resolução de problemas. Estimular o raciocínio (FP3).
>
> Sim, primeiramente usar nas aulas problemas matemáticos, e não apenas exercícios, e usar por exemplo, problemas que façam sentido ao contexto cultural e social do aluno, problemas de acordo com o nível do aluno, e possivelmente recursos didáticos (dentre eles, jogos ou matérias manipuláveis) (FP4).
>
> Não tenho certeza, devido ao fato da aprendizagem do aluno ser composta por vários fatores, então alguma estratégia pode servir para uns e outros não. Isso é uma combinação de ações que podem diminuir o erro do aluno (FP15).

Neste questionamento observamos um equilíbrio quantitativo quanto ao discurso do futuro professor acerca da possibilidade de que exista uma metodologia pedagógica que contribua, não para superar o erro, mas para diminuir.

FP15 expressa a incerteza e justifica com a assertiva de que a aprendizagem decorre de um conjunto de fatores, afirma que uma estratégia metodológica mais efetiva para a aprendizagem “pode servir para uns e outros não”.

Um fato merece destaque, em nosso questionário de pesquisa foram formuladas apenas cinco questões, e observamos que este é o terceiro questionamento em que os futuros professores repetem um discurso “pronto”, responsabilizando o aluno pelo erro, os posicionamentos de FP7 e FP22 parecem não deixar dúvidas quanto a esta questão.

Podemos inferir que os futuros professores tendem a repetir este discurso que desresponsabiliza o professor, o poder público, e as condições atuais da escola pública com o processo de ensino e aprendizagem e transfere a responsabilidade desses atores apenas para o aluno. Bakhtin (2003) afirma, “cada enunciado particular é individual, mas cada campo de utilização da língua elabora seus tipos relativamente estáveis de enunciados, os quais denominamos gêneros do discurso” (p. 262).

Pode ser um exagero considerar que o gênero discursivo preferido pelo futuro professor é aquele que associa ao aluno a responsabilidade exclusiva pela aprendizagem. A verificação deste aspecto, em relação à futuros professores, nos faz indagar o que responderão professores já experientes acerca da questão.

Cury (2008) considera que o erro também é um conhecimento do aluno, construído por este, sendo assim é preciso que o professor analise e interprete o que o aluno produziu, para localizar o erro e encontrar caminhos adequados para a correção do mesmo.

4 I CONSIDERAÇÕES QUE NÃO FINALIZAM

Duas situações podem ser apontadas neste estudo, a primeira, sugere que parte dos futuros professores realizam um discurso que indica compreender as razões dos erros que o aluno comete; a segunda situação, indicam que os futuros professores creditam ao aluno a responsabilidade pelo erro que pratica ao realizar atividades matemáticas, afirmam que o aluno erra “por falta de atenção ou interesse”.

Em nossa opinião, o discurso do professor que insinue ou responsabilize o aluno pelo erro cometido, carece de uma melhor fundamentação. Deve ser apoiado o discurso que estimule a reflexão e a revisão do erro pelo próprio aluno. Desse modo, o erro deixa de ser algo negativo e o aluno passa a compreender que o erro não é “pecado”, faz parte do processo de aprendizagem.

Até porque, no campo da educação matemática várias pesquisas realizadas (PINTO, 2000; CURY, 2004; SANTOS e BURIASCO, 2008; SALSA, 2017) indicam que o erro do aluno deve ser visto como uma oportunidade, como um fator de construção do conhecimento.

Mesmo havendo uma produção expressiva relacionada a erros, ainda há muito o que conhecer acerca do erro do aluno estudando matemática. Entendemos que é preciso investigar de forma mais acentuada as causas do erro do aluno e as dificuldades do professor em lidar com o mesmo, em especial, em ambientes que envolvem tecnologia.

REFERÊNCIAS

BAKHTIN, M. **Estética da criação verbal**. 4 ed., São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BAKHTIN, M. **Marxismo e filosofia da linguagem:** problemas fundamentais do método sociológico da linguagem. Tradução Michel Lahud e Yara Frateschi Vieira. 12ª ed., São Paulo: Hucitec, 2006.

BARROS, D. L. P. de. Contribuições de Bakhtin as teorias do discurso. IN: BRAIT, B. (Org.). **Bakhtin, dialogismo e construção do sentido**. 2ª Ed. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2005.

BURIASCO, R. L. C; SANTOS. J. R. V. Uma análise interpretativa da produção escrita em matemática de alunos da escola básica. **Revista Zetetiké**, Campinas, v.1, n.30, p. 11- 43, jul./dez. 2008.

BURIASCO, R. L. C. de; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **Bolema,** Rio Claro, n. 33, p. 69-96, 2009.

BOTELHO, D. et al. Análise do erro na resolução de problemas verbais de estrutura aditiva. Uma perspectiva construtivista. In: SIMÕES, M. C. T. et al. (Orgs.). Psicologia do desenvolvimento: temas de investigação. Coimbra: Almedina, 2006, p. 53-76.

CURY, H. N. Análise de erros em Educação Matemática. **Veritati**. Salvador, v. 3, n. 4, jun. 2004, p. 95-107.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. Coleção Tendências em Educação Matemática.

DE LA TORRE, S. **Aprender com os erros**: o erro como estratégia de mudança. Porto Alegre: Artmed, 2007.

MIRANDA, W. Erros e obstáculos: os conteúdos matemáticos do ensino fundamental no processo de avaliação. **Revista Margens Interdisciplinar**, Abaetetuba, v. 7, n. 8, p.155- 171, abr. 2013.

NAGY, M. C.; BURIASCO, R. L. C. A análise da produção escrita em matemática: possível contribuição. IN: Buriasco, R. L. C. (Org.). **Avaliação e educação matemática.** Recife: SBEM, 2008.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática**: estudo do erro no ensino de matemática elementar. Campinas, SP: Papirus, 2000.

RAMOS, M. L. P. D. A importância da análise didática dos erros matemáticos como estratégia de revelação das dificuldades dos alunos. **REVEMAT.** Florianópolis (SC), v.10, n. 1, p. 132-149, 2015.

ROCHA, M. M.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. S. Impactos de análises de acertos e erros em uma disciplina cálculo I. **VIDYA**, v. 37, n. 2, p. 367-382, jul./dez., 2017 - Santa Maria, 2017.

SALSA, I. S. A importância do erro do aluno em processos de ensino e de aprendizagem. **REMATEC**/ Ano 12/n. 26/set.-dez. 2017, p. 86 – 99.

SANTOS, J. R. V.; BURIASCO, R. L. C. Da ideia de erro para as maneiras de lidar: caracterizando nossos alunos pelo que eles têm e não pelo que lhes falta. In: BURIASCO, R. L. C. (Org.). **Avaliação e educação matemática.** Recife: SBEM, 2008, p. 87-108.

CAPÍTULO 15

A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO E O JOGO DE REGRAS MANCALA À LUZ DA TEORIA PIAGETIANA

Data de aceite: 23/03/2020

Maria Fernanda Maceira Mauricio
nandamaceira2014@gmail.com

Sidney Lopes Sanchez Júnior
sid.educacaocp@gmail.com

Francismara Neves de Oliveira
francis.uel@gmail.com

Guilherme Aparecido de Godoi
guilhermeapgodoi@gmail.com

RESUMO: Tomando o aporte da teoria piagetiana como base, a pesquisa descrita neste artigo está vinculada ao grupo de estudos do CNPq: "Processos de escolarização no cotidiano escolar" e teve como objetivo analisar o uso do jogo de regras Mancala em aulas de Matemática. Nessa perspectiva teórica, o jogo de regras é considerado um importante instrumento por meio do qual os processos constitutivos do pensamento podem ser explicitados, ao mesmo tempo que as intervenções possibilitam elaborações internas do pensamento. Considerou-se o contexto de uma turma de 4º ano do Ensino Fundamental I. O estudo foi conduzido em duas etapas. Da primeira etapa participaram 26 alunos com idades de 7 e 8 anos que tiveram acesso ao jogo Mancala, conheceram sua história, as diferentes culturas nas quais ele é encontrado, as regras, as principais estratégias em situações de aprendizagem do jogo. Da segunda etapa participaram 7 duplas de alunos escolhidos por sorteio com Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado pelos respectivos responsáveis. Os resultados indicaram que o jogo Mancala foi desencadeador de processos cognitivos, afetivos e sociais e, portanto, serve ao propósito de orientar práticas pedagógicas para promover aprendizagens da Matemática. O jogo favorece a apresentação de situações de ensino favoráveis à aprendizagem de conceitos Matemáticos, tanto do ponto de vista cognitivo (aprender a jogar bem o jogo, desenvolver estratégias para vencer os desafios do jogo), quanto dos aspectos afetivo e social (compreender o perder e ganhar, competir e a frustração) como partes do jogo.

PALAVRAS-CHAVE: Construção do conhecimento; Educação Matemática; Jogo de regras Mancala; Epistemologia Genética.

CONSTRUCTION OF KNOWLEDGE AND THE RULES GAME SHINES THE LIGHT OF PIAGETIAN THEORY

INTRODUÇÃO

A Educação Matemática é o campo de estudos e pesquisas que se ocupa dos desafios do ensinar e aprender a Matemática, considerando que esta é uma área do conhecimento importante para promover o desenvolvimento do raciocínio lógico autônomo, a criatividade e a capacidade de resolver problemas e conflitos advindos da vida cotidiana (BRASIL, 1998). O campo da Educação Matemática surge da necessidade de quebrar paradigmas da rigorosidade, foco exclusivo em memorização de fórmulas e cálculos diante da grande evolução do que se entende por ensino e aprendizagem da Matemática, na atualidade.

