Ensino Aprendizagem de Matemática

Eliel Constantino da Silva
(Organizador)

Atena Editora
Ano 2019

Eliel Constantino da Silva
(Organizador)

Ensino Aprendizagem de Matemática

Atena Editora
2019

Editora Executiva: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Diagramação: Geraldo Alves
Edição de Arte: Lorena Prestes
Revisão: Os Autores

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

E59 Ensino aprendizagem de matemática [recurso eletrônico] / Organizador Eliel Constantino da Silva. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-85-7247-545-7
DOI 10.22533/at.ed.457192008

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Prática de ensino. 3.Professores de matemática – Formação. I. Silva, Eliel Constantino da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná - Brasil
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2019

APRESENTAÇÃO

Esta obra reúne importantes trabalhos que tem como foco a Matemática e seu processo de ensino e aprendizagem em salas de aula do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior.

Os trabalhos abordam temas atuais e relevantes ao ensino e aprendizagem da Matemática, tais como: a relação da Matemática com a música no ensino de frações, livros didáticos e livros literários no ensino de Matemática, uso de instrumentos de desenho geométrico, jogos, animes e mangá como contribuições para o desenvolvimento da Matemática em sala de aula, análise dos problemas que envolvem o ensino de Trigonometria no Ensino Médio, a ausência do pensamento matemático e argumento dedutivo na Educação Matemática, investigação e modelagem matemática, tendências em Educação Matemática, formação inicial de professores de Matemática e apresentam um aprofundamento da Matemática através dos dígitos verificadores do cadastro de pessoas físicas (CPF), simetria molecular, análise numérica e o Teorema de Sinkhorn e Knopp.

A importância deste livro está na excelência e variedade de abordagens, recursos e discussões teóricas e metodológicas acerca do ensino e aprendizagem da Matemática em diversos níveis de ensino, decorrentes das experiências e vivências de seus autores no âmbito de pesquisas e práticas.

O livro inicia-se com seis capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental. Em seguida há 9 capítulos que abordam o ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio, seguidos de 4 capítulos que abordam a temática do livro no Ensino Superior. E por fim, encontram-se 10 capítulos que trazem em seu cerne a Matemática enquanto área do conhecimento, sem a apresentação de uma discussão acerca do seu ensino e do processo de aprendizagem.

Desejo a todos os leitores, boas reflexões sobre os assuntos abordados, na expectativa de que essa coletânea contribua para suas pesquisas e práticas pedagógicas.

Eliel Constantino da Silva

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

RELAÇÕES ENTRE A MÚSICA E A MATEMÁTICA: UMA FORMA DE TRABALHAR COM FRAÇÕES

Enoque da Silva Reis
Universidade Federal de Rondônia (Unir-Ji-Paraná)
Professor do Departamento Acadêmico de Matemática e Estatística. Ji-Paraná, Rondônia
Doutorando pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Líder do Grupo de Estudo e Pesquisa em História da Educação Matemática Escolar (GEPHEME-RO)

Hemerson Milani Mendes
Pós-graduando em Educação Matemática – UNIR Jí-Paraná.
Integrante do Grupo Rondoniense de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GROEPEM)

Samanta Margarida Milani
Mestra em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/RO, (2016).
Professora do Instituto Federal de Educação Ciências e Tecnologia de Rondônia – IFRO
Integrante do Grupo de Estudo e Pesquisa em História da Educação Matemática Escolar (GEPHEME-RO)

RESUMO: O objetivo deste capítulo é divulgar um estudo que buscou analisar a relação entre a música e a matemática e em particular propor algumas atividades que possam auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de frações. No referencial teórico, nos baseamos nos conceitos fundamentais da música, como o som, melodia, intensidade e a própria concepção de música, juntamente, com a definição de frações e as operações de adição e subtração, multiplicação e divisão no conjunto dos Números Racionais. Como referencial metodológico, optamos em descrever o processo de construção deste trabalho, em outras palavras, nosso referencial está ligado a descrição do caminhar na construção deste. Considerando que a presença da matemática na música é intensa e aprender música consiste em aprender também elementos matemáticos, aqui em particular, frações e operações como adição, subtração, multiplicação e divisão no conjunto dos números Racionais.

PALAVRAS-CHAVE: Música; Matemática; Fração.

RELATIONSHIPS BETWEEN MUSIC AND MATHEMATICS: A WAY TO WORK WITH FRACTIONS

ABSTRACT: The objective of this chapter is to disseminate a study that sought to analyze the relationship between music and mathematics and in particular to propose some activities that may help in the process of teaching and learning fractions. In the theoretical framework, we are based on the fundamental concepts of music, such as sound, melody, intensity and the conception of music, together, with the definition

of fractions and the operations of addition and subtraction, multiplication and division in the set of numbers Rational. As a methodological reference, we chose to describe the process of constructing this work, in other words, our referential is linked to the description of the walk in the construction of this. Whereas the presence of mathematics in music is intense and learning music consists in learning also mathematical elements, here in particular, fractions and operations such as addition, subtraction, multiplication and division in the set of rational numbers.
KEYWORDS: Music; Math; Fraction.

1 I INTRODUÇÃO

A maioria das pessoas, quando pensam em matemática, se recordam de algo difícil e complicado de entender, e muitas dessas, desconhecem a relação existente desta disciplina com tantas outras que nos permitem desestressar e relaxar, como a música, pois se não fosse um matemático chamado Pitágoras, experimentar e descobrir as relações das notas musicais com conceitos básicos da matemática, ela não teria a magia de transformar e alegrar nossos dias.

E como Pitágoras a milhares anos atrás, na Grécia Antiga, fez descobertas muito importantes tanto para a matemática como para a música? Ele precisou apenas de uma corda esticada, para se aventurar e descobrir sons diferentes e ao mesmo tempo harmônicos.

Para entendermos melhor o que Pitágoras fez, devemos imaginar um corda esticada e presa nas suas extremidades, ao tocarmos nesta corda ela vibra. Pitágoras decidiu dividir está corda ao meio para descobrir qual som seria produzido, e logo percebeu que era o mesmo, porém mais agudo que o anterior, ou seja a mesma nota, somente uma oitava acima. E ele não parou por aí, continuou a fazer novas divisões e a encontrar novos sons, no entanto sempre harmônicos e agradáveis a nossos ouvidos.

A música e a matemática de certo modo nos proporcionam momentos de lazer, tranquilidade, tesão ou prazer, e uma das explicações a este fato é que de alguma forma nosso cérebro gosta de relações lógicas bem definidas. Este fato nos remete a exemplificar como a matemática está presente na música, e que as relações lógicas são de uma maneira inexplicável, compreendidas por nosso cérebro.

Não é necessário conhecer tudo de matemática para ser capaz de apreciar um boa e prazerosa música, mas saiba que ela é resultado de uma organização numérica. E o responsável por interpretar e desvendar esses mistérios musicais é o nosso cérebro. Com isso podemos concluir que seu cérebro gosta de cálculos e se você for músico, então você também é de alguma forma matemático.

Diante da explanação feita, objetivamos demonstrar que é possível trabalhar conceitos básicos matemáticos com as notas musicais, pois a matemática e a música andam lado e lado, e está poderá vir a ser um potencial estimulador durante o processo de ensino e aprendizagem desta disciplina, que conforme supracitado inicialmente é vista como algo difícil e complicado.

Pensando nisso, iniciamos o trabalho fazendo uma breve discussão histórica entre a matemática e a música, em seguida abordamos alguns elementos fundamentais sobre a música e discorremos teoricamente conceitos específicos e básicos de adição e subtração de frações, assim como de razão e proporção. Posteriormente trazemos uma proposta de atividades que podem vir a ser trabalhadas em sala de aula, envolvendo elementos musicais e matemáticos, em particular o conteúdo de frações, e finalizamos apresentando uma sucinta análise das questões propostas.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Por entendermos ser este tópico a base para nossa análise, o descrevemos em três pontos distintos. O primeiro para esclarecer ao leitor algumas considerações históricas da relação existente entre a música e a matemática, em seguida, buscamos discutir alguns conceitos inerentes a parte específica da música, como o som, melodia, intensidade e a própria concepção de música, e por fim, um estudo de frações, elemento específico da matemática.

2.1 Uma Breve História sobre as Frações

A história e origem das frações remonta o antigo Egito, aproximadamente 3.000 a.C., e traduz a necessidade e importância para o ser humano acerca dos números fracionários. Naquela época, os matemáticos marcavam suas partes de terras para delimitá-las, porém, no período chuvoso o rio ultrapassava o limite e inundava muitas terras, e por consequência, as marcações.

Dessa forma, os matemáticos resolveram demarcá-las com cordas a fim de resolver o problema causado pelas enchentes, porém notaram que muitos terrenos não eram compostos por números inteiros, pois havia alguns terrenos que mediam partes de um total. Assim, os estudiosos dos faraós passaram a fazer uso dos números fracionários, ainda cabe ressaltar que Fração é originada do latim *fractus* e significa "partido".

De acordo com Machado (2013, p.17) "tais frações eram consideradas frações unitárias, pois o numerador tinha sempre o valor unitário 1. Eram representadas na notação hieroglífica e utilizavam um sinal elíptico seguido do número inteiro correspondente". Através da figura 1 podemos observar alguns exemplos da representação fracionária egípcia.

Figura 1: Representação de Fracionária Egípcia

Fonte: Machado (2013, p.17).

Ainda Machado (2013, p.17), expõe que "quando as frações não eram unitárias, expressavam em forma de adição de frações unitárias. A única fração que não era decomposta em adições de frações unitárias era a fração $\frac{2}{3}$, para tal fração utilizavam um método particular".

Nessa concepção Boyer (1996, p.9) relata que "atribuíam à fração $\frac{2}{3}$ um papel especial nos processos aritméticos de modo que para achar o terço de um número primeiro achavam os dois terços e tomavam depois a metade disso." A partir das frações egípcias e de outras civilizações como babilônicos, romanos, hindus, entre outras, ocorreu o surgimento de várias notações que contribuiu para a forma atual que conhecemos e que é estudada.

2.2 Adição e Subtração de frações

No campo de estudo da matemática, operações com frações são utilizadas em inúmeros contextos, dessa forma Sodré (2010) descreve que "fração $\frac{a}{b}$ é a representação genérica do valor *a* que é dividido por *b* partes iguais, sendo $b \neq 0$. Em toda fração, o termo superior é chamado de numerador e o termo inferior é chamado de denominador".

Assim sendo, a fração na forma genérica $\frac{a}{b}$, temos que o termo *a* é o numerador e o termo *b* é o seu denominador.

No que diz respeito às operações de adição ou soma de frações, se faz necessário que todas as frações envolvidas possuam o mesmo denominador. Dessa forma, caso todas as frações já possuam um denominador em comum, só precisa ser feita a soma de todos os numeradores e mantenhamos este denominador comum. Observemos o exemplo a seguir:

$$\frac{12}{2} + \frac{5}{2} + \frac{8}{2} =$$

Podemos ver, que todas as frações do exemplo acima possuem o denominador igual a 2, desse modo a fração final terá como numerador a adição dos números 12, 5 e 8, assim como terá o mesmo denominador **2:**

$$\frac{12+5+8}{2}=\frac{25}{2}$$

Agora iremos verificar outro exemplo:

$$\frac{7}{13}+\frac{15}{5}+\frac{8}{3}=$$

Da forma que está posto o exemplo acima, não é possível realizar a operação aditiva dos numeradores, ou seja, é necessário converter todas as frações em um denominador comum. Por consequência, o denominador resultante deve ser o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) dos denominadores dos números (13, 5, 3), que temos como resultado 195. Portanto, um novo numerador de cada fração será buscado, de modo que será divido por 195 pelo seu denominador atual e em seguida multiplicando-se o produto encontrado pelo numerador original, de maneira que:

- Para $\frac{7}{13}$ temos (195 dividido por 13), que resulta 15, e em seguida é multiplicado por 7, tendo assim como resultado 105, assim sendo temos $\frac{7}{13}=\frac{105}{195}$;

- Para $\frac{15}{5}$ temos (195dividido por 5), que resulta 39, logo após multiplicamos por15, resultando em 585, assim $\frac{15}{5}=\frac{585}{195}$;

- Para $\frac{8}{3}$ temos (195 dividido por 3), resulta em 65, e multiplicando por8, temos 520 como número resultante, assim $\frac{8}{3}=\frac{520}{195}$;

Assim sendo, obtemos três frações equivalentes às frações originais sendo que todas possuem o denominador 195 em comum, basta agora proceder de acordo com o primeiro exemplo:

$$\frac{105}{195}+\frac{585}{195}+\frac{520}{195}=\frac{105+585+520}{195}=\frac{1210}{195}$$

Em relação à subtração ou diferença de frações, de mesmo modo que a adição, também se faz necessário que todas as frações apresentem um denominador em comum, desse modo, basta subtrair um numerador do outro, mantendo assim o denominador comum.

Exemplo:

$$\frac{13}{2}-\frac{7}{2}-\frac{5}{2}=\frac{13-7-5}{2}=\frac{1}{2}$$

Vale lembrar, que é em casos de operações de subtração que as frações o denominador não é comum, é essencial encontrar o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e executar os mesmos procedimentos da adição, apenas se atentando com as operações da diferença.

Exemplo:

$$\frac{3}{13}-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{45-78-\ 65}{195}=\frac{-98}{195}$$

2.3 Multiplicação de Frações

A conceituação da multiplicação ou produto de frações, talvez seja uma das mais simples das operações aritméticas que envolve fração. Diferente das operações de adição e subtração, na multiplicação não é essencial que se tenha um denominador comum, assim basta multiplicar os numerados presentes na operação, e o mesmo em relação aos seus denominadores.

Observemos o exemplo a seguir:

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{105}$$

2.4 Divisão de Frações

A divisão de frações está resumida apenas na regra de que o numerador da primeira fração é responsável por multiplicar o denominador da segunda e o denominador da primeira fração multiplica o numerador da outra fração.

Vejamos o exemplo:

$$\frac{1}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$$

2.5 Razão e Proporção

A razão é utilizada para fazer comparação entre duas grandezas, de uma forma geral, podemos dizer que a razão do número *a* para o número *b* (diferente de zero) é o quociente de *a* por *b*.

A razão entre *a* e *b*, escrita através de notação matemática, é $\frac{a}{b}$, onde $b \neq 0$.

Exemplo:

A razão de 2 para 5 é $\frac{2}{5}$.

Já proporção pode ser definida como a igualdade entre duas razões (equivalências entre razões):

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Assim sendo, se afirmarmos que as razões são iguais, é o mesmo que expor que formam uma proporção.

Para verificar essa propriedade, devemos realizar algumas operações. Na proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Podemos multiplicar os dois lados da igualdade pelo produto dos consequentes das razões que a formam $(b \cdot d \text{ ou } bd)$ Assim: $a/b \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$ ou seja, simplificando, temos que:

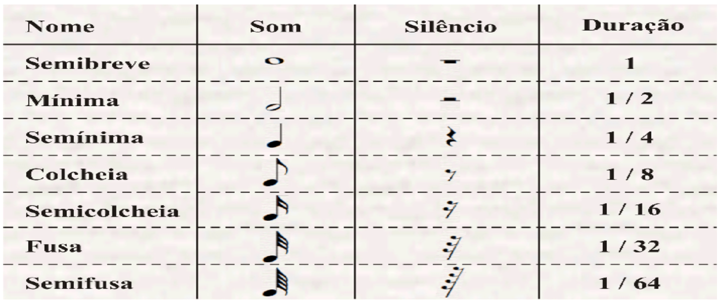
$$\boldsymbol{a \,.\, d = c \cdot b} \text{ ou } \boldsymbol{a \cdot d = b \cdot c.}$$

3 I METODOLOGIA

Como nossa opção metodológica foi descrever ao leitor nosso caminhar no desenvolvimento deste trabalho, iniciamos lembrando que o objetivo foi, analisar a relação entre a música e a matemática, em particular propor algumas atividades que possam auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de frações.

Diante disto, como a formação de um dos componentes deste artigo é a música, e com experiência nesta área por mais de 10 anos, inclusive em ministrar aula de musicalização. Identificamos de imediato a existência da relação entre essas duas áreas a música e a matemática. A partir dessa constatação buscamos construir atividades que pudessem ser utilizadas tanto para explicitar a relação das áreas como em proporcionar o aprendizado delas em conjunto.

Para dar início observamos a tabela composta por quatro colunas, em que a primeira coluna identifica o nome de cada um dos símbolos utilizados, a segunda coluna a representação simbólica dos som, a terceira coluna a representação simbólica dos silêncios e por fim o valor numérico de cada uma delas. Podemos observar de imediato um conjunto formado por sete nomes e quatorze símbolos.



Nome	Som	Silêncio	Duração
Semibreve	𝅝	𝄻	1
Mínima	𝅗𝅥	𝄼	1 / 2
Semínima	𝅘𝅥	𝄽	1 / 4
Colcheia	𝅘𝅥𝅮	𝄾	1 / 8
Semicolcheia	𝅘𝅥𝅯	𝄿	1 / 16
Fusa	𝅘𝅥𝅰	𝅀	1 / 32
Semifusa	𝅘𝅥𝅱	𝅁	1 / 64

Tabela 01: Símbolos musicais

Fonte:https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Figuras-musicais-representativas-das-duracoes-temporais-relativas_fig1_326568523

Como nosso pensamento inicial era socializar os conhecimentos musicais em conjunto com a matemática, a tabela 01 oportunizou a apresentação nominal, simbólica e numérica dos elementos.

Diante desta exposição acreditamos na necessidade de propor atividade que possibilitem o trabalho de relação e proporção, inicialmente entre os símbolos de som juntamente com sua nomenclatura. Desse modo a atividade a seguir foi pensada.

Atividade 01: Considerando o quadro de figuras musicais acima, complete as lacunas:

a) ♩ = ______ colcheias.

b) 𝅝 = _____ colcheias.

c) 𝅗𝅥 = ______ semifusas.

d) ♪ = ______ semicolcheias.

e) 𝅘𝅥𝅯 = ______ semifusas.

f) ♩ = ______ semifusas.

g) 𝅝 = ______ mínimas.

h) 𝅝 = ______ fusas.

i) ♪ = ______ semifusas.

j) 𝅗𝅥 = ______ semínimas

Ao observar a consistência dos alunos nas relações desenvolvidas na atividade 01. Notamos a possibilidade de problematizar tal atividade, neste caso, mudando o valor inicial da semibreve que é a base e vale 1. Passando esse valor para 1 para semínima. Ou seja a atividade 02 seria escrita da seguinte forma:

Atividade 02: A atividade 01 apresenta a semibreve representando 1 tempo. Considerando que em uma nova situação um tempo seja representado pela semínima, complete a tabela abaixo:

Semibreve	𝅝	____
Mínima	𝅗𝅥	____
Semínima	♩	1
Colcheia	♪	____
Semicolcheia	𝅘𝅥𝅯	____
Fusa	𝅘𝅥𝅰	____
Semifusa	𝅘𝅥𝅱	____

Após este trabalho que consiste em relações envolvendo os símbolos e suas representações. Acreditamos na abertura para assim começar a trabalhar com valores numéricos juntamente com operações. Para isso propomos a atividade 03 descrita a seguir.

Atividade 03: Considerando a figura musical semínima valendo 1, que figura ou conjunto de figuras corresponde às operações abaixo?

a) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$$

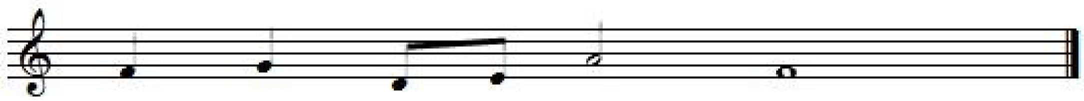
b) $$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$$

c) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$$

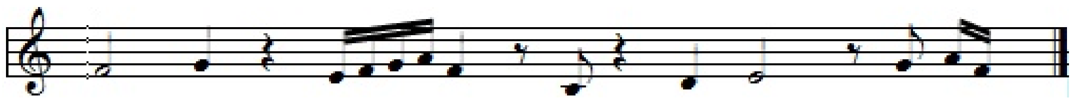
Após a atividade três temos a possibilidade de propor aos alunos algo que envolva um desfio um pouco maior pois entram outros elementos simbólicos no contexto musical mas que aqui não influência as relações. Em particular a representação desses elementos em uma escrita musical, ou seja, no pentagrama, que, a grosso modo, tem seu significado de acordo como a posição de cada símbolo, no entanto, seu valor numérico não se altera.

Atividade 04: Levando em consideração apenas as figuras musicais e a figura semínima valendo 1, determine quantos tempos há em cada trecho musical abaixo:

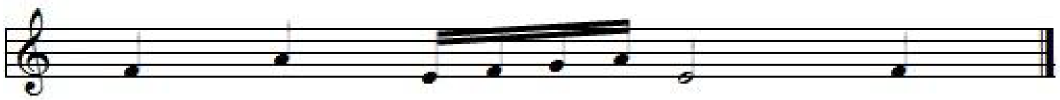
a) Total de tempos:___



b) Total de tempos:___



c) Total de tempos:___

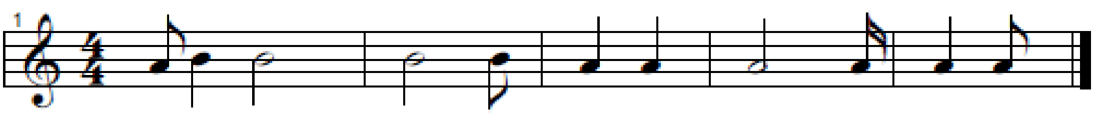


Para finalizar o conjunto de atividade, a atividade 05 foi idealizada pensando no sentido oposto da atividade 04, ou seja, a primeira tem por finalidade levar o aluno a calcular o valor a partir da simbologia, e a segunda, a partir da soma dos símbolos solicitar que o aluno desenhe o símbolo que complete corretamente essa operação.

Atividade 05: Na música existem os compassos, que são trechos musicais que possuem uma determinada quantidade de tempo, sendo estes, representados pelo numerador de uma fração, basicamente existem 3 tipos simples:

-Binário, com dois tempos; **-Ternário**, com três tempos; **-Quaternário**, com quatro tempos.

Sabendo que o tipo de compasso utilizado na questão abaixo é o quaternário, e a semínima vale 1, complete-os com figuras musicais, os valores que faltam.



4 I ANÁLISE

Nosso movimento de análise, foi composto na busca de esclarecer as potencialidades matemáticas assim como musicais em cada um dos exercícios propostos na metodologia. Dessa forma temos que:

Ao observarmos a **atividade 01** é possível identificar que seu objetivo é proporcionar ao educando o desafio de compor a combinação dos símbolos musicais, tendo como principal elemento matemático os conceitos de proporção e operações no conjunto dos números Racionais. Isso pode ser observado nos dez itens que compõe a atividade, para exemplificar melhor nossas palavras, o item (a) da atividade que solicita que seja completada a seguinte situação: ♩ = _____ colcheias. Neste caso a atividade pede para que o aluno identifique o símbolo (♩) como sendo uma semínima, e faça a relação com a tabela inicialmente enunciada, mostrando que uma semínima (♩) tem o valor numérico igual a $\frac{1}{4}$, então basta observar quantas colcheias representadas pela simbologia (♪) que possui valor numérico igual $\frac{1}{8}$ se iguala a uma semínima (♩). Ou seja, como cada semínima (♩) = $\frac{1}{4}$, e cada colcheias (♪) = $\frac{1}{8}$. Basta observar que tal questionamento poderia ser escrito na linguagem matemática da seguinte forma: Qual valor de *x* para que a expressão $\frac{1}{4} = x.\frac{1}{8}$, seja uma proporção? Na sua resolução teríamos *x* = 2, ou seja, a solução correta para o exercício seria: Uma semínima (♩) equivale a 2 colcheias (♪).

Usando somente simbologias poderíamos escrever a questão da seguinte forma: Calcule o valor de x na seguinte situação ♩ = *x* ♪ teríamos como resolução $x = \frac{♩}{♪}$ substituindoos valores de ♩ $= \frac{1}{4}$ e ♪ $= \frac{1}{8}$, e ♪ $= \frac{1}{8}$, teríamos $x \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}$, logo *x* = 2.

No que tange a **atividade 02,** consiste em reorganizar proporcionalmente os valores numéricos dos sons. Para isso basta observar que temos a seguinte situação:

Quadro inicial			Quadro após a realização das proporções		
Semibreve	𝅝	$= 1$	Semibreve	𝅝	$= 4$
Mínima	𝅗𝅥	$= \frac{1}{2}$	Mínima	𝅗𝅥	$= 2$
Semínima	♩	$= \frac{1}{4}$	Semínima	♩	$= 1$
Colcheia	♪	$= \frac{1}{8}$	Colcheia	♪	$= \frac{1}{2}$
Semicolcheia	𝅘𝅥𝅯	$= \frac{1}{16}$	Semicolcheia	𝅘𝅥𝅯	$= \frac{1}{4}$
Fusa	𝅘𝅥𝅰	$= \frac{1}{32}$	Fusa	𝅘𝅥𝅰	$= \frac{1}{8}$
Semifusa	𝅘𝅥𝅱	$= \frac{1}{64}$	Semifusa	𝅘𝅥𝅱	$= \frac{1}{16}$

Como o valor base 1 mudou da semibreve 𝅝 para a Semínima ♩ e a reordenação deve seguir os padrões proporcionais, temos a partir do quadro inicial que uma semibreve equivale a 4 semínimas, ou seja 𝅝 = 4 ♩ , isso se justifica pois 𝅝 = 1 e ♩$=\frac{1}{4}$, logo 𝅝 =x ♩, só será uma proporção se x = $4.\frac{1}{4}$, pois teríamos $1 = 4.\frac{1}{4}$, ou seja $1 = 1$.

Logo basta observar que inicialmente uma Semibreve 𝅝 que possui valor igual a 1 equivale a $\frac{1}{4}$ de Semínima ♩, então na mudança do valor inicial 1 para Semínima ♩ temos agora que a Semibreve 𝅝 equivale a 4 Semínima ♩. Analogamente a Mínima 𝅗𝅥 equivale a 2 Semínima ♩, a colcheia ♪ equivale a $\frac{1}{2}$ Semínima ♩ e assim por diante.

Note que no desenvolver desta atividade, o educando tem como desafio reorganizar a tabela, e para isso deve compor um quadro que trabalha diretamente com relações proporcionais entre mais de um valor, por exemplo como inicialmente a Semibreve 𝅝 = 1 e a de Semínima ♩ = $\frac{1}{4}$ e a colcheia ♪ = $\frac{1}{8}$, agora tem-se que a Semínima ♩ = 1 e a Semibreve 𝅝 = 4 então qual o valor da colcheia ♪ ?

Neste caso temos que se $\frac{1}{4}$ de 1 = 4 então basta calcular qual o valor de $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{8}$ que é $\frac{1}{2}$, ou seja estamos calculando quantas colcheia ♪ cabem em uma Semínima ♩. Operando analogamente se completa todo quadro da questão.

Voltando nosso olhares a **atividade 03**, a mesma foi estruturada pesando inicialmente na aplicação da tabela já adaptadas proporcionalmente na **atividade 02** em que o educando transferiu o valor inicial 1 da Semibreve para a Semínima. E agora irá trabalhar de forma oposto das atividades 1 e 2 que apresentavam inicialmente a simbologia do som e ele deveria operar com os tempos de duração para responder. Nesta atividade acontece justamente o oposto, inicialmente ele possui os tempos de duração e terá que relacioná-los com suas simbologias para encontrar a resposta correta.

Observe que no primeiro elemento aparece uma adição de frações, ou seja, qual simbologia de som cada fração representa? E a soma desse símbolos gera uma nova representação de som? Respondendo a questão temos que operar com adição de frações.

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ na simbologia do som temos que ♪ + ♪ = ♩

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ na simbologia do som temos que 𝅘𝅥𝅯 + 𝅘𝅥𝅯 = ♪

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+1+1}{4}=1$ na simbologia do som temos que ♪ + 𝅘𝅥𝅯 + 𝅘𝅥𝅯 = ♩

Neste caso teríamos de acordo com Yves Chevallard (1999), idealizador da Teoria Antropológica do Didático (TAD) o trabalho com diversos ostensivos, neste caso ostensivos musicais acoplados com ostensivos matemáticos.

A **atividade 04,** traz em seu escopo o elemento musical chamado de Pauta ou Pentagrama, que consiste do conjunto de 5 linhas paralelas que são utilizadas para escrever as notas musicais de uma partitura, no sistema de notações musicais. No entanto, sua aplicação nesta atividade é somente para o educando se familiarizar com a existência da escrita das notas e não identificar cada nota, e sim se concentrar na duração de cada uma, ou seja no item (a) se levarmos em consideração a escrita na Pauta teríamos as seguintes notas: FA, SOL, RÉ, MI, LA, FÁ. Fazendo a relação com o tempo musical teremos (sabemos que a semibreve = 1) FA =1, SOL = 1, RÉ = $\frac{1}{2}$, MI = $\frac{1}{2}$, LA = 2, FÁ =4.

No entanto, basta observar que neste caso não deve ser considerado a Pauta, ou seja, aqui não se tem a necessidade de identificar o nome de cada nota e sim identificar a duração de cada som, assim a solução seria composta da seguinte forma:

 , ou seja,

 $2\times\ 1+2\times\frac{1}{2}+2+4=9$

Operando analogamente nos itens b) tem se o resultado de 25/2 e em c) o valor de 6.

Para finalizar, propomos a **atividade 05**, que descreve mais um conceito musical que está diretamente ligado a duração de cada compasso, e para isso propomos ao educando que complete, utilizando símbolos musicais. Destaca nesta ação a necessidade de mudar de simbologia musical para elementos numéricos afim de encontrar qual valor necessário para obter o número desejado, neste caso o compasso quaternário, ou seja, 4 tempos e em seguida retornar do valor encontrado para a simbologia musical.

Observe no primeiro compasso tem-se

Neste caso uma Colcheia + Semínima + Mínima, ou seja, $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\mathbf{1}+\mathbf{2}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$ como espera-se que este compasso seja quaternário, ele precisa totalizar 4 tempos, então teríamos que acrescentar uma Colcheia pois assim teríamos Colcheia + Semínima + Mínima + Colcheia, tendo então, $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\mathbf{1}+\mathbf{2}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}=\mathbf{4}$.

Operando analogamente nos demais compassos, encontramos os valores que os tornariam quaternários.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto neste artigo, podemos observar na potencialidade de se utilizar elementos da música para o processo do ensino de matemática, ou melhor, utilizarmos elementos da matemática para o ensino de música. Aqui em particular propomos a realização de um trabalho com proporções e operações no conjunto dos números Racionais.

Destacamos que o trabalho consiste em um elemento inicial teórico da utilização desta ferramenta em sala de aula, e que foi organizado para utilizarmos efetivamente no processo de ensino em uma turma do sexto ano do ensino fundamental, assim como em uma turma do primeiro ano do ensino médio. Pois acreditamos que tais atividades podem compor tanto um primeiro momento com os conteúdos, ou mesmo um panorama musical e matemático, mas também podemos utilizá-lo como um reencontro afim de proporcionar melhor um aprendizado dos conteúdos.

Para finalizar destacamos que em nossa busca de elementos que tivessem ligados a esta temática, nos deparamos com uma atividade proposta no Exame Nacional do

Ensino Médio (ENEM) de 2009 uma questão que envolvia justamente a junção da música com a matemática, o que faz fortalecer ainda mais nossas considerações quanto a importância de mostrar aos educandos as diversas interconexões da matemática fora da sala de aula, aqui em particular com a música.

REFERÊNCIAS

BORGES, P. **Apostila de Física.** Santa Maria, 2009.Disponível em: <http://docente.ifrn.edu.br/caiovasconcelos/downloads/ensino-medio/ondas-optica-eacustica-ufsm>. Acesso em 19/03/2019.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CHEDIAK, A. **Harmonia & Improvisação - Vol. 1**. Irmãos Vitale, 1986.

CHEVALLARD, Y. (1999) **L'analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologique du didactique. Recherches em Didactique des Mathématiques, vol. 19**, n. 2, p. 221-266. Tradução em espanhol de Ricardo Barroso Campos. Disponível em: <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a1005.pdf>. Acesso em 20/04/ 2019.

DUARTE, Milton Joeri Fernandes. **A música e a construção do conhecimento histórico em aula,** 2011.Tese (Doutorado – Programa de Pós-Graduação emEducação. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. Disponível em:<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-04072011-144004/ptbr. php>.Acesso em 19/04/2019.

GRANJA, Carlos Eduardo de Souza Campos. **Musicalizando a Escola: Música, Conhecimento e educação**. São Paulo: Escrituras Editora, 2006. Disponível em: <http://www.cdn.ueg.br/arquivos/jussara/conteudoN/1209/Mono__J0A0_BATISTA.p>. Acesso em 15/04/2019.

MACHADO, Jeane Fernanda Torres. **A Compreensão do Conceito e Operações Básicas Envolvendo Frações com a Utilização da Escala Cuisinaire.** Pará de Minas, 2013. Disponível em: <http://fapam.web797.kinghost.net/admin/monografiasnupe/arquivos/31032014214953Jeane_Fernanda_Torres_Machado.pdf>. Acesso em 23/05/2019.

MED, B. **TEORIA DA MÚSICA - 3ª EDIÇÃO.** Brasília: Musimed Editora, 1996.

MINGATOS, D. **Matemática e Música a Partir do Estudo do Monocórdio e de Figuras Musicais.** São Paulo, 2006. Disponível em: <http://www2.unirio.br/unirio/ccet/profmat/tcc/2011/tcc-marcos>. Acesso em 19/04/2019.

SANTOS, D. **Matemática e Música.** Brasília, 2006. Disponível em: http://repositorio.ucb.br/jspui/bitstream/10869/1735/1/Dyego%20Raphael%20Alves%20dos%20Santos.pdf.Acesso em 19/04/2019.

SODRÉ, U. **Matemática Essencial.** Londrina, 2010. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/matzoo/fracoes.pdf>. Acesso em 20/04/ 2019.

SODRÉ, U. **Matemática Essencial.** Londrina, 2010. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/matzoo/fracoes.pdf>. Acesso em 20/04/2019.

WEBER, Max. **Os fundamentos racionais e sociológicos da música**. SãoPaulo:Edusp, 1995. Disponível em:<http://analisesocial.ics.ul.pt/documentos/1253274586J4sQX9hn4Ya32DR0.pdf>. Acesso em 19/04/2019.

CAPÍTULO 2

POSSIBILIDADES DIDÁTICAS E PEDAGÓGICAS DO USO DA IMAGEM VIRTUAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA: UM ESTUDO ENVOLVENDO SEMIÓTICA EM UMA *FANPAGE* E LIVROS DIDÁTICOS

Luciano Gomes Soares
Universidade Estadual da Paraíba
Campina Grande – PB

José Joelson Pimentel de Almeida
Universidade Estadual da Paraíba
Campina Grande – PB

RESUMO: Com a evolução atual das tecnologias e das redes sociais, a imagem, que percorreu um logo caminho de inovações e transformações durante décadas, se tornou uma poderosa e incrível ferramenta podendo ser usada como artefato para produção de significados, podendo despertar o interesse daqueles que usam recursos visuais em suas metodologias. No presente trabalho, temos a seguinte questão de investigação: qual o papel que exerce a imagem virtual em páginas de Matemática da rede social *Facebook*? Utilizamos a abordagem qualitativa do tipo exploratória, para que possamos nos aproximar da realidade dos objetos estudados, como também fazer um levantamento bibliográfico sobre o tema. Os resultados iniciais indicam que a imagem virtual das páginas de Matemática do *Facebook* podem exercer um papel didático e assumir algumas funções, contribuindo para o processo de produção de significados, em relação a diversos conteúdos de Matemática. Quanto à semiótica, a partir dela, podemos estudar a relação de como os signos, as imagens, os símbolos se apresentam em nossa mente, especialmente, por meio das atividades que classificamos como *Desafios simbólicos* do tipo *Figura ilustrativa*. Detectamos a presença de poucas atividades desse tipo nos livros didáticos disponibilizados em formato digital que pesquisamos, principalmente nos livros do 9º ano do Ensino Fundamental. Esse trabalho nos leva a concluir sobre a importância da inserção da imagem virtual como recurso imagético em sala de aula que, de forma planejada, pode contribuir em processos de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

PALAVRAS-CHAVE: Imagem virtual. Semiótica. Registros de representação. Ensino de Matemática.

ABSTRACT: With the evolution of the technologies and of social networks, the image, which has come a way of innovations and transformations over the decades, became a powerful and amazing tool that can be used as an artifact for the production of meanings, and can wake up the interest of those who use visual resources in their methodologies. In the present work, we have the following research question: what is the role the virtual image in the Math pages on the social network Facebook? We use the qualitative approach of the type exploratory, so that we can bring us closer to

the reality of the objects studied, but also to do a bibliographical survey on the subject. The initial results indicate that the virtual image of the Math pages of Facebook can play a didactic role and assume some of the functions, contributing to the process of production of meanings, in relation to the different contents of Mathematics. As to the semiotic, from it, we can study the relationship of how the signs, the images, the symbols present in our mind, especially, by means of the activities that we classify as Challenges symbolic of the type Figure illustrates. We detected the presence of the few activities of this kind in the textbooks available in a digital format that we research, mainly in the books of the 9th year of Elementary School. This work leads us to conclude about the importance of the insertion of the virtual image as a resource for imagery in the classroom who, in a planned way, can contribute to processes of teaching and learning content mathematical.
KEYWORDS: Virtual image. Semiotics. Records of representation. The teaching of Mathematics.

1 I INTRODUÇÃO

O presente texto surgiu de reflexões a partir de nossa pesquisa de mestrado em andamento, inicialmente intitulada *Imagens virtuais e atividades de Matemática: um estudo envolvendo representação semiótica em uma fanpage do facebook e livros didáticos digitais*, realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Nossa investigação tem como tema o uso da imagem virtual e, como objetivo geral, nos propusemos a analisar a imagem virtual como forma de contribuir para o processo de produção significados em aulas de Matemática, considerando seu possível papel didático no âmbito da contextualização dessa disciplina e da articulação entre a Semiótica, a Visualização Matemática, que expressa também uma nova forma de compreender a Matemática por meio do processo de formação de imagens, e do pensamento matemático.

Acreditamos que algumas dessas imagens virtuais, que possuem conteúdo matemático, representam algumas atividades matemáticas que podem ser encontradas em cadernos de atividades, livros didáticos, e também criadas por professores como forma de incentivar e ilustrar objetos matemáticos. A partir desse contexto, para descobrirmos qual a função dessas imagens virtuais e qual seria seu possível papel, o caminho que trilhamos foi o de relacionar essas atividades a outras que mantêm semelhanças com as que estão sendo representadas nessas imagens virtuais, como um estudo comparativo, elencando suas potencialidades e mudança de *registro*.

Nesse sentido, justificamos nossa pesquisa considerando vários aspectos, dentre eles o social, o político, o pedagógico e o matemático. Do ponto de vista social, acreditamos que um trabalho que envolva um estudo da imagem virtual pode ser muito bem visto, pois, nos últimos anos, onde se predomina a *internet* e os recursos imagéticos, causaria um impacto na sociedade devido à popularidade das imagens nas diversas redes sociais. Em relação ao aspecto político, percebemos que o processo da formação do cidadão, na sociedade atual, cada vez mais se utiliza de recursos imagéticos, científicos e tecnológicos, o que pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento crítico.

No que se refere ao ensino de Matemática, a imagem, em especial a imagem virtual, pode exercer um importante papel nos processos de ensino e aprendizagem. A sociedade está cercada por mídias visuais em todos os lugares e, com a propagação da *internet*, estamos acostumados a acessar informações, tanto textuais quanto visuais. Dessa forma, o uso de imagens em sala de aula pode ser uma boa estratégia pedagógica para incentivar os alunos que cresceram em um ambiente digital e virtual que são ricos em imagens.

Quanto ao aspecto matemático, ao analisarmos algumas imagens virtuais, em nossa pesquisa, percebemos que elas demandam novas posturas e olhares dos alunos (ou usuários de redes sociais) sobre determinados conteúdos matemáticos, permitindo que eles façam novas abordagens dentro da Matemática, de modo a proporcionar o pensar, a resolução de problemas, o raciocínio e o desafio, tornando a aprendizagem desses usuários mais significativa, pois permitindo a produção de significados matemáticos, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades de comunicar e argumentar matematicamente (ZIMMERMANN; CUNNIGHAM, 1991).

Partindo dessas considerações, acreditamos que nossa pesquisa também se destaca por estarmos realizando um estudo do uso da imagem virtual como possível recurso para o ensino de Matemática, vinculando-a ao contexto da Semiótica, da Visualização Matemática e do Pensamento Lógico-Matemático, envolvendo-a na perspectiva da Educação Matemática, pois, com as tecnologias nos dias de hoje, exige-se uma boa formação matemática que o auxilie “para o desenvolvimento de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização” (DUVAL, 2008, p.11).

Nesse sentido, entendemos que é preciso desenvolver a capacidade de escolher a abordagem mais adequada para a resolução de um problema particular, e compreender as limitações das representações da linguagem Matemática, pois, nas atividades matemáticas, em que a abstração nos leva muito além do que é perceptível à nossa visão, muitas vezes “[...] usa-se processos simbólicos, diagramas visuais e muitas outras formas de processos mentais que envolvem a imaginação [...] para explorar diferentes tipos de atividades matemáticas” (GUZMAN, 2002, p.2).

Acreditamos que a realização dessa pesquisa pretende trazer contribuições mais consistentes aos educadores matemáticos e futuros pesquisadores que desejam trabalhar com redes sociais, em especial com páginas do *Facebook*; trabalhar com recursos imagéticos, em particular as imagens virtuais. Também pode contribuir para aqueles que analisam materiais didáticos, como as coleções submetidas ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), aos professores e alunos, de forma que possa servir como início para que novas pesquisas sejam realizadas ampliando o conhecimento sobre o assunto abordado.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A título de introdução, em nossa pesquisa de mestrado, nos aprofundamos quanto ao estudo da imagem, em especial, da imagem virtual, a partir do contexto visual e da educação do olhar. Também falamos sobre o uso da imagem no meio contemporâneo e do seu uso como imagem mediática. Para efeito de abordagem investigativa, dividimos esses tópicos em partes ao serem estabelecidos critérios lógicos de desenvolvimento para uma leitura fluída.

Em um primeiro momento, iniciamos nossos pressupostos teóricos discutindo sobre o uso das tecnologias, que está em toda parte, e também, de certa forma, está entrelaçada em quase todas as partes da nossa cultura. Percebemos que ela afeta a forma como vivemos, trabalhamos, estudamos e, principalmente, como aprendemos, principalmente,

> [...] quando relacionamos e integramos [as tecnologias de forma inovadora]. Uma parte importante da aprendizagem acontece quando conseguimos integrar todas as tecnologias, as telemáticas, as audiovisuais, as textuais, as orais, musicais, lúdicas, corporais. Passamos muito rapidamente do livro para a televisão e o vídeo e destes para o computador e a internet, sem aprender e explorar todas as possibilidades de cada meio. (MORAN, 2013, p.32).

Nesse mesmo contexto, ao final da discussão, como estamos vivenciando um mundo virtual e somos bombardeados por imagens, buscamos discutir e relacionar situações em que somos afetados por recursos imagéticos a partir das tecnologias, e a imagem virtual é uma delas. Assim, entendemos que a imagem virtual pode desempenhar novas formas de representação visual, permitindo novas formas de simulação e, também, de interação. Ou seja,

> [...] A imagem não é mais a representação do visível, tendo em vista que ela não é mais a representação do real preexistente. [...] Se, por um lado, é verdade que a imagem de síntese não reproduz o real fenomênico, por outro lado, não se pode com isso querer deduzir que ela não seria mais da ordem da representação. Mesmo porque a maior parte da produção de imagens de síntese satisfaz um desejo de representação do visível, e mais profundamente, das significações pressupostas do real. (PARENTE, 2007, p.117).

Em seguida, tratamos sobre a problemática da imagem, situando-a a partir do seu contexto histórico, visual, elencando a importância desses recursos imagéticos nos dias de hoje (CARDOSO, 2010; FLORES, 2010; MACIEL, 2016; SANTAELLA, 2005; SANTAELLA; NOTH, 1998; SARDELICH, 2006). Nesse contexto, é importante refletir sobre as possibilidades de aprender e ensinar Matemática a partir de imagens em sala de aula, ao considerá-las como imagem mediática e como possibilidade pedagógica.

Ao envolvermos a Semiótica de Peirce (2005), no estudo das imagens virtuais, ela pode nos servir de base para entendermos o modo como as imagens se apresentam à percepção e à nossa mente. Dessa forma, com a ascensão das tecnologias e da *internet*, podemos falar sobre a imagem virtual e seu comportamento, em nossa mente, a partir do contexto de um mundo que está *respirando* as famosas redes virtuais.

Ao final das discussões teóricas, para entendermos sobre o processo de abstração e formulação de símbolos visuais nessas imagens virtuais em nossa mente, refletimos, em nossa investigação, sobre o campo da Visualização Matemática e do processo de formação do pensamento matemático, ambos sendo articulados com a semiótica de Peirce (2005). Sentimos essa necessidade, pois, para concretizarmos a leitura dessas imagens virtuais, tem-se que atender: à percepção do que a imagem representa, à forma como identificamos os elementos que compõem visualmente essas imagens e à interpretação do que elas significam.

Nesse mesmo contexto, ao estudarmos as teorias de Duval (2008), percebemos que existe uma diferença para analisar a atividade matemática em uma perspectiva de aprendizagem (e de ensino) a partir de dois tipos de transformações de representações semióticas, que são diferentes: os tratamentos e as conversões. Essas duas transformações auxiliam no processo de produção de significados para o conhecimento matemático em estudo.

Dessa forma, ao estudar a compreensão da imagem, no contexto da Matemática, por meio da Visualização, o educador estará fortalecendo “[...] o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino” (DUVAL, 2008, p.12).

Com base nessas considerações, inferimos que é possível fazer essa discussão no âmbito da Educação Matemática, em reflexões que têm como fulcro o papel da visualização e do pensamento matemático, a partir da imagem virtual. Percebemos que muitos pesquisadores enfatizam a importância da visualização e do raciocínio visual para aprender Matemática, agindo como um meio que pode servir como auxílio para que exista o entendimento no processo de produção de significados para conceitos matemáticos.

3 I METODOLOGIA

Normalmente, recorremos à realização de uma pesquisa quando temos um problema e ainda não se tem informações suficientes para poder solucioná-lo. Para Bicudo (1993, p.18), a pesquisa é como “perseguir uma interrogação (problema, pergunta) de modo rigoroso, sistemático, sempre, sempre andando em torno dela, buscando todas as dimensões... qualquer que seja a concepção de pesquisa assumida pelo pesquisador".

Nesse sentido, a partir da interpretação desses fenômenos e da produção de significados sobre os objetos de nosso estudo, a presente pesquisa pode ser caracterizada como um estudo qualitativo, que, segundo Borba e Araújo (2004, p.10), "tem como foco entender e interpretar dados e discursos, mesmo quando envolve grupos de participantes".

Para nos aproximarmos da realidade dos objetos estudados, como também fazer um levantamento bibliográfico sobre o tema, classificamos nossa pesquisa como exploratória, pois, ela é do tipo de pesquisa científica quando,

> [...] o pesquisador, diante de uma problemática ou temática ainda pouco definida e conhecida, resolve realizar um estudo com o intuito de obter informações ou dados mais esclarecedores e consistentes sobre ela. Esse tipo de investigação [...] visa verificar se uma determinada ideia de investigação é viável ou não. (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p.69-70).

Em relação à quantificação de dados, utilizamos o método de análise de conteúdo (AC), que é uma "técnica que tem como principal função descobrir o que está por trás de uma mensagem, de uma comunicação, de uma fala, de um texto, de uma prática etc." (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p.137).

Partindo dessas considerações, desenvolvemos nossa pesquisa em partes as quais apresentamos como *momentos*. Em um primeiro momento de nossa pesquisa, selecionamos a rede social *Facebook*, que é a rede mais acessada pelos brasileiros, e, dela, escolhemos a página de Matemática com o maior número de *curtidas*, que é a página *Matemática com Procópio*, onde catalogamos 292 imagens virtuais, em um recorte de dois anos (Março/2016 a Março/2018). Estas imagens foram divididas em categorias, embalsadas pela Semiótica de Peirce (2005).

Em um segundo momento, selecionamos uma dessas categorias que envolvem atividades matemáticas e, a partir dessa categoria, fomos procurar em materiais didáticos, sendo impressos ou digitais, atividades matemáticas que se parecessem ou se assemelhassem às atividades que estão sendo representadas nas imagens virtuais presentes na categoria escolhida. Encontramos esse material em um *site* (http://bit.do/LivrosDidaticos) onde são disponibilizadas coleções de Livros Didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. Dentre as coleções disponíveis, escolhemos oito para análise, pois, foram os únicos materiais digitais que estavam disponíveis para visualização com *links* de redirecionamento para os *sites* das próprias editoras.

Em um terceiro momento procedemos à análise de cada coleção dos livros didáticos escolhidos, nos detendo à presença de como as atividades matemáticas representadas nas imagens virtuais, da categoria escolhida, estão sendo apresentadas nessas coleções de livros didáticos escolhidos. Ainda nesse momento, realizamos um estudo envolvendo a semiótica nas atividades da categoria escolhida que foram encontradas nesses livros didáticos. Ou seja, a partir da categoria escolhida, fizemos uma análise da *mudança* semiótica do mesmo tipo de atividade matemática que esteja tanto no livro didático disponibilizado em formato digital quanto nas imagens virtuais, nas redes sociais.

Em um quarto momento discutimos a partir do referencial teórico alguns questionamentos, tais como: do ponto de vista da semiótica, que similitudes e diferenças podemos observar entre as atividades que se encontram no *site* (imagens virtuais) e nos livros didáticos disponibilizados digitalmente? Quais as potencialidades que essas atividades possuem? Qual a função que essas imagens virtuais exercem na mente dos seus leitores? Essas imagens desempenham um papel didático?

Para compararmos os dados nos dois ambientes, tanto na imagem virtual quanto no livro didático, dividimos as imagens virtuais em categorias que, além de atender à percepção, à identificação e à interpretação, também procuramos levar em consideração a sua funcionalidade, a semelhança estrutural, visual e a forma como essas imagens representam os conteúdos matemáticos. Elegemos uma categoria para discussão neste artigo, a qual denominamos *Desafios simbólicos,* envolvendo as imagens com postagens mais populares nas redes sociais e que representam os desafios matemáticos.

As imagens categorizadas como *Desafios simbólicos* são imagens virtuais em que seus elementos despertam a capacidade de usar representações mentais a que se atribuem significados. Essas imagens orientam o usuário para produção de significados que estão sobrepostos em um contexto de sua própria realidade ou enunciado. Normalmente, os símbolos contidos nessas imagens são letras, figuras, números, formas geométricas que, mentalmente e de forma abstrata, podem representar números. Em suma, as Imagens virtuais categorizadas como *Desafios simbólicos* possuem a capacidade de usar símbolos e representações mentais para a produção de significados, permitindo que se possa associar *alguma coisa* à outra *coisa*, que, nesse contexto, esta última *coisa* seria a representação de uma figura/símbolo em números.

Dessa forma, por serem imagens frequentes no ambiente virtual, ficaria mais fácil elencar possíveis funções e potencialidades didáticas das atividades matemáticas que estão sendo representadas nessas imagens, bem como seu possível papel pedagógico, no caso de aplicação em sala de aula.

Assim, pudemos formular o seguinte questionamento: como os desafios matemáticos, que são atividades da categoria *Desafios simbólicos*, estão inseridos nessas oito coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental?

Com base nessa indagação, iniciamos a análise partindo da forma como as atividades dessa categoria escolhida são encontradas nos livros didáticos. A partir da categoria escolhida, observamos uma possível mudança semiótica do mesmo tipo de atividade matemática, que é o desafio matemático, quando está presente no livro didático e em imagens virtuais catalogadas nas páginas da Rede social *Facebook*.

Com base no terceiro e quarto momentos, passamos a apresentar algumas reflexões sobre resultados inicias de nossa pesquisa, destacando como esses desafios matemáticos, que são atividades da categoria *Desafios simbólicos*, estão sendo apresentadas nas atividades de Matemática presentes nas coleções de livros didáticos escolhidos.

4 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Catalogamos, nas oito coleções de livros didáticos, as atividades ali presentes que apresentam semelhanças com as atividades matemáticas configuradas nas imagens virtuais, que são os desafios matemáticos. Por meio da Tabela 1, apresentamos dados quantitativos referentes à distribuição entre os tipos de imagens que encontramos nos livros didáticos.

Ao analisarmos a categoria *Desafios simbólicos*, poderemos delinear outras, fundamentadas na semiótica e no pensamento matemático, o que possibilita definir o contexto da imagem virtual, ainda mais, a partir dessa categoria. Portanto, uma imagem virtual que se enquadra na condição de *Desafios simbólicos*, as *figuras* ou *símbolos* que representam os objetos matemáticos podem incorporar o contexto de dois aspectos: *Epistêmica* e *Ilustrativa*. É importante destacar que essas categorias e aspectos são resultados de observações e análises, partindo das categorias empregadas por Peirce (2005).

Classificamos como *Figuras epistêmicas* aquelas imagens virtuais em que as *figuras* que estão inseridas na atividade matemática, além de representar números, também podem representar a mediação e o apoio à construção de objetos matemáticos ou visualização das formas geométricas para resolução da atividade.

As *Figuras ilustrativas*, por sua vez, são atividades em que as *figuras* que estão inseridas nas atividades matemáticas, além de representar números, também chamam a atenção do aluno para a resolução da atividade ou desafio matemático durante o processo de construção e representação do objeto matemático. Nessa atividade, os *símbolos* são figuras que ilustram, enfeitam a atividade, com a intenção de chamar a atenção do aluno, despertando sua curiosidade ao relacionar ou associar os objetos matemáticos que irão representar esses símbolos na atividade Matemática.

Coleção por ano	Figura Epistêmica	Figura Ilustrativa
6º ano	21	2
7º ano	7	3
8º ano	10	5
9º ano	0	0
Total	**38**	**10**

Tabela 1 - Quantidades de atividades da categoria *Desafios simbólicos* presentes nas coleções de livros didáticos digitais dos anos finais do Ensino Fundamental

Fonte: Dados da pesquisa

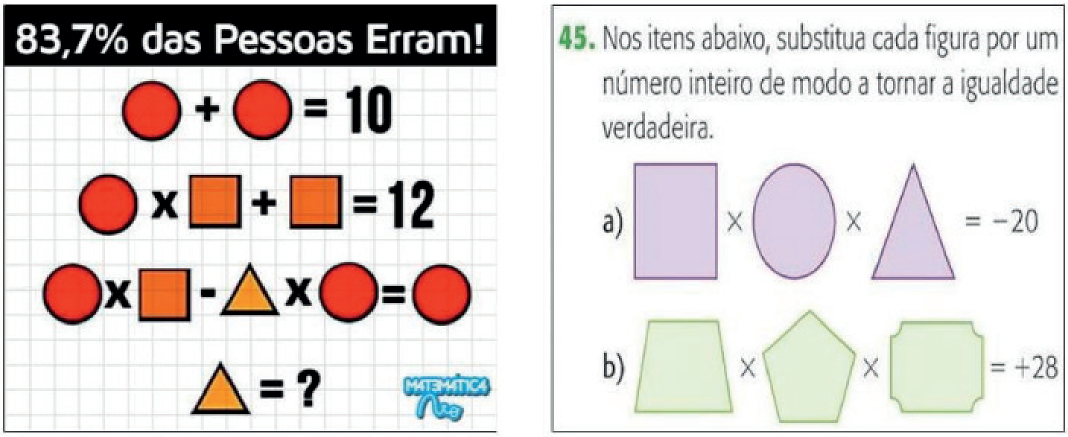
Com base na Tabela 1, catalogamos todas as atividades que se assemelham às atividades representadas nas imagens virtuais que foram catalogadas na página *Matemática com Procópio* do *Facebook*. Dessa forma, percebemos que somente 0,32% das atividades dos livros didáticos possuem características que se assemelham aos desafios simbólicos.

Na tabela, também pudemos observar e concluir que as atividades matemáticas das imagens virtuais podem ser encontradas em materiais didáticos.

Ainda percebemos que 76% das atividades houve um predomínio de atividades daquelas que envolvem apenas a realização de cálculo, sendo requerida a sua automatização ou verificação de resultados.

A partir dessa quantificação das atividades, realizamos uma análise envolvendo a semiótica a partir das atividades que são comuns, tanto nas imagens virtuais quanto nos livros didáticos. Nos dois contextos, observamos como os conteúdos são tratados em ambas as representações, o grau de dificuldade por meio do processo de visualização, se os *símbolos* auxiliam os alunos ou usuários a responder às questões, no sentido do desenvolvimento dos conteúdos e da construção de ideias matemáticas.

Nesse sentido, fizemos a análise envolvendo a semiótica, em ambas as atividades que são encontradas nas imagens virtuais e nos livros didáticos. Essas representações estão destacadas a seguir.

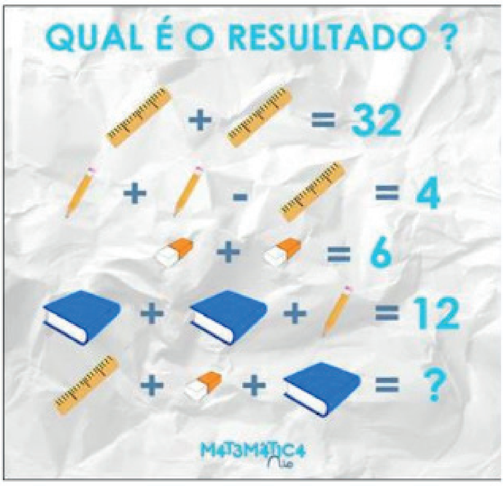


A) (B)

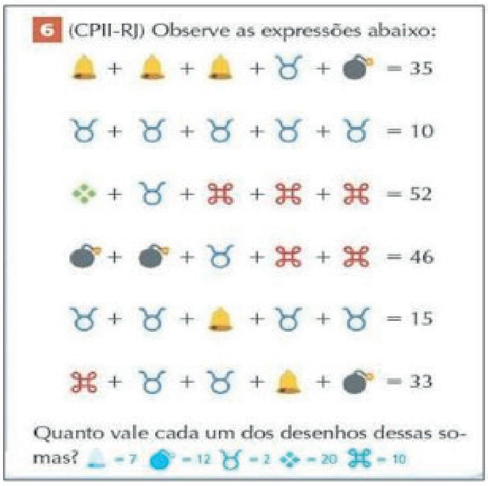
Figura 1 - Exemplos de atividades classificadas como *Desafio simbólico* do tipo *Figura epistêmica* presentes nas redes sociais (A) e no livro didático (B).

Fonte: *Matemática com Procópio* (http://bit.do/445434) (A) e Sampaio (2016, p. 35) (B)

Observamos, na Figura 1, uma imagem virtual que classificamos como *Desafio simbólico* do tipo *Figura epistêmica*. Percebemos que a atividade (A) da Figura 1, presente nas redes sociais, se assemelha à atividade (B), que é uma atividade integrante de um dos livros didáticos analisados. Nesse tipo de atividade, o aluno, ao visualizar uma figura que se assemelha a uma forma geométrica, poderá também relacionar, associar ou representar essas figuras com outras figuras encontradas de acordo com o seu repertório de conhecimento acerca do assunto. Assim, na medida em que o leitor relaciona os símbolos que estão na imagem com os possíveis objetos matemáticos que estão sendo representados como meios na própria imagem, essas figuras podem mediar a construção desses ou de outros objetos matemáticos (ZIMMERMANN; CUNNIGHAM, 1991).



(A)



(B)

Figura 2 - Exemplo de atividade classificada como *Desafio Simbólico* do tipo *Figura ilustrativa* nas redes sociais (A) e no livro didático (B).

Fonte: *Matemática com Procópio (http://bit.do/121494)* (A) e Andrini; Vasconcellos (2012, p. 73) (B)

A figura 2 representa um tipo de atividade que classificamos como *Desafio simbólico* do tipo *Figura ilustrativa*. Também percebemos que a atividade (A) da Figura 2, presente nas redes sociais, se assemelha à atividade (B), que é uma atividade integrante de um dos livros didáticos analisados.

Essas imagens que constituem atividades matemáticas classificadas como *Figura ilustrativa* podem agir também como *imagens motivadoras*, a partir do momento em que, além de chamar a atenção do leitor, motiva quem está se sentindo desafiado para resolver os sistemas de equações do primeiro grau que a elas podem ser associadas.

Em síntese, considerando as atividades matemáticas das imagens virtuais em relação às atividades matemáticas presentes nos livros didáticos, observamos que todas as atividades que foram catalogadas nos livros didáticos, como visto na Tabela 1, se assemelham ou possuem a mesma estrutura das atividades matemáticas representadas nas imagens virtuais. Dessa forma, podemos destacar o potencial didático e pedagógico que as atividades das imagens virtuais possuem para o ensino de Matemática.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partindo do princípio que as atividades que estão inseridas nos livros didáticos têm um papel didático, então, as atividades que são iguais ou que se assemelham às atividades matemáticas presentes nas imagens virtuais também podem exercer um papel didático. Também percebemos que essas atividades podem assumir algumas funções, como informativa e motivadora, contribuindo para o processo de produção de significados.

Em nossa investigação, uma das contribuições que podemos destacar é explicar uma das possíveis origens dessas atividades matemáticas presentes nas imagens virtuais, principalmente, da categoria escolhida, pois o leitor que participa dos desafios lançados nas redes sociais pode não perceber que esses mesmos desafios podem ser encontrados nos livros didáticos de Matemática.

Quanto aos livros didáticos analisados, detectamos a presença de poucas atividades matemáticas que classificamos como *Desafios simbólicos* do tipo *Figura ilustrativa*. Porém, em uma rápida análise por outras páginas do *Facebook* de Matemática, percebemos que esse tipo de atividade é a que mais faz sucesso nessas páginas nas redes sociais.

Também pudemos perceber que as imagens dos *Desafios simbólicos* do tipo *Figura ilustrativa* são as que mais possuem *registros* nas postagens, das redes sociais, pois, quando o leitor se interessa por algo mais lúdico, colorido e atrativo aos olhos, que nesse contexto estaria ilustrando uma situação Matemática, se sentem mais empolgados em tentar resolver as equações.

Nesse sentido, a partir da teoria de Duval (2008), podemos analisar as variedades de representações semióticas formuladas com o auxílio dessas imagens virtuais, que resultam em *registros* de representação. Entendemos que, a partir do processo de resolução desses desafios, o aluno poderá mobilizar ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, sendo possível trocar de registro. Assim, acreditamos que a imagem virtual pode servir como um meio ou forma de se chegar ou remeter a novas representações.

Desta forma, esperamos que nossa investigação contribua para reflexões acerca da discussão das redes sociais no nosso dia a dia, em especial, do potencial que essas redes possuem para o desenvolvimento de processos de ensino de Matemática, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa.

Assim sendo, na continuidade da pesquisa do mestrado, estamos investigando a transformação de uma representação semiótica em *outra* representação semiótica a partir dos *registros* das resoluções de atividades matemáticas configuradas nas imagens virtuais.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática.** 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. (Coleção praticando matemática).

BICUDO, M. A. **Pesquisa em educação matemática.** Revista Pro-posições, Campinas: FE-UNICAMP, Cortez, v.4, nº 1 [10], 1993, p.18-23. Disponível em: < https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1755/10-artigos-bicudomav.pdf >. Acesso em: 17 ago 2018.

BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (Org). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2004, p.11-23.

CARDOSO, L. F. P. **Cultura visual e a educação através da imagem.** 2010. 158f. Dissertação (Mestrado). Programa de Pós-Graduação em Design, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** Registros de representação semiótica. São Paulo: Papirus Editora, 2008. (Coleção Papirus Editora).

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009.

FLORES, C. R. Cultura visual, visualidade, visualização matemática: balanço provisório, propostas cautelares. **ZETETIKÉ,** Unicamp, v.18, Número temático, 2010. p.271-293.

GUZMAN, M. **The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis.** Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level) Hersonissos, Creta, Grécia, 2002.

MACIEL, M. R. G. G. Imagem Virtual: uso na prática pedagógica. **Revista Discurso & Imagem Visual em Educação,** v. 1, n. 1, p.72-91, jan./jun., 2016.

MORAN, J. M. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica.** São Paulo: Papirus Editora, 2013.

PARENTE, A. **Imagens que a razão ignora:** a imagem de síntese e a rede como novas dimensões comunicacionais. Galáxia. Revista do Programa de Pós-Graduação em Comunicação e Semiótica, n. 4, 2007, p.113-123.

PEIRCE, C. S. **Semiótica.** Tradução José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005. (Estudos; 46/ Dirigida por J. Guinsburg).

SAMPAIO, F. A. **Jornadas.mat:** matemática. 3. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. (Coleção Jornadas. mat).

SANTAELLA, L. **Semiótica aplicada.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.

SANTAELLA, L.; NOTH, W. **Imagem:** cognição, semiótica, mídia. São Paulo: Iluminuras, 1998.

SARDELICH, M. E. Leitura de imagens, cultura visual e prática educativa. **Cadernos de pesquisa,** v. 36, n. 128, p.451-472, 2006.

ZIMMERMANN, W; CUNNINGHAM, S. Editor's Introduction: What is Mathematical Visualization?. In: W. ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Eds). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics.** Washington: MAA, 1991. p.121-126.

CAPÍTULO 3

PIFE DA POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO – UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA

Ítalo Andrew Rodrigues Santos
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais – Campus Januária
Januária - Minas Gerais.

Joao Paulo Antunes Carvalho
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais – Campus Januária
Januária - Minas Gerais.

Josué Antunes de Macêdo
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais – Campus Januária
Januária - Minas Gerais.

Lílian Isabel Ferreira Amorim
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais – Campus Januária
Januária - Minas Gerais.

RESUMO: Diante dos desafios que se apresentam na sala de aula, especificamente no ensino e aprendizagem de Matemática, faz se necessário a busca por alternativas metodológicas. Sendo assim, o presente trabalho teve como objetivo principal avaliar o jogo Pife da potenciação e radiciação, desenvolvido pelos bolsistas de iniciação à docência do PIBID no IFNMG - Campus Januária. Quanto a metodologia, foi feita uma análise para levantamento dos dados sobe as principais dificuldades dos alunos do primeiro ao terceiro ano do ensino médio, em relação à Matemática Básica, em seguida o jogo foi desenvolvido e aplicado. A análise dos dados apontou que de fato deve-se buscar meios de melhorar o processo de ensino de Matemática, principalmente no que se refere à Matemática Básica e que o jogo é apenas uma das alternativas. Além disso, o jogo apresentado nesse trabalho foi avaliado de forma positiva.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. PIBID. Jogos Educativos.

PIFE OF POTENTIATION AND RADICIATION - A METHODOLOGICAL ALTERNATIVE

ABSTRACT: Faced with the challenges presented in the classroom, specifically in the teaching and learning of Mathematics, it is necessary to search for methodological alternatives. Therefore, the main objective of this study was to evaluate the Pife game of potentiation and radiciation, developed by the initiation scholarship holders of PIBID at IFNMG - Campus Januária. As for the methodology, an analysis was made to collect data on the main difficulties of students from the first to the third year of high school, in relation to Basic Mathematics, after which the game was developed and applied. The analysis of the data pointed out that in fact one should seek ways to improve the process of teaching Mathematics, especially in what refers to Basic Mathematics

and that the game is only one of the alternatives. In addition, the game presented in this work was evaluated positively.

KEYWORDS: Mathematical Education. PIBID. Educational games

1 I INTRODUÇÃO

O uso de jogos no ensino de Matemática é um assunto que já vem sendo refletido e debatido há muito tempo. Considerando que a sala de aula é um espaço de constantes mudanças e evolução, muitos pesquisadores e/ou professores buscam alternativas metodológicas voltadas para o Ensino de Matemática, tendo como foco a melhoria da qualidade do processo de ensino e aprendizagem, que é sempre desafiador.

Atualmente, os professores têm competido com o mundo da tecnologia, no que diz respeito ao seu uso de forma inadequada nas salas de aula. Conseguir a atenção dos estudantes é uma tarefa cada vez mais difícil.

Além disso, outra questão que deve ser levantada é o fato de que muitos assuntos do Currículo de Matemática exigem memorização. Embora exista uma resistência ao uso do termo memorização, o que acontece segundo as autoras SOISTAK e PINHEIRO (2009), é que há uma confusão com os termos memorização e decoreba, elas acreditam que isso ocorre pela incorporação de teorias, sem um real conhecimento e análise delas.

Ainda de acordo com as autoras, “a memorização é considerada a capacidade de o aluno reter, recuperar, armazenar informações no cérebro que estará fazendo uso por diversos momentos em sua vida” (SOISTAK e PINHEIRO, 2009, p. 981)

E para que isso ocorra de fato, há a necessidade da compreensão, então é uma memorização precedida e acompanhada pela compreensão.

A questão que se propõe aqui, é que essa prática seja realizada por meio de jogos e não necessariamente por meio da simples repetição. Buscando dessa forma encontrar estratégias de baixo custo, que tentem competir com o uso dos recursos tecnológicos, quando usados conforme citado anteriormente. Vale ressaltar que, o uso de recursos tecnológicos com objetivos educacionais é outra alternativa viável, uma vez que um grande número de pesquisas tem comprovado o êxito dos alunos, quando utilizam esse tipo de metodologia.

Segundo os parâmetros curriculares nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), “todos os alunos devem ter oportunidades de se envolver em diversos tipos de experiências de aprendizagem”

Outro aspecto que deve ser levado em consideração é a forma como essas metodologias e materiais alternativos de ensino são aplicados em sala de aula, conforme afirma Bianchini *et al*. (2010):

> Nenhum material por si só é capaz de ensinar Matemática. A aprendizagem da Matemática é um processo que depende da ação do aluno sobre esse material e também da ação do professor. Isso exige uma intencionalidade por parte do

> educador. Ao optar pelo jogo como estratégia de ensino seu desejo é propiciar a aprendizagem. O jogo, nesse contexto, deve cumprir o papel de auxiliar. (BIANCHINI, 2010, p. 4)

Dentro dessa perspectiva, no Instituto Federal do Norte de Minas Gerais (IFNMG) Campus Januária, a partir das atividades do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), que é uma iniciativa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), foi proposto aos bolsistas que atuam no Subprojeto Matemática, nas turmas do ensino médio, que elaborassem atividades que visassem contribuir com os estudantes, no que se refere a defasagem de aprendizagem de Matemática, percebida pelos bolsistas, a partir das atividades de monitorias extraclasse.

Levando em consideração, que um dos objetivos do PIBID é inserir os licenciandos no cotidiano de escolas da rede pública de educação, proporcionando-lhes oportunidades de criação e participação em experiências metodológicas, tecnológicas e práticas docentes de caráter inovador e interdisciplinar que busquem a superação de problemas identificados no processo de ensino e aprendizagem (CAPES, 2014).

A partir dessa visão o presente trabalho foi desenvolvido, com o objetivo de avaliar um dos jogos desenvolvidos pelos bolsistas de iniciação à docência do PIBID no IFNMG – Campus Januária: PIFE da potenciação e radiciação.

2 I MATERIAL E MÉTODOS

Inicialmente realizou-se uma análise dos principais conteúdos de Matemática Básica que os estudantes do primeiro ano do ensino médio tinham mais dificuldade, a partir dessa análise optou-se por desenvolver um jogo que envolvesse potenciação e radiciação de números reais e suas propriedades.

Para isso, os bolsistas de iniciação à docência do PIBID estudaram o assunto com mais afinco, em seguida, tomaram a decisão de construir um baralho, com o objetivo de motivar os estudantes do ensino médio, uma vez que o uso de jogos nesse nível de ensino, não é uma atividade tão frequente.

Em seguida o jogo foi confeccionado e testado pelos próprios bolsistas, no qual eles definiram as regras e procedimentos do jogo. Após essa confecção e pré-teste, ficou decido aplicar o jogo para os alunos para verificar sua eficácia e corrigir eventuais falhas conforme fossem detectadas.

Afim de melhorar o êxito e chegar aos objetivos previstos, foi elaborado e entregue aos alunos uma tabela com as principais propriedades da potenciação e radiciação, para que pudessem relembrar as propriedades e facilitar a realização dos cálculos no jogo. Conforme ilustra a Figura 1.

Em seguida, o jogo foi aplicado para quinze estudantes do primeiro ano do ensino médio, como uma atividade extraclasse, num período de duas horas/aula. Ao final foi aplicado um questionário com o objetivo de avaliar o jogo, no que se refere às regras, fator motivacional e principalmente se contribui no processo de aprendizagem do conteúdo proposto e de que forma.

Propriedades da potenciação;

Multiplicação de potencias de mesma base;	$a^b \, x \, a^c = a^{b+c}$	Conserva-se a base e soma os expoentes.	$2^2 \text{ x } 2^3 = 2^5$
Divisão de potências de mesma base;	$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$	Conserva-se a base e subtrai os expoentes.	$\frac{2^3}{2^2} = 2^1$
Potência de potência;	$(a^b)^c = a^{b \, x \, c}$	Conserva-se a base e multiplica os expoentes.	$(2^2)^3 = 2^6$
Potência de fração.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	Ambos os valores da fração são elevados ao expoente desejado	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
Expoente negativo;	$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$	Inverte a base e o expoente torna-se positivo.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
Expoente fracionário;	$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$	Pode ser escrito sob a forma de raiz.	$3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$
Potência de produto;	$(a \, x \, b)^c = a^c \, x \, b^c$	Eleva-se ambos os termos ao expoente desejado e depois multiplica.	$(2x3)^2 = (2^2x3^2) = (4x9) = 36$

OBS: Se $a \epsilon \mathbb{R}_+^*$, $m \epsilon \mathbb{R}_+^*$, $b \epsilon \mathbb{R}$, $c \epsilon \mathbb{R}$, então são válidas as propriedades.

Regras práticas;

- Base negativa expoente par, a potência fica positiva.
- Base negativa expoente ímpar, a potência fica negativa.
- Qualquer número elevado à zero(0) é igual a 1.
- Qualquer número elevado à 1 não se altera.

Propriedades da radiciação;

$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot p]{x^{m \cdot p}}$ $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\frac{n}{p}]{x^{\frac{m}{p}}}$	Simplificação de radicais.	$\sqrt[3x2]{2^{3x2}}$
$\sqrt[n]{x \cdot a} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{a}$	Separação de radicais.	$\sqrt[3]{6 \, x \, 7} = \sqrt[3]{6} \, x \, \sqrt[3]{7}$
$\sqrt[n]{\frac{x}{a}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{a}}$	Raiz de frações.	$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$
$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$	Potência de radical.	$(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2^2} = 2$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$	Raiz de raiz.	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[4x3]{3} = \sqrt[12]{3}$

OBS; **Se $a \epsilon \mathbb{R}_+^*$, $x \epsilon \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{Q}$ e $p \in \mathbb{Q}^*$, então são válidas as propriedades.**

Figura 1 – Principais propriedades da potenciação e radiciação

Fonte: Acervo pessoal

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente descreve-se o jogo como parte do resultado desse trabalho, em seguida apresenta-se a avaliação do jogo feita pelos participantes da pesquisa.

Jogo: PIFE da potenciação e radiciação

O jogo consiste em um baralho formado por 52 cartas, no qual os participantes deverão agrupar as cartas em trincas de valores equivalentes. As cartas contem operações envolvendo potenciação e radiciação com números reais. Conforme pode se ver nas Figuras 2, 3 e 4.

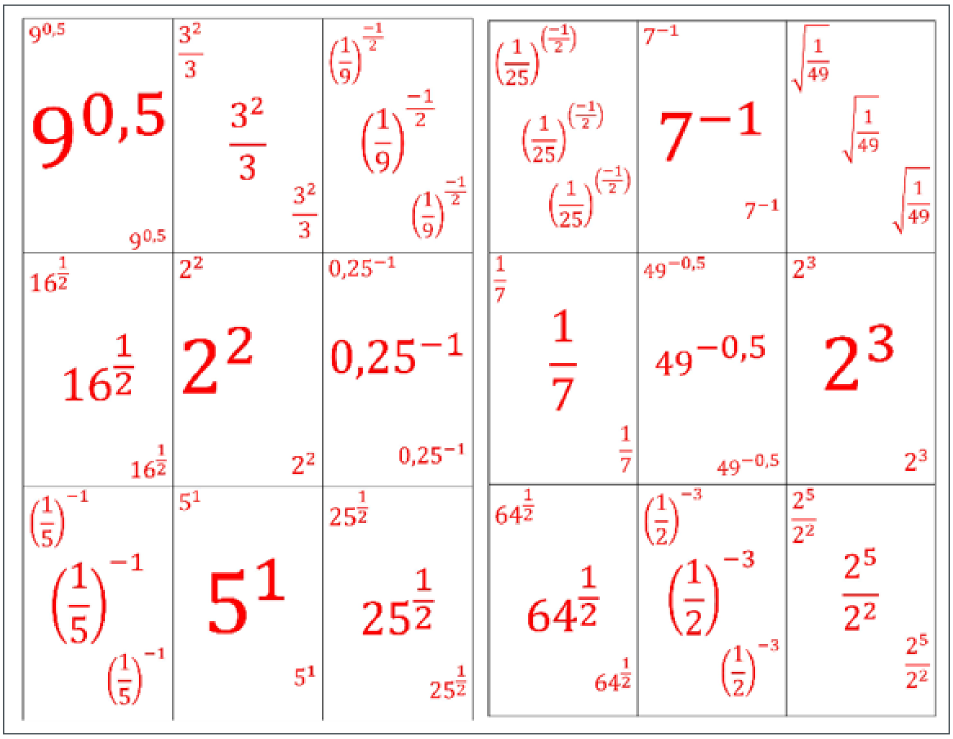


Figura 2 – Primeira parte das cartas do baralho

Fonte: Acervo pessoal

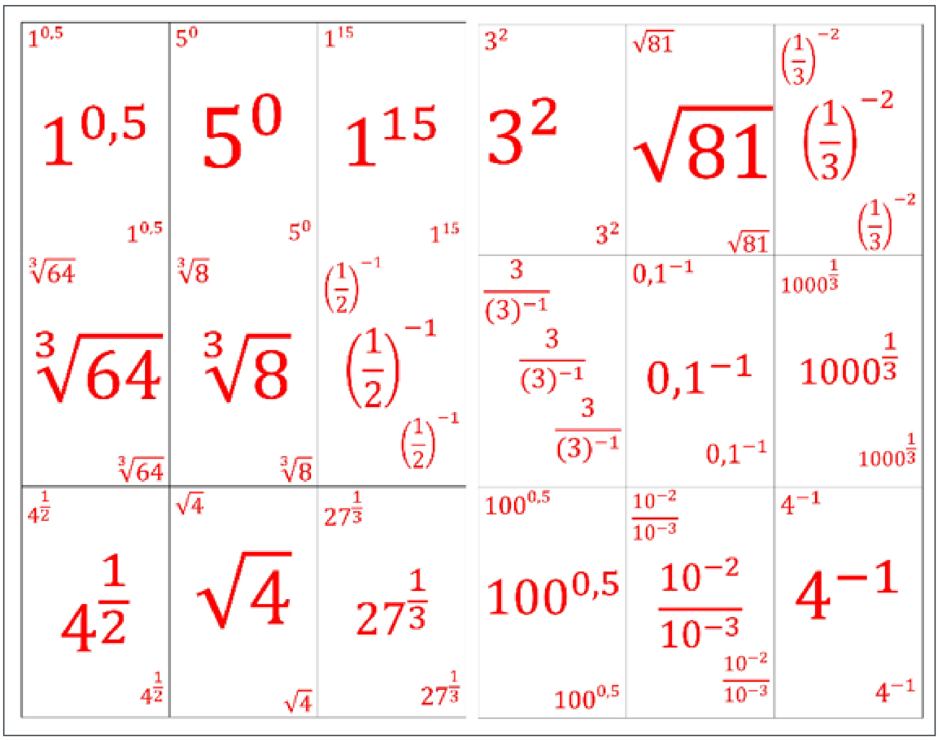


Figura 3 – Segunda parte das cartas do baralho

Fonte: Acervo pessoal

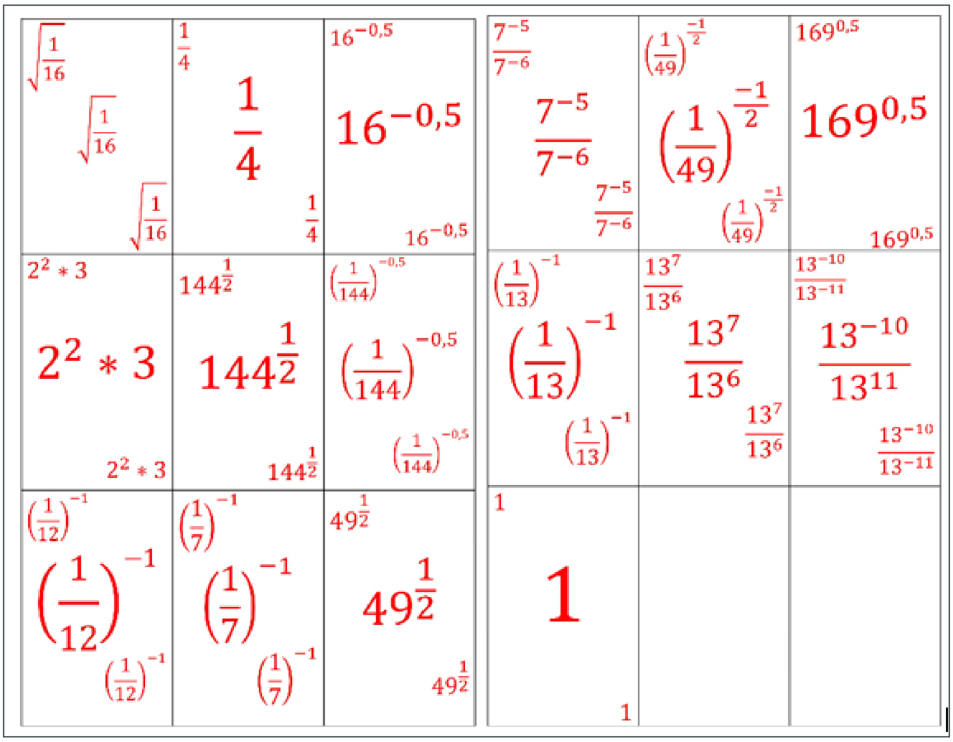


Figura 4 – Terceira parte das cartas do baralho

Fonte: Acervo pessoal

Objetivo: Consolidar os conhecimentos já adquiridos sobre as propriedades da radiciação e potenciação.