Podemos dizer que não se aceita mais uma matemática desvinculada da vida prática e da relação com as diversas áreas do conhecimento humano. É necessário que a Matemática seja apresentada revestida de aplicabilidades, de conceitos históricos, de localizações geográficas, de arte, de compreensão textual, da boa escrita, das diversas ciências, para incorporar padrões interdisciplinares e atingir a excelência de seu ensino (D'AMBROSIO, 2005). Neste sentido, pesquisas no campo da Educação Matemática têm como alvo o jogo como estratégia para o ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Strapson e Bisognin (2013) asseguram que o jogo desempenha um papel motivador e interessante tanto para os alunos quanto para o professor. Os autores destacam que os jogos substituem as atividades habituais, como por exemplo o uso do quadro negro e giz, por outras que podem motivar e desenvolver habilidades de raciocínio lógico, pensar estratégias e reflexão por parte dos alunos.

Para Flemming e Collaço de Mello (2003) o uso dos jogos como recurso didático possibilita que a aprendizagem aconteça de forma mais dinâmica, interessante e menos traumática. Para isso, ao adotar o jogo como estratégia de ensino na sala de aula, altera-se o modelo tradicional de ensino que muitas vezes adota apenas livros didáticos com exercícios padronizados (SMOLE; *et al.*, 2008). Assim, ao utilizar os jogos para ensinar Matemática, o professor proporciona ao estudante um ambiente integrador de diferentes saberes que possibilita a construção do seu conhecimento (LARA, 2003).

Na literatura é possível encontrar diversos tipos de jogos. Grando (1995) classifica como jogos pedagógicos, aqueles que são utilizados para ensinar e aponta cinco tipos, sendo: os jogos de azar; jogos de quebra-cabeça; jogos de estratégia; jogos de fixação de conceitos; e jogos computacionais. Já Lara (2003) apresenta os jogos como: de construção, jogos de treinamento, aprofundamento e jogos estratégicos.

Os jogos motivam os alunos, transformam a sala de aula, proporcionam aprendizagem individual e coletiva de forma agradável, principalmente para estudantes que apresentam dificuldades em relação à Matemática. Para Borin (1995) o jogo permite o desenvolvimento da linguagem, bem como maneiras diferenciadas e interessantes de propor problemas, simular situações que exigem soluções vivas, imediatas, estimulando o planejamento de ações, contribuindo para melhorar a autoestima e atitudes positivas frente à aprendizagem.

Na teoria piagetiana, a qual embasa as discussões da pesquisa realizada, os relatos de pesquisas com jogos são frequentes, em especial em alunos do Ensino Fundamental dentre os quais citamos alguns: Macedo, Petty e Passos (2000, 2005); Oliveira e Brenelli (2008); Fiorot e Ortega (2009); Bianchini, Oliveira e Vasconcelos (2012); Carvalho e Oliveira (2014), entre outros. Nessa perspectiva, o jogo produz efeito regulador das diferentes estruturas, pela sua dimensão lúdica que desafia o sujeito a considerar algo segundo vários pontos de vista, o que pressupõe um olhar atento, aberto e disponível para a resolução das mais diversas situações apresentadas (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2000).

As relações que podem ser estabelecidas entre as diferentes possibilidades de resolução no jogo de regras podem servir para o desenvolvimento de estratégias eficientes não apenas para ganhar o jogo e solucionar aqueles problemas imediatos, mas como aprendizado para outros desafios ou conflitos que sejam suscitados a resolver através de tomadas de consciência (PIAGET, 1978).

Sobre esse fundamento, Kamii e DeVries (2009, p. 52) acreditam "[...] que os jogos em grupo devem ser usados na sala de aula não pelo mero fato de se ensinar as crianças a jogá-los, mas para promover sua habilidade de coordenar pontos de vista". Para jogar e ganhar, é indispensável que o indivíduo esteja atento, seja ativo e envolvido no jogo em todas as suas especificidades.

Para o pesquisador que trabalha numa perspectiva construtivista, o interesse pelo jogo recai na análise dos procedimentos que o jogador utiliza ou constrói ao jogar, quer ele esteja se utilizando do jogo para avaliar o modo de pensar do jogador quer se utilizando do jogo como recurso de intervenção, para melhorar ou produzir novos conhecimentos. Nesse sentido, as situações de jogo podem ser evocadoras do desenvolvimento de estruturas cognitivas e de regulações que envolvem além da dimensão intelectual, as coordenações afetivas e sociais que são imprescindíveis ao desenvolvimento dos alunos em contexto escolar (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2000).

Para a teoria piagetiana, o desenvolvimento cognitivo é um processo sequencial onde a interação tem importante papel na construção do conhecimento. Frente às perturbações ou conflitos, o sujeito tende a reagir por meio de regulações contínuas, reorganizando suas estruturas cognitivas anteriores. Trata-se de considerar a atividade do sujeito e, mais ainda, as significações por ele atribuídas às suas ações, como responsáveis pela possibilidade de adquirir conhecimento (MACEDO, 1994).

Para Piaget (1976), essa interação se dá em um processo de assimilação, acomodação e adaptação. Do equilíbrio desses processos advém uma adaptação ao mundo cada vez mais adequada e uma consequente organização mental. A assimilação é o processo responsável pela aplicação de esquemas já construídos na realidade externa que se pretende conhecer. Trata-se de construções anteriores e não apriorismo (não se trata de hereditariedade e processos maturacionais puramente aplicados ao mundo externo). A acomodação por sua vez implica em modificações da estrutura cognitiva interna, a partir da resistência da realidade externa aos esquemas do sujeito. O pensamento se transforma para dar conta de compreender o mundo que o cerca. A adaptação é a síntese desses processos, permitindo o equilíbrio construtivo entre sujeito e realidade externa, sendo que ao mesmo tempo em que transforma a realidade o pensamento do sujeito também é por ela transformado.

A evolução construtiva da estrutura cognitiva, permite que novos conhecimentos abram caminho para novas possibilidades, descartando a tese de que o conhecimento é pré-estabelecido geneticamente ou por maturação. Dessa forma, por meio desses processos, o sujeito passa pela construção e reconstrução de saberes. É necessário um equilíbrio entre os processos para uma organização mental, a fim de gerar crescimento e desenvolvimento cognitivo. É a partir destes mecanismos que o indivíduo constrói o conhecimento, assimilando informações que a realidade a ele impõe, sua experiência com o real possibilita e as interpreta com base em estruturas construídas dialeticamente.

SOBRE O JOGO MANCALA

O jogo Mancala é um jogo milenar, comum nos países africanos e foi difundido principalmente quando negros e escravos migraram pelo mundo. A mancala compõe uma família de jogos de tabuleiro presente em várias culturas ao redor do mundo, algumas vezes chamada de jogos de semeadura ou jogos de contagem e captura. Com isso, esse jogo recebe vários nomes e regras gerais para se jogar, tais como, Kalah, Awelé, Jodu, Andot, Ouri, Oware, Sungka, Omweso, Bao, dentre outras (CUNHA JUNIOR, 2004).

Segundo Zaslavsky (2000), a mancala é mais difundida no continente africano. Assim como o xadrez, o mancala também é um jogo de tabuleiro, que busca trabalhar o raciocínio lógico, porém, ele pode ir muito além disso. Os primeiros tabuleiros da mancala foram encontrados em escavações no Antigo Egito. No Brasil, foi introduzido pelos escravos vindos do continente africano, onde as mais conhecidas variações são justamente o Oware e Giuthi, vindos de Gana e Quênia.

Este é um jogo com profundas raízes filosóficas. É jogado habitualmente com pequenas pedras ou sementes. A movimentação de peças tem um sentido de "semeaduras" e "colheita". Cada jogador é obrigado a recolher sementes depositadas numa "casa" e com elas semear suas sementes do tabuleiro, bem como as casas do adversário. Seguindo as regras, em dado momento o jogador faz a "colheita" de sementes que passam a ser suas. Ganha quem obtiver mais sementes ao final do jogo. Ressalta-se que, embora o objetivo do jogo seja ganhar, não há como pressuposto a eliminação do adversário. Ao contrário, ambos são estimulados ao "plantio", mesmo em terras adversárias. Nesse jogo, ambos colhem. É um jogo em que não há sorte envolvida. Somente raciocínio lógico-matemático.

METODOLOGIA

A natureza da pesquisa foi qualitativa, na modalidade descritiva (LUDKÉ; ANDRÉ, 1996). Esta perspectiva é compatível com a proposta do método clínico-crítico piagetiano que propõe um dinamismo ao pesquisador e participante em um movimento de interação contínua, o que favorece um ambiente construtivo.

Para Delval (2002), o método clínico oferece um conjunto de princípios que podem nortear a observação e as ações do pesquisador indicando caminhos percorridos pelo pensamento do sujeito em busca da resolução dos conflitos apresentados nas situações propostas. O jogo possibilita situações em que os conflitos sociais, afetivos, cognitivos podem ser observados de forma criteriosa pelo pesquisador, apoiado neste método.

Contexto empírico: foram 6 sessões com uso do jogo Mancala, com tempo de duração médio de 1 hora cada, realizadas no primeiro bimestre do ano letivo do ano de 2018 (fevereiro e março), em um colégio particular que atende da Educação Infantil ao Ensino Médio, em um município norte paranaense.

Participantes: apresentavam idade entre 7 e 8 anos no momento em que a pesquisa se deu e todos receberam o termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) que foi assinado pelos responsáveis, atendendo aos princípios éticos do estudo. Na primeira etapa da pesquisa, 26 alunos compuseram a amostra, e em etapa posterior, foram selecionadas sete duplas (14 alunos) para análise de suas jogadas.

Instrumentos: Mancala - um tabuleiro retangular (2x6+2) construído a partir de uma cartela de ovos contendo 12 cavidades, 2 recipientes plásticos posicionados ao lado das cavas e feijões brancos para fazer as semeaduras no total de 48 sementes. O tabuleiro foi dividido em duas fileiras, sendo cada uma composta de seis cavidades redondas e uma maior e mais ovalada. As cavidades maiores foram chamadas de kalah e tiveram a função de reservatório, enquanto as cavidades menores foram chamadas de cavas, nas quais foram semeadas e colhidas as sementes. Foram usados ainda 1 celular para filmagem e um bloco de notas para registro.

Roda de Conversa – reunidos em círculo no chão da sala, houve dois momentos em que os participantes após jogarem, foram indagados a respeito de suas percepções sobre o jogo, estratégias que utilizaram, principais dificuldades e acertos. A primeira roda aconteceu na etapa 1 com as 26 crianças presentes e a segunda na etapa 2 com os 14 participantes.

Procedimento de Coleta dos Dados: Foram realizadas 6 sessões, desde o conhecimento do jogo até a roda de conversa de finalização. Para atender à solicitação de organização da escola, a coleta se desenvolveu em dois momentos distintos: na primeira etapa participaram os 26 alunos da sala. Todos tiveram acesso ao jogo, conheceram o tabuleiro, aprenderam as regras e jogaram. Esses momentos foram denominados “sessões de aprendizagem” do jogo. O acordo de realização da pesquisa na escola solicitou como contrapartida que a sala toda fosse envolvida, pois a escola valoriza o uso de jogo com os alunos. A partir da quarta sessão participaram 14 alunos (7 duplas) escolhidas entre os alunos que melhor compreenderam as regras do jogo, na primeira etapa. Os alunos se sentavam em frente a sua dupla e com os materiais necessários para o jogo. A cada sessão, as regras e a organização do jogo eram retomadas e os participantes passaram a jogar sempre com a mesma cor de pulseira. As sessões foram filmadas por uma auxiliar, tomando-se os cuidados para que o rosto dos participantes não fosse identificado.

Regras: Foram adotadas as seguintes regras: 1. Iniciar o jogo, distribuindo 4 sementes em cada cava, deixando os kalah, posicionados nas laterais, vazios. 2. Jogadas alternadas entre jogadores, procurando sempre acumular sementes em seu kalah. 3. Cada jogador, na sua vez, escolhe uma cava do seu lado do tabuleiro, pega todas as sementes dessa casa e as distribui uma a uma em cada cava localizada à sua direita, sem pular nenhuma cava e nem colocar mais de uma semente em cada uma. 4. Cada vez que passar pelo seu kalah, o jogador deve deixar uma semente, continuando a distribuição no lado do adversário e não colocando sementes no kalah do outro jogador. 5. Quando a última semente que está na mão do jogador cair dentro de seu kalah, este tem o direito de fazer uma nova jogada. 6. Quando a última semente que está na mão do jogador cair dentro de uma cava vazia, o jogador pode capturar todas as sementes que estão respectivamente a frente da última cava semeada e depositar as sementes em seu kalah. 7. O jogo termina se um dos jogadores, na sua vez, não tiver mais sementes para movimentar. Os jogadores comparam seus kalahs para determinarem quem tem mais sementes sendo, consequentemente, o vencedor.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A organização da sala e das duplas na primeira etapa priorizou diferentes arranjos entre pares. Proporcionou que se soltassem no jogo, aprendessem o funcionamento do jogo, jogando com distintos parceiros, alguns com mais facilidade outros com mais dificuldade de compreensão das regras e diferentes níveis de jogo. Na segunda etapa, os alunos foram acomodados sentados sempre em frente um do outro e em parcerias fixas. Durante essas sessões as 14 crianças selecionadas jogaram sempre com a mesma dupla, e a partir disso foi possível observar o avanço na elaboração das estratégias de pensamento e a evolução do jogo em jogadas mais longas, assim como a antecipação de novas jogadas.

Destaca-se como aspecto afetivo e social na segunda etapa que os parceiros da dupla, adversários de jogo, puderam apoiar-se mutuamente em termos de crescimento e evolução do pensamento. Conforme a relação mostrou-se mais solidária do ponto de vista social, permitiu melhores arranjos cognitivos demonstrados na evolução do jogo.

Ao observar as jogadas, notou-se que algumas crianças haviam compreendido a nova regra, porém jogavam como se essa tivesse anulado a primeira. Não havia “conservação” das regras do jogo. Então a explicação foi retomada para que este conflito fosse solucionado e compreendessem que as regras formavam também um conjunto amplo de possibilidades de estratégias para jogar cada vez melhor, conforme dominavam o jogo. Para algumas duplas ainda houve a necessidade de explicações durante as suas jogadas e novamente pode-se observar o mesmo comportamento de cooperação entre os jogadores, mostrando ao adversário qual a maneira correta de se realizar a jogada.

Aspectos cognitivos no jogo Mancala

Diante de uma situação desafiadora, como é o caso do jogo, a elaboração de estratégias permite que o indivíduo construa novas opções de jogo e não repita as mesmas ações quando estas não são satisfatórias para jogar certo ou para jogar bem (MACEDO, 1994). Esta característica é importante para resolver problemas e buscar novas soluções que respondam ao que foi solicitado, além de oportunizar observação dos modos de organização do pensamento empregados pelo sujeito. Está relacionada à tomada de consciência. Para elaborar estratégias o sujeito é convidado a integrar todos os elementos envolvidos no jogo, as peças, as regras, o tabuleiro, seu pensamento, o do adversário.

O jogo Mancala permite uma atenção maior aos aspectos numéricos, já que, para jogar bem, é necessário ser capaz de determinar, sobre a base do número de sementes contidos numa casa, ou do número de grãos que ela conterá depois de uma sequência de jogadas hipotéticas, em qual casa terminará a semeadura. As antecipações necessárias a esse jogo só são possíveis se os sujeitos se deixarem levar por atividades de tratamento de informações de dados numéricos, enumeração, decomposição, adição, subtração.

Exemplificamos a seguir algumas sequências de jogadas que demonstraram planejamento das ações com antecipação de estratégias como nos excertos a seguir, retiradas do protocolo de registro de jogo de um dos alunos:

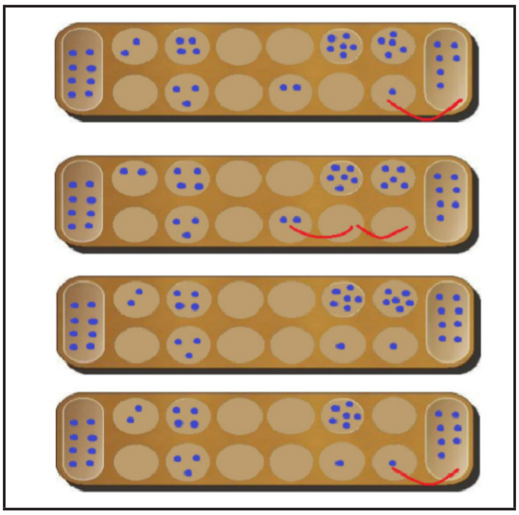


Figura 1: Jogada do aluno identificado pela pulseira verde

Fonte: dados da pesquisa

No aporte teórico piagetiano, essa condição está relacionada à tomada de consciência da ação que implica coordenar ações, procedimentos e estratégias, utilizando a antecipação, ainda que não chegue ao objetivo final, que é vencer a partida. Porém, procura, a cada desafio, construir novos procedimentos e estratégias mais elaboradas.

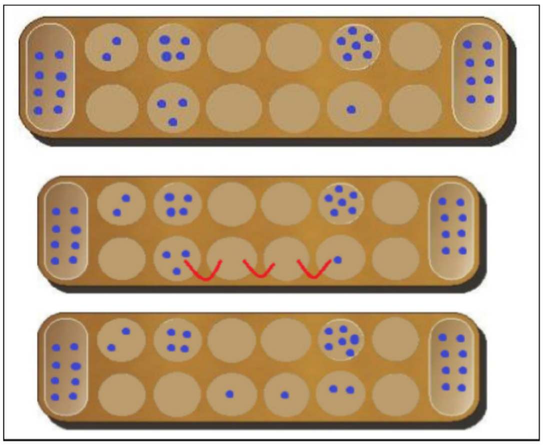


Figura 2: Jogada do aluno identificado pela pulseira verde

Fonte: dados da pesquisa

Ao provocar conflitos internos, o jogo permite a busca de modificação da ação e esse movimento cognitivo enriquece e reelabora as estruturas cognitivas dos indivíduos. Assim, conhecer as regras não é suficiente para ganhar, já que solucionar o problema proposto pelo jogo requer decisões baseadas em uma ação intencional, coerente e comprometida com os diversos aspectos presentes no contexto.

Aspectos sócio afetivos no jogo Mancala

Dell'Agli (2008) explica que na abordagem piagetiana a afetividade e a cognição mantêm relação solidária, por complementaridade. O pensamento não é governado pelo afeto e nem o contrário se comprova verdadeiro. A afetividade atua como um regulador da ação, uma vez que o sujeito, frente a uma tarefa pode apresentar interesse, envolvimento, o que atuaria como um facilitador de sua realização. Porém, esse mesmo sujeito pode apresentar cansaço ou frustração, o que obstaculizaria o desenvolvimento da tarefa.