Número de participantes: São dois a quatro jogadores, jogando de forma independente.

Regras do jogo: Cada jogador recebe nove cartas. Os participantes definem quem irá iniciar o jogo. O primeiro jogador deve comprar uma carta do maço e descartar outra para a lixeira. O segundo jogador pode então optar por comprar uma carta no maço ou utilizar a que o jogador anterior descartou. Uma vez no lixo, a carta só pode ser comprada pelo jogador seguinte àquele que a jogou. Ou seja, depois que uma carta é colocada no lixo e sobreposta por outra, ela não pode mais ser comprada por ninguém. Os jogadores compram e descartam as cartas até que um deles complete trincas com as nove cartas. O jogador que conseguir criar trincas com todas as cartas que tem à mão, ganha o jogo.

Definições

- Maço - é o conjunto de cartas que sobra após a distribuição.
- Lixeira - é o conjunto formado com as cartas descartadas, onde apenas a última carta é visível.
- Comprar do maço: a primeira carta do maço vai para sua mão.
- Comprar do lixo: apenas a primeira carta do lixo, que está visível, irá para sua mão.

- Trinca - três cartas do mesmo valor.
- Rodada - uma sequência de jogadas que ocorre até que algum jogador bata.
- Bater - combinar e baixar as nove cartas, formando trincas.

Agora, apresenta-se os dados que foram obtidos através de questionários aplicados aos alunos dos primeiros anos do ensino médio dos cursos técnicos integrados. O questionário contém sete perguntas e foi respondido pelos quinze alunos que participaram da atividade.

A primeira questão solicitava aos alunos uma avaliação do jogo, levando em conta todos os seus aspectos (dificuldade, regras...), neste sentido lhes foi perguntado: “De 1 a 5 qual a sua nota para o jogo PIFE da potenciação e radiciação, sendo 1 ruim, e 5 excelente?” Dos quinze alunos que responderam o questionário, dois deram nota três, dois deram nota quatro, e onze alunos deram nota cinco, classificando-o como excelente. Ainda sobre a primeira pergunta, um aluno fez o seguinte comentário: “*Eu achei esse jogo muito interessante, pois ajuda o aluno a aprender a matéria de uma maneira divertida*”. Outro comentou: “*O jogo me fez perceber que as propriedades da potenciação e da radiciação são muito fáceis*”. E um terceiro aluno completou: “*O jogo foi muito bem idealizado e construído de forma bem pensada, para que o aluno venha a aprender as propriedades da potenciação*”.

Essa questão tinha como objetivo verificar a satisfação dos alunos quanto a aplicação da atividade, se o jogo serviu como fator motivador para estudar Matemática.

A segunda questão pedia aos alunos que avaliassem a compreensão das regras do jogo, “As regras do jogo são de fácil compreensão?”

Todos os participantes responderam de forma positiva, ficando evidente que todos os alunos conseguiram entender a dinâmica do jogo.

Quando questionados sobre sua preferência entre uma lista de exercícios ou atividades com jogos, quatro optaram pela lista, e onze optaram pelas atividades com jogos.

A quarta pergunta, teve como objetivo avaliar com qual método de ensino os alunos aprendem mais, neste sentido lhes foi perguntado “No que se refere a aprendizagem, você aprende melhor com a lista ou com o jogo?

Dez alunos optaram pelo jogo e cinco alunos optaram pela lista, em relação a essa pergunta, um aluno comentou: “*Sem sombra de dúvida com o jogo se aprende mais, pois desperta e estimula o interesse pela matéria*”. Outro comentou: “*Eu acho que das duas maneiras se aprende bastante*”. E um terceiro comentou: “*Com o jogo pois assim você identifica com mais facilidade resultados óbvios, e que não tem mais como errar*”. Aqui pudemos perceber que a maioria dos alunos optaram pelo jogo, uma vez que o mesmo torna o aprendizado mais lúdico. Mas é interessante observar que, como são estudantes de ensino médio, há uma certa maturidade no que se refere as listas de exercícios, pois 1/3 dos participantes fizeram essa opção.

Solicitou-se aos alunos uma reflexão para avaliar de qual maneira o jogo os ajudou, nesse sentido lhes foi perguntado “o jogo ajudou você a:”

Nessa solicitação, por se tratar da opinião dos alunos, obteve-se respostas diversas, e alguns responderam de duas ou até mesmo de três maneiras distintas. A partir da análise das respostas pode-se averiguar que: 33,3% dos alunos afirmaram que o jogo ajuda à compreender as propriedades da potenciação e da radiciação, 86,6% dos alunos afirmam que o jogo ajuda a revisar as propriedades, e 73,3% afirma que o jogo ajuda a praticar as propriedades da potenciação e da radiciação. Aqui pode-se ver que o jogo de alguma forma auxiliou os alunos, uma vez que nenhum deles respondeu de forma negativa.

Quando questionados sobre as mudanças que o jogo propiciou em relação ao seu aprendizado, dez alunos afirmaram que tinham alguma dúvida, e os outros cinco afirmaram que o jogo ajudou apenas na revisão das propriedades. Nesse contexto um aluno afirmou: “*Eu tinha um pouco de dúvidas sobre como resolver radiciação, mas com o jogo eu compreendi melhor*”.

No geral durante a aplicação, pode-se perceber que alguns alunos nem sequer conheciam as propriedades, durante a atividade, foram abstraindo os conceitos e fixando as propriedades. Aqui, pode-se perceber certa evolução por parte dos acadêmicos uma vez que seus cálculos no final da atividade estavam mais rápidos e mais precisos do que no início.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio da análise dos dados da pesquisa, foi possível perceber que o uso de jogos no ensino de Matemática, mesmo no ensino médio, é uma atividade que desperta nos estudantes, pelo menos na maioria entrevistada, uma disposição maior para estudar Matemática, desde que o jogo não tenha função apenas de entretenimento. Durante a aplicação da atividade, nenhum estudante utilizou o *smartphone*.

Outro aspecto interessante é no que diz respeito ao jogo, a maioria o considerou como uma atividade de revisão do conteúdo, resultado esse, que estava de acordo com a hipótese inicial, uma vez que o objetivo principal do jogo não é ensinar, mas sim, oferecer ao aluno, outro meio de atividade de revisão, que não seja somente a lista de exercício. Outra característica do jogo, que foi possível perceber foi a contribuição no que se refere a memorização das propriedades de potenciação e radiciação.

Enfim, a pesquisa mostrou a necessidade mesmo de buscar outras alternativas metodológicas no ensino de Matemática e para que o conhecimento de Matemática seja consolidado é necessário esforço contínuo, tanto de alunos como de professores, e que isso deve ser feito de forma gradativa, a começar pelos conteúdos considerados básicos.

5 I AGRADECIMENTOS

Os autores desse trabalho agradecem à CAPES pelo apoio recebido através do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – PIBID. Agradecem ainda ao Instituto Federal do Norte de Minas Gerais (IFNMG), Campus Januária, por incentivar a realização deste trabalho e aos participantes da pesquisa.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.148p.

BIANCHINI, Gisele; GERHARDT, Tatiane; DULLIUS, Maria Madalena. Jogos no ensino de matemática: "Quais as possíveis contribuições do uso de jogos no processo de ensino e de aprendizagem da matemática?" In: **Revista Destaques Acadêmicos**, ano 2, n. 4. Cetec/Univates, 2010.

CAPES. **Relatório de Gestão (2009-2013).** Diretoria de Formação de Professores da Educação Básica – DEB, Brasília/DF. 2014. Disponível em: http://www.capes.gov.br/images/stories/download/bolsas/2562014-relatrorio-DEB-2013-web.pdf. Acesso em: 17 abr. 2019.

SOISTAK, Maria Marilei; PINHEIRO, Nilcéia Aparecida Maciel. Memorização: atual ou ultrapassada no ensino-aprendizagem da matemática? In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA (SINECT), 1, 2009, Ponta Grossa (PR). **Anais...** Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Programa de Pós-Graduação e Ensino de Ciência e Tecnologia, 2009, p. 971-983.

CAPÍTULO 4

O ENSINO DE MATEMÁTICA COM O AUXILIO DE LIVROS LITERÁRIOS EM TURMAS DO 8ºANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Karine Maria da Cruz
UPE- Universidade de Pernambuco, Petrolina-PE
karine_brav@hotmail.com

Lucília Batista Dantas Pereira
UPE- Universidade de Pernambuco, Petrolina-PE
lucilia.batista@upe.br

RESUMO: Este trabalho teve como objetivo geral verificar se o uso de livros literários no ensino da Matemática facilita a aprendizagem de alguns conceitos, para isso buscou-se responder a seguinte questão: de que forma o uso de livros literários em sala de aula podem auxiliar na aprendizagem de conceitos matemáticos? Para isso, realizou-se uma pesquisa qualitativa que se dividiu em três etapas: inicialmente aplicou-se um questionário, em seguida fez-se a apresentação de quatrolivros literários para as turmas. E por fim, a terceira etapa consistiu em desenvolver uma atividade, na qual os grupos formados em sala fizeram a leitura de um dos livros que foram apresentados e selecionaram um trecho que estava relacionado a algum conceito matemático. Após as etapas citadas, cada grupo organizou e apresentou para toda a escola, resultando em uma feira literária de Matemática. O presente estudo foi realizado em uma escola da rede pública da cidade de Santa Maria da Boa Vista-PE, com uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental. Portanto, esta pesquisa alcançou as suas metas e de acordo com as respostas apresentadas pelos alunos, se mostrou satisfatório para os mesmos.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática. Literatura. Ensino.

THE TEACHING OF MATHEMATICS WITH THE AID OF LITERARY BOOKS IN TURKS OF THE 8TH CENTURY OF FUNDAMENTAL TEACHING

1 I INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que existe a milênios, esse campo do conhecimento possui um caráter axiomático e dedutivo. Mas no que diz respeito à Educação Matemática, segundo Kilpatrick (1996 *apud* FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 12), "tem uma curta história que difere de país para país, tendo em cada um deles uma história própria e certo grau de desenvolvimento". Na qual somente a partir do século XX, essa área do conhecimento passou a ser estudada separadamente. Nesse sentido, vários grupos de pesquisa foram se formando com pessoas de diferentes ramos profissionais, com o intuito de trazer recursos que possibilitem um melhor desempenho nesta área recém-aceita.

Contudo, o ensino da Matemática de forma tradicional nas escolas manteve uma inclinação para o uso do cálculo pelo cálculo, deixando de lado a relação desta ciência com as demais áreas do conhecimento e até mesmo sua função educativa. Portanto, o ensino desta disciplina no Ensino Fundamental e Médio tornou-se repleta de empecilhos, pois os discentes passaram a vê-la como um "monstro" pronto para devorá-los. Não se visualizava a relevância, nem tão pouco a aplicabilidade da Matemática no seu cotidiano. Por este motivo, foram suscitando indagações de que modo seria mais viável este ensino-aprendizagem.

Do ponto de vista científico é mais uma contribuição para se pensar no ensino dessa disciplina tão temida por meio de propostas de ensino mais dinâmicas e aparentemente distintas. Esta pesquisa foi desenvolvida por meio de uma seleção de livros literários que trazem conceitos matemáticos descritos em alguns trechos no decorrer da estória de forma implícita, e foi aplicada em uma turma do 8° ano do Ensino Fundamental.

Assim, o presente estudo tem como objetivo geral verificar se o uso de livros literários no ensino da Matemática facilita a aprendizagem de alguns conceitos. Especificamente identificar conceitos matemáticos que estejam inclusos em textos literários e relacionar os textos apresentados nos livros com os conteúdos que serão analisados.

Esta pesquisa tem como principal referência o estudo realizado por Lima (2012, p. 62), que teve como objetivo "analisar a articulação entre a Matemática e gêneros textuais nas obras dos Acervos Complementares do PNLD(2010)", também está embasada na dissertação de mestrado de Neuenfeldt (2006) que aborda a Matemática e a literatura infantil.

2 I DIFICULDADES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O ensino da Matemática há bastante tempo vem sendo questionado, uma vez que ainda hoje se busca uma metodologia que melhore a compreensão dos conceitos desta ciência, o que de acordo com Ponte (2004 *apud* SILVA, 2005, p.1):

> Nas últimas décadas o ensino da Matemática sofreu muitas mudanças significativas. Nas décadas de 40 e 50 do século passado, o ensino da Matemática caracterizou-se pela memorização e mecanização, também conhecido como "ensino tradicional". Com isso, se exigia do aluno que decorasse demonstrações de teoremas (memorização) e praticasse listas com enorme quantidade de exercícios (mecanização). Todavia, os resultados desta metodologia de ensino não foram significantes.

Dessa forma, se faz necessário entender os fatores que levam os alunos a criaremuma aversão a essa área do conhecimento, fazendo-os considerá-la desnecessária e de difícil compreensão, já que é uma das poucas disciplinas do ensino regular que possui uma linguagem própria e que se faz preciso o uso de fórmulas, símbolos, variáveis e constantes para se obter soluções de situações-problema.

Pois, uma vez que, a aprendizagem desta nova linguagem e de suas utilidades não ocorre,o aluno acaba gerando um sentimento de vergonha e antipatia pela matéria, na qual essa antipatia desenvolvida em sala de aula, ganha repercussão no lar, na sociedade e novamente nas escolas, aonde os novos discentes já chegam atemorizados com a disciplina antes mesmo de estudá-la e acabam por criar bloqueios em suas mentes, tornando o ensino da mesma ainda mais difícil de ser compreendido.

Por isso, é preciso que o educador busque formas de desconstruir essas ideias errôneas em suas atividades, e esclarecer que aprender conceitos matemáticos não se dá meramente em decorar fórmulas e mecanizar soluções. Esse processoconsiste em estimular a capacidade de pensar, interpretar e buscar soluções para um dado problema, com base em conhecimentos prévios.

Neste sentido, as tendências na educação surgem de processos, sendo estes formas de trabalhar, que possibilitem mudanças no contexto no ensino de Matemática com a finalidade de melhorar a qualidade de ensino, visto que, ao ganharem repercussão por se mostrarem proveitosos em sala de aula, estes processos se tornam alternativas vantajosas na busca de um ensino inovador (FLEMMING, LUZ e MELLO, 2005, p. 12).

Na década de 30, o ensino de conceitos matemáticos consistia em valores utilitários, e sua metodologia era basicamente a resolução de problemas e o método cientifico, esta forma de trabalho é denominada tendência empírico-ativista. Desse período até os dias atuais surgiram diversas tendências que foram vivenciadas em tempos distintos. Atualmente, tem-se várias tendências, a saber: Etnomatemática, Informática e Educação Matemática, Escrita na Matemática e Literatura e a Matemática.

Dessa forma, a pesquisa está embasada na última tendência citada anteriormente, na qual segundo Flemming, Luz e Mello (2005, p.17) "[...] fundamenta-se no interesse em desenvolver práticas pedagógicas interdisciplinares", sendo essa função o enfoque principal da presente pesquisa.

2.1 Literatura e Matemática

Em primeiro instante, entende-se que a Literatura torna-se um ponto crucial nesta pesquisa, pois esta visa utilizá-la como uma ferramenta a ser trabalhada no ensino de conceitos matemáticos, de modo interdisciplinar e dinâmico. Desse modo, destacando-a como uma ciência que pode ser desenvolvida em outros campos do conhecimento, além da disciplina de Português, tornando-a mais próxima do cotidiano do discente. Além disso, busca-se não só romper o preconceito em relação ao uso destas disciplinas trabalhadas juntas, como também facilitar o ensino de ambas. Assim como a Matemática ocupa um lugar de desprezo para a maioria dos estudantes, a Literatura não se distancia muito dessa ocupação. Para Flemming, Luz e Mello (2005, p. 46) a causa disso está relacionada aos métodos de muitos professores, quando “em muitas aulas, para ocupar espaço de tempo ocioso, professores exigiam a leitura de textos difíceis e longos, sem contextualizá-los nem comentá-los e chamavam esse momento, inadequadamente de literário”.

Observa-se que, a Literatura quando trabalhada de modo puramente obrigatório e desconexo da realidade, não desperta o interesse dos alunos. Pelo contrário, causa receio e preconceitos. Esta maneira de encarar a Literatura tem trazido consequências graves para o Brasil que possui uma baixa média de leitores, segundo pesquisa realizada pelo Ibope[1] (Instituto Brasileiro de Opinião Pública e Estatística) Na busca de que haja uma mudança na realidade atual, acredita-se que, segundo Flemming, Luz e Mello (2005, p. 47) os livros devem ser bem selecionados com o intuito de relacioná-los com os conteúdos dados em sala, sejam eles para dar inicio aos conceitos ou para encerrá-los. Os mesmos não devem ser usados apenas para práticas escolares, mas também como uma forma de proporcionar ao estudante o prazer que há ao se ler um livro e permitir que estes descubram por si mesmo o mundo literário desenvolvido em suas imaginações. Esta prática ao se tornar um hábito, produz benefícios que são requisitados na maioria das disciplinas do ensino regular.

> Vale lembrar que a literatura não serve tão-somente à leitura, ela contribui e muito para a escrita e para o desenvolvimento da lógica e da criatividade. Quando selecionamos a boa literatura para nossa sala de aula, estamos permitindo que nossos alunos tenham contato com a linguagem que devem propagar na elaboração de seus textos. (FLEMMING, LUZ e MELLO, 2005, p. 48)

Estes benefícios só irão surgir no âmbito escolar quando a literatura for bem trabalhada pelos docentes e redescoberta pelos discentes. Por isso, é preciso que o docente busque novos métodos de ensino no qual seja dinâmico e viável, sendo assim este trabalho sugere com base teórica e prática, o uso da interdisciplinaridade por meio dos livros literários (encontrados na maioria das bibliotecas escolares e municipais), mesmo que ainda não seja algo tão comum.

Diante de tudo que fora apresentado, para trabalhar com a Matemática e a Literatura requer mais tempo e dedicação por parte do professor. Assim, o docente precisará alimentar o hábito da leitura para que possa estimular seus alunos a lerem. É nesse momento que a literatura irá se apresentar de forma indireta como um auxílio na habilidade de interpretação que tanto é solicitada nas questões de Matemática, além de descontrair o leitor, e maximizar a capacidade criativa do indivíduo. A aplicação dessa iniciativa também irá requerer a criatividade do docente e o conhecimento científico, para que o mesmo consiga apresentar trechos que estão implícitos do ponto de vista matemático para o aluno.

2.2 A Matemática e os Livros Literários

Os autores (LIMA, 2012; NEUENFELTD, 2006) realizaram estudos com a

1 “indica que o brasileiro lê apenas 4,96 livros por ano – desses, 0,94 são indicados pela escola e 2,88 lidos por vontade própria”. “[...] Um dado alarmante: 30% dos entrevistados nunca comprou um livro”.

temática deste trabalho, com diferentes metodologias e conceitos matemáticos, mas ainda assim com a mesma finalidade, sendo a primeira uma pesquisa descritiva e a segunda uma pesquisa de campo.

Os resultados do trabalho desenvolvido por Lima (2012), no qual serviu para embasar a presente pesquisa no que diz respeito à utilização dos livros literários nas escolas, mostrando que é possível abordar os conceitos matemáticos a partir do uso dos livros paradidáticos na aprendizagem.

Após várias análises, realizadas por Lima (2012), com base nos documentos dos Acervos Complementares do PNLD (Programa Nacional do Livro Didático) 2010, a autora diz que o manual de obras tem por finalidade proporcionar materiais que auxiliam no processo de alfabetização e na capacitação de leitores. E, no que diz respeito aos livros com base Matemática, os mesmos possuem algumas características próprias para cada função definida, alguns deles são obras com a Matemática e que dão suporte para a história, em outros ocorre o inverso, ou seja, são livros de história nos quais a Matemática vai surgindo e ganhando evidência em seu desenrolar.

E ainda há livros, como o texto analisado por Lima (2012) e escrito por Martins Rodrigues Teixeira intitulado *O valor de cada um*, no qual a Matemática é descrita com tanto realismo, que proporciona ao leitor a sensação de que ela está tão viva, ao ponto de não se limitar apenas ao seu espaço na escrita, de modo que acaba por se fundir à vida do leitor.

Na pesquisa de Neuenfeltd (2006), a qual serviu para fundamentar a possibilidade de trabalhar o conceito da interdisciplinaridade, unindo os livros literários e os conceitos matemáticos, uma vez que o autor utilizou esta mesma proposta em sua pesquisa. Para o autor a proposta desenvolvida em seu estudo, proporcionou aos alunos o direito de falar, sem a preocupação de serem avaliados, os quais puderam compartilhar suas experiências, no que diz respeito às atividades desenvolvidas, fazendo com que houvesse uma interação entre a turma e ocorreu também a desmistificação quanto ao papel do professor como um “dono” da verdade.

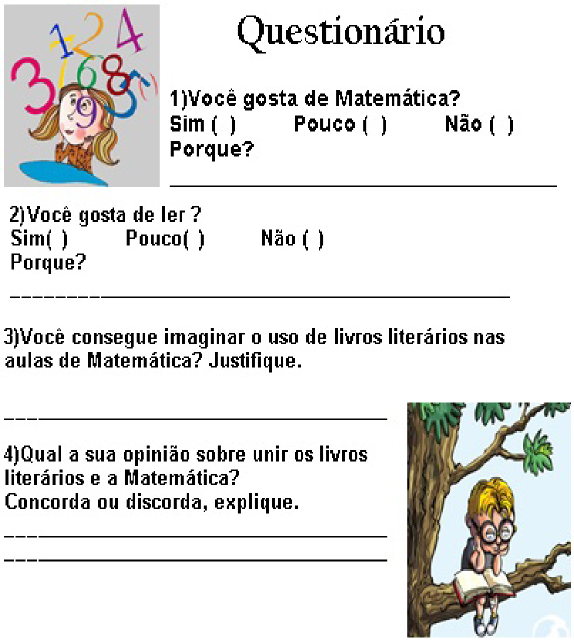
3 I METODOLOGIA

Este estudo tem como modalidade a pesquisa de campo, na qual segundo Fiorentini e Lorenzato (2012) a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece e pode dar-se por amostragem, entrevista, observação participante, pesquisa-ação, aplicação de questionário, teste, entre outros.

O presente trabalho foi desenvolvido por meio de uma pesquisa qualitativa que segundo Fiorentini e Lorenzato, (2012) não está preocupadas com números, mas busca levantar dados sobre o que leva um grupo a ter determinadas atitudes tão semelhantes, e compreender as suas motivações, expectativas e opiniões. Com base nisso, essa pesquisa busca saber as opiniões dos discentes sobre a sua aprendizagem no que diz respeito aos conceitos matemáticos, e aos livros, como também a opinião dos mesmos em relação à união destas duas áreas aparentemente tão distintas.

E para que isso ocorresse, foi necessária a aplicação de um questionário (ver figura 1) com uma turma do Ensino Fundamental, com 42 alunosde uma Escola da rede pública de Santa Maria da Boa Vista-PE. No entanto, apenas 30 alunos responderam ao questionário, uma vez que os demais alunos não estavam presentes no dia da aplicação.

A pesquisa foi desenvolvida em três etapas: inicialmente aplicou-se um questionário (figura 1), em seguida fez-se a apresentação de livros literários para as turmas e por fim, a terceira etapa consistiu em desenvolver uma atividade, na qual os grupos formados em sala fizeram a leitura de um dos livros que foram apresentados e selecionaram um trecho que estava relacionado a algum conceito matemático. Após isso, compartilharam com a turma, de forma criativa por meio de peças, músicas, poesias, vídeos, e etc.



Questionário

1)Você gosta de Matemática?
Sim ( ) Pouco ( ) Não ( )
Porque?
____

2)Você gosta de ler ?
Sim( ) Pouco( ) Não ( )
Porque?
____

3)Você consegue imaginar o uso de livros literários nas aulas de Matemática? Justifique.
____

4)Qual a sua opinião sobre unir os livros literários e a Matemática?
Concorda ou discorda, explique.
____
____

Figura1 – Questionário aplicado nas duas turmas.

Ao fim deste estudo, fez-se necessário compreender se algo na aprendizagem dos estudantes mudou, então, foi solicitado dos alunos um resumo sobre os livros, as atividades, e a opinião deles sobre a disciplina de Matemática. Para uma melhor interação o discente pesquisador lecionou as aulas nas turmas durante a vivência da pesquisa.

A finalização das atividades culminou em uma feira literária de Matemática, na qual os alunos apresentaram-se para toda a escola, e ao término da feira os alunos escreveram um resumo sobre a vivência das atividades.

4 I ANÁLISES DOS RESULTADOS

Neste tópico serão abordados os resultados encontrados e analisados em cada etapa da atividade, na busca de compreender os pontos mais relevantes durante a vivência da pesquisa, e esclarecer os aspectos positivos e negativos pontuados pelos discentes participantes.

4.3 Análise dos Resultados do Questionário

Foi desenvolvido para cada questão solicitada no questionário (ver figura 1) um gráfico com a representação das respostas dadas pelos alunos do 8º ano.

Com relação à questão 1, poucos alunos acreditam que esta disciplina é importante (ver figura 2), demonstrando o quanto o ensino de conceitos matemáticos está sendo pouco proveitoso para todos, uma vez que a maioria dos alunos não sentiu nenhum tipo de prazer na sua aprendizagem. Com isto, se faz necessário que o docente busque novos métodos de ensino, na tentativa de que essa situação seja modificada, no qual segundo Ponte (2004 *apud* SILVA, 2005) esse modelo tradicional, a que muitos docentes se limitam, não tem se mostrado satisfatório desde as décadas de 40.

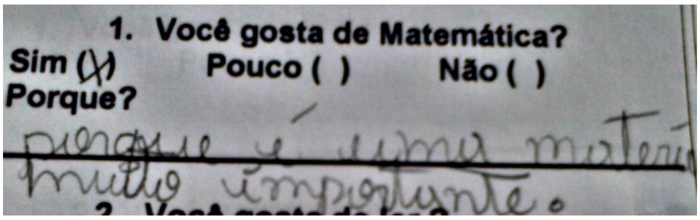

1. Você gosta de Matemática?
Sim (X) Pouco ( ) Não ( )
Porque?
porque é uma materi
muito importante.

Figura 2- Resposta de um aluno do 8º ano para a questão 1

Por outro lado, a maioria deles declarou que gostavam pouco da Matemática, pois é muito difícil, dentre eles, três afirmaram ser chata e dois disseram não gostar, porque não conseguem aprender.

Essa turma demonstrou que o problema não está na disciplina de Matemática, mas no fato de não conseguirem assimilar o que está sendo ensinado. Uma sugestão para que essa situação seja modificada está na afirmação de Neuenfelt (2006, p. 32) quando diz que é preciso que o professor considere tantos os conhecimentos prévios de seus alunos como as possibilidades cognitivas dos mesmos, no seu método de ensino.

A maior parte dos discentes respondeu que não gostam de Matemática e de forma unânime: consideram a disciplina muito difícil. Daí compreendeu-se que quando os conteúdos não são assimilados com frequência, o individuo gera uma aversão à disciplina.

No que se refere à questão 2, uma quantidade significativa de alunos declararam gostar de ler, entre eles nove afirmaram que é muito bom, para outros três gostam porque melhora a mente, um afirma que apenas ama, como pode ser visto em alguns relatos abaixo:

Aluno I - Porque abre mais minha mente.

Aluno J- É interessante.

Aluno K- Porque é mais fácil de compreender.

Neste quesito, a leitura é bem-vinda pela turma e prazerosa para quase toda a sala, e de acordo com Lima (2012) esta é a principal função dos livros com a finalidade de entreter.

Uma quantidade razoável de alunosescolheu a opção Pouco, para seis destes, ler é cansativo e para outros três é um bom passatempo, mas não constante (ver figura 3). O que se pode dizer acerca da visão destes discentes, e segundo Neuenfeltd (2006, p. 37) os livros contribui para que as crianças e os jovens encontrem caminhos e soluções para seus problemas de ordem intelectual e psicológica. Quando a leitura não se apresenta de modo atraente para o leitor, a mesma se torna uma prática enfadonha, como foi mencionado nas respostas. Já para os outros a leitura é aceitável, mas não ao ponto de se tornar uma prática cotidiana.

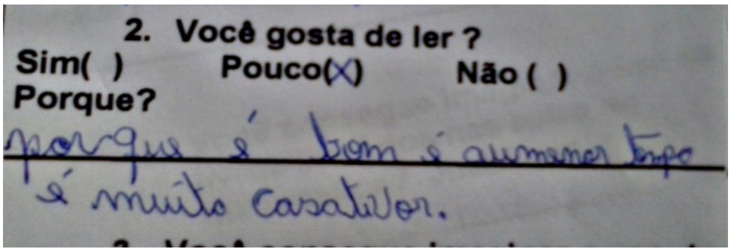


Figura 3: Resposta de um aluno do 8º ano para a questão 2.

Por outro lado, um pequeno número declarou não gostar da leitura por ser enfadonho (ver figura 4). Dessas respostas é possível apenas afirmar que a leitura ainda não se apresentou de forma cativante, apenas como uma obrigação que muitas vezes é imposta pelos professores como afirma Flemming, Luz e Mello (2005, p. 47).

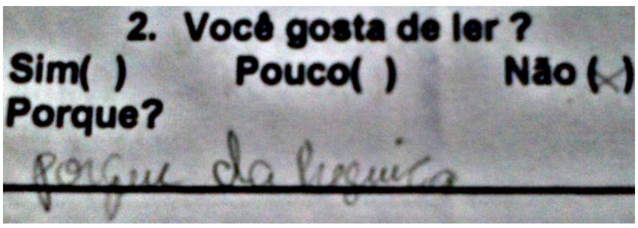


Figura 4: Resposta de um aluno do 8º ano para a questão 2.

No tocante a questão 3, para seis alunos seria interessante e eficiente utilizar os livros literários nas aulas da disciplina em questão. Três afirmaram que Matemática não é só números, e que seria uma "mistura" de literatura e números. No qual segundo Neuenfeltd (2006, p. 22), essa interação entre duas disciplinas é evidenciada quando a interdisciplinaridade é colocada em prática.As respostas dadas definem bem o que esta pesquisa buscou apresentar, na qual o ensino da Matemática pode se tornar mais prazeroso quando se é trabalhado juntamente com a Literatura, e não só viável, mas também proveitoso na aprendizagem.

Ainda sobre a questão 3, tem-se que poucos discentes não souberam justificar suas respostas, apenas informaram que iria complicar. Para estes, a união pode tornar o ensino e aprendizagem ainda mais difícil de ser transmitida e assimilada. O que de fato pode acontecer, quando os livros não são bem selecionados e quando não há uma programação de suas utilidades no ensino dos conteúdos, como afirma Flemming, Luz e Mello (2005, p. 47).

Para um grande número de alunos que discordaram, de modo geral, não seria possível, pois para eles a Matemática é só número (ver figura 5, e alguns relatos abaixo).

Aluno P- Não, porque não tem nada a ver.

Aluno Q- Não, porque não combina.

Aluno R- Não, porque eles são diferente um do outro.

Notou-se aqui a visão que estes alunos possuíam sobre o que é a Matemática e a Literatura, também foi possível perceber o quanto o ensino tem- se apresentado mecânico e extremamente tradicional, uma vez que a sua prática se resume apenas em responder questões, no qual segundo Neunfeltd (2006,p. 29), " na maioria das vezes desprovida de contextualização".

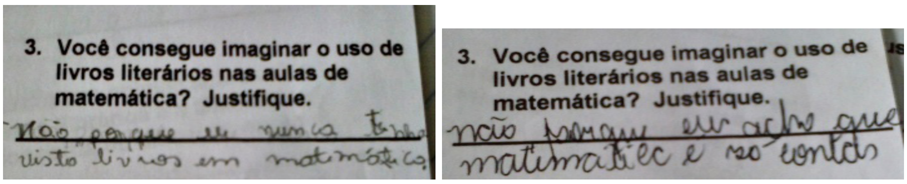


Figura 5 - Resposta de dois alunos do 8º ano para a questão 3.

No que diz respeito à questão 4, a grande maioria dos alunos afirmou concordar com a união da Matemática e da Literatura, esses por sua vez acreditavam que as aulas se tornariam mais interessantes e divertidas, como pode ser observado na figura 6 e em alguns relatos a seguir:

Aluno V- Concordo isto torna a matemática mais fasil de aprender.

Aluno W- Concordo, isso torna a matemática divertida.

Para um deles, seria bom, uma vez que não fariam tantas contas. E para outros, tornariam os conceitos mais fáceis de serem assimilados. Esta é umas das finalidades da aplicação dessa pesquisa, ou seja, proporcionar aulas dinâmicas e proveitosas para a aprendizagem.

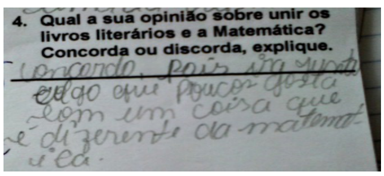


Figura 6: Resposta de três alunos para a questão 4.

Quanto aos poucos alunos que discordaram, observou-se que os mesmos acreditavam que as aulas ficariam bagunçadas. As respostas aqui são similares à segunda resposta da questão 3. Essa “bagunça” só irá acontecer se o docente não preparasse uma sequência bem estruturada. Ainda nessa questão, apenas dois estudantes não souberam opinar, conforme mostra a figura 7. Estes discentes, apenas não conseguiram relacionar de alguma forma a Matemática à Literatura, tornando difícil escolher umas das opções oferecidas.

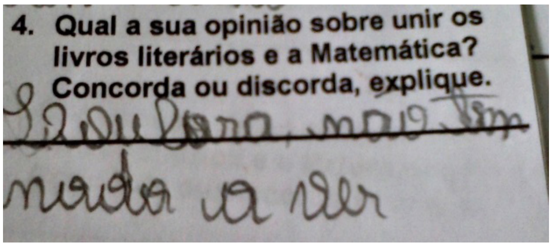


Figura 7- Resposta de um aluno do 8º ano

4.4 Relatos das Apresentações

A apresentação seguiu o seguinte esquema: cada sala ficou responsável por quatro grupos de dois livros diferentes, sendo que na primeira sala ficaram os grupos do livro O pequeno príncipe e O diabo dos números, e na segunda sala os de Alice nos país das maravilhas e Alice através do espelho. Então, foi convidada uma turma da escola por vez, para prestigiar a apresentação das turmas envolvidas na pesquisa. E as salas foram totalmente ornamentadas segundo a imaginação dos grupos.

Com relação à avaliação da apresentação de cada grupo, observou-se que foi satisfatória, uma vez que os alunos conseguiram desenvolver peças teatrais, e explicar os conceitos matemáticos que conseguiram identificar, por exemplo: largura, comprimento, proporção, escala de tempo, construção de gráfico no plano cartesiano e potência. Alguns grupos optaram por fazer relatos sobre o que entenderam e outros apresentaram as biografias dos autores. Quase todos os grupos se caracterizaram com o tema do seu livro, de acordo com o cenário do trecho que foi escolhido por eles.

É relevante dizer que mesmo a pesquisa assumindo um caráter literário, em nenhuma das etapas os conceitos matemáticos deixaram de ser observados e discutidos, resultando em uma apresentação criativa, na qual o foco principal foi a Matemática.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante de tudo que foi desenvolvido anteriormente, concluiu-se que a pesquisa alcançou seu objetivo geral, de modo que foi possível que os discentes não só compreendessem os conteúdos analisados como um conhecimento individual, assim como possibilitou que esse conhecimento fosse transmitido para os demais alunos de forma criativa, o que se revelou satisfatório para os alunos que se apresentaram e aqueles que foram prestigiá-los, contribuindo assim, como estimulo à prática da leitura a estes últimos.

Quanto à prática da escrita, vale salientar que o hábito da mesma não acontece de imediato, mas quando há um estímulo contínuo.

De um modo geral, os trabalhos que foram desenvolvidos pelos alunos, alcançaram seus objetivos, e se mostraram satisfatórios pela criatividade em suas produções. De fato, os discentes conseguiram detectar e apresentar os conceitos de forma criativa como foi proposto inicialmente.

REFERÊNCIAS

CARROLL, Lewis. **Alice no país das maravilhas**. Martin Claret LTDA.3.ed. 5ª reimpressão.São Paulo,2016

CARROL, Lewis. **Alice através do espelho e o que ela encontrou por lá.** Martin Claret LTDA. 4.ed. 2ª reimpressão. São Paulo,2015.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. **O diabo dos números.** Cia. Das Letras.14ª reimpressão. São Paulo,1997.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.**3.ed.-Campinas, SP, 2012.

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; MELLO, Ana Cláudia Collaço de.**Tendências em Educação Matemática:** Livro didático. 2. ed. - Palhoça: Unisul Virtual, 2005.

LIMA, Andreia Paula Monteiro. **Acervo complementares do PNLD 2010:** Um estudo sobre a relação entre a matemática e gêneros textuais. Recife, 2012.

NEUENFELDT, Adriano Edo. **Matemática e literatura infantil:** Sobre os limites e possibilidades de um desenho curricular interdisciplinar. Santa Maria, 2006.

SAINT-EXUPÉRY, Antoine de. **O pequeno príncipe.**ed.51.Agir.Rio de Janeiro, 2015.

SILVA, José Augusto Fiorentino. **Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem na matemática:** Algumas considerações. Brasília, 2005.

CAPÍTULO 5

RELATO DA UTILIZAÇÃO DE INSTRUMENTOS DE DESENHO GEOMÉTRICO NO ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS

Luana Cardoso da Silva
Universidade Federal da Paraíba – Campus IV
Rio Tinto – Paraíba

Washington Leonardo Quirino dos Santos
Secretaria de Educação do Estado da Paraíba - SEEPB
João Pessoa – Paraíba

Leonardo Cinésio Gomes
Universidade Federal da Paraíba – Campus IV
Rio Tinto – Paraíba

Cristiane Fernandes de Souza
Universidade Federal da Paraíba – Campus IV
Rio Tinto – Paraíba

RESUMO: Esse texto vem apresentar um relato de experiência da aplicação de três sequências didáticas em duas turmas de 7º ano do Ensino Fundamental em Mamanguape - Paraíba. Essas sequências foram partes integrantes de um projeto de ensino, na área de Matemática, que foi desenvolvido no Prolicen/UFPB/*Campus* IV, no ano de 2016. As atividades elaboradas foram baseadas no livro didático adotado na escola, em livros de outros autores que tratam de Ensino de Geometria e nas orientações didáticas de Matemática constantes nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental. Essas sequências buscavam inserir o uso dos instrumentos de desenho geométrico para proporcionar aos alunos das turmas vivências na manipulação desses instrumentos junto à aprendizagem dos conceitos e conteúdos geométricos estudados. Ao final do processo, apesar de algumas dificuldades encontradas, as sequências promoveram a aprendizagem, por parte dos alunos, dos conceitos trabalhados nas turmas participantes do projeto.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Geometria. Anos Finais do Ensino Fundamental. Desenho Geométrico.

REPORT ON THE USE OF GEOMETRIC DESIGN INSTRUMENTS IN THE TEACHING-LEARNING OF GEOMETRIC CONCEPTS

ABSTRACT: This text presents an experience report of the application of three didactic sequences in two classes of 7th grade of elementary School in Mamanguape - Paraíba. These sequences were part of a teaching project, in the area of Mathematics, which was developed at Prolicen/UFPB/Campus IV, in the year 2016. The elaborated activities were based on the textbook adopted in the school, in books of other authors who deal with Geometry Teaching and in the Mathematics didactic orientations contained in the National Curriculum Parameters for Mathematics for elementary School. These sequences sought to insert the use of geometric design instruments to provide students of the classes in the manipulation of

these instruments with the learning of the concepts and geometric content studied. At the end of the process, despite some difficulties encountered, the sequences promoted the students' learning of the concepts worked in the classes participating in the project.
KEYWORDS: Geometry teaching. Final Years of Elementary School. Geometric Design.

1 I INTRODUÇÃO

A Geometria é o ramo da Matemática profícuo no que diz respeito ao desenvolvimento de diferentes capacidades intelectuais, como, por exemplo, percepção, abstração, dedução e criatividade, dentre outras aptidões motoras e cognitivas. A importância do ensino de Geometria pode ser observada nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN):

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, 1998, p. 51).

Para Lorenzato (1995), o ensino de Geometria é importante porque oferece uma grande possibilidade de contextualização e interdisciplinaridade, como também pela aplicação em outros ramos da Matemática.

Mesmo tendo essa importância no currículo de Matemática, estudos e pesquisas, realizadas por pesquisadores da área, destacam que o ensino de Geometria passa por algumas dificuldades com relação a sua abordagem em sala de aula, na qual se predomina os métodos tradicionais, com ênfase na memorização de fórmulas, e tem o livro didático como o principal ou único material utilizado pelos professores para lecionar. Diante dessa constatação, é perceptível a necessidade de se desenvolver propostas metodológicas diferenciadas que busquem proporcionar uma aprendizagem efetiva dos conteúdos geométricos.

Dentro da perspectiva de contribuir para o ensino-aprendizagem da Geometria na Educação Básica, foi desenvolvido no ano de 2016, vinculado ao Programa de Licenciatura (Prolicen)/UFPB, um projeto de ensino intitulado “O ensino-aprendizagem da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental: propostas metodológicas em atividades didáticas”, que teve por objetivo geral propor, aplicar e avaliar atividades e sequências didáticas para o ensino-aprendizagem da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, utilizando diferentes recursos didático-pedagógicos. O projeto visou promover também uma integração entre os alunos da Licenciatura em Matemática, participantes do projeto, e os professores de Matemática de uma Escola Pública de Ensino Fundamental do município de Mamanguape - Paraíba, contribuindo tanto para a formação do licenciando no desenvolvimento das competências, atitudes e habilidades inerentes à docência, como para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de Matemática da região. Esse projeto teve a participação de três licenciandos, sendo dois bolsistas e um voluntário, e foi coordenado por uma professora do Curso de Licenciatura em Matemática.

Este texto vem apresentar um relato de experiência, dos três licenciandos participantes do projeto, sobre o desenvolvimento da terceira, quarta e quinta sequências didáticas, aplicadas nas duas turmas participantes da intervenção pedagógica realizada no mês de setembro/2016.

2 I METODOLOGIA

Em linhas gerais, o trabalho de investigação desenvolvido no projeto de ensino Prolicen 2016 caracteriza-se por uma pesquisa exploratório-descritiva, na qual o processo de coleta de dados enquadra-se na modalidade de pesquisa de campo, com uma abordagem metodológica de natureza qualitativa (FIORENTINI; LORENZATO, 2012).

Considerando os objetivos e o processo de coleta de dados da investigação, nossas ações desenvolvidas caracterizam-se por uma pesquisa-ação. Buscamos, com a participação direta da coordenadora do projeto e dos licenciandos (bolsistas e voluntário), um trabalho em conjunto com alunos e dois professores de Matemática da escola, provocar uma reflexão sobre o Ensino de Geometria, promovendo uma mudança de significados.

O projeto foi desenvolvido em etapas, que foram estabelecidas previamente no cronograma de atividades: estudos de natureza bibliográfica; atividades realizadas na escola; análise dos dados e avaliação da proposta.

Na etapa de atividades realizadas na escola, foram executadas atividades didáticas nas turmas participantes e, para isso, foram elaboradas oito sequências didáticas que abordavam conteúdos de Geometria, elencados no livro didático da escola (PROJETO ARARIBÁ, 2010) e buscaram contemplar as orientações dos PCN de Matemática para o Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), além disso, foram fundamentadas em propostas de autores como Mendes (2006; 2009). Das oito sequências didáticas executadas, trazemos nesse texto o relato de aplicação de três dessas sequências (3, 4, e 5).

As atividades foram desenvolvidas em duas turmas do 7º ano, do turno matutino, com cerca de 30 alunos cada uma, em uma escola pública estadual de Ensino Fundamental, do município de Mamanguape - Paraíba. As atividades foram aplicadas nos horários das aulas de Matemática das turmas, que foram cedidas gentilmente pelos professores titulares para o desenvolvimento do projeto em suas turmas.

A utilização do livro didático adotado na escola foi uma das ações propostas no projeto, buscando apresentar para os professores das turmas possibilidades de uso desse recurso, mas não o colocando como único recurso possível para abordagem dos conteúdos.

As três sequências didáticas relatadas nesse texto tomaram como proposta o uso dos instrumentos de desenho geométrico como um recurso didático para o estudo de ângulos e polígonos regulares. O tempo adequado para a aplicação de cada sequência didática é 4 horas/aula.

A Sequência Didática 3 contemplou os seguintes conteúdos: Ângulos: medição com régua e transferidor; Classificação de ângulos: reto, agudo e obtuso; Ângulos complementares e suplementares. Os recursos didáticos utilizados foram: régua, transferidor, lápis, borracha e atividade impressa. Essa sequência consistia em uma atividade com três itens: (a), (b) e (c). No item (a), era preciso nomear 11 ângulos e identificar o vértice e os lados de cada um, como também obter suas medidas com o transferidor; o item (b) pedia para elencar o par de ângulos que tinha a soma de suas medidas igual a 90º; e no item (c) qual par de ângulos tinha a soma de suas medidas igual 180º.

Na Sequência Didática 4 foram contemplados os conteúdos: Bissetriz de um ângulo; Ângulos opostos pelo vértice. Os recursos didáticos utilizados foram: régua, transferidor, compasso, lápis, borracha e atividade impressa. Essa sequência continha duas atividades: a primeira atividade consistia em dois ângulos dispostos em uma folha, com três itens a serem respondidos. No item (a) pedia para nomear os ângulos, identificando vértice e lados; no item (b), a obtenção da medida de cada ângulo; no item (c), a construção da bissetriz de cada ângulo e a medida dos ângulos formados pela bissetriz, seguindo a explicação dada em um exemplo. A segunda atividade continha quatro itens: no item (a) era preciso construir cinco pares de retas que se interceptassem em um único ponto, depois era preciso enumerar cada par, destacar o vértice e cada um dos quatro ângulos formados em cada par; no item (b) precisava-se preencher uma tabela com as medidas dos ângulos formados pelos cinco pares de retas e elencar os pares de ângulos opostos pelo vértice; no item (c) era necessário responder o que era um ângulo oposto pelo vértice, a partir do observado no item anterior; e no item (d) perguntava sobre a relação entre as medidas dos ângulos opostos pelo vértice.

A Sequência Didática 5 abordava os conteúdos: Ângulos internos de um polígono; Polígonos regulares. Os recursos utilizados foram: papel, lápis borracha, régua e transferidor. A atividade relacionada a essa sequência se dividia em duas partes: A Parte I consistia em uma tabela para ser preenchida com o nome, a medida de todos os lados e a medida de todos os ângulos de dez polígonos regulares e irregulares que estavam dispostos em uma folha de papel separada e enumerados de 1 a 10; a Parte II continha cinco itens a serem respondidos: (a), (b), (c), (d) e (e). No item (a) precisava responder quais os polígonos tinham todos os lados de medidas iguais; no item (b), quais os polígonos que tinham todos os ângulos internos de medidas iguais; no item (c), quais os polígonos que tinham lados de mesma medida e ângulos internos de mesma medida, e pedia o nome deles; no item (d) perguntava se, pelo fato dos polígonos terem lados iguais, acarretava na igualdade dos ângulos internos, como também pedia uma justificativa; no item (e), como se denominava os polígonos que tinham lados com mesmo comprimento e ângulos internos de mesma medida.

Todas as atividades foram respondidas pelos alunos de forma individual. Cada aluno recebia as atividades impressas e os materiais necessários para resolvê-las. Os licenciandos, participantes do projeto, dirimiam as possíveis dúvidas dos alunos a respeito dos enunciados das atividades e do manuseio dos instrumentos de desenho geométrico.

3 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

A partir do desenvolvimento das três sequências didáticas foi possível perceber resultados positivos na realização das atividades com as duas turmas participantes da intervenção pedagógica.

Observamos que poucos alunos demonstraram saber usar corretamente os materiais que seriam utilizados (régua, compasso e transferidor), e se sentiram estimulados a aprender a utilizá-los (Figura 1).

Figura 1 – Aluna socializando com o licenciando durante a aula

Fonte: Arquivo pessoal dos licenciandos, 2016.

Em relação aos alunos que não sabiam manusear os instrumentos de desenho geométrico, para atendê-los individualmente foi preciso um tempo extra na realização de cada atividade, e isso se tornou uma dificuldade no desenvolvimento das sequências, pois as duas turmas eram numerosas, logo não foi possível finalizar as atividades programadas para cada aula, ficando, assim para a aula seguinte.

Ao iniciar a Sequência Didática 3, os alunos se mostraram participativos e interessados nos questionamentos que eram feitos durante o processo de realização da atividade (Figura 2).

Figura 2 – Instruções iniciais para realização das atividades

Fonte: Arquivo pessoal dos licenciandos, 2016

Mesmo com as dificuldades iniciais, que os alunos apresentavam com relação ao manuseio dos materiais, as atividades desta sequência apresentaram resultados satisfatórios. Os alunos conseguiram fazer as medições dos ângulos, mas foi preciso considerar algumas margens de erros nas medidas dos ângulos, devido à imprecisão na utilização dos instrumentos, como também da imprecisão de um instrumento para outro entre as duplas.

A aplicação da Sequência Didática 4 foi um pouco mais atribulada. Alguns alunos não sabiam utilizar o compasso e transferidor, logo foi necessário passar alguns minutos da aula orientando-os no uso desses instrumentos (figura 3).

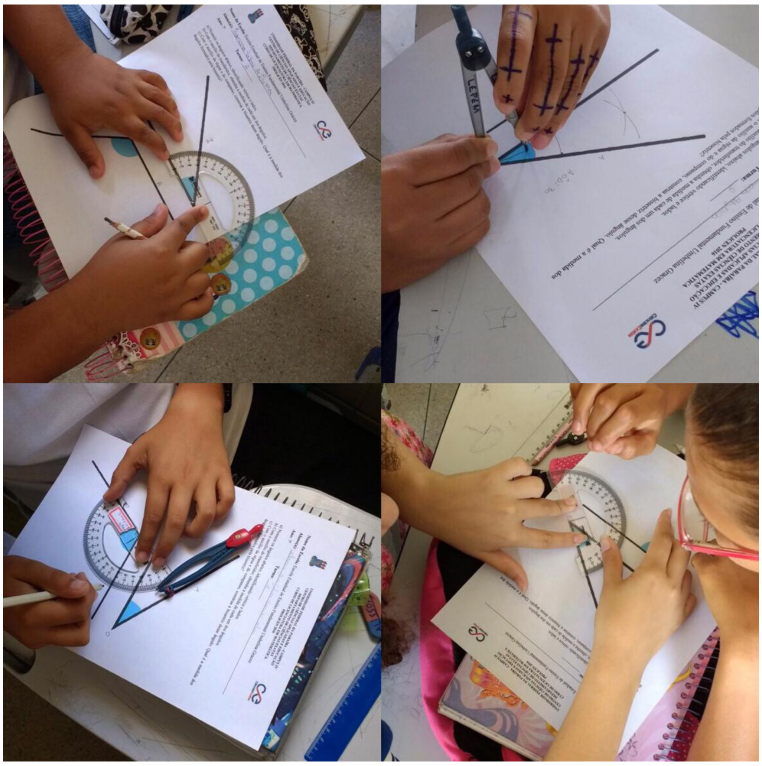


Figura 3 – Alunos utilizando os instrumentos de desenho geométrico, auxiliados pelos licenciandos

Fonte: Arquivo pessoal dos licenciandos, 2016.

Os alunos precisavam desenhar ângulos quaisquer com a régua e o transferidor e, como muitos nunca tinham utilizado esses materiais para construir ângulos, propriamente, eles sentiram mais dificuldades, inclusive com as medidas que eles diziam ser em "números quebrados" (números decimais). Constatamos também que eles não tinham habilidades com o uso da régua, que foi considerada por eles como o instrumento mais conhecido. Em razão dessas dificuldades, os alunos se agitavam ao responder as atividades e foi preciso auxiliá-los com mais atenção. Após superar tais dificuldades com o uso dos instrumentos, os itens foram respondidos com êxito.

Na realização da Sequência Didática 5 foi possível perceber uma melhora significativa com relação a utilização dos materiais, os alunos apresentavam mais habilidade com os instrumentos de régua e transferidor, como também realizavam as atividades e identificavam a utilidade dos instrumentos por conta própria (Figura 4).

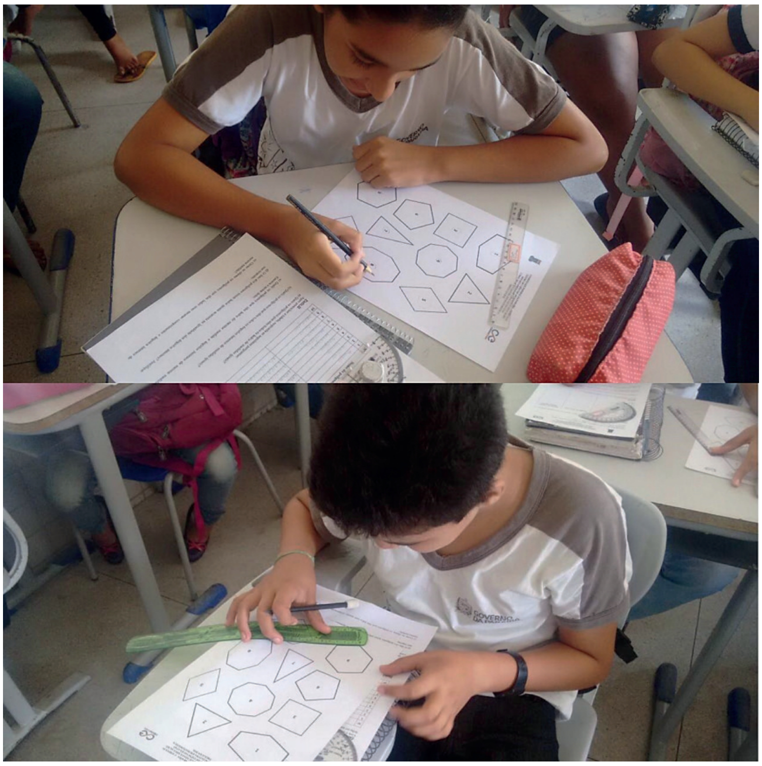


Figura 4 – Alunos utilizando os instrumentos de desenho geométrico de forma independente

Fonte: Arquivo pessoal dos licenciandos, 2016.

Os alunos apresentavam uma expressiva melhoria no comportamento e nas habilidades que eles estavam adquirindo.

No decorrer da aplicação dessas três sequências tivemos que lidar com a desmotivação de alguns alunos que se encontravam sentados no fundo da sala de aula. Para tentar contornar essa desmotivação, oferecemos mais atenção a esses alunos e proporcionamos mais oportunidades para ajudá-los a enfrentar as dificuldades no entendimento das atividades que acarretavam na desmotivação. Buscamos meios de lidar com cada aluno, sem alterar as atividades, mas procurando rever a nossa prática em relação à abordagem que estávamos utilizando, estabelecendo um ritmo de aula que fosse possível para todos acompanharem. Foi possível perceber que cada aluno reagiu de forma diferente ao utilizar os instrumentos de desenho geométrico.

Apesar das dificuldades encontradas, percebemos que conseguimos atingir os objetivos propostos pelas três sequências didáticas a partir do momento em que os alunos demonstraram a compreensão de conceitos e a abstração de ideias. Constatamos que a utilização dos instrumentos de desenho geométrico, envolvidos na construção das atividades, não foi apenas um entretenimento para os alunos, e sim uma forma de desenvolver as habilidades e capacidades que são requeridas na aprendizagem da Geometria, como também o quão importante é a participação do professor para o êxito nesse processo de aprendizagem.

Foi extremamente satisfatório para nós, professores de Matemática em formação, fazer o acompanhamento desse processo de construção de conhecimento, desde a familiarização dos materiais didáticos utilizados (instrumentos de desenho geométrico), passando pelo enfrentamento das dificuldades até a compreensão dos conceitos envolvidos nas construções, permitindo que fizéssemos reflexões que buscassem ampliar cada vez mais os nossos conhecimentos para nossas futuras práticas educativas.

4 I CONCLUSÕES

Este texto buscou apresentar a experiência dos três licenciandos com relação à aplicação de três sequências didáticas, assim como os resultados que foram obtidos após o processo.

Foi possível verificar que, a partir da utilização de instrumentos de desenho geométrico em atividades que foram planejadas, organizadas e aplicadas, houve a possibilidade de desenvolvimento de habilidades e competências do aluno, referentes aos conteúdos geométricos trabalhados. Apesar das dificuldades inicialmente encontradas em trabalhar com os materiais didáticos (régua, transferidor e compasso), proporcionamos aos alunos uma aprendizagem com mais compreensão.

Compreendemos que o processo de aprendizagem utilizando materiais é gradual, ou seja, é aos poucos que o aluno vai se adaptando aos materiais, levando em consideração seu próprio tempo de aprendizagem. É preciso que, além de se apropriar de metodologias, busquemos, enquanto futuros professores (na época da realização do projeto), selecionar os materiais adequados para auxiliar nossos futuros alunos em sua aprendizagem, procurando sempre preencher as possíveis lacunas existentes, para atender as necessidades dos alunos e poder formar cidadãos cada vez mais capacitados para viver em uma sociedade que exige cada vez mais um pensamento autônomo, reflexão e atitudes críticas nas ações do cotidiano.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. 3º e 4º ciclos Brasília: MEC/SEF, 1998.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** Educação Matemática em Revista. Blumenau, n. 1, p. 3 –13, 1995.

MENDES, I. A. **Matemática por atividades:** sugestões para a sala de aula. Natal/RN: Flecha do Tempo, 2006.

MENDES, I. A. Atividades históricas para o ensino de trigonometria. In: MIGUEL, A *et al*. **História da Matemática em atividades didáticas**. 2. ed. rev. São Paulo: Editoria Livraria da Física, 2009.

PROJETO ARARIBÁ. **Matemática.** 7º ano. 3. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

CAPÍTULO 6

ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES DO JOGO VAI E VEM DAS EQUAÇÕES NO ENSINO DE EQUAÇÕES DO 1º E DO 2º GRAU

Anderson Dias da Silva
UPE- Universidade de Pernambuco
Petrolina – Pernambuco

Lucília Batista Dantas Pereira
UPE- Universidade de Pernambuco
Petrolina – Pernambuco

RESUMO: Os jogos matemáticos são Tendências em Educação Matemática que têm por finalidade auxiliar a aprendizagem dos conceitos matemáticos de forma lúdica e significativa. Diante disso, este trabalho sugere o jogo Vai e Vem das Equações com o intuito de identificar algumas contribuições na aprendizagem das equações do 1° e do 2º grau, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio e, mais especificamente, pontuar os aspectos positivos e negativos desse jogo e incentivar a resolução de problemas, envolvendo equações do 1° e do 2º grau. Assim, o estudo trata-se de uma pesquisa de campo de caráter quantitativo e qualitativo, que foi desenvolvido em uma escola pública, na cidade de Petrolina-PE. Mediante a realização desse estudo, os alunos argumentaram que o jogo melhorou bastante sua compreensão sobre os conceitos de equações do 1° e do 2º grau que muitos já haviam esquecido, além de ter-lhes proporcionado, entusiasmo e envolvimento em todas as atividades propostas, revelaram ainda que possuem muita dificuldade em interpretar questões contextualizadas. Contudo, o estudo forneceu aos alunos uma forma estimulante e divertida de aprender brincando, fez com que eles interagissem e socializassem uns com os outros e lhes permitiu compreender conceitos que muitos já haviam esquecido.

PALAVRAS-CHAVE: Jogos Matemáticos. Resolução de Problemas. Equações do 1° e do 2º grau.

SOME CONTRIBUTIONS OF THE GAME GO AND COME FROM EQUATIONS IN THE TEACHING OF EQUATIONS OF THE 1ST AND 2ND LEVELS

ABSTRACT: Mathematical games are Trends in Mathematics Education whose purpose is to help the learning of mathematical concepts in a playful and meaningful way. Therefore, this work suggests the game Goes and Comes of Equations with the intention of identifying some contributions in the learning of the equations of the 1st and 2nd degree, in a class of the 2nd year of High School and, more specifically, to score the positive and negative results of this game and encourage problem solving, involving 1st and 2nd grade equations. Thus, the study is a quantitative and qualitative field research that was developed in a public school in the city of Petrolina-PE. By undertaking this study, students argued that the game greatly improved

their understanding of the concepts of 1st and 2nd grade equations that many had already forgotten, as well as having provided them with enthusiasm and involvement in all proposed activities, revealed although they have very difficulty in interpreting contextualized questions. However, the study provided students with a stimulating and fun way to learn by joking, made them interact and socialize with each other, and allowed them to understand concepts that many had already forgotten.
KEYWORDS: Mathematical games. Troubleshooting. Equations 1 and 2.

1 I INTRODUÇÃO

Frequentemente, a Matemática ensinada nas escolas, de acordo com Marim e Barbosa (2010, p. 225), “é muito mecânica e exata: um conjunto de fórmulas e passos que se repetidos corretamente levam invariavelmente à solução de um problema hipotético”. Assim, a prática pedagógica, muitas vezes, se reduz a um mero treinamento baseado na repetição e memorização. A primeira consequência disso, é o fracasso no processo de ensino-aprendizagem, pois os alunos que não conseguem aprender o conteúdo acabam criando barreiras em relação à disciplina.

A utilização de jogos no ensino da Matemática é apresentada como uma tendência que ressalta o despertar pelo gosto de aprender Matemática, causando nos alunos o interesse e envolvimento, que, no contexto educacional, favorece a interação social entre os mesmos. Marim e Barbosa (2010, p. 232) afirmam que, “por meio do jogo, tem-se a possibilidade de abrir espaço para a presença do lúdico na escola, não só como sinônimo de recreação e entretenimento, mas também permite o desenvolvimento da criatividade, da iniciativa e da intuição”.

Outro motivo para a introdução do jogo no ensino da Matemática, segundo Silva e Kodama (2004), é que ele ajuda a estimular a autoconfiança do aluno e, ao mesmo tempo, tende a diminuir bloqueios por parte de muitos que se sentem incapacitados de aprendê-la. Além disso, ele desenvolve a criatividade no instante em que o aluno procura táticas de resolução na busca por uma resposta. Essa iniciativa, é sem dúvida, positiva em razão de tornar o aluno, sujeito ativo na construção do seu próprio conhecimento.

A escolha da tendência Jogos ocorreu, principalmente, pela participação do autor no Subprojeto Específico de Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), voltado para os jogos matemáticos, bem como durante a sua atuação ao longo das disciplinas de estágio, no qual, no decorrer dessas experiências, foi possível constatar todos os benefícios acima citados e comprovar a eficácia do uso dos jogos para o ensino da Matemática.

A escolha do jogo Vai-e-Vem das Equações (desenvolvido por bolsistas do PIBID de Matemática da UNIFAL- Universidade Federal de Alfenas, em Minas Gerais. Disponível em: http://www.unifal-mg.edu.br/matematica/?q=PIBID-Matematica) deu se a uma peculiaridade que esse jogo possui. Ele une o jogo à Resolução de Problemas, duas Tendências em Educação Matemática com que os alunos irão se deparar ao resolverem os problemas presentes nas cartas do jogo. Assim, essa combinação almeja estimular um envolvimento dos alunos em torno de uma atividade que possa o instigar a pensar e criar soluções para os problemas matemáticos existentes.

Dessa forma, o presente trabalho vem objetivando identificar algumas contribuições do jogo Vai e Vem das Equações na aprendizagem das equações do 1º e do 2º grau, no 2º ano do Ensino Médio e, especificamente, pontuar os aspectos positivos e negativos do jogo Vai e Vem das Equações, além de incentivar a resolução de problemas, envolvendo equações do 1º e do 2º grau por meio do jogo.

Tendo em vista os argumentos apresentados, justifica-se o presente trabalho pela importância do mesmo como facilitador na aprendizagem da Matemática na sala de aula.

2 I JOGOS MATEMÁTICOS

O uso de jogos nas aulas de Matemática não é algo novo, de tal modo que existe, hoje, uma extensa bibliografia sobre o tema e um crescente interesse dos professores em incorporá-lo à sua prática pedagógica. No momento em que o professor agrega a utilização de jogos nas suas aulas, ele propõe uma mudança na sua prática. Segundo Silva e Kodama (2004, p. 5), "o professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem, do processo de construção do saber pelo aluno, e só irá interferir, quando isso se faz necessário".

Dessa forma, a aprendizagem por meio de jogos pode possibilitar que o estudante adquira conhecimentos matemáticos mediante um processo alternativo aos métodos tradicionais, incorporando características lúdicas, que potencializam a discussão de ideias. Relativo a isso, Smole et al. (2008, p. 9) afirmam que

> em se tratando de aulas de matemática, o uso de jogos implica uma mudança significativa nos processos de ensino e aprendizagem que permite alterar o modelo tradicional de ensino, que muitas vezes tem o livro e em exercícios padronizados seu principal recurso didático. O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais são estreitamente relacionadas ao chamado raciocínio lógico.

Já para Silva e Kodama (2004), dentre as situações acadêmicas, provavelmente, a mais produtiva é a que envolve o jogo, seja na aprendizagem de noções, ou nos meios que favorecem os processos que intervêm no ato de aprender, além de não se ignorar o aspecto afetivo que se encontra implícito no próprio ato de jogar, uma vez que o elemento mais importante é o envolvimento do indivíduo que brinca.

Assim, a difusão de jogos nas aulas de Matemática é uma ótima maneira de desenvolver brincadeiras na escola, principalmente no Ensino Médio, que possui uma quantidade bem limitada dessa metodologia de ensino. Desse modo, o aspecto lúdico dos jogos é algo bastante positivo no sentido que torna a Matemática mais atraente, principalmente, para aqueles alunos que desenvolveram alguma reação negativa pela disciplina ao longo da sua vida escolar. Dessa maneira, Moura (1996, p. 86) afirma que “a matemática deve buscar no jogo (com sentido amplo) a ludicidade das soluções construídas para as situações-problema seriamente vividas pelo homem”.

2.1 Jogos e Resolução de Problemas

A integração de tendências é algo bastante benéfico. De acordo com os Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012, p. 35), “os jogos devem ser encarados como situações-problema a partir das quais podem ser tratados conceitos e relações Matemáticas relevantes para o ensino básico”. E ainda, afirmam que

> a denominação genérica “jogos matemáticos” pretende englobar situações-problema de vários tipos. Entre eles podem ser citados: jogos que envolvem disputa entre duas pessoas ou entre pares, (...) os desafios, enigmas, paradoxos, formulados em linguagem do cotidiano e que requeiram raciocínio lógico para serem desvendados (PERNAMBUCO, 2012, p. 35).

Nessa perspectiva, Moura (1996) afirma que o jogo, sendo abordado com a finalidade de desenvolver habilidades de resolução de problemas, possibilita ao aluno a oportunidade de estabelecer planos de ação para atingir determinados objetivos, executar jogadas e avaliar sua eficácia nos resultados obtidos.

Percebe-se, assim, a importância que a utilização de jogos possui, ainda mais quando aliada à proposta da resolução de problemas, pois, dessa forma, o jogo ganha um implemento, permitindo que o aluno desenvolva outras estratégias no momento em que tenta resolver problemas. A esse respeito, Smole et al. (2008) relatam que uma proposta de trabalho aliada a jogos garante diversas habilidades, porque o aluno tem a possibilidade de resolver problemas, descobrir a melhor jogada, investigar, refletir e analisar as regras, possibilitando uma situação de prazer e aprendizagem significativa nas aulas de Matemática. Nesse sentido, Grando (2000) reafirma essa ideia ao relatar que

> o cerne da resolução de problemas está no processo de criação de estratégias e na análise, processada pelo sujeito, das várias possibilidades de resolução. No jogo ocorre fato semelhante. Ele representa uma situação problema determinada por regras, em que o indivíduo busca a todo o momento, elaborando estratégias e reestruturando-as, vencer o jogo, ou seja, resolver o problema. Esse dinamismo característico do jogo é o que possibilita identificá-lo no contexto da resolução de problemas.

No processo de utilização da resolução de problema, o educador possui papel fundamental. Marim (2010) alega que cabe ao professor buscar recursos que façam com que os alunos prestem atenção às aulas e vejam a Matemática como um meio de desenvolver diferentes estratégias na resolução de um problema. Da mesma maneira, Marim e Barbosa (2010, p. 232 e 233) expressam que os professores "devem procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, devolver a confiança, a organização, a concentração, a atenção, o raciocínio lógico-dedutivo e o senso cooperativo, desenvolvendo a socialização e aumentando as interações dos indivíduos".

Desse modo, os jogos constituem uma forma interessante de lidar com problemas, pela possibilidade de serem propostos de modo atrativo, favorecendo a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e na busca de soluções.

2.2 Vantagens e Desvantagens da utilização de Jogos

Apesar da importância apontada por diversos autores (MARIM E BARBOSA (2010), SILVA E KODAMA (2004), SMOLE ET AL. (2008)), Grando (2000) aborda que a utilização de jogos possui suas vantagens e desvantagens. Dentre as vantagens de se trabalhar com jogos educativos, a autora pontua que, com o jogo, existe a possibilidade de fixação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno. Assim, alguns conteúdos que o aluno já tenha aprendido nos anos anteriores poderão ser revistos e fixados. Além disso, também é possível que o aluno desenvolva estratégias de resolução de problemas no momento em que avalia qual estratégia deve seguir durante o jogo.

Outro ponto bastante relevante sobre a aplicação dessa tendência, de acordo com Grando (2000), é que ela favorece a socialização entre os alunos e os conscientizam do trabalho em equipe. Esse benefício é bem visível quando o jogo propõe a formação de grupos e seus integrantes devem pensar juntos, buscando o objetivo comum ao grupo, que é vencer o jogo.

Grando (2000), ainda, afirma que o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, do senso crítico, da participação, da competição "sadia", da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender, de modo que as atividades com jogos podem ser utilizadas para reforçar ou recuperar habilidades de que os alunos necessitem.

Além de colaborar com o desenvolvimento das habilidades dos alunos, o jogo também serve como instrumento de investigação, com o qual o professor poderá observar as competências e inabilidades que os alunos possuem para que possam ser trabalhadas futuramente. Nesse sentido, Grando (2000, p. 35) aborda que "as atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos".

Assim, a implantação de jogos no contexto de ensino-aprendizagem também pode resultar em algumas possíveis desvantagens. E, de acordo com Grando (2000), um dos pontos negativos apresentados pelo uso dos jogos pode aparece quando os alunos jogam e sentem-se motivados apenas pelo jogo em si, sem saberem porque jogam ou compreendem os conceitos matemáticos existentes por trás daquele jogo.

Nessa mesma perspectiva, Ide (1966, p. 95) aponta que “o jogo não pode ser visto, apenas, como divertimento ou brincadeira para desgastar energia, pois ele favorece o desenvolvimento físico, cognitivo, afetivo, social e moral”. Assim, as aulas em que são utilizados os jogos podem transformar-se em cassinos, isto é, jogar apenas por jogar, sem sentido algum para o aluno.

Grando (2000), ainda, destaca que pode acontecer a perda da "ludicidade" do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo. Nesse aspecto, o professor deve agir com cautela, não devendo coibir o aluno a jogar e deixar as regras bem claras para que fiquem bem entendidas pelos alunos e eles não fiquem desorientados.

Outro fator apontado por Grando (2000) é o tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula, que é maior, assim, ainda, pode acontecer que a duração destinada para se trabalhar com o jogo seja insuficiente para que o aluno consiga desenvolver suas habilidades.

Apesar das desvantagens apresentadas, elas não minimizam ou anulam as vantagens que o uso dos jogos em sala de aula possui. Desse modo, para que as vantagens fiquem mais evidentes é necessário ser realizado um planejamento prévio, no qual sejam criadas estratégias que diminuam os efeitos negativos, conforme evidenciado por Smole et al. (2008).

3 I METODOLOGIA

O presente estudo trata de uma pesquisa de campo que se caracteriza como quantitativa e qualitativa. Segundo Fonseca (2002, p. 20), “a pesquisa qualitativa se preocupa com aspectos da realidade que não podem ser quantificados centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais”, podendo ser estabelecida por meio de questionários escritos e/ou entrevistas. Já a pesquisa quantitativa, de acordo com Fonseca (2002), centra-se na objetividade e recorre à Linguagem Matemática para descrever as causas de um fenômeno e as relações entre as variáveis, gerando informações por meio de gráficos e/ou tabelas. Fonseca (2002), ainda, afirma que a utilização conjunta desses dois tipos de pesquisa permite recolher mais informações do que se conseguiria trabalhando com apenas uma.

A pesquisa foi desenvolvida numa escola pública, na cidade de Petrolina- PE, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio, contemplando 41 alunos. A escolha por uma turma de 2º ano ocorreu devido a necessidade de que os alunos já tivessem conhecimento de como solucionar equações do 1º e do 2º grau, conteúdos esses que normalmente são vistos até o 1º ano do Ensino Médio.

No primeiro momento, foi proposto um teste de sondagem, visando identificar o conhecimento que os alunos possuíam, até então, sobre o conteúdo de equações do 1º e do 2 º grau. No segundo momento, a turma foi dividida em dois grupos para a realização de uma mesma atividade, em dois dias diferentes, que foram a 1ª e a 2ª aplicações do jogo Vai e Vem das Equações. A turma foi dividida em dois grupos, visando otimizar a aplicação do jogo, pois, como seria utilizado apenas um tabuleiro em que os grupos competiriam entre si, foi pensado que um quantitativo de alunos tão grande para desenvolver essa atividade seria inviável.

Para isso, os alunos foram levados ao laboratório de Matemática da escola, onde aconteceu a aplicação do jogo e, na ocasião, foram explicados os objetivos e regras do jogo Vai e Vem das Equações. Ao término da realização desta atividade, os alunos responderam outro questionário, no qual puderam expor suas opiniões a respeito do jogo, destacando os pontos positivos e negativos, quais as dificuldades enfrentadas durante jogo, ou ainda, se o mesmo trouxe algum benefício para sua aprendizagem.

Decorridos 30 e 24 dias, da 1ª e da 2ª aplicação, respectivamente, novamente os alunos responderam a um teste de verificação com o grau de dificuldade similar ao teste de sondagem realizado no primeiro momento, no qual foi possível fazer uma comparação entre eles e fazer uma análise mais quantitativa dos resultados obtidos. Esse tempo, após a aplicação do jogo, foi dado, pois, caso o teste de verificação fosse aplicado logo em seguida, a aplicação do jogo, a pesquisa poderia tornar-se tendenciosa, visto que a memória de curto prazo dos alunos ainda estaria ativa e, assim, os resultados poderiam estar sendo conduzidos ao sucesso.

4 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

A princípio, na aplicação do teste de sondagem, foi possível identificar alunos que nem tentavam resolver as questões; outros, embora tivessem algumas dificuldades, mostravam-se determinados em tentar resolver, além dos que sabiam responder e solicitavam a conferência dos resultados encontrados por eles para averiguar se estavam corretos.

Um dos alunos se mostrou bastante hábil nessa atividade, pois conseguia chegar aos resultados, sem necessariamente, ter que montar a equação, uma vez que usava estratégias para conseguir isso. Por exemplo, na questão 2 do teste de sondagem, no qual se pedia para encontrar os números que satisfizessem a afirmação: a soma do quadrado de um número com o próprio número é 12, o aluno não montou a equação $x^2 + x = 12$. Por suposição, considerou o quadrado de um número que somado com esse mesmo número tivesse o resultado igual a 12. Dessa maneira, ia testando alguns números até encontrar algum que atendesse à condição imposta inicialmente, chegando, assim, ao resultado esperado. Corroborando, desse modo, com a colocação de Marim e Barbosa (2010) ao relatarem que, por meio da resolução de problemas, o aluno tem a possibilidade de pensar em alternativas de soluções.

No segundo momento, 20 alunos foram ao laboratório de Matemática da escola e, então, divididos em cinco grupos com 4 alunos cada. Assim, foram definidos os grupos 1, 2, 3, 4 e 5; cada grupo recebeu 3 cartas de inversão de sinal e, nessa ordem, cada um, na sua vez, sorteou uma carta, contendo uma situação-problema para ser resolvida em 3 minutos. Deste modo, se acertasse a resolução da ficha, o resultado com o seu sinal seria o número de casas andadas com o peão; se errasse, permaneceria no mesmo lugar. Para responderem as fichas-desafio, os alunos iam ao quadro branco, com o objetivo de tentar convencer o resto da turma de que o problema que ele desenvolveu, a partir de uma equação dada na carta-desafio era válido.

Na segunda aplicação, os outros 21 alunos realizaram a mesma atividade. Durante essa fase, surgiu a necessidade de fazer uma pequena alteração na regra 3 do jogo, pois, com a experiência da primeira aplicação, percebeu-se que, enquanto um grupo estava respondendo a uma questão, os alunos dos demais grupos ficavam inquietos. Então, para a segunda aplicação, foi dito que quem errasse a questão sorteada, o próximo grupo teria o direito de responder à mesma questão e, assim, ter a oportunidade de avançar no jogo. Essa nova proposta melhorou o comportamento dos alunos em relação à primeira aplicação, pois eles ficaram estimulados em tentar responder à questão que o outro grupo não conseguiu.

Os alunos dessa segunda aplicação demonstraram ter mais dificuldades em desenvolver essa atividade do que os alunos da primeira aplicação, pois somente um dos grupos conseguiu percorrer o tabuleiro. Por fim, todos os alunos responderam ao questionário referente à opinião deles em relação ao jogo aplicado.

Ao se analisarem os resultados da figura 1, perceberam-se os benefícios citados anteriormente, pois é nítida a aceitação, por parte dos alunos, dessa metodologia de ensino, corroborando com o que afirmam Silva e Kodama (2004) quando consideram as atividades que envolvem jogos como uma das mais produtivas situações acadêmicas, tendo em vista que foi expressivo o percentual de alunos que considerou o jogo Vai e Vem das Equações como facilitador na compreensão do conteúdo de equações do 1º e do 2º grau, além de ser considerado uma proposta que melhora a socialização com os colegas (ver figura 1), estando, assim, em conformidade com as vantagens citadas anteriormente por Grando (2000).

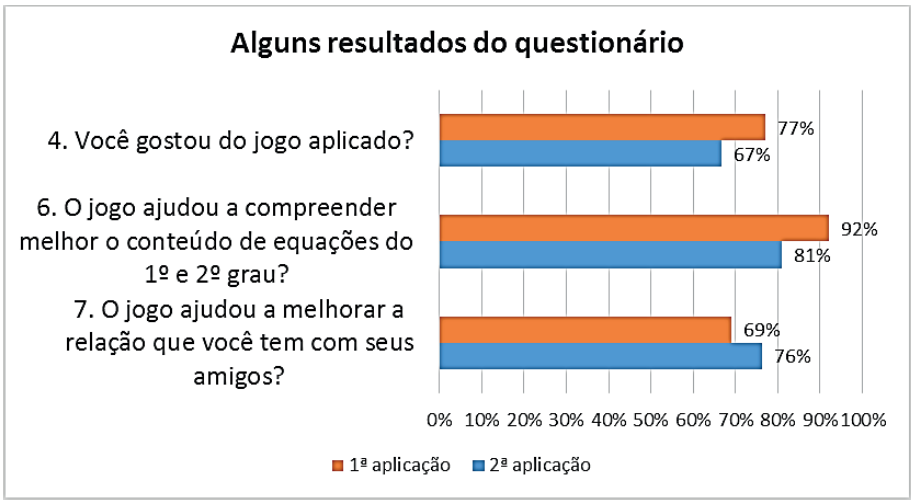
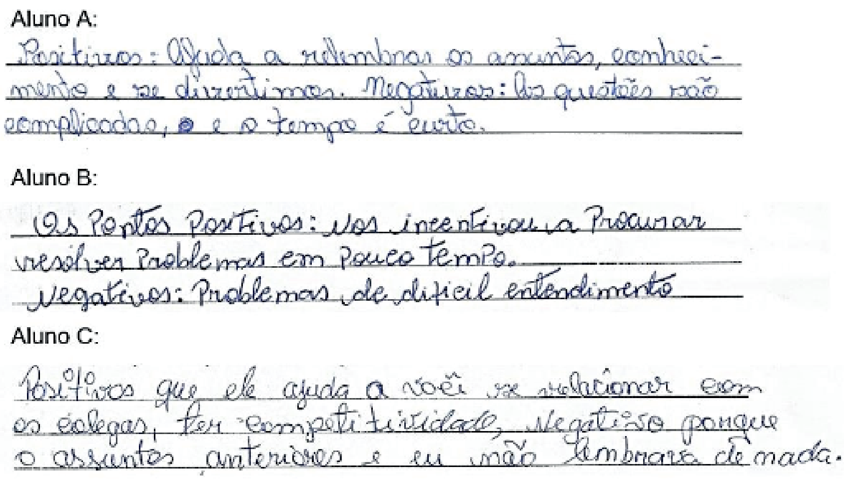


Figura 1- Respostas positivas para algumas perguntas do questionário.