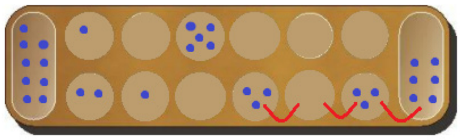
Assim, o que regula a ação do sujeito é o afeto (DELL'AGLI, 2008). Ao analisarmos as jogadas, é possível perceber que os aspectos sócio afetivos estão imbricados nos cognitivos. Em algumas duplas, observou-se esse conflito, quando ainda não havia acontecido a compreensão de que a jogada do adversário tinha influência na próxima jogada (própria). Na partida entre Verde Claro e Laranja, um exemplo deste acontecimento se fez presente e pode-se notar o predomínio da atitude egocêntrica.

> Verde Claro: "Isso é injusto!"
>
> Pesquisadora: "O que é injusto Verde Claro?"
>
> Verde Claro: "Eu já tinha pensado no que fazer com as sementes que estavam aqui, e ela pegou!"

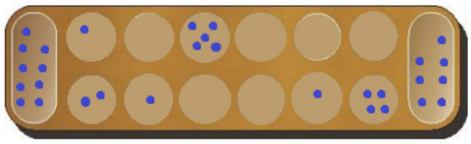
Na jogada acima, Laranja semeou grande número de sementes que estava acumulada em uma cava e provocou na jogadora verde claro tal reação. Nota-se que Verde Claro compreendia as regras do jogo e elaborava sua próxima jogada, porém dentro dessa sessão ainda não antecipava as jogadas de seu adversário para construir as suas e se mostrou frustrada quando não conseguiu concluir o que já havia pensado.

Na teoria piagetiana o egocentrismo é a impossibilidade que o sujeito tem de diferenciar seus próprios pensamentos dos pensamentos das outras pessoas. Ao analisarmos os dados obtidos das jogadas do jogador Verde Claro é perceptível que suas condutas são egocêntricas, pois o jogador teve dificuldade em perceber que semear no campo oposto não é perder a partida, é um movimento necessário para a continuidade do jogo.

Em duplas onde notou-se que novas jogadas não estavam sendo criadas fez apontamentos que levaram os participantes a pensarem sobre as ações que estavam realizando e a capturar maior quantidade de sementes, conforme o registro a seguir:

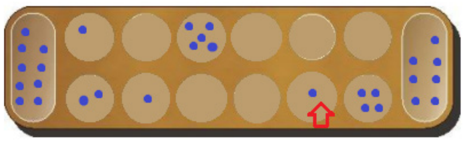


Pesquisadora: “Você escolheu esta cava para começar a semear, por que poderia jogar de novo?”



Rosa Escuro: “Sim.”

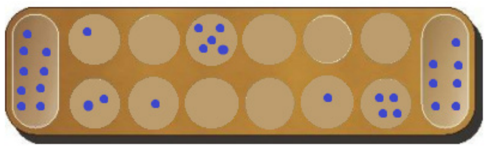
Pesquisadora: “E agora onde você vai jogar?”



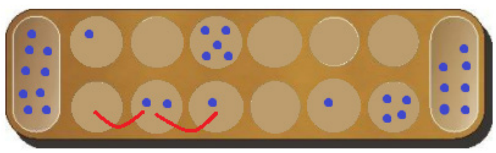
Pesquisadora: “Espere um momento, existe outra maneira que você pode jogar para continuar capturando sementes”.

Rosa Escuro: “Qual?”

Pesquisadora: “Você tem duas opções de jogadas para isso”.



Rosa Escuro: “Posso jogar aqui”.



Roxo Escuro: “Mas essas sementes eram minhas!”.

Pesquisadora: “Mas vamos lembrar a regra: quando a última semente cair em uma cava vazia, são capturadas todas as sementes da cava da frente”.

Figura 3. Movimento de jogada de aluno identificado por Rosa Claro

Com estes mesmos alunos foram trabalhadas as ideias de contagem e distribuição, que é uma das ideias da divisão. Observa-se que os conteúdos da Matemática se integram à necessidade de descentrar o pensamento, de relacionar, de estabelecer comparações e por conseguinte, de exercer possibilidades de abandonar o egocentrismo em busca da evolução dos pontos de vista.

Na perspectiva piagetiana, o processo de organização do real pelo sujeito é enfatizado em todas as suas manifestações. Valoriza-se o erro, o incompleto, o inacabado, o lacunar, entretanto, espera-se por coordenações cada vez mais aprimoradas e atribui-se ao sujeito a responsabilidade pela regulação de suas assimilações e acomodações, como mecanismo auto regulador. Conforme assegura Wadsworth (1997, p.8) “Não há uma organização ‘errada’. Há apenas organizações cada vez melhores, à medida que o desenvolvimento intelectual avança.”

Após todo esse processo de permitir que os alunos jogassem, bem como de fazer com que os alunos com dificuldade tivessem contato com alguns conceitos matemáticos, encerrou-se a atividade com uma breve discussão sobre o que haviam aprendido com o jogo. Afirmaram que o jogo ensina a esperar o tempo certo para conseguir algo, a ter paciência, a partilhar o que se tem e a pensar para se tomar uma decisão.

Na roda de conversa sobre a experiência com o jogo procurou-se relembrar com os alunos como foram os encontros com jogo Mancala, que dissessem como haviam jogado desde o primeiro dia. Alguns relataram que no primeiro dia quase não conseguiram pensar que já pegar a casa com quatro sementes o fazia jogar novamente, outro ainda disse que quando ele descobriu isso e iria fazer eu pedi para guardar o jogo.

Os alunos foram comentando que sempre queriam começar o jogo na cava com quatro sementes, mas os outros com que jogavam já faziam isto também. Então foi perguntado a eles o que faziam quando já não tinham mais essa opção das 4 sementes na cava e a maioria respondeu que escolhia sempre onde tinha mais sementes pois, de alguma forma, daria para deixar uma no kalah deles.

Especificamente a uma das crianças das sete duplas foi perguntado porque sempre ele parecia estar esperando para jogar e colando a mão em todas as cavas antes. Ele respondeu que estava contando as sementes para ver qual era a sua melhor opção. Perguntou-se então qual era essa melhor opção, e ele respondeu que era deixar uma semente no kalah. Então foi questionado novamente: “E quando isso não é possível?” O aluno respondeu que contava para ver se podia fazer cair em um lugar vazio que tivesse as do adversário na frente. Observa-se que, na medida em que os princípios de investigação cuidadosa do método clínico são utilizados questionando o sujeito como pensou, solicitando que explicite o que planejou em seu pensamento, o diálogo se torna mais rico, a argumentação do sujeito melhora e o pesquisador faz menos inferências acerca do pensamento do aluno. Ao analisarmos esse contexto de jogadas, é perceptível nos participantes as construções e coordenações que realizaram durante as partidas.

Diante de uma situação desafiadora, como é o caso do jogo, a elaboração de estratégias permite que o indivíduo não se mantenha repetindo as mesmas ações, quando estas não são satisfatórias. Esta característica é importante para resolver problemas e buscar novas soluções que respondam ao que foi solicitado. No aporte teórico piagetiano, a elaboração de estratégias é uma importante condição de observação dos modos de organização do pensamento empregados pelo sujeito. Está relacionada à tomada de consciência. Para elaborar estratégias o sujeito é convidado a integrar todos os elementos envolvidos no jogo, as peças, as regras, o tabuleiro.

Ao planejar ações e hipóteses, o indivíduo precisa tomar consciência da ação, o que implica coordenar ações, procedimentos e estratégias, utilizando a antecipação, ainda que não chegue ao objetivo final, que é vencer a partida. Ao provocar conflitos internos, o jogo permite a busca de modificação da ação e esse movimento cognitivo enriquece e reelabora as estruturas cognitivas dos indivíduos. Assim, conhecer as regras não é suficiente para ganhar, já que solucionar o problema proposto pelo jogo requer decisões baseadas em uma ação intencional, coerente e comprometida com os diversos aspectos presentes no contexto.

Foi possível observar que alguns jogadores conseguiram elaborar sequências de jogadas, o que demonstrou planejamento de ações com antecipação de estratégias. Um dos acontecimentos sempre presentes nessas sessões com o jogo era a ajuda mútua entre os participantes. Observou-se que entre algumas duplas, quando um dos jogadores esquecia uma das regras de coleta das sementes, o próprio adversário fazia correções e lembrava o adversário de como a jogada deveria ser realizada.

Atribui-se a essa postura o fato de que as crianças podem ter entendido a situação de jogo como uma atividade de sala de aula, o que é muito positivo, retirando o caráter competitivo, como de um campeonato entre duplas. Notou-se também que quando duas crianças da dupla escolheram estratégias parecidas para suas jogadas, como a de contar sementes, o total de sementes obtidas ao final era aproximado, demonstrando que este jogo não está relacionado à sorte, e sim às estratégias que seus participantes utilizavam em suas jogadas.

Na etapa em que jogaram sete duplas, foi possível observar um avanço na elaboração das estratégias, os pensamentos de jogadas mais longas, assim como antecipação de novas jogadas. Após a inserção e explicação de uma nova regra, o jogo possibilitou aos alunos uma manipulação das operações básicas como a subtração e adição, além de desenvolver o pensamento lógico e estratégico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O jogo de regras reafirmou-se neste estudo como instrumento pertinente ao desenvolvimento de noções, conceituações, uma vez que possibilita trabalhar diversos aspectos cognitivos, afetivos, sociais e culturais. O jogo Mancala por sua vez, evidenciou-se aliado ao ensino da matemática nas escolas, visto que, por meio dele, percebeu-se ser possível desenvolver problemas, trabalhar a reversibilidade, noção de conservação de quantidades, reconhecer que um mesmo problema pode ser resolvido pelo uso de diferentes estratégias, operações e procedimentos.