Fonte: próprio autor

Quando os alunos foram questionados quais os pontos positivos e negativos que puderam perceber durante a aplicação do jogo, em linhas gerais, os alunos argumentaram que o jogo ajudou a relembrar os conteúdos vistos nos anos anteriores, que se divertiram e que aprenderam de forma interativa, reafirmando as vantagens colocadas por Grando (2000). Os alunos, ainda, perceberam o incentivo à resolução de problemas, conforme mostra a figura 2.

Já no lado negativo, os alunos destacaram principalmente que as questões eram difíceis e o fator tempo, condições já conhecidas de acordo com as desvantagens da utilização de jogos citadas anteriormente e embasadas por Grando (2000).


Aluno A:

Positivos: Ajuda a relembrar os assuntos, conhecimento e se divertimos. Negativos: As questões são complicadas, e o tempo é curto.

Aluno B:

Os Pontos Positivos: nos incentivou a Procurar resolver Problemas em Pouco tempo.
Negativos: Problemas de dificil entendimento

Aluno C:

Positivos que ele ajuda a você se relacionar com os colegas, ter competitividade, Negativo porque o assuntos anteriores e eu não lembrava de nada.

Figura 2- Relato de alguns alunos referente aos pontos positivos e negativos sobre o jogo aplicado.

Fonte: próprio autor

Analisando os resultados descritos na figura 3, referente a dificuldade que os alunos sentiram durante a aplicação do jogo e as respostas dadas pelos alunos no quesito 8, pôde-se perceber que a afirmação de que as questões do jogo foram consideradas difíceis, na verdade, pode ser consequência da dificuldade na interpretação das questões contextualizadas, visto que, habitualmente, a forma como a Matemática é ensinada na sala de aula é muito mecânica e exata. Assim, como foi dito por Marim e Barbosa (2010), normalmente, não há um contexto por trás dos problemas apresentados aos alunos e quando eles se deparam com situações em que é necessário pensar e interpretar as questões, acabam enfrentando dificuldades.

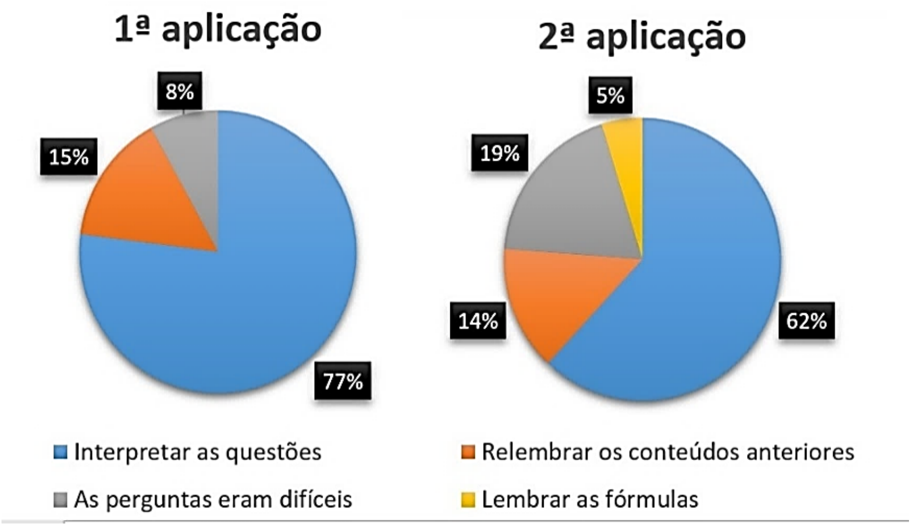


Figura 3- Dificuldade sentida durante a aplicação do jogo.

Fonte: próprio autor

No questionário, ao serem indagados sobre em que o jogo contribuiu para sua aprendizagem, os alunos afirmaram que o estudo favoreceu o seu conhecimento em diversos aspectos. Veja alguns relatos:

Aluno D: A interpretação de problemas e relembrar assuntos passados.

Aluno E: Relembrou assuntos dos anos anteriores e aprendi algumas coisas que não sabia mais.

Aluno F: Nas explicações e me incentivou a procurar resolver problemas;

Aluno G: Ajudou a aprender, a decifrar as questões e a saber resolvê-las sob um tempo determinado.

Mais uma vez, constataram-se os benefícios ao se trabalharem os jogos aliados à resolução de problemas, em que o próprio aluno consegue enxergar as vantagens trazidas por essa junção de tendências e que é algo tão bem recomendado pelos Parâmetros Curriculares de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), Moura (1996), Smole et al (2008) e Grando (2000).

Com esses relatos, também foi possível constatar a possibilidade de fixação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno, sendo, pois, possível ver que os conteúdos de equações do 1º e do 2º grau puderam ser revistos e fixados, atestando assim mais uma das vantagens assinaladas por Grando (2000).

No intuito de verificar as contribuições que o presente estudo trouxe para o conhecimento dos alunos, não somente usando os relatos deles, mas também por meio de testes, foi possível constatar que os alunos fixaram o conteúdo, algo já relatado como uma vantagem citada por Grando (2000). Comparando os dados das figuras 4 e 5, ou seja, entre o teste de sondagem e o de verificação, observou-se que houve melhora nos resultados. No primeiro teste, a maioria dos alunos deixou as questões em branco, ou, quando tentavam resolvê-las, acabavam se equivocando. Já no teste de verificação, os alunos mostraram mais empenho, o percentual de acertos aumentou e o de questões em branco caiu consideravelmente.

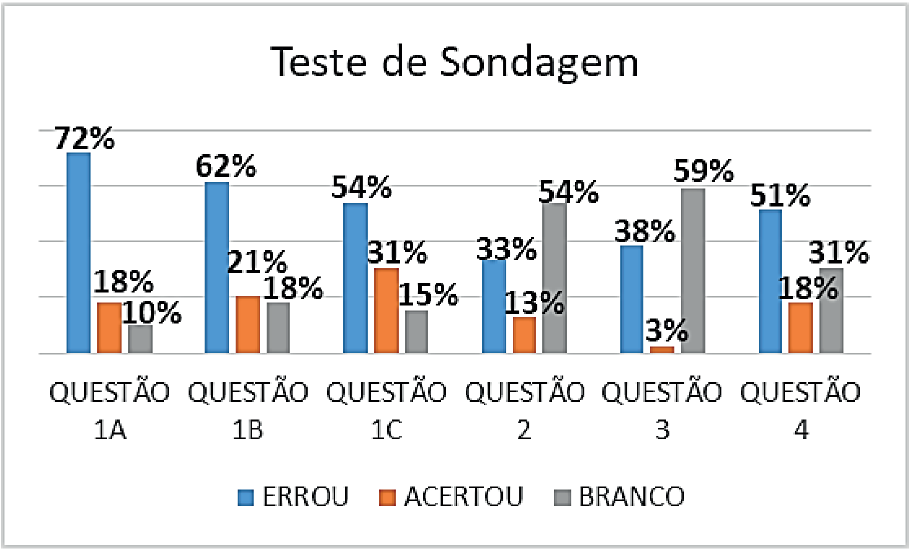


Figura 4- Resultado do teste de sondagem.

Fonte: próprio autor

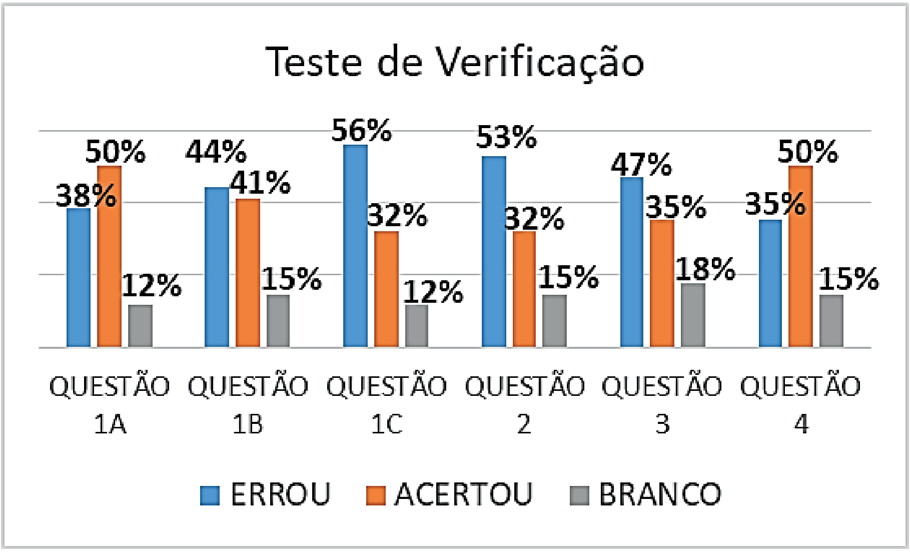


Figura 5- Resultado do teste de verificação.

Fonte: próprio autor

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma análise sobre a maneira como os jogos podem contribuir para aprendizagem de conceitos matemáticos de forma lúdica e criativa, além de fazer incentivo ao jogo, uma alternativa, que busca aumentar a motivação dos alunos em sala de aula.

De modo geral, os alunos mostraram-se bastante entusiasmados e participativos em todas as atividades propostas, revelaram ainda que possuem muita dificuldade em interpretar questões contextualizadas. Isso implica que a compreensão de texto precisa ser mais trabalhada em sala de aula. Diante do que foi vivenciado e analisado, ficou evidente que os objetivos inicialmente traçados foram alcançados, pois ficou nítido que o uso do jogo contribuiu para a aprendizagem deles. Também, foi possível perceber que os alunos notaram o incentivo à resolução de problemas, fazendo com que eles buscassem estratégias para solucionar as questões existentes no jogo.

Logo, o jogo Vai e Vem das Equações forneceu aos alunos uma forma estimulante e divertida de aprender brincando, fez com que eles interagissem e se socializassem uns com os outros, permitindo-lhes compreender conceitos que muitos já haviam esquecido e, assim, tornou o jogo um elemento enriquecedor para o conhecimento dos alunos.

Dada a importância do tema, faz-se necessária a busca constante por parte dos docentes por metodologias de ensino que visem aumentar o estímulo dos alunos em quererem aprender Matemática, que é uma disciplina tão temida por muitos alunos. Assim, espera-se que essas práticas sejam frequentemente utilizadas para que a aprendizagem se torne realmente significativa.

REFERÊNCIAS

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

FLEMMING, D. M.; LUZ, E. F.; MELLO, A. C. C. **Tendências em Educação Matemática:** Livro didático. 2. ed. - Palhoça: Unisul Virtual, 2005.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica.** Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** Campinas, SP: Unicamp, 2000.

IDE, S. M. O jogo e o fracasso escolar. In: KISHIMOTO, T. M. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 9. ed. Cortez, 1996.

MARIM, V. Expectáveis Mudanças na Educação: compromisso com uma educação de qualidade. In: OLIVEIRA, C. C.; MARIM, V. (Org.). **Educação matemática:** contextos e práticas docentes. Campinas, SP: Alínea, 2010.

MARIM, V.; BARBOSA, A. C. I. Jogos Matemáticos: Uma proposta para o ensino das operações elementares. In: OLIVEIRA, C. C.; MARIM, V. (Org.). **Educação matemática**: contextos e práticas docentes. Campinas, SP: Alínea, 2010.

MOURA, M. O. A séria busca no jogo: do lúdico na Matemática. In: KISHIMOTO, T. M. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.** 9. ed. Cortez, 1996.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio.** Recife: SEE, 2012.

SILVA, A. F.; KODAMA, H. M. Y. Jogos no ensino da matemática. **II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática**, p. 1-19, 2004.

SMOLE, K. S. et al. **Jogos de Matemática:** de 1º e 3º ano. Porto Alegre: Artmed, 2008. (Cadernos do Mathema – Ensino Médio)

CAPÍTULO 7

TRIGONOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: UMA ANÁLISE DOS PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O SEU ENSINO NO IFPB CAMPUS CAJAZEIRAS-PB

Francisco Aureliano Vidal
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB
Cajazeiras – Paraíba

Carlos Lisboa Duarte
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB
Cajazeiras – Paraíba

Adriana Mary de Carvalho Azevedo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB
Cajazeiras – Paraíba

Kíssia Carvalho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB
Cajazeiras – Paraíba

Geraldo Herbetet de Lacerda
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB
Cajazeiras – Paraíba

Uelison Menezes da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB
Cajazeiras – Paraíba

RESUMO: O presente trabalho foi desenvolvido no intuito de analisar os principais problemas e desafios enfrentados pelos alunos do Ensino Médio do IFPB Campus Cajazeiras em relação ao conteúdo de trigonometria. Trata-se de uma pesquisa do tipo levantamento de dados, utilizando-se da aplicação de um questionário junto aos alunos visando analisar os principais fatores que afetam a aprendizagem neste nível de ensino no que se refere a trigonometria. De modo geral, o seu principal objetivo foi identificar os principais motivos que levam os estudantes do ensino médio a terem tantas dificuldades neste conteúdo, assim, um estudo mais aprofundado deste problema, através de uma pesquisa, possibilitou uma melhor compreensão dos principais fatores geradores dessa problemática. Os resultados mostraram que o fator responsável pelo sucesso ou fracasso escolar não se concentra de modo único nas mãos dos professores, visto que esta problemática envolve uma série de variáveis no que diz respeito à educação, como se pode observar no transcorrer da pesquisa, tais como: desvalorização do magistério, formação acadêmica dos futuros professores, falta de acompanhamento da família na educação dos filhos, redução de investimentos na educação e a falta de uma educação de qualidade nas séries iniciais que é a base para a construção do conhecimento. Portanto, esta pesquisa contribuiu de maneira significativa para a busca de uma solução plausível do problema em questão, como também abriu precedentes na comunidade acadêmica envolvida para que novas pesquisas sejam realizadas com o intuito

de melhorar a qualidade da educação que oferecemos aos nossos estudantes.
PALAVRAS-CHAVE: Trigonometria, Matemática, Aprendizagem, Ensino Médio.

ABSTRACT: The present work was developed in order to analyze the main problems and challenges faced by high school students of IFPB Campus Cajazeiras in relation to trigonometry content. It is a research of the type of data collection, since it was used of the application of a questionnaire with the students to analyze the main factors that affect the learning in this modality of education with regard to trigonometry. In general, its main objective was to identify the main reasons that lead high school students to have so many difficulties in this content, so a more in-depth study of this problem, through a research, enabled a better understanding of the main factors that generate this problematic. The results showed that the factor responsible for school success or failure does not concentrate in a unique way in the hands of teachers, since this problem involves a series of variables regarding education, as can be observed in the course of the research, such as : devaluation of the teaching profession, academic formation of future teachers, lack of family support in the education of the children, reduction of investments in education and lack of quality education in the initial grades that is the basis for the construction of knowledge. Therefore, this research has contributed significantly to the search for a plausible solution to the problem in question, as it has opened precedents in the academic community involved so that further research is undertaken to improve the quality of education we offer our students.
KEYWORDS: Trigonometry, Mathematics, Learning, High School.

1 I INTRODUÇÃO

De todos os conteúdos matemáticos ministrados no decorrer do ensino médio poucos geram tantos questionamentos, por parte dos alunos e até mesmo dos professores, acerca do seu grau de complexidade, como a trigonometria. Mas o que motiva esse problema? Será que é a metodologia do professor? Será o livro didático? Em meio a tantas perguntas e incertezas o presente trabalho tem como foco analisar as principais problemáticas que envolvem a prática do ensino deste conteúdo. Tendo como objetivo principal investigar quais são os principais motivos que levam os estudantes do ensino médio a terem tanta dificuldade no conteúdo de trigonometria.

Para tanto foi realizada uma pesquisa de campo, desenvolvida no IFPB Campus Cajazeiras – PB por meio da aplicação de um questionário com alunos do 3º ano do ensino médio, que teve como objetivo não apenas coletar informações acerca do problema em questão, mas também buscar compreender junto aos principais envolvidos neste contexto, qual é a visão que os mesmos estão tendo do sistema atual de ensino.

Todavia, no ensino da matemática algo que se pode observar é que conceitos matemáticos estão, na maioria das vezes, condicionados a conhecimentos anteriores que formam toda uma base, necessária para a assimilação de novos saberes. Dessa forma, o ensino da trigonometria exige que os alunos possuam domínio de certos conceitos matemáticos, para que os mesmos possam vir a compreender aquilo está sendo transmitido pelo professor no decorrer das aulas.

A matemática traz consigo o grande desafio de fazer com que o homem possa compreender que esta área do conhecimento está presente em tudo o que existe e até mesmo na composição do próprio ser humano, como, por exemplo, em situações envolvendo proporcionalidade, formas geométricas, tempo, distância entre outros. Sendo assim, tudo se relaciona de modo que uma situação sempre depende de outra para existir e na matemática não é diferente, para a assimilação de um novo conhecimento, vários são os fatores que influenciam a sua efetiva internalização pelos alunos.

Em suma, esta investigação possibilitou um parecer mais concreto acerca da problemática que aflige os estudantes no que diz respeito ao conteúdo de trigonometria, tido por muitos como o grande gargalo da matemática do ensino médio. Desta forma, pesquisar um tema tão importante como esse não apenas abrirá caminho para se buscar uma solução para a situação em questão, mas também incentivará a pesquisa como fonte de ruptura de diversos paradigmas que circundam a nossa educação.

2 I O PROBLEMA

No ensino da trigonometria é notória a dificuldade que os alunos possuem na assimilação e compreensão deste assunto. Por isso, concordamos com a observação que Rosenbaum (2012, p. 5) faz por meio de sua pesquisa acerca das principais dificuldades que os alunos possuem no que diz respeito a trigonometria, pois se trata de algo pertinente ao que está sendo debatido, como ela menciona “Entre as dificuldades cometidas pelos alunos destacamos: a simplificação de notação, o uso de instrumentos, o conhecimento de funções e a construção dos gráficos das funções trigonométricas”.

A problemática que envolve o ensino da trigonometria, é fruto de um conjunto de problemas que afligem a nossa educação, tais como: a qualidade do ensino de matemática oferecido nas séries que antecedem o ensino médio, a ausência de políticas públicas voltadas para melhoria da educação básica nas séries iniciais, a falta de motivação dos estudantes no que concerne o ensino dessa ciência, entre tantos outros.

Ante o exposto, para que os alunos consigam compreender os conteúdos sobre trigonometria é preciso que os mesmos possuam uma base matemática sólida, caso contrário além dos estudantes terem que aprender um conhecimento novo que demanda certo grau de atenção, eles terão que desviar seu foco do que está sendo repassado para ter que aprender algo que já deveriam ter assimilado nas séries anteriores.

Dessa forma, a ação docente em sala tem papel fundamental na construção do conhecimento dos nossos estudantes. Dirigindo-nos para o âmbito do ensino da matemática propriamente dito, o desenvolvimento de práticas educacionais que envolvem uma contextualização mais ampla do surgimento dessa ciência, configura-se como um viés promissor para tornar as aulas de matemática um pouco mais atraentes, evidenciando a importância desse conhecimento para o desenvolvimento da humanidade.

Com isso, ressaltamos o papel importantíssimo que há no uso da interdisciplinaridade entre áreas, como ferramenta auxiliadora para o ensino da matemática, uma vez que esse ramo do saber é bastante permeado por fascinantes histórias e acontecimentos que envolvem o seu desenvolvimento. Desta forma, trazer para as aulas essas histórias que valorizam e descrevem a matemática, podem agregar um maior significado aquilo que está sendo ensinado pelo professor em sala de aula. Conforme Lorenzato destaca:

> Outro modo de melhorar as aulas de matemática tornando-as mais compreensíveis aos alunos é utilizar a própria história da matemática; esta mostra que a matemática surgiu aos poucos, com aproximações, ensaios e erros, não de forma adivinhatória, nem completa ou inteira. Quase todo o desenvolvimento do pensamento matemático se deu por necessidades do homem, diante do contexto da época. Tal desenvolvimento ocorreu em diversas culturas e, portanto, através de diferentes pontos de vista (LORENZATO, 2006, p. 107).

Tais práticas de ensino como essas evidenciadas, perpassam diretamente a ação dirigida por nossos educadores em sala, ressaltando, assim, o papel de extrema importância da figura profissional do professor como intermediador do conhecimento. Logo, a partir do momento em que o aluno passa a observar o que está sendo ensinado pelo professor de forma prática, por meio de situações que vão além da escrita matemática, a aprendizagem acaba se tornando revestida de significado, fazendo com que o estudante consiga compreender melhor aquilo que lhe está sendo ensinado.

Desta forma, D’Ambrósio (2009, p. 21) corrobora com o nosso pensar quando diz que “o conhecimento é o gerador do saber, que vai, por sua vez, ser decisivo para a ação, e, por conseguinte é no comportamento, na prática, no fazer que se avalia, redefine e reconstrói o conhecimento”.

Diante do exposto, destacamos que o ensino de trigonometria se encontra rodeado de inúmeros problemas que envolvem o meio escolar, que vão desde as políticas públicas voltadas para à educação, até o papel do professor em sala de aula. Assim, tais situações acabam refletindo diretamente na aprendizagem dos estudantes, uma vez que um ambiente escolar permeado por fatores desfavoráveis para a prática do ensino, torna-se inapto para a construção do conhecimento. Foi neste contexto que encontramos elementos para desenvolver nossa pesquisa procurando contribuir para o ensino e aprendizagem deste tópico tão importante da matemática.

3 I REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

Do ponto de vista metodológico a pesquisa foi do tipo qualitativa e quantitativa apresentando um estudo de caso considerando um levantamento de dados, uma vez que a principal ferramenta de investigação da pesquisa foi o questionário aplicado aos alunos do 3º do ensino médio do IFPB Campus Cajazeiras-PB, com alunos já conhecem este conteúdo, a aplicação do mesmo se deu por meio de uma amostra na qual participaram 50 alunos, escolhidos de forma aleatória de modo a preservar a integridade da pesquisa. No ato de sua realização os alunos foram avisados que as informações por eles prestadas seriam de total sigilo, e que em hipótese alguma seria revelado informações que comprometessem tanto a sua integridade física quanto pessoal, além disso, os mesmos assinaram um termo de livre consentimento no qual eram esclarecidas as informações pertinentes à pesquisa, além das disposições acerca de seus direitos e resguardo de suas imagens.

Para a construção e elaboração da pesquisa, realizamos consultas a livros e artigos publicados que tratam do assunto em questão, no intuito de proporcionar o embasamento teórico necessário para o seu desenvolvimento.

No que concerne às fontes utilizadas vale ressaltar autores como: D'Ambrósio (2009), Gadotti (2004), Lorenzato (2006), Mendes (2008), Rosenbaum (2012) dentre outros, os quais serviram de aporte teórico para a realização da nossa pesquisa. Os dados obtidos foram analisados pelos pesquisadores, buscando extrair ao máximo as informações pertinentes a problemática investigada. No que diz respeito ao tempo de duração da pesquisa, a mesma ocorreu durante o período que compreende os meses de maio a dezembro de 2016.

4 I RESULTADOS PARCIAIS

No tocante aos resultados obtidos por meio da análise dos questionários aplicados, chegamos a alguns pareceres a respeito da problemática em questão, os mesmos estão descritos a seguir de maneira sistemática com intuito de dar maior clareza às informações coletadas.

As três primeiras questões eram de caráter optativo, visto que se destinavam apenas a identificação dos alunos quanto ao nome, idade e sexo. Na quarta questão os alunos foram indagados da seguinte maneira: "Na sua opinião, como se encontra hoje o ensino da trigonometria?" Nesta pergunta 24% dos alunos responderam ruim, 52% regular, 22% bom e 2% ótimo, nota-se dessa maneira que existe uma certa insatisfação por parte dos estudantes quanto ao ensino de trigonometria oferecido.

A pergunta seguinte trazia como questionamento: "Você considera importante o ensino da trigonometria na sua vida?” A análise desta questão mostrou-nos que muitos alunos conhecem o papel e os benefícios do ensino desse conteúdo, pois 64% dos entrevistados disseram que sim, 4% que não, 10% não sei e 22% talvez, evidenciando, assim, que mesmo em meio a problemas no ensino da trigonometria, os estudantes reconhecem a importância da mesma no seu contexto de vida.

Na próxima questão os estudantes foram perguntados: “Você acha que o uso do livro de didático influencia no ensino da trigonometria?” Nesse momento 62% dos alunos responderam que sim, 22% que não, 2% não sei e 14% talvez, ressaltando a importância que os professores devem dar na escolha do livro didático que utilizarão, já que o mesmo na maioria das escolas é tido como a principal fonte de instrução que os educandos possuem durante sua formação acadêmica.

O sétimo questionamento traz um ponto bastante discutido por parte dos estudantes que é: “Você acha que a metodologia utilizada pelo professor em sala de aula influencia no ensino da trigonometria?” Os dados obtidos por meio desta pergunta chamam bastante à atenção, visto que 78% disseram que sim, 10% que não, 4% não sei e 8% talvez nos remetendo a uma ínfima quantidade de variáveis que influenciam nesse problema, tais como a formação acadêmica de nossos professores pelas instituições de ensino superior, recursos disponíveis pela escola, falta de motivação para prática do ensino, contexto sociocultural dos estudantes dentre tantos e tantos outros fatores que influenciam para o surgimento desse cenário. Assim, concordamos com Lorenzato quando afirma que:

> A experiência de magistério é fundamental para a orientação didática do professor, porque ela aguça a percepção docente fornecendo indicações de ordem didática, tais como: dosagem e nível de conteúdo a ser ministrado, ritmo de aula, pontos de aprendizagem mais difícil, exemplos mais eficientes à aprendizagem, livros didáticos mais adequados à realidade na qual leciona, entre outros (LORENZATO, 2006, p. 9-10).

A oitava questão aborda a seguinte temática: “Em sua opinião, o uso de computador por meio de softwares matemáticos nas aulas sobre trigonometria pode melhorar a aprendizagem desse conteúdo?” Analisando o gráfico 1 a seguir, podemos observar como se encontra o ponto de vista dos alunos no que diz respeito ao uso do computador na prática educacional:

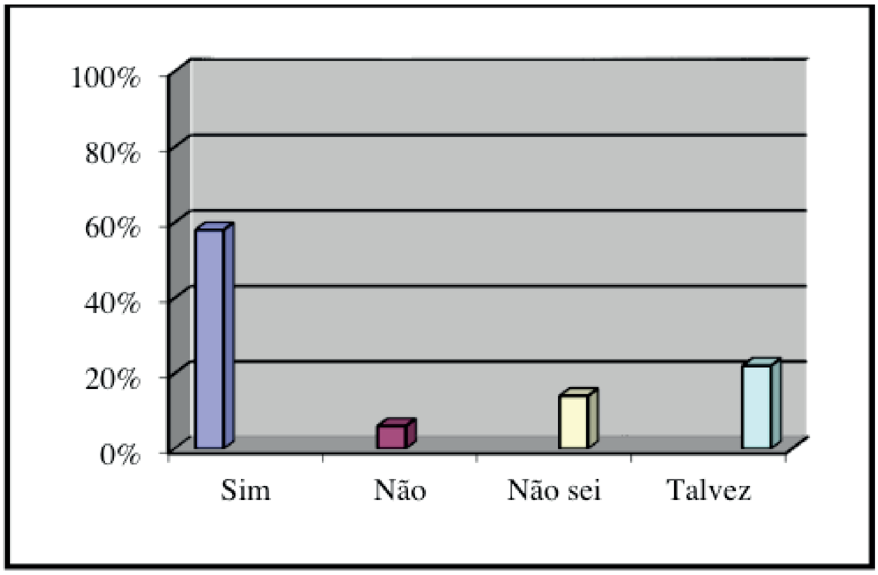


Gráfico 1: Utilização do computador no ensino da trigonometria

Fonte: Elaborado pelos autores

No gráfico acima, notamos que mais da metade dos entrevistados, mais precisamente 58%, acreditam que o uso de softwares matemáticos pode sim melhorar a aprendizagem dos conteúdos sobre trigonometria no decorrer das aulas. Dessa forma, a inserção de novos instrumentos educacionais como o uso do computador por meio de jogos e programas matemáticos, não apenas auxiliam o professor em sala, mas também tem um papel muito importante na aprendizagem dos alunos, pois os mesmos podem unir algo que é bastante frequente em seu cotidiano que são os meios tecnológicos ao ensino.

Em meio aos avanços da tecnologia frutos do processo de globalização, o uso desses novos materiais didáticos na prática educacional, apresentam-se a cada dia que passa como uma saída a ser considerada pelos educadores, para se buscar tornar o ensino mais atrativo perante os estudantes. Sendo assim, a matemática devido a tantas fórmulas e conceitos a serem aprendidos, acaba tornando-se um conteúdo muito cansativo e enfadonho, quando o professor traz algo novo para sala de aula que esteja inserido no contexto atual dos alunos, as aulas tornam-se mais proveitosas, fazendo com que os estudantes participem mais ativamente do processo de ensino.

Voltando ao nosso questionário, na nona pergunta enfocamos novamente a imagem do professor quanto ao seu papel no ensino da trigonometria com a seguinte indagação: “Você considera que os professores de matemática se encontram capacitados para ministrar o conteúdo de trigonometria de modo significativo?” Esse ponto em especial mostra que boa parte dos estudantes ainda têm certo receio quanto à capacitação dos professores de matemática no tocante ao conteúdo de trigonometria, pois 40% disseram que sim, 14% que não, 8% não sei e 38% optaram pela alternativa talvez evidenciando, ainda mais a responsabilidade que as instituições de ensino superior têm na formação dos futuros profissionais da educação.

Desta forma, podemos ressaltar a importância que estas instituições têm quanto à capacitação docente, pois a formação oferecida pelas mesmas refletirá de forma incisiva na prática que os futuros educadores irão desenvolver em sala, tanto do ponto de vista teórico, como no trato das ações pedagógicas que são imprescindíveis na prática escolar.

Na décima questão obtivemos o resultado mais expressivo de nossa pesquisa quando indagamos os entrevistados: “Em sua opinião, o uso de jogos matemáticos ou outros materiais didáticos podem melhorar o ensino da trigonometria?” Bom para que possamos observar melhor a discrepância dos resultados observemos o gráfico 2:

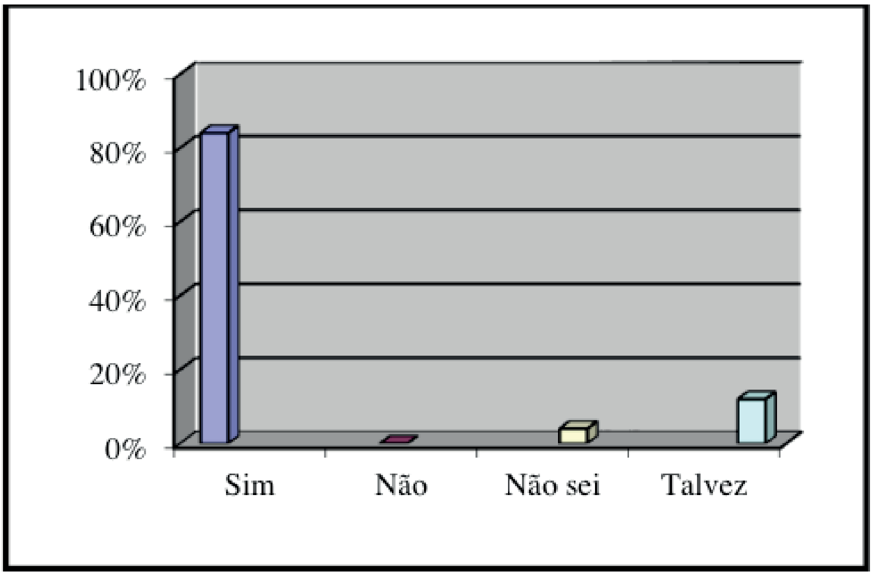


Gráfico 2: O uso de jogos nas aulas de matemática

Fonte: Elaborado pelos autores

Como vemos a grande maioria, isto é 84%dos estudantes consideram significativo o uso de jogos e outros materiais didáticos na prática do ensino, que devido à falta de informação e preparo de muitos dos nossos professores essa ferramenta pedagógica ainda é pouco utilizada nas aulas de matemática.

O uso da ludicidade na prática docente não é algo que vem para garantir a aprendizagem dos alunos muito menos substituir por completo os métodos de ensino tradicionais, na verdade ela tem como papel complementar o ensino e torná-lo mais interativo junto aos educandos, pois a mesma proporciona nas aulas um momento de interação entre aluno e professor. Dessa forma, acaba-se surgindo inúmeros debates e questionamentos que são extremamente pertinentes à construção do conhecimento, pois configura-se como um momento de vivência dentro da sala de aula, estimulando nos estudantes não apenas o saber, mas também o desenvolvimento de muitas outras potencialidades humanas, tais como: trabalho em equipe, raciocínio lógico, instiga a criatividade entre outros benefícios.

Quando falamos dos benefícios da utilização de jogos matemáticos nas aulas, vale destacar que:

> O uso de materiais concretos no ensino da Matemática é uma ampla metodologia de ensino que contribui para a realização de intervenções do professor na sala de aula durante o semestre todo. Os materiais são usados em atividades que o próprio aluno, geralmente trabalhando em grupos pequenos, desenvolve na sala de aula. Estas atividades têm uma estrutura matemática a ser redescoberta pelo aluno que, assim, se torna um agente ativo na construção do seu próprio conhecimento matemático (MENDES, 2008, p. 11).

O décimo primeiro ponto avaliado foi: "Você considera que o uso do laboratório de matemática pode melhorar o ensino de trigonometria?" A questão analisada teve um resultado bem expressivo por parte dos entrevistados, pois 74% disseram que sim o uso de ambientes diferenciados como é caso do laboratório de matemática tem um grande potencial didático na aprendizagem dos mesmos no ensino de trigonometria, 4% disseram que não, 4% não sei e 18% talvez ressaltando a importância da complementação das práticas pedagógicas com novos métodos que priorizem a construção do conhecimento de forma concreta, demonstrando, assim, por meio de situações práticas aquilo que está sendo ensinado.

Daí a importância de que toda escola deve possuir um ambiente de ensino alternativo como, por exemplo, o Laboratório de Ensino de Matemática mais conhecido como LEM. Um local como esse pode auxiliar muito o professor em suas aulas, pois como em toda profissão o mesmo necessita de ferramentas adequadas para que possa prestar um serviço de qualidade aos seus principais interessados que são os alunos. Assim sendo, os laboratórios de Matemática não podem e nem devem ser tratados como apenas um lugar da escola destinado a guardar um amontoado de caixas como é a realidade da maioria das escolas, mas sim um ambiente propício à construção e aprimoramento de novos saberes (LORENZATO, 2006).

Na décima segunda questão foi perguntado aos estudantes o seguinte: "Você acredita que existam outros motivos que prejudicam a compreensão dos conteúdos sobre trigonometria além dos que foram tratados neste questionário?" A ideia aqui era verificar se os alunos podiam identificar outros fatores que poderiam prejudicar a aprendizagem da trigonometria além dos que foram tratados por nós, o gráfico 3 nos mostra os resultados deste quesito e nos faz refletir mais ainda sobre os diversos fatores que possam prejudicar o ensino e a aprendizagem deste conteúdo tão importante na Matemática:

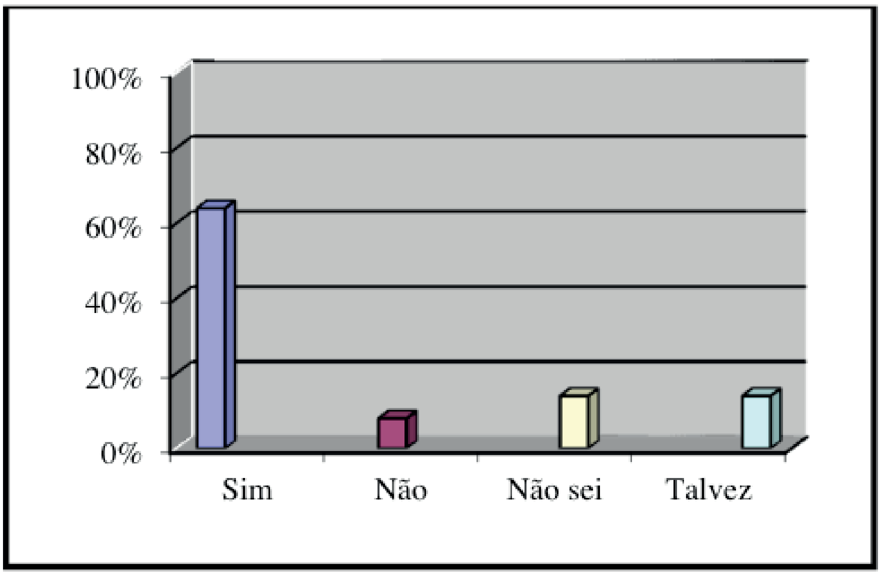


Gráfico 3: Ponto de vista dos entrevistados acerca dos problemas que afetam a trigonometria

Fonte: Elaborado pelos autores

Analisando o gráfico acima, notamos que uma grande parcela, mais precisamente 64%dos estudantes, afirma existir outros fatores no que tange aos problemas sobre o ensino da trigonometria, nos mostrando que a problemática em questão ainda possui outros pontos a serem investigados para que, assim, possamos buscar melhorar cada vez mais a qualidade do ensino oferecido aos nossos alunos.

Contudo, vale salientar pelo o que foi visto nos dados acima a importância que se deve dar ao diálogo entre educador e educando, pois é nesse momento que ambas as partes poderão discutir e apontar aquilo que pode e deve ser melhorado nas aulas, com o intuito de proporcionar melhorias ao ensino de modo coletivo, ouvindo-se os estudantes.

O diálogo entre professor e aluno enfatiza muito bem a posição que o educador deve exercer em sala de aula, não como o detentor do saber, mas sim como um orientador do conhecimento, desmistificando o posicionamento autoritário que era pregado nos modelos habituais.

> O professor autoritário não humaniza, mas desumaniza; jamais chama os educandos a pensar, a fazer uma nova leitura de sua realidade. Ao contrário, ele a apresenta como algo já feito, já acabado, ao qual basta simplesmente se adaptar e não transformar. Em lugar de propor aos alunos que se apropriem do conhecimento, ele lhes propõe apenas a recepção passiva de um conhecimento empacotado (GADOTTI, 2004, p. 74).

O décimo terceiro quesito analisado no questionário foi: “Você acha que os conteúdos aprendidos em trigonometria podem ser utilizados no seu dia a dia?” Os resultados apontam que os mesmos ainda se encontram inseguros quanto a utilidade desse conteúdo no seu cotidiano, visto que 40% responderam que sim, 12% não, 10% não sei e 38% talvez enaltecendo a insegurança e o notório desconhecimento tanto da importância como da necessidade do uso dos conceitos trigonométricos no nosso cotidiano.

O último ponto investigado na pesquisa foi o seguinte: “Você acha que os conteúdos aprendidos em trigonometria podem ser utilizados em outras áreas do conhecimento?” Este quesito priorizou a investigação da interdisciplinaridade entre os conceitos trigonométricos e outras áreas do saber. Para isso vejamos os resultados no gráfico 4:

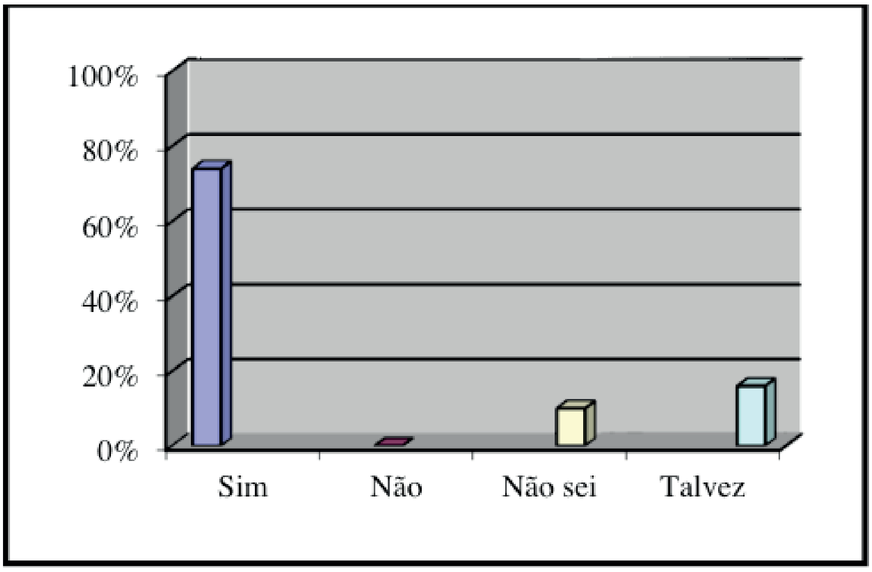


Gráfico 4: Investigação sobre Interdisciplinaridade

Fonte: Elaborado pelos autores

Observando os dados, frutos da investigação desse ponto, notamos que 74% dos alunos consideram que os conteúdos vistos em trigonometria podem sim ser aplicados nas mais diversas áreas do conhecimento. Assim sendo, ressaltamos o papel decisivo que a interdisciplinaridade possui na construção do saber, visto que a interligação de conteúdos entre áreas diferentes estimula nos estudantes a percepção da correlação de conhecimentos para solucionar os mais variados problemas.

O ponto de partida para o real entendimento do conceito de interdisciplinaridade perpassa o entendimento da inter-relação do saber entre áreas do conhecimento. Para isso, faz-se necessário um maior diálogo entre os responsáveis pelo ensino de modo geral, com o objetivo de cada vez mais estimular nos seus alunos a importância e os benefícios que se existe na correlação de conhecimentos, para a resolução de situações problemas, enfatizando, assim, o compartilhamento de saberes ao invés de se permanecer presos a práticas pedagógicas ultrapassadas e preconceituosas (FAZENDA, 2008).

Ante o exposto, foi possível observar de forma bem clara alguns dos principais pontos que ainda causam prejuízos no trato dos conteúdos matemáticos sobre trigonometria. Contudo, foi possível constatar que a responsabilidade pelo sucesso ou fracasso escolar não está apenas centralizado nas mãos dos professores como muitos imaginam, mas sim fruto de uma série de problemas que envolvem a nossa sociedade no que diz respeito à educação, tais como: desvalorização do magistério, formação acadêmica dos futuros professores, falta de acompanhamento da família na educação dos filhos, redução de investimentos na educação e a falta de uma educação de qualidade nas séries iniciais que é à base para a construção do conhecimento entre tantos outros.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O tema abordado e discutido nessa pesquisa, as problemáticas que afligem o ensino da trigonometria no ensino médio do IFPB campus Cajazeiras-PB, nos revelou muito mais do que informações pertinentes ao problema em questão, mas também realçou o papel de extrema importância que a pesquisa desempenha como ferramenta auxiliadora na busca por soluções para problemas antes tidos como sem solução.

No que trata dos pareceres alcançados ao término dessa investigação, ressaltamos aqui os pontos que mais nos chamaram atenção na busca por respostas para essa problemática: Primeiro, os alunos em sua grande maioria, apontaram a metodologia aplicada pelos professores em sala de aula como sendo o fator chave, que desencadeia o alto grau de dificuldade que os mesmos têm na assimilação e aprendizagem dos conteúdos sobre trigonometria. Vale salientar também, a desconfiança que há por parte dos estudantes quanto à capacitação dos educadores para ministrarem esse conteúdo. Segundo, a falta da utilização de novos meios e ferramentas pedagógicas nas aulas, foi apontado como um dos motivos pelos quais o ensino da trigonometria acaba-se tornando tão difícil. Dessa forma, os entrevistados ressaltaram a importância e necessidade do uso de jogos matemáticos e do Laboratório de Ensino de Matemática, como sendo um viés promissor para melhorar o desempenho dos estudantes no que tange a aprendizagem da matemática.

Por último, observamos que a prática de ensino empregada pelos nossos professores atualmente ainda deixa muito a desejar no que se refere à aprendizagem com significado, uma vez que foi constatado como os alunos desconhecem os benefícios e a importância que há no uso da trigonometria tanto na história da humanidade quanto no seu cotidiano.

Ante o exposto, podemos observar que a figura do professor, encontra-se fortemente evidenciada como o ponto central em torno das discussões, que envolvem as dificuldades acerca do ensino da trigonometria. Dessa forma, é necessário que haja uma reflexão mais a fundo, por parte dos envolvidos na educação, sobre todas essas questões aqui levantadas, no que diz respeito as dificuldades que circundam a prática do ensino da trigonometria na educação básica. Uma vez que, mediante as informações apresentadas nesta pesquisa, foi possível constatar que existem uma infinidade fatores que podem influenciar de modo direto a prática educacional desenvolvida pelos professores de matemática, no trato dos conteúdos sobre trigonometria.

REFERÊNCIAS

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática:** Da Teoria à Prática. 17ª Edição. Campinas-SP: Papirus Editora, 2009.

FAZENDA, I. (Org.). **Didática e Interdisciplinaridade**. 13ª Edição. Campinas-SP: Papirus Editora, 2008.

GADOTTI, M. **Convite à leitura de Paulo Freire.** Pensamento e Ação no Magistério. 2ª Edição. São Paulo-SP: Editora Scipione, 2004.

LORENZATO, S. **Para Aprender Matemática.** Coleção Formação de Professores. Campinas-SP: Editora Autores Associados, 2006.

MENDES, I. A. **Tendências Metodológicas no Ensino de Matemática.** Volume 41. Belém-PA: Editora da UFPA, 2008.

ROSENBAUM, L. S. Construtivismo no ensino de funções Trigonométricas: limites e possibilidades. In: **V SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 28 a 31 de outubro de 2012, Petrópolis-RJ. p. 1-14.

CAPÍTULO 8

OS JOGOS MATEMÁTICOS PARA MINIMIZAR A MATEMATOFOBIA DOS ALUNOS: UM ENCONTRO NO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Hellen Emanuele Vasconcelos Albino
Universidade Estadual da Paraíba

Yalorisa Andrade Santos
Universidade Estadual Da Paraíba

Kátia Maria de Medeiros
Universidade Estadual da Paraíba

* Publicado nos Anais do IX EPBEM- Encontro Paraibano de Educação Matemática

RESUMO: Esta Oficina integrou um Projeto de Extensão da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), desenvolvido no âmbito do PROBEX-UEPB 2015-2016, que ocorreu no Laboratório de Matemática, do Campus de Campina Grande, com alunos da Escola de Referência em Ensino Médio- Professora Benedita de Morais Guerra EREM, vindos de Pernambuco para uma visita aos Laboratórios de Matemática, Física e Química. A Oficina intitulada *Contando Pontos* foi ministrada com o objetivo de apresentar aos alunos a importância de utilizar os jogos na sala de aula Matemática e explorar o Jogo *Contando Pontos*, pois estes desenvolvem e aprimoram o raciocínio lógico e diversas habilidades que precisam ser desenvolvidas nos alunos. Após a apresentação prévia do Laboratório de Matemática, os ministrantes apresentaram o jogo *Contando Pontos*, retirado do livro Cadernos do Mathema (de 1° ao 3° Ano Ensino Médio), no qual requer que os alunos realizem as divisões de números decimais, fracionários por potências de dez, (dez, cem ou mil) e, por fim, a análise de intervalos a partir dos resultados das divisões realizadas. Após analisarmos os intervalos e calcular os pontos de cada aluno das duplas, anunciamos o vencedor de cada dupla, e para finalizarmos os alunos responderam um Questionário que havia seis questões acerca do jogo, no qual eles puderam expor um pouco de suas opiniões voltadas aos jogos em geral na sala de aula Matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Jogos Matemáticos. Matematofobia. Laboratório de Matemática

THE MATHEMATICAL GAMES TO MINIMIZE THE STUDENT'S MATHEMATOPHOBIA: A MEETING IN THE MATHEMATICS LABORATORY

ABSTRACT: This Workshop integrated an Extension Project of the State University of Paraíba (UEPB), developed under the PROBEX-UEPB 2015-2016, which took place in the Mathematics Laboratory of the Campina Grande Campus, with Reference School in High School - Professor Benedita de Morais Guerra (EREM) - students, who came from the state of Pernambuco for a visit to the laboratories of mathematics, physics and chemistry. The workshop, titling Counting Points, was given

in order to introduce students to the importance of using games in Mathematics classrooms and explore the game Counting Points because they develop and improve logical thinking and others skills that need to be developed in students. After the previous presentation of the Mathematics Laboratory, the ministers presented the game Counting Points, taken from the book Cadernos do Mathema (from 1st to 3rd year of secondary school), which requires students to perform divisions of decimals and fractional numbers by powers of ten (ten, hundred or thousand) and, finally, the analysis of intervals from the results of the divisions carried out. After analyzing the intervals and calculating the points of each student of the doubles, we announced the winner of each pair and, in order to finish, the students answered a quiz that contained six questions about the game, in which they were able to expose some of their opinions regarding the general games in the Mathematics classroom.
KEYWORDS: Mathematical games. Mathemaophobia. Mathematics Laboratory

1 I INTRODUÇÃO

A importância dos jogos no ensino da Matemática vem ganhando uma credibilidade cada vez maior no âmbito educacional, pelo fato das crianças possuírem uma grande aptidão em seu raciocínio, colocando em prática sua capacidade de resolver situações-problemas, caracterizando objetos e buscando resoluções baseadas em elucidações próprias e concisas. A ideia de explorar um jogo em sala de aula é muito formidável para o desenvolvimento social das crianças, pois sabemos que ainda existem alunos no qual se tornam ausentes na hora de retiradas de dúvidas, por serem envergonhados. Devido a este fato, a Matemática se torna uma disciplina de difícil compreensão, gerando até um problema para os mesmos.

Os jogos são considerados instrumentos que possui uma importância de servir como auxilio para evolução dos indivíduos. No período escolar é muito importante a exploração desses jogos, pois, esta fase é a qual os adolescentes adquirem a famosa “Matematofobia” (horror à Matemática) ou ansiedade matemática (BROWN & WALTER, 2005) e adjetivam a Matemática como sendo uma disciplina complicada e de difícil compreensão. A utilização dos jogos matemáticos, no Laboratório de Matemática ou na sala de aula, por seu aspecto lúdico e desafiador, podem contribuir para a superação da Matematofobia ou ansiedade matemática.

Com a aplicação de jogos matemáticos, eles percebem que os conteúdos que eles não conseguiam compreender, se tornam mais claros, pelo fato dos jogos serem uma atividade que tem como objetivo o desenvolvimento e esclarecimento da linguagem, da criatividade e principalmente do raciocínio.

Grando (2004, apud MALUTA 2007, p. 10) relata uma definição concisa de jogos e, que tendo como base seu pensamento, os jogos e sua aplicação é um desafio.

> Existe uma variedade de concepções e definições sobre o que seja jogo e as

> perspectivas diversas de análise filosófica, histórica, pedagógica, psicanalista e psicologia, na busca da compreensão do significado do jogo na vida humana (GRANDO, 2004, p.8).

Os jogos Matemáticos desenvolvem e aprimoram o raciocínio lógico e diversas habilidades que se encontram presente nos alunos. Pôr a Matemática ser uma disciplina abstrata, e ser adjetivada por muitos alunos como uma disciplina de difícil compreensão, os jogos podem quebrar,, de certa forma, este pensamento e através destes os alunos passaram a vê-la como uma disciplina prazerosa e proporcionam a criação de vínculos positivos na relação professor-aluno e aluno-aluno. Com os jogos matemáticos, os alunos podem encontrar certo equilíbrio entre o real e o imaginário e expandirem seus conhecimentos e o raciocínio lógico-matemático.

Para Friedman (1995, p. 75) “O jogo não é somente um divertimento ou uma recreação”, ou seja, os jogos foram adicionados ao âmbito escolar como uma aprendizagem de forma lúcida e até mesmo mais simples. A autora deixa claro em seu trabalho que o professor precisa saber qual a melhor possibilidade, ou melhor, momento de se trabalhar com os jogos na sala de aula, pois é através de sua prática que os alunos podem construir o seu próprio conhecimento matemático.

A utilização dos jogos na sala de aula surgiu como uma oportunidade de socialização para os alunos, colaboração mútua e também de participação da equipe na busca para resolver determinados problemas. Porém, para que isso ocorra, é preciso que seja realizado planejamentos que organizem e orientem os professores, nas seguintes questões: Quais jogos devem ser utilizados? Como estes são vistos para os alunos? Os jogos adequados precisam primeiramente chamar atenção do aluno e serem visto por estes como desafiadores, pois se o jogo apresentado não apresentar certo grau de dificuldade, perde o encanto para os alunos...

DANTE (1996) observa que,

> O jogo se torna uma estratégia de ensino muito importante, pois estimula a interação, a participação, a curiosidade e a criatividade. A situação do jogo, colocada dentro do interesse e possibilidades da criança, estimula a ação e o pensar, libera coragem e aventura na direção do novo. (DANTE, 1996, p.37)

A ideia principal é não deixar o aluno participar desta atividade de qualquer jeito, é de extrema importância que sejam traçados objetivos a serem cumpridos, regras gerais que sejam cumpridas. Assim, o jogo também não pode ser encarado como uma parte da aula na qual eles não precisarão desenvolver uma atividade escrita ou não precisará prestar atenção nas orientações dos professores. É preciso que o educador tenha um cuidado minucioso para que a indisciplina e a desordem não falem mais alto. Os alunos necessitam compreender que aquele momento é importante para sua própria compreensão do conteúdo abordado, pois ele usará de conhecimentos e experiências adquiridas para participar, argumentar, propor soluções para chegar aos resultados, e este momento é importante pelo fato de que em alguns jogos existem diversas formas de chegar ao resultado, desde que estes não fujam do propósito.

A utilização de atividades lúdicas na Matemática e de materiais manipuláveis está totalmente relacionada ao desenvolvimento cognitivo dos alunos. Ao refletir sobre alguns conteúdos específicos da Matemática, nota-se que estes não possuem uma relação no qual seja feito um jogo que vise a melhor compreensão, porém de certa forma promovem um senso crítico e/ou até mesmo investigador, que ajuda na compreensão de certos tópicos que estão relacionados ao ensino da Matemática.

Por outro lado, enfrentar diversas situações-problemas requer que os alunos não utilizem apenas a aplicação de conhecimento, transformando esse jogo em um exercício, mas sim que ocorra uma organização e análise de conhecimentos, procedimentos e conceitos para que a partir daí o jogador saiba o melhor caminho a se seguir e/ou a melhor decisão a se tomar.

> Dominar os códigos e as nomenclaturas da linguagem Matemática, compreender e interpretar diferentes representações de uma dada situação e decidir sobre a melhor estratégia para resolvê-la e registrá-la são essenciais para o desenvolvimento de competência e habilidades específicas em Matemática e um conhecimento sobre as funções, sua linguagem e representação auxilia nesse sentido, o mesmo valendo para os números que se estuda de forma mais aprofundada no Ensino Médio. (SMOLE et al, p. 63)

2 I METODOLOGIA

O jogo analisado, estudado e escolhido para trabalharmos com os alunos do 3º Ano do Ensino Médio da Escola de Referência em Ensino Médio- Professora Benedita de Morais Guerra (EREM) do Estado de Pernambuco foi o *Contando pontos*, retirado do livro Cadernos do Mathema, no qual está interligado com números, frações e a análise de intervalos. Desse modo, elaboramos esta Oficina, para trabalharmos este jogo no Laboratório de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, que tem como objetivos, utilizar a ideia do lúdico visando uma melhor compreensão e/ou aprimoramento do significado dos conceitos matemáticos estudados no Ensino Fundamental e Médio, estimulando o aluno a utilizar seu raciocínio lógico, trabalhar com números fracionários e decimais, entenderem os intervalos, que atualmente nota-se um défice de boa parte dos estudantes.

Segundo as autoras, "O Jogo C*ontando pontos* traz a possibilidade de o aluno localizar as representações dos números fracionários ou decimais em intervalos numéricos e desenvolver estimativas nas multiplicações de um número decimal por 10, 100 e 1000" (p.63).

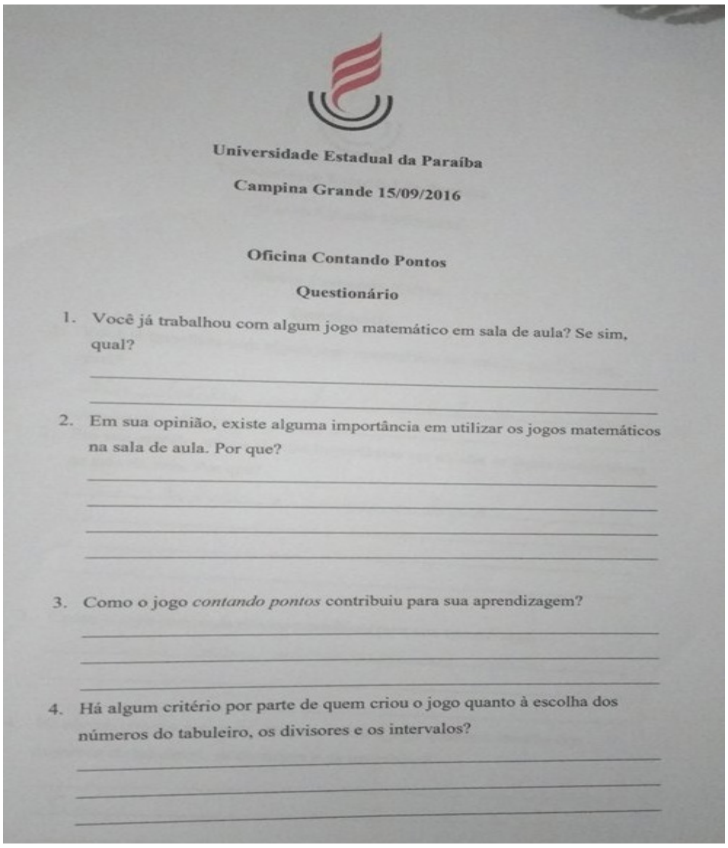
De acordo com o que foi exposto acima sobre os jogos, desenvolvemos uma

Oficina juntamente com os alunos da escola pública estadual de Macaparana-Pe. A seguir, descreveremos qual contribuição que essa Oficina os trouxe.

- **A Oficina Contando Pontos**

Objetivo. O objetivo principal do jogo é incentivar e motivar os alunos e fazer com que eles percebam os conceitos matemático, neste caso, a divisão de números decimais pelas potências de dez, em seguida mostrar a eles a locomoção da vírgula para a esquerda na divisão e por fim estimular os alunos a verificarem seus resultados após a divisão e fazer o estudo dos intervalos e as pontuações contidas nestes.

Atividade. As ministrantes apresentaram o Laboratório de Matemática aos alunos, em seguida falaram um pouco sobre a importância da utilização dos jogos na sala de aula de Matemática. A partir daí os alunos foram divididos em duplas e apresentados as regras do jogo para começarem a jogar. Ao término, os ministrantes juntamente com cada dupla, realizaram a contagem dos pontos através dos intervalos contidos no jogo e assim foram verificados e anunciados o vencedor de cada dupla. Após o jogo, as duplas foram submetidas a responder um pequeno Questionário acerca do jogo. O objetivo deste Questionário foi saber a opinião dos alunos sobre a importância da utilização dos jogos na sala de aula, se estes ajudam ou atrapalham em sua opinião, se o jogo utilizado na oficina contribuiu para a compreensão e quais pontos estratégicos eles utilizaram para vencer o jogo.


Universidade Estadual da Paraíba

Campina Grande 15/09/2016

Oficina Contando Pontos

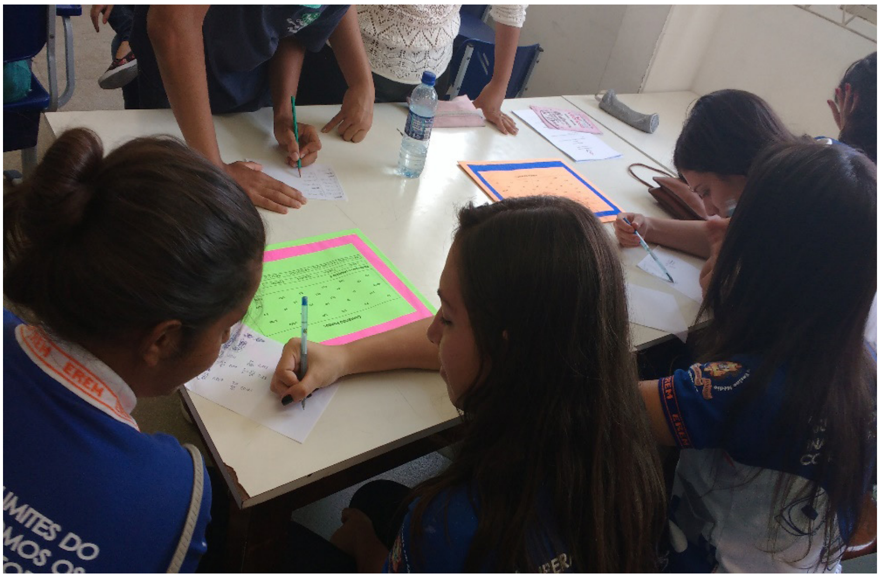
Questionário

1. Você já trabalhou com algum jogo matemático em sala de aula? Se sim, qual?
2. Em sua opinião, existe alguma importância em utilizar os jogos matemáticos na sala de aula. Por que?
3. Como o jogo *contando pontos* contribuiu para sua aprendizagem?
4. Há algum critério por parte de quem criou o jogo quanto à escolha dos números do tabuleiro, os divisores e os intervalos?

1º momento. Os alunos foram separados em duplas, contendo seis duplas ao todo na Oficina.

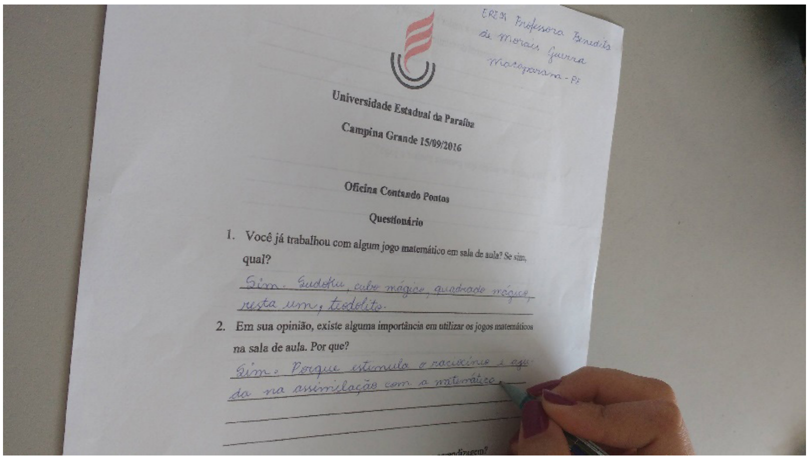
No primeiro momento, os alunos foram divididos em duplas, contendo em cada Oficina seis duplas. Em seguida foram apresentados ao Laboratório de Matemática e depois as regras e objetivos do jogo. Logo após, foram desafiados a jogar o *Contando Pontos* que exige do aluno a divisão de fração e números decimais por potencias de dez, sendo estas, dez, cem ou mil.

2° momento. As duplas iniciam o jogo e a formular estratégias.



No segundo momento, os alunos foram pensando e formulado estratégias para chegar ao seu objetivo final, (vencer o jogo). O propósito é estimular os alunos a desenvolver táticas para sua melhor desenvoltura ao longo do jogo, para isso eles precisavam estarem atentos aos seus erros para que nas próximas jogadas o erro ou desatenção não se perdurassem, e assim o interessante seria eles elaborarem estratégias para atingirem suas finalidades.

3° momento. Anúncio dos vencedores e aplicação do Questionário.



E para finalizar a Oficina, os ministrantes, juntamente com cada dupla, analisaram os resultados das divisões realizadas e observaram em qual intervalo, com suas devidas pontuações, cada número se encaixaria, para que assim pudessem serem divulgados os vencedores de cada dupla para a turma. Em seguida, os alunos responderam um Questionário com seis questões acerca do jogo.

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Proporcionamos aos alunos da Escola de Pernambuco, perspectivarem e observarem a Matemática em outra dinâmica, caracterizada pelos aspectos desafiador e lúdico. Desse modo, utilizamos com os mesmos um jogo matemático, que tem como objetivos: relembrar, aprimorar e/ou aprender os conteúdos matemáticos que ali se encontram.

De acordo com o Questionário realizado na Oficina, podemos perceber que este jogo contribuiu bastante para o aprimoramento dos conteúdos e conceitos matemáticos, tais quais: divisão de números fracionários e decimais por potencias de dez e também a percepção ou noções básicas de intervalos que os resultados das divisões poderão se encaixar. Segundo Joaquim, "*O jogo Contando Pontos, estimulou o meu raciocínio e ajudou também na assimilação com a Matemática*.". Maria relatou que *"O jogo me ajudou perceber que a movimentação da vírgula depende da potência a qual o número está sendo divido."*. Já José respondeu em seu questionário que, *"O jogo Contando Pontos, me ajudou tanto a praticar divisão como também reconhecer os conjuntos, colocando os resultados e encaixando em seus devidos intervalos. ".*

Este jogo não só contibuiu como também apresentou resultados satisfatórios, pois, segundo boa parte dos alunos, o Jogo *Contando Pontos* contribuiu tanto para estimular o raciocínio, quanto para percepção da locomoção da vírgula quando se divide por potências de dez, sem precisar fazer a própria divisão e, consequentemente, reduzindo o tempo dos cálculos

4 I CONCLUSÃO

Propiciamos aos alunos da escola EREM-Professora Benedita de Morais Guerra, conhecer o jogo *Contado Pontos* e aprimorar os conteúdos matemáticos, tais como: divisão de números decimais e fracionários por potências de dez, bem como perspectiva a Matemática em outra didática, marcada pelos aspectos desafiador e lúdico. Propiciamos também aos alunos investigarem estratégias para utilizar durante o jogo. O método de utilizar os jogos matemáticos na sala de aula foi adotado como papel de aprimoramento e/ou fixação do conteúdo. Isto é particularmente relevante para os alunos, pelo fato de que estes demonstram, em sua maioria, aversão pela Matemática e desconhecimento de jogos.

Desse modo, foi possível notar, ao observar os alunos, que alguns ainda estão presos aos métodos tradicionais da divisão, sendo assim, percebemos que eles não conseguiram utilizar algumas estratégias que facilitadoras do jogo e que só após algumas dicas eles perceberam como as facilitariam e, a parti daí, passaram a utilizá-las.

No entanto, ao longo da Oficina foi possível perceber que outra parte dos alguns alunos conseguiu perceber a locomoção da virgula a partir da divisão e que a partir disso eles não precisavam fazer mais a conta da divisão e sim só deslocar a virgula para esquerda de acordo com a potência na qual o número estava sendo dividido. Então podemos perceber como os jogos são importantes e como contribuem para o ensino-aprendizagem dos alunos, se utilizados de maneira correta e em momentos adequados, para isso cabe ao professor saber fazer seu uso.

REFERÊNCIAS

BROWN, S.; WALTER, M. **The art of problem posing**. (3ª ed). New York: Routledge, 2005.

CAROLOS, Fabiana de Lima **Os jogos matemáticos como metodologia auxiliar no ensino-aprendizagem das quatro operações fundamentais**. 2014. 14 p. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

FRIEDMANN, Adriana. **Brincar: crescer e aprender - o resgate do jogo infantil**. Moderna 2001.

MALUTA, Thaís Pariz. **O jogo nas aulas de matemática: Possibilidades e limites**, 2007, 73, p. Monografia (Licenciatura em Pedagogia) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2007.

MARQUES, M. C. P.; PERIN, C. L.; SANTOS, E. **Contribuição dos Jogos Matemáticos na aprendizagem dos alunos da 2° fase do 1° ciclo da Escola Estadual 19 de Maio de Alta Floresta-MT**. Disponível em: < http://faflor.com.br/revistas/refaf/index.php/refaf/article/view/92/html>. Acesso em: 06 de setembro de 2016.

NOÉ, Marcos. **A importância dos jogos no ensino da Matemática**. Disponivel em: <http://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/a-importancia-dos-jogos-no-ensino-matematica.htm>. Acesso em: 08 de setembro de 2016.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS PCN+ (Ensino Fundamental) Disponivel em: <http://

portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em 10 de agosto de 2016.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; PESSOA, N.; ISHIHARA, C. **Jogos Matemáticos**: de 1° a 3° Ano. Porto Alegre: Artmed, 2008. 120 p. (Cadernos do Mathema- Ensino Médio).

SMOLE, K.C.S.; DINIZ, M.I.V.S. **Matemática Matemática Ensino Médio.** São Paulo: Saraiva, 2004. 3v

CAPÍTULO 9

O ESTUDO DA PARÁBOLA NA FORMA CANÔNICA E COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Micheli Cristina Starosky Roloff
Instituto Federal Catarinense – Campus Rio do Sul
Rio do Sul – Santa Catarina

RESUMO: Ao longo dos tempos, diferentes povos, em diferentes lugares, desenvolveram estudos da parábola na forma canônica e como lugar geométrico. O objetivo deste texto é apresentar algumas das formas como este assunto é tratado nos livros didáticos disponibilizados pelo PNLD 2018. O intuito é despertar no leitor o interesse em avaliar as potencialidades e os desafios ao estudo da parábola na forma canônica e como lugar geométrico no contexto do processo de ensino-aprendizagem. E também incentivar que o estudo seja realizado com o uso de ferramentas tecnológicas, como o software GeoGebra.
PALAVRAS-CHAVE: Transformações no gráfico $f(x) = x^2$. Parábola na forma canônica. Lugar geométrico. Elementos para esboço gráfico. GeoGebra.

THE STUDY OF THE PARABLE IN THE CANONICAL FORM AND AS A GEOMETRIC PLACE

ABSTRACT: Throughout the ages, different peoples, in different places, have developed studies of the parable in canonical form and as a geometric place. The purpose of this text is to present some of the approaches this subject is treated in the textbooks provided by PNLD 2018. The purpose is to awaken in the reader the interest in evaluating the potentialities and the challenges to the study of the parable in the canonical form and as a geometric place in the context of the teaching-learning process. And also encourage the study to be carried out using technological tools, such as GeoGebra software.
KEYWORDS: Graphical transformations $f(x) = x^2$. Parable in canonical form. Geometric place. Elements for graphic sketch. GeoGebra.

1 I INTRODUÇÃO

Tenho percebido em minha jornada acadêmica e docente que o estudo da parábola, como função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, tem sido resumido a identificar os valores de a, b, e c, determinar as raízes caso existam e esboçar o gráfico da parábola, observando a concavidade do gráfico, os pontos que interceptam os eixos x e y, e por fim, os pontos de máximo ou de mínimo da função (vértice).

No entanto, há outras maneiras de estudar a parábola. E neste contexto, apresentarei algumas opções de estudo da parábola nos parágrafos seguintes.

Para minha surpresa, ao analisar alguns livros didáticos, disponibilizados pelo Plano Nacional do Livro Didático – PNLD 2018, observa-se que alguns autores abordam esses tópicos apresentando a forma canônica e até mesmo explorando outros detalhes, contudo, constata-se que esses tópicos não são desenvolvidos em sala de aula. A Tabela 1, resume a análise realizada no conteúdo dos livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio, onde o conteúdo de Função Quadrática é/deveria ser abordado.

Obra	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
CHAVANTE e PRESTES, 2016	X	X				X	X	X
DANTE, 2016	X	X			X	X	X	X
IEZZI, et. al., 2016	X	X	X	X	X	X		X
SMOLE e DINIZ, 2016	X		X	X		X		
SOUZA e GARCIA, 2016.	X							X

Tabela 1: análise de livros didáticos do 1º ano do Ensino Médio

Legenda dos itens analisados:

a) Apresentação trinômio

b) Forma canônica

c) Dedução da fórmula de Bhaskara

d) Dedução das coordenadas do Vértice

e) Forma fatorada

f) Lugar Geométrico

g) Gráfico a partir das transformações

h) Gráfico na forma clássica

Outro aspecto que poderia ser explorado no estudo da parábola, é como lugar geométrico, normalmente nos conteúdos de Geometria Analítica, no 3º ano do Ensino Médio. Da mesma forma que na Tabela 1, aqui também foram analisados os livros didáticos do 3º ano do Ensino Médio sobre a presença ou ausência do conteúdo. O resultado é apresentado na Tabela 2.

Obra	a)	b)	c)	d)
CHAVANTE e PRESTES, 2016	x		x	
DANTE, 2016	x	x		x
IEZZI, et. al., 2016	x	x		x
SMOLE e DINIZ, 2016	x	x		x

SOUZA e GARCIA, 2016.	x		x	

Tabela 2: análise de livros didáticos do 3º ano do Ensino Médio

Legenda dos itens analisados:

a) Definição e elementos

b) Equação da parábola usando distância

c) Equação geral da parábola

d) Lembra que também é uma função quadrática

Vale destacar que as autoras Smole e Diniz (2016), indicam no sumário da obra que o conteúdo é opcional, e iniciam o conteúdo relembrando que a parábola pode ser estudada como uma função quadrática.

A seguir serão apresentados brevemente a parábola na forma canônica, e como lugar geométrico para fundamentar nossa discussão final.

2 I A PARÁBOLA NA FORMA CANÔNICA

Quando estudamos a parábola na forma de trinômio, $f(x) = ax^2 + bx + c$, e explorados os parâmetros a , b, e c, temos que a implica em uma expansão vertical do gráfico de $f(x) = x^2$ por um fator a ; b representa o coeficiente angular da reta tangente a parábola em um ponto x; e $(0, c)$, o ponto em que a parábola intercepta o eixo y.

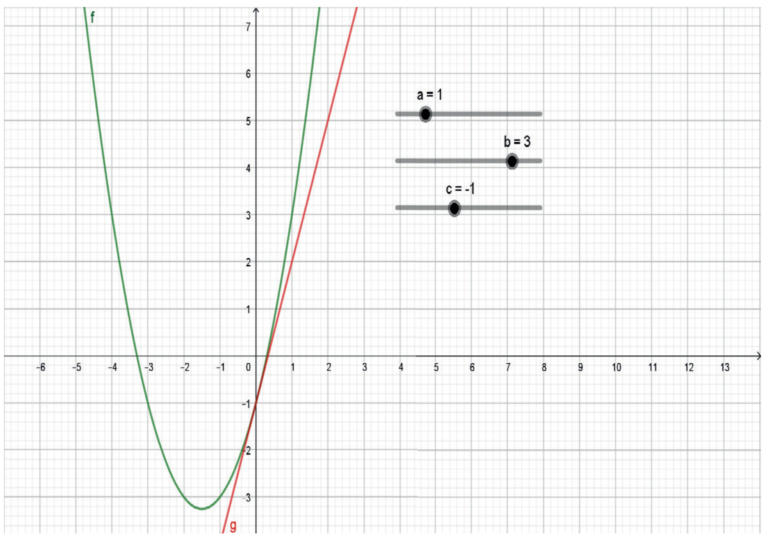


Figura 1: parábola na forma de trinômio. Fonte: construído no GeoGebra

Para exemplificar o parágrafo anterior, a Figura 1 foi construída no GeoGebra inserindo três controles deslizantes para os parâmetros a , b, e c, e por fim são traçadas as funções $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = bx + c$.

Todavia, para o estudo analítico mais detalhado da função quadrática, vamos transformá-la em outra forma mais conveniente, a forma canônica $f(x)=a(x-m)^2+k$. Relembrando que obtemos a forma canônica a partir do método de completar os quadrados.

A partir da forma canônica, podemos destacar alguns aspectos vantajosos, para o estudo da parábola neste formato:

1. a determinação do vértice da parábola (mínimo ou máximo), cujas coordenadas são (m,k);
2. a dedução da fórmula de Bhaskara, igualando $f(x)$ a zero;
3. é possível realizar o estudo do sinal da função quadrática diretamente;
4. a possibilidade de encontrar pontos simétricos;
5. a possibilidade de construir o gráfico de qualquer função quadrática, a partir do gráfico de $f(x)=x^2$, realizando deslocamentos horizontais e verticais, e reflexões e expansões horizontais e verticais.

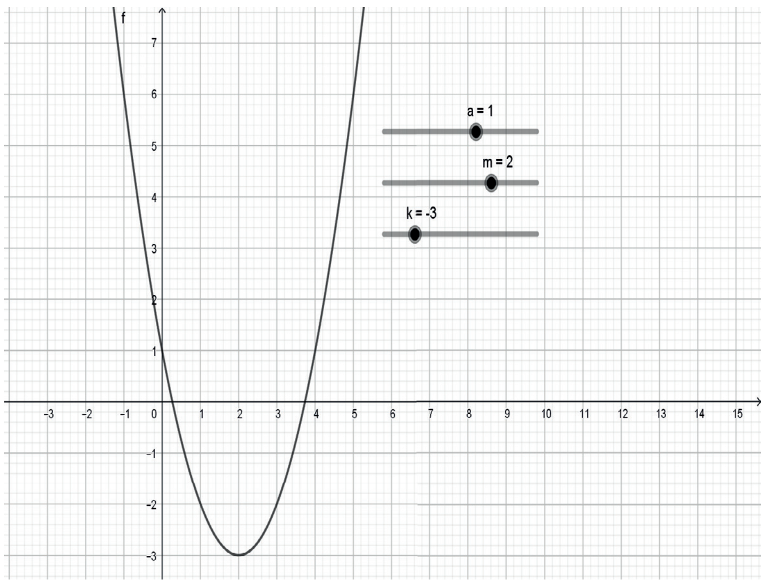


Figura 2: parábola na forma canônica. Fonte: GeoGebra

Da mesma forma que a Figura 1, a Figura 2 foi construída no GeoGebra com os controles deslizantes para os parâmetros a , m, e k, e em seguida é traçada a função $f(x)=a(x-m)^2+k$.

2.1 Para Relembrar as Tranformações de Funções

Também é relevante no estudo da parábola, relembrar os deslocamentos horizontais e verticais cujo resultado pode ser observado na Tabela 3, onde, seja a função $y=f(x)$ e suponha $c>0$.

Operação	Deslocamento
$y = f(x) + c$	Desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades **para cima**
$y = f(x) - c$	Desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades **para baixo**
$y = f(x - c)$	Desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades **para a direita**
$y = f(x + c)$	Desloque o gráfico de $y = f(x)$ em c unidades **para a esquerda**

Tabela 3: deslocamentos horizontais e verticais

Outro tópico importante na Transformação de funções são as reflexões e expansões verticais e horizontais que podemos observar na Tabela 4 onde se define a função $y = f(x)$ e supõem-se $c > 1$.

Operação	Transformação
$y = c.f(x)$	**Expandir** o gráfico de $y = f(x)$ **verticalmente** por um fator de c
$y = \frac{1}{c}.f(x)$	**Comprima** o gráfico de $y = f(x)$ **verticalmente** por um fator de c
$y = f(c.x)$	**Comprima** o gráfico de $y = f(x)$ **horizontalmente** por um fator de c
$y = f\left(\frac{x}{c}\right)$	**Expandir** o gráfico de $y = f(x)$ **horizontalmente** por um fator de c
$y = -f(x)$	**Reflita** o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x
$y = f(-x)$	**Reflita** o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y

Tabela 4: reflexões e expansões verticais e horizontais

Do estudo da forma canônica e observando a Tabela 3 e a Tabela 4 conclui-se que podemos estudar a parábola na forma canônica $f(x) = a(x - m)^2 + k$ como uma expansão ou compressão por um fator a da função $f(x) = x^2$, um deslocamento em m unidades para a direita (ou para a esquerda) da função $f(x) = x^2$, e ainda um deslocamento em k unidades para cima (ou para baixo) da função $f(x) = x^2$.

3 I A PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

A parábola volta a ser objeto de estudo no 3º ano do Ensino Médio, agora como lugar geométrico. Como definição, temos um ponto *F* e uma reta *d* contidos em um mesmo plano α. Parábola é o conjunto de pontos de α que estão a mesma distância de *F* e de *d*.

Os livros do Plano Nacional do Livro Didático – PNLD 2018 apresentam apenas duas situações para a parábola como lugar geométrico:

1. Se a reta *d* é paralela ao eixo x, a equação da parábola é dada por $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$, onde *p* é o parâmetro (distância de *F* a *d*), e (x_0, y_0) são as coordenadas do vértice;

2. Se a reta *d* é paralela ao eixo y, a equação da parábola é dada por $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$.

No entanto, o estudo como lugar geométrico vai além desse dois casos particulares, podemos estudar a parábola dados *F* e uma reta qualquer *d* como demonstra a Figura 3, construída com o GeoGebra.