O jogo possibilita ultrapassagem de desafios, ao perceber a necessidade de elaboração de estratégias para alcançar uma meta pretendida, pode ser considerado um instrumento complementar ao ensino tradicional nas escolas, desencadeando um processo de construção de conhecimentos. Ao planejar ações, jogadas e estratégias, favorece ao jogador o processo de tomada de consciência de seus erros e procedimentos favoráveis para vencer a partida. Na tentativa de alcançar êxito no jogo, o indivíduo é levado ao desequilíbrio e, por meio das regulações, os processos internos atuam em autocorreções ou preenchimento de lacunas para a retomada do estado de equilíbrio, num processo de organização das estruturas cognitivas, garantindo a adaptação à realidade.

Ao incentivar a tomada de consciência, promove superações, além de estimular a concentração, cooperação, o que faz com que o jogo em seu aspecto pedagógico, se apresente de forma produtiva ao professor que busca nele um aspecto facilitador da aprendizagem de estruturas matemáticas, muitas vezes de difícil assimilação. Ao aluno, torna-se relevante ao desenvolver sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las com autonomia e cooperação.

Na perspectiva da Educação Matemática, o jogo passa a ter o caráter de material de ensino quando considerado promotor de aprendizagem. O aluno se coloca diante de situações lúdicas, aprende a estrutura lógica da brincadeira e, deste modo, compreende também a estrutura lógico-matemática. Neste sentido, em cada uma das etapas, a definição dos objetivos é fundamental, assim como a organização da sala ou do ambiente que será utilizado pelos alunos. Durante a realização das partidas, o professor atua como observador e mediador das dúvidas e situações que são colocadas pelos alunos. A intervenção do professor se dá mais no sentido de orientar os alunos, estimulá-los e deixar que eles próprios possam refletir sobre as condições do jogo e tentarem resolver os desafios que se apresentam.

REFERÊNCIAS

BIANCHINI, L. G. B.; OLIVEIRA, F. N.; VASCONCELOS, M. S. Procedimentos no jogo virtual Colheita Feliz: entre a virtude e a regra. ETD: **Educação Temática Digital**, v. 14, n. 1, p. 1-21, jun. 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1988.

CARVALHO, L. R. R.; OLIVEIRA, F. N. Quando o jogo na escola é bem mais que jogo: possibilidades de intervenção pedagógica no jogo de regras Set Game. **Rev. Bras. Estudos Pedagógicos**. v. 95, n. 240, p. 431-455. 2014.

D'AMBRÓSIO, U. **Sociedade, cultura, matemática e seu ensino.** Educação e Pesquisa. vol.31 no.1 São Paulo Jan./Mar. 2005.

DELVAL, J. **Introdução à prática do Método Clínico**: descobrindo o pensamento das crianças. Porto Alegre: Artmed, 2002.

FLEMMING, D. M; COLLAÇO DE MELLO, A. C. **Criatividade e Jogos Didáticos**. São José: Saint-Germain, 2003.

FIOROT, M. A.; ORTEGA, A. C. Modos de aprender e de ensinar de professoras em situação com o jogo Traverse. In: MACEDO, L. **Jogos, psicologia e educação**: teoria e pesquisas. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2009. p. 97-124.

GRANDO, R. C. **O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino/aprendizagem da matemática**. 1995. 175f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1995.

KAMII, C.; DEVRIES, R. **Jogos em grupo na educação infantil:** implicações da teoria de Piaget. Porto Alegre: Artmed, 2009.

LARA, I. C. M. **Jogando com a Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais**. São Paulo: Rêspel, 2003.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACEDO, L. **Ensaios Construtivistas**. São Paulo: Casa do Psicólogo,1994.

MACEDO, L.; PETTY, A. L.; PASSOS, N. C. **Aprender com jogos e situações- problema.** Porto Alegre: Artes Médicas sul, 2000.

MACEDO, L.; PETTY, A. L.; CARVALHO, G. E.; SOUZA, M. T. C. C. **Jogos, intervenção, aprendizagem**. São Paulo: Artmed, 2005.

OLIVEIRA, F. N.; BRENELLI, R. P. O jogo xadrez simplificado como instrumento de diagnóstico da perspectiva social e cognitiva em escolares. **Ciência e Cognição**, v. 13, p. 109-124. 2008.

PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas:** problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro: Zahar,1976.

PIAGET, J. **Fazer e Compreender**. Tradução de Christina Larroudé de Paula Leite. São Paulo: Melhoramentos/USP, 1978.

SMOLE, K. et al. **Jogos de Matemática**: de 1º e 3º ano. Porto Alegre: Artmed, 2008. (Cadernos do

Mathema – Ensino Médio).

STRAPASON, L. P. R.; BISOGNIN, E. Jogos pedagógicos para o ensino de funções no primeiro ano do Ensino Médio. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 579-595, ago. 2013.

CAPÍTULO 16

PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ECONÔMICO PARA O MANEJO DE PLANTAS DANINHAS

Data de aceite: 23/03/2020

Data da Submissão: 03/01/2020

Elenice Weber Stiegelmeier
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Departamento de Acadêmico de Matemática - DAMAT
Cornélio Procópio – PR
http://lattes.cnpq.br/4735328573084041
https://orcid.org/0000-0002-8834-4937

RESUMO: Neste trabalho é avaliado um modelo de otimização econômico para o manejo de plantas daninhas que busca maximizar o lucro em um determinado período de tempo levando em consideração a evolução da resistência à herbicidas. O problema de otimização dinâmico envolve variáveis contínuas e é modelado como um problema de programação não linear e resolvido via método active set algorithm. São investigados os efeitos provocados pela evolução da resistência à herbicidas a partir de diferentes condições iniciais. Resultados numéricos são obtidos via técnica de programação não linear e indicam que com o tempo o lucro será reduzido devido a presença de plantas resistentes, logo estratégias de controle devem ser adotadas a fim de minimizar os impactos econômicos causados pela presença da planta daninha na cultura.

PALAVRAS-CHAVE: Otimização, manejo de plantas daninhas, programação não linear, impactos econômicos.

ECONOMIC OPTIMIZATION PROBLEM FOR WEED MANAGEMENT

ABSTRACT: In this work we evaluate an economic optimization model for weed management that maximize profit over a given period of time taking into account the evolution of herbicide resistance. The dynamic optimization problem involves continuous variables and is modeled as a nonlinear programming problem and solved via the active set algorithm method. The effects of herbicide resistance evolution from different initial conditions are investigated. Numerical results are obtained via nonlinear programming technique and indicate that over time the profit will be reduced due to the presence of resistant plants, so control strategies should be adopted in order to minimize the economic impacts caused by the presence of weed in the crop.

KEYWORDS: Optimization, weed management, nonlinear programming, economic impacts.

1 I INTRODUÇÃO

Plantas daninhas são plantas que crescem espontaneamente em solos agrícolas, competindo rigorosamente com a cultura cultivada (JONES e CACHO, 2000). Um dos principais mecanismos que contribuem para a sobrevivência das plantas daninhas é a alta produção de sementes, que, aliada a longevidade e a capacidade de sobreviver em condições adversas, podem garantir grandes reservas de sementes no solo, as quais podem germinar em gerações futuras (LORENZI, 2000) causando grandes danos a produção. Logo, o controle das plantas daninhas é importante para a obtenção de bons resultados em um sistema de cultivo.

Uma vez que a presença de plantas daninhas em solos agrícolas tem ocasionado reduções significativas em um sistema de cultivo, sendo essa estimada em torno de 13% na produção mundial de grãos, o uso de herbicidas se destaca como a principal técnica utilizada no manejo das plantas daninhas. O Brasil, com suas dimensões territoriais e condições climáticas, se destaca, desde 2008, com o primeiro lugar no uso de agrotóxicos. Tendo como base o controle e a aplicação de herbicidas, o foco principal dos estudos desenvolvidos para o manejo dessas é a maximização dos lucros de produção, deixando em segundo plano as preocupações com os recursos naturais e os impactos ambientais causados pela técnica de controle.

Para que se possa desenvolver uma estratégia de controle de forma a levar em consideração não só os custos e produção e as perdas de rendimentos causadas pela planta, mas, também, os impactos ambientais gerados pelo processo é necessário obter maior conhecimento do desenvolvimento biológico da planta e estudar a fundo os riscos e benefícios das estratégias de controle utilizadas.

O uso intensivo de produtos químicos para o controle de plantas daninhas gera uma seleção de espécies de plantas daninhas tolerantes a determinado herbicida. A aplicação repetitiva de um ou mais herbicidas, com o mesmo mecanismo de ação, em uma população de plantas daninhas, seleciona os indivíduos de espécies com habilidades em sobreviver aos tratamentos de herbicidas. Este fenômeno caracteriza uma pressão de seleção, causada pelo uso intensivo do herbicida em uma população, e contribui para o aumento da proporção de indivíduos tolerantes para a próxima geração (CHRISTOFFOLETI, 2008). Nesse caso, o uso intensivo de herbicidas na agricultura é uma das maiores causas de pressão de seleção, proporcionando os fenômenos de mudança de espécies na área e resistência de plantas daninhas a herbicidas, devido à eficácia e controle seletivo.