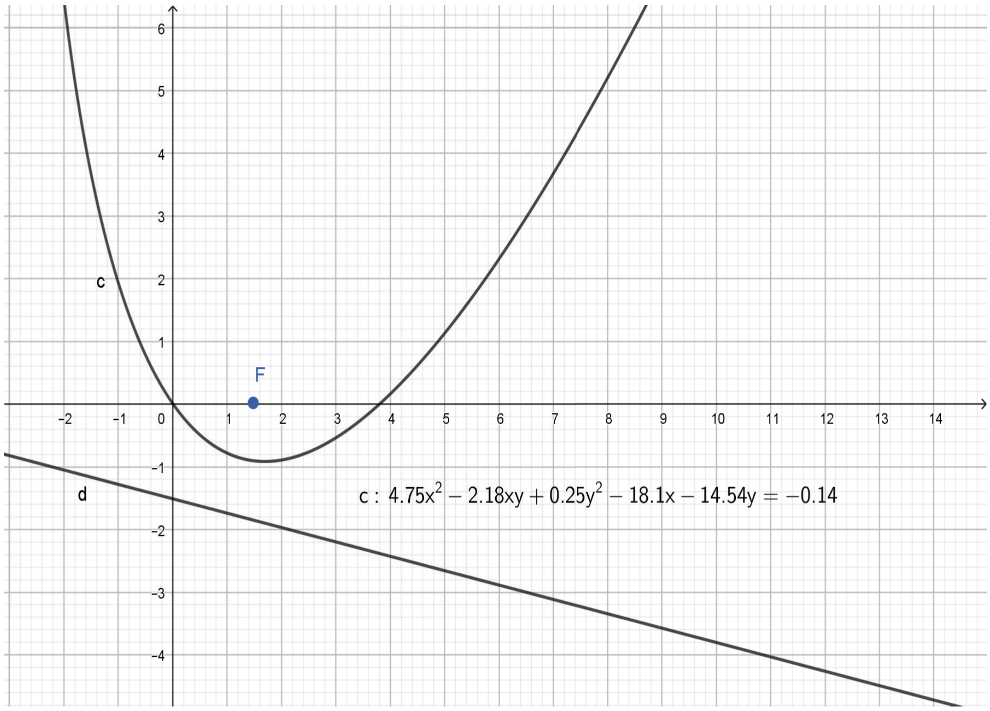


Figura 3: parábola como lugar geométrico. Fonte: GeoGebra

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Espera-se que o estudo da parábola perpasse os meios convencionais, amplamente discutidos nos livros didáticos, que seu estudo possa ir além da determinação das raízes por meio da fórmula de Bhaskara ou da soma e produto das raízes.

O estudo e análise de inúmeras situações cotidianas nas ciências exatas ou da engenharia seriam melhor compreendidas pelos estudantes ou profissionais se a parábola fosse apresentada na sua forma canônica ou como lugar geométrico. Em áreas da engenharia, o vértice pode ser importante para definição de mínimos e máximos em trajetórias de movimentação de cargas ou equipamentos; o sinal da função pode auxiliar na busca por mínimos ou máximos locais/globais em algoritmos; já os deslocamentos horizontais e verticais, e reflexões e expansões horizontais e verticais podem auxiliar na estabilidade e observabilidade de sistemas clássicos de controle de processos; e o estudo e representação da parábola como lugar geométrico pode auxiliar na definição de trajetórias de dispositivos móveis como robôs ou veículos autônomos evitando colisões.

Quanto ao emprego de softwares educacionais, como o GeoGebra, é importante destacar que são ferramentas úteis tanto para professores quanto para os alunos. O software proporciona opções de recursos que possam ser utilizados para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos. Contudo, é importante não desconsiderar as outras abordagens que também são etapas importantes no processo de ensino-aprendizagem cujo objetivo é a compreensão dos conceitos. É preciso utilizar o software como mais uma ótima ferramenta de suporte, porém, não deve ser a única ferramenta no processo de ensino-aprendizagem.

Observando-se as Tabelas 1 e 2, constata-se que os conteúdos de estudo na forma canônica e lugar geométrico estão presentes nos livros do Plano Nacional do Livro Didático – PNLD 2018 em mais de 50% das obras. Diante disso, apresentar esse conteúdo para os alunos do Ensino Médio seria um diferencial para os alunos, pois desenvolverá conhecimentos e habilidades que auxiliarão na resolução de situações problema no dia-a-dia e servirá principalmente para àqueles que seguirem estudando na área de ciências exatas e engenharia.

REFERÊNCIAS

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diogo. **Quadrante matemática**: 1º ano. 1.ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diogo. **Quadrante matemática**: 1º ano. 1.ed. São Paulo: Edições SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações. Volume 1. 3.ed. São Paulo: Ática, 2016.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações. Volume 1. 3.ed. São Paulo: Ática, 2016.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar 7**: geometria analítica. 8.ed. São Paulo: Atual, 2010.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: ciência e aplicações. Volume 1. 9.ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática**: ciência e aplicações. Volume 1. 9.ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar 1**: conjuntos e funções. 8.ed. São Paulo: Atual, 2010.

LIMA, Elon Lages. Curso do Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio - Professor Elon Lages Lima - IMPA - 2001. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=rm8L-C7024M. Acesso em: 06 abril 2018.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática para compreender o mundo 1**. 1.ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática para compreender o mundo 1**. 1.ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato matemática**, 1º ano. São Paulo: FTD, 2016.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato matemática**, 1º ano. São Paulo: FTD, 2016.

STEWART, JAMES. **Cálculo**: Volume 1. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

CAPÍTULO 10

LEONHARD EULER (1707-1783) E ESTUDO DA FÓRMULA DE POLIEDROS NO ENSINO MÉDIO

Julimar da Silva Aguiar
Governo do Estado do Amapá, Secretaria de Estado da Educação, Escola Estadual Joaquim Nabuco, Oiapoque-AP.

Eliane Leal Vasquez
Universidade Federal do Amapá, Departamento de Educação a Distância, Campus Marco Zero do Equador, Macapá-AP.

RESUMO: Este artigo discute a história da matemática como estratégia de ensino, com foco na fórmula de poliedro. Filósofos, artistas e matemáticos realizaram estudos que abordam este assunto, como Platão, Arquimedes, Euclides, Piero, Kepler e Descartes. Euler mencionou o teorema H + S = A + 2 na *Lettre CXXXV* de 14 de novembro de 1750 para Christian Goldbach e em outros trabalhos. Este teorema é citado em livros didáticos de matemática através da fórmula V – A + F = 2. A oficina desta pesquisa possibilitou aos estudantes da escola pública, compreender que os livros pouco explanam sobre a história do poliedro no ensino médio, além de saber que Euler não foi o único que teorizou sobre o tema.
PALAVRAS-CHAVE: História da Matemática. Fórmula de Poliedro. Estratégia de Ensino. Ensino Médio.

ABSTRACT: This paper discusses the history of mathematics as a teaching strategy, focusing on the formula of the polyhedron. Philosophers, artists, and mathematicians conducted studies that deal with this subject, such as Plato, Archimedes, Euclid, Piero, Kepler, and Descartes. Euler mentioned the theorem H + S = A + 2 in Letter CXXXV of November 14, 1750, to Christian Goldbach and in others works. This theorem is cited in math textbooks through the formula V – A + F = 2. The workshop of this research enabled students from the public school, to understand that books little explain about the history of the polyhedron in the high school, besides knowing that Euler was not the only one who theorized on the matter.
KEYWORDS: History of Mathematics. Formula of Polyhedron. Teaching Strategy. High School.

1 I INTRODUÇÃO

A matemática é uma ciência que se desenvolveu desde as civilizações antigas, a partir da interpretação do mundo e da natureza, que se registrou em papiros, manuscritos, livros, cartas, artigos, livros e outros suportes ao longo da História da Ciência, constituindo-se como parte do patrimônio cultural da humanidade, o que é documentado em Boyer (1996), Garbi (2006) e Eves (2004).

Atualmente, no Brasil a matemática é ensinada nas escolas e universidades em diferentes cursos aos estudantes, como parte da formação geral ou específica. As *Orientações Curriculares do Ensino Médio* propõem “a utilização da História da Matemática em sala de aula pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos” (BRASIL, 2006, p. 86).

O referido documento ainda esclarece:

> A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. É importante, porém, que esse recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático (BRASIL, 2006, p. 86).

Shirley (2000) comenta sobre aplicação história da matemática em sala de aula:

> Muitas vezes recomenda-se a discussão da história da matemática nas salas de aula como uma das maneiras para ajudar a mostrar que a matemática não passou inalterável das mãos de Deus (ou de Euclides!) para os cadernos dos alunos, mas que foi mudando e crescendo ao como ao longo dos séculos (SHIRLEY, 2000, p. 73).

Assim, os livros de história da matemática são recursos didáticos que auxiliam os professores no planejamento e no ensino de matemática, cabendo a eles refletirem sobre o uso da história da matemática como estratégia de ensino em sala de aula.

A história da matemática oferece oportunidades de contextualização do conhecimento matemático, em que a articulação com a história pode ser feita nessa perspectiva. Entretanto, o documento intitulado *Orientações Curriculares do Ensino Médio*, não é o único que defende a aplicação da história da matemática como estratégia de ensino (BRASIL, 2006).

Assim, é importante lembrar que nos *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio* encontramos a seguinte citação:

> A importância da história das Ciências e da Matemática, contudo, tem uma relevância para o aprendizado que transcende a relação social, pois ilustra também o desenvolvimento e a evolução dos conceitos a serem aprendidos (BRASIL, 2000, p. 54).

Pelo exposto, é preciso considerar também que os estudantes necessitam saber que os conceitos matemáticos se modificaram na História da Matemática. Além de entender as disputas em torno de uma teoria que foi sistematizada no seu contexto histórico, como é o caso, dos axiomas, teoremas e fórmulas que se aplicam para resolver problemas matemáticos.

A aplicação da história da matemática como estratégia de ensino na educação básica, pode auxiliar no desenvolvimento de competências e habilidades para além de resolver um problema matemático sobre poliedros, pois o ensino da matemática no ensino médio deve voltar-se para competências e habilidades envolvendo: "Representação e comunicação, investigação e compreensão, contextualização sociocultural" (BRASIL, 2000, p. 46).

O ensino da fórmula de poliedros no ensino médio também envolve estas competências e habilidades, pois o estudante deve ler e interpretar textos de matemática, expressar-se tanto na sua língua materna, como utilizar a linguagem simbólica da matemática escolar. Também deve compreender enunciados, formular questões e identificar o problema matemático para resolvê-lo, bem como conhecer e relacionar o estudo de poliedros com a História da Matemática.

A discussão sobre como ensinar matemática na educação básica é um assunto bastante tratado na área de pesquisa em Educação Matemática. Mas esta temática também vem sendo discutida na área da História da Ciência e Ensino por pesquisadores e professores interessados na aplicação da história da matemática como estratégia de ensino, o que neste estudo constatamos por meio dos trabalhos de D'Ambrosio (1993), González Urbaneja (2004), Miguel e Miorim (2011), Fernandes, Longhini e Marques (2011), Saito e Dias (2013).

Considerando que os livros didáticos de matemática pouco tratam de aspectos históricos, é interessante destacar alguns trabalhos que evidenciam argumentos a favor da história da matemática como estratégia de ensino.

Para González Urbaneja (2004) estes argumentos são os seguintes:

> Na História das Matemáticas, o professor pode encontrar um meio de autoformação para compreensão profunda das matemáticas e suas dificuldades de transmissão, o que permitirá suavizar o caminho de conduz o Ensino Aprendizagem; um instrumento para desenvolver a capacidade de renovação e adaptação pedagógicas e uma metodologia que permita fazer ativamente a aprendizagem com um redescobrimento (...). Além disso, a História das Matemáticas é uma fonte inesgotável de material didático, de ideias e problemas interessantes e também, um alto grau de diversão e recreio intelectual, em suma de enriquecimento pessoal, científico e profissional, que o professor pode aproveitar para motivar seu trabalho de transmissão do conhecimento desdramatizando o Ensino das Matemáticas. Finalmente a História das Matemáticas como lugar de encontro entre as ciências e as humanidades, é um instrumento magistral para enriquecer culturalmente o ensino de matemática e integrá-la harmônica e interdisciplinar no currículo acadêmico (GONZÁLEZ URBANEJA, 2004, p. 27).

Este autor apresentou quatro argumentos para aplicação da história da matemática como estratégia de ensino, apoiando-se em textos de matemáticos, pedagogos, historiadores, os quais "reclamam uma função didática para a história da matemática como instrumento de compreensão de seus fundamentos e das dificuldades de seus conceitos para assim enfrentar aos desafios da sua aprendizagem" (GONZÁLEZ URBANEJA, 2004, p. 17).

Miguel e Miorim (2011) também contribuem com reflexões sobre a temática deste estudo, já que a abordagem histórica dos conteúdos matemáticos, segundo estes autores servem como apoio para se atingir objetivos pedagógicos, a saber:

> (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das idéias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de idéias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova (MIGUEL, MIORIM, 2011, p. 53).

Assim, a abordagem histórica dos conteúdos matemáticos é uma das tendências da educação matemática na atualidade. Esta possibilita ao professor explicar na educação básica que a matemática escolar é resultado de diferentes culturas, bem como o fato de que os temas das áreas da matemática relacionam-se com outras ciências.

Lopes e Ferreira (2013) avaliam que a história da matemática se consolidou como área de conhecimento e pesquisa em educação matemática, e, também como metodologia de ensino:

> Ao longo dos últimos trinta anos, a História da Matemática vem se consolidando como área de conhecimento e investigação em Educação Matemática. Pesquisas desenvolvidas na área mostram que o saber matemática está intimamente ligado à motivação e interesse dos alunos por essa ciência. Como metodologia de ensino, acredita-se que a História da Matemática pode tornar as aulas mais dinâmicas e interessantes. Afinal, ao perceber a fundamentação histórica da matemática, o professor tem em suas mãos ferramentas para mostrar o porquê de estudar determinados conteúdos, fugindo das repetições mecânicas de algoritmos. O resgate da história dos saberes matemáticos ensinados no espaço escolar traz a construção de um olhar crítico sobre o assunto em questão, proporcionando reflexões acerca das relações entre a matemática e outras áreas de conhecimento (LOPES, FERREIRA, 2013, p. 77).

Já Gasperi e Pacheco (2016) apontam mais argumentos a favor do uso didático da história da matemática na educação básica, tendo como referências os estudos de outros autores, os quais destacamos:

> 1) Compreensão da natureza e das características específicas do pensamento matemático em relação a outras disciplinas, interdisciplinaridade.
>
> 2) Seleção de tópicos, problemas e episódios considerados motivadores da aprendizagem matemática. A matemática é uma disciplina dedutivamente orientada. Seu desenvolvimento histórico explica que a dedução vem depois de certa maturidade. Ela foi sempre construída a partir de conhecimentos prévios.
>
> 3) Possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino. A matemática é um desenvolvimento humano e não um sistema de verdades rígidas. A matemática não é fruto de uma estrutura rígida, mas um processo intelectual humano contínuo, ligado a outras ciências, culturas e sociedades (GASPERI;

PACHECO, 2016, p. 9).

Por outro lado, os trabalhos de Fernandes, Longuini e Marques (2011), Saito e Dias (2013), Gasperi e Pacheco (2016) exemplificam algumas possibilidades de aplicação da história da matemática como estratégia de ensino, já que estes autores apresentam propostas de atividades didáticas com abordagens de pesquisas em educação matemática ou história da ciência e ensino.

A seguir, sintetizamos as propostas de atividades didáticas destes autores:

● Proposta de construção de uma balestilha em madeira, atividade didática que destaca um instrumento de medida que era utilizado no século XVI, como uma proposta pedagógica para educação básica, tendo como referência para estudo, o trabalho *Instrumentos de Navegação, Comissão Nacional para as Comemorações dos Descobrimentos Portugueses* de Luís Albuquerque (1988), com aplicação para o ensino de astronomia e matemática (FERNANDES, LONGUINI, MARQUES, 2011);

● Desenvolvimento da atividade didática a partir da escolha da obra *Del modo di misurare* de Cosimo Bartoli (1564), com realização de oficinas e minicursos para professores e estudantes, e em aulas nos cursos de Licenciatura em Matemática e de Especialização em Educação Matemática (SAITO; DIAS, 2013);

● Leitura de livros paradidáticos que mencionam tópicos da História da Matemática, Projeto de Contação de Histórias, Resolução de Problemas Históricos, Textos históricos para introdução de um conteúdo, Pesquisa sobre os matemáticos da história, Uma cronologia da História da Matemática e outras atividades didáticas (GASPERI; PACHECO, 2016).

Assim, a formação de professores de matemática no século XXI, é um grande desafio, conforme avalia D'Ambrosio (1993). Para esta autora, os professores de matemática, deverão ter como característica a visão do que vem a ser a matemática, bem como a visão do que constitui a atividade matemática, e ainda, a visão do que constitui a aprendizagem da matemática e um ambiente propício à aprendizagem matemática.

Para refletir sobre o que vem a ser a matemática e os conteúdos escolares que são estudados na educação básica, os professores de matemática podem utilizar diferentes tipos de trabalhos no seu planejamento de ensino, como livros didáticos, livros de história da matemática e fragmentos de fontes originais para produzir material didático, com objetivo de aplicá-los em sala de aula. Este pode ser um texto, uma atividade didática ou outro tipo de material didático impresso ou digital.

Considerando que os poliedros platônicos são abordados no ensino de Geometria Espacial na educação básica, optamos em investigar: Como os livros didáticos da Escola Estadual Joaquim Nabuco apresentam o estudo da fórmula poliedros no ensino médio?

2 I METODOLOGIA

2.1 Caracterização da Pesquisa

Neste estudo, optamos por realizar uma pesquisa mista, envolvendo a pesquisas bibliográfica e qualitativa para conhecer os trabalhos que discutem o uso da história da matemática como estratégia de ensino na educação básica.

Em seguida, organizamos uma oficina com seis estudantes para aplicar o texto que foi produzido como resultado da pesquisa, originalmente, sendo o tema "Leonhard Euler (1707-1783) e estudo da fórmula de poliedros no ensino médio".

A pesquisa bibliográfica é definida como:

> É um tipo de pesquisa obrigatória a todo e qualquer modelo de trabalho científico. É um estudo organizado sistematicamente com base em materiais publicados. São exigidas as buscas de informações bibliográficas e a seleção de documentos que se relacionam com os objetivos da pesquisa (SANTOS, MOLINA, DIAS, 2007, p. 127).

Já a pesquisa qualitativa:

> O principal é um desenho qualitativo para se abordar uma questão. Desde a questão envolva seres humanos, são essenciais a descrição e a reconstrução de cenários culturais, o que é normalmente chamado de uma etnografia (D'AMBROSIO, 2005, p. 103).

Assim, foram importantes para a elaboração deste artigo, livros didáticos localizados na biblioteca da escola pesquisada, livros de história da matemática, trabalhos sobre o matemático Leonhard Euler e sua *Lettre CXXXV* publicada por Fuss (1843), no livro *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII*ème *siècle*.

2.2 Local de Execução da Oficina, seu Tema, Carga Horária e Público Alvo

A oficina da pesquisa foi realizada, em 06 e 08 de junho de 2016, como parte da monografia do Curso de Especialização de Ensino de Matemática para o Ensino Médio (AGUIAR, 2016), vinculado ao Programa Universidade Aberta do Brasil, ofertado no Estado do Amapá (UAB/Polo Oiapoque) e pelo Departamento de Educação a Distância da Universidade Federal do Amapá (DEAD/UNIFAP).

A sua execução ocorreu no município de Oiapoque, em uma sala da Escola Estadual Joaquim Nabuco (Figura 1), instituição que faz parte da rede pública de ensino do Estado do Amapá.

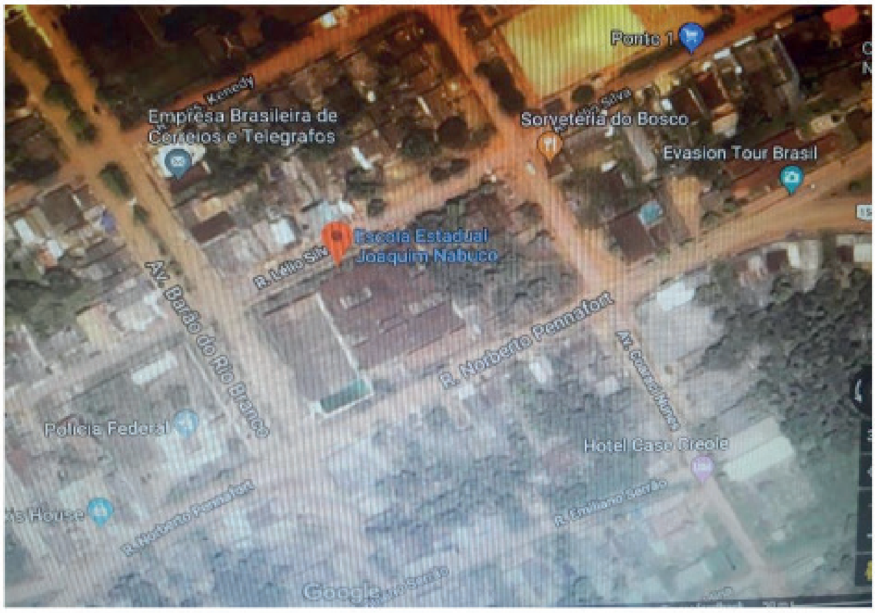


Figura 1 - Localização geográfica da escola pública.

Fonte: Imagem capturada no Google Maps.

O tema da oficina escolhido foi “Leonhard Euler (1707-1783) e estudo da fórmula de poliedros no ensino médio”, com carga horária de quatro horas.

O grupo de participantes da oficina da pesquisa foram os estudantes A, B, C, D, E e F, que estavam cursando o ensino médio, os quais se interessaram em participar da segunda etapa do projeto de pesquisa, após a divulgação do projeto de pesquisa na escola pública.

Considerando que a execução da oficina não teve como objetivo coletar dados, logo não foi necessário mencionar os nomes dos estudantes que participaram da pesquisa qualitativa.

A participação de estudantes do ensino médio, na última etapa deste estudo foi importante, pois possibilitou apresentar a 1ª versão do texto produzido como uma das atividades da pesquisa, o qual citamos no tópico a seguir.

3 I O TEXTO DA OFICINA DA PESQUISA COMO RESULTADO

3.1 Aspectos Biográficos de Leonhard Paul Euler

Leonhard Paul Euler (1707-1783), de origem suíça, é considerado um dos príncipes dos matemáticos do século XVIII, dada a sua prolífera contribuição à ciência moderna e vasta publicação no campo da matemática, física, música e outras ciências. O seu nome é bastante citado em livros didáticos, trabalhos acadêmicos, periódicos ou livros de história da matemática.

Figura 2 - Retrato de Euler

Fonte: FUSS, P. H. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle, 1843.

Santos, Pedro Neto e Silva (2007) comentam que Euler nasceu em 15 de abril de 1707, na cidade da Basileia. Ele é o mais velho dos quatro filhos de Paulus Euler e Margaretha Brucker. Ainda cedo se mudou para um ambiente rural, mas aos oito anos de idade retornou a sua cidade natal para continuar os estudos, período em que seu pai providenciou o tutor Burkhardt para ele.

> Em 1720, com 13 anos de idade, inscreve-se na Universidade de Basileia, na Faculdade de Filosofia, para dar seguimento aos estudos religiosos tão do agrado de seu pai. Aqui estudava a sua matéria preferida, a Matemática, mas também Teologia, Medicina e outras disciplinas (SANTOS, PEDRO NETO, SILVA, 2007, p. 8).

A Faculdade Filosofia transmitia uma educação geral ao estudante, antes de terminar uma especialidade para grau superior. Através do trabalho duro e memória surpreendente, ele dominou todos os assuntos (CALINGER, 2016).

> Durante seus dois primeiros anos, ele foi matriculado no clã de Johnn Bernoullis para iniciantes em geometria, bem como em aritmética prática e teórica. Diante de seus colegas estudantes, aos quatorze anos de idade fez um discurso em latim intitulado *"Declamatio: De arithmetica et geometrica"* [...] no qual ele apresentou um tratamento de dois campos da aritmética, a prática e a teórica. Em aplicação prática e artes finas, ele comentou a superioridade da geometria (CALINGER, 2016, p. 17).

Aos dezessete anos de idade recebeu, o grau de *Magister Artium* pela Faculdade de Filosofia, oficialmente em 8 de junho de 1724. Na sessão de graduação de outubro de 1723, Euler fez a leitura pública em latim, comparando a filosofia natural de Rene Descartes, com de Isaac Newton e indicando as consequências de cada um, conforme é explicado por Galinger (2016).

No ano de 1727, Euler escreveu:

> [...] "Dissertatio physica de sono" (Dissertação física sobre o som), com a qual

> concorreu, ainda muito jovem, a uma cadeira de física na Universidade de Basiléia. O trabalho foi muito bem recebido, mas Euler não chegou a ser professor dessa universidade, pois decidiu emigrar para a Rússia (D'AMBROSIO, 2009, p. 19).

Conforme Gayo e Wilhelm (2015) a sua vida acadêmica movimentada não o impediu de formar, com Katharina Gsell uma família com treze filhos. Por influência dos irmãos Daniel e Nicolas Bernoulli, filhos de Jakob Bernoulli, Euler foi convidado a integrar a *Academia de Ciências São Petersburgo* na Rússia, onde foi nomeado professor de Física e Matemática, respectivamente, em 1730 e 1733. Ele continuou "na Rússia até 1741 quando foi convidado a ser professor de Matemática na *Academia de Ciências de Berlim*. Nesta cidade conquistou a admiração de alguns integrantes da corte do imperador da Prússia, atual Alemanha e Polônia" (CAJORI, 2007 apud GAYO E WILHELM, 2015).

A respeito das obras de Euler, sabemos que ele teve um grande papel na produção científica do século XVIII:

> Euler foi um escritor prolífico, sem dúvida insuperável quanto a isso na história da matemática; não há ramo da matemática em que seu nome não se figure. É interessante que sua produtividade surpreendente não foi absolutamente prejudicada quando, pouco depois de seu retorno a São Petersburgo, teve a infelicidade de ficar completamente cego (EVES, 2004, p. 472).

D'Ambrosio (2009) comenta que a última indicação do índice de Eneström de indexação das obras de Euler, foi E866, que corresponde a oitocentos e oitenta e duas publicações, envolvendo, Obras Matemáticas, Mecânicas e Astronômicas, Obras Físicas e Miscelânea, Correspondências, Manuscritos, além de Cadernos e Diários.

3.2 Sólidos e Poliedros na História das Ciência

A história dos poliedros perpassa pelas ciências antiga à moderna, e, portanto, a diferentes estudos na história das ciências. Ao pesquisarmos sobre o referido tema, encontramos menção aos trabalhos de Platão (428-347 a.C), Arquimedes (287-212 a.C), Euclides (c. 300 a.C), Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (1596-1650) e Euler (1707-1783). Estes contribuíram com a discussão sobre os sólidos de faces planas, apresentando definições, teoremas, demonstrações e apresentando ilustrações em seus trabalhos, relacionando-os com a Cosmologia, Geometria dos Sólidos e Astronomia.

Quanto a etimologia da palavra 'poliedro', Cruz (2002, p. 14) esclarece que "o termo poliedro vem das raízes gregas poly, significando muitos, e hedra, significando faces. Um poliedro tem muitas faces".

Os poliedros são estudados como parte dos conteúdos matemáticos da Geometria Espacial no ensino médio em escolas da rede pública ou privada no Brasil. Assim, o estudo de poliedros é abordando tanto em livros didáticos de matemática, como em livros de outras áreas de conhecimentos, dos quais comentaremos alguns a seguir.

Platão (2011) no livro *Timeu-Crítias* trata da formação de cinco figuras sólidas, o hexaedro regular, tetraedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro que são citados no capítulo “Intelecto e Necessidade”. Ele associa os sólidos com os quatro elementos primordiais, isto é, fogo, ar, água e terra, bem como associa o dodecaedro, que é o quinto sólido, com o universo. Os nomes dos sólidos platônicos ou corpos cósmicos foram atribuídos por Platão para explicar a natureza (CRUZ, 2009).

Já Melo (2014) explica que os sólidos se classificam em várias categorias, como os sólidos platônicos, os sólidos arquimedianos e os sólidos de Catalan.

> Os sólidos arquimedianos, ou sólidos de Arquimedes, ou poliedros semirregulares, são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo, enquanto nos sólidos platónicos, todas as faces são polígonos regulares de um único tipo (MELO, 2014, p. 13).

Existem apenas treze sólidos arquimedianos: tetraedro truncado, o cubo truncado, o cuboctaedro, o rombicuboctaedro, o cuboctaedro truncado, o octaedro truncado, o icosaedro truncado, o dodecaedro truncado, o icosidodecaedro, o rombicosidodecaedro, o icosidodecaedro truncado, o cubo snub e o dodecaedro snub. Ainda existem os duais dos sólidos arquimedianos ou sólidos de Eugene Catalan (1814-1894), obtidos pela união dos pontos centrais das faces adjacentes dos sólidos arquimedianos (MELO, 2014).

A geometria sólida também foi mencionada em tratados da arte renascentista. Uma obra conhecida é *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus* de Piero della Francesca (1480). Segundo Luminet (2011), de três tratados escritos por ele, incluindo o *Libellus de Quinque Corporibus Regularibus*, os seus assuntos abordavam sobre aritmética, álgebra, geometria e trabalho inovador em geometria sólida e perspectiva.

Com relação a esta obra, Melo (2014, p. 13) comenta:

> Pelo lado artístico, os sólidos platônicos são muito utilizados e apreciados por causa das suas simetrias, principalmente no Renascimento, onde em 1480, o pintor Piero della Francesca (1415-1492) faz um estudo muito completo em sua obra “Libellus De Quinque Corporibus Regularibus”. Nessa mesma obra o autor encontra-se com quatro outros tipos de poliedros que apresentam faces regulares, mas não todas com o mesmo polígono, os denominados sólidos arquimedianos.

Os sólidos arquimedianos foram aos poucos sendo redescobertos por artistas, matemáticos e filósofos, como que se observa na obra *Harmonices Mundi de* Johanes Kepler (1619). Segundo Luminet (2009, p. 258) “Kepler finalizou suas leis do movimento planetário, que são ainda válidas hoje”. Também descreveu sobre a existia de treze configurações de vértices possíveis e comentou que cada uma dessas configurações dava origem a um dos sólidos arquimedianos (SÁ, ROCHA, 2010).

A Figura 3 exemplifica diferentes tipos de sólidos geométricos por meio de ilustrações apresentadas no livro *Harmonices Mundi de* Johanes Kepler (1619), como os sólidos platônicos e estrelados, além da simetria no processo de decomposição de outros sólidos ou sua planificação.

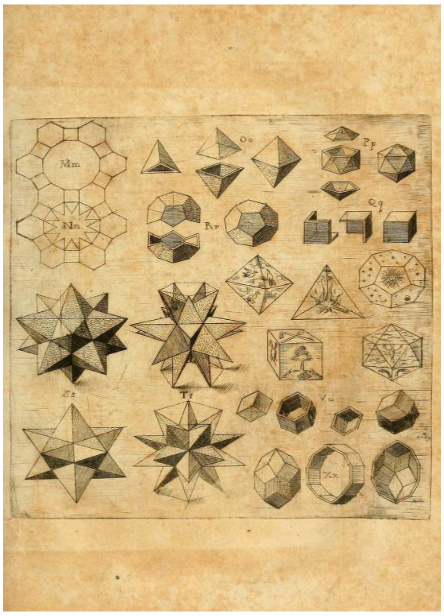


Figura 3 - O registro de alguns sólidos no século XVII.

Fonte: KEPLER, J. Harmonices Mundi, 1619, entre p. 58 e p. 59.

Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicassimi (1482), primeira edição em latim, mais conhecido como *Os Elementos* de Euclides e suas traduções para o francês, italiano e inglês de (1516), (1565), (1566), (1570) e outros idiomas, descrevem sobre uma parte da matemática grega, apresentando o método axiomático que é demonstrado a partir de definições, axiomas ou postulados para se chegar as proposições ou aos teoremas (BORGES FILHO, 2005).

Nesta obra, em três de seus livros abordam a respeito da geometria sólida:

> Livros XI a XIII - tratam da geometria sólida e conduzem através dos ângulos sólidos aos volumes dos paralelepípedos, do prisma e da pirâmide, à esfera e ao que parece ter sido considerado o ponto mais alto da obra, à discussão dos cinco poliedros regulares (chamados platônicos) juntamente com a prova de que existem estes cinco poliedros regulares (BORGES FILHO, 2005, p. 21).

“Para cada sólido, Euclides calcula a razão entre o diâmetro da esfera circunscrita e o comprimento da aresta do sólido. Na proposição 18, ele demonstra que não existem outros poliedros regulares” (PEREIRA, 2011, p. 8).

Já na obra *Mysterium Cosmographicum* de Kepler (1596), segundo Tossato (2003), o Kepler apresentou a sua hipótese de que o mundo foi construído mediante a inscrição e circunscrição dos cinco sólidos perfeitos nas seis órbitas planetárias conhecidas em sua época, o que lhe permitiu, desvendar os segredos do mundo cósmico.

O título completo desta obra em português, nos dá uma ideia da presença dos poliedros platônicos no seu conteúdo, pois segundo tradução de Tossato, esta intitula-se:

> (Anúncio das Considerações Cosmográficas, contendo o Mistério Cosmográfico sobre a admirável proporção dos orbes celestes e das causas genuínas e próprias do número, magnitude e movimentos periódicos dos céus, demonstrado através dos cinco sólidos geométricos regulares), ou mais usualmente Mysterium cosmographicum, representa o ponto de partida do pensamento kepleriano, seja esse astronômico, cosmológico, epistemológico ou metodológico (TOSSATO, 2003, p. 4).

Berlinski (2005) comenta sobre a referida obra de Kepler:

> A órbita da Terra é a medida de todas as coisas; circunscreva-se em torno dela um dodecaedro e o círculo que contém este será Marte; circunscreva-se em torno do círculo de Marte um tetraedro, e o círculo que o contém será Júpiter; circunscreva em torno de Júpiter um cubo, e o círculo que o contém será Saturno. Agora inscreva dentro da Terra [ou seja, a órbita da Terra] um icosaedro, e o círculo contido dentro dele será Vênus; inscreva dentro de Vênus um octaedro, e o círculo contido nele será o de Mercúrio (BERLINSKI, 2005, p. 209).

Este comentário sobre o pensamento de Kepler, mostra que de algum modo, ele acreditava que as orbitas dos planetas tinham relação com os sólidos platônicos, já que ao tratar das orbitas planetárias, ele apresenta uma explicação geométrica.

Conforme alguns trabalhos citados, anteriormente, que trataram sobre os poliedros, se verifica que este assunto já era debatido muito antes do século XVIII. O artigo de Siqueira (2009) esclarece que “Elementa doctrinae solidorum” de Euler (1758a) desempenhou um papel de mito fundador das áreas da topologia combinatória e da geometria discreta, além de evidenciar que em “Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita”, Euler (1758b) expõe métodos que classificam e descrevem os sólidos de faces planas, segundo uma determinada propriedade.

Estes trabalhos de Euler foram publicados em *Novi commentarii academiae scientiarum Imperialis petropolitanae* e em *Opera Omnia*, o que se verifica na bibliografia analisada por Siqueira (2009).

Deste, destacamos uma citação:

> Os estudos sobre poliedros, ou, de uma outra maneira, os sólidos limitados por faces planas, nos séculos XVII e XVIII se resumem, até onde se conhece, a poucos escritos. Entre estes, os comentários de Kepler (1571-1630) sobre poliedros estrelados e arquimedianos no *Harmonices Mundi* (1619), de Descartes no manuscrito compilado por Leibniz *Progymnasmata de Solidorum Elementis excerpta ex Manuscripto Cartesii* (aprox. 1620) (SIQUEIRA, 2009, p. 55s).

No tratado *De Solidorum Elementis* de Descartes (1619) é citado a ‘fórmula de poliedros' que relaciona as arestas, os vértices e as faces de um poliedro regular, a qual frequentemente é atribuída a Euler, o que é comentado por Vaz (2011). Este autor ainda enfatiza, que neste tratado, Descartes também estudou os poliedros e suas relações.

Quanto aos trabalhos de Euler que abordaram aspectos da geometria dos sólidos e os teoremas de estereometria, são conhecidos:

1) A *Letter CXXXV* de 14 de novembro de 1750 destinada ao matemático Christian Goldbach, cujo sumário é "*Théorèmes de stéreométrie*", publicado por Paul Heinrich Fuss (1843) em *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*;

2) *Elementa doctrinae solidorum* (1758a), que é fonte primária citada por Siqueira (2009);

3) *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita* (1758b), que também é fonte primária do estudo realizado por Siqueira (2009).

Estes podem ser pesquisados na biblioteca digital, *The Archive Euler*, que se dedica aos trabalhos e vida de Leonhard Euler. Na *Letter CXXXV*, Euler (1750) apresentou onze teoremas de estereometria. No sexto teorema tem-se: "In omni solido hedris planis incluso aggretatum ex numero angulorum solidorum et ex numero hedrarum binario excedit numerum acierum, seu est H + S = A + 2, seu H + S = 1/2 L + 2 = 1/2 P + 2" (EULER, 1750, p. 537).

Conforme Siqueira (2009, p. 56), a tradução deste teorema de texto em latim ao português, pode ser: "Em qualquer solido limitado por faces planas, a soma do número de ângulos dos sólidos e do número de faces excede em dois o número de arestas", ou seja, S + H = 2 + A.

Já em *Elementa doctrinae* solidorum, Euler (1758a) apresentou resultados de estudos sobre sólido de faces planas, arestas e ângulos dos sólidos, além de classificar os sólidos de faces planas pelo número de seus ângulos. Em seguida, em *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*, Euler (1758a) apresentou a demonstração para o teorema principal e também mostrou a fórmula para determinar o volume da pirâmide triangular (KLYVE, STEMKOSKI, TOU, 2016).

3.3 O Estudo de Poliedros como Conteúdo da Geometria Espacial em Livros Didáticos

Na Escola Estadual Joaquim Nabuco, encontramos no acervo da biblioteca, os seguintes livros didáticos: *Matemática* de Paiva (2013), *Conexões com a Matemáticas* editado por Leonardo (2013), *Matemática Ensino Médio* de Smole e Diniz (2005) que tratam sobre os estudos de poliedros no conteúdo de Geometria Espacial e outros conteúdos matemáticos.

Estes são distribuídos nas escolas públicas pelo Programa Nacional do Livro

Didático - PNLD, que tem como objetivo "subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica" (MEC, 2016, p. 1) ou pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio - PNLEM.

A Figura 4 indica os livros didáticos da área da Matemática que foram localizados no levantamento de fontes e que estavam disponíveis para aplicação em sala de aula.

Figura 4 - Livros didáticos de matemática analisados.

Fonte: Fotografia da pesquisa, 2016.

Pela análise do conteúdo destes livros didáticos, verificamos que o assunto sobre poliedros é abordado de forma resumida, sem mencionar aspectos históricos relacionados a fórmula que é atribuída ao matemático Euler. Isto é, não se trata o estudo de poliedros com abordagem histórica, já que os textos destes livros didáticos são focados na resolução de problemas matemáticos para o ensino médio.

No segundo volume de *Matemática* de Paiva (2013) há um capítulo que trata de poliedros convexos, regulares, nomenclaturas, exemplos de cálculos ou exercícios, relação de Euler e exercícios propostos. A este respeito, consta no mesmo que: "Em todo poliedro convexo vale a relação: V – A + F = 2, em que V, A e F representam o número de vértices, arestas e faces do poliedro, respectivamente" (PAIVA, 2013, p. 223).

Em se tratando do segundo volume de *Conexões com a Matemáticas*, que foi editado por Leonardo (2013), o seu conteúdo sobre poliedros é abordado de forma mais ampla, envolvendo sólidos geométricos e figuras, corpos redondos, elementos e superfície poliédrica, poliedro convexo e não convexo. E ainda, planificação, poliedros regulares e a relação de Euler.

Neste livro didático, o aspecto que se faz menção à história da matemática, é a citação ao selo da antiga República Democrática Alemã, que homenageou Euler, em 1983, no 200º aniversário de sua morte, o qual tem no centro a fórmula matemática, escrita na seguinte forma: e – k + f = 2, e aos lados à direita e esquerda, a um icosaedro e uma imagem que representa o matemático, conforme mostra a Figura 5.

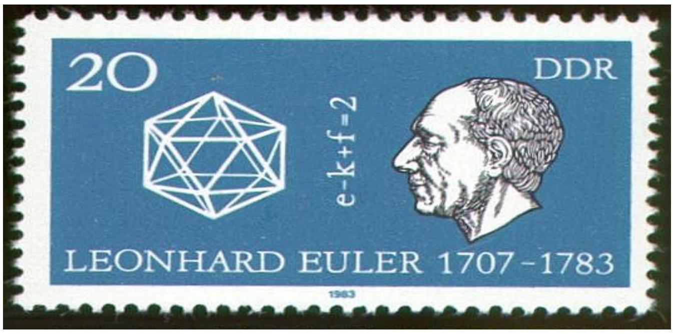


Figura 5 - Selo alemão de homenagem ao matemático Euler
Fonte: LEONARDO, 2013.

Já no segundo volume de *Matemática Ensino Médio* de Smole e Diniz (2005), o conteúdo sobre poliedros é tratado com a discussão acerca de poliedro convexo e não convexo, relação de Euler e exercícios. No referido livro destacou-se que "todo poliedro convexo vale a relação de Euler, mas nem todo poliedro em que vale essa relação é convexo" (SMOLE; DINIZ, 2005, p. 258).

3.4 Discussão dos Resultados

Com o levantamento de diferentes tipos de referências, como documentos brasileiros que norteiam a reflexão sobre as estratégias de ensino para a área da matemática, e ainda, os livros de história da matemática, trabalhos acadêmicos, livros didáticos de matemática e a *Lettre CXXXV* de Euler (1750), constatamos que o estudo sobre poliedros no ensino médio é abordado geralmente pela resolução de problemas matemáticos.

Assim, os conteúdos matemáticos pouco são tratados nos livros didáticos do ensino médio, com abordagem de tópicos da história da matemática, conforme análise dos livros didáticos: *Matemática* de Paiva (2013), *Conexões com a Matemáticas* editado por Leonardo (2013), *Matemática Ensino Médio* de Smole e Diniz (2005), que são usados pelos professores de matemática da Escola Estadual Joaquim Nabuco, no município de Oiapoque.

A exposição do texto elaborado como material didático e utilizado na oficina desta pesquisa, permitiu-nos compreender que a discussão sobre poliedros é presente na história da ciência, a exemplo de trabalhos de Platão, Arquimedes, Euclides, Piero, Kepler, Descartes e outros. Já no século XXI, a relação ou fórmula $V - A + F = 2$ é discutida de forma resumida em livros didáticos, como parte dos conteúdos matemáticos do ensino médio.

Os livros didáticos citam apenas o nome de Euler, quando se referem ao tópico sobre a fórmula de poliedros. Nesta pesquisa constatamos que o filósofo francês, René Descartes (1619), também realizou estudos a respeito, como *De solidorum elementis*, *Progymnasmata de solidorum elementis* ou *Exercises in the elements of* *solids*, que foram redescobertos em 1860, como esclarecem Sandifer (2007) e Vaz (2010), cujos trabalhos de Descartes não são mencionados nos livros didáticos que analisamos neste estudo.

Estes dados nos levam a compreender que a ciência matemática escrita nos livros didáticos é apenas uma das versões da história da matemática e que cabe aos professores de matemática aprofundar os seus conhecimentos na formação continuada para ampliar o que se ensina na sala de aula.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O foco deste estudo centrou-se em pesquisar aspectos biográficos do matemático suíço, Leonhard Euler e de que maneira a fórmula de poliedro é estudada na Escola Estadual Joaquim Nabuco, no município de Oiapoque.

A apresentação do texto produzido na oficina, possibilitou aos estudantes do ensino médio conhecer um pouco sobre a história dos poliedros, bem como entender que não foi apenas Euler que teorizou sobre o tema. Já que outros filósofos, artistas e matemáticos também abordaram sobre geometria sólida, sólido de faces planas, teorema de estereometria e outros assuntos em seus trabalhos, como Platão, Arquimedes, Euclides, Piero, Kepler, Descartes e Euler.

Geralmente, os livros didáticos do ensino médio atribuem a invenção da fórmula de poliedros ao Euler, sem mencionar que Descartes já tinha realizado um estudo detalhado com relação aos sólidos de faces planas e que em muitos outros estudos na história da ciência também foi discutido este assunto.

REFERÊNCIA

AGUIAR, J. S. **Leonhard Euler (1707-1783) e Estudo da Fórmula de Poliedros no Ensino Médio**. 2016. 32f. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio). Departamento de Educação a Distância, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2016.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2000. v. 3.

______. **Orientações Curriculares do Ensino Médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006. v. 2.

BERLINSK, D. **O Segredo do C**éu: astrologia e arte da previsão. Trad. de Helena Londres. São Paulo: Globo, 2005.

BORGES FILHO, F. **O Desenho e o Canteiro no Renascimento Medieval (século XII e XIII): indicativos da formação dos arquitetos mestres construtores**. 2005. 262f. Tese (Doutorado em Estruturas Ambientais Urbanas). Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CRUZ, A. R. **O Teorema de Euler para poliedros**. Monografia (Especialização em Matemática-Formação de Professor na Modalidade a Distância). 2009. 34f. Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.

D'AMBROSIO, B. S. Formação de Professores de Matemática para o Século XXI: o Grande Desafio. **Pro-Prosições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 35-41, 1993.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: Da teoria à prática. 12.ed. Campinas: Papirus, 2005.

______. Euler, um matemático multifacetado. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v. 9, n. 17, p. 13-31, 2009.

DIAS, M. S.; SAITO, F. Interface entre história da matemática e ensino: uma aproximação entre historiografia e perspectiva lógico-histórica. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4, Anais. Brasília: SBEM, 2009. p. 1-14.

EULER, L. Lettre CXXXV. Berlin d. 14 November 1750. In: FUSS, P. H. **Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle**. St. Pètersbourg, 1843. Tome I, p. 536-539.

______. Summary E231- Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Disponível em: http://eulerarchive.maa.org/, Acesso: 03/03/2019.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. Higyno H. Domingues. Campinas: Ed. Unicamp, 2004. p. 461-513.

FERNANDES, T. C. D.; LONGHINI, M. D.; MARQUES, D. M. A construção de um antigo instrumento para navegação marítima e seu emprego em aulas de Astronomia e Matemática. **História da Ciência e Ensino: Construindo interfaces**, São Paulo, v. 4, p. 62-79, 2011.

GALINGER, R. S. **Leonhard Euler**: Mathematical Genius in the Enlightenment. Princeton: Princeton University Press, 2016.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências**: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

GAYO, J; WILHELM, R. O problema que tornou Euler famoso. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, Ed. Especial PROFMAT, p. 342-355, 2015.

GONZÁLEZ URBANEJA, P. M. La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. **Suma**, Madrid, n. 45, p.17-28, Feb. 2004.

KEPLER, J. **Harmonices Mundi**. 1619.

LEONARDO, F. M. (Ed.). **Conexões com Matemática**. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2013.

LOPES, L. S., FERREIRA, A. L. A. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. **Abakós**, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75-88, 2013.

LUMINET, J-P. Science, art and geometrical imagination. In: INTERNATIONAL ASTRONOMICAL UNION SYMPOSIUM, 260, **Proceedings. Paris: UNESCO, 2009. v. 260, p. 248-273.**

MELO, H. S. Os 13 sólidos Arquimedianos. **Correio dos Açores**, São Miguel, p. 13, 13 de Nov. 2014.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: Propostas e desafios. 1.reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. (Col. Tendência em Educação Matemática, v. 10).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Programa Nacional do Livro Didático. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/pnld/apresentacao, Acesso: 03/03/2019.

PAIVA, M. **Matemática**: Ensino Médio. São Paulo: Ed. Moderna, 2013. v. 2.

PEREIRA, H. S. **Poliedros Platônicos**. 2011. 42f. Monografia (Especialização em Matemática para Professores do Ensino Básico). Universidade de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

PLATÃO. **Timeu-Crítias**. Trad. de Rodolfo Lopes. Coimbra: FCT, 2011.

SÁ, C. C.; ROCHA, J. (Ed). **Treze Viagens pelo Mundo da Matemática**. Porto: Universidade do Porto Edições, 2010.

SAITO, F.; DIAS, M. S. Interface entre História da Matemática e Ensino: Uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

SANDIFER, C. E. (Ed.) **How Euler Did It**. Washington Mathematical Association of American, 2007. (The MAA Tercentenary Euler Celebration, Vol. 3).

SANTOS, G. R. C. M., MOLINA, N. L., DIAS, V. F. **Orientações e dicas práticas para trabalhos acadêmicos**. Curitiba: IBPEX, 2007.

SHIRLEY, L. Matemática do século XX: o século em breve revista. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 60, p. 73-78, Nov./Dez. 2000.

SIQUEIRA, R. M. História e Tradição sob Disputa: O caso dos poliedros na Geometria. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Rio Claro, v. 9, n. 17, p. 53-63, 2009.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M. I. **Matemática**: Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2005. v. 2.

KLYVE, D.; STEMKOSKI, L.; TOU, E. Summary E-230 - Elementa doctrinae solidorum. Disponível em: http://eulerarchive.maa.org/, Acesso: 03/03/2019.

THE ARCHIVE EULER. Disponível em: http://eulerarchive.maa.org/, Acesso: 03/03/2019.

TOSSANTO, C. R. A Formação do Pensamento Astronômico e Cosmológico de Johannes Kepler. São Paulo, 2003. Disponível em: http://filosofia.fflch.usp.br/sites/filosofia.fflch.usp.br/files/posdoc/projetos/claudemir_roque_tossato_posdoc.pdf, Acesso: 03/03/2019.

VAZ, D. A. F. A Matemática e a Filosofia de René Descartes. 2010. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/FILOSOFIA/Artigos/Duelci.pdf, Acesso: 03/03/2019.

CAPÍTULO 11

AUSÊNCIA DE PENSAMENTO MATEMÁTICO E ARGUMENTO DEDUTIVO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: RESULTADOS DE UMA PESQUISA

Marcella Luanna da Silva Lima
Universidade Estadual da Paraíba UEPB
Campina Grande – Paraíba

Abigail Fregni Lins
Universidade Estadual da Paraíba UEPB
Campina Grande – Paraíba

Patricia Sandalo Pereira
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul UFMS
Campo Grande – Mato Grosso do Sul

RESUMO: É sabido que prova e demonstração são o coração do pensamento matemático e do argumento dedutivo. Desse modo, as habilidades de provar e demonstrar em Matemática são tão importantes para o desenvolvimento matemático quanto para a formação do cidadão crítico. Nosso capítulo refere-se ao recorte da uma pesquisa de mestrado vinculada ao Projeto OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL Núcleo UEPB. Objetivamos investigar tipo de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico de alunos do 2º Ano do Ensino Médio, de uma escola pública da cidade de Areia, estado da Paraíba, podem ocorrer a partir de uma proposta didática nos ambientes lápis e papel e aplicativo GeoGebra. Apoiamo-nos em Balacheff (2000) e Nasser e Tinoco (2003) para investigar as provas e demonstrações matemáticas, e em Parzysz (2006) para os níveis do pensamento geométrico. Do estudo de caso com um trio de alunos observamos que o trio possui conhecimento superficial dos assuntos nas atividades analisadas e não são incentivados a argumentar, justificar e provar suas ideias e teoremas matemáticos. Quanto aos tipos de provas, o trio utilizou Empirismo Ingênuo, Justificativa Pragmática e Justificativa Gráfica. Quanto aos níveis do pensamento geométrico, o trio se encontra nos dois níveis da Geometria não-axiomática, isto é, Geometria Concreta e Geometria Spatio-Graphique. O todo concluído nos faz afirmar a ausência do pensamento e argumentação matemáticos no ensino da Matemática escolar, o que nos faz apontar a urgente necessidade de mudança e reformulação em nossas práticas enquanto professores de Matemática da educação básica.

PALAVRAS-CHAVE: Observatório da Educação, Educação Matemática, Provas e Demonstrações Matemáticas, Pensamento Geométrico, GeoGebra.

LACK OF MATHEMATICAL THINKING AND DEDUCTIVE ARGUMENT IN MATHEMATICS EDUCATION: A RESEARCH WORK RESULTS

ABSTRACT: It is known that proof and demonstration are the heart of the mathematical thinking and of the deductive argument. In this way, the abilities of proofing and demonstrating

in Mathematics are as important for the mathematical development as for the critical citizen education. Our chapter refers to part of a master research work linked to the network OBEDUC project UFMS/UEPB/UFAL Center UEPB. We aimed to investigate the type of mathematical proofs and demonstrations and the level of geometrical thinking of second year high school students, from a public school in the city of Areia, state of Paraíba, can happen from a didactical propose on pencil and paper environment and software GeoGebra. We based on Balacheff (2000) and Nasser and Tinoco (2003) for investigating the mathematical proofs and demonstrations, and on Parzysz (2006) for the levels of geometrical thinking. From the three students case study we observed that the three have a superficial knowledge of the subjects in the analyzed activities and they are not encouraged to argue, to justify and to prove their mathematical ideas and theorems. According to the type of proofs, the three students used Ingenuous Empiricism, Pragmatic Justification and Graphic Justification. According to the geometrical thinking levels, the three students are on the two levels of non-axiomatic Geometry, i.e., Concrete Geometry and Spatio-Graphique Geometry. The whole conclusion make us to state the lack of mathematical thinking and argumentation in the school Mathematics teaching, which make us to point out the urgent need of changing and reformulating our teaching practices as school Mathematics teachers.
KEYWORDS: Observatory of Education, Mathematics Education, Mathematical Proofs and Demonstrations, Geometrical Thinking, GeoGebra.

1 I INTRODUÇÃO

Nosso capítulo tem como objetivo apresentar alguns resultados de atividades realizadas na pesquisa de mestrado (LIMA, 2015) vinculada ao Projeto OBEDUC em rede UFMS/UEPB/UFAL Núcleo UEPB no Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu PPGECEM da UEPB.

Ao analisarmos os diversos documentos que norteiam a estruturação do currículo escolar, percebemos que a Geometria aparece como um dos elementos de grande importância (REIS e LINS, 2010). Porém, é dada pouca relevância a esta disciplina quando ensinada no Ensino Fundamental e Médio, assim como é senso comum entre professores e alunos desprezá-la, nos dando a impressão, conforme argumenta Lorenzato (2006), de que *a Geometria é a parte da Matemática* cujo ensino tem sido boicotado pelos professores. Nesse sentido, as provas têm um papel importante na Matemática, uma vez que é a partir delas que confirmamos se algo é válido ou não. Almouloud (2007) afirma que a demonstração em Matemática é uma das competências indicadas nos PCN para o Ensino Fundamental e Médio, como parte integrante do currículo da escola básica. Além disso, mesmo sendo as provas e argumentações uma das competências indicadas nos PCN, avaliações internas no Brasil, como a Prova Brasil e o ENEM, e avaliações internacionais, como o PISA, mostram que nossos alunos não dominam a Matemática (AGUILAR JR e NASSER, 2012).

À vista disso, pensamos na realização de uma pesquisa que motivasse os alunos a argumentarem, justificarem e provarem com mais frequência alguns enunciados da Geometria, aliando sua verificação no aplicativo GeoGebra. Nesse sentido, buscamos responder *Que tipos de provas e demonstrações matemáticas e nível do pensamento geométrico podem ocorrer a partir de uma proposta didática por alunos do 2º ano do Ensino Médio?* Desse modo, a pesquisa foi realizada com um trio de alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual situada na cidade de Areia, estado da Paraíba, nos ambientes lápis e papel e aplicativo GeoGebra (LIMA, 2015).

2 I PROVAS E DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS

Sabemos que a prova é característica essencial da Matemática e que ela produz uma nova compreensão, uma vez que ela possibilita que o aluno produza novas ligações conceituais e novos métodos para resolver determinados problemas matemáticos. Os PCN nos recomendam que o currículo de Matemática deva propiciar experiências e atividades que possibilitem aos alunos o desenvolvimento de conjecturas e a formulação e a comunicação de argumentos matematicamente válidos.

De acordo com Balacheff (2000), as provas são explicações aceitas em um determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para uma comunidade, mas também pode ser rejeitada por outra. Já as demonstrações se tratam de uma série de enunciados que se organizam seguindo um conjunto bem definido de regras. Nesse sentido, em nossa pesquisa consideramos que provas e demonstrações não são palavras sinônimas, isto é, tomamos a prova em um significado mais amplo, podendo ser entendida como um discurso para estabelecer a validade de uma afirmação, não necessariamente aceita no domínio matemático. Dessa forma, as justificativas encontradas nas produções dos alunos serão aceitas dentro do contexto escolar dos mesmos, em termos do raciocínio envolvido, mesmo sabendo que muitas vezes estes não consigam atingir a formalização necessária. Já a demonstração, ou prova formal, será considerada um tipo de prova aceita pela comunidade dos matemáticos, a qual é baseada em um conjunto de axiomas e de outras propriedades já demonstradas, devendo ser obtida por meio de um processo hipotético-dedutivo (GRINKRAUT, 2009). Balacheff (2000) identificou quatro tipos principais de provas: o empirismo ingênuo, a experiência crucial, o exemplo genérico e a experiência mental. O empirismo ingênuo consiste em afirmar a validade de uma conjectura após a observação de um pequeno número de casos. Esse tipo de prova é o mais rudimentar e é uma das primeiras formas no processo de generalização. A experiência crucial consiste em afirmar a validade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente não familiar; o aluno toma a consciência de que busca por um resultado geral. O exemplo genérico consiste na busca por uma generalização baseada em exemplos, mas o aluno procura justificá-la com a teoria relacionada à proposição. E a experiência mental consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica; o aluno não faz mais referência ao caso particular, a afirmação é elaborada para uma classe de objetos e a validação é inteiramente sustentada na teoria.

Nasser e Tinoco (2003) nos apresentam outros tipos de provas: a justificativa pragmática, na qual o aluno atesta a veracidade de uma afirmativa com base em alguns casos particulares; a recorrência a uma autoridade, o aluno afirma que é verdadeiro porque o professor falou ou porque está no livro; o exemplo crucial, o aluno desenvolve através de um exemplo o raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral; e a justificativa gráfica, o aluno mostra em uma figura por que o resultado é verdadeiro. Portanto, segundo Grinkraut (2009), a construção da prova no contexto escolar é diferente daquela direcionada aos matemáticos na Academia, uma vez que na escola consiste em convencer alguém ou a si mesmo que determinada afirmação é verdadeira. Mas para isso a qualidade dos argumentos necessários para tal convencimento, como também o nível de generalidade de uma prova é variável, já que o aluno pode se convencer da validade de um teorema apenas utilizando casos particulares. Isto quer dizer que os argumentos, ou justificativas produzidas, pelos alunos devem ser considerados como objetos de ensino e não apenas como respostas inconsistentes, mesmo que muitas vezes os alunos utilizem argumentos que não constituem uma demonstração, ou prova formal aceita pela comunidade matemática.

3 I NÍVEIS DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Parzysz (2006) buscou desenvolver um quadro teórico para estudar o raciocínio geométrico, tentando estabelecer uma articulação entre a percepção e a dedução. Dessa forma, ele tomou como base a natureza dos objetos que são estudados na Geometria e seu tipo de validação. Assim, ele considera dois tipos de Geometria: a não-axiomática e a axiomática.

De acordo com Dias (2009), nas Geometrias não-axiomáticas, o estudo é voltado para uma situação concreta, os objetos são modelos da realidade, se referem a eles, ou a uma representação deles por meio de maquetes ou desenhos. A validação de uma afirmação é feita por meio da percepção, isto é, o aluno afirma que é verdadeiro porque assim ele vê ou percebe. Já nas Geometrias axiomáticas os objetos são teóricos e podem se referir ao real. A validação é feita por meio de teoremas e axiomas. Diferentemente da não-axiomática, nesta Geometria uma afirmação que origina-se de uma observação da realidade ou não só será verdadeira se puder ser demonstrada. Desse modo, Parzysz (2006) propôs um quadro teórico que comporta um total de quatro paradigmas:

	Geometrias não-axiomáticas		Geometrias axiomáticas	
Tipos de Geometria	Geometria concreta (G0)	Geometria spatio-graphique (G1)	Geometria proto-axiomática (G2)	Geometria axio-mática (G3)
Objetos	Físicos		Teóricos	
Validação	Perceptiva		Dedutiva	

Quadro 1 - Síntese da classificação da Geometria segundo Parzysz

Fonte: Parzysz (2006)

Parzysz (2006) afirma que os elementos que repousam sobre sua proposta são, por um lado a natureza dos objetos em jogo (físico vs teórico) e, por outro os modos de validação (perceptiva vs dedutiva). Nesse sentido, Dias (2009) afirma que as Geometrias não-axiomáticas estão subdivididas em duas outras: a Geometria Concreta (G0) e a Geometria Spatio-Graphique (G1). Em G0 os objetos são físicos e suas características físicas influenciam as observações e constatações; a validação é somente percepção. Já em G1 os objetos ganham uma representação gráfica, podendo ser um esboço ou um desenho construído por processos geométricos. Dessa forma, essa ação já é um primeiro passo para o processo de abstração, uma vez que os alunos necessitam reconhecer as propriedades que são características do objeto para determiná-los e, assim, fazer sua representação gráfica; a validação é baseada na comparação visual e sobreposições.

Como afirma Dias (2009), as Geometrias axiomáticas se subdividem em Proto-Axiomática (G2) e Axiomática (G3). Em G2 o aluno ainda pode recorrer a objetos físicos, mas a sua existência é garantida pelas definições, axiomas e propriedades entre figuras; a validação se dá por meio de um discurso dedutivo aplicado aos dados do enunciado do problema. Já em G3 os objetos são teóricos e se tentarmos representá-los poderá haver deformações do objeto representado; a validação é teórica, baseada em axiomas, definições e teoremas.

4 I METODOLOGIA

O Projeto OBEDUC Núcleo UEPB, coordenado por Dra. Abigail Fregni Lins, e de coordenação geral de Dra. Patricia Sandalo Pereira, é composto de 20 membros: 5 mestrandos, 7 professores da educação básica e 8 graduandos, organizado em 4 Equipes. Cada Equipe formada por 1 mestrando, 2 professores da educação básica e 2 graduandos. Fizemos parte da *Equipe Provas e Demonstrações Matemáticas*, na qual trabalhamos de forma colaborativa, ou seja, foi um trabalho onde todos tiveram oportunidade igual e negociação de responsabilidades, em que todos os participantes tiveram voz e vez em todos os momentos da pesquisa, podendo expressar livremente suas ideias, interpretar e descrever práticas e teorias, abordando suas compreensões, concordâncias e discordâncias em relação aos discursos dos outros participantes (IBIAPINA, 2008). Desse modo, estudamos vários artigos e livros referentes à utilização das provas e demonstrações no ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica; a utilização de aplicativos nas aulas de Matemática, em especial o GeoGebra; e o desenvolvimento de um trabalho colaborativo entre equipes de pesquisadores, professores e alunos das universidades.

De cunho qualitativo, nossa pesquisa contempla uma metodologia de investigação que destaca o uso da descrição, da indução, da teoria fundamentada e do estudo das percepções pessoais (BOGDAN e BIKLEN, 2003). Além disso, Stake (2011) afirma que seu raciocínio se baseia principalmente na percepção e na compreensão humana. Ou seja, o pesquisador é um instrumento ao observar ações e contextos e ao desempenhar uma função subjetiva no estudo, uma vez que ele se utiliza da sua experiência pessoal em fazer interpretações.

Nossa pesquisa qualitativa se deu como estudo de caso, o qual consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico (BOGDAN e BIKLEN, 2003). Além disso, o estudo de caso como estratégia de pesquisa compreende um método que abrange tudo, desde a lógica de planejamento incorporando abordagens específicas até a coleta e a análise de dados. Portanto, de acordo com Yin (2001), o estudo de caso não é nem uma tática para coleta de dados nem meramente uma característica de planejamento, mas sim uma estratégia de pesquisa abrangente. Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram redação sobre provas e demonstrações matemáticas, observação participante, notas de campo, imagens e gravações em áudio e a Proposta Didática. A redação sobre Provas e Demonstrações Matemáticas teve como objetivo traçar o perfil dos alunos sobre o que pensam serem provas e demonstrações matemáticas. Desse modo, eles receberam uma folha composta por linhas e com o título Provas e Demonstrações Matemáticas, livres para escreverem ou não o que sabiam a respeito desse tema. Utilizamos a observação com o intuito de a mesma nos auxiliar a identificar e a obter provas a respeito de objetivos sobre os quais os indivíduos pesquisados não têm consciência, mas que orientam seu comportamento. As notas de campo nos auxiliaram a ter uma descrição fidedigna das atividades, conversas, acontecimentos, problemas e dificuldades encontradas no decorrer da aplicação das atividades da Proposta. A opção de gravar em áudio se deu no momento do trabalho dos alunos no desenvolver das atividades da Proposta, uma vez que houve uma maior interação nas argumentações das resoluções dessas atividades. A Proposta Didática foi elaborada pelos cinco componentes de nossa Equipe e versa sobre três importantes assuntos da Geometria: *Teorema de Pitágoras, Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo e Teorema do Ângulo Externo.*

Trabalhamos em nossa pesquisa com as Atividades 8 da Parte I, 1 e 2 da Parte II e cinco da Parte IV, *todas referentes ao Teorema de Pitágoras e ao Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo*. Essas atividades fazem com que os alunos justifiquem e argumentem as suas respostas, a raciocinarem bastante e a refletirem sobre as propriedades e conceitos inerentes ao passo a passo e às construções. Pretendia-se, com isso, que os alunos percebessem que não é necessário decorar esses teoremas, uma vez que são ferramentas utilizáveis na resolução de inúmeros problemas da Geometria.

Realizamos a pesquisa com 20 alunos do 2º ano do Ensino Médio do turno da tarde e dividimos essa pesquisa em três momentos, desenvolvidos em três tardes. A escolha desses alunos do Ensino Médio se deu pelo fato de já terem estudado os assuntos que estavam sendo contemplados na nossa Proposta Didática. Escolhemos alunos do Ensino Médio pressupondo que eles já detinham algum conhecimento sobre os três assuntos explorados na Proposta.

No primeiro momento, explicamos aos alunos nosso intuito da pesquisa e pedimos a colaboração dos mesmos, para que a mesma fosse feita da melhor forma possível. Logo após foi proposto que os alunos redigissem uma redação sobre Provas e Demonstrações Matemáticas, na qual os alunos estiveram livres para escreverem o que pensam e sabem a respeito desse tema. Além disso, fizemos uma pequena intervenção com a turma, na qual explicamos o que é um objeto matemático, a definição de Teorema e a explanação de uma demonstração, como também revisamos alguns conteúdos relacionados a triângulos, como definição, classificação quanto aos lados e ângulos, tipos de ângulos, entre outros. Salientamos que nessa intervenção não trabalhamos com os três assuntos que norteiam a nossa Proposta, visto que pretendíamos observar os conhecimentos que estes alunos tinham a respeito dos mesmos. Ainda nesse primeiro momento, fizemos outra intervenção com essa turma, na qual apresentamos o aplicativo GeoGebra, explicando o aplicativo, quem desenvolveu, o layout do mesmo, as opções de ferramentas presentes na barra de botões, etc. Além disso, realizamos algumas atividades utilizando as ferramentas disponíveis na barra de botões e uma construção referente à função afim, na qual observamos o que acontece com o gráfico da função ao movimentarmos os seletores a e b.

No segundo momento, aplicamos as Partes I e II da Proposta Didática, que diz respeito aos assuntos de Teorema de Pitágoras e Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Nesta tarde, os alunos divididos em 10 duplas foram orientados a resolver as onze primeiras atividades da Proposta. No último momento, trabalhamos as Partes III e IV, que versam sobre o Teorema do Ângulo Externo e atividades a serem realizadas no GeoGebra. Desse modo, os alunos foram orientados a resolver as últimas oito atividades da Proposta. Nesse último momento, só contamos com a presença de 7 alunos, uma vez que nesse dia foi ponto facultativo nas outras escolas estaduais do município de Areia e, por conta dos alunos residirem na zona rural, não havia ônibus para a maioria deles ir à escola. Desse modo, esses 7 alunos foram divididos em duas duplas e um trio. Como esses 7 alunos participaram de todos os momentos da Proposta, consideramos as atividades dos mesmos. Dos 7 escolhemos um trio de alunos para analisar as suas oito atividades, uma vez que foram as mais ricas em termos de tentativa de responder a todas as perguntas/atividades. Baseamo-nos em Balacheff (2000) e Nasser e Tinoco (2003) quanto às provas e demonstrações matemáticas, e Parzysz (2006) quanto ao nível do pensamento geométrico.

Diante de tantos instrumentos utilizados em nossa pesquisa, escolhemos a técnica de triangulação para a organização e análise dos dados, pois a triangulação nos permite olhar para o mesmo fenômeno, ou questão de pesquisa, a partir de mais de uma fonte de dados, nas quais contêm informações advindas de diferentes ângulos que podem ser utilizadas para corroborar, elaborar ou iluminar o problema de pesquisa (LINS, 2003).

5 I RESULTADOS E CONCLUSÕES

A Atividade 8 (Parte I) foi adaptada de Ferreira Filho (2007), a qual conduziríamos o aluno a uma prova para o Teorema de Pitágoras, utilizando os conceitos de áreas de um quadrado e de um triângulo. Nessa atividade, os alunos iriam observar um quadrilátero composto por quatro triângulos retângulos e um quadrado inscritos e chegariam a fórmula do Teorema de Pitágoras, utilizando os conceitos de áreas. Nessa atividade buscamos observar em qual nível do pensamento geométrico esses alunos se encontram.

A Atividade 1 (Parte II) foi adaptada da questão G1 do AprovaME, na qual pedíamos para o trio escolher um dos cinco tipos de prova (Amanda, Dario, Hélia, Cíntia e Edu), que ele possivelmente faria e o que o professor daria a maior nota, para o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo. Além disso, pedíamos para esses alunos justificarem a sua escolha.

Dessa forma, a resposta de Amanda diz respeito a uma experiência crucial; a de Dario, um empirismo ingênuo (forma mais rudimentar de uma prova); a de Hélia, um empirismo ingênuo; a de Cíntia, uma experiência mental; e a de Edu, um exemplo genérico. Por meio dessa atividade buscaríamos verificar o tipo de prova que eles possivelmente utilizariam para verificar a validade do Teorema.

A Atividade 2 (Parte II) foi elaborada por nossa Equipe. Nela já havia uma demonstração do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo utilizando os conceitos dos tipos de ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

Fizemos alguns questionamentos sobre a demonstração e objetivávamos que o trio de alunos conseguisse chegar a outro tipo de prova para esse Teorema. Nessa atividade iríamos analisar o nível de pensamento geométrico dos alunos e qual tipo de prova eles utilizaram.

Para o trabalho no GeoGebra disponibilizaríamos as construções para as cinco atividades, as quais foram retiradas do TubeGeoGebra. Dessa forma, para a Atividade

1 (Parte IV) disponibilizamos uma construção para a verificação do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, utilizando os conceitos de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. Nessa atividade, elaboramos algumas questões para direcionar o manuseio da construção e iríamos observar o nível do pensamento geométrico dos alunos.

Para a Atividade 2 (Parte IV) disponibilizamos um triângulo com seus três ângulos internos, apresentando a soma dos mesmos. Desse modo, o trio de alunos iria movimentar os vértices do triângulo e perceber o que acontecia com a soma dos três ângulos internos. Nessa atividade, elaboramos algumas questões para nortear a movimentação da construção e iríamos observar o nível do pensamento geométrico desses alunos. Para a Atividade 3 (Parte IV) disponibilizamos uma construção que já havia alguns questionamentos relacionados às movimentações das figuras. Essa atividade é referente ao Teorema de Pitágoras e os alunos iriam levar os quadriláteros inscritos nos quadrados dos catetos para o quadrado da hipotenusa. Nessa atividade buscamos observar o nível do pensamento geométrico dos alunos.

Para a Atividade 4 (Parte IV) disponibilizamos a construção relacionada à verificação do Teorema de Pitágoras, onde os alunos iriam movimentar os seletores (ou controles deslizantes) e observar o que acontecia com os quadrados dos catetos e o quadrado da hipotenusa. Nessa atividade elaboramos algumas questões para auxiliar nas movimentações da construção e buscamos observar o nível do pensamento geométrico desses alunos.

A Atividade 5 (Parte IV) foi adaptada de Ferreira Filho (2007) e disponibilizamos a Montagem Perigal, composta por 5 peças coloridas, 4 dentro do quadrado médio e uma no quadrado menor. Nessa atividade fizemos algumas questões para orientar as movimentações da construção, como também pedíamos que eles construíssem um triângulo retângulo e verificassem a relação (Teorema de Pitágoras) observada por meio da Montagem Perigal. Nessa atividade, buscamos observar o nível do pensamento geométrico desses alunos e o tipo de prova que eles utilizam.

Dessa forma, observamos que o trio de alunos quase não trabalha com os variados tipos de prova e demonstração na sala de aula e nem ouviram falar das mesmas, uma vez que, por meio das redações, observamos que esses alunos consideram as provas como as avaliações aplicadas bimestralmente pelos professores de Matemática. Além disso, percebemos que esses alunos não conseguiram interpretar corretamente o que estava sendo pedido, deixando algumas questões em branco ou afirmando que não se lembravam do assunto, como ocorreu na Atividade 8 (Parte I). Além deles não terem conseguido interpretar corretamente as perguntas, esses alunos não lembraram os conceitos presentes nas Atividades, os quais dizem respeito aos produtos notáveis, cálculo de áreas (quadrado e triângulo), congruência de triângulos, potenciação, translação, rotação e intersecção, como também tiveram dificuldade em perceber que a área do quadrilátero da Atividade 8 (Parte I) podia ser vista de duas formas diferentes.

À vista disso, percebemos que esses alunos não dominam a Matemática, muito menos são incentivados a utilizar as provas e demonstrações matemáticas em sala de aula (ALMOULOUD, 2007; NASSER e TINOCO, 2003; AGUILAR JR e NASSER, 2012). Além disso, a realidade mostra que a maioria de nossos alunos não está aprendendo a pensar e raciocinar quando se estuda Matemática (NASSER e TINOCO, 2003). Dessa forma, constatamos que o trio de alunos investigado não está habituado a pensar e comunicar suas ideias e isso foi confirmado durante as aplicações da Redação e da Proposta Didática, uma vez que a maioria dos alunos não se mostrou interessada em escrever a redação e em resolver as Atividades, como também tiveram dificuldades para expressar as suas ideias e justificar suas respostas. Confirmamos também que esse trio de alunos não conseguiu utilizar a Álgebra para resolver problemas geométricos, uma vez que a maioria das Atividades precisava dessa ligação da Álgebra com a Geometria e os alunos não conseguiram algebrizar as áreas de um triângulo e de um quadrado para o Teorema de Pitágoras, o que confirma as ideias defendidas por Lorenzato (apud BERTOLUCI, 2003), que afirma que uma das causas para o abandono da Geometria no Brasil é que seu ensino passou a ser algebrizado após o Movimento da Matemática Moderna. Ou seja, os alunos são motivados a decorar as fórmulas para atividades mecânicas e quando esses alunos se deparam com atividades que os motivem a refletir, justificar e provar as suas ideias, os mesmos não conseguem aplicar às fórmulas ou conceitos aprendidos, pois não estão habituados a responder questões desse tipo.

Quanto aos objetivos pretendidos em cada atividade, percebemos que, em sua maioria, os alunos não o atingiram, com exceção das Atividades 1 e 2 (Parte II) e Atividade 2 (Parte IV). Nas demais atividades, os alunos conseguiram responder o que estava sendo pedido, porém não aprofundaram suas ideias e seus conhecimentos, uma vez que ficaram somente na percepção do que estavam vendo. Além disso, tiveram dificuldades com alguns conceitos geométricos, deixando algumas questões em branco, como também não conseguiram perceber a verificação do Teorema de Pitágoras na construção e acabaram identificando outra relação na Atividade 5 (Parte IV). Portanto, quanto ao nível do pensamento geométrico do trio de alunos, percebemos que, na maioria das atividades analisadas, esses alunos se enquadram nos dois níveis da Geometria não Axiomática (PARZYSZ, 2006): a Geometria Concreta (G0) e a Geometria Spatio-Graphique (G1), uma vez que o trio de alunos se utilizou de observações e constatações para justificar as características físicas das construções presentes nas atividades e, para isso, a validação feita por eles foi baseada somente na percepção. Além disso, confirmamos que os mesmos se enquadram nesses dois níveis, já que à medida que requisitados conhecimentos mais apurados tiveram dificuldade em desenvolver suas ideias, justificativas e não perceberam os conceitos e propriedades presentes na maior parte das Atividades.

Finalmente, as poucas provas que esses alunos realizaram nas Atividades 1 e 2 (Parte II), e 5 (Parte IV) se enquadram em três tipos de provas: Empirismo Ingênuo

(BALACHEFF, 2000), o qual esses alunos utilizaram casos particulares para provar a validade da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo; a Justificativa Gráfica (NASSER e TINOCO, 2003), a qual o trio de alunos construiu um triângulo com as medidas de seus ângulos internos e observou que a soma deles é igual a 180º; e a Justificativa Pragmática (NASSER e TINOCO, 2003), a qual esses alunos, além de construir um triângulo no aplicativo GeoGebra, utilizaram um caso particular para verificar que a relação encontrada na Atividade 5 vale para qualquer triângulo retângulo.

Toda essa discussão nos leva a confirmar as ideias de Nasser e Tinoco (2003) quanto à realidade dos nossos alunos ao estudar a Matemática. Esse trio de alunos é somente uma amostra da situação alarmante em que se encontra o ensino e aprendizagem da Matemática nas escolas brasileiras, uma vez que validamos o que afirma nosso referencial, como também percebemos que esses alunos do 2º Ano do Ensino Médio não estão aprendendo a pensar e raciocinar os diversos conteúdos da Matemática, especialmente o Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo e o Teorema de Pitágoras. Com relação ao trabalho no aplicativo GeoGebra, afirmamos que o trio de alunos não estava familiarizado com o mesmo, nunca trabalhou e nem ouviu falar desse aplicativo, uma vez que não conseguiram construir um triângulo retângulo, tendo que solicitar auxílio a um colega da sala. Dessa forma, o trabalho com o GeoGebra não favoreceu ao trio a verificação, reflexão, conjectura, justificativa e prova matemática, uma vez que seus conhecimentos estão fragmentados e mecanizados, não conseguindo desenvolver e aguçar o raciocínio matemático. Assim, concluímos que o trabalho com o GeoGebra poderia ter sido melhor se os alunos já soubessem trabalhar com o mesmo.

Chegamos à conclusão que o trio de alunos possui um conhecimento superficial do Teorema de Pitágoras e do Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo, em que esses conteúdos são memorizados e não compreendidos por eles. Além disso, a forma mecânica que esses assuntos são trabalhados em sala de aula não permite que os alunos enxerguem além do que é ensinado pelo professor. Ocasionando, assim, a falta de criatividade nas aulas de Matemática, impossibilitando que os alunos raciocinem matematicamente (NASSER e TINOCO, 2003). Por fim, à vista de toda essa discussão, acreditamos ser importante e necessário trabalhar provas e demonstrações matemáticas em sala de aula, pois quanto mais cedo começarmos, de acordo com a faixa etária e os conhecimentos dos alunos, mais fácil será formá-los cidadãos críticos e capazes de defender suas ideias e argumentos, não só matematicamente falando, mas socialmente.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a agência de fomento CAPES pelo financiamento pleno de nosso Projeto OBEDUC em rede UFMS, UEPB e UFAL.

REFERÊNCIAS

AGUILAR JR, C. A.; NASSER, L. Analisando justificativas e argumentação matemática de alunos do ensino fundamental. In: **Vidya**, v. 32, n. 2, pp. 133-147, Santa Maria, jul./dez. 2012.

ALMOULOUD, S. A. Prova e demonstração em Matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem. In: **Portal do GT 19 da ANPEd** (Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação). 30ª reunião. Caxambú – MG, pp. 1-18, 2007.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.

BERTOLUCI, E. A. **Ensinando e aprendendo Geometria: uma experiência com o software Cabri-Géomètre II na 5ª série do Ensino Fundamental**. 233f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2003.

BOGDAN, R. e BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução a teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

DIAS, M. S. S. **Um estudo da demonstração no contexto da Licenciatura em Matemática: uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico**. 214f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

FERREIRA FILHO, J. L. **Um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o Teorema de Pitágoras**. 189f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

GRINKRAUT, M. L. **Formação de professores envolvendo a prova matemática: um olhar sobre o desenvolvimento profissional**. 349f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

IBIAPINA, I. M. L. M. **Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimentos**. 1ª Ed. Brasília: Líber Livro Editora, 2008.

LIMA, M. L. S. **Sobre Pensamento Geométrico, Provas e Demonstrações Matemáticas de Alunos do 2º ano do Ensino Médio nos Ambientes Lápis e Papel e Geogebra**. 192f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

LINS, A.F. **Towards an Anti-Essentialist View of Technology in Mathematics Education**. Tese (Doutorado PhD), Inglaterra, University of Bristol, 2003.

LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

NASSER, L.; TINOCO, L. A. **A. Argumentação e provas no ensino de Matemática**. 2ª Ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

PARZYSZ, B. La géometrie dans l´enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s´agit-il ? In: **Quaderni di Ricerca in Didattica**. n. 17. Italia: Universidade de Palermo, 2006.

REIS, H.G.P.; LINS, A.F. O uso do GeoGebra no auxílio à aprendizagem dos conceitos de Grandezas e Medidas Geométricas. In: **Anais do VI EPEBEM** (Encontro Paraibano de Educação Matemática), Monteiro, pp. 1- 9, 2010.

STAKE, R. E. **Pesquisa qualitativa: estudando como as coisas funcionam**. Porto Alegre: Penso, 2011.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 3. ed. Tradução de Daniel Grassi. Porto Alegre: Bookman, 2001

CAPÍTULO 12

AS FORMAS GEOMÉTRICAS NO DESENHO (ANIMES, MANGÁ): UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA AO ENSINO DE GEOMETRIA

Luciano Gomes Soares
Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática
Campina Grande – Paraíba

Tayná Maria Amorim Monteiro Xavier
Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática
Campina Grande – Paraíba

Mônica Cabral Barbosa
Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática
Campina Grande – Paraíba

Rosemary Gomes Fernandes
Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática
Campina Grande – Paraíba

Maria da Conceição Vieira Fernandes
Universidade Estadual da Paraíba, Departamento de Matemática
Campina Grande – Paraíba

RESUMO: Este trabalho relata uma experiência vivenciada juntamente com os alunos bolsistas do Programa Institucional com Bolsa de Iniciação à Docência da Universidade Estadual da Paraíba (PIBID/UEPB) e alunos do 2º ano do Ensino Médio na Escola Estadual de Ensino Médio Inovador e Profissionalizante Dr. Hortênsio de Sousa Ribeiro – PREMEN, na cidade de Campina Grande – PB, em 2016. O projeto *As Formas Geométricas no Desenho (Animes, Mangá): Uma Proposta Pedagógica ao Ensino de Geometria* visa trabalhar o estudo da geometria plana e espacial a partir dos conceitos abstratos das figuras planas mais conhecidas como: o quadrado, o círculo e o triângulo, de maneira que possam descobrir as formas e as representações espaciais a partir do processo de construção geométrica, utilizando o desenho geométrico como recurso didático que pode ser uma boa estratégia para auxiliar na aprendizagem significativa da geometria, abordando problemas que necessitam de conhecimentos prévios, levando o aluno a investigar e analisar de forma mais crítica, auxiliando-o no processo de ensino aprendizagem da geometria. Os resultados indicaram que os alunos encontraram dificuldades na realização da construção de desenhos, ao usar instrumentos como esquadro, compasso, transferidor e régua, onde o uso destes materiais serviria para que eles tivessem base na representação da projeção dos esboços dos Animes, no processo de construção dos personagens. Notamos, também, que os alunos tinham dificuldades em geometria plana, não sabendo relacioná-la com situações do seu cotidiano. Porém, houve uma aprendizagem motivadora, possibilitando o uso de estratégias com temas que despertaram o interesse deles.

PALAVRAS-CHAVE: Geometria. Interdisciplinaridade. Desenho Geométrico.

THE GEOMETRIC FORMS IN DRAWING (ANIMES, MANGÁ): A PEDAGOGICAL PROPOSAL TO THE TEACHING OF GEOMETRY

ABSTRACT: This paper reports an experience lived together with the scholar ship students of the Institutional Program with the Initiation to Teaching Scholar ship of the State University of Paraíba (PIBID / UEPB) and students of the 2nd year high school of The Innovative and Vocational Education Dr. Hortênsio de Sousa Ribeiro High School - PREMEN, in the city of Campina Grande-PB, in 2016. The project "The Geometric Forms in Drawing (Animes, Mangá): A Pedagogical Proposal to the Teaching of Geometry" aims to work on the study of flat and spatial geometry from the abstract concepts of the flat figures better known as: the square, the circle and the triangle, so that they can discover the forms and the spatial representations from the geometric construction process, using the geometric design as a didactic resource that can be a good strategy to assist in the meaning full earning of geometry, addressing problems that require knowledge the previous ones, leading the student to investigate and analyze in a more critical way, assisting him in the process of teaching geometry learning. The results indicated that students encountered difficulties in carrying out the drawings, using instruments such as square, compass, protractor and ruler, where the use of these materials would serve as a basis for the representation of the projection of the sketches of the Animes, in the process of construction of the characters. We also noticed that the students had difficulties in flat geometry, not knowing how to relate it to situations of their daily life, however, there was motivating learning, enabling the use of strategies with themes that aroused their interest.
KEYWORDS: Geometry. Interdisciplinarity. Geometric draw.

1 I INTRODUÇÃO

A importância da geometria é inquestionável tanto sob o ponto de vista de suas aplicações práticas, quanto do aspecto do desenvolvimento de diferentes competências e habilidades necessárias à formação de qualquer indivíduo. Ela é uma poderosa ferramenta para a compreensão, descrição e inter-relação com o espaço em que vivemos. Ela está e sempre estará presente em nosso cotidiano. Ao andarmos pela cidade observando os prédios, casas, monumentos, comércios, entre outros, estaremos visualizando inúmeras formas geométricas, planas e espaciais. Os arquitetos são os responsáveis por utilizarem a imaginação na elaboração de construções geométricas.

Percebemos essas formas na maioria dos objetos que nos cercam, pois são projetadas a partir das figuras geométricas. Por exemplo: uma lata de ervilha tem a forma de cilindro ou, ainda, a forma de um retângulo.

Segundo as Orientações Curriculares para o ensino médio, o estudo da Geometria deve possibilitar ao aluno,

> [...] o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano [...]. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a Geometria que leva à trigonometria e a Geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes. (BRASIL, 2006, p.76).

Nesse sentido, entende-se que os desenhos geométricos estão presentes em diversos locais, constituindo vários objetos. Se olharmos em nossa volta, verificamos que as formas encontradas são classificadas pela Geometria em relação aos modelos conhecidos.

Dessa forma, concordamos com as perspectivas teóricas indicadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, quanto ao estudo da geometria, pois,

> [...] usar formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. (BRASIL, 2002, p.123).

Para Santos e Nacarato (2014), o desenho é um recurso didático importante. Quando usado para o ensino de geometria, existe um grande desafio, pois muitos alunos possuem dificuldade para desenhar algumas formas geométricas, principalmente em perspectiva. Daí a importância de um trabalho simultâneo com a manipulação de objetos tridimensionais e a sua representação por desenhos, no plano bidimensional.

Em seus estudos, Nascimento (2010) afirma que o ensino do desenho geométrico está *caindo no esquecimento* quando se diz respeito à educação no ensino médio, ocorrendo uma falha para o ensino atual, pois, o ensino do desenho geométrico é indispensável para a formação de indivíduos que poderão ser capazes de superar os desafios e o mundo cada vez mais desenvolvido.

Nessa mesma direção, Machado (2005, p.4) enfatiza que "o desenho é uma importante forma de expressão da criança [...] antes mesmo das competências linguísticas e lógico-matemática. Depois, justamente por valorizar essas ultimas habilidades, a escola abandona a atividade".

Por sua vez, Passos (2009) estabelece uma relação entre as figuras geométricas e os recursos didáticos, pois,

> [...] os recursos didáticos envolvem uma diversidade de elementos utilizados como suporte experimental na organização do processo de ensino e de aprendizagem. Sua finalidade é servir de interface mediadora para facilitar na relação entre

> professor, alunos e o conhecimento em um momento preciso da elaboração do saber. (PASSOS, 2009, p.22).

De acordo com Souza e Pataro (2010), a escola tem papel fundamental no desenvolvimento de habilidades que permitam ao aluno analisar, interpretar e modificar situações de seu dia a dia, ao abordar aspectos interdisciplinares envolvendo a Matemática, sendo utilizada como instrumento de apoio na construção de desenhos geométricos, na resolução de problemas, que envolvam os mais variados assuntos, como, por exemplo, semelhança, relações, medições, proporcionalidade e simetria.

Nesse sentido, entendemos que, na escola, uma postura interdisciplinar traz algumas contribuições, pois os alunos começam a estabelecer um relacionamento de parceria e colaboração com a equipe escolar, bem como com a comunidade onde a escola está inserida. Ou seja,

> [...] a interlocução entre professores de diversas disciplinas poderia ser um caminho para o desenvolvimento de ações sistemáticas de levantar aspectos comuns de sua prática com a de outro professor que trabalha com o mesmo grupo de alunos como uma alternativa para potencializar as oportunidades de interdisciplinaridade em sala de aula. A exploração das articulações esporádicas que são feitas tanto pelos professores quanto pelos alunos deve ser incorporada como uma prática escolar mais sistemática. (TOMAZ; DAVID, 2008, p.130).

Dessa forma, é importante o ensino do desenho através de suas relações interdisciplinares como um instrumento facilitador na construção do conhecimento, pois a abordagem de conteúdos explorando os recursos visuais estimula a visão geométrica e espacial dos alunos, facilitando o processo de ensino aprendizagem.

A construção de um desenho figurativo parte da noção de juntar formas, ou seja, criar a estrutura, a base do desenho. Como por exemplo, ao desenhar uma pessoa, primeiro, você cria um círculo ou uma forma oval para criar uma cabeça; depois um retângulo pra criar tronco e assim vai juntando formas diversas que darão a ideia estrutural do esboço desse desenho.

Nessa direção, o Guia Nacional dos Livros Didáticos (PNLD, 2014) recomenda o estudo das formas geométricas para exercitar as capacidades de visualização dos alunos. Nesse guia, percebemos que alguns conteúdos do ensino médio não têm contribuído de modo desejável para o aperfeiçoamento das habilidades de desenho e de visualização de objetos geométricos.

Nesse sentido, seria importante explorar diferentes perspectivas, projeções, cortes, planificações, entre outros recursos de representação dos objetos. Dessa forma, o ensino médio estará cumprindo seu papel de ampliação, aprofundamento e organização dos conhecimentos matemáticos adquiridos no ensino fundamental, fase esta em que predominam, na abordagem da Matemática, os procedimentos indutivos e informais.

Pela sua simplicidade estrutural, as formas geométricas são a base esquemática utilizada, pelos artistas, para representar graficamente qualquer objeto de pouca espessura ou volumétrico. Sendo eles quadrados ou arredondados, simples ou complexos. Por isso, antes de executar desenhos de objetos, personagens, ambientes, paisagens e demais figuras em perspectiva, com a intenção de delinear a aparência tridimensional da realidade, é bom se deter primeiro em treinamentos passo a passo com planos e sólidos geométricos para melhor compreender sua construção gráfica.

Nesse contexto, o estudo da geometria, a partir do desenho geométrico, é importante em sala de aula, pois,

> [...] habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 1998, p.44).

A partir dessa citação, entendemos que o ensino de geometria plana na escola deve contemplar também o cálculo de áreas de polígonos; resolver e representar situações-problema, utilizando conceitos de figuras planas; desenvolver o conceito de razão entre áreas de figuras planas, utilizando semelhança de figuras; resolver situações-problema envolvendo medidas de superfície, dentre outros aspectos.

Nessa perspectiva, pretendemos alcançar novos métodos de ensino que melhorem e auxilie a capacidade de raciocínio dos alunos, ao agregar novos meios e métodos de adquirir o conhecimento de forma mais contextualizada. Consideramos que o desenho geométrico pode ser uma boa estratégia para auxiliar na aprendizagem significativa da geometria, pois, de forma geral, aborda problemas que necessitam de conhecimentos prévios, levando o aluno a investigar e analisar de forma mais crítica, auxiliando no processo de ensino aprendizagem da geometria.

Com base nessas considerações, e com o intuito de levar os alunos a compreender conceitos matemáticos de uma forma lúdica e prática despertando um pensamento lógico-matemático de forma motivadora, apresentamos, neste estudo, os resultados de uma atividade desenvolvida em 2016, sob a forma de um minicurso e de uma oficina, com os alunos bolsistas do PIBID/UEPB e alunos do Ensino Médio na Escola Estadual de Ensino Médio Inovador e Profissionalizante Dr. Hortênsio de Sousa Ribeiro – PREMEN, na cidade de Campina Grande – PB, envolvendo o assunto "Geometria Plana e Espacial".

2 I METODOLOGIA

Esse projeto foi desenvolvido com os alunos do 2° ano (B, C) do Ensino Médio, onde procuramos mostrar a geometria plana e espacial de formas diferentes. Partindo dessas considerações, o trabalho foi dividido em alguns momentos.

Num primeiro momento, antes de introduzir o assunto sobre geometria plana, a professora regente indagou os alunos para que eles dissessem, com suas palavras, o que eles achavam o que era a geometria plana e se eles conseguiam relacionar com algo. Ao serem questionados sobre o assunto, um dos alunos responde: *acredito que seja alguma coisa que envolve medidas de outra coisa*. Já outro aluno, quando perguntado se conhecia, citou como exemplo a *régua*. Ao perceber que os alunos estavam, intuitivamente, acertando o que ela queria dizer, a partir daí, foram abordados conceitos iniciais de geometria plana (ponto, reta, plano, segmento de reta, entre outros). Ao final, foi proposto que os alunos pesquisassem na internet sobre o processo de criação e os esboços dos Animes e Mangás.

Basicamente, Animes são os desenhos animados produzidos no Japão. E usamos o termo Mangá para todas as histórias em quadrinhos de origem japonesa.

Num segundo momento, ao pesquisarem sobre os esboços, foi pedido para que os alunos pudessem desenhar (esboçar) algum desenho de algum Anime ou Mangá que eles pesquisaram. Ao iniciarem a atividade, percebemos que os alunos gostam de temas do interesse deles, que nesse caso, são os Animes que são animações japonesas, que faz muito sucesso no mundo juvenil. Com acesso ao material que eles tinham pesquisado, começaram a desenhar o corpo de um personagem de Anime, tanto feminino quanto masculino. Desenharam algumas retas e, aos poucos, foram formando um boneco palito. Desenharam um círculo para a cabeça, círculos pequenos para as articulações e triângulos pequenos para as mãos e pés. Desenharam um retângulo curvo para criar o tronco.

Percebemos que, durante esse processo, os alunos iam relacionando alguns conceitos de geometria plana com seus desenhos. Ao passo que iam esboçando possíveis formas geométricas, todas estavam sendo conectadas por linhas para criar o esboço do corpo. Quando alguns alunos desenharam certos personagens femininos, pudemos perceber que alguns detalhes femininos, como seios, a linha da cintura um pouco mais fina ou quadris mais largos, foram sendo esboçados por meio de representações que iam sendo suscitadas por meio de associações/ relações que o aluno estava fazendo para poder compreender o que era para ser percebido de forma visual.

Em um terceiro momento, foi realizada uma Palestra sobre o mundo dos Animes e Mangás, para um total de 20 alunos, onde foi abordada, brevemente, a história dos Animes; a definição da palavra Anime; a cronologia oficial; a característica do estilo dos olhos, do cabelo e das roupas dos personagens; dos gêneros, dentre outros. Como os alunos estavam relacionando os esboços dos seus desenhos com formas geométricas, a palestra procurou envolver algumas formas geométricas, em especial, a geometria plana.

O quarto momento foi dividido em duas partes.

Na primeira parte, foi ministrado um minicurso para um total de 20 alunos, onde abordamos brevemente a definição da geometria plana, suas aplicações, conceitos de algumas figuras geométricas, tais como: área (retângulo, losango, círculo, triângulo), razão e proporção, onde foram explanados os conceitos, definições, propriedades e exemplos. Observamos que os alunos tinham dificuldades no conteúdo de alguns polígonos citados anteriormente. Surgiram dúvidas referentes à razão e proporção nos esboços dos alunos, quando trouxemos uma relação de proporção que serve para medir o tamanho do personagem ou medir sua idade. Explicamos que a idade do personagem é em relação a seu tamanho, ou seja, seu tamanho define sua idade. Porém, nesse caso, pode ser relativo, pois uma pessoa de mais idade pode ser menor que uma pessoa de menos idade.

Figura 1 – Aplicação do Minicurso *PaperToy*

Fonte: Autoria própria (2016)

No andamento da exposição do minicurso, os alunos tiveram um bom comportamento, onde os mesmos participaram ativamente da aula. Assim, a aula tornou-se interativa e prazerosa. Com isso, percebemos o quão produtivo foi para educadores e educandos.

Na segunda parte, foi ministrada uma oficina com os alunos. Trabalhamos a interdisciplinaridade da geometria com o desenho geométrico, a partir de formas geométricas. Como os alunos estavam iniciando os conceitos da geometria espacial, em sala de aula, optamos por trabalhar com eles o *PaperToy*. O *PaperToy* são brinquedos de papel em formatos geométricos, que representam personagens de desenhos animados, carros, casas, barcos e os mais diversos tipos de objetos que se pode imaginar. Os *PaperToys* de personagens de mangás japoneses são chamados de *Pepakura* e tem uma composição mais complexa para montagem, pois são repletos de pequenos detalhes.

Esses materiais de papel, desde os modelos simples (em formato de cubo), até os mais complexos *(Pepakuras)* foram muito bem recebidos pelos alunos, que ficaram motivados em trabalhar com algo que chamasse a atenção dos mesmos. Percebemos que esses objetos podem ser ótimas ferramentas para o ensino da geometria, principalmente, da espacial, pois, possibilitava o desenvolvimento de habilidades fundamentais, principalmente os que envolve relações geométricas.

Figura 2 – Alunos associando/relacionando formas geométricas com o *PaperToy.*

Fonte: Autoria própria (2016)

Em um quinto momento, para fazermos uma avaliação dos alunos, após a aplicação do minicurso e oficina, aplicamos um questionário com a seguinte pergunta: *o que o projeto proporcionou e melhorou sobre o seu conhecimento matemático?*.

Num sexto momento, como os alunos estavam motivados pela cultura japonesa, promovemos um desfile de *Cosplay* na escola. *Cosplay* é um termo em inglês, formado pela junção das palavras costume (fantasia) e *roleplay* (brincadeira ou interpretação). É considerado um *hobby* onde participantes se fantasiam de personagens fictícios da cultura *pop* japonesa. Um *cosplay* pode estar relacionado com personagens de Animes e Mangás, mas, também podem envolver qualquer outro tipo de caracterização que pertença a cultura *pop* ocidental, que também pode abranger personagens de séries, filmes, *games* ou desenhos.

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

Diante de uma avaliação prévia feita pela professora que acompanhava a turma, notou-se a dificuldade e ausência de conhecimentos básicos sobre geometria plana como: definições, propriedades das figuras geométricas, além do desenho (esboço) de figuras geométricas planas e na resolução de situações que envolvam figuras geométricas, ao utilizarem procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução.

Notamos que alguns alunos não tiveram nenhum contato com o desenho geométrico, nem conheciam algumas formas geométricas, antes de iniciarmos o projeto com os mesmos. Apesar disto, destacamos que um número significativo de alunos já teve contato com o desenho, por ser uma prática simples que propicia situações significativas para o desenvolvimento da imaginação e criatividade durante sua produção (SANTOS; NACARATO, 2014). No decorrer do projeto, alguns alunos conseguiram destacar e relacionar o estudo do desenho geométrico a partir das formas geométricas seja na ilustração, no esboço ou na resolução de algum problema, que, segundo eles, poderá contribuir para o pensamento rápido, ocasionando respostas mais rápidas. Em outro momento, um dos alunos argumentou que, em algumas vezes, o desenho *auxilia na resolução de um problema matemático pelo simples fato de desenhar o que se está pedindo*.

Alguns alunos, de início, encontraram dificuldades na realização da construção de desenhos, ao usar instrumentos como esquadros, compasso, transferidor e régua, onde o uso destes materiais serviria para que o aluno tivesse base na representação da projeção dos esboços dos Animes, no processo de construção dos personagens. Nota-se que estes alunos possuem dificuldade na instrumentalização, ou seja, no uso de instrumentos de desenho para a realização do mesmo. Nesse projeto, foram utilizadas estratégias, de modo que fosse possível relacionar a disciplina com materiais que despertasse no aluno novas possibilidades de conhecimento, como afirma Machado (2010).

No momento da oficina, quando fomos ensinar o passo a passo para o processo de criação do *PaperToy*, alguns alunos fizeram suas construções usando folha A3 branca, régua, compasso, tesoura, lápis e borracha. Foi bastante curioso à metodologia usada pelos mesmos para esboçar suas referidas construções, querendo torná-las o mais perfeito possível. A cada passo que dávamos, íamos explicando algumas noções no processo de construção geométrica, incluindo os traços perpendiculares. Resolvemos deixar a atividade mais séria quando resolvemos brincar dizendo que, a perfeição do cubo final iria depender muito da precisão e capricho nas construções preliminares deles. Ao ouvirem isso, um senso de competição tomou conta dos alunos.

Nessa atividade, além de trabalharmos noções de construções geométricas envolvendo figuras espaciais, exploramos: Medidas, Números Irracionais e Aproximação. Ao término dessa atividade de construção na oficina, distribuímos alguns *PaperToys* prontos que imprimimos a partir de pesquisas na internet. Dessa forma, os alunos escolheram os desenhos e Animes que mais gostavam e começaram a recortar o respectivo *PaperToy*, construindo sua referida base.

Para fazermos uma avaliação dos alunos, após a aplicação do minicurso e da oficina, aplicamos um questionário onde os alunos responderam o que o projeto proporcionou e melhorou na visão deles sobre o conhecimento matemático, como afirma um aluno: *“achei super importante, porque lá tinham várias coisas que eu não sabia”*. Já outra aluna, afirmou a importância da interdisciplinaridade da matemática: *“esse minicurso fez com que tivéssemos uma visão de outra forma e mais estratégias de se fazer desenhos utilizando formas geométricas e que possamos enxergar mais das formas geométricas no nosso dia a dia”*. Outro aluno falou da importância de se trabalhar com a Matemática na prática: *“pode-se considerar o minicurso um elemento* *de complemento e de extrema importância do projeto como um todo, trazendo maior entendimento aos alunos participantes”*.

Um dos alunos relacionou o estudo das formas geométricas com a disciplina de Geografia, pois segundo ele: *“dá para se trabalhar a interpretação de mapas facilitando a compreensão dos dados, principalmente no que vemos nos livros didáticos”*.

Ao término da análise do questionário, conseguimos avaliar que todos os alunos que participaram do decorrer do projeto, houve uma aprendizagem motivadora e significativa, capaz de proporcionar uma nova visão da matemática ao relacionar o componente curricular com o seu cotidiano, utilizando os conceitos de geometria em situações do dia a dia (SANTOS; NACARATO, 2014; NASCIMENTO, 2010).

Foi uma experiência de grande riqueza que, certamente, foi muito significante para os alunos que ficaram motivados com técnicas inovadoras de se estudar geometria plana e espacial a partir da interdisciplinaridade com temas do seu cotidiano. Houve muita satisfação tanto da parte dos bolsistas, quanto da parte dos alunos pelo trabalho realizado.

4 I CONCLUSÃO

No presente trabalho tratou-se do ensino e estudo da geometria plana, em turmas do 2º ano do ensino médio, abordando os conceitos, propriedades, construção e visualização das formas geométricas a partir do desenho geométrico, tendo como intuito a melhoria no ensino e aprendizagem da geometria plana.

Percebemos que, a partir da interdisciplinaridade, podemos relacionar temas que relacione o cotidiano do aluno, pois,

> [A interdisciplinaridade] permite uma nova postura diante do conhecimento – deixando de concebê-lo como algo estanque – e também uma mudança de atitude em busca de diferentes contextos para garantir a construção de um conhecimento globalizado, que rompa os limites das disciplinas. (SOUZA, 2013, p.23).

A postura interdisciplinar é uma atitude de busca pelo conhecimento, que traz contribuições para os alunos e os professores. Percebemos que os alunos podem aprender a trabalhar coletivamente, fazendo a interação entre conceitos aprendidos em diferentes disciplinas e desenvolvem a capacidade de argumentar e organizar informações. Ao analisarmos o envolvimento dos alunos nessa atividade, sentimos que os mesmos estavam realmente interessados, por ser algo diferente, de forma que ampliasse seus conhecimentos, fortalecendo e podendo relacionar com conteúdos de outras disciplinas. Dessa forma, o estudo de formas geométricas, a partir do desenho, poderá auxiliar o aluno na formação do cidadão que tenha criatividade e percepção visual, através das características próprias do desenho e necessárias no mundo atual.

Nesse contexto, entendemos que a escola tem a função de promover o desenvolvimento de habilidades que permitam ao aluno analisar, interpretar e, quando necessário, fazer intervenções no meio em que vive. Em nosso trabalho, procuramos, por meio de atividades contextualizadas, abordar aspectos interdisciplinares que envolvam a Matemática, permitindo uma nova postura diante do conhecimento e, também, uma mudança de atitude em busca de diferentes contextos para garantir a construção de um conhecimento que rompa os limites das disciplinas.

Esse estudo nos demonstra como os alunos consideram a disciplina de Matemática como parte importante do currículo, e que a mesma contribui para a sua formação, tanto no aprendizado de outras disciplinas quanto no aprendizado da Matemática em si, transcendendo assim, a interdisciplinaridade.

De um modo geral, a partir dos questionários que foram analisados e do envolvimento dos alunos nas atividades, mostram um envolvimento significativo dos alunos, os quais tendem a assumir um papel mais ativo e mais autônomo nas aulas de Matemática, dando maior ênfase ao raciocínio e aos processos de pensamento em atividades de investigação matemática na sala de aula.

Essa experiência confirmou que a geometria é uma área propícia a realização de investigações por parte dos alunos e que os mesmos se envolvem em interessantes explorações e investigações geométricas, contribuindo para seu potencial na disciplina de Matemática e para outros conteúdos de outras disciplinas no âmbito escolar (PASSOS, 2009).

Espera-se que este trabalho sirva como um estudo que busca levantar questionamentos sobre o tema, promovendo mudanças na realidade de ensino, ao implantar projetos que desenvolvam melhorias e propostas atrativas tanto na formação dos professores quanto ao incentivar os alunos a estudarem a Matemática, servindo como base para que o mesmo professor possa convidar o aluno a participar de forma efetiva na construção do próprio saber e, principalmente, que possa servir como início para que novas pesquisas sejam realizadas ampliando o conhecimento sobre o assunto abordado, permitindo assim, novas descobertas.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio).** Brasília, [s.d.]. p.123. Disponível em: <http: //portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/cienciasnatureza.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 200. p.76.

BRASIL. **Guia de livros didáticos – PNLD 2015:** matemática/ ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

MACHADO, N. O conjunto de habilidades humanas. **Revista Nova Escola,** São Paulo, n. 105, set., 1997. Disponível em: <http://novaescola.abril.com.br/ed/105_set97/html/pedagogia.htm>. Acesso em:

21 jun 2016.

MARINHO, J. et al. **A importância do desenho geométrico no ensino básico e técnico de nível médio.** Disponível em: <http://www.ifto.edu.br/jornadacientifica/wp-content/uploads/2010/12/06-A-IMPORTÂNCIA-DO.pdf >. Acesso em: 21 jun 2016.

NASCIMENTO, R. A. **Desenho Geométrico sob o enfoque da geração e organização da forma.** Disponível em: <http://portal.faac.unesp.br/posgraduacao/design/textos_alcarria/texto11.pdf>. Acesso em: 21 jun 2016.

PASSOS, C. L. B. (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** São Paulo: Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores).

SANTOS, C. A.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em Geometria na educação básica:** a fotografia e a escrita na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

SOUZA, J. R. **Novo olhar matemática:** 2. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **FTD sistema de ensino:** matemática (9º ano). – 1. ed. São Paulo: FTD, 2010. (Coleção FTD sistema de ensino).

TOMAZ, V. S.; DAVID, M. M. S. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

CAPÍTULO 13

A INVESTIGAÇÃO E A MODELAGEM MATEMÁTICA: UM ESTUDO EXPERIMENTAL COM A LARANJA CITRUS SENENSIS

Igor Raphael Silva de Melo
Universidade Federal de Campina Grande
Cuité – Paraíba

Célia Maria Rufino Franco
Universidade Federal de Campina Grande
Cuité – Paraíba

Marcos dos Santos Nascimento
Universidade Federal de Campina Grande
Campina Grande – Paraíba

Villalba Andréa Vieira de Lucena
Universidade Federal de Campina Grande
Campina Grande – Paraíba

RESUMO: É sabido que a Modelagem Matemática, atualmente, é enquadrada em diversas discussões na literatura, na qual discute-se diferentes concepções sobre essa temática na/além da sala de aula. Neste trabalho, abordamos tal temática na perspectiva da Educação Matemática, ou seja, uma metodologia de ensino capaz de apresentar possíveis potencialidades para o desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem de vários conceitos matemáticos. Sendo assim, apresenta-se aqui um relato de uma experiência ímpar, vivenciada entre futuros professores de matemática em formação inicial, pela Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, campus Cuité – PB, com o objetivo de colocar em pratica, através de atividades experimentais, conceitos teórico-metodológicos acerca de Modelagem Matemática apresentadas por Bassanezi (2006). Para tanto, através de diferentes situações-problemas, da realidade dos participantes envolvidos, foi realizado um estudo a fim de investigar a relação entre o comprimento de uma laranja e a quantidade de seu suco por meio da pesquisa, atividades em equipe, coleta e análise de dados das experimentações feitas e pôr fim a obtenção de um modelo matemático capaz de descrever o comportamento desse estudo, utilizando-se um recurso computacional. Dessa forma, conclui-se que, a partir dos resultados dessa atividade, é possível unir, de fato, teoria e prática quando tratamos de aulas de matemática no contexto da modelagem matemática, pois além da tentativa de entender, explicar e resolver o problema através de um modelo puramente algébrico foi possível perceber ricas contribuições para a formação crítica-reflexiva dos estudantes ao se depararem com situações-problema de seu cotidiano.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem Matemática, Experimentação, Laranja.

THE RESEARCH AND MATHEMATICAL MODELING: A STUDY EXPERIMENTAL WITH THE ORANGE CITRUS SENENSIS

ABSTRACT: It is known that Mathematical

Modeling is currently framed in several discussions in the literature, in which different conceptions about this theme are discussed in or beyond the classroom. In this work, we approach this subject in the perspective of Mathematics Education, that is, a teaching methodology capable of presenting potential potentialities for the development of the teaching-learning process of several mathematical concepts. Thus, it is presented here an account of a unique experience, experienced among future teachers of mathematics in initial formation, at a Federal University, located in the city of Cuité, in the state of Paraíba, with the objective of putting into practice, through experimental activities, theoretical-methodological concepts about Mathematical Modeling presented by Bassanezi (2006). A study was carried out to investigate the relationship between the length of an orange and the amount of its juice through research, group activities, data collection, data analysis of the experiments made and also the obtaining of a mathematical model capable of describing the behavior of this study, using a computational resource. Thus, it is concluded that, from the results of this activity, it is possible to unite, in fact, theory and practice when dealing with mathematics classes in the context of mathematical modeling, since in addition to trying to understand, explain and solve the problem through from a purely algebraic model it was possible to perceive rich contributions to the critical-reflexive formation of the students when faced with problem situations of their daily life.
KEYWORDS: Mathematical Modeling, Experimentation, Orange.

1 I INTRODUÇÃO

O estudo de Modelagem Matemática no Brasil vem avançando muito nos últimos anos e ganhando destaque tanto no ramo da Matemática aplicada quanto no Ensino de Matemática, em diferentes níveis de ensino.

Ao tratar da expressão “Modelagem Matemática” neste trabalho, nos remetemos ao termo “modelagem” numa ideia de “modelar”, ou seja, dar forma a algo por meio de um modelo, (Houaiss, 2009). Então, seguindo esse pensamento, a modelagem matemática, propriamente dita, seria a modelagem de situações cotidianas para um objeto de estudo matemático – modelo.

No entanto, devemos ter bastante cuidado sobre o uso desses termos num cenário acadêmico, levando em conta que a Modelagem perpassou por grandes avanços nas pesquisas internacionais e brasileiras em Matemática e Educação Matemática. Ganhando assim na literatura um vasto espaço em discussões sobre diferentes definições, concepções e perspectivas (KAISER-MESSMER, apud BARBOSA, 2001, p.3).

Neste estudo, nos detemos a ideias e princípios trazidas por Rodney Bassanezi, um dentre outros pesquisadores que difundiu a discussão sobre a modelos e modelagem matemática e suas potencialidades no ensino-aprendizagem de Matemática, tornando assim a Modelagem uma linha de pesquisa em Educação Matemática (MALHEIROS, 2012)

Para este percursor, a “modelagem matemática consiste essencialmente na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do real” (BASSANEZI, 2006, p.16).

Desse modo, entende-se que a Modelagem Matemática é tão antiga como a própria Matemática, estando presente em nossas vidas desde eras primitivas, desde que o homem sentiu necessidade em compreender o mundo em que vive, o que desencadeia sua aplicabilidade e funcionalidade no processo evolutivo da sociedade.

Segundo Biembengut (2011), a primeira expressão “Modelagem Matemática” surgiu durante o Renascimento Cultural, na Europa, em estudos como a sequência de Fibonacci e nas primeiras construções de ideias físicas representadas por uma linguagem matemática e atualmente sendo objeto e/ ferramenta de estudo em toda a ciência, principalmente no cenário da educação matemática quando o intuito é trabalhar problemas reais em sala de aula.

Ao se estudar Modelagem Matemática o sujeito objetiva-se a construir modelos capazes de descrever, representar ou exprimir, de fato, a situação real estudada, sendo essa uma das etapas mais difíceis do longo processo de modelagem.

Vale ressaltar que pela vasta aplicabilidade dessa área em áreas afins da ciência, esse processo não é somente próprio dos cientistas, pois para se pensar na construção de um modelo é preciso ter bastante conhecimento matemático e, além disso, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas. (BIEMBENGUT, 2011).

> (...)a Modelagem pode motivar professores e alunos, pois contribui para a exploração e compreensão da matemática, atribui sentido aos estudos de conteúdo, como também torna o processo de ensino e aprendizagem dinâmico e significativo. (BIENBERNGUT E HEIN, 2004, pag.28)

Nessa perspectiva, objeto de estudo neste trabalho é a laranja, fruto da laranjeira, árvore da família Rutaceae, nativa da Ásia, conhecida há mais de quatro mil anos, mas foi no século XVI que os colonizadores portugueses trouxeram a novidade para o Brasil, onde atualmente é dividida em duas espécies, a Citrus Sinensis e a Citrus Aurantium. Ambas reúnem, respectivamente, as laranjas doces, como a Lima, a Bahia, a Pêra e a Seleta, como também, as laranjas azedas que concentram os tipos ácidos (CITRUSBR, 2012).

Essa fruta é rica em vitamina C, sais minerais como ferro, potássio e o cálcio concentrados no seu interior, o qual é formado por gomos onde se localiza o seu suco, líquido que contém suas principais vitaminas, cujo sabor varia do doce ao levemente ácido. Sua forma, cor e tamanho, também variam de acordo com sua espécie.

Diante disso, na presente pesquisa são estudadas laranjas da espécie Citrus

Sinensis, que são as apreciadas no preparo de sucos, doces ou no consumo puro. O seu suco é consumido ao redor do mundo, nasceu como uma fruta amarga, e atualmente, o Brasil é o líder mundial em produção de laranjas, em outras palavras, metade de suco de laranja consumido no mundo é brasileiro, e o Brasil domina 80% do mercado de suco de laranja concentrado (CITRUSBR, 2012).

A escolha desse tema se deu a partir da divisão de temas que envolvam situações-problema do cotidiano, discutidas em aulas, na qual o objetivo desse estudo seria a partir de uma sequência de atividades esquematizadas pesquisar a relação do “tamanho” de uma laranja com a quantidade de seu suco e ainda vivenciar a matemática no contexto da Modelagem Matemática e suas contribuições, segundo as perspectivas da resolução de problemas aplicados a outras áreas do conhecimento, as relações com outras áreas a partir da própria matemática e da fundamental importância, a sócio-crítica, em que a Matemática e a Modelagem não são fins, mas meios para questionar a realidade vivida (KAISER-MESSMER, apud BARBOSA, 2001, p.3).

2 I METODOLOGIA

O trabalho referido foi desenvolvido entre futuros professores de matemática em formação inicial no curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, campus Cuité – PB, ao decorrer das aulas da disciplina Modelagem Matemática, componente curricular opitativa do curso, onde foi proposto pela professora o desenvolvimento de uma atividade experimental, cujo objetivo é por em pratica o processo de modelagem matemática através das aplicações de situações cotidianas.

Nesta literatura, a aplicação trabalhada será sobre a relação do volume de uma laranja e o seu suco, seguindo uma esquematização citada em estudos por Bassanezi (2002).

No primeiro momento foi realizado um levantamento teórico sobre Modelagem Matemática e o processo de modelagem que deu base para a contrução dessa atividade.

Materiais utilizados na Atividade

- Barbante
- Régua
- Laranjas com volumes diferentes
- Recipente milimetrado/ Béquer

Etapas da Atividade

1. Medir o comprimento da laranja (comprimento da circunferencia maior de uma esfera)

2. Expremer a laranja

3. Anotar a quantidade de suco que cada uma possui

4. Determinar a função que descreva a quantidade de suco de uma laranja em função do comprimento maior.

3 I RESULTADOS

Momento 1: Medições

No primeiro momento foi realizado a medição das 10 laranjas, com diferentes volumes (visualmente), por meio de barbante e régua, como mostra a figura a seguir:

Figura 1: Objeto do experimento

Fonte: Dados da pesquisa.

Vale salientar que as medições ocorreram na circunferência maior da laranja, ou seja, a circunferência maior de uma esfera. Sabe-se que a laranja não tem uma forma perfeitamente esférica, mas pelo fato de que a modelagem matemática é um processo de descrição aproximada de fenómenos físicos e naturais da vida real, foi considerado então essa forma geométrica, assumindo erros de aproximação no calculo.

Figura 2: Objeto do experimento e medições

Fonte: Dados da pesquisa.

Momento 2: Extração do suco

Nesta etapa da atividade foi o momento de “botar a mão na massa”, fazendo a extração do suco da laranja, utilizando um objeto comum do dia a dia, o expremedor de laranja.

Figura 3: Expremendo a laranja

Fonte: Dados da pesquisa.

Após cada extração do suco de uma laranja fazíamos a medição de seu suco por meio de um Béquer, é claro que nessa passagem entre expremedor e Béquer perdiamos uma certa quantidade de seu suco, mas que também não foi considerado um problema relevante nesse estudo, por ser uma quantidade que não influêcia na margem de erro de uma modelagem aceitável, ou seja, uma discrepância até 10% .

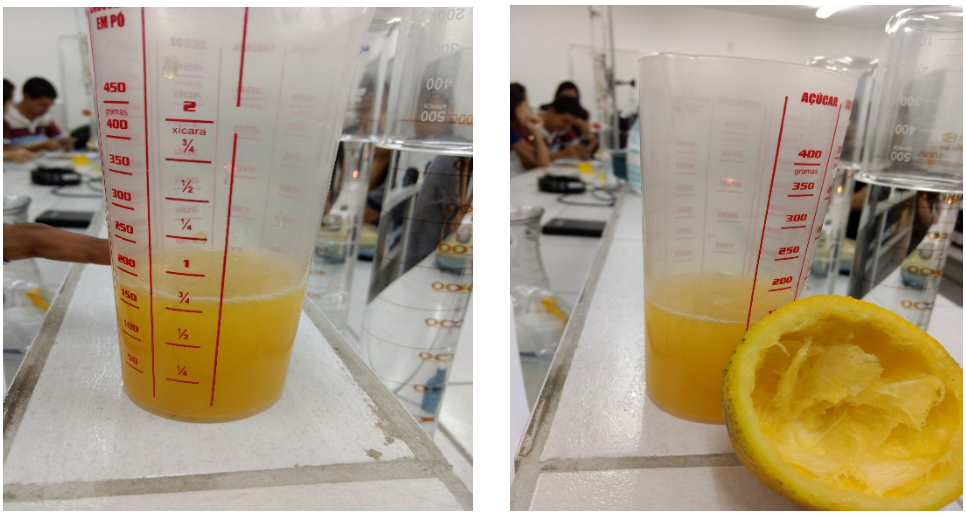


Figura 4: Extração do Suco da Laranja

Fonte: Dados da Pesquisa.

Momento 3: Registros

Os registros da atividade se fundamentaram nas anotações dos dados do experimento, ou seja, do comprimento (cm) e do seu respectivo suco extaído (ml), como é apresentado na tabela a seguir:

Comprimento da Laranja (cm)	Quantidade de Suco (ml)
18	60,5
19,5	70
19,8	67
20	71
20,3	71
22,2	97
22,5	110
22,6	102
28,5	161

Tabela 1: Dados Experimentais

Fonte: Dados da Pesquisa.

Momento 4: Modelagem Matemática

Nesta etapa final da atividade, foi o momento de realmente chegarmos ao objetivo da pesquisa, que é obter uma função que modele (descreva) a quantidade de suco de uma laranja em relação ao seu comprimento.

Podemos observar pelos dados experimentais que houve uma irregularidade na relação entre o comprimento e o suco extraído de uma laranja, de acordo com a hipótese inicial da pesquisa que diz que quanto maior o comprimento de uma laranja mais suco ela terá.

Para a obtenção de uma função que decrevesse esse fenômeno foi utilizado um recurso computacional, o STATISTICA 7, como auxiliar para a modelagem, de modo a representar graficamente a "cara" desse fenômeno, como mostra a figura a seguir.

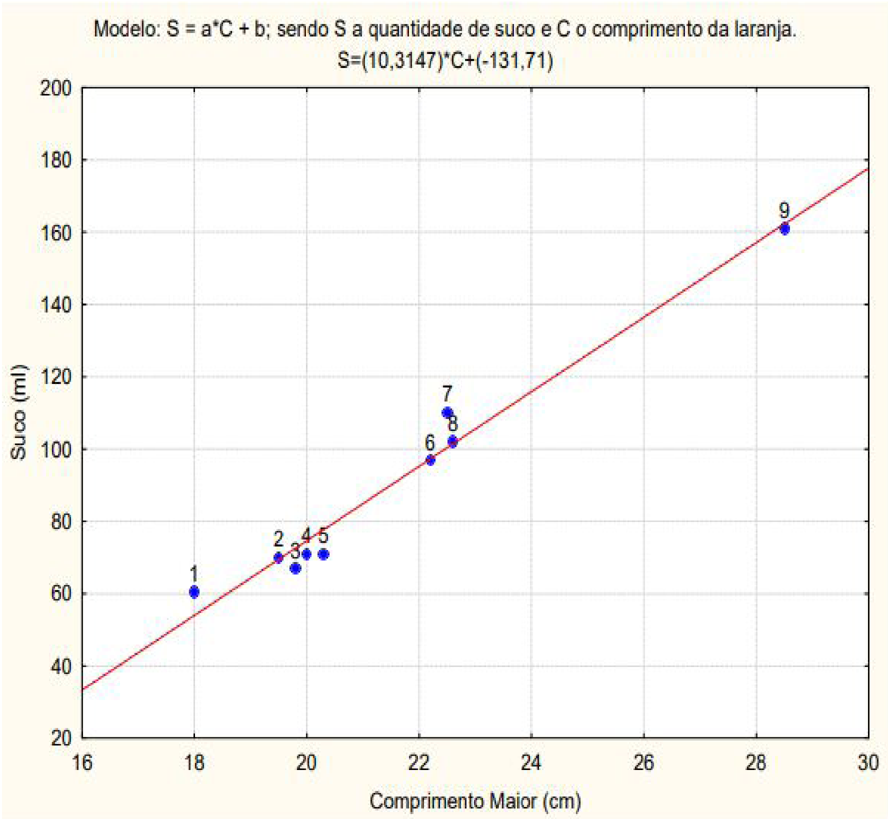


Figura 5: Representação grafica do modelo

Fonte: Dados da Pesquisa.

4 I CONCLUSÃO

De acordo com o exposto, concluímos que o trabalho corroborou com o objetivo da pesquisa, mostrando através das atividades desenvolvidas a modelagem como um processo e não um fim, ou seja, um importante instrumento pedagógico que desenvolve o senso crítico-investigativo dos estudantes, através da pesquisa, coleta e análise dos dados. A solução do problema não é o fim e sim um ponto de partida para novas inquietações e validações matemáticas.

Foi possível desenvolver um relacionamento entre as temáticas das situações-problema e propósito da disciplina, não qual objetivava-se em vivenciar os processos da modelagem matemática através das experimentações.

Além disso, percebeu-se que os envolvidos na pesquisa não se detiveram a resolução puramente algébrica, pois ao desenvolver da pesquisa e das descobertas envolveram-se mais e contestavam a hipótese do problema, dada através do experimento, com resultados invariantes e significativos, pois o comprimento - volume visual - de uma laranja não determina sua quantidade de suco, existem outros fatores que acarretam na sua produção, o que desencadeia questionamentos para futuras pesquisas na área de Matemática, Modelagem Matemática ou até mesmo Engenharias.

Em suma, percebe-se que aulas de matemática no contexto da modelagem matemática aponta como um dos fortes potenciais no processo de ensinar e aprender conceitos matemáticos, visto que os motiva e dar significado ao “fazer matemática”.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores**. 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

CITRUSBR (Associação Nacional dos Exportadores de Sucos Cítricos). Resumo do consumo mundial de bebida. Disponível em: Acesso em: 05 mar. 2012.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. **Dicionário Houaiss de Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

MALHEIROS, A. P. S. **Pesquisas em Modelagem Matemática e diferentes tendências em Educação e em Educação Matemática**. Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), 2012

CAPÍTULO 14

“A MAÇÃ DO PROFESSOR”: EXPLORANDO O CÁLCULO DO VOLUME DE UMA MAÇÃ EM AULAS DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Igor Raphael Silva de Melo
Universidade Federal de Campina Grande
Cuité – Paraíba

Célia Maria Rufino Franco
Universidade Federal de Campina Grande
Cuité – Paraíba

Isaac Ferreira de Lima
Universidade Federal de Campina Grande
Cuité – Paraíba

João Elder Laurentino da Silva
Universidade Federal de Campina Grande
Cuité – Paraíba

Jucimeri Ismael de Lima
Universidade Federal de Campina Grande
Cuité – Paraíba

RESUMO: O presente artigo apresenta relatos de uma atividade desenvolvida entre discentes e docente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Campina Grande-UFCG, campus Cuité – PB, durante aulas de uma disciplina optativa, Modelagem Matemática. Trata-se do cálculo do volume da maçã e da sua área superficial, de uma forma investigativa e de caráter exploratório-reflexivo, na perspectiva da Modelagem Matemática apresentada por Bassanezi (2006). As atividades desenvolvidas se deram a partir de diferentes estratégias para realização de tais cálculos, como a fórmula do volume da esfera até o Cálculo Diferencial e Integral, sendo que estas obedecem a uma sequência gradual em termos de complexidade conceitual e de modo a dar capacidade ao aluno na resolução de problemas e a desmistificar e compreender a relação entre teoria e prática em aulas de Modelagem Matemática através de experimentações e validações matemáticas.

PALAVRAS-CHAVE: Relato de Experiência, Modelagem Matemática, Experimentações.

"THE TEACHER’S APPLE ": EXPLORING VOLUME CALCULATION OF AN APPLE IN MATHEMATICAL MODELING CLASSES

ABSTRACT: This article presents reports of an activity developed among students of the degree course in Mathematics of the Federal University of Campina Grande-UFCG, located in the city of Cuité, in the state of Paraíba. During the course of an optional course, Mathematical Modeling, we deal with the calculation of the volume of the apple and its surface area, in an investigative and exploratory-reflexive manner, from the perspective of Mathematical Modeling presented by Bassanezi (2006). The activities developed were based on different strategies for performing such calculations, such as formula of the volume of the sphere to the Differential and Integral Calculus, which follow a gradual sequence in terms of conceptual complexity in order to empower the student in solving problems, and to demystify and understand the

relationship between theory and practice in Mathematical Modeling classes through mathematical experimentation and validation.
KEYWORDS: Experience Reporting, Mathematical Modeling, Experimentation.

1 I INTRODUÇÃO

Cotidianamente as pessoas se questionam e buscam entender determinados fenômenos da natureza, que em alguns casos não podem ser, suficientemente, explicados ou demonstrados de acordo com o ponto de vista do senso comum. Surge então, uma linguagem apropriada para uma melhor compreensão desses fatos, a Modelagem Matemática, a qual busca transformar situações da nossa realidade em problemas matemáticos e cujas soluções devem ter suas interpretações na linguagem usual.

> A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças. Salientamos mais uma vez que a aplicabilidade de um modelo depende substancialmente do contexto em que ele é desenvolvido – um modelo pode ser "bom" para o biólogo e não para o matemático e vice-versa. (BASSANEZI, 2006, p. 31)

Dessa forma, ao trabalharmos com modelagem matemática devemos ter cuidado com o objeto que estamos querendo modelar e o método o qual estamos utilizando para a sua modelagem. Como afirma, Caldeira (2009), "Problematizar, elaborar suas próprias perguntas, desenvolver por meio da pesquisa, refletir e tirar suas próprias conclusões – pressupostos básicos dessa perspectiva de Modelagem Matemática".

Sim, ao trabalharmos com modelagem devemos refletir como conduzir o seu processo e quais os seus métodos para modelar tal situação. Sabemos que a modelagem trabalha com aproximações, pois quando tentamos modelar uma situação do mundo real colocamos hipóteses para que o modelo possa ser validado e muitas vezes acabamos por colocar muitas hipóteses que o modelo adotado fica impossível de ser resolvido analiticamente. Para isso é necessário que o modelo se aproxime o mais próximo da realidade e que seja possível obter a solução de tal modelo.

Nesse sentido, este trabalho apresenta relatos de aulas de Modelagem Matemática, na qual busca tornar realidade perspectivas dos autores já citados. Neste estudo, temos como objeto de estudo *Malus domestica* Bork, popularmente conhecida como Maça.

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma sequência de atividades ou exemplos para promover reflexões sobre o estudo de volume de formas de revolução, um estudo da modelagem matemática que defende as aplicações em situações cotidianas. Toma-se, então, como problema motivador a determinação do volume de uma maça, utilizando vários métodos, de forma gradativa de acordo com sua complexidade.

2 I METODOLOGIA

O trabalho referido foi desenvolvido entre discentes e docente do curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, campus Cuité – PB, no decorrer das aulas da disciplina Modelagem Matemática, componente curricular optativa do curso, onde foi proposto pela professora o desenvolvimento de uma atividade experimental, cujo objetivo é por em pratica o processo de modelagem matemática através das aplicações de situações cotidianas. Nesta literatura, a aplicação trabalhada será o calculo de volumes de uma maça.

No primeiro momento foi realizado um levantamento teórico sobre Modelagem Matemática e o processo de modelagem que deu base para a contrução dessa atividade.

Logo após, tem-se a realização do experimento que se dá pela aproximação do volume de uma maça, utilizando-se conceitos de cálculo diferencial e integral, conhecimentos de geometria espacial e um teorema, conhecido como teorema de Pappus. É importante também ressaltar que a maioria dos problemas levantados neste processo de modelagem diz respeito à geometria do objeto em estudo, no caso a maçã. Este destaque para a parte visual é importante, visto que assim se consegue uma melhor compreensão do problema, além de aguçar a imaginação geométrica.

Os modelos matemáticos utilizados para o cálculo do volume de uma maçã estão colocados em uma sequência que obedece a um nível gradativo de dificuldade e complexidade conceitual. No entanto, isto não significa necessariamente que o resultado obtido para a aproximação do volume da maçã seja tão mais preciso quanto maior for a complexidade do modelo.

Materiais utilizados na atividade:

- Barbante
- Régua
- Maça
- Recipente milimetrado/ Béquer

Etapas da Atividade

I. Medições da circunferência da maça;

II. Calcular volume através do metodo de Arquimedes, mergulhando a maça num recipiente de agua, onde o volume do líquido deslocado é igual ao volume da maçã;

III. Calcular o volume usando os 4 métodos já citados;

IV. Comparar e analisar resultados.

3 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

Existem vários métodos matemáticos para calcular o volume de uma maçã. Logo, escolhemos alguns métodos para este cálculo, como como a fórmula do volume da esfera até o Cálculo Diferencial e Integral, obedecendo uma sequência gradual em termos de complexidade conceitual. Este estudo foi realizado baseado em um modelo apresentado em Bassanezi (2006).

Para o desenvolvimento dessa atividade foi utilizado materiais bem simples e de fácil obtenção, como vemos na figura a seguir (régua, barbante, lápis e uma folha para anotações).

Inicialmente, a professora pediu que mergulhasse a maçã em um recipiente cheio de água e que após o mergulho da maçã, o volume do líquido deslocado seria igual ao volume da maçã, ao fazermos isso, o volume de líquido do recipiente era de 600 ml e passou a ser 750 ml. Diante disso, constatamos que o volume da maçã é 150 cm^3.

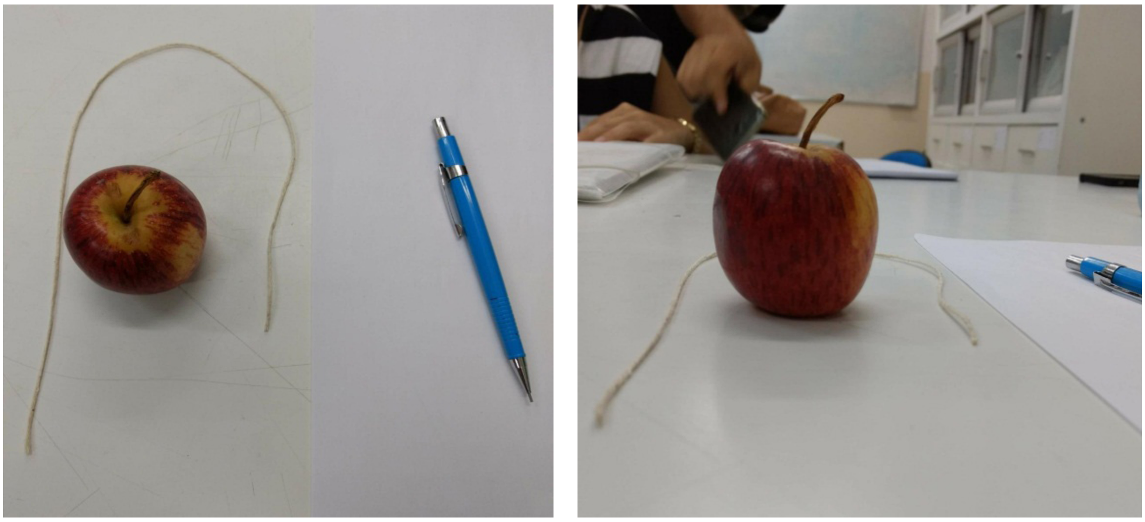


Figura 01: Objeto de estudo e materiais de pesquisa.

Fonte: Própria.

Calculando o volume da maçã utilizando a fórmula do Volume da Esfera:

- Perímetro: $P= 2\pi r$ (Equação I)
- Volume da Esfera: $V= 4\pi r^3/3$ (Equação II)

Foi calculado o volume da maçã utilizando a fórmula do volume da esfera, ou seja, para calcular o volume de uma maça devemos fazer uma aproximação com o volume de uma esfera (Equação II).

Para isso, fizemos a medição do perímetro da maça e obtivemos como resultado o valor de 21,5 cm (valor que foi encontrado com o auxílio de um barbante e da régua), para encontrarmos o raio maior da maçã utilizamos a fórmula do perímetro (Equação I).

Substituindo o valor do perímetro na equação (I), obtemos o seguinte valor para o raio maior da maçã $R = 3{,}42\ cm$. Após isso, utilizando a fórmula do volume de uma esfera e substituindo o valor do raio maior por $R = 3{,}42\ cm$, obtemos:

$$V_{\text{maçã}} = 167{,}56\ cm^3$$

Envolvendo a maçã com um barbante (Figura 02) obtemos o comprimento de uma circunferência (aproximação).

Figura 02: Medição da Circunferência da Maça.

Fonte: Própria.

No segundo momento, cortando-se a maçã ao meio (no sentido longitudinal) e medindo o raio na face plana da maçã, obtemos que o que chamamos por raio menor.

R(menor) = 2,63 *cm*.

Figura 03: Corte da maça

Fonte: Própria

Logo, calculamos novamente o volume utilizando a fórmula do volume de uma esfera, mas agora com o raio menor. Então, segue:

$$V_{maçã} = 4/3\ \pi R^3$$

$$V_{maçã} = 4/3\ \pi\,(2{,}63)^3$$

$$\mathbf{V_{maçã}} = 76{,}2\ cm^3$$

Agora, fazendo uma média entre os dois volumes obtidos, com o raio maior e o menor encontrou o seguinte valor para o volume da maçã:

$$\mathbf{V_{maçã}:}\ 86{,}88\ cm^3$$

O próximo passo é, após cortar a maçã ao meio, medir (Figura 04) por aproximação com uma elipse os valores dos semieixos a e b. Para isso utilizamos um barbante e uma régua e obtivemos os seguintes valores: 3,1 cm e 2,8 cm para os valores de a e b, respectivamente.

Figura 04: Medindo o diâmetro da maça e a distância percorrida pelo centroide.

Fonte: Própria

E então, para calcularmos o volume dessa vez, iremos utilizar integração por aproximação de uma circunferência, onde o raio da circunferência é o valor obtido para o eixo maior da elipse e utilizando o método do disco, o volume da maçã é calculado da seguinte forma:

$$V_{maçã} = 2\,\pi \int_0^a (a^2 - x^2)dx \qquad \text{(I)}$$

Na qual, desenvolvendo a Integral Definida (I) obtém-se:

$$\mathbf{V_{maçã}} = 124{,}78\ cm^3$$

Portanto, ao utilizarmos integração por aproximação de uma circunferência e como suporte para o cálculo do volume usando o método do disco, obtivemos como resultado para o volume da maçã o valor 124,78 cm^3.

Em seguida realizamos a comparação entre o volume da esfera e o de uma elipse para obter o valor do raio equivalente. Igualando as duas fórmulas de calcular volume, como são expostas a seguir:

$$4/3\ \pi R^3 = 4/3\ \pi a^2 b$$

obtém-se um novo raio:

$$R = 2{,}99cm$$

Logo, ao compararmos as duas fórmulas para calcular o volume da esfera e da elipse, encontramos um novo raio e este novo raio será útil para calcularmos o volume da maçã de maneira análoga ao feito anteriormente. Para isso, utilizamos novamente de um processo de integração pelo método do disco e considerando o raio 2,99 cm. Neste caso, o volume da maçã é dado por:

$$V_{maçã} = 2\,\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(II)}$$

De forma análoga a anterior, resolvendo a Integral Definida (II) obtemos o seguinte resultado:

$$\mathbf{V_{maçã}} = 112{,}03\,cm^3$$

Observe que utilizamos o mesmo método, pois fizemos o cálculo do volume da maçã por meio do processo de integração e utilizamos o método do disco. Entretanto, como anteriormente calculamos o volume da maçã utilizando como raio o valor encontrado na medição da maçã por aproximação de uma elipse foi diferente do valor encontrado considerando o raio da esfera equivalente, obtivemos um novo raio que agora passa a servir como limite de integração para calcular o novo volume da maçã.

Todos os valores obtidos foram distintos, entretanto uns se aproximam mais de uns do que de outros. Bassanezi (2006, p.241) afirma que no caso de calcular o volume de uma maçã “um processo mecânico seria o mais indicado para a avalição, tanto em termos de simplicidade como de precisão”. Este processo que ele fala é o fato de mergulharmos a maçã em um recipiente com água e após ela ser mergulhada o volume mais preciso seria o deslocamento da água para cima.

Este experimento foi baseado em um já realizado num curso de aperfeiçoamento para alunos de matemática em Guarapuava e Palmas nos anos de 1988 a 1989, descritos na obra de Bassanezi (2006).

Assim, em seguida construímos uma tabela com os dados obtidos em cada método utilizado para o cálculo do volume da maçã, conforme o exposto a seguir.

MÉTODOS PARA O CÁLCULO DE VOLUME	VALORES OBTIDOS
Por comparação com o volume de uma esfera (raio maior)	167,56 cm^3
Por comparação com o volume de uma esfera (raio menor)	76,2 cm^3
Média dos volumes anteriores	86,88 cm^3
Aproximação por uma circunferência	124,78 cm^3
Aproximação por uma circunferência e raio obtido por meio de uma comparação	112,03 cm^3
Mergulho da maçã em um recipiente com água	150 cm^3

Tabela 1: Dados Obtidos

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao observamos a tabela acima, podemos constatar através dos resultados, os quais mostram valores bem próximos daqueles que são apresentados na literatura, que é o método do cálculo do volume da maçã utilizando o volume de uma esfera e o de aproximação por meio de uma circunferência, como sendo os métodos mais precisos.

É perceptível que esses métodos, de fato, obtiveram resultados próximos do valor obtido ao mergulharmos a maçã no recipiente com água, enquanto que os outros métodos se distanciam muito do valor obtido ao mergulharmos a maçã na água.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, vemos que ao desenvolver atividades desse tipo tornamos o aluno o sujeito ativo do processo de ensino-aprendizagem, pois a interação entre docente e discente é essencial durante todo o desenvolver da mesma, uma relação de equidade e conjunta, para que assim o professor o induza a pensar e questionar, despertando o interesse em estar participando da atividade proposta – experimentação.

A conexão entre teoria e prática, elemento inerente nessa atividade, deu total sentido ao estudante em entender a relação existente entre as duas, ainda mais quando realizamos esse experimento em comparação com outro já realizado. Pois, quando conhecemos a parte teórica e vamos para a prática, torna-nos visível àquilo que muitas vezes não é perceptível na teoria. Ao trabalhar com modelagem matemática, a experimentação é de grande importância, vivenciar a situação problema e depois tentar modelar é muito mais significante do que não conhecer o ambiente ao qual está modelando.

Sendo assim, durante o processo de desenvolvimento do trabalho verificamos a importância de entender conceitos matemáticos para aplicá-los de uma maneira adequada e correta nas situações problemas que foram encontradas durante o percurso de modelagem de tais situações. Além disso, é conveniente mencionar que foi necessário fazer um embasamento histórico para as questões abordadas aqui, com o objetivo de proporcionar ao leitor uma melhor compreensão dos fatos e da metodologia utilizada. Finalmente, cabe ressaltar que todo processo de modelagem teve como suporte um conteúdo matemático, para que assim os modelos pudessem ser executados.

Espera-se que este trabalho possa contribuir, de alguma forma, para a formação sócio crítica desses futuros professores no contexto da Modelagem Matemática inserido num campo maior que é a Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3.ed.-São Paulo: Contexto, 2006.

CALDEIRA, Ademir Donizeti. **Modelagem Matemática: um outro olhar.** Revista de Educação em

Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.33-54, jul.2009.

SANT'ANA, Alvino Alves; DE FRAGA SANT'ANA, Marilaine. **Modelagem Matemática em Disciplina Específica.** Educação Matemática em Revista, n. 32, p. 37-44, 2013.

CAPÍTULO 15

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS: UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA

Júlio César dos Reis
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia,
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas.
Vitória da Conquista – Bahia.

Aldo Brito de Jesus
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia,
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas.
Vitória da Conquista – Bahia.

RESUMO: O presente trabalho teve como objetivo analisar as diferentes estratégias utilizadas por uma turma de alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática durante a aplicação de uma atividade envolvendo congruência de triângulos. A aula foi desenvolvida na modalidade investigativa baseada na definição de Ernest para investigação matemática. Os alunos foram organizados em grupos e não receberam nenhuma orientação inicial de como proceder para cumprir a tarefa, os mesmos tiveram que discutir a situação proposta e elaborar planos para investigação da mesma. Partindo da observação do momento em sala de aula e das redações apresentadas pelos grupos fizemos uma análise qualitativa dos dados e vimos que os alunos apresentaram diferentes estratégias, cada uma delas com seus sucessos e suas respectivas falhas. Abordar o conteúdo de congruência de triângulo de forma investigativa e desenvolver o trabalho em equipe permitiu uma melhor discussão e troca de conhecimento entre os alunos, além disso proporcionou um ambiente aberto para a formulação de conjecturas sem a necessidade de se preocupar inicialmente com o erro.

PALAVRAS-CHAVE: Estratégias. Investigação Matemática. Congruência de Triângulos.

CONGRUENCE OF TRIANGLES: AN INVESTIGATIVE APPROACH

ABSTRACT: This paper analyzes different strategies used by students of a Mathematics Degree Course to solve an activity on congruence of triangles. The activity was investigative (as defined by Ernest for mathematical investigation). The students were organized into groups and received no initial orientation to accomplish the task. The students discussed the proposed situation and the students drew up plans to resolve the activity. We observed the solutions presented by the students and we qualitatively analyze the solutions.We conclude that students presented different strategies, each with successes and failures. We concluded that the activity allowed a better discussion and exchange of knowledge among the students and in addition the activity provided an environment open for the formulation of conjectures. In this environment there was no need to worry about the error initially.

KEYWORDS: Strategies. Mathematical Research. Congruence of Triangles.

1 I INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática muitas vezes limita-se a memorizar fórmulas e aplicar algoritmos para a resolução de exercícios, como se a Matemática estivesse esgotada. Alguns conteúdos quando abordados de maneira não adequada impede que os alunos desenvolvam métodos diferentes de resolução de problemas e não deixa espaço para que os aprendizes façam suposições e encontrem relações entre a realidade e a Matemática e/ou entre a Matemática e as demais áreas de conhecimento.

Abordagens mecânicas e apenas com resolução de exercícios, levam os alunos a acreditarem que todos os problemas que envolvem Matemática serão resolvidos apenas com a imitação do que é feito em sala de aula. Nesse tipo de abordagem o aluno não participa do processo construtivo da Matemática, o que faz com que os mesmos acreditem que tudo na Matemática é posto como verdade, sem que exista qualquer tipo de justificativas ou encadeamento lógico com o funcionamento da natureza e da realidade. É tirado dos alunos o prazer pela descoberta de fatos implícito no estudo da Matemática básica.

Acreditamos que aprender Matemática não é uma mera transmissão de conhecimento, mas, sim um aprender construtivo, no qual os educandos são protagonistas do próprio conhecimento. São eles quem devem desenvolver métodos e estratégias para resolver problemas e criar conjecturas a respeito daquilo exposto em sala de aula. O aluno deve ser um questionador de si mesmo para entender que a Matemática não é uma ciência pronta e acabada. Como aponta Brocardo (2001, p.88) "a Matemática é uma coisa só que apenas pode ser realmente entendida quando conseguirmos ajustar as diferentes visões parciais que, per si, são erradas uma vez que incompletas e facciosas."

A formalidade da apresentação dos conteúdos matemáticos, muitas vezes impede que o aluno busque formas alternativas de construir o conhecimento e o mesmo tem uma visão de que a Matemática é sempre formal e que não precisa de intuição, de dúvidas, incertezas e a outros aspectos não formais. Lakatos apud Brocardo, aponta que: "Nenhum dos períodos 'criativos' e praticamente nenhum dos períodos 'críticos' das teorias matemáticas poderia ser admitido no paraíso formalista, onde as teorias matemáticas são apresentadas como safiras, purificadas das incertezas terrestres".

Por isso estamos de acordo com Brocardo e acreditamos que os conteúdos matemáticos a serem trabalhados em sala de aula devem ter sempre um caráter investigativo, no qual os alunos possam entender os processos de validação das conjecturas. Em particular, vemos a geometria como um espaço rico para o entendimento da Matemática como um processo construtivo, baseado em ideias centrais que fundamentam toda uma teoria.

2 I REFERENCIAL TEÓRICO

Toda e qualquer Matemática parece ser insuficiente para a demanda apresentada pela Ciência, é por esse e por outros motivos que ela está em constante evolução. Em nenhum momento da história da humanidade se produziu tanta matemática quanto no final do século XX e início do século XXI.

Em relação a Matemática do século XX, Lawrence Shirley (2000, p.1) aponta que "a matemática não só está viva e bem, como está no seu período mais produtivo de sempre. Os historiadores descobriram que mais da metade da matemática que se conhece foi desenvolvida desde 1900". Dessa forma, é um equívoco acreditar que toda a Matemática está pronta e exposta em livros.

No mesmo trabalho Shirley aponta que o excesso de rigor e a abstração causaram o fracasso do que ficou conhecido como a "nova matemática". Muitas vezes o rigor impede que os alunos tenham autonomia para formular conjecturas em relação a determinados conteúdos e os mesmos acabam acreditando que não existe espaço para a criação ou para o aprimoramento do que já está colocado como verdade.

Acreditamos que a investigação matemática pouco se aproxima da ideia apresentada nos anos 50 e 60 em relação a maneira de trabalhar os conteúdos em sala de aula. Pois, nesse tipo de abordagem, não é exigido a priori um rigor matemático, os alunos são livres para elaborar suas hipóteses, mesmo que elas não façam sentido em um primeiro momento. Não estamos descartando o rigor matemático, apenas acreditamos que isso pode ser tratado em um segundo momento, no qual o discente deve formular argumentos para convencer os colegas e a si mesmo da veracidade de suas conjecturas.

No presente trabalho, no que se refere ao conceito de investigação matemática, adotamos o de Ernest apresentada por Brocardo. A definição do autor não deixa espaço para que exista confusão entre o ato de investigar e investigação matemática. Desse modo, questões do tipo "investigue a relação entre o x do vértice e os zeros da função quadrática" não fazem da aula uma abordagem investigativa, apenas direciona o aluno para chegar a uma determinada conclusão.

Segundo Brocardo (2001, p.100) investigação é uma atividade que "envolve diversos processos matemáticos – formulação de questões, formulação de conjecturas, teste de conjecturas, prova das conjecturas que resistiram a sucessivos testes – que interagem entre si". Destacamos a ideia de resistência aos testes pois, acreditamos que é nesse momento que os alunos conseguem identificar quais são os argumentos lógicos que devem ser usados na demonstração da conjectura.

A definição de Ernest não é a única apresentada por Brocardo, são discutidas outras, dentre as quais selecionamos as definições de Frobisher e Pehkonen. Acreditamos que a proposta de atividade apresentada neste trabalho enquadra-se na definição de Ernest. Baseados na discussão da autora a respeito das aproximações e dos distanciamentos entre as três definições, montamos um quadro com os elementos básicos de cada definição.

Ernest (1996)	Frobisher (1994)	Pehkonen (1997)
• Situação inicial; • Procura; • Ação de investigar; • Exame sistemático; • Inquirição.	• “problemas”. • Ação de investigar; • Problema aberto; • Objetivos	• Situação de partida; • Situação aberta; • Objetivo aberto.

Tabela 1- Quadro com elementos básicos das definições.
Fonte: elaborado pelos autores.

Ernest aponta que investigação é um processo que envolve a procura, a ação de investigar, o exame sistemático e a inquirição. O autor considera que para trabalhar com investigação em sala de aula o professor pode escolher uma situação inicial ou pode aprovar alguma proposta apresentada pelos alunos. Em ambos os casos cabe ao aluno a formulação de questões, o que pode ou não mudar o foco da atividade e isso exige dos próprios alunos a exploração e análise do que foi formulado. Os mesmos devem conduzir a investigação, escolhendo o objetivo e os procedimentos para alcançá-los.

Frobisher apresenta um esquema no qual procura definir investigação matemática partindo do que considera “problemas”. O autor divide os “problemas” em convergentes e divergentes, e acredita que os do segundo tipo define o que se considera por investigação. Esta definição se aproxima da de Ernest na medida que tais problemas dão espaço para que o aluno escolha a maneira de explorar a situação inicial. No entanto, se distancia na medida que deixa espaço para problemas com um objetivo definido.

Assim como Frobisher, Pehkonen procura definir investigação matemática a partir de problemas. O autor acredita que existe uma situação de partida e um objetivo da situação. Tanto as situações como os objetivos estão classificados em fechados e abertos. O mesmo considera a investigação matemática se aproxima muito de uma situação de partida fechada e um objetivo aberto, isto é, uma situação explicada e um objetivo não predeterminado.

A atividade de investigação proposta nesse trabalho facilmente se enquadra em qualquer uma das ideias apontadas pelos três pesquisadores, basta que sejam feitas algumas alterações a fim de restringir o leque de possibilidades e de caminhos a serem seguidos durante o processo de investigação. Optamos pela definição de Ernest por acreditar que a mesmo deixa claro quais são as etapas envolvidas em uma aula investigativa.

Nesse trabalho procuramos analisar as estratégias utilizadas pelos alunos para responder alguns questionamentos levantados a partir de uma situação problema. Acreditamos que criar estratégias faz parte do processo envolvido em uma aula investigativa. Segundo Brocardo baseada no esquema de Oliveira (1998):

> [...] os processos matemáticos envolvidos numa actividade de investigação, salienta-se aquilo que designo por não linearidade. Este aspecto constitui uma importante característica da actividade de investigação. De facto, por exemplo, ao perceber-se que os testes realizados não confirmam determinada conjectura é necessário voltar atrás de forma a formular outra conjectura. No entanto, para isso, é importante perceber-se o que falhou para que a primeira conjectura não resistisse aos sucessivos testes e procurar ter em conta esse aspecto na formulação de uma nova conjectura.

Baseados nesta interpretação de Brocardo para o esquema de Oliveira e no modelo de Lakatos apresentado pela pesquisadora, fizemos uma análise de como os alunos mudavam de estratégias à medida que visualizavam possíveis falhas para as conjecturas iniciais.

3 I METODOLOGIA

O presente trabalho foi desenvolvido com 23 alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB) matriculados na disciplina Geometria Euclidiana no primeiro semestre letivo de 2016. Optamos por essa turma devido a facilidade de acesso, já que o primeiro autor era o professor da disciplina e o segundo era o monitor.

Para a aplicação da atividade os alunos foram organizados em seis grupos, sendo cinco deles com quatro pessoas e um apenas com três. Todas as equipes receberam folhas de papel na qual deveria fazer seus rascunhos e escrever a redação final com a resposta. Utilizamos as letras maiúsculas de A até F para identificar os grupos.

A proposta foi desenvolvida em uma das aulas da disciplina e teve como objetivo investigar as diferentes estratégias adotadas e os diferentes recursos utilizados pelos alunos na exploração de conceitos de geometria plana presentes em uma situação do cotidiano. A atividade foi realizada na modalidade de aula investigativa, que segundo Brocardo (2001) são indispensáveis para estimular a participação dos alunos de modo a favorecer uma aprendizagem significativa.

A atividade surgiu a partir da observação do movimento de uma câmera em um estádio de futebol. Um dos autores deste trabalho visualizou ali um espaço rico para trabalhar com a geometria. A ideia inicial foi discutida pelos dois autores e adaptada para ser desenvolvida com a turma em questão.

Os alunos não receberam nenhuma orientação inicial de como proceder para cumprir a tarefa, os mesmos tiveram que discutir a situação proposta e elaborar planos para investigação da mesma. O objetivo era analisar as estratégias utilizadas por eles, dessa maneira deixamos os grupos livres em relação a isso e aos recursos utilizados. Alguns alunos usaram softwares de geometria para simular o movimento da câmera, outros fios e réguas, dentre outros recursos.

Para esta análise não levamos em conta dados numéricos. Fizemos uma análise qualitativa dos procedimentos e dos argumentos utilizados pelos alunos para justificar as suas respostas diante dos questionamentos. E seguimos a ideia de Borba para pesquisa qualitativa.

> O que se convencionou chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado "verdadeiro", dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado. (BORBA, 2004, p.2)

Estamos de acordo com Borba em relação ao “verdadeiro” ser passível de alterações, por isso acreditamos que esta primeira análise pode sofrer algumas alterações à medida que a situação proposta inicialmente seja estudada e sejam verificadas falhas e potencialidades.

4 I A PROPOSTA DE ATIVIDADE

A proposta foi exposta por meio de slides. Primeiro apresentamos a situação em que foi criada a atividade, como segue:

“O avanço das tecnologias tem nos proporcionado ganhos significativos na qualidade da telecomunicação, um exemplo disso são as transmissões de alguns jogos de futebol. A maioria dos esquemas de filmagem dos estádios contam com câmera aérea móvel, permitindo assim o acompanhamento da movimentação dos jogadores durante toda a partida.”

Em seguida procuramos explicar como a câmera era controlada a fim de que os alunos entendessem quais eram os possíveis movimentos e quais as restrições para o mesmo e exibimos algumas simulações. O esquema funciona da seguinte maneira:

- A câmera aérea (ponto P) fica presa, por meio de cabos, a quatro pontos fixos que chamaremos de A, B, C e D;
- Esses pontos são tais que ABCD é um retângulo.
- A câmera é controlada por meio dos cabos, para que ela seja movimentada de uma posição P até uma posição P_n, é necessário aumentar a tamanho de alguns cabos e diminuir de outros.

A figura 1 foi apresentada para os alunos com exemplo de uma possível posição inicial para o ponto P_0 e de um possível deslocamento determinando o ponto denotado por P_1.

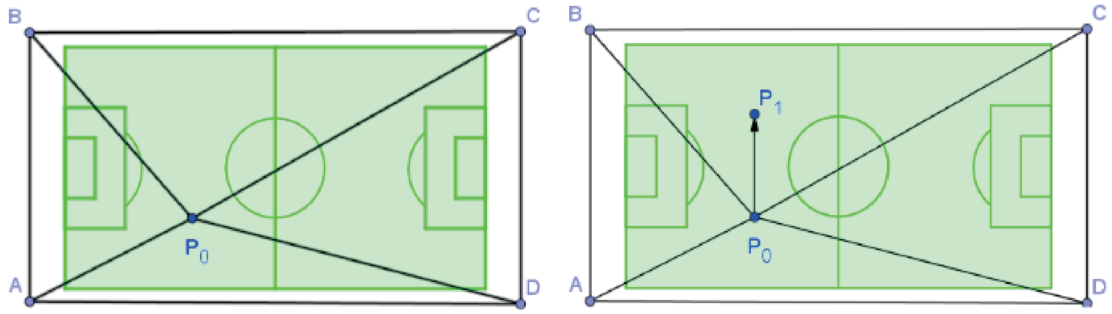


Figura 1 - Possível posição inicial e possível deslocamento.

Fonte: elaborado pelos autores.

Após entendido a movimentação da câmera passamos a seguinte orientação:

“Note que cada posição P_n determina alguns triângulos de base AB, BC, CD, DA, AC ou BD e um vértice P_n. Para essa atividade iremos considerar apenas triângulos com base AB, BC, CD ou DA e um vértice P_n”

Em seguida foi apresentada uma lista com algumas indagações iniciais, objetivando direcionar os alunos em relação a investigação de algumas propriedades geométrica presentes na atividade. O propósito era que cada grupo formulasse conjeturas e a partir disso tentasse demonstrar a validade da mesma. A lista continha um total de seis perguntas, como a maioria dos grupos apresentaram solução apenas para as duas primeiras, omitimos as demais. As duas primeiras perguntas e as nossas expectativas com as mesmas, foram as seguintes:

1) Considerando que os pontos A, B, C, D e P_n são coplanares e uma posição inicial para a câmera (ponto P_0), movendo o ponto P de acordo com as possibilidades de movimento da câmera, para uma nova posição P_n, é possível determinar quantos triângulos de vértice P_n, congruentes ao triângulo ABP_0 inicial? É possível mostrar que os triângulos são congruentes? Por quais casos de congruência?

Nesta primeira pergunta esperávamos que os alunos determinassem a quantidade de triângulos congruentes de uma forma geral ou dividindo nos seguintes casos: apenas dois triângulos, caso o inicial seja isósceles de base AB, BC, CD ou DA e quatro para os casos em que os pontos estivesse em uma posição diferente das citadas.

2) Usando o mesmo raciocínio da questão anterior responda se para qualquer posição P_0 inicial é possível determinar a mesma quantidade de triângulos congruentes?

Para esta segunda pergunta esperávamos que os alunos analisassem a resposta da questão 1 e investigassem se existem outras posições para as quais a resposta não seja a mesma. Esperávamos que os mesmos citassem que existe casos em que a quantidade de triângulo pode variar.

5 I APRESENTAÇÃO DAS REDAÇÕES DOS GRUPOS

No que segue, apresentamos as observações feitas durante a aplicação da atividade e um resumo das estratégias e das redações apresentadas pelos alunos. Optamos por apresentar os resultados por grupo, para facilitar a leitura.

Grupo A. A redação apresentada como resposta para o problema 1, nos permitiu observar que o primeiro passo adotado pelos integrantes do grupo foi entender melhor a situação proposta, e como estratégia de resolução listaram os casos de congruência de triângulos estudado na disciplina até então.

O grupo fez alguns esboços de possíveis posições para o ponto P_0, no entanto, analisou apenas o caso em que tal ponto coincidia com o ponto médio de um dos lados do retângulo. Apresentou quatro triângulos congruentes entre si, observou que todo triângulo é congruente a ele mesmo e justificou a congruência entre os demais usando o caso LAL (lado, ângulo, lado). O grupo não apresentou nenhuma solução para os demais questionamentos.

Grupo B. Não foi possível fazer uma análise detalhada das respostas desse grupo pois, o mesmo apresentou todas a respostas de modo muito objetivo e sem justificativas. Por exemplo, no problema 1 o grupo respondeu de forma equivocada que existiria apenas um triângulo caso P_0 fosse o ponto médio do lado do retângulo e não apresentou nenhuma justificativa.

Durante a aplicação da atividade o grupo apresentou muita dificuldade em relação a ideia de movimento de um ponto e tentou fazer algumas simulações com canetas, régua e fios e com um software de geometria dinâmica.

Grupo C. O grupo apresentou solução apenas para os problemas 1 e 2. A estratégia adotada para a resolução do primeiro problema foi a existência de retas paralelas aos lados do retângulo e a ideia de equidistância em relação a tais retas. A redação apresentada descreve os passos para a construção das retas, quais pontos serão tomados como vértices e aponta o caso LLL (lado, lado, lado) como justificativa para a congruência entre os triângulos, no entanto, não diz como proceder para verificar a congruência.

No problema 2, o grupo considerou o caso em que o ponto P_0 coincidia com a intersecção das diagonais do retângulo e justificou de forma correta que para essa posição inicial havia apenas um triângulo congruente.

Grupo D. O grupo apresentou solução apenas para o problema 1. Foram analisados dois casos, no primeiro caso o ponto médio da diagonal do retângulo foi adotado como o ponto inicial, e o grupo concluiu que havia apenas um triângulo congruente ao considerado inicialmente pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo). No segundo caso, o grupo não apresentou redação como resposta, apenas alguns esboços que foram analisados e nos permitiu concluir que os alunos encontraram quatro triângulos congruentes entre si.

Grupo E. A solução apresentada pelo grupo para o problema 1 foi dividida em três casos e a estratégia adotada foi traçar os eixos de simetria do retângulo. Nos casos 1 e 2 o grupo concluiu que havia apenas dois triângulos congruentes estre si pois, para esses dois casos o ponto inicial pertencia a algum eixo de simetria. Apesar de não existir uma redação explicita, acreditamos que no terceiro caso foi usado a própria simetria para justiçar a existência de quatro triângulos congruentes entre si. O grupo não se posicionou em relação aos demais questionamentos.