Visando reduzir as perdas causadas pelas plantas daninhas e os impactos econômicos causados pelo uso de herbicidas diversas estratégias de controle têm sido propostas (JONES E CACHO, 2000; JONES et al., 2006; BERTOLUCCI et al., 2013; STIEGELMEIER et al., 2017). Em Jones e Cacho (2000) e Jones et al. (2006)

técnicas de programação dinâmicas são utilizadas para encontrar a estratégia ótima que maximiza o lucro em termos da aplicação de um único herbicida. Em Bertolucci et al. (2013) técnicas de programação dinâmicas são utilizadas para obter a estratégia ótima do problema de controle de plantas daninhas em face a resistência. Já em Stiegelmeier et al. (2017) é proposto um modelo de otimização do manejo de plantas daninhas usando estratégias de programação não linear (PNL) considerando a dinâmica da resistência à herbicidas, resultados numéricos considerando o uso de dois herbicidas são comparados com o método tradicional de controle mostrando resultados promissores. O uso da estratégia de controle ótimo mostra que com a aplicação de doses reduzidas pode-se controlar o banco de sementes e, ainda, contribuem para a lucratividade do produtor.

Neste trabalho será utilizado técnicas de PNL para obter a solução do modelo de otimização econômico para a dinâmica de resistência à herbicidas. O objetivo é analisar os efeitos causados pela evolução da resistência ao longo de um período pré-determinado a partir de um problema de otimização econômico que visa maximizar o lucro do produtor. São investigados os efeitos provocados pela evolução da resistência à herbicidas a partir de diferentes condições iniciais. Um modelo de simulação numérica é empregado para avaliar as soluções dadas pela PNL na evolução da resistência, e, com isso, verificar a hipótese de que através da minimização do banco de sementes, o retorno econômico do manejo da planta daninha possa ser maximizado.

2 I MODELO DINÂMICO DE PLANTAS DANINHAS

Seja o ciclo de vida da planta e assumindo todos os parâmetros não negativos. O modelo populacional de plantas daninhas considerando o fenômeno da resistência à herbicidas é descrito por (JONES E CACHO, 2000):

$$
\begin{aligned}
y_t &= x^g \delta x_t, \; x_{t_0} = x_0 && (1)\\
y_t^a &= c_t y_t && (2)\\
x_t^r &= \exp[\gamma \ln y_t^a / (\mu + \varepsilon \ln y_t^a)] && (3)\\
x_t^n &= \kappa x_t^r - \eta + \xi && (4)\\
x_{t+1} &= x_t^n + (1-\Psi)(1-\delta) x_t, && (5)
\end{aligned}
$$

com x_t densidade do banco de sementes (m^{-2}) , y_t densidade de plantas que germinaram (m^{-2}), y^a_t densidade de plantas adultas (m^{-2}) , x^r_t densidade de sementes resultantes da reprodução das plantas adultas (m^{-2}), x^n_t densidade das novas sementes adicionadas ao banco de sementes (m^{-2}), x^g taxa de sobrevivência das sementes emergentes, δ taxa de germinação anual, c_t taxa de mortalidade inferida pelo herbicida, γ, μ, ε coeficientes de regressão, k taxa de sobrevivência de novas sementes, η densidade de sementes exportadas (m^{-2}), ξ densidade de sementes importadas (m^{-2}) e Ψ taxa de mortalidade das sementes dormentes.

A estrutura do modelo (1) - (5) é baseada no ciclo de vida das plantas daninhas, sem considerar a competição entre a planta daninha e a cultura, em que a população inicial x_0 é o banco de sementes viável e com sementes não geminadas presentes em um campo de produção agrícola. No modelo, (1) descreve as plantas emergentes provenientes do banco de sementes, (2) descreve a sobrevivência das plantas jovens emergentes determinada pela estratégia de manejo das plantas daninhas empregada durante cada iteração, (3) descreve a densidade de sementes resultantes da reprodução das plantas daninhas adultas, (4) descreve a proporção de sementes novas. Finalmente, (5) descreve as novas sementes produzidas que são adicionadas ao banco de sementes no final do ciclo de vida.

O modelo proposto por Jones e Cacho (2000) usa apenas como forma de controle a aplicação única de herbicida sem levar em consideração a pressão imposta pelo herbicida. Com isso, a abordagem proposta tem como objetivo acrescentar a resistência da planta daninha a herbicidas baseando-se na sua genética e na pressão seletiva exercida pelo herbicida através da função de controle c_t.

A função de controle é modelada considerando os fenótipos resistente (R) e suscetível (S) presente um uma população e a taxa global de mortalidade induzida pelo herbicida é calculada como:

$$c_t = (1 - \rho_R(u_t))R_t + (1 - \rho_S(u_t))(1 - R_t), \tag{6}$$

onde u_t é a dose de herbicida, R_t é a frequência de indivíduos resistentes e p_i(u_t) é a função dose resposta descrita em Seefeldt et al. (1995) como:

$$\rho_i(u_t) \quad = \quad c_i + \frac{d_i - c_i}{1 + \exp[b_i(\ln(u_t) - \ln(GR_{50i}))]}, \quad i = S, R.$$

Empregando o modelo genético descrito em Bertolucci (2013) e considerando a mudança que ocorre no banco de sementes após a aplicação do herbicida, a frequência do alelo é descrita por:

$$p_{t+1} = \frac{p_t\,(1-\Psi)\,(1-\delta)\,x_t + p_t^n x_t^n}{(1-\Psi)\,(1-\delta)\,x_t + x_t^n}, \tag{7}$$

$$p_t^n = \frac{w_{AA}p_t^2 + w_{Aa}p_t q_t}{w_{AA}p_t^2 + 2w_{Aa}p_t q_t + w_{aa}q_t^2}$$

e $q_t = 1 - p_t$. Considerando que a pressão seletiva é imposta pela dose de herbicida aplicado e assumindo que **A** represente o gene ligado a resistência da planta e que este seja dominante. Então, as probabilidades de sobrevivência da fase zigótica para a fase reprodutiva são dadas por:

$$w_{AA} = (1 - \rho_R(u_t)) , \quad w_{Aa} = (1 - \rho_R(u_t)) \quad e \quad w_{aa} = (1 - \rho_S(u_t)) .$$

A frequência de plântulas resistentes R_t segue os princípios da genética populacional (BRITTON, 2003) e é modelada como:

$$R_t = (p_t)^2 + 2p_t(1 - p_t). \tag{8}$$

Com isso, o modelo dinâmico populacional de plantas daninhas captura informação da dinâmica do banco de sementes e da evolução da resistência a certo herbicida.

3 I PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO ECONÔMICO

O problema econômico que visa maximizar o lucro considerando os efeitos da evolução da resistência é formulado como:

$$\begin{aligned}
\max_{u_t} J(x_0, p_0) \quad &= \quad \sum_{t=0}^{T} \alpha^t \pi(x_t, p_t, u_t) && (9)\\
& \quad\quad \text{sujeito} \quad \text{a} \\
x_{t+1} \quad &= \quad g(x_t, p_t, u_t), \; x(0) = x_0 && (10)\\
p_{t+1} \quad &= \quad v(x_t, p_t, u_t), \; p(0) = p_0 && (11)\\
0 \leq \quad u(t) \quad &\leq u_{max} && (12)\\
& \quad\quad x_t, p_t, u_t \; \in \; \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

onde π é a função lucro, g é a dinâmica do banco de sementes dada em (5), v é a dinâmica da frequência do alelo dada em (7), T é o horizonte final, α^t ϵ (0,1) taxa de desconto e u_{max} a dose máxima permitida em campo. O funcional objetivo é uma função não linear e geralmente uma função côncava.

Seguindo Stiegelmeier et al. (2010) a função lucro, π, para o problema de manejo de plantas daninhas é definida como:

$$\pi(x_t, p_t, u_t) = P_y Y(x_t, p_t, u_t) - P_u u_t - C, \tag{13}$$

com P_y preço por unidade produzida, P_u preço da unidade de controle (herbicida), C custo fixo de produção e Y função de produção, dada por:

$$Y = Y_0(1 - Y_L)(1 - Y_p),$$

onde Y_0 é a produção livre de planta daninha, Y_L é a perda associada a planta daninha, e Y_p é a perda associada ao efeito fitotóxico do herbicida. Assim, a função lucro (13) é determinada pela variável de controle u_t e pela densidade do banco de sementes x_t e frequência do alelo p_t.

Existem diversas formas para a resolução numérica de um problema de controle ótimo. Neste trabalho, será utilizada uma estratégia bastante conhecida que consiste em transformar o problema de controle ótimo em um problema de programação não linear (BERTSEKAS,1999). Nesta estratégia, as variáveis de decisão são dadas por u_t,t = 0,1, ..., T, e as variáveis de estado passam a ser determinadas em função de u_t, não sendo consideradas como variáveis do problema de PNL. Com isso, um método de PNL pode ser utilizado para a obtenção do controle ótimo u*. Vale ressaltar que, dependendo do método adotado, o controle u* pode corresponder a um ótimo local.

A solução numérica do problema de manejo de plantas daninhas foi obtida via técnica de PNL, uma vez que as variáveis de decisão são dadas por u_t,t = 0,1, ...,T, e as variáveis de estado x_t e p_t passam a ser determinadas em função deu$_t$. Nesse caso, será utilizado o método Active Set Algorithm (ASA) proposto por Hager e Zhang (2006) para obtenção da solução ótima. Este método consiste na combinação entre os métodos gradiente conjugado e gradiente projetado, e possui garantia de convergência global.

O Algoritmo 1 descreve a implementação do problema de controle de plantas daninhas usando o método ASA. Vale ressaltar que o Algoritmo 1 é aplicado para resolver problemas de restrição de caixa com limitantes superiores e inferiores.

Algorithm 1: Rotina do problema de PNL

Input: função objetivo J, funções estado g e v, Jacobiano de $f = [g\ v]^T$, limitantes inferior e superior $0.005 \leq u_k \leq u_{max}$

Output: Solução ótima

Inicializa $k = 0$, n (tempo), nx (número de variáveis de estado) e nc (número de variáveis de controle);

Escolha a tolerância $\epsilon \in [0, \infty)$;

Escolha os valores iniciais x_0, $p_0 > 0$, $u_0 \in [0,\ u_{max}]$;

while $\left\|d^k(u_k)\right\| > \epsilon$ **do**

  Execute o programa ASA;

  $u_{k+1} = u_k$;

  $k = k + 1$;

end

Solução ótima $= [u_k^*]$;

return.

---

4 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são avaliadas a dinâmica do banco de sementes e a evolução da resistência da planta daninha *Bidens subalternans*, a qual apresenta um alelo dominante e múltipla resistência aos herbicidas que atuam na inibição da acetolactato sintase (ALS) e inibidores da fotossíntese II (PS2). Foram utilizados os herbicidas Nicusulfuron e Atrazine como forma de controle da planta daninha presente na cultura do milho.

A planta daninha *Bidens subalternans* é uma planta altamente competitiva, com facilidade em se adaptar em solos agrícolas, além de possuir alta produção de sementes combinada com mecanismos de dormência, tornando-a uma planta resistente aos herbicidas e com isso, apresenta grande prejuízo aos produtores devido as práticas de controle empregadas.

Os parâmetros adotados para as curvas dose-respostas,p_i , foram obtidos via software estatístico ***R*** a partir de experimentos realizados pela Embrapa Milho e Sorgo (veja Tab. 1). A Figura 1 ilustra as curvas dose respostas resultantes para ambos os herbicidas.

Tabela 1: Parâmetros da função dose-resposta obtidos experimentalmente.

Herbicide	Biótipo	b	c	d	GR_{50}
Nicosulfuron	Suscetível	-0.80721	-3.06521	102.65965	8.57764
	Resistente	-1.28707	-0.30570	34.41258	36.12024
Atrazine	Suscetível	-1.38747	-1.30678	105.86746	783.09583
	Resistente	-0.68405	0.12445	212.9900	57375.0

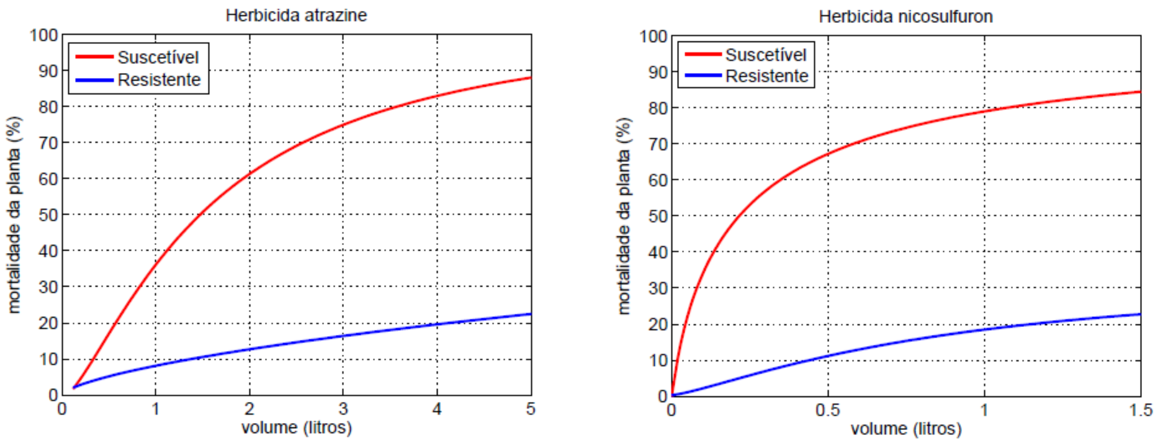


Figura 1 - Taxa de mortalidade das plantas suscetíveis, , e resistentes, .

Nas simulações numéricas considera-se a densidade inicial do banco de sementes fixo, x_0 = 500 (sementes/m^2), a frequência inicial do alelo R variando entre $0 < p_0 < 1$e um horizonte de simulações de 20 anos. O objetivo é analisar os efeitos causados pela evolução da resistência ao longo de 20 anos. Na Tabela 2 encontra-se os parâmetros econômicos e populacionais utilizados nas simulações numéricas.

Tabela 2: Parâmetros usados nas simulações numéricas (1 = nicosulfuron e 2 = atrazine)

Parâmetros populacionais	Valor	Parâmetros econômicos	Valor
$\delta(\%)$	60.00	P_y (R\$ ton^{-1})	534.40
$\psi(\%)$	30.00	Y_0 (ton ha^{-1})	8.64
η (m^{-2})	0.00	C (R\$ ha^{-1})	954.73
ξ (m^{-2})	0.00	P_u^1 (R\$ $liter^{-1}$)	42.90
$\kappa(\%)$	35.00	P_u^2 (R\$ $liter^{-1}$)	12.40
$x^g(\%)$	80.00	u_{max}^1 (liter ha^{-1})	1.50
γ	6.80	u_{max}^2 (liter ha^{-1})	5.00
μ	2.00	α	0.90
ε	0.67	φ^1	$8.90\ 10^{-3}$
		φ^2	$2.70\ 10^{-3}$
		a	$1.58\ 10^{-2}$
		m	$4.83\ 10^{-1}$

Na Figura 2 e 3 são apresentadas as dinâmicas do banco de sementes e as respostas dos alelos resistentes a partir de diferentes condições iniciais,p_0 , obtidas via estratégia PNL. Observa-se que o banco de sementes sofre uma redução significativa inicialmente, para ambos os herbicidas, porém, quando a densidade de plantas resistentes se torna elevada, ocorre um aumento no banco de sementes (veja Fig. 2), pois, se a planta resistente completar seu ciclo na safra seguinte haverá uma maior densidade de plantas resistentes.

Na Figura 3 verifica-se que até ocorrer uma evidência perceptível do fenótipo R, geralmente $p_t > 0{,}1$, podem decorrer 5, 10 ou até 15 anos de uso continuado de herbicidas com o mesmo mecanismo de ação. Geralmente quando detectado, o problema já é significativo.

A Figura 5 ilustra a dose u* obtida via PNL para 20 anos. Observe que quando se tem baixa frequência do fenótipo R, uma dose alta pode melhorar o controle inicialmente, porém, altas doses podem intensificar a seleção do fenótipo R como mostra a Figura 4.

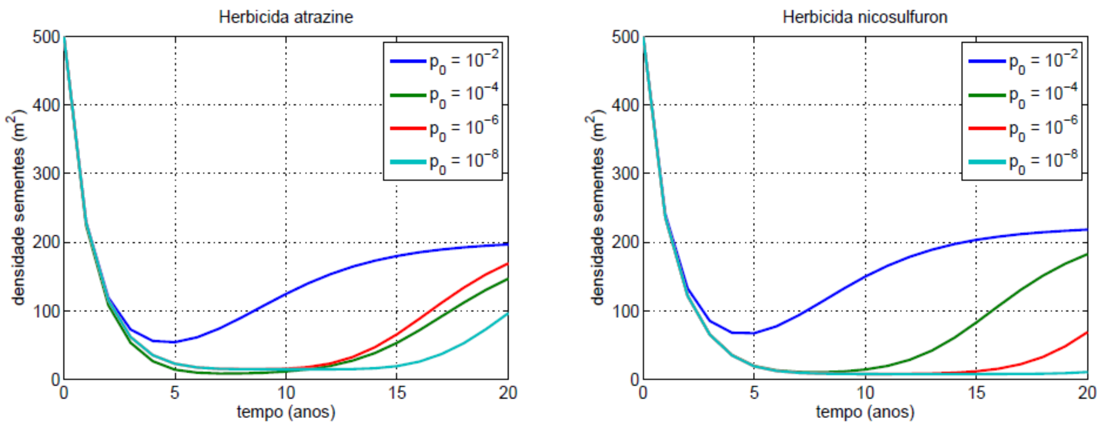


Figura 2 - Densidade do banco de sementes x* para um período de 20 anos via PNL.

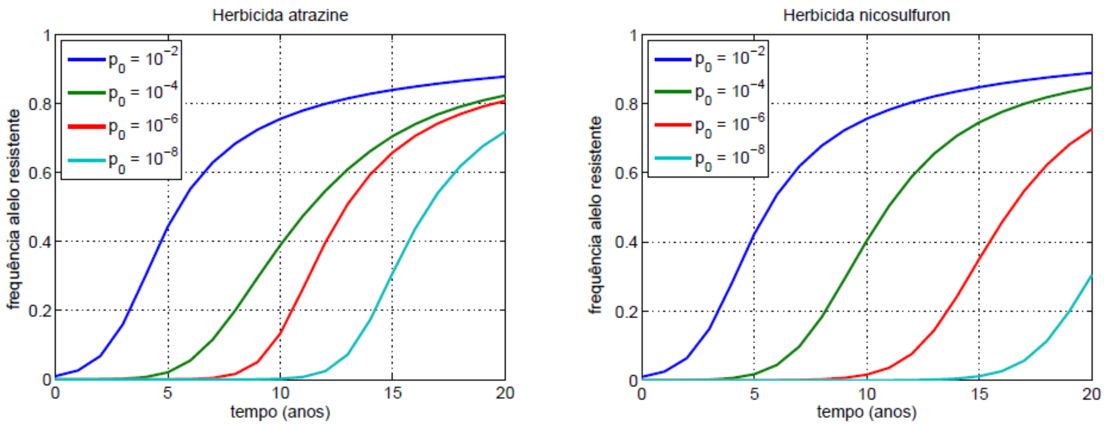


Figura 3 - Frequência do alelo resistente p* para um período de 20 anos via estratégia PNL.