Grupo F. O grupo analisou 3 casos possíveis no problema 1. No primeiro caso, apesar dos alunos usar o termo "encontro das medianas", entendemos que os mesmos estavam se referindo ao encontro das diagonais como o ponto inicial. No segundo caso o ponto inicial pertencia ao interior do retângulo e no terceiro a um dos lados do mesmo retângulo. Em todos os casos a quantidade de triângulos estavam de acordo ao esperado para esse primeiro questionamento, porém, houve algumas confusões em relação aos casos de congruência e as justificativas ficaram incompletas. O grupo não apresentou solução para os demais.

As figuras 2 e 3 mostram, respectivamente, a simulação do movimento com o uso de régua e fios apresentada pelo grupo B e o rascunho com os eixos de simetria do retângulo adotada pelo grupo E.

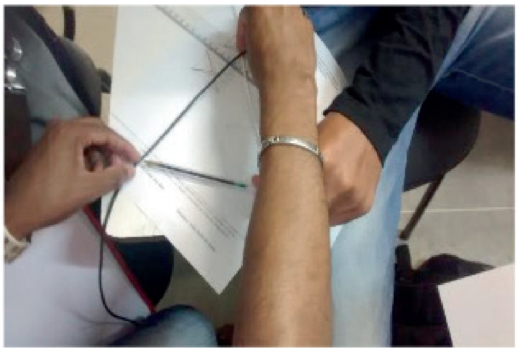


Figura 2 - Simulação do movimento

Fonte: foto tirada em sala de aula.

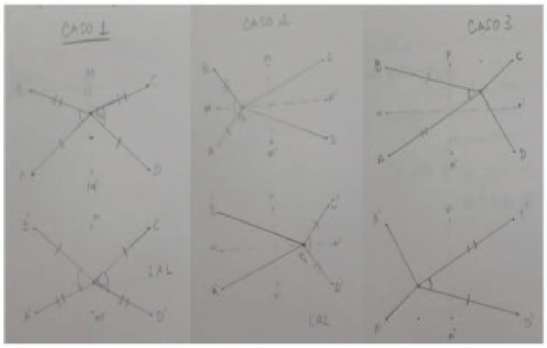


Figura 3- Extrato da resposta do grupo E

Fonte: foto tirada em sala de aula.

6 I ANÁLISE E DISCUSSÃO DAS RESPOSTAS

A análise das respostas apresentadas pelos grupos chamou a atenção pela ausência de argumentos para a conclusão de fatos importantes como por exemplo as congruências dos triângulos envolvidos. Apenas o grupo A e C elaboraram justificativas, os demais não se preocuparam em justificar a congruência, apenas apontaram como determinar os vértices dos triângulos. Acreditamos que essa falta de argumentação nas respostas está relacionada a imaturidade dos alunos, normalmente Geometria Euclidiana é a primeira disciplina que os mesmos têm contato com esse tipo de demonstração matemática.

Durante a aplicação da atividade percebemos que a escolha da estratégia foi uma construção coletiva, resultante das discussões entre os componentes do grupo. Observamos que em muitos momentos houve discordância entre as ideias de cada membro da equipe, no entanto, esse fato não prejudicou o andamento da atividade, pelo contrário, enriqueceu ainda mais o trabalho e ficou explicito que algumas das estratégias pensadas inicialmente foram logo descartadas, sem a necessidade de ocorrer o erro.

Analisando as redações apresentadas percebemos que a maioria dos grupos adotaram estratégias distintas. A seguir apresentamos um quadro com algumas falhas e alguns sucessos na execução das estratégias utilizados pelos alunos.

Estratégias	Sucessos	Falhas
• Listar os casos de con-gruência; • Esboçar possíveis po-si-ções para o ponto P_0; • Simular o movimento da câmera; • Traçar retas paralelas; • Refletir os pontos em rela-ção aos eixos de simetria.	• Listar corretamente os casos de con-gruência; • Visualizar melhor a si-tuação descrita; • Usar a equidistância de retas paralelas; • Tomar os eixos de si-metria do retângu-lo.	• Não saber interpretar os ca-sos de congruência • Analisar apenas posi-ções particulares para o ponto P_0; • Não demonstrar a con-gruência dos triângulos; • Confundir os conceitos de diagonal e mediana;

Tabela 2- Falhas e sucessos na escolha de algumas estratégias.

Fonte: elaborado pelos autores.

Os grupos E e F foram os que melhor conseguiram desenvolver suas estratégias, mesmo assim não houve uma preocupação em demonstrar a congruência entre os triângulos apresentados. As demais equipes não conseguiram colocar em prática o que foi planejado. Acreditamos que isso está relacionado a necessidade de uma análise melhor da situação inicial por parte dos alunos.

Acreditamos que essa miscelânea de estratégias enriquece o trabalho em sala de aula permitindo que os alunos visualizem a Matemática como algo que independe de algoritmos prontos e acabados.

7 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao desenvolver a atividade com uma turma de Licenciatura em Matemática, percebemos a importância de os futuros professores terem um contato com aulas investigativas para uma reflexão sobre a prática em sala de aula e sobre o desenvolvimento da Matemática enquanto ciência, desmistificando a ideia de que a

Matemática é algo pronto, sem dúvidas e sem incerteza.

Os alunos apresentaram diferentes estratégias para investigar a situação proposta inicialmente. Cada uma delas tinha pontos positivos e ajudava a resolver parte da situação. Também foram encontradas falhas em algumas estratégias. Esperamos numa segunda oportunidade discutir as estratégias adotadas pelos alunos e continuar a promover atividades investigativas.

A investigação matemática, quando olhada do ponto de vista de Ernest, tira o aluno do papel de receptor e o coloca como responsável pela construção do conhecimento individual e coletivo. Acreditamos que o Ensino e Aprendizagem da Matemática pode ser melhorado à medida que o professor abre um espaço para que os alunos participem de formar crítica da construção do conhecimento, sem ter medo de errar e ser prejulgado.

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo de Carvalho. **A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED. 27., 2004, Caxambu. **Anais**... Caxambu, 2004. p. 21-24

BROCARDO, Joana. **Investigações na Aula de Matemática: Um projeto curricular no 8º ano.** 2001. 621p. Tese de Doutorado da Pós-Graduação em Didática da Matemática - Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2001. Disponível em:<http://hdl.handle.net/10451/3101>

SHIRLEY, Lawrence. **Matemática do século XX: o século em breve revista.** Revista Educação e Matemática, Lisboa, Nov. 2000. Caderno 60.

CAPÍTULO 16

ESTADO DA ARTE SOBRE TENDÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO/UFPE-CAA

Marcela Maria Andrade Teixeira da Silva
Universidade Federal de Pernambuco / CAA
CARUARU - PE

Edelweis José Tavares Barbosa
Universidade Federal de Pernambuco / CAA
CARUARU - PE

Maria Lucivânia Souza dos Santos
Universidade Federal de Pernambuco / CE
RECIFE - PE

Jéssika Moraes da Silva
Universidade Federal de Pernambuco / CAA
CARUARU - PE

RESUMO: Este trabalho tem por finalidade mostrar a importância do Trabalho de Conclusão de Curso, tendo em vista que o mesmo surge como uma das atividades propostas para integrar o projeto pedagógico dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática no Brasil. Esta pesquisa se deu no ponto de vista tanto qualitativo e quantitativo, do tipo "estado da arte", onde revela as características no decorrer da história de determinado campo de pesquisa, com o objetivo de analisar os 52 trabalhos coletados de acordo com algumas tendências em Educação Matemática, verificando quais temas dos trabalhos têm ou não relação com as mesmas. Vale salientar, que essas tendências surgem com o enfoque de obter-se uma melhor relação professor-aluno, tendo em vista que ajuda a desenvolver o caráter cognitivo dos estudantes. Para dar ênfase a este trabalho utilizou-se como referência o autor Fiorentini (1995) e na análise dos dados verificou-se que nem todos os discentes abordaram as principais tendências na área de Educação Matemática, focando mais na discussão acerca dos conteúdos matemáticos específicos.

PALAVRAS-CHAVE: Estado da Arte. Tendências em Educação Matemática. Trabalho de Conclusão de Curso.

INTRODUÇÃO

Durante a caminhada para a formação de um professor de licenciatura em matemática, são encontrados obstáculos e desafios, passando assim, por um processo que faz parte para a formação enquanto discente. No curso de matemática são ofertadas várias disciplinas, onde podemos citar as de educação matemática, os estágios e por último a disciplina de TCC (II) (Trabalho de Conclusão de Curso). Antes do projeto final o discente passa por duas disciplinas de base, tendo todas as instruções necessárias para concluir seu projeto com êxito, essas disciplinas são Metodologia da Pesquisa e TCC I. "Veja em anexo as ementas dessas disciplinas".

O TCC é muito importante, pois nele

consta um trabalho que lhes é único, mostrando um conhecimento aprofundado, com a capacidade de mostrar problemas e assim suas respectivas soluções, como também o desenvolvimento de novas abordagens, a fim de contribuir para o desenvolvimento e o crescimento de uma determinada área da qual foi estudada. Em muitos casos, é somente no TCC que os alunos são inseridos na pesquisa acadêmica, pois nem todos têm a oportunidade de fazer Iniciação Científica (PIBIC) e esse fato gera muitas dúvidas nos alunos que têm que desenvolver uma pesquisa acadêmica em pouquíssimo tempo e sem uma preparação ofertada pelo próprio curso.

O TCC surge como uma das atividades propostas para integrar o projeto pedagógico dos cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática no Brasil. Pelo parecer CNE/CES 1.302/2001, do Conselho Nacional de Educação Brasileiro, que institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para esses cursos diz que:

> Algumas ações devem ser desenvolvidas como atividades complementares à formação do matemático, que venham a propiciar uma complementação de sua postura de estudioso e pesquisador, integralizando o currículo, tais como a produção de monografias e a participação em programas de iniciação científica e à docência. (BRASIL, 2001, p. 6).

Em algumas instituições os estudantes são direcionados a produzir um artigo, e em outras uma monografia, que é o caso da Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, onde será fonte de pesquisa deste trabalho. Sabendo-se que a Universidade foi fundada em 2006, com seu surgimento, a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso também foi implementada. Já se passaram 10 anos, tendo inúmeros trabalhos apresentados, cada trabalho voltado para uma linha de pesquisa e de interesse por parte do estudante, onde cada um tem o livre arbítrio em escolher um determinado tema para sua pesquisa. Além disso, ao longo de minha graduação, em várias discussões com meus colegas, a curiosidade é enorme quanto aos temas propostos, linha de pesquisa de cada um, como também saber quantos trabalhos foi produzido ao longo da existência da UFPE/ CAA

Nesse sentido, de acordo com o tema proposto nos dispomos a responder a seguinte problemática: *Quais tendências em Educação Matemática têm sido pesquisadas nos Trabalhos de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco - Campus do Agreste?*

Para responder a essa questão de pesquisa tivemos como objetivo geral: analisar o que foi produzido no curso de licenciatura em matemática na disciplina de TCC dessa referida instituição no período de 2013 a 2016. Os objetivos específicos foram: Analisar qual a importância do TCC para a formação acadêmica; Conhecer quais as tendências em educação matemática; Identificar quantos trabalhos foram produzidos de 2013 a 2016.1; Identificar quais são os temas trabalhados no TCC por parte dos discentes.

REFERENCIAL TEÓRICO

Tendo em vista que o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) é um instrumento curricular obrigatório presente nos cursos de Graduação e Pós–Graduação, onde a sua concretização reforça a necessidade de uma construção do conhecimento crítico e seguro do tema que será pesquisado pelo aluno.

> Para Vieira Pinto (1972) o conhecimento consiste na capacidade de dominar a natureza, transformá-la, adaptá-la às necessidades humanas, e a totalidade do conhecimento presente em cada época se constitui pela acumulação de atos singulares: as distintas pesquisas da realidade. Portanto, é uma síntese determinada pela totalidade existente até aquela época, histórica e contextualizada, estando em constante alteração. (ANASTASIOU, 2007, p. 54)

Sendo assim, podemos entender a importância do TCC para todo o percurso acadêmico e profissional do aluno. Com a elaboração e execução do TCC, o aluno passa a comunicar-se de forma mais clara, objetiva, inteligível, demonstrando um raciocínio lógico, bem estruturado e conciso.É fundamental considerarmos que todo o processo de aprendizagem e também a aprendizagem profissional da docência, como nos afirma Claxton (2005) exige a capacidade de reflexão, ou seja, a autoconsciência para sabermos os nossos objetivos, assim como os recursos necessários para alcançá-los, bem como nossas potencialidades e limitações. Entretanto, para que se concretize esse processo de reflexão, uma das implicações é que os professores tenham como ponto de partida um "olhar retrospectivo sobre suas próprias ações", onde através da análise e interpretação dessas ações constrói o seu conhecimento (SCHON, 2000).

Principais Tendências em Educação Matemática

As tendências relacionadas à educação matemática, mais precisamente relacionada ao ensinar-aprender, fazem-se necessário para que seja possível identificar concepções que fundamentam e perpassam o processo do ensino e aprendizagem dos sujeitos para consigo mesmos, para com os outros e para com o conhecimento. O surgimento de propostas alternativas para a ação pedagógica do ensino matemático constitui o movimento da educação matemática, ou, ainda, as tendências em educação matemática. Nesse sentido, é significativo destacar as tendências em Educação Matemática que mais estão sendo alvo de discussões e produções teóricas e práticas, as quais são: Didática da Matemática, Etnomatemática, História da Matemática, Modelagem Matemática, Novas tecnologias e Resolução de Problemas.

> Em síntese, podemos dizer que o período que compreende a década de 1970 e o início dos anos de 1980 representou a fase do surgimento da EM enquanto campo profissional de especialistas em didática e metodologia do ensino da matemática. Entretanto, apesar da existência temporária de um programa especial de pós-graduação em ciências e matemática e de vários outros ligados às faculdades

> de educação, a produção científica, nesse campo, apresentou-se dispersa e sem continuidade. (FIORENTINI; LORENZATO, 2007, p. 25).

A partir desse movimento que aconteceu o aparecimento das primeiras tendências e com o conhecimento do valor teórico de cada tendência, pode-se potencializar a criação de uma metodologia que vem contribuir essencialmente para a melhoria da qualidade do ensino de matemática em nossas escolas, especialmente a escola pública. Com a chegada dessas tendências, o aluno é conduzido à pesquisa, à investigação, sendo autor do seu conhecimento, os problemas matemáticos são resolvidos a partir de critérios, permitindo a identificação de cada situação, reconhecimento dos dados, criação de hipóteses de resolução, análise e discussão dos resultados. O uso das mídias pode reforçar a aprendizagem da matemática, simplificando a compreensão dos conceitos.

Principais Tendências em Educação Matemáticas nos PCN (Ensino Fundamental)

A abordagem das tendências nas orientações curriculares é feita de maneira simples, tratando claramente apenas algumas delas. Mostraremos por ordem como trata cada uma delas. Começaremos pelo PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) do ensino fundamental.

Resolução de Problemas

Um dos caminhos para o ensino de matemática é a resolução de problemas, que ao longo dos anos vem sendo discutido. O que na maioria das vezes é problema para um determinado aluno, pode não ser para o outro, tendo em vista que o desenvolvimento intelectual e o conhecimento são diferentes para ambas as pessoas. De acordo com os PCN:

> Resolver um problema pressupõe que o aluno: elabore um ou vários procedimentos de resolução (como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos; valide seus procedimentos. Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. (BRASIL, 1997, p. 33).

Assim é necessário que os estudantes desenvolvam habilidades das quais permitam pôr a prova os resultados, ou seja, comparar diferentes caminhos, para obter a solução.

História da Matemática

A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição no processo de ensino e aprendizagem, por sua vez juntamente com outras transposições didáticas e com outros recursos metodológicos, contribuem para um melhor desenvolver dos estudantes em sala. Conforme aborda o PCN:

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer idéias [sic] matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 34).

Essa afirmação nos mostra a importância da inserção da história nas aulas de matemática, de forma a contribuir para um melhor entendimento do que está sendo estudado na aula e promove uma maior aceitação da disciplina, uma vez que os seus porquês poderão ser respondidos através do uso da história.

Tecnologias da Informação

O acesso a calculadoras, computadores e outros aparelhos tecnológicos, já em uma realidade presente na vida de uma boa parte da população, com isso no processo de ensino e aprendizagem faz-se importante adquirir essas tecnologias, tendo em vista que a sua chegada vem com a intenção de ser um instrumento inovador e motivador na realização das atividades. O PCN do ensino fundamental afirma que:

> Além disso, ela abre novas possibilidades educativas, como a de levar o aluno a perceber a importância do uso dos meios tecnológicos disponíveis na sociedade contemporânea. A calculadora é também um recurso para verificação de resultados, correção de erros, podendo ser um valioso instrumento de auto-avaliação (BRASIL, 1997, p. 34).

O caráter lógico-matemático da tecnologia indica que pode ser um dos grandes aliados no desenvolvimento cognitivo dos alunos, pelo fato de que se têm diferentes ritmos de aprendizagem com esta prática.

Principais Tendências em Educação Matemáticas nos PCN+ (Ensino Médio)

Sobre a abordagem das tendências no PCN do ensino médio, não encontramos nenhuma referência sobre as tendências discutidas. O PCN do ensino médio afirma que:

> A essas concepções da Matemática no Ensino Médio se junta a idéia [sic] de que, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade (BRASIL, 1998, p. 41).

Especificamente sobre a matemática não traz nenhuma abordagem, pois o ensino médio é uma ligação com o ensino fundamental. Mostrando apenas no fundamental sobre as tendências citadas anteriormente.

Principais Tendências em Educação Matemáticas no Livro Didático

No guia do livro didático (PNLD) a tendência Resolução de Problemas é usada como critério na avaliação das coleções de livros didáticos do PNLD. No guia do PNLD temos que:

> Historicamente, desde as mais remotas eras, a Matemática desenvolveu-se resolvendo problemas. Na Matemática, hoje, estudam-se problemas que surgem nas várias aplicações dessa ciência e também aqueles que são fruto de suas próprias investigações teóricas. Não é à toa que a Matemática já foi caracterizada como "a arte de resolver problemas". (BRASIL, 2017, p. 12)

O livro didático contribui para a autonomia e o desenvolvimento do estudante, sendo assim deve estar baseado na resolução de problemas o ensino e a aprendizagem da matemática. O aspecto criativo surge naturalmente e desenvolve-se com a Resolução de Problemas, onde estão relacionados ao desenvolvimento cognitivo assim como a escolaridade do estudante.

Outras Tendências em Educação Matemática

Embora tenhamos focado nossa discussão teórica em torno apenas de 6 (seis) tendências em Educação Matemática, diversos outros temas de discussão nessa área têm sido considerados como tendências. Podemos confirmar isso observando a Coleção "Tendências em Educação Matemática", da editora Autêntica, que é composto por 30 (trinta) obras que englobam as mais diversas formas e temas que estão em consonância com a Educação Matemática.

ASPECTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Esta pesquisa se deu a partir de uma abordagem qualitativa e quantitativa, do tipo "estado da arte", buscando analisar as principais tendências em Educação Matemática pesquisadas nos 52 trabalhos de conclusão de curso no período de 2013 a 2016 no Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco (*Campus* Agreste).

No último momento foi feito a análise da coleta dos dados adquiridos através dos Trabalhos de Conclusão de Cursos já apresentados. Podendo assim, identificar e analisar os dados obtidos pelos discentes em relação aos seus TCCs e quais as tendências presentes em cada trabalho.

Categorizamos os trabalhos a partir das principais tendências apresentadas no referencial teórico: Didática da Matemática, Etnomatemática, História da Matemática, Modelagem Matemática, Novas tecnologias e Resolução de Problemas. No entanto, tendo em vista a diversidade de temas encontrados na análise dos TCCs, foi feita mais duas categorizações, categorizando de acordo com outras tendências em Educação Matemática citadas pela literatura da área.

ANÁLISE E DISCUSSÃO

Na 1ª categorização, apenas 9, dos 52 trabalhos analisados, puderam ser classificados em uma das 6 (seis) tendências discutidas no referencial teórico e consideradas por diversos autores como as principais tendências em educação matemática. Para termos uma ideia visual do quantitativo de trabalho de acordo com cada categoria, observamos o gráfico abaixo.

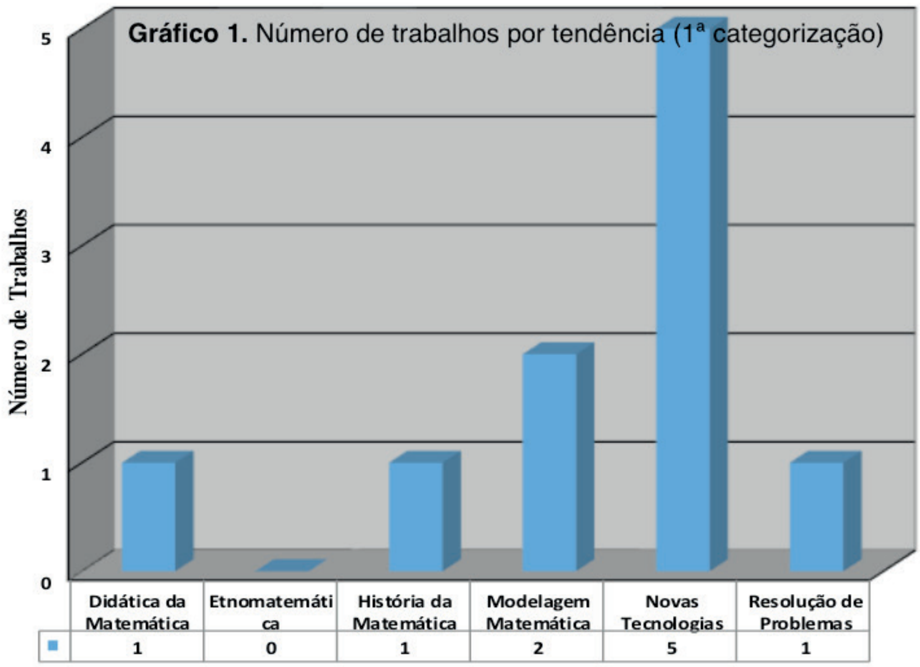


Gráfico 1. Número de trabalhos por tendência (1ª categorização)

Fonte: Do autor (2016)

Os demais trabalhos concluídos estão distribuídos em diferentes tipos e metodologias de pesquisa, em sua maioria envolvendo análise de livros didáticos, investigação dos conhecimentos de aluno e professores sobre conteúdos específicos da Matemática, ou mesmo temas específicos da área educacional. Diante disso, construímos uma nova classificação para esses trabalhos que não foram incluídos em nenhuma das 6 (seis) tendências citadas anteriormente.

No gráfico abaixo é possível observar o quantitativo de trabalhos por tendência, de acordo com a 2ª categorização feita, tendo como base a Coleção “Tendências em Educação Matemática”, da editora Autêntica.

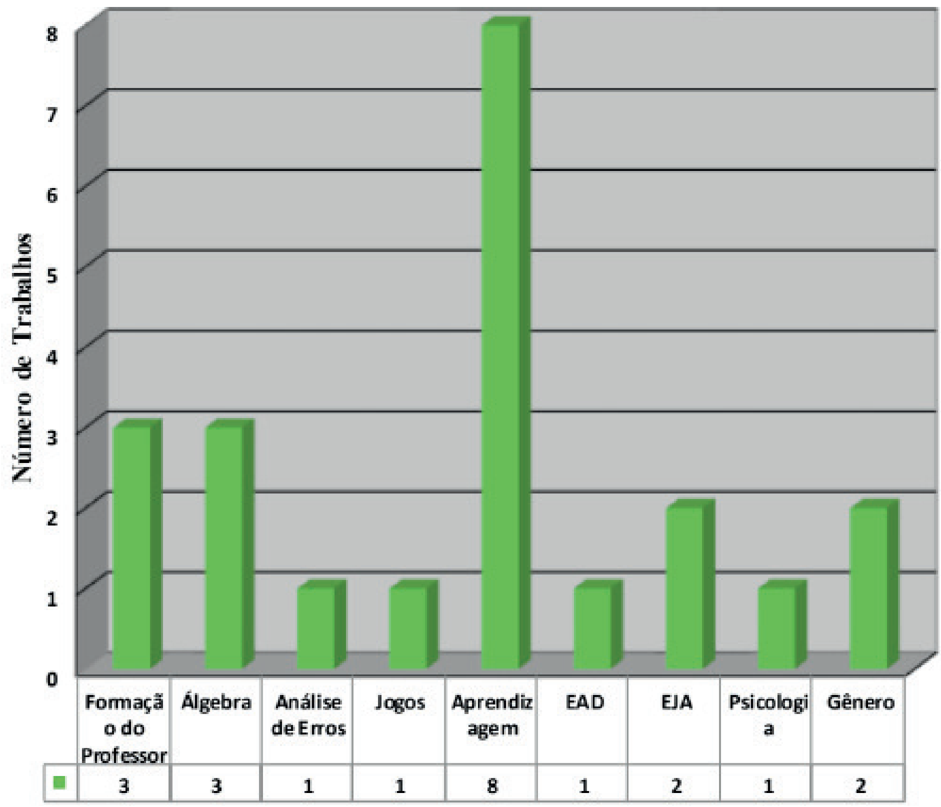


Gráfico 2. Número de trabalhos por tendências (2ª categorização)

Fonte: Do autor (2016)

Mesmo realizando uma 2ª categorização ainda não foi possível categorizar todos os TCCs, como previsto inicialmente. Por isso, apresentamos mais um gráfico, onde inserimos os TCCs que não foram categorizados nas classificações anteriores.

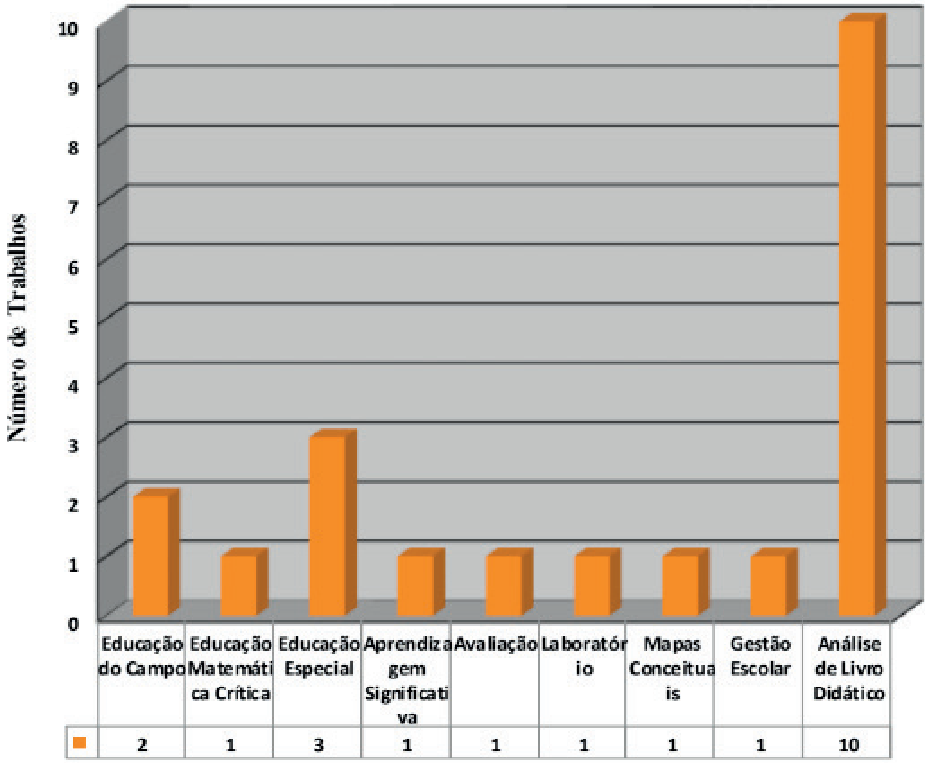


Gráfico 3. Número de trabalhos por tendências (3ª categorização)

Fonte: Do autor (2016)

Concluímos assim, que poucos trabalhos de conclusão de curso desenvolvidos na UFPE/CAA trazem como referência teórica as principais tendências em Educação Matemática citadas na literatura específica da área. Grande parte dos trabalhos analisados focaram suas investigações em análises de livros didáticos e conhecimentos de professores e alunos, da Educação Básica e do ensino Superior, acerca de tópicos específicos do currículo de Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Mediante finalização desta pesquisa acadêmica, podemos observar a importância das tendências presente no ensino de matemática, afinal todas vêm com o objetivo de mostrar subsídios teóricos metodológicos para viabilizar e superar as dificuldades encontradas. Sendo assim o mundo contemporâneo traz transformações profundas no setor educacional, uma vez que a educação fundamenta o sucesso de toda e qualquer mudança.

Os Trabalhos de Conclusão de Curso elencados no referencial teórico, percebemos que algumas tendências ainda não foram pesquisa pelos estudantes da UFPE / CAA, como exemplo a Etnomatemática, não houve nenhuma abordagem sobre tal. Sendo assim percebemos a escassez na produção desta tendência. Por outro lado, a tendência Novas Tecnologias, obteve um número maior de pesquisadores sobre a área.

A intenção principal deste trabalho foi pensada com o propósito de verificar as tendências que estão sendo pesquisadas no curso de licenciatura em matemática do Centro acadêmico do agreste. De forma que, essa pesquisa mostrou os trabalhos finalizados e mostrar as tendências ainda não exploradas no curso. Em relação às tendências que não foram citadas no referencial teórico, fizemos outro gráfico onde tem por nome “outras tendências”, e que abordam várias outras tendências, que tem relação com a matemática e seu ensino.Com base nos anos de apresentação dos TCC’s o ano que menos obteve defesa foi o de 2013, formando assim apenas duas estudantes. Continuando nas apresentações percebemos que o ano de 2015 foi o que mais adquiriu defesa, com um total de 24 delas.

REFERÊNCIAS

ANASTASIOU, Léa das G. C.; ALVES, Leonir Pessate. (org.). **Processos de ensinagem na universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em aula.** 7. Ed. Joinville, SC: UNIVILLE, 2007. P. 47 – 67.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2017: matemática – Ensino fundamental anos finais** / Ministério da Educação – Secretária de Educação Básica SEB –Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica, 2016.155 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília:MEC/SEF, 1997. 142p.

CLAXTON, G. **O desafio de aprender ao longo da vida.** Porto Alegre: Artmed, 2005.

FIORENTINI, Dario & LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos.** 2. ed. Ver. - Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

SCHÖN, D. A**. Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem.** Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

CAPÍTULO 17

CONTRUBUIÇÕES DO PIBID NA FORMAÇÃO INICIAL DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Eduardo da Silva Andrade
Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Alagoinha – PB

Eduarda de Lima Souza
Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Araçagi – PB

Fanciclaudio de Meireles Silveira
Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Guarabira – PB

Egracieli dos Santos Ananias
Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Mamanguape – PB

Leonardo Cinésio Gomes
Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Marcação – PB

Tiago Varelo da Silva
Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Itapororoca – PB

RESUMO: O Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), tem como objetivos trazer alunos graduandos dos cursos de licenciatura, para ter seu primeiro contato com a sala de aula, para que possa ir habituando-se ao futuro ambiente de trabalho e seus desafios. Desta forma, cria-se uma ponte entre o ensino superior e o ensino básico. O ensino da matemática é uma tarefa árdua, onde é sempre necessário buscar inovação nos métodos de ensino, tornando o ensinamento mais atraente, onde devemos mostrar a importância que essa grande área de conhecimento traz para o cotidiano do aluno e de toda a sociedade. Os bolsistas são distribuídos em escolas públicas em que o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) esteja abaixo da média nacional, de 4,4. Para os bolsistas do projeto, as experiências vivenciadas ao longo do tempo, que está sendo executado o PIBID Matemática, são muito ricas, tanto na formação profissional acadêmica quanto na cidadã. Assim evidenciamos a tamanha importância desse projeto para todos os envolvidos, alunos das Escolas, bolsistas, supervisores, coordenadores e comunidade local. Com isso é possível concluir que o projeto aqui apresentado, é de grande importância para a formação inicial dos professores, uma vez que insere os licenciando em uma sala de aula, preparando para uma prática pedagógica, e que venha muda o atual contexto da educação matemática brasileira.

PALAVRAS-CHAVE: PIBID Matemática; Formação de professores; Educação Básica.

PIBID CONTRIBUTIONS IN THE INITIAL TRAINING OF FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS

ABSTRACT: The Institutional Program of Initiation Scholarship for Teaching (PIBID), aims to bring students undergraduate students of

degree courses, to have their first contact with the classroom, so that you can get accustomed to future work environment and its challenges. The teaching of mathematics is an arduous task, where it is always necessary to seek innovation in teaching methods, making the teaching more attractive, where we show the importance that this large area of knowledge brings to the everyday life of the student and of society as a whole. Scholars are distributed in public schools in which the Index of Development of Basic Education (IDEB) is below the national average of 4.4. For scholars of the project, the experiences over time, which is running the PIBID Mathematics, are very rich in both academic training and the citizen. Thus evidenced the great importance of this project for all involved, students, scholars, supervisors, coordinators and the local community. With this it is possible to conclude that the project presented here, it is of great importance for the initial training of teachers, once it enters the licensing in a classroom, preparing for a pedagogical practice, and that will change the current context of mathematics education in Brazil.
KEYWORDS: PIBID Mathematics; Teacher Training; Basic Education.

1 I INTRODUÇÃO

O Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), tem como objetivos, levar alunos bolsistas graduandos dos cursos de licenciatura a ter seu primeiro contato com a sala de aula e que assim possam ir habituando-se ao futuro ambiente de trabalho e com os desafios que lhe espera a frente. Desta forma cria-se uma ponte, entre o ensino superior e o ensino básico. Os subprojetos trabalham em escolas públicas de ensino básico, e está presente em todos os estados brasileiros, os projetos podem estar no mesmo município onde situa-se o Campus, a qual pertence o curso, ou até mesmo em escola de cidades vizinhas.

Um dos problemas na formação inicial do professor, que o PIBID busca minimizar, é a preparação para atuar na educação básica, de modo que faça com que esses futuros professores, atuem de forma sistemática para a formação profissional e cidadã dos estudantes.

Neste contexto Ambrosett et al (2013, p.151-174) destaca a dissociação a formação docente no Brasil:

> Um aspecto problemático nos modelos de formação docente no Brasil é o distanciamento entre as instituições formadoras e as escolas de educação básica, contexto de atuação dos futuros professores. Estudos mostram que os cursos de formação de professores mantêm-se focados em modelos idealizados de aluno e de docência.

Como requisito para que o colégio seja contemplado com o projeto, é preciso que a instituição esteja com o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), abaixo da média nacional, que atualmente está com a nota de 4,4. Necessitando assim de uma ajuda para melhorar seus resultados.

Não só no Ensino da Matemática, mas na educação como um todo, o professor tem que ser mediador, entre o estudante e o conhecimento, é o subprojeto PIBID Matemática desenvolvido no Campus IV da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), propôs e vem propondo, atividades que são articuladas com os assuntos que estão no planejamento dos professores e supervisores.

Para Ribeiro (2003 p.13) o ensino de matemática precisa de mudanças no âmbito escolar:

> Mudanças na escola e na prática docente são exigências da sociedade moderna marcada pelas tecnologias digitais de informação e comunicação. Além do compromisso com o desenvolvimento profissional, o professor tem a função de contribuir para a formação do novo profissional do mundo informatizado e globalizado, como um sujeito capaz de promover o próprio aprendizado.

Neste sentido, temos que uma das maiores dificuldades encontradas no ensino de matemática, em determinados momentos podemos dizer que a mudança ainda não chegou, pois, a sociedade se modernizou e as práticas pedagógica, são antigas, na qual os professores, visão ministrar aulas abordando inicialmente o conteúdo, apresentando ao estudante apenas os conceitos básicos, visando decorar fórmulas e suas propriedades. Desta forma, esquecem a resolução de problemas, onde o estudante é desafiado, e devemos impor esses desafios, pois mesmo com conhecimento razoável, jamais podemos desacreditar na capacidade do estudante e de seu saber matemáticos, esquecendo outros aspectos que facilita o nível de abstração dos alunos.

É fato que o ensino da matemática, é uma tarefa árdua, onde é sempre necessário buscar inovação, nos métodos de ensino, tornando o ensino mais atraente e mostrar a importância, que essa grande área de conhecimento nos traz para o cotidiano do aluno e de toda a sociedade. Desta forma é necessário que o professor não fique preso ao método tradicional de ensino, que remete aos alunos, uma memorização mecânica, mas busquemos um ensino que leve há uma reflexão sobre tudo o que lhe é ensinado.

O subprojeto PIBID de Matemática, tem uma grande aceitação pela comunidade acadêmica, tanto por parte dos alunos bolsistas, professores das escolas, supervisores e demais alunos do curso, que não participam do subprojeto, desta forma o subprojeto é elogiado, por todos do curso, pelas suas ações e contribuição para a educação básica realizadas nas escolas estaduais da cidade de Rio Tinto - PB e na cidade de Mamanguape - PB.

2 I PIBID MATEMÁTICA

Podem apresentar propostas para projetos do PIBID, todas as Instituições de Ensino Superior Públicos, sejam Universidades Federais, Estaduais e/ou Institutos Federais de Educação, Ciências e Tecnologia que tenham resultado classificado como satisfatório, no Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (Sinaes).

Nosso Campus IV – Litoral Norte da UFPB, está dividido entre as cidades de Rio Tinto - PB e Mamanguape – PB, o subprojeto PIBID Matemática iniciou suas atividades em 2009, com um total de 24 bolsistas que atendiam inicialmente, apenas o colégio Luiz Gonzaga Burity, localizado em Rio Tinto- PB, mesma parte do Campus que contempla o curso de Licenciatura em Matemática. Após o término do primeiro edital, no edital seguinte aumentou o número de bolsistas, onde também amplia suas atividades para outra escola, que está localizada na cidade de Mamanguape-PB.

Atualmente o subprojeto conta com a seguinte equipe envolvida em suas atividades.

02	Professores Coordenadores
04	Professores Supervisores
28	Alunos Bolsistas

Quadro 1 – Quadro Geral do PIBID Matemática

Fonte: Os autores

As duas professoras coordenadoras são docentes da Universidade, do Curso de Licenciatura em Matemática, são as responsáveis pela organização e divisão das tarefas do subprojeto. Também contamos com quatro professores supervisores, que são docentes de matemática das duas escolas, e são os encarregados e supervisionar a frequência, atividades e desempenho dos bolsistas.

Tanto os Supervisores como os Colaboradores têm como objetivo, acompanhar os bolsistas na escola, em suas atividades e plantões, além de vistoriar a lista de presença dos bolsistas.

Os bolsistas são distribuídos da seguinte forma: 18 bolsistas atendem na Escola Senador Rui Carneiro em Mamanguape, e 10 atendem na Escola Luiz Gonzaga Burity em Rio Tinto. A Escola Senador Rui Carneiro conta com um número maior de bolsistas, pois tem um número maior de turmas do Ensino Médio, prioridade do projeto. Atualmente na escola Senador Rui Carneiro possui, dez turmas do ensino médio e na Escola Luiz Gonzaga Burity são sete turmas.

As atividades do subprojeto do PIBID Matemática são realizadas nas duas escolas e são divididas em: preparação para Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP); preparação e aplicação de simulados do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM); Plantões para sanar qualquer dúvida dos assuntos ministrados em sala de aula, oficinas pedagógicas, revisões de provas e gincanas realizadas pelas duas escolas, entre outras atividades.

A OBMEP é dividida em três níveis: Nível 1 – para alunos do 6º e 7º ano, Nível 2 – para alunos do 8º e 9º ano e Nível 3 – para alunos do ensino médio. Para as aulas de revisão da OBMEP, a equipe é dividida conforme o Quadro 2.

Níveis	Senador Rui Carneiro	Luiz Gonzaga Burity
1	4 bolsistas	2 bolsistas
2	4 bolsistas	2 bolsistas
3	8 bolsistas	6 bolsistas

Quadro 2: Distribuição dos bolsistas na atividade da OBMEP

Fonte: Os autores

.

Após as divisões das equipes por níveis, é escolhido um dia para os aulões da OBMEP, onde cada dupla de bolsista resolvem toda a prova do ano anterior, passando por todas as turmas, em dois turnos manhã e tarde, a noite não é oferecido o projeto na escola, pois o curso de Licenciatura Matemática também é noturno, inviabilizando a presença de bolsistas durante este horário nas escolas.

Para o ENEM a equipe é novamente dividida, desta vez de maneira diferente em comparação a OBMEP. As questões são divididas em oito para cada dupla e resta sete para a última dupla, na Escola Luiz Gonzaga Burity, na Escola Senador Rui Carneiro os bolsistas são divididos em equipes de quatro bolsista, e ficando com o mesmo número de questões, conforme o quadro abaixo.

Questões	Senador Rui Carneiro	Luiz Gonzaga Burity
136 a 144	4 bolsistas	2 bolsistas
145 a 153	4 bolsistas	2 bolsistas
154 a 162	4 bolsistas	2 bolsistas
163 a 171	3 bolsistas	2 bolsistas
172 a 180	3 bolsistas	2 bolsistas

Quadro 3: Divisão dos bolsistas para aulão do ENEM

Fonte: Os autores

Nos aulões para o ENEM todas as turmas do Ensino Médio, turno da manhã e tarde do Ensino Médio são atendidas.

E para as demais atividades, como os Plantões para tirar dúvidas, são distribuídos dois alunos para cada turno, no Luiz Gonzaga Burity e quatro bolsistas por turno, no Senador Rui Carneiro, onde cada bolsista comparece ao colégio em dois turnos por semana ou um dia completo. Vale salientar que todas as demais atividades são a parte dos plantões de tirar dúvidas, com isso na semana dos aulões tanto da OBMEP quanto do ENEM, todos devem comparecer a ambas atividades, sem prejudicar os alunos em sala de aula e nem os alunos com dúvidas.

Com as aulas de reforço aplicado pelo projeto na escola, percebemos um aumento significativo e um avanço na aprendizagem de cada aluno, apesar de serem poucos os alunos que despertam interesse e participam dessas atividades, muitas das vezes são incentivados pelo professor. Estas aulas, são aulas onde deixamos de ser o centro das atenções e passamos a ser, o intermediador entre o aluno e o conhecimento, fazendo com que as aulas se tornem mais atraentes e menos cansativas, pois sabemos que no ensino da matemática, a maioria dos alunos enxergam como uma matéria difícil e complicada, que podemos concluir através das palavras de D' Ambrósio (1991, p.1) afirma que "[...] há algo errado com a matemática que estamos ensinando. O conteúdo que tentamos passar adiante através dos sistemas escolares é obsoleto, desinteressante e inútil". É por isso, que estes alunos recebem um tratamento mais dinâmico e lúdico acerca da matemática, trabalhamos através de atividades e jogos que buscam desenvolver, o raciocínio, o porquê das fórmulas e aquisição dos conhecimentos matemáticos, que eles sentem dificuldades.

Nossas atividades além de passar os conhecimentos matemáticos para os alunos nas duas escolas, através de oficinas aplicadas e interdisciplinares buscamos sempre a construção e criação da cidadania, fazendo links com assuntos transversais.

Neste sentido os Parâmetros Nacional Curriculares: Matemática (BRASIL, 1998, p. 27), destaca a matemática como:

> [...] a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios.

Para os Parâmetros Nacional Curriculares: Matemática, (BRASIL, 1998, p.33), traz a pluralidade cultural como:

> Com relação às conexões entre Matemática e Pluralidade Cultural, destaca-se, no campo da educação matemática brasileira, um trabalho que busca explicar, entender e conviver com procedimentos, técnicas e habilidades matemáticas desenvolvidas no entorno sociocultural próprio a certos grupos sociais. Trata-se do Programa Etnomatemática, com suas propostas para a ação pedagógica. Tal programa não considera a Matemática como uma ciência neutra e contrapõe-se às orientações que a afastam dos aspectos socioculturais e políticos, fato que tem mantido essa área do saber atrelada apenas a sua própria dinâmica interna. Por outro lado, procura entender os processos de pensamento, os modos de explicar, de entender e de atuar na realidade, dentro do contexto cultural do próprio indivíduo.

Neste contexto, a equipe de bolsista do subprojeto do PIBID, realiza suas atividades respeitando a realidade da comunidade, onde a escola está inserida. Desta forma os programas de Etnomatemática é contemplado nas realizações do PIBID.

3 I A ESTRUTURA UTILIZADA PELO SUBPROJETO PIBID

Como estrutura física o PIBID dispõe de um laboratório de matemática na Escola Luiz Gonzaga Burity, onde temos quadro branco, mesas, cadeiras, jogos educativos e materiais manipulativos, livros didáticos, revistas entre outros materiais, esta mesma sala é utilizada para os seminários, oficinas, dentre outras atividades.

Na Escola Senador Rui Carneiro, contamos com um único laboratório de ciências e matemática, assim contendo materiais de ambas as matérias. Mas que possui o mesmo acervo de jogos e materiais manipulativos que a Escola Luiz Gonzaga Burity.

Com relação ao Laboratório da Escola Senador Rui Carneiro, há uma certa dificuldade pelo fato de algumas atividades do subprojeto coincidir com atividades de outras disciplinas, como biologia ou química.

4 I O PIBID NA FORMAÇÃO DOS FUTUROS EDUCADORES

Com o intuito de melhorar a aprendizagem e buscando obter uma melhor desenvoltura no curso de formação para professores, também como uma tentativa de minimizar as dificuldades de compreensão e aprendizagem dos conteúdos, além de contribuir de forma positiva para o desenvolvimento psicológico e do raciocínio lógico, dos discentes, melhorando principalmente a preparação de futuros professores para uma pratica pedagógica transformadora e eficaz.

Neste contexto o subprojeto PIBID Matemática do nosso curso através da realização de simulados, das provas como o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, além de preparação dos alunos para realizarem uma boa prova, com isso nos ajudar de forma positiva, na formação dos futuros profissionais da educação.

E através dessas atividades que os bolsistas (futuros educadores) vão se adequando ao ambiente, aos desafios e o compromisso que deve ser tomado, diante do atual cenário educacional em que o Brasil passa.

A maior parte dos jogos e oficinas aplicados pelo subprojeto são confeccionados pelos próprios bolsistas, na maioria das vezes, trabalhamos com reciclagem, onde utilizamos materiais que foram descartados como: palitos de picolé, garrafas pets, tampa de garrafas pet, papelão, embalagens, entre outros, todo material confeccionado ficam nos laboratórios de matemática das escolas ou da Universidade.

Realizamos constantemente atividades, com aplicação de miniaulas, aulas recreativas, oficinas e etc. com os resultados das aplicações das oficinas, podemos escrever trabalhos científicos, socializando em diversos eventos dá área.

Além de trabalhamos com ensino e extensão, indo para duas escolas desenvolver tais atividades, trabalhamos com a pesquisa, onde os bolsistas escrevem trabalhos científicos para publicações em congressos, Internacionais, Nacionais, Regionais, Estaduais e Locais.

A exemplo desses eventos podemos destacar o Congresso Nacional de Educação (CONEDU), Encontro Nacional de Educação (ENEM), Seminário Internacional de Praticas Educativas do Campo, (SECAMPO), Semana da Matemática, Encontro Regional de Educação Matemática (EREM), Encontro Paraibano de Educação Matemática (EPBEM) entre outro em que os bolsistas se fazem presentes, socializando suas práticas, seus resultados, seus relatos entre outras ações desenvolvidas.

5 I RESULTADOS E CONCLUSÕES

Enfrentando dificuldades diárias, o bolsista também é desafiado a pensar e agir o mais rápido possível. O que em nossa opinião, quanto mais desses desafios conseguimos supera-los melhores preparados estaremos para possíveis problemas futuros. Em uma palavra breve e curta podemos dizer que o professor também é resultado das dificuldades e do modo como os resolvem, assim adquirindo experiência para sua pratica docente.

Para os bolsistas do projeto, as experiências vivenciadas ao longo do tempo de execução do PIBID Matemática, são muito ricas tanto na formação profissional acadêmica, quanto na cidadã.

Assim evidenciamos a tamanha importância desse projeto para todos os envolvidos, alunos das duas escolas, bolsistas supervisores, coordenadores e comunidade local.

Com isso é possível concluir, que o projeto aqui apresentado é de grande importância para a formação inicial dos professores, uma vez que prepara psicologicamente, teoricamente os discentes e insere em uma sala de aula, preparando-os para um pratica pedagógica que venha muda a forma de ensino e que melhore o aprendizado do aluno.

REFERÊNCIAS

AMBROSETT, Neusa Banhara. Et al. Contribuições do PIBID para a formação inicial de professores: o olhar dos estudantes. **Educação em Perspectiva**, Viçosa, v. 4, n. 1, p. 151-174, jan./jun. 2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parametros curriculares Nacional:** Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília; MEC/SEF, 1998.p.148

D' AMBRÓSIO, U. **Matemática, ensino e educação**: uma proposta global. São Paulo: Temas & Debates, 1991.

RIBEIRO, Suzi Cássia Silva. **Percepções de licenciando sobre as contribuições do PIBID-Matemática**. Lavras: UFLA 2003.

CAPÍTULO 18

A FORMAÇÃO MATEMÁTICA DO CURSO DE PEDAGOGIA DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS

Meire Aparecida De Oliveira Lopes
Graduada em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás/ Campus Cora Coralina. Especialista em Docência no Ensino Superior pelo convênio UCDB/Portal Educação. Email: meiiirehtosa@gmail.com

Liliane Oliveira Souza
Docente do curso de Licenciatura em Matemática na UEG/ Campus Cora Coralina. Graduada em Licenciatura Plena em Matemática pela UEG/ Campus Cora Coralina, Especialista em Educação Matemática pela UEG/ Campus Cora Coralina e Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela UFG/ Regional Goiânia. lilinda_souza@hotmail.com

* Artigo desenvolvido para obtenção do título de especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Goiás.

RESUMO: Esta pesquisa trata-se de um estudo com foco no curso de pedagogia ofertado pela UEG, com elementos que abordem a pesquisa qualitativa. O objetivo desse artigo é analisar como vem sendo realizada a formação de pedagogos para trabalharem com a matemática, visto que práticas de ensino de matemática não são muito abordadas no processo formativo e precisam ser mais questionadas para viabilizarem mudanças positivas e qualitativas, para que assim a disciplina seja trabalhada de forma dinâmica e significativa. Nossos dados mostram alguns problemas relativos ao ensino aprendizagem de matemática, pois a prática docente, se manifesta na elaboração do aprendizado. Devido às dificuldades encontradas e demonstradas pelos alunos e também encontradas pelos próprios professores que afirmam não ter afinidade ou não gostarem da disciplina. Logo, pretende-se investigar o que foi e será feito em aulas de matemática básicas ministradas pelos pedagogos regentes, dentre os quais pedagogos vêm enfrentando inúmeras dificuldades.

PALAVRAS-CHAVE: Formação; Pedagogia; Ensino-aprendizagem; Perspectivas matemáticas.

1 I INTRODUÇÃO

O presente trabalho vem da ideia de buscar novas analogias, em busca de conhecimento capaz de transformar e contribuir com o ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A inquietação para esta pesquisa surgiu a partir do momento que a pesquisadora, como professora do ensino básico, se esbarra constantemente com obstáculos de ensino, tendo em vista que os alunos chegam ao Ensino fundamental (segunda fase) com um grande déficit de aprendizagem em Matemática.

Buscando responder alguns

questionamentos a metodologia utilizada nessa pesquisa trata-se de um estudo feito com questionários, diante de uma abordagem qualitativa, sendo a ideia principal abordar questões do cotidiano de professores pedagogos em sua rotina diária com crianças dentro da sala de aula e claro, observar como seus professores formadores ensinavam metodologias para que a matemática se tornasse mais atraente aos olhos de alguém que começará a entrar no mundo no qual a matemática se faz presente em seu cotidiano.

A escolha do tema se deve as dificuldades encontradas, enquanto professora do ensino fundamental II, onde são geradas dúvidas que na maior parte das vezes não são encontradas, por sentir a falta de estímulos vindo de professores das séries iniciais. Mas aspectos essenciais faz necessária uma análise em relação ao ensino como: a concepção gerada pela matemática que norteia o ensino dessa disciplina e o desgosto por esta área do conhecimento. Logo, esta pesquisa tem como pergunta norteadora: Porque o ensino da matemática das séries iniciais, não suprem as necessidades matemáticas no ensino de 2ª fase?

Muitas vezes, o pedagogo, ao fazer a graduação possui uma carga horária de aulas voltadas para o ensino de Matemática reduzida, à uma quantidade mínima, onde muitas vezes o trabalho nestas disciplinas é decisivo para que o professor tenha êxito, em sua profissão. Atualmente, enfrentamos situações no ensino da matemática que muitas vezes contestado por especialistas que não concordam com a hipótese de memorizar regras, alegam que deixam a matemática morna, sem graça. Mas, podemos considerar a aprendizagem como processo de construção entre o ato de aprender e o ato de pesquisar, para que se possa refletir sobre a realidade, planejada e implementada.

Mas, há autores como Beatriz D'Ambrósio (1993) que mostram vários problemas relativos ligados ao ensino aprendizagem de matemática. Em que, na prática docente, se manifesta na elaboração do aprendizado, identificando assim o conhecimento do aluno e de seus processos de aprendizagem dados no conhecimento didático, e claro diagnosticando o modo como as pessoas aprendem matemática para que o mesmo seja decisivo para que um professor tenha êxito.

A matemática enquanto disciplina escolar é colocada como uma das principais entraves e cobrança do papel que ela deve desempenhar, no sentido básico e amplo da situação cotidiana. Pois, ao mesmo tempo ela gera acepções contraditórias, onde é tida como área do conhecimento e vista por muitos como algo inacessível e indispensável, e claro tida também como responsável pela exclusão social.

Portanto, o conhecimento matemático se faz necessário para entender sua prática no cotidiano. Por isso, é importante sempre buscar algo que sempre nos tire dúvidas que se manifestem em seus processos de aprendizagem. E esta pesquisa busca investigar como as disciplinas de Metodologia de Matemática vêm sendo trabalhadas no curso de Pedagogia / UEG, como também viabilizar da melhor forma possível, como podemos enquanto professores regentes ensinar matemática de forma menos cansativa e taxativa.

2 I ENSINO E APRENDIZAGEM DO PROFESSOR

Buscando por novos conhecimentos enquanto, ensino da matemática para crianças, falaremos o que cada criança pode aprender dentro de suas limitações para melhor compreendermos qual a capacidade de aprendizado delas. Tentar-se-á descrever seus possíveis limites na forma de ensinar de cada professor relativamente à criança.

De acordo com os PCN (1997) o ensino da matemática deve considerar que a forma de selecionar e organizar os conteúdos não deve ser criterioso, mas sim amplo onde o aluno possa levar sua contribuição de desenvolvimento intelectual do aluno. De acordo com Piaget (1980 *apud* Munari, 2010, p. 27): “A inteligência verbal ou refletida repousa na inteligência prática ou sensória-motora, que se apoia em hábitos e associações que são adquiridos para voltarem a se combinar”.

Uma das possíveis formas de assimilação é a forma lúdica, brincando podemos aprender tanto sendo crianças quanto adultos. Pode-se ensinar matemática para as crianças de forma divertida, atraente aos olhos de cada aluno para que assim elas possam ter acesso a matemática básica, que é um direito que todos temos, por isso deve ser ensinada com amor e paixão. De acordo com Beatriz D’Ambrósio:

> Muitos grupos de trabalho e pesquisa em Educação Matemática propõem-se do uso de jogos no ensino da matemática. [...] vê os jogos como uma forma de se abordar, de forma a resgatar o lúdico, aspectos do pensamento matemático que vêm sendo ignorados no ensino. (1989, p. 19)

A criança precisa aprender a se organizar e se adaptar no cotidiano escolar, mas para isso acontecer o espaço deve ser um lugar prazeroso. Ainda segundo D’Ambrósio, (1993, p. 35) “[...] a matemática evolui através de um processo humano e criativo de geração de ideias (subsequentes) do processo social e de (negociação) de significados, simbolização, refutação e formalização”.

Contudo, é de extrema importância que o professor busque sempre ensinar aos seus alunos novas ideias, e que estas por sua vez seja atrativa, para que o aluno leve resultados e exemplos por toda a vida e que possam de alguma forma contribuir de forma ampla em seu cotidiano.

Para se ter conteúdos de matemática, bem explorados e que realmente proporcione o processo de ensino aprendizagem dos alunos, é preciso primeiro gostar da disciplina em questão, e depois planejar com clareza, verificar os objetivos que se deseja alcançar, identificar qual o nível de aprendizagem para cada fase da criança.

Portanto, de nada adiantará expor ideias se esta não for bem analisada, estudada, cada criança carrega consigo seu jeito próprio de ser, cada uma por si só já possui seus hábitos e os levam para dentro da escola, logo o professor deve estar apto para lhe dar com essas situações cotidianas e claro, atento para tentar reverter aquelas que prejudicam o ensino.

Estudos feitos por Olenêva (2006), acerca da formação de professores que trabalham com a matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, pedagogos, diz que mesmo sendo muito recente é uma área pouco exigida e que necessita de mais questionamentos. Mas, há dados estatísticos que mostram vários problemas relativos ao ensino aprendizagem de matemática, pois a prática docente, se manifesta na elaboração do aprendizado. Isso, devido às dificuldades encontradas e demonstradas pelos alunos e muitas vezes das dificuldades encontradas pelos próprios professores que afirmam não ter afinidade ou não gostarem da disciplina.

Ao fazer vários questionamentos, pode-se observar/verificar que 4 horas semanais destinadas ao estudo inicial de matemática no curso de pedagogia são mínimas, diante das necessidades que os alunos apresentam e necessitam para seus saberes futuros. Logo, diante dessa perspectiva, pretende-se ressaltar mudanças positivas e qualitativas. De acordo com Olenêva (2001):

> [...] a perspectiva participativa, colaborativa, prospectiva e contextualizada [...] pode ser considerado na Educação Matemática como uma perspectiva de viabilizar mudanças positivas e qualitativas no trato como o conhecimento matemático em via exercício da cidadania. (OLENÊVA, 2001, p.1).

Diante a isso, devemos considerar que a matemática possa ser tratada como atividade que trata o cotidiano da criança, frente aos problemas visados no habitual da sala de aula. É um momento em que devemos nos atentar ao novo mundo, mundo este interligado constantemente à tabletes, computadores, celulares, enfim, ao mundo das redes sociais e de uma internet sem limites. Ainda de acordo com Fiorentini e Lorenzato (p.2, *apud* Olenêva, 2006, p. 9) o estudo da matemática "envolve inúmeras relações e determinações entre ensino e conhecimento matemático. " Tendo em vista ainda acerca da formação docente, às exigências são reconhecidas pela sua fragilidade, revelada pelos PCN de matemática. Uma das medidas a serem tomadas, claro, é tomando a iniciativa de buscar novos caminhos, novos conhecimentos e novas possibilidades para que o professor possa dentro dos limites da criança ensinar tudo o que será necessário no futuro.

A criança quando começa a estudar já leva consigo a impressão de que a matemática é um bloqueio em sua vida, muitas vezes causados dentro de casa por seus pais ou responsáveis. Na escola, o professor deve buscar formas para que esse tabu seja quebrado, e que infelizmente não é bem assim que acontece. Muitos professores buscam formas de intrações para que a criança, transforme seu temor, em algo que facilite sua aprendizagem. Nacarato (*et. al.* 2011, p. 22) nos diz que:

> [...] futuras professoras polivalentes têm tido poucas oportunidades para uma formação matemática que possa fazer frente às atuais exigências da sociedade e, quando ela ocorre na formação inicial, vem sendo pautado nos aspectos metodológicos.

O curso de pedagogia, oferecido pela Universidade Estadual de Goiás, mesmo tendo nas estruturas curriculares a disciplina de matemática muitas vezes deixa uma lacuna. E então, acabam fazendo do jeito que der. Onde os mesmos indivíduos devem tratar a matemática para crianças, de forma a ser pesquisada e planejada.

A criança até mesmo os adultos, tem uma relação interessante quando fazemos brincadeiras, logo uma maneira extrovertida de ensinar a matemática. Para que se possa ter uma relação importante e condizente é necessário que o professor busque e inove seus planejamentos. Como dizia Freire (1996, p. 32) “não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino.... Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco”.

Portanto, para começar bem deverá ser desenvolvido planejamentos bem elaborados com apostas em novas capacidades de busca, para fazer da escola um lugar repleto de ideias, saberes e trocas de experiências e afetos. Pois, na pressa de alfabetizar as crianças, muitos se esquecem do desenvolvimento infantil. Nessa fase, a criança precisa brincar. Então, porque não fazer um planejamento rico de brincadeiras, principalmente, em matemática onde devem ser estimulados a se interessarem por diferentes áreas de conhecimentos?

Pode-se dizer que a qualidade do ensino está na capacidade de interação e estímulo à curiosidade que eles recebem, atividades como estas com mais sentido, respeitando e reconhecendo assim o limite de cada criança, assim como também as diferenças como forma de caminhar e valorizar os outros.

O ritmo de vida escolar proporcionado tanto ao professor quanto ao aluno promove a dispersão. Pois, na sala de aula são muitas atividades ao mesmo tempo e muitas vezes sem foco de aprendizagem, sem objetivos. Portanto deve-se pensar sobre o que é capaz de aprender em diferentes idades. Precisa-se também melhor conhecer as potencialidades para ensiná-los melhor. É preciso de alguma forma tentar atrair o aluno para a matemática. Segundo Delors (2003, p. 90 à 102), pode-se destacar aqui os quatro pilares da educação: Aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a conviver e aprender a ser.

O pilar aprender a conhecer é a essência do aprender a aprender e tem por base a curiosidade intelectual. Muitas vezes, tira-se da criança o direito de espaço público, de ouvi-las. Ambiente pelo qual a criança tenha direito e deve ser incentivada a usar livros, materiais manipuláveis, calculadoras, computadores e diversos outros recursos que a façam enriquecer culturalmente. Tantas coisas poderíamos aprender com as crianças se conseguíssemos vê-las naquilo que realmente são ou não o que se acha que seja ou que serão no futuro. Precisa-se dar asas para a criatividade das crianças, ou pelo menos não cortá-las. Portanto, o aprender a conhecer é a fase da curiosidade e que deve ser desenvolvida pelos professores iniciantes. Já o segundo pilar: “Aprender a fazer”, é indissociável do aprender a conhecer, pois não basta conhecer é preciso fazer também. Para aprender não existe prazo de validade, basta estar vivo. Quando se trabalha a matemática a partir da construção com materiais concretos o aluno percebe e toma consciência do uso da matemática em alguns elementos presentes no cotidiano, a partir daí começa a perceber a utilidade da mesma para resolver e analisar situações problemas.

O terceiro pilar: “Aprender a conviver”, significa aprender coletivamente, desenvolvendo a compreensão do outro e a percepção das interdependências dos seres humanos. É também o respeito dos valores e compreensão mutua para o estabelecimento da cultura da paz. Este pilar se identifica muito com professor, que trabalha ativamente com decisões e escolhas em seu cotidiano dadas aos jovens. E o último: “Aprender a ser”, onde o mesmo não se pode negar nenhuma das potencialidades de cada indivíduo para desenvolver, o melhor possível, a personalidade. É preciso aceitar o que é, mas sempre procurando melhorar. Esse pilar cabe aos professores, principalmente aos pedagogos, onde o texto os cita com frequência.

Sabe-se que nessa profissão tem-se muitas cobranças, responsabilidades e que são estressantes os desafios que muitas vezes são enormes e que causam desânimo e que faz surgir questionamentos intrigantes, sobre o porquê estou nesta profissão? O que me leva a continuar? Por que fiz tal escolha? Será que a educação tem futuro? E a resposta muitas vezes nos leva a perceber que este caminho escolhido e percorrido nos traz decepções e desprazeres.

Ensinar na maioria das vezes é cansativo, e ensinar a pensar então torna-se algo complicado e difícil, o que torna muitas vezes o papel do professor difícil ou quase impossível, ligado diretamente ao professor regente, mas que se vê a possibilidade de planejar uma boa aula. Portanto o professor deve escolher entre ensinar de forma tradicional, aula já pronta, que não haverá mudanças. Ou então diferenciadas, onde poderá fazer com que a aula seja uma “viagem”, dando liberdade para que os alunos opinem, colaborem e principalmente participem.

Conclui-se então que, a escola deve preocupar-se com o desenvolvimento integral das crianças, dando a elas capacidade de escolhas.

3 I A ESCOLA E A CRIATIVIDADE

Desde que a escola surgiu, esta tem a função ampla e bastante diversificada que depende da dedicação total por parte do professor, que precisa sempre estar atento a acompanhar mudanças que atualizem o currículo e as metodologias utilizadas em sala.

Ensinar se torna inevitável como único propósito que a escola exige, da parte do mediador de conhecimentos. Aprender constitui, esforço dos alunos tornando os dois como parte importante de processos que deverão ser desenvolvidos por qualquer escola. E, eliminar a concepção tradicional de que todo conhecimento matemático adquirido pelos alunos, requer muita disposição e preparação do professor em questão.

Sabe-se também que parte das famílias não participam da educação dos filhos, muitas vezes por falta de tempo ou até mesmo por não ter capacidade de desempenhar este papel. Logo, a escola é um ambiente de desenvolvimento de numerosas capacidades, atitudes e conhecimentos que são essenciais para a vida adulta, que sustentam as contínuas evoluções, é onde o aluno consegue estabelecer relações entre conhecimentos e ações do cotidiano.

A imaginação é um ponto importante do desenvolvimento, e cada vez mais, do sucesso de cada pessoa. Sabe-se que a criatividade aparece um pouco ou mais em cada ser humano, onde os mesmos podem criar ambientes que incentivam, acarinham e apoiam a criatividade de outras pessoas. Um fato importante e que não deve ser deixado de lado é a qualidade da Educação no Brasil onde a mesma está em uma visão planificada e participativa de uma escola. A educação se baseia na pressão social dos alunos, mudanças estas que implicam criações de opções que passam por reformas de todo o grupo gestor fazendo com que assim mudem suas formas de avaliação e responsabilidades, até podendo envolver o poder público.

Freitas (2014, p. 13) ressalta que por falta de estratégias participativas locais de apropriação desses dados a questão da qualidade não é um assunto puramente técnico, mas é igualmente político, de participação, onde têm-se confundido nota mais alta com melhoria de qualidade e cobrado da escola uma melhora de notas em testes sem olhar para os processos sociais e cognitivos. Um dos fatores importantes e decisivos para a melhoria da educação seria uma quantidade menor de alunos por sala/professor, uma educação de tempo integral e professores capacitados e que tenham orgulho e amor pelo papel que desempenham. Carvalho, Diones (2011) nos diz que:

> "... a sala de aula não é o ponto de encontro de alunos totalmente ignorantes com o professor totalmente sábio, e sim um local onde integram alunos com conhecimentos do senso comum, que almejam a aquisição de conhecimentos sistematizados, e um professor cuja competência está em mediar o acesso do aluno a tais conhecimentos.". (2011, p. 16)

A comunidade escolar precisa estar envolvida em certas decisões, onde definirão valores e poderão articulá-los para uma melhora significativa. Decisões tomadas de forma rápida e com certa pressão conduzirá a educação a uma década perdida e sem qualidade somente com quantidades. O professor, todos os dias e em todos os momentos tem desafios constantes e que milhões de vezes fazem repensar sobre a profissão que escolheu e se é o melhor caminho a continuar a seguir. Mas, que por segundos o aluno dedicado e disposto a aprender não o faça esquecer.

O amor que se tem pela profissão, transcende a várias outras percepções, os pedagogos além de serem professores, passam a ser pais, amigos e responsáveis pelas crianças com a qual atuam e esquecem muitas vezes que estão ali para ministrar aulas, ensiná-los para um futuro melhor. O mesmo deve estar ciente que a escola é um lugar de democracia, onde as crianças e os adolescentes saibam os valores democráticos de todos os lugares que vivem. Por isso, o educador deve fazer que mesmo que a imaginação, a fantasia e as brincadeiras façam parte da sua vida, eles não deixem de estar ciente dos desafios que a vida poderá lhe dar.

E é aí que entra a matemática na vida de uma criança, a mesma se ensinada de maneira significativa e contextualizada, como também com amor, carinho, criatividade, a mesma será levada por longos anos de sua vida sem queixar-se ou, se o contrário, levará para sua vida um monstro que nunca será compreendida. Mas, se ensinada como algo que dá medo, sem muitas perspectivas aí sim, será este o desafio levando pelo resto de suas vidas e talvez um trauma.

Uma criança com idade entre 3 aos 12 anos de idade, têm facilidade e um potencial enorme onde possui uma maturidade mínima e neste momento que deve-se aproveitar e estimular bem a criança, fazendo com que ela receba estímulos, gostando de fazer leituras, pois na matemática faz-se todo sentido, pois sem a interpretação textual a criança, o adolescente ou qualquer adulto não consiga compreender o que se pede, onde a mesma será base para o aprendizado futuro. Mas, tudo ocorre em seu devido tempo, não tendo pressa para que a criança possa desenvolver seu aprendizado.

Mas, infelizmente o problema maior para que se tenha uma excelente alfabetização no Brasil, é a falta de formação adequada para os docentes. Acredita-se que o problema está nos princípios curriculares. NACARATO, MENGALI e PASSOS (2009) nos deixa claro que:

> "... Como consequência desse distanciamento entre os princípios dos documentos curriculares e as práticas ainda vigentes na maioria das escolas, essas futuras professoras trazem crenças arraigadas sobre o que seja matemática, seu ensino e sua aprendizagem. " (p. 23)

A matemática desde muitos anos vem sendo impulsionada por cursos prioritamente pedagógicos. Quando se ouve falar em cursos de humanas logo se imagina que a matemática passa longe e aqui só existem matérias onde se pratica a leitura e a interpretação. Atualmente, cursos pedagógicos têm exigido um tipo de matemática básica, que deixam a desejar, ensinando algo que talvez nunca será aplicado. O docente em questão não sabe se quer fazer pequenas somas, e não faz questão de aprender para ele, a calculadora é a solução de todos os seus problemas.

Ao voltar no curso de pedagogia que é o citado em questão, a matemática estudada por eles, são muitas vezes textos longos e cansativos de autores que escrevem sobre a educação matemática. E os textos sobre Educação Matemática para uma criança para que serviriam em seu ensino inicial? Apenas para teorias arraigadas de bons planejamentos.

Mas, será que em algum momento, eles (professores) não pararam para pensar que estão ensinando futuros pedagogos, e que eles ao atuarem na sala de aula serão a base para o futuro de nosso país? Com certeza a maioria não está preocupado com essa questão, muitos acreditam que o docente ali sentado já possui domínio e capacidade para ensinar a criança.

Enganam-se ao pensar isso, o curso de pedagogia a alguns anos e até os dias de hoje, é classificado totalmente a pessoas de baixa renda, onde procuram uma graduação apenas para tentarem buscar opções de vida melhor.

E onde, com certeza está errado. Pois, é daí que devemos tentar melhorar a "cara" da base da educação, buscando melhorias, ensinando com amor e dedicação.

De acordo com Kepler (1974): "O aparecimento, desde os 6 anos de idade de jogos coletivos e organizados, mostra que a colaboração se tornou possível, apesar de ser ainda imperfeita, com frequentes conflitos e disputas". (KEPLER, 1974, p.17).

Para Froebel (1912), ação de brincar, passa a fazer parte da história da educação pré-escolar. Partindo do pressuposto de que, manipulando e brincando com alguns materiais como bola, cubo e cilindro, montando e desmontando cubos, a criança estabelece relações matemáticas e adquire noções primárias de Física e Metafísicas. Aliando a utilização de materiais educativos, que denomina dons, ao canto e às ocupações manuais (recorte, colagem, tecelagem e outros).

4 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: FORMAÇÃO DE PROFESSORES E CONHECIMENTOS NECESSÁRIOS

O curso de licenciatura Plena em Pedagogia oferecida pela Universidade Estadual de Goiás – UEG estuda temas relacionados a educação, tanto na prática quanto no teórico.

O curso ocorre durante quatro (4) anos, distribuídos por semestres, oferecendo diferentes disciplinas que ajudam na formação do futuro pedagogo, em salas de aula do ensino fundamental I, onde têm-se como objetivos a melhoria no processo de aprendizagem de indivíduos através da reflexão, sistematização e produção de conhecimentos.

Diante do exposto, dentre os termos abordados pela pedagogia estão: trabalhar as dificuldades de aprendizado, procurar métodos e sistemas pedagógicos, tendo em vista esses aspectos teve-se a inquietação do aprendizado/ensino da matemática, enquanto professor-aluno.

Ao fazer uma análise das ementas da universidade, pode-se verificar que a história da matemática é muito bem explanada, buscada com bastante êxito, mas, não basta apenas estudar a história se o que é buscado para o ensino da prática matemática não são apenas histórias e sim o prático e viável estudo das operações básicas fundamentais. De acordo com Dienes (1972):

> “Partimos do teorema de existência, segundo o qual admitimos que é a partir de um ambiente rico que a criança consegue construir seus conhecimentos, e tomamos como modelo a aprendizagem da língua materna”. (DIENES, 1972, p. 01)

Para tanto, dizemos que a história da matemática traz importâncias devidas ao ensino, porém, não demonstra trabalhos que podemos distinguir o processo de ensino aprendizagem da matemática, onde “O como fazer constitui a essência da questão. ” (SILVA, OLIVEIRA) p. 02.

Após várias leituras de diferentes autores, pode-se perceber a busca incessante de novos caminhos para o ensino aprendizagem que trabalhe com os futuros pedagogos a construção de conceitos matemáticos, ensinando e justificando assim nossa prática cotidiana, assim, citamos CARVALHO (2012) que diz que:

> “[...] formar professores não é uma tarefa das mais simples, pois este profissional irá atuar, em sua maioria, em escolas com necessidades e especificidades diversas porque atendem a populações com características socioeconômicas variadas. ” (CARVALHO, 2012, p. 34)

Ainda, ao observar as ementas: conteúdos e processos de ensino de matemática I e conteúdos e processos do ensino de matemática II feita pela UEG, não se vê os quatro blocos organizados a serem ensinados, são eles: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação. Pois o art. 29 da Lei Diretrizes e Bases (LDB) de 9394 de dezembro de 1996, nos diz que:

> “A educação infantil, primeira etapa da educação básica, tem como finalidade o desenvolvimento integral da criança até seis anos de idade, em seus aspectos físico, psicológico, intelectual e social, complementando a ação da família e da comunidade. (BRASIL, 1996, p.1357)

No entanto, não podemos dizer que a ementa do curso esteja incompleta, pois muitas vezes as universidades fazem apenas o que lhe é de praxe e é de regimento da faculdade cumprindo o exigido. Para saber-se ao certo, o que de fato ocorre nas aulas de matemática precisamos ir além da ementa, e ir atrás de pessoas que vivenciaram a experiência do que foi/é ensinado.

Nos deparamos diante de situações no ensino fundamental II, que causa incômodo ao percebemos que os alunos não possuem um domínio mínimo em resolver as operações básicas de matemática. Em busca dessa realidade, pudemos perceber que a maior parte que ingressam no curso de Pedagogia, não possuem domínio algum em matemática e o fazem na esperança de não ter contato algum com a disciplina.

A identidade profissional significa a inter-relação da identidade pessoal e social que a pessoa possui com a profissão por isso é extremamente importante que sejam incluídos nos currículos educacionais a construção e o fortalecimento da identidade profissional juntamente com as práticas de formação inicial e continuada.

Os cursos de formação graduação possuem um papel importante na construção dos conhecimentos, atitudes e convicções dos futuros professores, enquanto que a formação continuada visa ao desenvolvimento profissional e pessoal mediante a prática de envolvimento dos professores tanto na organização e articulação dos currículos tanto na organização da escola, quanto nas atividades de assistência pedagógica didática junto à coordenação pedagógica e outros.

Enfim, o professor não é aquele que somente cumpre a sua carga horária. Nesta nova concepção de formação, o professor é atuante na sociedade de forma crítica, é um profissional ativo – reflexivo, pesquisador, elaborador e mediador de conhecimentos.

A formação de docentes está garantida pela Lei de Diretrizes e Bases (1996) como:

> “A formação de docentes para atuar na educação básica far-se a nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, em universidades e institutos superiores de educação, admitida, como formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nas quatro primeiras series do ensino fundamental, a oferecida em nível médio, na modalidade normal. ” (LDB. Nº 9.394, Artigo 62).

Por isso, o professor precisa estar bem qualificado, ter estudado de diversas formas, situações que possam se adequar às necessidades do aluno. De acordo com Freire (1999) a formação dos professores:

> “Não ocorre somente pelo acúmulo de cursos, palestras e métodos de ensino, mas por um trabalho de ação – reflexão e construção - reconstrução de identidade pessoal. Portanto a sua formação profissional está intimamente ligada à sua história. Acredito que a formação do educador, em geral, esteja intrinsecamente relacionada com a formação do cidadão, seja ele criança, adulto ou jovem. ” (FREIRE, 1999, p. 79).

Contudo, não adianta ser professor com um currículo extenso, se este por sua vez não se centrar em um conhecimento que deverá ser passado com segurança e autoestima. O próximo tópico nos mostra algumas das muitas situações e inquietações de alguns desses muitos pedagogos que buscam de alguma forma suprir essa falta de conhecimento.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Diante do proposto para escreve tal pesquisa, foram feitos questionários na esperança de trazer respostas as teorias aplicadas ao ensino da matemática no curso de pedagogia, onde deveria ser proposto ensino em diferentes metodologias de ensino. De acordo com Silva e Oliveira (p. 02) "É preciso entender onde estão as dificuldades e vivenciar diferentes metodologias no processo de construção do conhecimento matemático. "

Dizemos então, que o ensino da matemática no curso de pedagogia, preocupa-se muito mais em formar um profissional que tenha domínio de conteúdo do que alguém que fale sobre a matemática explorando suas múltiplas ideias e formas.

Vamos analisar questionários formados por quatorze (14) questões que usam como requisitos perguntas simples a mais elaboradas que buscam compreender qual a importância do estudo da matemática no curso de pedagogia. As perguntas foram respondidas por pedagogos que estão concluindo ou que já concluíram a algum tempo a graduação e que atuam como tal. Em primeiro momento perguntamos como ele visualiza a matemática em seu cotidiano. O sujeito **A1** respondeu: Sim. Números de casas, pagar contas. O sujeito **A2**: Sim. Nas compras de supermercado, no talão de água, luz e telefone. O sujeito **A4** disse não visualizava e hoje quase não assimila as relações que a matemática possui em sua vida.

As afirmações de **A1** e **A2** vêm ao encontro da fala de Pais (2015) quando este afirma que a contextualização se refere a um conceito fundamental da didática, pois seu objetivo é expandir e tornar compreensível o significado da expansão escolar. Assim, "o valor educacional de uma disciplina expande na medida em que o aluno compreende os vínculos do conteúdo estudado com um contexto compreensível por ele (PAIS, 2015, p. 27)". A negação de **A4,** necessita de uma maior integração da informação e democratização, precisando interagir buscando mudanças que faça com que o aluno viva melhor na sociedade, aproveitando toda essa riqueza de informações. E que seja possível, formular hipóteses, ser criativo e inovador sempre usando a matemática.

Podemos perceber que a matemática assim como qualquer outra disciplina nos mostra que ela faz parte do nosso dia-a-dia, em todo e qualquer lugar, e que infelizmente podemos perceber a necessidade de aprender como utilizar a matemática em alguns casos.

Um segundo questionamento feito foi se, a disciplina voltada para o ensino da matemática durante o curso superior lhe proporcionou ensino de conteúdos matemáticos. Responderam que:

A1: *Não. Quase nenhum conhecimento me foi acrescentado.*

A2*: Não, o conhecimento didático não me preparou para trabalhar com crianças menores.*

A3: *Sim. Me despertou para ensinar matemática com jogos e material concreto.*

A5: *Não. Foi um estudo superficial.*

Visto anteriormente que a matemática é uma parte importante para a criança, e esta sendo vista de tamanha importância do seu cotidiano pelos próprios professores. A maioria em suas respostas nos deixa nítido que a faculdade de nada ensinou para a busca de novas metodologias. As falas de **A1**, **A2** e **A5,** contradizem Valente e Pinheiro (2013), que nos diz que os professores deveriam ser instruídos a ensinar novos conteúdos matemáticos na escola básica, que trata a matemática de modo a aprender como fazer e o que fazer, proporcionando aos professores possibilidade de conhecer ou fazer algo novo, porém corroboram com a fala de **A3** que afirma ter conhecido e aprendido a trabalhar o ensino de matemática com materiais diversos na graduação.

Em seguida, perguntamos se hoje em sala de aula o professor regente utiliza recursos para aprimorar suas aulas de matemática, 66% (sessenta e seis por cento) disseram usar tampinhas, palitos, réguas, fichas e etc., 18% (dezoito por cento) não sabe como utilizar materiais concretos que induza o aluno aprender, 16% (dezesseis por cento) disse que produz jogos educativos com seus próprios alunos e se diverte com eles. Raríssimas vezes, veremos um professor produzir qualquer tipo de material para a aprendizagem de seus alunos que os ajudem a raciocinar.

Muitas pessoas optam por fazer o curso apenas por fazerem, ou simplesmente para fugirem da tão temida matemática, e onde se enganam. E então, acabam fazendo do jeito que der. Muitos ainda reclamam do currículo, do que ele exige, qual planejamento deve ser feito, e assim deixa passar a oportunidade de planejar algo bem elaborado e que leve ao aluno uma maior compreensão da matemática que o rodeia, outros acreditam que a culpa está interligada ao cansaço do cotidiano que não o permite elaborar um bom desempenho, De acordo com Carvalho, Mercedes (2012, p. 42): "... os professores desconsideram estas hipóteses que favorecem os processos de aprendizagem sobre os números e as letras, e apresentam a eles atividades mecânicas e sem significados para eles."

Para finalizar o questionário, perguntamos qual seriam na opinião deles os objetivos e as funções sociais dos conteúdos matemáticos para formar um cidadão, 90% (noventa por cento) não souberam responder quais seriam estes objetivos, mas todos chegaram a mesma função social que é vincular a matemática ao exercício da cidadania.

O fato de utilizar recursos diferenciados no ensino de matemática ainda assusta e ainda intimidam alguns professores, pois estão habituados a ministrarem suas aulas de forma expositiva, tradicional e nada contextualizada. Sendo a escola responsável pela formação de cidadãos críticos, ativos e reflexivos e o professor protagonista neste ambiente de ensino, este deve se atentar para as necessidades e exigências sociais e adequar suas aulas de modo a preparar seus alunos para serem atuantes nesta sociedade exigente e evolutiva.

No entanto, a formação inicial deve ser pautada em conhecimentos necessários à prática docente, propiciando ao licenciando um olhar crítico e reflexivo frente aos conteúdos ensinados, contextos abordados e recursos utilizados diante as necessidades de seu alunado e as exigências curriculares.

CONCLUSÃO

Acredita-se que metodologias de trabalho de certas naturezas tem o poder de fazer com que o aluno se sinta autoconfiante na sua capacidade de criar e fazer diferentes matemáticas. Deixando assim de ser um corpo de conhecimentos prontos e passando o aluno a fazer parte integrante do processo de construção de seus conceitos.

Ao chegar ao final deste trabalho, buscamos evidenciar porque a matemática é ensinada de forma repetitiva e cansativa, entendemos no decorrer do texto que não existem culpados, existem apenas concepções diferentes na forma de ensinar de cada professor.

O processo de alfabetização começa ao nascermos, onde começa a se construir durante toda a sua vida, onde a medida que se cresce vai construindo seu presente e futuro.

A proposta dada ao início, foi correspondida, mas ainda a muito o que se questionar, percebe-se que a falta de pessoas monitoradas e interessadas em ensinar algo novo é extremamente relevante e que faltam interpretar o mundo que gira em torno de alunos.

Ao analisar os questionários respondidos, deixa claro que a universidade aqui citada deixa lacunas, tanto pelo tempo destinado ao estudo da matemática, quanto pela ementa envolvida.

Logo, pela breve investigação feita, concluiu-se que o curso de Licenciatura em Pedagogia não tem formado profissionais aptos para trabalhar de forma significativa a matemática nos anos iniciais. E infelizmente, esses fatores refletem em toda trajetória escolar do aluno, mas, por mais que a universidade não tenha conseguido formar esse profissional, de forma significativa, o professor não deve acomodar durante sua prática docente, pois seu papel continua sendo sempre buscando, inovando suas práticas dentro da sala de aula, em prol de um ensino de matemática dinâmico, prazeroso e contextualizado.

REFERÊNCIAS

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do ensino da matemática. -** 4ª edição. – São Paulo: Cortez, 2011.

CARVALHO, Mercedes. **Estágio na licenciatura em Matemática: 1. Observações nos anos iniciais.** – Petropólis, RJ: Vozes; Maceió, AL: Edufal, 2012. – (Série Estágios – Coordenação:

Mercedes Carvalho e Edna Prado).

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM, Ano II. N2. Brasília. 1989. P. 15 – 19.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. **Formação de Professores de Matemática para o século XXI: o Grande Desafio.** Pro-Posições. Vol. 4 nº 1 (10). Março de 1993.

DEMO, Pedro. **Saber Pensar.** 7ª edição. – São Paulo: Cortez editora. Instituto Paulo Freire, 2011. – (Guia da escola cidadã; vol. 6).

DIENES, Zoltan P. **As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática**. – Tradução: Maria Pia Brio de Macedo Charlier e René François Joseph Charlier. - 1ª ed – Editora Herder, São Paulo, 1972.

Fernandes, Domingos. **A importância das escolas** http://www.apagina.pt/?aba=7&cat=522&doc=13523 . Acesso em: 07/05/2017

FREITAS, Luiz C. de; 26/11/2014. **Mobilizar a Comunidade.** Carta Fundamental: a revista do professor. São Paulo – SP, nº 60. P. 13. Julho/ Agosto 2014.

GADOTTI, Moacir. **Perspectivas atuais da educação.** São Paulo em Perspectiva, 14(2) 2000.

KEPLER, Selene Ribeiro; **A criança de 6 e 7 anos na 1ª série**. MEC. INEP. CEPE. Rio de Janeiro. 1974.

LDB BRASIL - **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Brasília, 1996.

MONTEIRO, Ainda. PIMENTA, Selma Garrido. **Educação em Direitos Humanos e formação de Professores (as).** – 1ª edição. – São Paulo: Cortez, 2013.

NACARATO, Adair Mendes. MENGALI, Brenda Leme da Silva. PASSOS, Cármen Lúcia. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender**. – 1. Reimp. – Belo Horizonte – MG. Autêntica Editora, 2011.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa**. 3ª edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

CAPÍTULO 19

OS DÍGITOS VERIFICADORES DO CADASTRO DE PESSOAS FÍSICAS (CPF)

Pedro Leonardo Pinto de Souza
Universidade Federal de Ouro Preto
Ouro Preto – Minas Gerais

Vinícius Vivaldino Pires de Almeida
Universidade Federal de Ouro Preto
Ouro Preto – Minas Gerais

Edney Augusto Jesus de Oliveira
Universidade Federal de Ouro Preto
Ouro Preto – Minas Gerais

RESUMO: A presença dos dígitos verificadores tem se tornado cada vez mais recorrente no nosso cotidiano como uma das consequências da era da digitalização. Essa aplicação da teoria dos códigos surge para detectar erro de codificação (FINI, 2009). Há diversos padrões de códigos lineares cujo os dígitos verificadores são calculados de maneira análoga, variando apenas alguns parâmetros do seu sistema de codificação. Nosso objetivo nesse trabalho é definir uma maneira de calcular os dígitos verificadores de um código através das definições de produto interno sobre $\mathbb{R}$ e congruência modular módulo. Tendo em vista que os códigos dos quais definiremos o cálculo dos dígitos verificadores são lineares, é interessante escrevê-los como vetores de um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, em que cada coordenada é um elemento de $\mathbb{R}$, deste modo, podemos relacionar o produto interno e a congruência modular em uma equação, a qual o dígito verificador deverá satisfazer. Definiremos o sistema de codificação a ser utilizado no cálculo e exibiremos tal equação. O cálculo dos dígitos verificadores permite mensurar a segurança de um código controlado pelo dígito verificador. Assim, esse resultado torna-se essencial para entender melhor a construção de códigos mais complexos (FINI, 2009).

THE CHECK DIGITS OF THE BRAZILIAN NATURAL REGISTER

ABSTRACT: The presence of check digits has become more recurrent in our everyday lives as one of the consequences of the digitalization era. This application of coding theory arises to detect coding error (FINI, 2009). There are several linear code patterns whose check digits are computed in an analogous way, varying only a few parameters of their coding system. Our objective in this work is to define a way to calculate the check digits of a code through the internal product definitions on $\mathbb{R}$ and modular congruence module. Since the codes from which we will define the calculation of the check digits are linear, it is interesting to write them as vectors of a vector space $\mathbb{R}^n$, where each coordinate is an element of $\mathbb{R}$, so we can relate the inner product and the modular congruence in an equation which the check digit must

satisfy. We will define the coding system to be used in the calculation and we will show the aforementioned equation. The check digits calculation allows you to measure the security of a code controlled by the check digit. Thus, this result becomes essential to a better understanding of the construction of more complex codes (FINI, 2009).

1 I INTRODUÇÃO

Neste trabalho iremos analisar os dígitos verificadores do cadastro de pessoas físicas (CPF) com um enfoque matemático, onde exibimos passo a passo o modo de obtê-los e para isso, nos baseamos no material citado em (FINI, 2009). Inicialmente mostraremos uma maneira de calcular os dígitos verificadores do CPF que nada mais é do que um código composto por números. Para realizar o cálculo, encontramos o primeiro dígito verificador escrevendo os primeiros números do CPF como um vetor $X \in \mathbb{R}^9$, de tal modo que o dígito verificador satisfaça uma equação que apresentaremos adiante. Em seguida, o segundo dígito verificador é calculado escrevendo os primeiros números do CPF, seguido do primeiro digito verificador encontrado, como um vetor $Y \in \mathbb{R}$^10 de modo a satisfazer uma segunda equação que exibiremos adiante. O dígito verificador exerce um papel importante em um código, pois se no momento da digitação desse código ocorresse um erro (por exemplo, se digitássemos um número errado) o computador programado para executar o algoritmo detectaria o erro, uma vez que a equação que o dígito verificador deveria satisfazer não é verificada (FINI, 2009).

2 I CONCEITOS PRELIMINARES

Nesta seção iremos definir os conceitos matemáticos fundamentais no cálculo dos dígitos verificadores e estabeleceremos algumas notações que serão utilizadas ao longo do trabalho. Para uma maior compreensão do conteúdo aqui apresentado, exemplificaremos todas as definições de forma objetiva.

2.1 Divisão de Números Inteiros

Definição 2.1.1. Um número inteiro *a* é divisor de um número inteiro *b* (ou *b* é divisível por *a*), quando existe um número $c \in \mathbb{Z}$, tal que *b* = *ac*. Nesse caso, dizemos que b é múltiplo de a, e para denotar que *a* divide *b*, utilizamos *a* I *b*.

Quando *a* I *b* e *a* ≠ 0, dizemos que o número inteiro *c*, tal que *b* = *a* · *c*, com *c* $\in \mathbb{Z}$, é o quociente de *b* por *a*.

Exemplo 2.1.1. O número 0 divide ele próprio. De fato, para todo *c* $\in \mathbb{Z}$, temos que 0 = 0 · *c*.

Exemplo 2.1.2. De acordo com a definição acima – 3 I 18, pois tomando *c* = – 6 $\in \mathbb{Z}$ temos que $18 = (-3) \cdot (-6)$.

Note que 20 não é divisível por –3, pois não existe nenhum número inteiro *c* com a propriedade 20 = (–3) · *c*. Nesse caso escrevemos $-3 \nmid 20$.

Em geral, se *b* for um número inteiro que não é divisível por *a*, então escrevemos $a \nmid b$. Vale destacar que existem infinitos pares (*a,b*) de números inteiros, tais que nenhum dos dois é divisor do outro, como por exemplo, tome *a* = 2 e *b* um número ímpar maior do que 1, que sempre teremos $a \nmid b$ e $b \nmid a$. Isso nos leva a concluir que a "operação" de divisão em $\mathbb{Z}$ não é assegurada. Porém, se observarmos na reta o conjunto dos números inteiros e dentro dela destacarmos os múltiplos de $a \in \mathbb{Z}$, veremos que todo número inteiro está "próximo" de um múltiplo de a. A formalização do conceito de próximo será dada de forma rigorosa no Teorema Divisão Euclidiana.

Teorema 2.1.1 (Teorema da Divisão Euclidiana). *Se* a e b *são inteiros e* $a >$ 0, *então existem números* q e r *inteiros, tais que* $b = aq + r$ *com* $0 \leq r < b$.

Demonstração. Vamos primeiro garantir que dados $a > 0$ e b inteiros, existem inteiros q e r com $0 \leq r < b$. Considere os conjuntos

$$A = \{n \in N \mid b < na\} \quad \text{e} \quad B = \{n \in N \mid b \geq na\}.$$

A propriedade arquimediana é citada por Hefez (2011) dos inteiros garante que $A \neq \emptyset$.

Se $A = \mathbb{N}$, então $b < a$, e nesse caso, tome $q = 0$ e $r = b$.

Se $A \neq \mathbb{N}$, então A possui um menor elemento (Princípio da Boa Ordem de $\mathbb{Z}$) citado em Hefez (2011), digamos $q + 1$. Assim, $q + 1$ é o menor inteiro tal que

$$b < (q + 1)a \quad \text{e} \quad b \geq qa.$$

Daí,

$$0 \leq b - aq < a.$$

Tomando $r = b - aq$, temos a existência de *q* e *r* como desejado. Agora provemos a sua unicidade. Suponha que existam q_1 e $r_1 \in \mathbb{Z}$ tais que, $b = aq_1 + r_1$ $0 \leq r_1 < a$, temos que $aq + r = b = aq_1 + r_1$, e assim, $a(q - q_1) = r + 1 - r$. Agora, suponha $r \neq r_1$ e $r > r_1$. Daí, $r_1 - r < 0$ e, como $a > 0$, segue que $q - q_1 < 0$. Assim $q_1 - q > 0$, isto é, $q_1 - q \geq 1$. Como $a(q - q_1) = r_1 - r$, segue que $r = r_1 + a(q_1 - q)$. Logo, $q_1 - q \geq 1$. Portanto, $r \geq a$, o que é um absurdo.

Analogamente, prova-se que a desigualdade $r_1 < r$ também é um caso impossível. Assim, $r = r_1$ e consequentemente $q = q_1$.

Exemplo 2.1.3. Determine o quociente e o resto da divisão $b = aq + r$ quando $b = 156$ e $a = 11$.

Solução: Pelo Teorema da Divisão Euclidiana, temos que $156 = 11 \cdot q +$

$r = 11 \cdot 14 + r \Rightarrow r = 2$. Logo $q = 11$ e $r = 2$.

Números Primos

Definição 2.1.2. *Um número inteiro p é chamado número primo, quando as seguintes condições se verificam:*

(i) $p \neq 0$;

(ii) $p \neq \pm 1$;

(iii) *Os* únicos *divisores de são* $\pm 1, \pm p$.

Teorema 2.1.2 (Teorema Fundamental da Aritmética)**.** Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, temos que ou *n* é primo ou então existem p_i primos com $1 \leq i \leq k$ tais que

$$n = p_1^{\alpha 1} \cdot p_2{}^{\alpha 2} \cdot \ldots \cdot p_k{}^{\alpha k}$$

com $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ e $\alpha\_i \in \mathbb{N}$ (Dummit and Foote Abstract Algebra, 2003).

A seguir apresentaremos um importante resultado referente ao conjunto dos números primos, cuja prova que apresentaremos é uma elegante demonstração publicada no livro “Os Elementos”, devida ao matemático Euclides (300 a.C.).

Teorema 2.1.3 (Teorema de Euclides)**.** Existem infinitos números primos.

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista uma quantidade finita de números primos e seja $X = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ o conjunto de todos os números primos.

Agora, considere o número natural *n* dado por

$$n = (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m) + 1.$$

Como $n = (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m) + 1 > 1$, então pelo Teorema Fundamental da Aritmética, ou *n* é primo ou pode ser escrito como um produto de números primos.

Uma vez que não existe tal que $p_i \in X$ tal que $p_i \mid n$, segue que *n* não pode ser escrito como produto de números primos. Logo *n* é primo.

Por outro lado, $n > p_i$ para todo $p_i \in X$, donde concluímos que $n \notin X$, o que é uma contradição, pois *n* é primo. Essa contradição surge quando supomos que o conjunto *X* dos números primos é finito. Portanto existem infinitos números primos.

2.2 Congruências

Definição 2.2.1. Sejam a, b, inteiros quaisquer e tal que $m \in \mathbb{Z}$ *tal que* $m \neq 0$. Dizemos que a e b são congruentes módulo m, quando $m \mid (a - b)$, isto é, se $a - b = mq$ para algum $q \in \mathbb{Z}$. Para denotar que a é côngruo a b módulo m, utilizamos $a \equiv b\ (mod\ m)$.

Proposição 2.2.1. Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 0$ fixado. Então

(i) $a \equiv a\ (mod\ m)$ (reflexividade).

(ii) Se $a \equiv b\ (mod\ m)$ então $b \equiv a\ (mod\ m)$ (simetria).

(iii) $a \equiv b\ (mod\ m)$ e $b \equiv c\ (mod\ m)$, então então $a \equiv c(mod\ m)$ (transitividade).

Demonstração. (i) Temos que $m \mid 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Em particular, 0 = $a - a$, assim, como $m \mid 0$, segue que $m \mid (a - a)$. Logo $a \equiv a\ (mod\ m)$.

(ii) Se $a \equiv b\ (mod\ m)$, então $m \mid (a - b)$, isto é, $a - b = mq, q \in \mathbb{Z}$ daí, $-(a - b) = -mq$ Deste modo $b - a = mq\ , q \in \mathbb{Z}$. Portanto $b \equiv a\ (mod\ m)$.

(iii) Dado que $a \equiv b\ (mod\ m)$, segue que $m \mid (a - b)$, assim, $a - b = mq,\ q \in,$ $\mathbb{Z}$ e $b \equiv c\ (mod\ m)$. Deste modo $m \mid (b - c)$, ou seja, $b - c = mq\ ,\ q \in \mathbb{Z}$. Daí, como $b = mq + c$, temos que $a - b = mq$, isto é $a - (mq + c) = mq$. Logo $a - c = m(q - q)$ e, portanto, $a \equiv c\ (mod\ m)$.

Uma relação que satisfaz os itens (i), (ii), e (iii) é chamada de relação de equivalência. Deste modo a relação de congruência modulo *m* é uma relação de equivalência sobre $\mathbb{Z}$, ou seja, o conjunto $\mathbb{Z}$ pode ser particionado em subconjuntos de modo que quaisquer dois elementos em um mesmo subconjunto são congruentes módulo *m*.

Definição 2.2.3. Sejam a, b, d inteiros, tal que $d \geq 0$. Dizemos que d é o máximo divisor comum (mdc) de a e b quando são válidas as seguintes propriedades:

(i) $d \mid a\ e\ d \mid b$;

(ii) Se $c \mid a\ e\ c \mid b$, então $c \mid d$.

Definição 2.2.4. Sejam a, b inteiros. Dizemos que a e b são primos entre si quando $mdc(a, b) = 1$, isto é, a e b não possuem nenhum divisor primo em comum.

Proposição 2.2.1. Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$ com $m > 0$ fixado. Então

(i) Se $a \equiv b\ (mod\ m)$ se, e somente se, a e b possuem o mesmo resto na divisão euclidiana por m.

(ii) Se $mdc\ (c, m) = 1$ e $ac \equiv bc\ (mod\ m)$, então $a \equiv b\ (mod\ m)$.

(iii) $a \equiv b\ (mod\ m)$ e $c \equiv d\ (mod\ m)$, então $ac \equiv bd\ (mod\ m)$. Essa propriedade pode ser generalizada, por indução, para *n* congruências.

Demonstração. (i) (⇒): Pelo Teorema da Divisão Euclidiana, temos que existem

$q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a = mq_1 + r_1, \qquad b = mq_2 + r_2, \qquad 0 \leq r_1 < m \text{ e } 0 \leq r_2 < m.$$

Por hipótese, temos que $a \equiv b\ (mod\ m)$, assim, $m \mid a - b$, isto é, $m \mid (mq_1 + r_1) - (mq_2 + r_2) = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$. daí $m \mid r_1 - r_2$. Logo $r_1 = r_2$

($\Leftarrow$): Se $a = mq + r$ e $b = mq + r$, então $a - b = mq - mq + 0 = m(q - q)$. Portanto $a \equiv b\ (mod\ m)$.

(ii) Se $ac \equiv bc\ (mod\ m)$, então $(ac - bc) = mq$, ou seja, $c(a - b) = mq$ para algum $q \in \mathbb{Z}$.

Deste modo, temos que $m \mid c$ ou $m \mid (a - b)$.

Como $mdc\ (c, m) = 1$, segue que $m \nmid c$. Logo $m \mid (a - b)$ e, portanto, $a \equiv b$ $(mod\ m)$.

(iii) Se $a_1 \equiv b_1 (mod\ m), a_2 \equiv b_2 (mod\ m), \ldots, a_n \equiv b_n (mod\ m)$, então $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n (mod\ m)$.

Em particular, se $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ e $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$, temos que $a_n \equiv b_n (mod\ m)$.

Exemplo 2.2.1. Para ilustrar essa última propriedade, mostre que $10^{200} - 1$ é divisível por 11.

Solução: Como $10^{200} \equiv -1\ (mod\ 11)$, então, pela propriedade 2.2.1 item (iii), $10^{200} \equiv (-1)^{200} (mod\ 11)$, o que implica em $10^{200} \equiv 1\ (mod\ 11)$. Daí, pela definição de congruência, $10^{200} - 1$ é divisível por 11.

2.3 Produto Interno Sobre $\mathbb{R}$

Para calcular os dígitos verificadores, além dos conceitos já definidos, utilizaremos também o produto interno definido no conjunto dos números reais entre dois vetores.

Definição 2.3.1. *Seja V um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$. *Um produto interno em V sobre* $\mathbb{R}$, *é uma aplicação*

$$\Psi(\cdot\,,\cdot):\ V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \mapsto \Psi(u, v)$$

que satisfaz todas as propriedades.

(*i*) $\Psi(u + v, w) = \Psi(u, w) + \Psi(v, w)$ para todos $u, v, w \in V$.

(*ii*) $\Psi(\alpha u, v) = \alpha\Psi(u, v)$ para todos $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(*iii*) $\Psi(u, v) = \Psi(v, u)$ para todos $u, v \in V$.

(*iv*) $\Psi(u, u) > 0$ se $u \neq 0$ e $\Psi(u, u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Exemplo 2.3.1. Sejam $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ e defina a aplicação dada por

$$\Psi(X, Y) = \Psi\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

A aplicação definida é um produto interno em $\mathbb{R}^n$. A prova deste exemplo pode ser encontrada em (Ulhoa; 2003).

Exemplo 2.3.2. Sejam $u = (1, -1, 1)$ e $v = (0, 2, 4)$. Determine o produto interno u, v.

Solução: Para calcular o produto interno entre os vetores u e v, basta aplicar a definição dada no exemplo 2.3.1, em que $X = u = (1, -1, 1)$ e $Y = v =$ (0,2,4). Deste modo, temos que

$$\langle u, v\rangle = \langle (1, -1, 1), (0, 2, 4)\rangle = 1\ 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 2.$$

Logo $u, v = 2$.

Exemplo 2.3.3. Verifique se a aplicação dada por

$$\begin{array}{rccc} \Psi(u, v): & \mathbb{R}^2 \text{x } \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \big((a, b), (x, y)\big) & \mapsto & \Psi\big((a, b), (x, y)\big) = ab + xy \end{array}$$

é um produto interno de $\mathbb{R}^2$.

Solução: Vamos mostrar que a aplicação dada não é um produto interno e, para tanto, considere $u = (1, 2), v = (\pi, -3)$ e $w = (4, 7)$

(i) $\Psi(u + v, w) = \Psi\big((1, 2) + (\pi, -3), (4, 7)\big) = 27 - \pi.$

Por outro lado,

$$\Psi(u, w) + \Psi(v, w) = \Psi\big((1, 2), (4, 7)\big) + \Psi\big((\pi, -3), (4, 7)\big) = 58 - 3\pi.$$

Logo, $\Psi(u + v, w) \neq \Psi(u, w) + \Psi(v, w)$. Assim, a aplicação definida não é produto interno em $\mathbb{R}^2$, pois o item (i) da definição 2.3.1 não é satisfeito.

Exemplo 2.3.4. Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Defina a aplicação

$$\Psi(A, B) = \sum_{i=1}^{2} (a_{ii} + b_{ii}).$$

Verifique se a aplicação acima é um produto interno.

Solução: Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Note que

$$\Psi(A, A) = \Psi\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0;$$

mas não é a matriz nula. Portanto, a aplicação definida não é um produto interno em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R}$.

Proposição 2.3.1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com um produto interno $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$.

(i) $\langle 0, u \rangle = 0$, para todo $u \in V$.

(ii) $\langle u, v + \alpha w \rangle = \langle u, v \rangle + \alpha \langle u, w \rangle$, para todos $u, v, w \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (i) Temos que $\langle 0, u \rangle = \langle 0 + 0, u \rangle = \langle 0, u \rangle + \langle 0, u \rangle$. Logo, $\langle 0, u \rangle = 0$, para todo $u \in V$.

(ii) De fato, pois

$$\langle u, v + \alpha w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, \alpha w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle \alpha u, w \rangle = \langle u, v \rangle + \alpha \langle u, w \rangle.$$

Na próxima seção faremos um apanhado histórico sobre o que são os códigos e o Cadastro de Pessoas Físicas - CPF, além de mostrar como o CPF é construído e qual a sua importância. Ao final desta seção, munidos de todo o conhecimento aqui exposto, vamos apresentar um método utilizado no cálculo dos dígitos verificadores do CPF e faremos alguns exemplos práticos deste cálculo.

3 I CÓDIGOS

Os códigos fazem parte da vida cotidiana: temos um Registro de Identidade (RG) numerado, e, para pagarmos impostos sobre a nossa renda, temos um número de Cadastro de Pessoas Físicas (CPF). Moramos em um endereço com Código de Endereçamento Postal (CEP), nosso carro tem um registro de chassi e carrega uma chapa com números e letras que dizem onde ele está cadastrado. Quando trabalhamos, temos, em geral, a Carteira Profissional, votamos com um Título de Eleitor identificado, os países e as cidades têm códigos de discagem de telefones; no supermercado, na farmácia, nas bancas de revistas, nas livrarias, os produtos são acompanhados de etiquetas com seu código e outros (FINI; 2003).

A finalidade dos códigos é viabilizar o registro, o acompanhamento e às vezes toda a execução de uma operação humana. Nesse sentido, há códigos que concentram grande quantidade de dados e informações. E há bons exemplos de como eles podem agilizar as tarefas do nosso cotidiano, como é o caso dos códigos de barras óticos (FINI; 2003).

Mas afinal, o que é um código? Segundo o dicionário Aurélio; “um código é um sistema convencional, rigorosamente estruturado, de símbolos ou de sinais e de regras combinatórias integrado no processo da comunicação". Os códigos de identificação de pessoas, objetos, situações e outros. São, em geral, formados de algarismos ou de letras e algarismos que podem ou devem ser controlados, para tornar possível detectar erros de codificação. Para "avisar" que há erro de codificação, foi criado um grupo de algarismos, chamados "dígito de verificação" que são justapostos ao código de identificação, geralmente no final. Nosso objetivo nesse trabalho é identificar e compreender como esses dígitos de verificação são determinados em alguns casos

(FINI; 2003).

Existem vários tipos de códigos, dentre eles, alguns códigos de barras que seguem o modelo EAN/UPC (European Article Number / Universal Product Code). Um exemplo de código de barras EAN, é o código de barras que utiliza a estrutura EAN-13, que nada mais é, do que o número identificador de um produto. O primeiro produto a utilizar a tecnologia do código de barras no Brasil foi a Castanha de Caju Cauê, em 1985.

O sistema de identificação usado para o cadastramento de pessoas físicas e jurídicas no Brasil, que fornece o número de CPF e CNPJ, emitido pela Receita Federal e o cadastramento de livros, que fornece o código ISBN (International Standard Book Number) é o EAN - 11, que é um dos tópicos deste trabalho.

4 I SISTEMA DE IDENTIFICAÇÃO UTILIZADO NO CADASTRAMENTO DE PESSOAS FÍSICAS

O Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) (Figura 4) foi criado em 1968 e instituído no mesmo ano, substituindo o até então Registro de Pessoas Físicas, que era o registro das pessoas físicas obrigadas a apresentar a declaração de rendimentos e bens. Foi batizado de Cartão de Identificação do Contribuinte (CIC) (Figura 4), tornando obrigatório a sua menção, a partir do ano de 1970, em vários documentos, como por exemplo, no controle de locação de bens móveis e imóveis, e nas escrituras apresentadas aos registros dos imóveis. O sucessor do CIC foi o cartão do CPF que ainda é muito utilizado atualmente (Receita Federal; 2016).

A partir disso, a lista de exigências de menção do CPF só aumentou, ultrapassando os limites do imposto de renda e tornando-se um documento de suma importância no cotidiano do brasileiro (Receita Federal; 2016).

Em 2012, a Receita Federal do Brasil implementou o serviço gratuito de inscrição no Cadastro de Pessoas Físicas pela internet. Ao final da solicitação de inscrição efetivada com sucesso, era gerado automaticamente, o número de inscrição no CPF e o "Comprovante de Inscrição no CPF". Todavia, continuaram os canais tradicionais de atendimento CPF (Receita Federal; 2016).

Figura 3: Modelo do Cartão de Identificação do Contribuinte, o primeiro cartão utilizado como sendo um tipo de cadastro de pessoas físicas.

Retirado em https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:CIC_frente_e_verso.jpg.

Figura 4: Cartão do CPF. Sucessor do CIC e bastante comum até os dias de hoje.

Retirada de https://iltomvargas.blogspot.com/2017/01/contribuinte-pode-atualizar-cpf-pela.html.

Figura 5: CPF Digital. Criado em 2012 pela Receita Federal para facilitar a inscrição, sendo o sucessor do cartão usual do CPF.

Retirada de https://www.creditooudebito.com.br/como-tirar-segunda-via-cpf-pela-internet/.

O CPF surgiu substituindo o Registro de Pessoas Físicas com o objetivo de reunir informações detalhadas sobre as pessoas físicas, para que a Administração Tributária pudesse coletar essas informações das pessoas que eram obrigadas a apresentar a declaração de rendimentos e bens (Receita Federal; 2016). Mas como era formado os números do CPF? Veremos a seguir, como eram e como são compostos agora, esses números que conhecemos como CPF.

4.1. Composição do número do CPF

O Registro de Pessoas Físicas era composto por seis dígitos. Com a criação do CPF, foram introduzidos o sétimo e o oitavo dígito, sendo o oitavo obtido através de um cálculo. Posteriormente, foi introduzido o nono dígito, que até hoje baseia-se na subdivisão do país em dez regiões, chamadas de regiões fiscais (Figura 6). Pouco tempo depois, foram introduzidos dois dígitos no número de inscrição, que eram calculados e chamados de números de controle. Em 1972, a 8ª Região Fiscal (Estado de São Paulo) esgotou o estoque de números e o oitavo dígito que antes era calculado, passou a integrar uma sequência aleatória de oito dígitos (Receita Federal; 2016).

Atualmente o CPF ainda é composto por uma sequência de oito dígitos aleatórios por região fiscal, o nono sendo o código correspondente a determinada região (Figura 7) e os dois últimos chamados de dígitos verificadores. Neste trabalho, apresentaremos um método utilizado no processo de cálculo do 10º e 11º dígitos (Receita Federal; 2016).

Figura 6: Mapa da subdivisão das dez regiões fiscais do Brasil

Retirada em https://pt.wikipedia.org/wiki/Regi%C3%A3o_fiscal#/media/File:Brazil_Fiscal_regions_Labelled_Map.svg.

Tabela dos códigos correspondentes às regiões fiscais do Brasil, que são utilizados no cálculo dos dígitos verificadores do CPF pelo sistema EAN-11.

CÓDIGO EAN-11 PARA AS UNIDADES DA FEDERAÇÃO	
BRASIL	
0	Rio Grande do Sul
1	Distrito Federal, Goiás, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Tocantins
2	Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia e Roraima
3	Ceará, Maranhão e Piauí
4	Alagoas, Paraíba, Pernambuco e Rio Grande do Norte
5	Bahia e Sergipe
6	Minas Gerais
7	Espírito Santo e Rio de Janeiro
8	São Paulo
9	Paraná e Santa Catarina

4.2. Os Dígitos Verificadores do CPF

Vamos agora, mostrar uma maneira de encontrar os dígitos verificadores do CPF, para isso, estabeleceremos algumas definições.

Definição 4.2.1. *Um determinado vetor fixo utilizado em um sistema de codificação é chamado vetor de pesos.*

Denotaremos por $I_{10} = \{a \in \mathbb{Z}\,; 0 \leq a \leq 10\}$ como sendo o conjunto de todos os valores que os dígitos verificadores podem assumir.

Sejam e $m, n \in \mathbb{N}$ e a_{10}^*, a_{11}^*, respectivamente o 10º e o 11º dígitos do CPF, ou seja, os dígitos verificadores e $X = (x_1, x_2, \ldots, x_8, b)$; $Y = (x_1, x_2, \ldots, x_8, b, a_{10}^*)$, onde $x_i \in I_9$, onde *b* é o número da Região Fiscal e a_{10}^* é o primeiro dígito verificador. O vetor *X* será chamado de **vetor de informação** e o vetor *Y* **vetor de identificação**.

Definição 4.2.2. Sejam $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$; $w_i \in B = \{a \in Z; 0 \leq a \leq m - 1\}$, um vetor de pesos e $c \in I_{10}$ um número fixado. Dados m, n e um conjunto de números $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$; $a_i \in B$, $1 \leq i \leq n - 1$. Define-se o **número de verificação** a_n como sendo o único elemento de I_9 que satisfaz a seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i w_i \equiv c \ (mod\ m). \quad (1)$$

Um sistema de codificação assim definido, será denotado por:

$$C = (I_9, m, n, c, w). \quad (2)$$

Como o CPF utiliza o sistema EAN-11, os vetores previamente escolhidos e denominados vetores de pesos para serem utilizados neste sistema são $w_1^* = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), w_2^* = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ para determinação do 10º e o 11º dígitos, respectivamente.

No nosso caso, para determinarmos a_{10}^* e a_{11}^*, o 1º e o 2º dígito verificador, utilizaremos *m* = 11 e *n* = 9 para o primeiro sistema de codificação $C_1 = (I_{10}, 11, 9, a_{10}^*, w^*)$ e $m = 11, n = 10$ para o segundo sistema de codificação $C_2 = (I_{10}, 11, 10, a_{11}^*, w^*)$, respectivamente. Sendo assim, os dígitos verificadores $a_{10}^*, a_{11}^* \in I_{10}$ são os números de I_{10} que verificam as equações:

$$[\langle X, w_1^* - a_{10}^* \rangle] \equiv 0 \ (mod\ 11). \quad (3)$$

$$[\langle Y, w_2^* - a_{11}^* \rangle] \equiv 0 \ (mod\ 11). \quad (4)$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar definido no Exemplo 2.3.1, *X* o vetor de informação e *Y* o vetor de identificação.

Caso $a_{10}^* = a_{11}^* = 10$ em (3) ou (4) (o que é possível, já que estamos trabalhando na congruência módulo 11), tomamos este dígito sendo 0 por convenção.

Exemplo 4.2.3. Dado que os oito primeiros dígitos de um CPF gerado no estado de Minas Gerais são 124.135.41, vamos calcular os seus dígitos verificadores.

Sendo este CPF gerado no estado de Minas Gerais, o seu código de região fiscal é 6. Daí, segue que os 9 primeiros dígitos deste CPF são 124.135.416. Utilizando a equação (3) para encontrarmos o primeiro dígito verificador, temos:

$$[\,\langle X, w_1^* \rangle - \ a_{10}^* \ ] \equiv \ 0 \ (mod\ 11)$$

$$\Leftrightarrow \ [\langle (1,2,4,1,3,5,4,1,6),(1,2,3,4,5,6,7,8,9)\rangle - \ a_{10}^* \ ] \equiv 0 \ (mod\ 11)$$

$$\Leftrightarrow \ [156 \ - \ a_{10}^* \,] \equiv \ 0 \ (mod\ 11)$$

$$\Leftrightarrow \ 156 \ = \ 11 \ \cdot \ 14 \ + \ a_{10}^* \ \Leftrightarrow \ a_{10} * \ = \ 2.$$

Logo, o único $a_{10}^* \in I_{10}$ que satisfaz esta equação é $a_{10}^* = 2$, pois $[156 \ - \ 2] \ \equiv \ 0 \ (mod\ 11)$. A unicidade de a_{10}^* é garantida pelo fato de a_{10}^* ser o resto da divisão de 154 por 11. Agora que sabemos o valor de a_{10}^*, vamos calcular o segundo dígito verificador utilizando a equação (4). Desse modo, temos que:

$$[\ \langle Y, w_2^* \rangle - \ a_{11}^* \ ] \equiv \ 0 \ (mod\ 11)$$

$$\Leftrightarrow \ [\langle (1,2,4,1,3,5,4,1,6,2),(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)\rangle - \ a_{11}^* \ ] \equiv \ 0 \ (mod\ 11)$$

$$\Leftrightarrow \ [147 \ - \ a_{11}^* \,] \equiv \ 0 \ (mod\ 11)$$

$$\Leftrightarrow \ 147 \ = \ 11 \ \cdot \ 13 \ + \ a_{11}^* \ \Leftrightarrow \ a_{11}^* \ = \ 4.$$

Deste modo, temos que o único $a_{11}^* \in I_{10}$ que satisfaz esta equação é $a_{11}^* = 4$, pois $[147 \ - \ 4] \ \equiv \ 0 \ (mod\ 11)$ e, portanto, os códigos verificadores encontrados configuram o CPF: 124.135.416-24.

5 I RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados obtidos neste trabalho evidenciam a estreita relação entre a matemática e os códigos tal como conhecemos no nosso cotidiano. É importante ressaltar que os códigos facilitam o armazenamento de informações e a comunicação, além da eficiência da aplicação dos dígitos verificadores ao gerar segurança nas mais variadas formas de comunicação e, principalmente, entender como a Álgebra Linear pode ser utilizada em diversas aplicações práticas ao enxergar por exemplo, os dígitos que compõem o CPF como um vetor de um espaço vetorial.

REFERÊNCIAS

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. Álgebra **Moderna**. 4 ed. São Paulo: Atual 2003.

DUMMIT, D. S.; FOOTE, Richard M. **Abstract algebra**. Hoboken: Wiley, 2004.

FINI, Maria Inês. **Controle dos Códigos de Identificação**. Revista do Professor – Atualidades, SEESP, Edição nº2, p. 70 – 75, 2009.

GS1 BRASIL (Associação Brasileira de Automação). Disponível em: <http://www.gs1br.org/>. Acesso em 15 jan. 2018.

GS1 BRASIL (Associação Brasileira de Automação). **Código de Barras EAN/UPC**. Disponível em: <https://www.gs1br.org/>. Acesso em 10 jul. 2017.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. (Coleção do Professor de Matemática)

ISBN. **ISBN - International Standard Book Number**. Disponível em: <http://www.isbn.bn.br/website/>. Acesso em 10 jul. 2017.

POLCINO MILIES, C. **A matemática dos códigos de barras.** Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009, v., p. 131-179

RECEITA FEDERAL. Subsecretaria de Arrecadação e Atendimento. **1968 A 1981 - Começa a Era da Secretaria da Receita Federal**. Disponível em: <https://idg.receita.fazenda.gov.br/sobre/institucional/memoria/imposto-de- renda/historia/1968-a-1981-comeca-a-era-da-secretaria-da-receita-federal>. Acesso em 9 jul. 2017.

RECEITA FEDERAL. Subsecretaria de Arrecadação e Atendimento. **Informações Gerais sobre o CNPJ.** Disponível em: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/orientacao/tributaria/cadastros/cadastronacional- de-pessoas-juridicas-cnpj/informacoes-gerais-sobre-o-cnpj>. Acesso em 6 dez. 2017.

RECEITA FEDERAL. **Cadastro Sincronizado Nacional.** Histórico. Disponível em: <https://www16.receita.fazenda.gov.br/cadsinc/sobre-o-projeto/historico/>. Acesso em 6 dez. 2017.

TIM HARFORD E BEN CRIGHTON. **Como o código de barras, nascido na praia, mudou a economia global.** Disponível em: <http://www.bbc.com/portuguese/geral-38553635>. Acesso em 26 jan. 2018.

U. COELHO, M.L. LOURENÇO. **Um Curso de Álgebra Linear.** 2 ed. São Paulo: EDUSP 2011.

U.S. ISBN AGENCY. **FAQs: General Questions.** Disponível em: <http://www.isbn.org/faqs general questions#isbn faq2>. Acesso em 8 dez. 2017.

CAPÍTULO 20

SIMETRIA MOLECULAR

Guilherme Bernardes Rodrigues
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Wendy Díaz Valdés
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática
Uberlândia – MG

Teófilo Jacob Freitas e Souza
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Alonso Sepúlveda Castellanos
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Matemática
Uberlândia – MG

RESUMO: A simetria molecular tem sido amplamente utilizada como ferramenta de estudo em aplicações como a espectroscopia vibratória, a teoria orbital molecular e a espectroscopia eletrônica. O interessante deste trabalho é que por meio dele se possibilita verificar o uso de conceitos matemáticos, como o de Grupos Diedrais e de Teoria de Grupo de Pontos, na determinação das propriedades de uma molécula de forma mais prática e simples, como por exemplo a polaridade e a quiralidade. Tal fato ocorre observando em qual grupo de pontos a molécula é classificada.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de grupos, Moléculas, Grupo de pontos.

MOLECULAR SYMMETRY

ABSTRACT: Molecular symmetry has been widely used as a study tool in applications such as vibration spectroscopy, molecular orbital theory and electron spectroscopy. The interesting thing about this work is that by means of it, it is possible to verify the use of mathematical concepts, such as the Diedrais Groups and the Group of Points Theory, in determining the properties of a molecule in a more practical and simple form, such as polarity and chirality. This fact occurs by observing at which group of points the molecule is classified.
KEYWORDS: Groups theory, Molecules, Group of points.

1 I INTRODUÇÃO

Segundo Lima (1998), um grupo é um conjunto não vazio G munido de uma operação interna denotada por $\rho(g,h) = g * h$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i. Associativa - Para todo $g, h, k \in G$ tem-se que $g*(h*k) = (g*h)*k$;

ii. Existência de elemento neutro - Existe $e \in G$ tal que $g*e = e*g = g$;

iii. Existência de elemento inverso - Para cada $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $g * h = h * g = e$.

Como exemplos pode-se citar o conjunto dos números inteiros, que é um grupo com operação natural de soma. Sendo que o elemento neutro nesse caso é o número 0 e o inverso de um elemento qualquer g é $-g$. Tem-se também que o conjunto dos números reais $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um grupo com operação natural de multiplicação, onde o elemento neutro é o número 1 e o inverso de um elemento qualquer g é $1/g$. As simetrias associadas aos polígonos regulares e suas operações pertencem aos chamados grupos diedrais, os quais são denotados por D_n. Os grupos diedrais são encontrados frequentemente em obras arquitetônicas, objetos e até mesmo em animais e moléculas (GARCIA e LEQUAIN, 2009).

Pode ser mostrado que $D_n = \langle R, F \rangle$, que representa o conjunto gerado por $R = R_{360/n}$ e F uma reflexão qualquer. Então, $R^n = F^2 = Id$ e $FRF = R^{-1}$. Logo,

$$D_n = \left\{ Id, R, R^2, \ldots, R^{n-1}, F, FR, FR^2, \ldots, f = FR^{n-1} \right\}$$

Em particular, para $n = 3$, tem-se as simetrias do triângulo que formam o grupo diedral D_3. Note que esse grupo tem seis elementos $D_3 = \left\{ R_1, R_2, R_3, F_1, F_2, F_3 \right\}$ e em geral os grupos diedrais tem $2n$ elementos onde n é o número de lados do polígono.

Outro conceito importante que será utilizado neste trabalho é o conceito de grupos cíclicos. Um grupo é cíclico se ele é gerado por um dos seus elementos. Por exemplo, o grupo $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ com a soma módulo 6 é um grupo cíclico já que o elemento 1 gera o grupo todo.

De acordo com Hochstrasser (1966) existem cinco tipos de operações de simetria:

1 - A operação identidade é a mais simples, geralmente indicada pelo símbolo *E* é uma rotação de *0* graus;

2 - A reflexão (rotação de 180 graus) por meio de um plano é denotada pela letra grega σ;

3 - A rotação sobre um eixo é denotada C_n. Onde C significa que uma rotação está envolvida e o subíndice *n* indica qual a fração de uma rotação completa por 2π deve ser executada. Por exemplo, uma rotação de 120 graus ou $(2\pi / 3)$ é chamada de rotação C_3. Escolhendo-se o sentido horário para a rotação C_n;

4 - Uma roto-reflexão (S_n) consiste em uma rotação seguida de uma reflexão por meio do plano perpendicular ao eixo de rotação;

5 - A inversão (i) consiste na passagem de cada ponto através do centro de inversão e o posicionamento destes a uma distância similar no lado oposto.

2 I SIMETRIA MOLECULAR

Os grupos de pontos são uma classificação que as moléculas recebem usando critérios simétricos. A seguir, um resumo dessa classificação proposta por Vallance (2009), Willock (2009) e Hochstrasser (1966), dentre outros autores.

1. Grupo sem-eixo: C_s, C_i e C_1. Se não houver nenhum eixo de simetria, então há apenas algumas opções para elementos simétricos que podem ser usadas em um grupo. O grupo C_1 apresenta somente a identidade (item a da Fig. 1). O grupo C_s além da identidade apresenta um plano de reflexão, σ_h (item b da Fig. 1). O grupo C_i apresenta a identidade e um centro de inversão i (item c da Fig. 1). Algumas moléculas deste grupo são apresentadas mais à direita da Fig. 1.

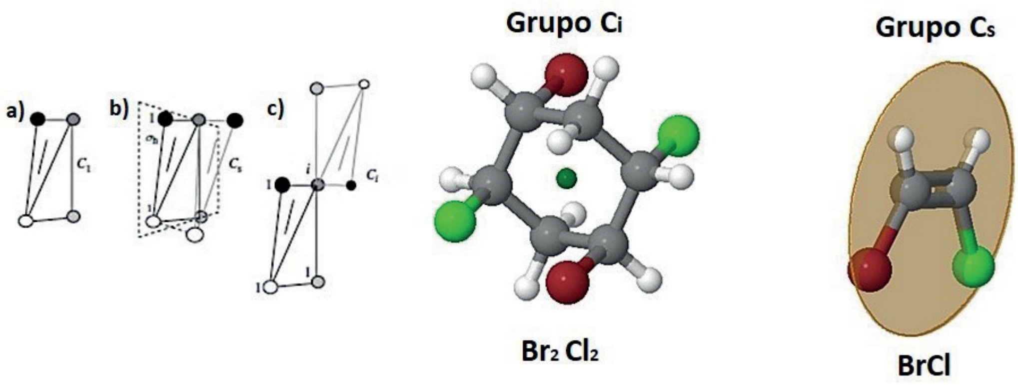


Figura 1: Grupos sem-eixo (SYMMETRY OTTERBEIN).

2. Grupos cíclicos: C_n e S_n. O grupo de pontos C_n contém a identidade e n planos de rotação. Já o grupo de pontos S_n contém a identidade e um eixo de roto-reflexão. Em ambos os casos, o subíndice indica a ordem do eixo. Na Fig. 2 são apresentadas algumas moléculas deste grupo.

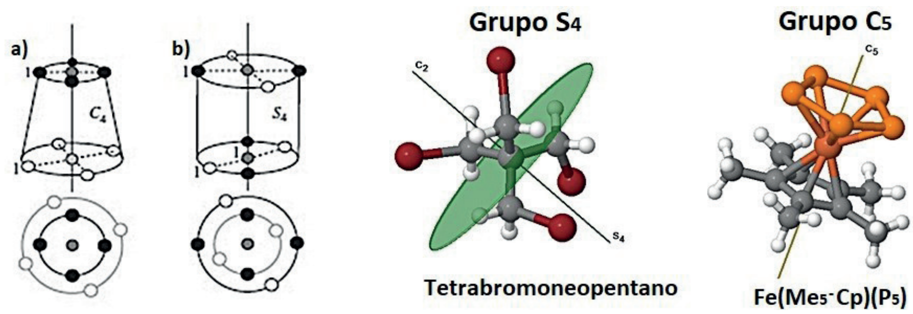


Figura 2: Grupos cíclicos (SYMMETRY OTTERBEIN).

3. Grupos relativos ao eixo (axiais) contendo planos de espelho: C_{nh} e C_{nv}. Nesses grupos, há apenas um eixo e o subíndice n é usado para indicar sua ordem. Os grupos de pontos C_{nh} contêm um único plano horizontal, enquanto os grupos C_{nv} têm n planos verticais. Duas moléculas deste

grupo são mostradas na Fig. 3.

4. Grupos relativos ao eixo com múltiplos eixos de rotação: D_n, D_{nd} e D_{nh}. Grupos que contêm múltiplos eixos de rotação que não podem ser considerados grupos cúbicos, são representados com o símbolo começando com a letra D. O grupo D_n apresenta apenas eixo de reflexão. O grupo D_{nd} é uma extensão do grupo D_n com a introdução de planos diedrais espelhados entre os eixos C_2 horizontais. Já o grupo D_{nh} possui os mesmos elementos de simetria do grupo D_n, porém com a introdução de um plano horizontal. Algumas moléculas deste grupo são indicadas na Fig. 4.

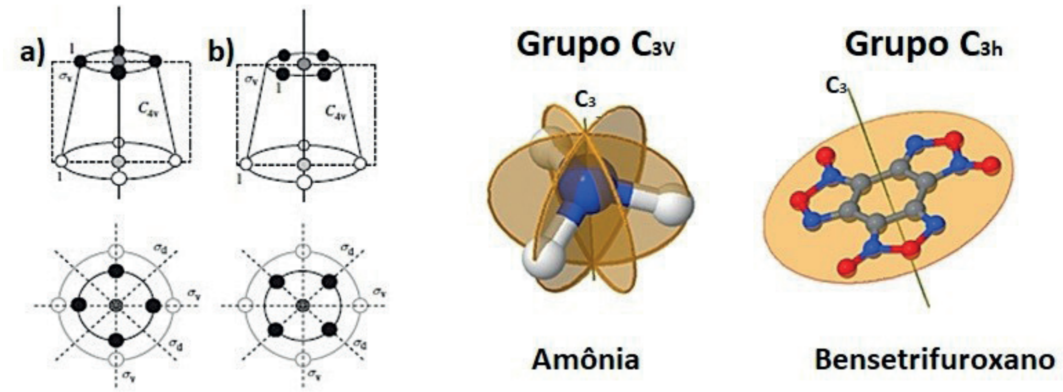


Figura 3: Grupos com planos espelhos (SYMMETRY OTTERBEIN).

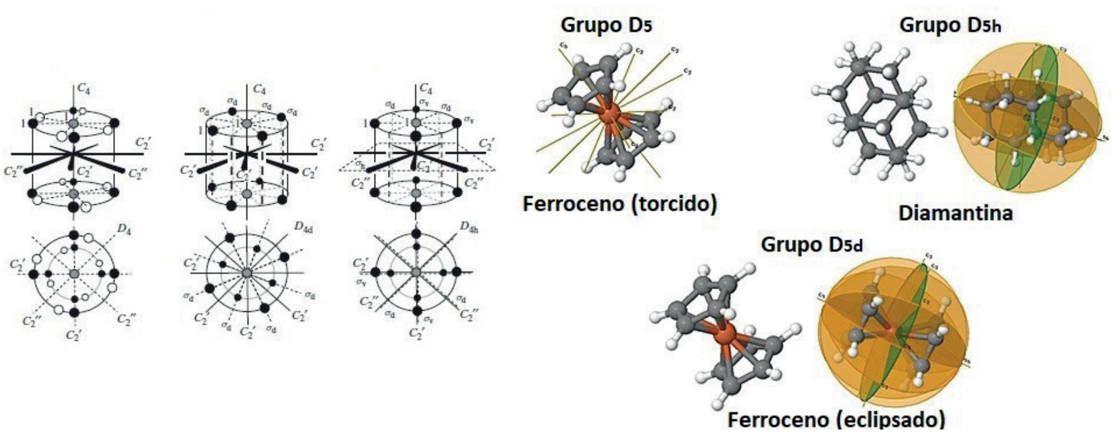


Figura 4: Grupos com múltiplos eixos de rotação (SYMMETRY OTTERBEIN).

Grupos especiais para moléculas lineares: $C_{\infty v}$ e $D_{\infty h}$. Moléculas com infinitos planos espelhos verticais e eixos de rotação se encontram nos grupos chamados de $C_{\infty v}$. Neste caso as moléculas são lineares e com extremos diferentes. Se a molécula tiver pontos equivalentes em qualquer extremidade do eixo, ela também terá um plano de espelho horizontal σ_h e um número infinito de eixos C_2 perpendiculares ao eixo principal. Neste caso, o grupo de pontos será $D_{\infty h}$. Algumas moléculas desses grupos são mostradas na Fig. 5.

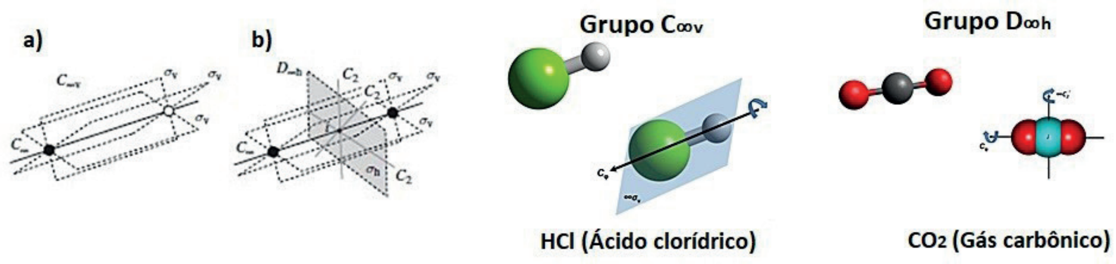


Figura 5: Grupos com moléculas lineares (SYMMETRY OTTERBEIN).

5. Os grupos cúbicos: T_d e O_h. O grupo T_d apresenta os elementos de simetria de um tetraedro regular, incluindo a identidade, 4 eixos C_3, 3 eixos C_2, 6 planos espelhos diedrais e 3 eixos S_4. O grupo O_h apresenta os elementos de simetria de um octaedro regular. Algumas moléculas deste grupo se encontram na Fig. 6. Vale ressaltar que os grupos T e O são semelhantes aos grupos T_d e O_h, respectivamente, porém sem os planos de reflexão. O grupo T_h é similar ao grupo T, mas contendo o centro de inversão.

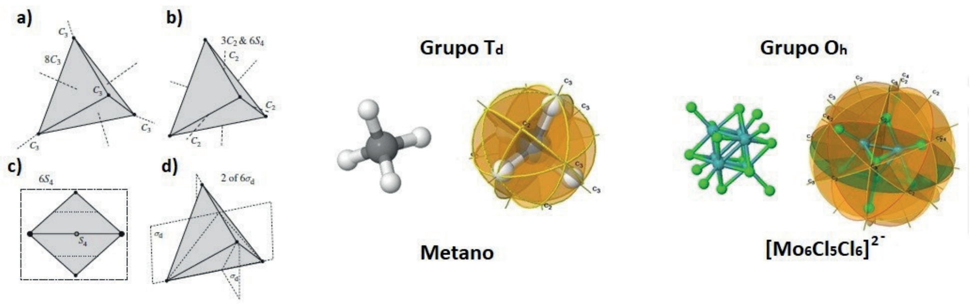


Figura 6: Grupos cúbicos (SYMMETRY OTTERBEIN).

A simetria do grupo de pontos é uma propriedade importante de moléculas amplamente utilizada em alguns ramos da química como a espectroscopia, a química quântica e a cristalografia. Entre as propriedades físicas e químicas tem-se a polaridade e a quiralidade (VALLANCE, 2009).

A. Polaridade: Um dipolo é um sistema constituído de duas cargas separadas por uma distância qualquer, como as ligações químicas covalentes em que os átomos têm eletronegatividades diferentes. As interações dipolo- dipolo ou interações entre dipolos permanentes são forças atrativas que ocorrem entre moléculas polares. As forças intermoleculares, genericamente chamadas de Forças de Van der Waals podem ser classificadas em três tipos: dipolo induzido-dipolo induzido, ligações de hidrogênio e dipolo permanente-dipolo permanente. Para que uma molécula tenha um momento de dipolo permanente, ela deve ter uma distribuição de carga assimétrica. Portanto, os únicos grupos compatíveis com um momento de dipolo são C_n, C_{nv} e C_s

. Em moléculas pertencentes a C_n ou C_{nv}, o dipolo deve estar ao longo do eixo de rotação. Por exemplo, a molécula da água (Fig. 7), que pertence ao grupo C_{2v} e seus elementos são o eixo C_2 com operação rotação e os planos σ_{xz} e σ_{yz} com a operação reflexão. Nesse caso, são formados pelos átomos de hidrogênio e um de oxigênio e não se encontram perpendiculares ao eixo de rotação C_2.

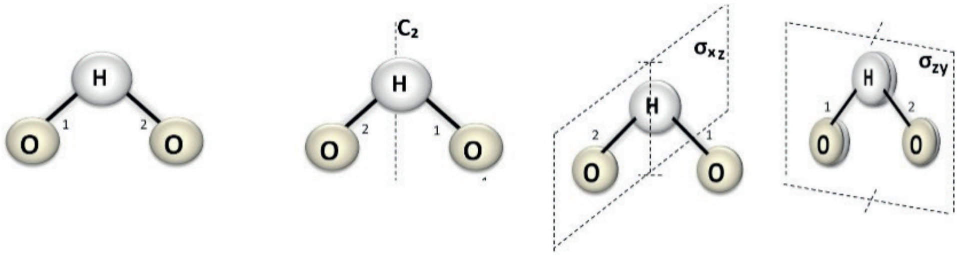


Figura 7: Molécula da água.

B. Quiralidade: Um exemplo de simetria em química é encontrado nos pares isoméricos de moléculas chamadas enantiômeros. Os enantiômeros são imagens-espelho não superponíveis uma a outra, e uma consequência desse relacionamento simétrico é que eles rodam o plano da luz polarizada passando por eles em direções opostas. Formalmente, o elemento de simetria que impede que uma molécula seja quiral é uma roto-reflexão S_n. Essa operação, geralmente está implícita em outros elementos de simetria presentes em um grupo, como por exemplo: em alguns tipos de ferroceno o eixo C_5 juntamente com o plano horizontal, coincide com o S_5. Além disso, uma molécula definitivamente não pode ser quiral se tiver um centro de inversão ou um plano espelho de qualquer tipo. Mas se esses elementos de simetria estiverem ausentes na molécula deve se verificar cuidadosamente a presença de um eixo S_n, antes que se conclua que ela é quiral. Um exemplo de molécula quiral é a hidrazina, que é um composto inorgânico com a fórmula química N_2H_4, conhecido também pelo nome de diamidogênio. É um líquido inflamável incolor com odor de amoníaco. Ela pertence ao grupo C_2 e como a Fig. 8 mostra, este composto possui somente como elemento de simetria o eixo C_2 com a operação de rotação.

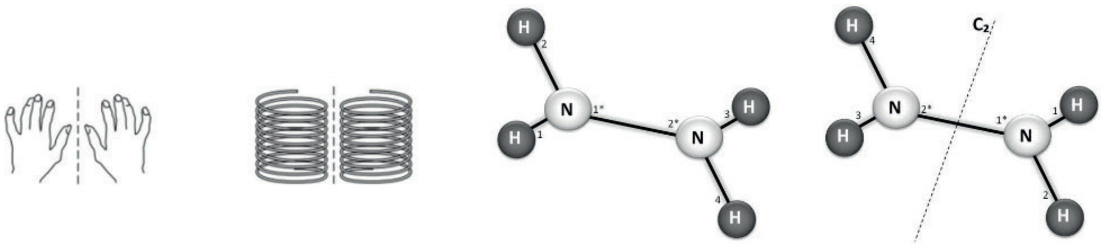


Figura 8: Quiralidade.

3 I CONCLUSÃO

A aplicação da Teoria de Grupos é uma ferramenta altamente utilizada hoje em dia que acopla conhecimentos matemáticos a propriedades físico-químicas moleculares, auxiliando a determinação das moléculas e suas principais características. Algumas dessas propriedades como a polaridade e a quiralidade são facilmente verificadas em uma molécula ao analisar seu respectivo grupo de simetria. Além disso, é possível observar que essa teoria consegue avaliar de maneira geral todas as moléculas, e que a tendência é que cada vez mais se consiga determinar propriedades das moléculas ao avaliar apenas o seu grupo.

REFERÊNCIAS

GARCIA, A. e LEQUAIN, Y.; "**Elementos de Álgebra**", Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

HOCHSTRASSER, R.M.; "**Molecular aspects of symmetry**", University of Pennsylvania, 2009.

LIMA, E. L.; "Álgebra **Linear**", 3ª Ed., Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, IMPA, 1998.

SYMETRY OTTERBEIN; "**Symmetry Gallery**". Acessado em 06/06/2017. Disponível em <http://symmetry.otterbein.edu/gallery/index.html>.

VALLANCE, C.; "**Molecular Symmetry**, **Group Theory and Applications"**, Symmetry Lecture Notes, 2009, 57p.

WILLOCK, D. J.; "**Molecular Symmetry**", Cardiff University. Wiley Ed., 1ªEd. 2009, 438 p.

CAPÍTULO 21

ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO

Felipe José Oliveira Ribeiro
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Ítalo Augusto Magalhães de Ávila
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Hélio Ribeiro Neto
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Aristeu da Silveira Neto
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

RESUMO: No presente trabalho, os autores procuram desenvolver, de forma detalhada a discretização e resolução da equação da difusão unidimensional em regime transiente. Para tanto, será empregado o método de diferenças finitas para obtenção de uma formulação explícita no tempo. A partir desta solução, um trabalho de otimização será desenvolvido quanto à relação entre os passos incrementais no espaço e no tempo para obtenção da maior taxa de convergência. Um estudo de caso é conduzido a fim de se comparar os resultados teóricos e os valores numéricos obtidos.

PALAVRAS-CHAVE: análise numérica, equação da difusão unidimensional e transiente, diferenças finitas.

NUMERICAL ANALISYS OF THE TRANSIENT ONE-DIMENSIONAL DIFFUSION EQUATION BY THE EXPLICIT METHOD

ABSTRACT: In the present work, the authors aim to develop, in a detailed way, the discretization and resolution of the one-dimensional diffusion equation in the transient form. For this, the finite difference method will be used to obtain an explicit formulation in time. From this solution, an optimization methodology will be developed regarding the relationship between the incremental steps in space and time to obtain the highest convergence rate. A case study is conducted in order to compare the theoretical results and numerical values obtained.

KEYWORDS: numerical analysis, transient one-dimensional diffusion equation, finite differences.

1 I INTRODUÇÃO

A representação matemática de fenômenos físicos, hoje, encontra-se quase como uma definição análoga ao método científico. Tal prática permitiu ao homem um profundo entendimento do mundo e proporcionou todo tipo de avanço tecnológico, os quais, hoje, definem o contemporâneo. A formulação de um modelo físico consiste em observar a natureza em busca de conceitos quantificáveis e qualificáveis, isolando-se causas e efeitos. Nesse estágio simplificações teóricas são muito comuns, visto que a complexidade envolvida muitas vezes supera as capacidades de processamento e observação do pesquisador. Assim, a partir deste modelo físico, é possível esboçar análogos algébricos aos conceitos quantificáveis observados esboçando-se então um modelo matemático. As equações podem ser algébricas, diferenciais, integrais ou integro-diferenciais. Apesar de equações puramente algébricas serem preferíveis, muitas vezes soluções numéricas são necessárias, visto que nem sempre existem soluções matemáticas exatas para os problemas algébricos levantados.

Uma formulação muito presente na modelagem matemática de fenômenos físicos é o modelo diferencial parcial (EDP) que muito raramente admite soluções algébricas. No caso das equações de Navier-Stokes, por exemplo, termos não lineares tornam esse um sistema de impossível resolução exata com a matemática atual (A. S. NETO, 2018).

Existem, na literatura, muitas metodologias de resolução numérica destes tipos de equação. Tais metodologias consistem em discretizar equações contínuas diferenciais, de forma a torná-las equações algébricas mais simples. Apesar de muito utilizadas, tais técnicas produzem erros no resultado, em comparação às soluções exatas dos sistemas diferenciais. Tais erros podem ser quantificados.

No presente trabalho, procura-se apresentar um estudo de caso para a análise de erro envolvendo a resolução da EDP que modela a equação da difusão.

A equação da difusão é uma equação diferencial parcial parabólica, que modela a propagação de grandezas de propriedade difusiva. Tal equação é de grande relevância em diversos ramos da física, se destacando principalmente nas áreas de transferência térmica, dispersão de solutos e mecânica dos fluidos. Em sua forma mais simples ela pode ser representada matematicamente por uma parcela diferencial dependente do tempo de segunda ordem e uma outra dependente do espaço de primeira ordem,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \phi, \qquad (1)$$

onde ϕ é uma função escalar que representa a grandeza a sofrer difusão com o tempo, dependente da variável cronológica t e das variáveis espaciais $x_1, x_2, \dots, x_n$, respectivamente. O escalar α é uma constante, que representa a difusidades da grandeza ao longo do domínio espacial.

Para o caso unidimensional a equação se reduz a uma equação contendo apenas duas parcelas diferenciais (LEVEQUE, 2007):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 0. \qquad (2)$$

Nesta configuração a equação da difusão pode ser resolvida até mesmo de forma algébrica, mas a fins do estudo dos erros, se comparará a resolução algébrica com a numérica discreta.

2 I MÉTODO NUMÉRICO

A formulação explícita é definida quando a discretização é feita de forma a se isolar a icóginta, sobrando assim do outro lado da equação somente os termos de situação inicial ou resultantes de formulações anteriores. Para isso, no desenvolvimento de tal metodologia se usam métodos de linearização.

No desenvolvimento linear da equação da difusão, faz-se uso da expansão em série de Taylor para discretizar as derivadas parciais no tempo e no espaço da equação 2, de modo a se obter uma solução numérica.

A expansão em série de Taylor, no caso da equação da difusão, é aplicável no domínio temporal. Assim, se realiza a expansão da função $\phi(x, t + \Delta t\ )$ em relação ao ponto (x, t), tem-se:

$$\phi(x, t + \Delta t\ ) = \phi(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial t^n} \Delta t^n. \qquad (3)$$

A expansão em série de Taylor no domínio espacial das funções $\phi(x + \Delta x, t)$ e $\phi(x - \Delta x, t)$ em relação ao ponto (x, t) caracteriza o método das diferenças centradas, assim a discretização do termo diferencial de segunda ordem no espaço é obtida:

$$\phi(x + \Delta x, t) = \phi(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial x^n} \Delta x^n, \qquad (4)$$

$$\phi(x - \Delta x, t) = \phi(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial x^n} \Delta x^n, \qquad (5)$$

Assim, obtêm-se a discretização para o termo diferencial de segunda ordem no espaço com a soma da equação 4 com a equação 5 e dividindo por Δx^2:

$$\begin{aligned} &\frac{\phi(x - \Delta \mathrm{x}, \mathrm{t}) - 2\phi(x, t) + \phi(x + \Delta \mathrm{x}, \mathrm{t})}{\Delta x^2} \\ &\qquad = \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\big(2(n+1)\big)!} \frac{\partial^{2(n+1)} \phi(x, t)}{\partial x^{2(n+1)}} \Delta x^{2n}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Obtêm-se então o método de Euler explícito no domínio temporal e o método de diferenças centradas para o domínio espacial, truncando a equação 3 no termo de primeira ordem $(\mathcal{O}(\Delta t))$ e a equação 6 no termo de segunda ordem $(\mathcal{O}(\Delta x^2))$:

$$\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} \approx \frac{\phi(x,t+\Delta t) - \phi(x,t)}{\Delta t}, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{\phi(x-\Delta x,t) - 2\phi(x,t) + \phi(x+\Delta x,t)}{\Delta x^2}. \qquad (8)$$

Substituindo as relações truncadas 7 e 8 na equação da difusão unidimensional:

$$\frac{\phi(x,t+\Delta t) - \phi(x,t)}{\Delta t} \approx \alpha \left[\frac{\phi(x-\Delta x,t) - 2\phi(x,t) + \phi(x+\Delta x,t)}{\Delta x^2}\right]. \qquad (9)$$

A partir da formulação numéica linearizada, torna-se necesário a discretização dos domínios espacial e temporal. Dessa forma, transpõe-se do contínuo o espaço e tempo a um domínio finito e discreto de pontos. Desse modo, considera-se o domínio $D = [0,L] \times [0,t_f]$ onde a equação da difusão está definida. Particiona-se o intervalo $[0,t_f]$ em *K* partes iguais e o intervalo $[0,L]$ em *M* partes iguais respectivamente para os domínios discretos temporal e espacial. Tem-se então a malha $\mathcal{M}$, que consiste em um conjunto de pontos discretos no domínio :

$$\mathcal{M} = \{(t^n, x_i); t^n = n\Delta t, x_i = i\Delta x, n = 0,1,\dots,K, i = 0,1,\dots,M\}. \qquad (10)$$

A partir da malha $\mathcal{M}$, tem-se a solução numérica definida como Φ_i^n. É importante salientar que a solução discreta Φ_i^n. difere da solução exata $\phi(x,t)$ pois foram feitos truncamentos durante o desenvolvimento das séries de Taylor. A equação 9 é então escrita da seguinte forma:

$$\frac{\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{\Phi_{i-1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right]. \qquad (11)$$

Para descrever a relação entre os incrementos no espaço e no tempo, usa-se uma definição por Courant et al. (1967) e recebe o nome das iniciais dos autores (*CFL* – Courant, Friedrichs e Lewy), onde esta relação é definida como:

$$CFL = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \qquad (12)$$

Pois a equação parcial em questão está em primeira ordem no tempo e segunda ordem no espaço. Aplicou-se então a definição do na equação 11, obtêm-se então a discretização explícita da equação da difusão:

$$\Phi_i^{n+1} = (1 - 2\,CFL)\Phi_i^n + CFL(\Phi_{i+1}^n + \Phi_{i-1}^n). \qquad (13)$$

Note que a equação representa um método explícito, pois na equação 13 o termo a ser calculado (Φ_i^{n+1}) depende apenas de termos previamente conhecidos. É importante observar que no primeiro passo de tempo, ou seja, $n = 0$ a equação se torna:

$$\Phi_i^1 = (1 - 2\,CFL)\Phi_i^0 + CFL(\Phi_{i+1}^0 + \Phi_{i-1}^0), \qquad (14)$$

notando-se que o termo Φ_i^0 apesar de pertencer à malha $\mathcal{M}$, não pode ser descoberto a partir de outros elementos do domínio *D*. Logo se faz necessário a utilização das condições iniciais da equação:

$$\phi(x,0) = f(x). \qquad (16)$$

A condição inicial referente a situação inicial do domínio quanto à grandeza difundida estudada. Ela pode ser facilmente discretizada, uma vez que, Φ_{i}^0 deve ser numericamente igual a $\phi(x,0)$, então, basta discretizar a função $f(x)$ de acordo com a malha $\mathcal{M}$:

$$\Phi_{\mathrm{i}}^0 = f_i = f(i\Delta x). \qquad (17)$$

Assim tem-se a equação numérica pronta para resolução.

3 I OTIMIZAÇÃO PARA A CONDIÇÃO DE CFL

A partir da discretização é possível realizar o estudo de otimização quanto ao *CFL,* procurando o valor para essa variável no qual o erro é mínimo e a taxa de convergência é máxima. A análise do erro da solução discreta demanda uma equação modificada que denota a equação 11 sem truncamentos.

É definida então uma função $\psi(x,t)$ que corresponde à função $\Phi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}$ no ponto (n,i), mas que difere da solução exata $\phi(x,t)$. Assim, $\phi(x,t)$ é a solução exata, $\Phi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}$ é a solução aproximada feita a partir da modelagem numérica, $\psi(x,t)$ é a solução contínua numericamente igual a $\Phi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}}$ no ponto (n,i), mas que é diferente da solução exata $\phi(x,t)$ Assim, fazendo a substituição de Φ_i^n por $\psi(x,t)$ na equação 11, tem-se:

$$\frac{\psi(x,t+\Delta t) - \psi(x,t)}{\Delta t} = \alpha\left[\frac{\psi(x-\Delta x,t) - 2\psi(x,t) + \psi(x+\Delta x,t)}{\Delta x^2}\right], \qquad (18)$$

Expandindo então as funções $\psi(x,t+\Delta t)$, $\psi(x-\Delta \mathrm{x},\mathrm{t})$ e $\psi(x+\Delta \mathrm{x},\mathrm{t})$ em torno do ponto (x,t) em série de Taylor e substituindo na equação 18:

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\psi(x,t)}{\partial t^n}\Delta t^{n-1}+\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\left(2(n+1)\right)!}\frac{\partial^{2(n+1)}\psi(x,t)}{\partial x^{2(n+1)}}\Delta x^{2n}. \qquad (19)$$

Note-se conformidade da equação 19 e a equação da difusão 2, diferindo apenas os termos a direita da igualdade em ambas as equações. Assim pode-se assumir que os termos presentes à direita da igualdade na equação 19 representam o erro numérico da solução discreta, visto que na equação original estes termos são nulos. Assim, abrem-se as séries truncando-se a equação 19 nos termos de sexta ordem obtendo-se a equação modificada. A partir do estudo dos coeficientes destes termos é possível desenvolver o estudo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}\Delta t+\frac{1}{6}\frac{\partial^3\psi(x,t)}{\partial t^3}\Delta t^2+\frac{1}{24}\frac{\partial^4\psi(x,t)}{\partial t^4}\Delta t^3\\ -\alpha\frac{1}{12}\frac{\partial^4\psi(x,t)}{\partial x^4}\Delta x^2+\frac{1}{120}\frac{\partial^5\psi(x,t)}{\partial t^5}\Delta t^4+\frac{1}{720}\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial t^6}\Delta t^5\\ -\alpha\frac{1}{360}\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial x^6}\Delta x^4+\frac{1}{5040}\frac{\partial^7\psi(x,t)}{\partial t^7}\Delta t^6\\ -\alpha\frac{1}{20160}\frac{\partial^8\psi(x,t)}{\partial x^8}\Delta x^6=0.\end{aligned} \qquad (20)$$

A fim de se obter a equação modificada, se reescreve a equação 20 de modo a se zerar os termos de ordem menor que 4. Não se deve fazer o uso da equação 2, pois a equação 20 representa a solução discreta que por sua vez difere da solução exata (WARMING, 1974). Ao invés disso emprega-se a equação 20 de forma a se zerar os termos necessários, onde operações a partir do teorema de Clairaut-Schwarz são aplicadas.

A tabela 1 apresenta as operações que são conduzidas de forma que seja possível a eliminação das derivadas temporais pertencentes ao erro numérico da equação truncada.

A soma dos resultados das operações descritas na tabela 1, resulta na eliminação dos termos temporais referentes ao erro numérico, de forma a se obter a equação modificada:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+\left(\frac{\alpha^2\Delta t}{2}-\frac{\alpha\Delta x^2}{12}\right)\frac{\partial^4\psi(x,t)}{\partial x^4}+\left(\frac{\alpha\Delta x^2\Delta t}{24}-\frac{\alpha^2\Delta t^2}{3}\right)\frac{\partial^5\psi(x,t)}{\partial t^1\partial x^4}\\
&\quad+\frac{\alpha\Delta t^3}{12}\frac{\partial^5\psi(x,t)}{\partial t^3\partial x^2}+\frac{\Delta t^4}{720}\frac{\partial^5\psi(x,t)}{\partial t^5}+\left(\frac{\alpha^2\Delta x^2\Delta t}{24}-\frac{\alpha\Delta x^4}{360}\right)\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial t^6}\\
&\quad-\frac{\alpha\Delta x^2\Delta t^2}{144}\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial t^2\partial x^4}+\left(\frac{\alpha\Delta t^4}{18}-\frac{\alpha\Delta t^4}{48}\right)\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial t^4\partial x^2}\\
&\quad+\left(\frac{\Delta t^5}{720}-\frac{\Delta t^5}{240}+\frac{\Delta t^5}{288}\right)\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial t^6}+\left(\frac{\alpha\Delta x^4\Delta t}{720}-\frac{\alpha^2\Delta x^2\Delta t^2}{36}\right)\frac{\partial^7\psi}{\partial t\partial x^6}\\
&\quad-\frac{\alpha\Delta t^5}{240}\frac{\partial^7\psi}{\partial t^5\partial x^2}+\frac{\Delta t^6}{5040}\frac{\partial^7\psi}{\partial t^7}+\left(\frac{\alpha^2\Delta x^4\Delta t}{720}-\frac{\alpha\Delta x^6}{20160}\right)\frac{\partial^8\psi}{\partial x^8}\\
&\quad-\frac{\alpha\Delta t^6}{1440}\frac{\partial^8\psi}{\partial t^6\partial x^2}-\frac{\alpha\Delta x^4\Delta t^2}{4320}\frac{\partial^8\psi}{\partial t^2\partial x^6}=0.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Ao se aplicar a definição de *CFL* na equação 21, essa pode ser reescrita como:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\alpha\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\alpha\Delta x^2}{2}\left(CFL-\frac{1}{6}\right)\frac{\partial^4\psi(x,t)}{\partial x^4}+\frac{\Delta x^4 CFL}{3}\left(\frac{1}{6}-CFL\right)\frac{\partial^5\psi(x,t)}{\partial t^1\partial x^4}\\
&\quad+CFL^3\frac{\Delta x^6}{\alpha^2 12}\frac{\partial^5\psi(x,t)}{\partial t^3\partial x^2}+CFL^4\frac{\Delta x^8}{\alpha^4 720}\frac{\partial^5\psi(x,t)}{\partial t^5}\\
&\quad+\frac{\alpha\Delta x^4}{24}\left(CFL-\frac{1}{15}\right)\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial t^6}-\frac{\Delta x^6 CFL}{\alpha 144}\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial t^2\partial x^4}\\
&\quad+\left(\frac{\alpha\Delta t^4}{18}-\frac{\alpha\Delta t^4}{48}\right)\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial t^4\partial x^2}+\left(\frac{\Delta t^5}{720}-\frac{\Delta t^5}{240}+\frac{\Delta t^5}{288}\right)\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial t^6}\\
&\quad+\left(\frac{\alpha\Delta x^4\Delta t}{720}-\frac{\alpha^2\Delta x^2\Delta t^2}{36}\right)\frac{\partial^7\psi}{\partial t\partial x^6}-\frac{\alpha\Delta t^5}{240}\frac{\partial^7\psi}{\partial t^5\partial x^2}+\frac{\Delta t^6}{5040}\frac{\partial^7\psi}{\partial t^7}\\
&\quad+\left(\frac{\alpha^2\Delta x^4\Delta t}{720}-\frac{\alpha\Delta x^6}{20160}\right)\frac{\partial^8\psi}{\partial x^8}-\frac{\alpha\Delta t^6}{1440}\frac{\partial^8\psi}{\partial t^6\partial x^2}-\frac{\alpha\Delta x^4\Delta t^2}{4320}\frac{\partial^8\psi}{\partial t^2\partial x^6}\\
&\quad=0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Observa-se na equação 22 que para um valor de $CFL = \frac{1}{6}$ zera-se os termos de segunda e terceira ordem, ou seja, ao se escolher o par $(\Delta x, \Delta t)$ de forma que o CFL seja igual a $\frac{1}{6}$, todos os termos que representam o erro de segundo e terceira ordem da solução numérica da equação 22 se anulam. Assim, pode-se dizer que o valor de CFL de $\frac{1}{6}$ é o valor no qual o método de diferenças finitas explícito apresenta o menor erro possível, de modo que pela equação 22, este erro é de quarta ordem ($\mathcal{O}(\Delta x^4)$).