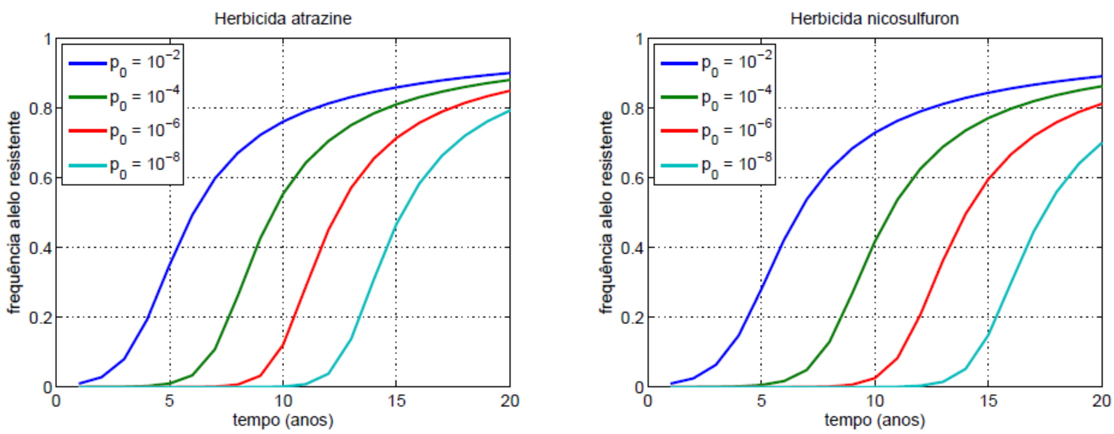


Figura 4 - Frequência do alelo p* via estratégia convencional, com $u^1_{max} = 1{,}5$ e $u^2_{max} = 5$.

Comparando-se os resultados da PNL com um sistema convencional de plantio, o qual é baseado na utilização da dose máxima em campo, verifica-se que a densidade de resistência é maior com o uso da dose máxima (veja Fig. 4). E, ainda, observa-se que para densidades altas de resistência, $p_0 = 10^{-2}$, a estratégia PNL apresentou melhor retorno financeiro, no entanto, para baixas densidades, $p_0 = 10^{-8}$, o lucro médio se equipara a estratégia convencional, uma vez que a presença do fenótipo R é imperceptível (veja Fig. 6).

Portanto, a estratégia de controle ótimo adotada mostrou resultados satisfatório uma vez que a redução de dose minimiza os danos ambientais e apresenta um lucro significativo ao produtor.

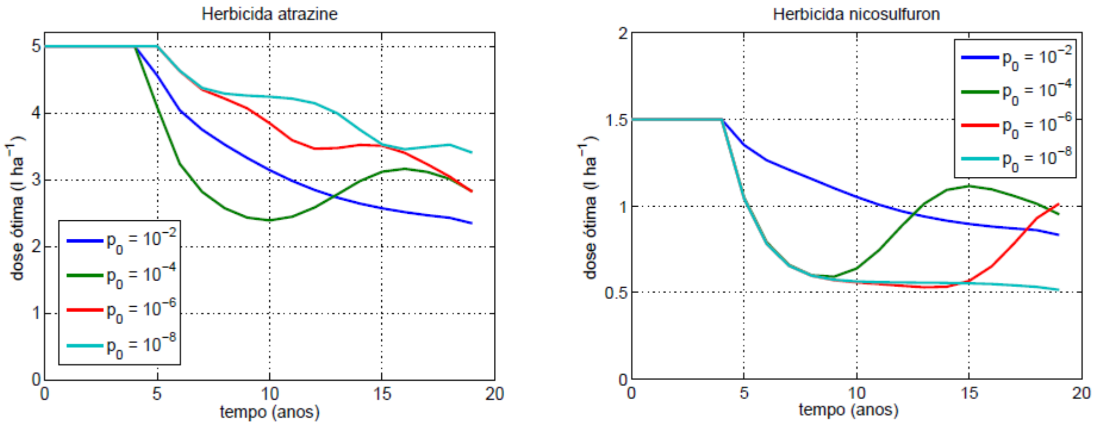


Figura 5 - Dose u* para um período de 20 anos via estratégia PNL.

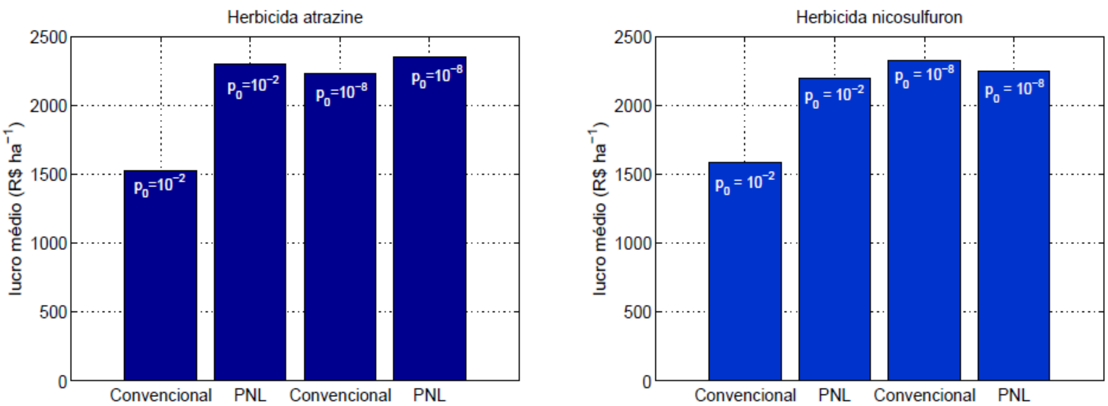


Figura 6 - Lucro médio obtido via estratégia PNL e convencional, com $p_0 = 10^{-2}$ e $p_0 = 10^{-8}$.

5 I CONCLUSÃO

Neste trabalho foi avaliado um modelo econômico de otimização para o manejo de plantas daninhas via técnica de programação não linear considerando a taxa de mortalidade de biótipos resistentes e susceptíveis. Verificou-se que os benefícios econômicos podem ser maximizados com a minimização do banco de sementes.

No entanto, as estratégias de controle convencional quanto a PNL mostram que com o tempo o lucro vai ser reduzido devido ao aumento das plantas resistentes. Isso demonstra claramente a necessidade de considerar modelos de otimização associados ao manejo da resistência. As técnicas de manejo com rotação e misturas de herbicidas é uma solução que deve ser considerada para retardar a evolução da resistência.

Portanto, os resultados mostram que o uso de novas técnicas de manejo que consideram estratégias de otimização pode vir a contribuir para alcançar metas ambientais e não apenas visando o aumento no lucro do produtor.

REFERÊNCIAS

BERTESEKAS, D. P. **Nonlinear Programming**. 2a ed., Athena Scientific, Belmonte, MA, 1999.

BERTOLUCCI, L. H. B.; COSTA, E. F.; OLIVEIRA V. A., FERNANDO L.; KARAM D. Herbicide dosage optimization model for weed control using the resistance dynamics, **Proceedings of Congress on Modelling and Simulation**, v. 1, p. 220-225, 2013.

BRITTON, N. F. **Essential Mathematical Biology**, Springer Undergraduate Mathematics Series, London, UK, 2003.

CHRISTOFFOLETI, P.J. **Aspectos de resistência de plantas daninhas a herbicidas**, 3rd edn. Associação Brasileira de Ação à Resistência de Plantas Daninhas, Piracicaba, SP, 2008.

HAGER, W. W.; ZHANG H., A new active set algorithm for box constrained optimization, Journal of Optimization, v. 2, p. 526-557, 2006.

JONES, R.; CACHO, O.J. A dynamic optimisation model of weed control, in: 44th **Annual Conference of the Australian Agricultural and Resource Economics**, Sydney, Australia, p. 1-17, 2000.

JONES, R.; CACHO, O.J.; SINDEN, J. The importance of seasonal variability and tactical responses to risk on estimating the economic benefits of integrated weed management, Agricultural Economics, v. 35, n. 3, p. 245-256, 2006.

LORENZI, H. **Plantas daninhas do Brasil**: Terrestres, aquáticas, parasitas e tóxicas, Instituto Plantarum de Estudos da Flora, Nova Odessa, SP, 2000.

SEEFELDT, S.S.; JENSEN, J.E.; FUERST E.P., Log-logistic analysis of herbicide dose-response relationships, Weed Technology, v. 1, p. 218-227, 1995.

STIEGELMEIER, E. W.; MUNARI Jr, P. A.; KAJINO, H. S.; OLIVEIRA, V. A.; SILVA, G. N. Modelo de otimização da aplicação de herbicida para o controle de plantas daninhas considerando a evolução da resistência, **Anais Congresso Brasileiro de Automática**, v. 1, p. 886-893, 2010.

STIEGELMEIER, E. W., OLIVEIRA, V. A.; SILVA, G. N.; KARAM, D.; Optimal weed population control using nonlinear programming. Computational and Applied Mathematics, v. 36, n. 2, p. 1043 – 1065, 2017.

SOBRE O ORGANIZADOR

FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES - Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade

ÍNDICE REMISSIVO

Atena
Editora
2 0 2 0