Derivadas Parciais	$\frac{\partial\psi}{\partial t}$	$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^3\psi}{\partial t\partial x^2}$	$\frac{\partial^3\psi}{\partial t^3}$	$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}$	$\frac{\partial^4\psi}{\partial t^2\partial x^2}$	$\frac{\partial^4\psi}{\partial t^4}$	$\frac{\partial^5\psi}{\partial t\partial x^4}$	$\frac{\partial^5\psi}{\partial t^3\partial x^2}$	$\frac{\partial^5\psi}{\partial t^5}$
Coeficientes da $Eq.20$	1	$-\alpha$	$\frac{\Delta t}{2}$	0	$\frac{\Delta t^2}{6}$	$-\frac{\alpha\Delta x^2}{12}$	0	$\frac{\Delta t^3}{24}$	0	0	$\frac{\Delta t^4}{120}$
$-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial t}Eq.20$	0	0	$-\frac{\Delta t}{2}$	$\frac{\alpha\Delta t}{2}$	$-\frac{\Delta t^2}{4}$	0	0	$-\frac{\Delta t^3}{12}$	$\frac{\alpha\Delta x^2\Delta t}{24}$	0	$-\frac{\Delta t^4}{48}$
$-\frac{\alpha\Delta t}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Eq.20$	0	0	0	$-\frac{\alpha\Delta t}{2}$	0	$\frac{\alpha^2\Delta t}{2}$	$-\frac{\alpha\Delta t^2}{4}$	0	0	$-\frac{\alpha\Delta t^3}{12}$	0
$\frac{\Delta t^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}Eq.20$	0	0	0	0	$\frac{\Delta t^2}{12}$	0	$-\frac{\alpha\Delta t^2}{12}$	$\frac{\Delta t^3}{24}$	0	0	$\frac{\Delta t^4}{72}$
$\frac{\alpha\Delta t^2}{3}\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}Eq.20$	0	0	0	0	0	0	$\frac{\alpha\Delta t^2}{3}$	0	$-\frac{\alpha^2\Delta t^2}{3}$	$\frac{\alpha\Delta t^3}{6}$	0
Resultado	1	$-\alpha$	0	0	0	$\frac{\alpha^2\Delta t}{2}-\frac{\alpha\Delta x^2}{12}$	0	0	$\frac{\alpha\Delta x^2\Delta t}{24}-\frac{\alpha^2\Delta t^2}{3}$	$\frac{\alpha\Delta t^3}{12}$	$\frac{\Delta t^4}{720}$

Derivadas Parciais	$\frac{\partial^6\psi}{\partial x^6}$	$\frac{\partial^6\psi}{\partial t^2\partial x^4}$	$\frac{\partial^6\psi}{\partial t^4\partial x^2}$	$\frac{\partial^6\psi}{\partial t^6}$	$\frac{\partial^7\psi}{\partial t\partial x^6}$	$\frac{\partial^7\psi}{\partial t^5\partial x^2}$	$\frac{\partial^7\psi}{\partial t^7}$	$\frac{\partial^8\psi}{\partial x^8}$	$\frac{\partial^8\psi}{\partial t^6\partial x^2}$	$\frac{\partial^8\psi}{\partial t^2\partial x^6}$
Coeficientes da $Eq.20$	$-\frac{\alpha\Delta x^4}{360}$	0	0	$\frac{\Delta t^5}{720}$	0	0	$\frac{\Delta t^6}{5040}$	$-\frac{\alpha\Delta x^6}{20160}$	0	0
$-\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial t}Eq.20$	0	0	0	$-\frac{\Delta t^5}{240}$	$\frac{\alpha\Delta x^4\Delta t}{720}$	0	$-\frac{\Delta t^6}{1440}$	0	0	0
$-\frac{\alpha\Delta t}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Eq.20$	$\frac{\alpha^2\Delta x^2\Delta t}{24}$	0	$-\frac{\alpha\Delta t^4}{48}$	0	0	$-\frac{\alpha\Delta t^5}{240}$	0	$\frac{\alpha^2\Delta x^4\Delta t}{720}$	$-\frac{\alpha\Delta t^6}{1440}$	0
$\frac{\Delta t^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}Eq.20$	0	$-\frac{\alpha\Delta x^2\Delta t^2}{144}$	0	$\frac{\Delta t^5}{288}$	0	0	$\frac{\Delta t^6}{1440}$	0	0	$-\frac{\alpha\Delta x^4\Delta t^2}{4320}$
$\frac{\alpha\Delta t^2}{3}\frac{\partial^3}{\partial t\partial x^2}Eq.20$	0	0	$\frac{\alpha\Delta t^4}{18}$	0	$-\frac{\alpha^2\Delta x^2\Delta t^2}{36}$	$\frac{\alpha\Delta t^5}{72}$	0	0	0	0
Resultado	$\frac{\alpha^2\Delta x^2\Delta t}{24}-\frac{\alpha\Delta x^4}{360}$	$-\frac{\alpha\Delta x^2\Delta t^2}{144}$	$\frac{\alpha\Delta t^4}{18}-\frac{\alpha\Delta t^4}{48}$	$\frac{\Delta t^5}{720}-\frac{\Delta t^5}{240}+\frac{\Delta t^5}{288}$	$\frac{\alpha\Delta x^4\Delta t}{720}-\frac{\alpha^2\Delta x^2\Delta t^2}{36}$	$-\frac{\alpha\Delta t^5}{240}$	$\frac{\Delta t^6}{5040}$	$\frac{\alpha^2\Delta x^4\Delta t}{720}-\frac{\alpha\Delta x^6}{20160}$	$-\frac{\alpha\Delta t^6}{1440}$	$-\frac{\alpha\Delta x^4\Delta t^2}{4320}$

Tabela 1: Procedimento para o cálculo da equação modificada.

4 I ESTUDO DE CASO

Para a solução da equação 13 é necessário estabelecer o domínio espacial, assim como o tempo final de simulação, além das condições de contorno e condições iniciais. Neste estudo de caso o domínio espacial escolhido foi de $x = [0, 2\pi]$, foi adotado um tempo final de simulação de 50 segundos e as condições iniciais impostas foram:

$$\phi(x,0) = U_o sen(\theta x), \qquad (28)$$

com as condições de contorno:

$$\phi(0,0) = \phi(2\pi,0) = 0. \qquad (29)$$

Para determinar o erro do método, comparou-se a solução numérica com a solução exata:

$$\phi(x,t) = U_o sen(\theta x) e^{-\alpha\theta^2 t} \qquad (30)$$

Pode ser observado na tabela 2 que o erro numérico é reduzido em quatro vezes para uma redução de duas vezes do passo espacial, tal comportamento é característico de sistemas de segunda ordem, enquanto que na tabela 3 observa-se uma redução de 16 vezes para um passo 2 vezes menor, o que caracteriza o método como de quarta ordem.

Divisões Espaciais	Norma L_∞	Razão	Ordem	Norma L_2	Razão	Ordem
50	$2{,}31.10^{-5}$	$---$	$---$	$1{,}62.10^{-5}$	$---$	$---$
100	$5{,}66.10^{-6}$	4,08	2,03	$3{,}98.10^{-6}$	4,06	2,02
200	$1{,}40.10^{-6}$	4,04	2,01	$9{,}87.10^{-7}$	4,03	2,01
400	$3{,}48.10^{-7}$	4,02	2,01	$2{,}46.10^{-7}$	4,01	2,01

Tabela 2: Erro do método numérico para *CFL* = 0,5.

Divisões Espaciais	Norma L_∞	Razão	Ordem	Norma L_2	Razão	Ordem
50	$1{,}05.10^{-9}$	$---$	$---$	$7{,}39.10^{-10}$	$---$	$---$
100	$6{,}33.10^{-11}$	16,67	4,06	$4{,}45.10^{-11}$	16,59	4,05
200	$3{,}85.10^{-12}$	16,42	4,04	$2{,}73.10^{-12}$	16,29	4,02
400	$2{,}40.10^{-13}$	16,06	4,00	$1{,}69.10^{-13}$	16,14	4,01

Tabela 3: Erro do método numérico para *CFL* = 1/6.

Além da análise de convergência do método, é realizada a análise do erro variando-se o *CFL*. O número de divisões no domínio espacial foi mantido constante em 20 divisões (passo de aproximadamente 0,3142 m) para o intervalo $CFL = [9.10^{-3}, 0.6]$, obtendo-se os gráficos das figuras 1, 2 e 3.

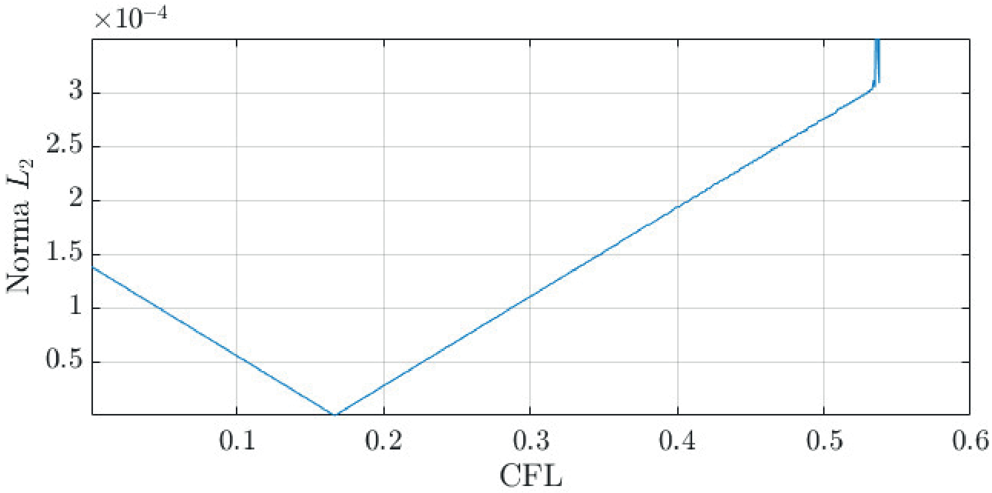


Figura 1: Norma L_∞ em função do *CFL*.

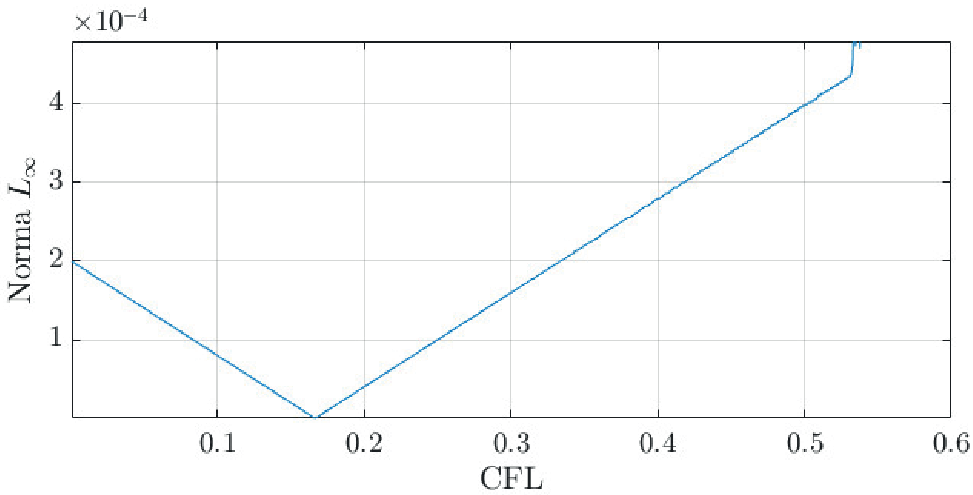


Figura 2: Norma L_1 em função do *CFL*.

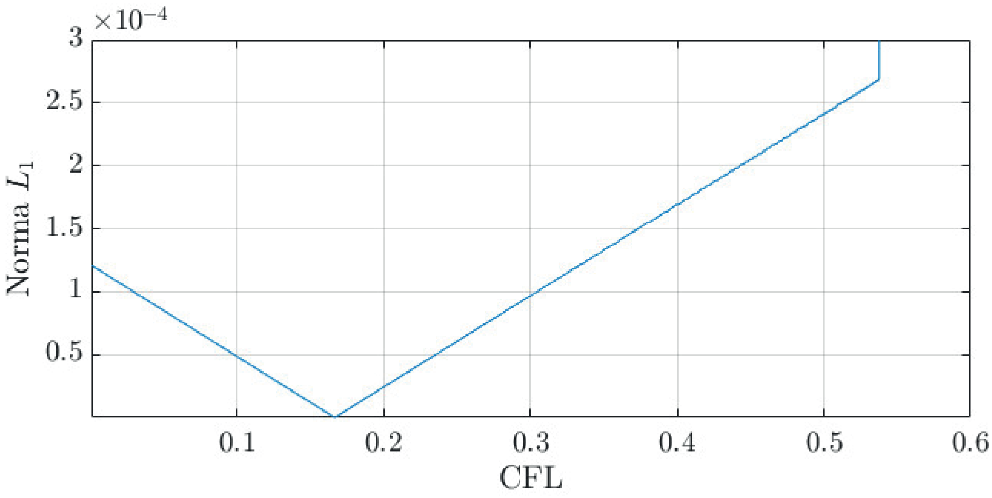


Figura 3: Norma L_2 em função do *CFL*.

Observa-se que nas figuras 1, 2 e 3 o erro numérico decresce linearmente até o valor mínimo em CFL = 1/6. Depois disso ele retorna a aumentar até a divergência após CFL = 0.5.

5 I CONCLUSÃO

Conclui-se que existe uma relação entre o passo de tempo, o passo espacial e o coeficiente de difusão que minimiza o erro numérico. Essa relação foi chamada de CFL e o valor ótimo desse parâmetro para a diminuição do erro é de 1/6. Mostrou-se também, que a ordem do erro de discretização com esse CFL ótimo foi de quarta ordem, enquanto para outros valores de CFL tem-se um método de, predominantemente, segunda ordem.

Para casos em que se necessite de uma boa exatidão da solução numérica, pode-se fazer proveito dessa propriedade do método explícito, a fim de se obter uma solução com maior acurácia a um baixo custo computacional.

REFERÊNCIAS

A. S. NETO. "**Turbulência nos fluidos, textbook of the post graduate mechanical engineering course of federal university of Uberlândia**", Uberlândia, Brazil, 2018.

COURANT, R., FRIEDRICHS, K., LEWY, H. **On the partial difference equations of mathematical physics.** IBM Journal of Research and Development, Nova York, v. 11, i. 2, pp. 215 – 234, 1967.

LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations:** steady-state and time-dependent problem. 1. ed. Philadelphia: SIAM, 2007.

WARMING, R., HYETT, B. **The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods.** Journal of Computational Physics, California, v. 14, n. 2, pp. 159 – 179, 1974.

CAPÍTULO 22

SOLUÇÕES FRACAS PARA EQUAÇÃO DE BURGERS COM VISCOSIDADE NULA

Ana Paula Moreira de Freitas
Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia - MG

Santos Alberto Enriquez-Remigio
Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia - MG

RESUMO: As soluções não diferenciáveis para equações diferenciais parciais aparecem na maior parte das aplicações físicas, tais soluções são conhecidas como soluções fracas. Aqui introduz-se o conceito de solução fraca usando a equação de Burgers com viscosidade nula e apresentam-se duas destas soluções para essa equação.

PALAVRAS-CHAVE: Solução Fraca. Equação de Burgers. Método das Curvas Características. Problema de Riemann.

WEAK SOLUTIONS FOR EQUATIONS OF BURGERS WITH ZERO VISCOSITY

ABSTRACT: Non-differentiable solutions for partial differential equations appear in most physical applications, such solutions are known as weak solutions. Here we introduce the concept of weak solution using the Burgers equation with zero viscosity and present two of these solutions for this equation.

KEYWORDS: Weak Solution. Burgers equation. Method of Characteristics Curves. Riemann's problem.

1 I INTRODUÇÃO

É comum a indagação à respeito da existência de uma solução suave (também conhecida como solução clássica) de uma Equação Diferencial Parcial (EDP), isto é, uma solução com derivadas contínuas, quantas forem necessárias, que satisfaça a EDP. Porém, na maioria das aplicações físicas aparecem soluções descontínuas, daí a importância e a necessidade de conhecer os mecanismos de obtenção de tais soluções. Estas soluções são conhecidas como soluções fracas e aqui serão apresentadas duas soluções fracas para a equação de Burgers com viscosidade nula.

2 I METODOLOGIA

A equação de Burgers é um modelo simplificado derivado das Equações de Navier-Stokes e foi introduzida originalmente por J. M. Burgers em seus estudos sobre turbulência em fluidos, aparecendo como um modelo básico em diversos outros fenômenos onde efeitos de advecção não-lineares e difusão linear desempenham papel importante (PASA, 2005).

A equação de Burgers com viscosidade nula, escrita na forma não conservativa é:

$$u_t + uu_x = 0,\ \ (x,t)\ \in\ \mathbb{R} \times [0,\infty[\qquad (1)$$

$$u(x,0) =\ u_0(x),\ \ x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

Já a versão conservativa é dada por:

$$u_t + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0,\ \ (x,t)\ \in\ \mathbb{R} \times [0,\infty[\qquad (3)$$

Uma das técnicas para determinação da solução de (3) consiste em transformar a EDP em um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Tal técnica é conhecida como Método das Curvas Características.

2.1 Método das Curvas Características

O método das curvas características consiste em transformar o Problema de Valor Inicial associado a um conjunto de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) em um sistema de Problemas de Valor Inicial de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Assim, resolvendo o sistema de EDOs, caso seja possível, obtém-se a solução da EDP.

Para o PVI, (1) e (2), as EDOs associadas e denominadas de equações características, são:

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{du}{dt} = 0, \qquad (4)$$

sujeito as seguintes condições iniciais, respectivamente:

$$x(0) =\ x_0,\ \ u(0) = u(x(0),0) = u(x_0,0) = u_0(x_0) \qquad (5)$$

em que, $u =\hat{}u(t) = u(x(t),t)$ é função de uma variável independente. Integrando as EDO's obtém-se a curva característica $x = ut + c_1$ e $u = c_2$, sendo c_1 e c_2 constantes. Aplicando as condições iniciais, (5), nas soluções obtidas, tem-se:

$$x(0) = c_1 = x_0, \quad u(0) = u_0(x_0) = c_2 \qquad (6)$$

Logo, tem-se que $x_0 = c_1 = x - ut$ e $u(t) = u(x(t),t) = u_0(x_0)$. Então, $u(x(t),t) = u_0(x - ut)$, e portanto, a solução da equação de Burgers é dada por:

$$u(x,t) = u_0(x - ut) \qquad (7)$$

A curva característica é dada por:

$$x(t) = ut + x_0, \qquad (8)$$

E pode ser reescrita como:

$$t = \frac{x - x_0}{u}, \qquad (9)$$

Observa-se que essas curvas são retas com coeficiente angular $tg\theta = \frac{1}{u}$, quando u varia, os coeficientes angulares das retas características também variam. Logo, as retas podem se cruzar ou não, formando ondas de choque ou ondas de rarefação, respectivamente (Leveque, 1992).

Para a condição inicial:

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l, & se\ x < 0 \\ u_r, & se\ x > 0 \end{cases} \qquad (10)$$

em que u_l e u_r são constantes chamadas de estado inicial à esquerda e à direita, respectivamente. O problema é denominado de Problema de Riemann e a Fig. 1 mostra a representação de sua condição inicial para $u_l > u_r$.

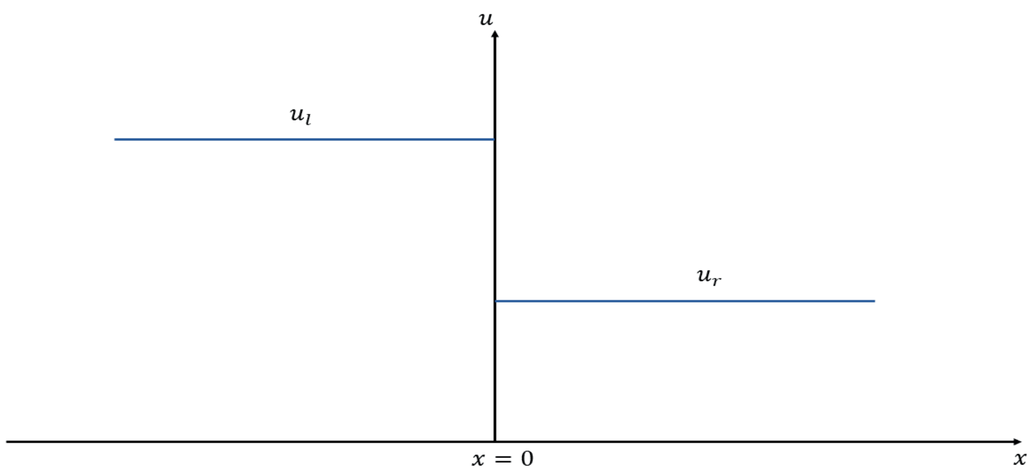


Figura1: Condição inicial para o Problema de Riemann com $u_l > u_r$

2.2 Solução Fraca

Considerando o problema de valor inicial:

$$u_t + \frac{1}{2}\frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \qquad (11)$$

com condição inicial:

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R} \qquad (12)$$

Definindo o conjunto das funções testes, C_0^1 , como $C_0^1 = \{\phi \in C^1 : \{(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty) : \phi(x,t) \neq 0]\} \subset [a,b] \times [0,T]$, para algum a, b e $T\}$.

Nota-se que ϕ é continuamente diferenciável e anula-se fora de um retângulo no plano $x - t$. $[0,\infty)$. Tais funções são ditas funções com suporte compacto em $\mathbb{R} \times$. Ao suporte de ϕ, denota-se $supp(\phi)$, e é o conjunto no qual ϕ não é identicamente nulo.

Multiplicando a EDP (11) por $\phi \in C_0^1$ e integrando em relação a de a e em relação a x de $-\infty$ a ∞, obtem-se:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u_t + f(u)_x]\phi(x,t)dxdt = 0 \qquad (13)$$

Aplicando integração por partes com o intuito de eliminar as derivadas em u e em $f(u)$ e usando o fato que a função $\phi \in C_0^1$, tem-se:

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u\phi_t + f(u)\phi_x]dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0\phi_0 dx = 0 \qquad (14)$$

em que $u_0 = u(x,0)$ é a condição inicial e ϕ_0 é uma notação para $\phi(x,0)$.

Definição 1. Se u satisfaz a equação (14) para todo $\phi \in C_0^1$, então a função u é denominada de solução fraca para o problema de valor inicial (11) e (12).

Proposição 1. Se u é uma solução para o problema de valor inicial (11) e (12), então u satisfaz (14) para todo $\phi \in C_0^1$.

Proposição 2. Se u é continuamente diferenciável em relação a *x* e *t* e satisfaz a equação (14) para todo, $\phi \in C_0^1$ então u é uma solução clássica do problema de valor inicial (11) e (12).

Podem existir soluções fracas que não são soluções clássicas para o problema de valor inicial (11) e (12), pois funções que satisfazem a equação (14) podem não ser diferenciáveis. E podem existir soluções fracas que não são soluções físicas (BEZERRA; CUMINATO, 2003)

2.3 Solução Fraca para o Problema de Riemann Associado a Equação de Burgers

Uma solução fraca, u , obtida pelo método das curvas características para o PVI (1) e (10) é:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & se\ x \leq \frac{t}{2} \\ u_r, & se\ x > \frac{t}{2} \end{cases} \qquad (15)$$

A verificação disso será feita para o caso $u_l < u_r$ e $u_l > u_r$.

O desenvolvimento para mostrar que (15) é solução fraca para a equação (1) sujeita à condição inicial (10) para os casos $u_l > u_r$ e $u_l < u_r$ e $u_l < u_r$ utilizam a definição 1 e as proposições 1 e 2, mostradas acima, de Yamashita (2014).

Caso $u_l > u_r$:

De (3) tem-se que $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, então $f'(u) = u$. Isso implica que os coeficientes angulares das curvas características, satisfazem $\frac{1}{u_l} < \frac{1}{u_r}$, que indica que as curvas características se cruzam em algum momento, formando ondas de choque (Leveque, 1992).

Seja *R* igual a:

$$R = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u\phi_t + f(u)\phi_x] dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0\phi_0 dx$$

Substituindo o valor de f e integrando em $[0,T] \times [a,b]$ ($supp(\phi) \subset [a,b] \times [0,T]$), tem-se:

$$R = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x] dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0\phi_0 dx = \int_0^T \int_a^b [u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x] dxdt + \int_a^b u_0\phi_0 dx$$

$$\begin{aligned} R = &\int_0^T \int_a^{t/2} [u_l\phi_t + \frac{u_l^2}{2}\phi_x] dxdt + \int_0^T \int_{t/2}^b [u_r\phi_t + \frac{u_r^2}{2}\phi_x] dxdt + \int_a^0 u_0(x)\phi_0 dx \\ &+ \int_0^b u_0(x)\phi_0 dx \end{aligned} \qquad (16)$$

A seguir considera-se $u_l = 1$ e $u_r = 0$, respeitando a restrição de que $u_l > u_r$ e não altera o processo do cálculo do valor de *R*.

Como $u \neq 0$ em $\{(x,t)/a \leq x \leq \frac{t}{2}\ \ e\ 0 \leq t \leq T\}$, então a expressão (16) pode ser reescrita como segue:

$$R = \int_0^T \int_a^{t/2} [\phi_t + \frac{\phi_x}{2}] dxdt + \int_a^0 u_0(x)\phi_0 dx$$

$$R = \int_0^T \int_a^{t/2} \phi_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_a^{t/2} \phi_x dxdt + \int_a^0 \phi_0 dx$$

Sejam:

$$A = \int_0^T \int_a^{t/2} \phi_t \, dxdt$$
$$B = \int_0^T \int_a^{t/2} \frac{\phi_x}{2} dxdt$$

Então:

$$R = A + B + \int_a^0 \phi_0 dx \qquad (17)$$

Por outro lado:

$$B = \int_0^T \int_a^{t/2} \frac{\phi_x}{2} dxdt \; = \int_0^T \frac{[\phi\left(\frac{t}{2}, t\right) - \phi(a,t)]}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^T [\phi\left(\frac{t}{2}, t\right) - \phi(a,t)]dt$$

Lembrando que $\phi(a,t) = 0$ e fazendo $x = {}^{t}/_{2}$, tem-se:

$$B = \frac{1}{2}\int_0^{T/2} \phi(x,2x)\, 2dx = \int_0^{T/2} \phi(x,2x)\, dx$$

E usando a mudança da ordem de integração na integral *A*, tem-se:

$$A = \int_a^0 \int_0^T \phi_t \, dtdx + \int_0^{T/2} \int_{2x}^T \phi_t \, dtdx +$$
$$A = \int_a^0 [\phi(x,T) - \phi(x,0)]dx \; + \int_0^{T/2} [\phi(x,T) - \phi(x,2x)]dx$$

A Fig. 2 mostra a área de integração para o caso $u_l > u_r$.

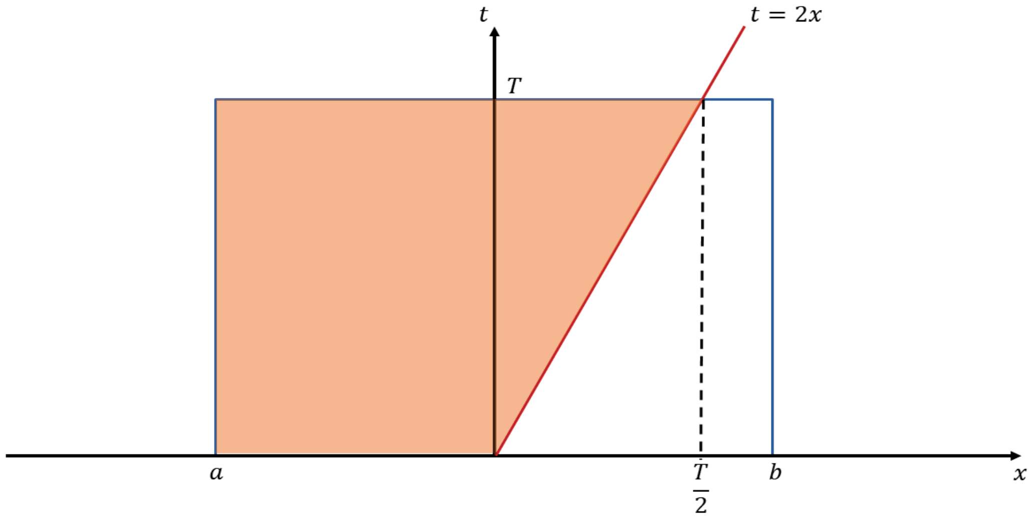


Figura 2: Área de integração para o caso $u_l > u_r$.

Substituindo *A* e *B* em *R* (equação (17). Obtém-se:

$$R = \int_a^0 [\phi(x,T) - \phi(x,0)]dx + \int_0^{T/2} [\phi(x,T) - \phi(x,2x)]dx + \int_0^{T/2} \phi(x,2x)\,dx + \int_a^0 \phi_0 dx$$

Lembrando que $\phi(x,T) = 0$ e $\phi_0 = \phi(x,0)$, logo:

$$R = -\int_a^0 \phi(x,0)dx - \int_0^{T/2} \phi(x,2x)dx + \int_0^{T/2} \phi(x,2x)\,dx + \int_a^0 \phi(x,0)dx = 0$$

Assim, a função (15) é solução fraca para a equação (1) sujeita à condição inicial (10), com $u_l = 1$ e $u_r = 0$.

Caso $u_l < u_r$:

De forma análoga ao caso anterior, $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ e $f'(u) = u$. Isso implica que os coeficientes angulares das curvas características, satisfazem $\frac{1}{u_l} > \frac{1}{u_r}$, que indica que as curvas características nunca se interceptam, formando ondas de rarefação (Leveque, 1992).

Seja *R* igual a:

$$R = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u\phi_t + f(u)\phi_x]dxdt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0\phi_0 dx$$

Substituindo o valor de f e integrando no suporte da função ϕ, tem-se:

$$R = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x]dxdt \ + \int_{-\infty}^{\infty} u_0\phi_0 dx = \int_0^{T}\int_0^{b} [u\phi_t + \frac{u^2}{2}\phi_x]dxdt + \int_a^{b} u_0\phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T}\int_a^{t/2} [u_l\phi_t + \frac{u_l^2}{2}\phi_x]dxdt \ + \int_0^{T}\int_{t/2}^{b} [u_r\phi_t + \frac{u_r^2}{2}\phi_x]dxdt + \int_a^{0} u_0(x)\phi_0 dx \ + \int_0^{b} u_0(x)\phi_0 dx$$

Respeitando a restrição de que $u_l < u_r$, pode-se fazer $u_l = 0$ e $u_r = 1$, então:

$$R = \int_0^{T}\int_{t/2}^{b} \phi_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^{T}\int_{t/2}^{b} \phi_x dxdt + \int_0^{b} \phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T}\int_{t/2}^{b} \phi_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^{T} (\phi(b,t) - \phi(t/2,t))dt + \int_0^{b} \phi_0 dx$$

Como $\phi(b,t) = 0$ e fazendo $x = {}^{t}/_{2}$, tem-se:

$$R = \int_0^{T}\int_{t/2}^{b} \phi_t dxdt - \frac{1}{2}\int_0^{T/2} \phi(x,2x)2dx + \int_0^{b} \phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T}\int_{t/2}^{b} \phi_t dxdt - \int_0^{T/2} \phi(x,2x)dx + \int_0^{b} \phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T}\int_{t/2}^{b} \phi_t dxdt + \int_{T/2}^{0} \phi(x,2x)dx + \int_0^{b} \phi_0 dx \qquad (18)$$

A Fig. 3 mostra a área de integração para o caso $u_l < u_r$.

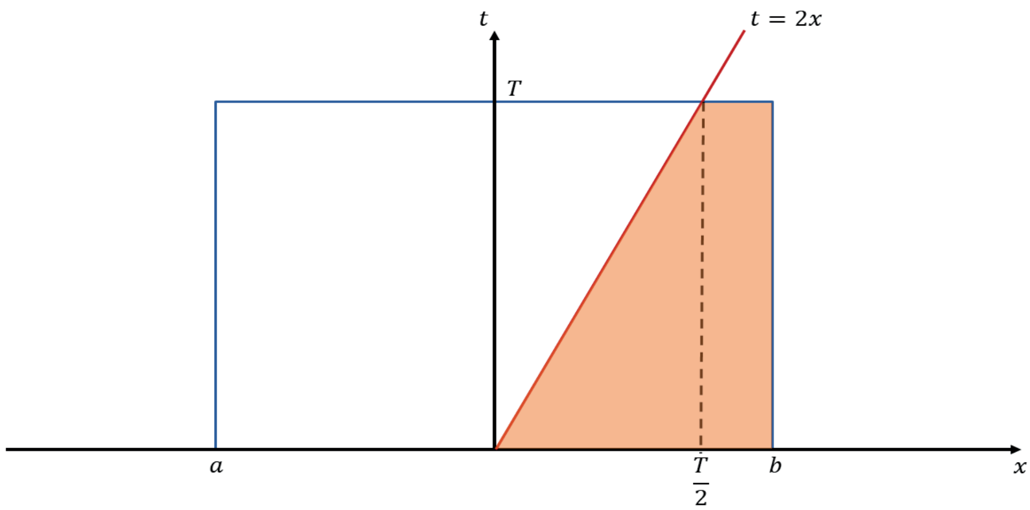


Figura 3: Área de integração para o caso $u_l < u_r$.

Da Fig. 3, é possível mudar o domínio de integração da integral dupla em (18), logo:

$$R = \int_0^{T/2}\int_0^{2x} \phi_t dtdx + \int_{T/2}^{b}\int_0^{T} \phi_t dtdx + \int_{T/2}^{0} \phi(x,2x)dx + \int_0^b \phi_0 dx$$

$$R = \int_0^{T/2} (\phi(x,2x) - \phi(x,0))dx + \int_{T/2}^{b} \big(\phi(x,T) - \phi(x,0)\big)dx + \int_{T/2}^{0} \phi(x,2x)dx + \int_0^b \phi_0 dx$$

Como $\phi(x,T) = 0$, tem-se:

$$R = \int_0^{T/2} \phi(x,2x)dx + \int_{T/2}^{0} \phi(x,2x)dx - \int_0^b \phi(x,0)dx + \int_0^b \phi(x,0)\,dx = 0$$

Assim, a função (15) é solução fraca para a equação (1) sujeita à condição inicial (10), com $u_l = 0$ e $u_r = 1$.

3 I CONCLUSÃO

Com o auxílio do método das curvas características e as noções de solução fraca foi possível verificar soluções contínuas por partes de um problema físico descrito pela Equação de Burgers com viscosidade nula. As ferramentas descritas foram de grande importância para o conhecimento de tais soluções.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, D**ébora de Jesus;** CUMINATO, José Alberto. **Métodos Numéricos para Leis de Conservação**. Dissertação de Mestrado. São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.

PASA, B. C. **Equação de burgers: propriedades e comportamento assintótico**. Master’s thesis, PPGMAp/UFRGS, 2005.

YAMASHITA, W. M. S. **Introdução as Leis de Conservação e Aplicações**. Monografia. Juiz de Fora, Minas Gerais, 2014.

LEVEQUE, R. J. **Numerical Methods for Conservation Laws**. Birkhauser, Basel,1992.

CAPÍTULO 23

ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO DE CRANK-NICOLSON

Ítalo Augusto Magalhães de Ávila
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – Minas Gerais

Felipe José Oliveira Ribeiro
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – Minas Gerais

Hélio Ribeiro Neto
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – Minas Gerais

Aristeu da Silveira Neto
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – Minas Gerais

RESUMO: O presente trabalho consiste no estudo do erro numérico consequente de uma discretização implícita da equação diferencial parcial parabólica que modela o processo transiente de difusão unidimensional via método de diferenças finitas. Emprega-se o teorema de Clairaut-Schwarz para a simplificação de termos de ordens elevadas no domínio temporal e avalia-se a influência da relação entre os incrementos espacial e temporal sobre o erro numérico. Rotinas numéricas foram implementadas e os resultados computacionais para o problema proposto são comparados à sua solução analítica.

PALAVRAS-CHAVE: análise numérica. difusão unidimensional transiente. diferenças finitas.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE ONE-DIMENSIONAL TRANSIENT DIFFUSION EQUATION FOR THE CRANK-NICOLSON SCHEME

ABSTRACT: This paper presents the numerical analysis of the error consequent of an implicit discretization of the parabolic differential equation that models the transient one-dimensional diffusion through the finite difference method. Through the Clairaut-Schwarz theorem, the suppression of high order terms and the evaluation of the influence of the ratio between space and time steps over the numerical error are possible. Numerical routines are implemented and the computational results for the case of study are compared to its analytical solution.

KEYWORDS: numerical analysis. transient one-dimensional diffusion. finite difference method.

1 I INTRODUÇÃO

Muitos fenômenos físicos são modelados, isto é, representados matematicamente, por meio de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), as quais em sua grande maioria não podem ser resolvidas analiticamente. Um exemplo é a solução da equação da energia térmica em regime transiente. As técnicas de solução analíticas são limitadas para resolver tais equações. São exemplos de fatores de limitação, a geometria do domínio, os tipos de condição de fronteira e a presença de termos não lineares na equação. Uma alternativa às limitações do método analítico é a confecção de modelos numérico-computacionais que, se devidamente implementados, podem fornecer respostas aproximadas para sistemas complexos de equações.

Na literatura da área, existem vários métodos de solução numérica de equações diferenciais. São exemplos o Método dos Elementos Finitos, Método dos Volumes Finitos e Método de Diferenças Finitas. Tais métodos transformam as equações apresentadas na forma contínua em um conjunto de equações algébricas. Esse processo recebe o nome de discretização. A equação gerada pela discretização é uma aproximação da equação original e, portanto, apresenta erro, o qual pode ser quantificado sob determinadas condições. No presente trabalho, procura-se apresentar um estudo de caso para a análise de erro envolvendo a solução numérica da EDP que modela a equação da energia térmica.

2 I MÉTODO NUMÉRICO

Na equação da difusão, para o caso unidimensional (indicada abaixo), aparecem duas parcelas diferenciais (LEVEQUE, 2007).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \qquad (1)$$

onde ϕ é a variável a ser transportada, função do tempo t e da posição x. O símbolo α representa a difusividade, isto é, a velocidade na qual a informação é transportada no domínio espacial. A expansão em série de Taylor, apresentada na equação 2, é empregada no processo de discretização dos termos temporal e espacial, visando a resolução numérica do problema.

$$\phi(x, t + \Delta t) = \phi(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial t^n} \Delta t^n. \qquad (2)$$

A discretização do termo diferencial de primeira ordem se dá através do emprego da equação 2 para a expansão da função no domínio temporal. Para se alcançar segunda ordem no tempo, utilizando-se o método de Crank-Nicolson, deve-se expandir a função $\phi(x, t + \Delta t)$ em relação ao ponto $(x, t + \frac{\Delta t}{2})$:

$$\phi(x,t+\Delta t)=\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta t^{(2n-1)}}{(2n-1)!\,2^{(2n-1)}}\frac{\partial^{(2n-1)}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial t^{(2n-1)}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta t^{2n}}{2n!\,2^{2n}}\frac{\partial^{2n}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial t^{2n}}. \tag{3}$$

Ainda, deve-se expandir a função $\phi(x,t)$ em relação ao ponto $\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)$, como indicado a seguir:

$$\phi(x,t)=\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta t^{(2n-1)}}{(2n-1)!\,2^{(2n-1)}}\frac{\partial^{(2n-1)}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial t^{(2n-1)}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta t^{2n}}{2n!\,2^{2n}}\frac{\partial^{2n}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial t^{2n}}. \tag{4}$$

Subtraindo a equação 3 pela equação 4 tem-se a discretização para a primeira derivada no tempo:

$$\frac{\phi(x,t+\Delta t)-\phi(x,t)}{\Delta t}=\frac{\partial\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial t}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta t^{2(n-1)}}{(2n-1)!\,2^{2(n-1)}}\frac{\partial^{(2n-1)}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial t^{(2n-1)}}. \tag{5}$$

A discretização da derivada espacial de segunda ordem é obtida através de um incremento e um decremento no espaço enquanto o tempo é fixado:

$$\phi\left(x+\Delta x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)=\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta x^{(2n-1)}}{(2n-1)!}\frac{\partial^{(2n-1)}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{(2n-1)}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta x^{2n}}{2n!}\frac{\partial^{2n}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{2n}}, \tag{6}$$

$$\phi\left(x-\Delta x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)=\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta x^{(2n-1)}}{(2n-1)!}\frac{\partial^{(2n-1)}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{(2n-1)}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta x^{2n}}{2n!}\frac{\partial^{2n}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{2n}}. \tag{7}$$

Somando as equações 6 e 7, obtém-se a discretização para a derivada segunda no espaço:

$$\frac{\phi\left(x+\Delta x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)-2\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)+\phi(x-\Delta x,t+\frac{\Delta t}{2})}{\Delta x^2} = -\frac{\partial^2\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^2}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta x^{2(n-1)}}{2n!}\frac{\partial^{2n}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{2n}}. \tag{8}$$

Truncando a equação 8 no termo de segunda ordem $(\mathcal{O}(\Delta x^2))$, obtém-se o método de diferenças centradas. No entanto, o campo da variável ϕ em $t+\frac{\Delta t}{2}$ é desconhecido. Deseja-se escrever esse campo em função dos campos nos tempos t e $t+\Delta t$. Somando as equações 3 e 4 tem-se:

$$\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)=\frac{\phi(x,t)+\phi(x,t+\Delta t)}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta x^{2n}}{2n!\,2^n}\frac{\partial^{2n}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial t^{2n}}. \tag{9}$$

A equação 8 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\phi(x+\Delta x,t+\Delta t)-2\phi(x,t+\Delta t)+\phi(x-\Delta x,t+\Delta t)}{2\Delta x^2}&\\ +\frac{\phi(x+\Delta x,t)-2\phi(x,t)+\ \phi(x-\Delta x,t)}{2\Delta x^2}&\\ =-\frac{\partial^2\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^2}&\\ +2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta x^{2(n-1)}}{2n!}\frac{\partial^{2n}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{2n}}&\\ -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha^n\Delta t^{2(n-1)}}{(2n-1)!\,2^{2(n-1)}}\frac{\partial^{2(2n-1)}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{2(2n-1)}}&\\ -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta t^{2n}}{2n!\,2^{2n}}\left(\frac{\partial^{2n}\phi(x+\Delta x,t+\frac{\Delta t}{2})}{\partial x^{2n}}-2\frac{\partial^{2n}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{2n}}\right.&\\ \left.+\frac{\partial^{2n}\phi\left(x-\Delta x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{2n}}\right).&\end{aligned} \tag{10}$$

Substituindo as relações truncadas na equação 1 obtém-se a equação 11.

$$\frac{\phi(x,t+\Delta t)-\phi(x,t)}{\Delta t}-\alpha\frac{\phi(x+\Delta x,t+\Delta t)-2\phi(x,t+\Delta t)+\phi(x-\Delta x,t+\Delta t)}{2\Delta x^2} -\alpha\frac{\phi(x+\Delta x,t)-2\phi(x,t)+\ \phi(x-\Delta x,t)}{2\Delta x^2}\approx\ 0. \tag{11}$$

A solução numérica requer a discretização dos domínios espacial e temporal. Ou seja, deve-se traduzir um conjunto contínuo e infinito de informações em um conjunto discreto e finito, no qual é empregada a metodologia numérica. Os domínios espacial e temporal são discretizados uniformemente da seguinte maneira:

$$\mathcal{M} = \{(x_I, t^N);\ x_I = I\Delta x, t^N = N\Delta t, N = 0,1, \dots, K, I = 0,1, \dots, M\}. \tag{12}$$

As variáveis *N* e *I* são números inteiros. É conveniente definir a solução numérica para os pontos discretos Φ_I^N, que não é idêntica à solução analítica de $\phi(x,t)$. Assim, é possível reescrever a equação 11 como indicado a seguir.

$$\frac{\Phi_I^{N+1} - \Phi_I^N}{\Delta t} - \alpha \left[\frac{\Phi_{I-1}^{N+1} - 2\Phi_I^{N+1} + \Phi_{I+1}^{N+1}}{2\Delta x^2}\right] - \alpha \left[\frac{\Phi_{I-1}^{N} - 2\Phi_I^{N} + \Phi_{I+1}^{N}}{2\Delta x^2}\right] = 0. \tag{13}$$

Para a análise do erro, parte-se para a formulação de uma equação modificada, que descreve qual equação contínua a equação 13 modela sem erros. Define-se uma função $\psi(x,t)$ que é contínua e coincidente com a solução no ponto discreto (*I, N*) e é diferente da solução exata $\phi(x,t)$. Em outras palavras, $\phi(x,t)$ é a solução exata, Φ_I^N é a solução aproximada, obtida do sistema discreto, e $\psi(x,t)$ é a solução contínua que está de acordo com a obtida por ϕ no ponto (respectivos *I* e *N*) e que é diferente de $\phi(x,t)$. Substituindo Φ_I^N na equação 13 por $\psi(x,t)$ e expandindo os termos em série de Taylor ao redor do ponto (x,t), obtém-se a equação apresentada a seguir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = &- \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta t^{2(n-1)}}{(2n-1)!\,2^{2(n-1)}} \frac{\partial^{2(2n-1)}\psi}{\partial x^{2(2n-1)}} \\ &+ \alpha \sum_{na=1}^{\infty} \sum_{nb=1}^{\infty} \frac{\Delta x^{na}\Delta t^{nb}}{na!\,nb!} \left(\frac{\partial^{na+nb}\psi}{\partial x^{na}\partial t^{nb}}\right) \\ &+ \alpha \sum_{na=1}^{\infty} \sum_{nb=1}^{\infty} \frac{(-\Delta x)^{na}\Delta t^{nb}}{na!\,nb!} \left(\frac{\partial^{na+nb}\psi}{\partial x^{na}\partial t^{nb}}\right) \\ &- 2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta t^n}{n!} \frac{\partial^n\psi}{\partial x^n} + 2\alpha \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta x^n}{2n!} \frac{\partial^{2n}\psi}{\partial x^{2n}} + 2\alpha\Delta t \frac{\partial\psi}{\partial x}.\end{aligned} \tag{14}$$

Os termos indicados do lado direito da equação 14 representam o erro numérico da simulação. A simplificação dos termos de primeira ordem para o tempo ocorre em função da soma entre os termos dos somatórios do referido lado da equação. Portanto, é possível reescrever a equação da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = &-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta t^{2(n-1)}}{(2n-1)!\,2^{2(n-1)}}\frac{\partial^{2(2n-1)}\psi}{\partial x^{2(2n-1)}} \\
&+ \alpha\sum_{na=1}^{\infty}\sum_{nb=1}^{\infty}\frac{\Delta x^{na}\Delta t^{nb}}{na!\,nb!}\left(\frac{\partial^{na+nb}\psi}{\partial x^{na}\partial t^{nb}}\right) \\
&+ \alpha\sum_{na=1}^{\infty}\sum_{nb=1}^{\infty}\frac{(-\Delta x)^{na}\Delta t^{nb}}{na!\,nb!}\left(\frac{\partial^{na+nb}\psi}{\partial x^{na}\partial t^{nb}}\right) \\
&- 2\alpha\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta t^{n}}{n!}\frac{\partial^{n}\psi}{\partial x^{n}} + 2\alpha\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta x^{n}}{2n!}\frac{\partial^{2n}\psi}{\partial x^{2n}}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Visando facilitar a análise, reescreve-se a equação em função apenas do passo espacial. Assim, emprega-se a relação entre os passos temporal e espacial definida pela condição de *CFL* (COURANT et al., 1967).

$$
\Delta t^{n} = CFL^{n}\frac{\Delta x^{2n}}{\alpha^{n}}. \tag{16}
$$

Reescrevendo a equação 15 empregando a definição da equação 16, obtém-se a equação apresentada a seguir.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = &-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\alpha^{-1}CFL\,\Delta x^2)^{2(n-1)}}{(2n-1)!\,2^{2(n-1)}}\frac{\partial^{2(2n-1)}\psi}{\partial x^{2(2n-1)}} \\
&+ \alpha\sum_{na=1}^{\infty}\sum_{nb=1}^{\infty}\frac{\Delta x^{na+2nb}(\alpha^{-nb}CFL^{nb})}{na!\,nb!}\left(\frac{\partial^{na+nb}\psi}{\partial x^{na}\partial t^{nb}}\right) \\
&+ \alpha\sum_{na=1}^{\infty}\sum_{nb=1}^{\infty}\frac{\Delta x^{-na}(\alpha^{-nb}CFL^{nb})^{-nb}}{na!\,nb!}\left(\frac{\partial^{na+nb}\psi}{\partial x^{na}\partial t^{nb}}\right) \\
&- 2\alpha\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\alpha^{-1}CFL\,\Delta x^2)^{n}}{n!}\frac{\partial^{n}\psi}{\partial x^{n}} + 2\alpha\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta x^{n}}{2n!}\frac{\partial^{2n}\psi}{\partial x^{2n}}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Ainda, é conveniente apresentar a equação da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\alpha\frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + \left(\frac{CFL}{\alpha}\right)\frac{\Delta x^4}{24}\frac{\partial^3\psi}{\partial t^3} + CFL\,\Delta x^4\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial t} \\
- \left(\frac{CFL^2\Delta x^4}{\alpha}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \alpha\frac{\Delta x^4}{360}\frac{\partial^6\psi}{\partial x^6}\ldots
\end{aligned} \tag{18}
$$

Visando facilitar a análise, reescreve-se a equação acima em função apenas de derivadas espaciais. Para a simplificação dos termos diferenciais não se faz o uso da equação 1, já que a equação 18 representa a equação da solução discreta (WARMING, 1974). Deve-se empregar sistematicamente a equação 18 para a simplificação dos termos desejados. Operações algébricas e diferenciais são conduzidas de maneira conveniente até que a aplicação do teorema de Clairaut-Schwarz se faça possível. Esse procedimento deve ser seguido até que as derivadas temporais sejam eliminadas da equação truncada. Como resultado, chega-se à equação apresentada a seguir.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = -\alpha\frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + \alpha\, CFL\,\Delta x^4(1 - CFL)\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + \alpha\frac{\Delta x^4}{24}\left(CFL^2 + \frac{1}{15}\right)\frac{\partial^6\psi}{\partial x^6}. \quad (19)$$

Observa-se que, de acordo com a equação 19, o erro de segunda ordem $(\mathcal{O}(\Delta x^2))$ apresentado pela solução numérica da equação da difusão, para a metodologia de Crank-Nicolson, independe do *CFL*. Observa-se também, do segundo termo à direita, que o uso de um unitário suprime uma fração do termo de quarta ordem $(\mathcal{O}(\Delta x^4))$. No entanto, não pode ser eliminado, como indicado pelo último termo da equação.

3 I ESTUDO DE CASO

Para a solução da equação 13 é necessário estabelecer o domínio espacial, condições inicial e de contorno e tempo final de simulação. O domínio espacial escolhido foi de $x = [0, 2\pi]$, com 10^2 divisões no domínio espacial e um tempo final de simulação de 10 segundos. Para esse estudo de caso, a condição inicial imposta é indicada na equação 20.

$$\Phi(x,0) = U_o\,\mathrm{sen}(\theta x)\,, \quad (20)$$

onde U_o é a amplitude da função e θ é o número de onda. As condições de contorno foram definidas da seguinte maneira:

$$\Phi(0,t) = 0\,, \quad (21)$$

$$\Phi(2\pi,t) = 0\,, \quad (22)$$

Para determinação do erro do método, compara-se a solução numérica com a solução analítica:

$$\Phi(x,t) = U_o\,\mathrm{sen}(\theta x)e^{-\alpha\theta^2 t}. \quad (23)$$

Os valores das variáveis U_o, θ, α e devem ser escolhidas em função do problema que se deseja resolver. No presente trabalho, o valor escolhido para as três variáveis foi 1,0. A análise da ordem de convergência é apresentada na tabela abaixo. Observa-se que para o dobro de divisões espaciais o erro é reduzido de quatro vezes, comportamento característico de um sistema de segunda ordem.

Divisões Espaciais	Norma L_∞	Razão	Ordem	Norma L_2	Razão	Ordem
50	$4,4.10^{-3}$	$---$	$---$	$3,11.10^{-3}$	$---$	$---$
100	$1,08.10^{-3}$	4,11	2,05	$7,83.10^{-4}$	3,97	1,98
200	$2,67.10^{-4}$	4,04	2,02	$1,96.10^{-4}$	3,99	1,99
400	$6,65.10^{-5}$	4,02	2,01	$4,90.10^{-5}$	3,99	1,99

Tabela 1: Erro do método numérico para *CFL* = 1,0.

Ainda, fixando o número de divisões espaciais em 10^2, verifica-se a relação entre o erro numérico e a condição de *CFL*.

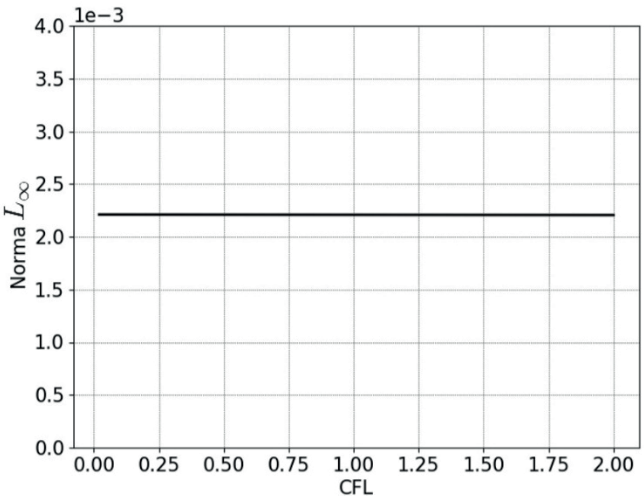


Figura 1: Norma L_∞ em função do *CFL*.

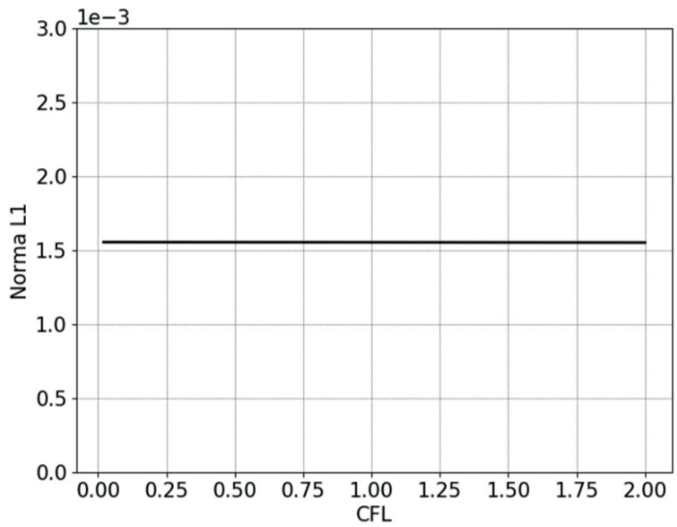


Figura 2: Norma L^1 em função do *CFL*.

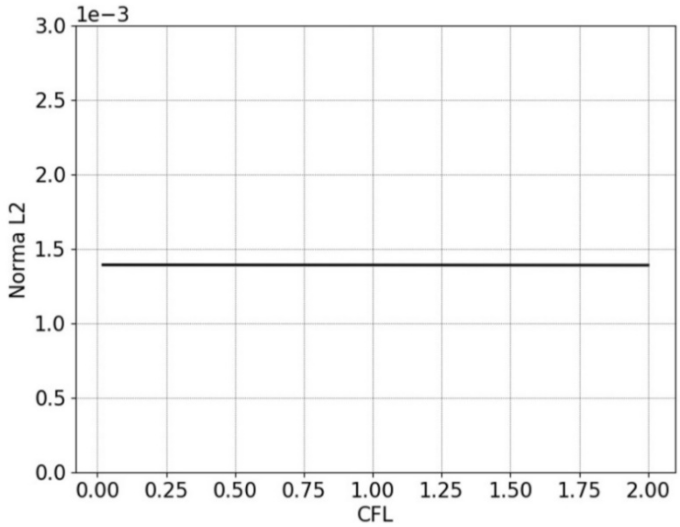


Figura 3: Norma L^2 em função do *CFL*.

Observa-se nos gráficos acima que o erro numérico se mantém constante com a variação do CFL. Ou seja, independe do passo temporal, como avaliado na equação 19.

4 I CONCLUSÃO

Propôs-se a avaliação do erro numérico para a solução numérica da equação diferencial parcial parabólica que modela o processo transiente de difusão unidimensional. Para tanto, fez-se uso do método de diferenças finitas para discretizar as equações. Utilizou-se o método de Crank-Nicolson para garantir termos de segunda ordem no domínio temporal e diferenças centradas para o domínio espacial. Foram feitas a análise numérica do método de discretização e simulações computacionais para avaliar o erro numérico. A solução computacional foi comparada com a solução analítica.

Conclui-se que a metodologia empregada no presente trabalho proporciona soluções numéricas com erro constante para diferentes relações entre os passos temporal e espacial. Para casos em que grandes domínios são avaliados, pode-se fazer proveito dessa propriedade do método implícito para a economia de recursos computacionais em simulações de transferência de energia pelo mecanismo de difusão.

REFERÊNCIAS

COURANT, R., FRIEDRICHS, K., LEWY, H. **On the partial difference equations of mathematical physics.** IBM Journal of Research and Development, Nova York, v. 11, i. 2, pp. 215 – 234, 1967.

LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations:** steady-state and time-dependent problem. 1. ed. Philadelphia: SIAM, 2007.

WARMING, R., HYETT, B. **The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods.** Journal of Computational Physics, California, v. 14, n. 2, pp. 159 – 179, 1974.

CAPÍTULO 24

ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO

Gabriel Machado dos Santos
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Ítalo Augusto Magalhães de Ávila
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Hélio Ribeiro Neto
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

Aristeu da Silveira Neto
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – MG

RESUMO: No presente trabalho apresentou-se um estudo detalhado a respeito dos erros numéricos decorrentes do procedimento de discretização e solução numérica da equação da onda unidimensional, em regime transiente. Para tanto, será empregado o método das diferenças finitas para obtenção de uma formulação explícita no tempo, e a partir desta, será realizada uma otimização para a relação entre os passos incrementais no tempo e no espaço. Um estudo de caso é conduzido a fim de se comparar os resultados teóricos e os valores numéricos obtidos.

PALAVRAS-CHAVE: análise numérica, equação da onda unidimensional e transiente, diferenças finitas.

NUMERICAL ANALISYS OF THE TRANSIENT ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION BY THE EXPLICIT METHOD

ABSTRACT: In the present work the authors present a detailed study about the numerical errors resulting from the discretization procedure and numerical solution of the transient one-dimensional wave equation. For this, the finite difference method will be used to obtain an explicit formulation in time, and from this, an optimization will be performed for the relation between the incremental steps in time and space. A case study is conducted in order to compare the theoretical results and the numerical values obtained.

KEYWORDS: numerical analysis, transient one-dimensional wave equation, finite differences.

1 I INTRODUÇÃO

Os fenômenos físicos em sua ampla maioria podem ser modelados, ou seja, podem ser representados por meio de modelos físicos, matemáticos, numéricos ou materiais. A modelagem física consiste na representação do fenômeno real a ser analisado, para o qual são aplicadas hipóteses com a finalidade de simplificar o problema a fim de viabilizar sua análise. Já a modelagem matemática se fundamenta na concepção de equações a partir da análise do modelo físico, de forma que tais equações podem ser de cunho algébricas, diferenciais, integrais ou integro-diferenciais. Quando as equações obtidas pelo modelo matemático não admitem soluções via métodos analíticos, utiliza-se de métodos numéricos para solução de tais equações.

Grande parte dos fenômenos físicos ao serem modelados, são representados matematicamente através de equações diferenciais parciais (EDP's), cujos métodos de soluções analíticas são limitados em função de condições de fronteira, geometria do domínio e termos não lineares presentes nas equações. Desse modo, a solução das equações por meio de métodos numéricos se faz necessária.

Na literatura encontra-se uma vasta gama de métodos numéricos de soluções de equações diferenciais, que se baseiam no processo de discretização das mesmas, isto é, transforma-las em equações algébricas. Nesse processo tem-se um erro, o qual em determinadas condições pode ser quantificado.

No presente trabalho, procura-se apresentar um estudo de caso para a análise do erro envolvendo a resolução da EDP com a qual modelam-se a propagação de ondas em uma dimensão.

A equação da onda é uma equação diferencial parcial hiperbólica, com a qual modelam-se a dinâmica da propagação das ondas. Tal equação é de grande relevância em diversos ramos da física, se destacando principalmente nas áreas de ondulatória, acústica, eletromagnetismo e mecânica dos fluidos. Em sua forma mais simples ela pode ser representada matematicamente por uma parcela diferencial dependente do tempo e uma ou mais parcelas diferenciais dependentes do espaço:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \phi = 0, \qquad (1)$$

onde ϕ é uma função escalar que modela o deslocamento da onda ao longo do domínio temporal e do domínio espacial, dependentes da variável cronológica *t* e das variáveis espaciais $x_1, x_2, \dots, x_n$, respectivamente. O escalar *c* é uma constante, que representa a velocidade de propagação da onda ao longo do domínio espacial.

Para o caso unidimensional a equação se reduz a uma equação contendo apenas duas parcelas diferenciais (LEVEQUE, 2007):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \qquad (2)$$

Nesta configuração a equação da onda também é conhecida como *o problema da corda vibrante*, o qual foi um dos principais desafios enfrentados pelos matemáticos do século XVIII, sendo deduzida e resolvida primeiramente por D'Alembert em 1747 (D'ALEMBERT, 1747).

2 I MÉTODO NUMÉRICO

Uma fórmula de diferenças finitas é dita explícita, quando pode-se determinar uma equação em que o termo a ser calculado esteja explícito na equação, ou seja, obtêm-se uma equação dependente apenas de termos previamente conhecidos.

A fim de se obter uma fórmula de diferenças finitas explícita para a equação da onda, faz-se uso da expansão em série de Taylor para discretizar as derivadas parciais no tempo e no espaço da equação 2, de modo a se obter uma solução numérica.

Para a discretização do termo diferencial de segunda ordem no tempo, utiliza-se a expansão em série de Taylor no domínio temporal. Com o intuito de se garantir segunda ordem no tempo utilizando-se o método explícito, é necessário que se realize a expansão da função $\phi(x, t + \Delta t)$ em relação ao ponto (x, t):

$$\phi(x, t + \Delta t) = \phi(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial t^n} \Delta t^n. \tag{3}$$

Deve-se agora expandir a função $\phi(x, t - \Delta t)$ em relação ao ponto (x, t), obtendo-se:

$$\phi(x, t - \Delta t) = \phi(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial t^n} \Delta t^n. \tag{4}$$

Somando a equação 4 com a equação 3 e dividindo por Δt^2, obtêm-se a discretização para o termo diferencial de segunda ordem no tempo:

$$\frac{\phi(x, t - \Delta t) - 2\phi(x, t) + \phi(x, t + \Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2(n+1))!} \frac{\partial^{2(n+1)} \phi(x, t)}{\partial t^{2(n+1)}} \Delta t^{2n}. \tag{5}$$

De forma análoga, a discretização do termo diferencial de segunda ordem no espaço é obtida fazendo-se a expansão em série de Taylor no domínio espacial das funções $\phi(x + \Delta x, t)$ e $\phi(x - \Delta x, t)$ em relação ao ponto (x, t):

$$\phi(x + \Delta x, t) = \phi(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial x^n} \Delta x^n, \tag{6}$$

$$\phi(x - \Delta x, t) = \phi(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n \phi(x, t)}{\partial x^n} \Delta x^n, \tag{7}$$

Somando a equação 7 com a equação 6 e dividindo por Δx^2, obtêm-se a discretização para o termo diferencial de segunda ordem no espaço:

$$\frac{\phi(x-\Delta\mathrm{x},\mathrm{t})-2\phi(x,t)+\phi(x+\Delta\mathrm{x},\mathrm{t})}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\big(2(n+1)\big)!}\frac{\partial^{2(n+1)}\phi(x,t)}{\partial x^{2(n+1)}}\Delta x^{2n}. \tag{8}$$

Truncando a equação 5 no termo de segunda ordem $(\mathcal{O}(\Delta t^2))$ e a equação 8 também no termo de segunda ordem $(\mathcal{O}(\Delta x^2))$, obtêm-se o método de diferenças centradas para os domínios temporal e espacial:

$$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}\approx\frac{\phi(x,t-\Delta t)-2\phi(x,t)+\phi(x,t+\Delta t)}{\Delta t^2}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2}\approx\frac{\phi(x-\Delta x,t)-2\phi(x,t)+\phi(x+\Delta x,t)}{\Delta x^2}. \tag{10}$$

Substituindo as relações truncadas 9 e 10 na equação da onda unidimensional 2 obtêm-se:

$$\frac{\phi(x,t-\Delta t)-2\phi(x,t)+\phi(x,t+\Delta t)}{\Delta t^2}-c^2\left[\frac{\phi(x-\Delta x,t)-2\phi(x,t)+\phi(x+\Delta x,t)}{\Delta x^2}\right]\approx 0. \tag{11}$$

A solução numérica requer a discretização dos domínios temporal e espacial. Ou seja, deve-se transformar um conjunto contínuo e infinito de informações em um conjunto discreto e finito, no qual a metodologia numérica possa ser empregada. Desse modo, considera-se que a equação da onda esteja definida no domínio $D=[0,L]\times[0,t_f]$, particiona-se o intervalo $[0,t_f]$ do domínio temporal em *K* partes iguais e o intervalo $[0,L]$ do domínio espacial em *M* partes iguais. Obtêm-se então a malha $\mathcal{M}$, ou seja, um conjunto de pontos discretos no domínio *D*:

$$\mathcal{M}=\{(t^n,x_i);t^n=n\Delta t,x_i=i\Delta x,n=0,1,\dots,K,i=0,1,\dots,M\}. \tag{12}$$

Define-se então a solução numérica nos pontos discretos da malha $\mathcal{M}$ como Φ_i^n. Deve-se ressaltar que a solução discreta Φ_i^n não é igual à solução exata $\phi(x,t)$ devido aos truncamentos realizados. Assim pode-se reescrever a equação 11 da seguinte forma:

$$\frac{\Phi_i^{n-1}-2\Phi_i^n+\Phi_i^{n+1}}{\Delta t^2}-c^2\left[\frac{\Phi_{i-1}^n-2\Phi_i^n+\Phi_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right]=0. \tag{13}$$

A relação entre os passos incrementais de tempo e espaço foi apresentada primeiramente por Courant et al. (1967) e recebe o nome das iniciais dos autores (*CFL* – Courant, Friedrichs e Lewy), onde esta relação é definida como:

$$CFL = c\frac{\Delta t}{\Delta x}. \qquad (14)$$

Aplicando-se a condição de *CFL* na equação 13 e rearranjando os termos, obtêm-se a discretização explícita da equação onda:

$$\Phi_i^{n+1} = 2(1 - CFL^2)\Phi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} + CFL^2(\Phi_{i-1}^{\mathrm{n}} + \Phi_{i-1}^{\mathrm{n}}) - \Phi_i^{n-1}. \qquad (15)$$

Note que na equação 15 o termo a ser calculado (Φ_i^{n+1}) depende apenas de termos previamente conhecidos. Assim, de fato, a equação representa um método explícito.

É importante salientar que a solução numérica da equação da onda pelo método de diferenças finitas explícito é determinada utilizando-se a equação 15, porém para o primeiro passo de tempo, ou seja, $n = 0$ a equação se torna:

$$\Phi_i^1 = 2(1 - CFL^2)\Phi_i^0 + CFL^2(\Phi_{i-1}^0 + \Phi_{i+1}^0) - \Phi_i^{-1}, \qquad (16)$$

onde nota-se que o termo Φ_i^{-1} não pertence à malha $\mathcal{M}$, estando, portanto, fora do domínio *D*. Logo se faz necessária a utilização das condições iniciais da equação da onda:

$$\phi(x,0) = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t} = g(x). \qquad (17)$$

A condição inicial referente a posição inicial da onda pode ser facilmente discretizada, uma vez que, Φ_{i}^0 deve ser numericamente igual a $\phi(x,0)$. Então, basta discretizar a função $f(x)$ de acordo com a malha $\mathcal{M}$:

$$\Phi_{\mathrm{i}}^0 = f_i = f(i\Delta x). \qquad (18)$$

Uma das condições iniciais foi discretizada, persistindo, no entanto, o problema relacionado ao termo Φ_i^{-1}. Para tanto, faz-se uso da condição inicial de velocidade da onda, na qual sua discretização se baseia no processo de discretização de um termo diferencial de primeira ordem no tempo. Dessa forma subtrai-se da equação 3 a equação 4 e divide-se por $2\Delta t$:

$$\frac{\phi(x,t+\Delta t) - \phi(x,t-\Delta t)}{2\Delta t} = \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n+1}\phi(x,t)}{\partial t^{2n+1}}\Delta t^{2n}. \qquad (19)$$

Ao se truncar a equação 19 no termo de segunda ordem $(\mathcal{O}(\Delta t^2))$, obtêm-se o método de diferenças finitas centradas:

$$\frac{\phi(x,t+\Delta t)-\phi(x,t-\Delta t)}{2\Delta t}\approx\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}. \quad (20)$$

A condição inicial de velocidade da onda pode ser reescrita na forma discreta. Para tanto, substitui-se $\phi(x,t)$, que é a solução exata, por Φ_i^n referente a solução discreta. Como o interesse é na condição inicial faz-se $n=0$ e discretiza-se a função $g(x)$ conforme a malha $\mathcal{M}$:

$$\frac{\Phi_i^1-\Phi_i^{-1}}{2\Delta t}=g_i=g(i\Delta x) \quad \text{ou} \quad \Phi_i^{-1}=\Phi_i^1-2\Delta t g_i. \quad (21)$$

Substituindo a equação 21 na equação 16 obtêm-se a equação de diferenças finitas via método explícito, para a solução da equação da onda no primeiro passo de tempo:

$$\Phi_i^1=(1-CFL^2)\Phi_i^0+\frac{CFL^2}{2}(\Phi_{i-1}^0+\Phi_{i+1}^0)+\Delta t g_i. \quad (22)$$

3 I OTIMIZAÇÃO PARA A CONDIÇÃO DE CFL

Uma vez já discretizada a equação da onda, é de grande interesse determinar os valores de *CFL* para os quais os erros provenientes dos truncamentos realizados na equação discretizada sejam os menores possíveis.

Para a análise do erro da solução discreta, utiliza-se uma equação modificada que descreve a equação 13 sem truncamentos. Define-se então uma função $\psi(x,t)$ que é igual a função $\Phi_\mathrm{i}^\mathrm{n}$ no ponto (n,i), mas que difere da solução exata $\phi(x,t)$. Desse modo, $\phi(x,t)$ é a solução exata, $\Phi_\mathrm{i}^\mathrm{n}$ é a solução aproximada obtida por meio da solução do sistema discreto, $\psi(x,t)$ é a solução contínua numericamente igual a $\Phi_\mathrm{i}^\mathrm{n}$ no ponto (n,i), porém é diferente da solução exata $\phi(x,t)$.

Substituindo $\Phi_\mathrm{i}^\mathrm{n}$ por $\psi(x,t)$ na equação 13, obtêm-se:

$$\frac{\psi(x,t-\Delta t)-2\psi(x,t)+\psi(x,t+\Delta t)}{\Delta t^2}-c^2\left[\frac{\psi(x-\Delta x,t)-2\psi(x,t)+\psi(x+\Delta x,t)}{\Delta x^2}\right]=0, \quad (23)$$

expandindo as funções $\psi(x,t-\Delta t)$, $\psi(x,t+\Delta t)$, $\psi(x-\Delta\mathrm{x},\mathrm{t})$ e $\psi(x+\Delta\mathrm{x},\mathrm{t})$ em série de Taylor em torno do ponto (x,t) e substituindo na equação 23:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\big(2(n+1)\big)!}\frac{\partial^{2(n+1)}\psi(x,t)}{\partial t^{2(n+1)}}\Delta t^{2n} \\
&\quad + c^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\big(2(n+1)\big)!}\frac{\partial^{2(n+1)}\psi(x,t)}{\partial x^{2(n+1)}}\Delta x^{2n}.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Note-se grande semelhança entre a equação 24 e a equação da onda 2, diferindo apenas os termos a direita da igualdade em ambas as equações, logo pode-se assumir que os termos presentes a direita da igualdade na equação 24 representam o erro numérico da solução discreta, visto que na equação original estes termos são nulos. Como o erro numérico da solução discreta é representado por séries infinitas se faz necessário o truncamento de tais séries para a obtenção da equação modificada. Seguindo essa premissa, trunca-se as séries da equação 24 nos termos de sexta ordem:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{12}\frac{\partial^4\psi(x,t)}{\partial t^4}\Delta t^2 - c^2\frac{1}{12}\frac{\partial^4\psi(x,t)}{\partial x^4}\Delta x^2 \\
&\quad + \frac{1}{360}\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial t^6}\Delta t^4 - c^2\frac{1}{360}\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial x^6}\Delta x^4 + \frac{1}{20160}\frac{\partial^8\psi(x,t)}{\partial t^8}\Delta t^6 \\
&\quad - c^2\frac{1}{20160}\frac{\partial^8\psi(x,t)}{\partial x^8}\Delta x^6 = 0.
\end{aligned} \tag{25}
$$

A fim de se obter a equação modificada, se reescreve a equação 25 apenas em função de termos diferenciais no espaço. Deste modo, deve-se eliminar os termos diferenciais temporais que representam o erro numérico, porém não se deve fazer o uso da equação 2, pois a equação 25 representa a solução discreta que por sua vez difere da solução exata (WARMING, 1974). A metodologia a ser adotada segue o princípio de se empregar continuamente a equação 25 para simplificação dos termos desejados, onde operações algébricas e diferenciais são conduzidas de maneira conveniente de modo que a aplicação do teorema de Clairaut-Schwarz se faça possível.

Apresenta-se na tabela 1 as operações que são conduzidas de forma que seja possível a eliminação das derivadas temporais pertencentes ao erro numérico da equação truncada.

A soma dos resultados das operações descritas na tabela 1, resulta na eliminação dos termos temporais referentes ao erro numérico, de forma a se obter a equação modificada:

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \left(\frac{c^4\Delta t^2}{12} - \frac{c^2\Delta x^2}{12}\right)\frac{\partial^4\psi(x,t)}{\partial x^4} - \left(\frac{c^6\Delta t^4}{90} - \frac{c^4\Delta t^2\Delta x^2}{72} + \frac{c^2\Delta x^4}{360}\right)\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial x^6} + \left(\frac{c^8\Delta t^6}{560} - \frac{c^6\Delta t^4\Delta x^2}{360} + \frac{c^4\Delta t^2\Delta x^4}{940} - \frac{c^2\Delta x^6}{20160}\right)\frac{\partial^8\psi(x,t)}{\partial x^8} = 0. \tag{26}$$

Ao se aplicar a definição de *CFL* na equação 26, essa pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{12}c^2(CFL^2-1)\frac{\partial^4\psi(x,t)}{\partial x^4}\Delta x^2 - \frac{1}{360}c^2(4CFL^4-5CFL^2+1)\frac{\partial^6\psi(x,t)}{\partial x^6}\Delta x^4 + \frac{1}{20160}c^2(36CFL^6-56CFL^4+21CFL^2-1)\frac{\partial^8\psi(x,t)}{\partial x^8}\Delta x^6 = 0. \tag{27}$$

Observa-se na equação 27 que para um valor unitário de *CFL* a equação se torna a equação da onda 2, ou seja, ao se escolher o par $(\Delta x, \Delta t)$ de forma que o *CFL* seja igual a unidade, todos os termos que representam o erro da solução numérica da equação 27 se anulam. Assim, pode-se dizer que o valor de *CFL* unitário é o valor no qual o método de diferenças finitas explícito apresenta o menor erro possível, de modo que pela equação 27, este erro é de no máximo oitava ordem $(\mathcal{O}(\Delta x^8))$.

Derivadas Parciais	$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^4\psi}{\partial t^4}$	$\frac{\partial^4\psi}{\partial t^2\partial x^2}$	$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}$	$\frac{\partial^6\psi}{\partial t^6}$	$\frac{\partial^6\psi}{\partial t^4\partial x^2}$	$\frac{\partial^6\psi}{\partial t^2\partial x^4}$	$\frac{\partial^6\psi}{\partial x^6}$	$\frac{\partial^8\psi}{\partial t^8}$	$\frac{\partial^8\psi}{\partial t^6\partial x^2}$	$\frac{\partial^8\psi}{\partial t^4\partial x^4}$	$\frac{\partial^8\psi}{\partial t^2\partial x^6}$	$\frac{\partial^8\psi}{\partial x^8}$
Coeficientes da $Eq. 25$	1	$-c^2$	$\frac{\Delta t^2}{12}$	0	$-\frac{c^2\Delta x^2}{12}$	$\frac{\Delta t^4}{360}$	0	0	$-\frac{c^2\Delta x^4}{360}$	$\frac{\Delta t^6}{20160}$	0	0	0	$-\frac{c^2\Delta x^6}{20160}$
$-\frac{\Delta t^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial t^2}Eq. 25$	0	0	$-\frac{\Delta t^2}{12}$	$\frac{c^2\Delta t^2}{12}$	0	$-\frac{\Delta t^4}{144}$	0	$\frac{c^2\Delta t^2\Delta x^2}{144}$	0	$-\frac{\Delta t^6}{4320}$	0	0	$\frac{c^2\Delta t^2\Delta x^4}{4320}$	0
$-\frac{c^2\Delta t^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Eq. 25$	0	0	0	$-\frac{c^2\Delta t^2}{12}$	$\frac{c^4\Delta t^2}{12}$	0	$-\frac{c^2\Delta t^4}{144}$	0	$\frac{c^4\Delta t^2\Delta x^2}{144}$	0	$-\frac{c^2\Delta t^6}{4320}$	0	0	$\frac{c^4\Delta t^2\Delta x^4}{4320}$
$\frac{\Delta t^4}{240}\frac{\partial^4}{\partial t^4}Eq. 25$	0	0	0	0	0	$\frac{\Delta t^4}{240}$	$-\frac{c^2\Delta t^4}{240}$	0	0	$\frac{\Delta t^6}{2880}$	0	$-\frac{c^2\Delta t^4\Delta x^2}{2880}$	0	0
$\frac{c^2\Delta t^4}{90}\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial x^2}Eq. 25$	0	0	0	0	0	0	$\frac{c^2\Delta t^4}{90}$	$-\frac{c^4\Delta t^4}{90}$	0	0	$\frac{c^2\Delta t^6}{1080}$	0	$-\frac{c^4\Delta t^4\Delta x^2}{1080}$	0
$\frac{c^2\Delta t^2}{720}(8c^2\Delta t^2 - 5\Delta x^4)\frac{\partial^4}{\partial x^4}Eq. 25$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{c^4\Delta t^4}{90}$ $-\frac{c^2\Delta t^2\Delta x^2}{144}$	$-\frac{c^6\Delta t^4}{90}$ $\frac{c^4\Delta t^2\Delta x^2}{144}$	0	0	$\frac{c^4\Delta t^6}{1080}$ $-\frac{c^2\Delta t^4\Delta x^2}{1728}$	0	$-\frac{c^6\Delta t^4\Delta x^2}{1080}$ $\frac{c^4\Delta t^2\Delta x^4}{1728}$
$-\frac{\Delta t^6}{6048}\frac{\partial^6}{\partial t^6}Eq. 25$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{\Delta t^6}{6048}$	$\frac{c^2\Delta t^6}{6048}$	0	0	0
$-\frac{13c^2\Delta t^6}{15120}\frac{\partial^6}{\partial t^4\partial x^2}Eq. 25$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{13c^2\Delta t^6}{15120}$	$\frac{13c^4\Delta t^6}{15120}$	0	0
$-\frac{c^2\Delta t^4}{15120}(27c^2\Delta t^2 - 14\Delta x^2)\frac{\partial^6}{\partial t^2\partial x^4}Eq. 25$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{c^4\Delta t^6}{560}$ $\frac{c^2\Delta t^4\Delta x^2}{1080}$	$\frac{c^6\Delta t^6}{560}$ $-\frac{c^4\Delta t^4\Delta x^2}{1080}$	0
$-\frac{c^2\Delta t^2}{30240}(7\Delta x^4 - 56c^2\Delta t^2\Delta x^2 + 54c^4\Delta t^4)\frac{\partial^6}{\partial x^6}Eq. 25$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{c^6\Delta t^6}{560}$ $\frac{c^4\Delta t^4\Delta x^2}{540}$ $-\frac{c^2\Delta t^2\Delta x^4}{4320}$	$\frac{c^8\Delta t^6}{560}$ $-\frac{c^6\Delta t^4\Delta x^2}{540}$ $\frac{c^4\Delta t^2\Delta x^4}{4320}$

Tabela 1: Procedimento para o cálculo da equação modificada.

4 I ESTUDO DE CASO

Para a solução da equação 15 é necessário estabelecer o domínio espacial, assim como o tempo final de simulação, além das condições de contorno e condições iniciais. Neste estudo de caso o domínio espacial escolhido foi de $x = [0, 2\pi]$, foi adotado um tempo final de simulação de 10 segundos e as condições iniciais impostas foram:

$$\phi(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi(x,0)}{\partial t} = 0, \qquad (28)$$

com as condições de contorno:

$$\phi(0,t) = \phi(L,t) = 0. \qquad (29)$$

Para determinar o erro do método, comparou-se a solução numérica com a solução exata:

$$\phi(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(c\frac{\pi}{L}t\right). \qquad (30)$$

Pode ser observado nas tabelas 2 e 3 que o erro numérico é reduzido em quatro vezes para uma redução de duas vezes do passo espacial. Tal comportamento é característico de sistemas de segunda ordem.

Divisões Espaciais	Norma L_∞	Razão	Ordem	Norma L_2	Razão	Ordem
20	$3{,}69.10^{-3}$	$---$	$---$	$2{,}55.10^{-3}$	$---$	$---$
40	$9{,}22.10^{-4}$	4,00	2,00	$6{,}44.10^{-4}$	3,96	1,98
80	$2{,}31.10^{-4}$	3,99	2,00	$1{,}62.10^{-4}$	3,97	1,99
160	$5{,}77.10^{-5}$	4,00	2,00	$4{,}07.10^{-5}$	3,99	2,00
320	$1{,}44.10^{-5}$	4,00	2,00	$1{,}02.10^{-5}$	3,99	2,00

Tabela 2: Erro do método numérico para *CFL* = 0,5.

Divisões Espaciais	Norma L_∞	Razão	Ordem	Norma L_2	Razão	Ordem
20	$9.26.10^{-4}$	$---$	$---$	$6{,}39.10^{-4}$	$---$	$---$
40	$2{,}34.10^{-4}$	3,96	1,99	$1{,}63.10^{-4}$	3,91	1,97
80	$5{,}84.10^{-5}$	4,00	2,00	$4{,}11.10^{-5}$	3,98	1,99
160	$1{,}46.10^{-5}$	3,99	2,00	$1{,}03.10^{-5}$	3,98	1,99
320	$3{,}66.10^{-6}$	4,00	2,00	$2{,}58.10^{-6}$	3,99	2,00

Tabela 3: Erro do método numérico para *CFL* = 0,9.

Na tabela 4 se avalia o erro numérico através das normas L_∞ e L_2 para um valor de *CFL* unitário, onde se nota uma significativa redução no erro numérico quando comparado aos demais valores de *CFL*. Fato o qual se deve ao valor unitário anular os erros de truncamento na equação modificada.

Divisões Espaciais	20	40	80	160	320
Norma L_∞	$8{,}88.10^{-16}$	$4{,}05.10^{-15}$	$3{,}16.10^{-14}$	$4{,}16.10^{-14}$	$8{,}12.10^{-14}$
Norma L_2	$4{,}16.10^{-16}$	$2{,}43.10^{-15}$	$1{,}85.10^{-14}$	$2{,}35.10^{-14}$	$3{,}97.10^{-14}$

Tabela 4: Erro do método numérico para CFL = 1.

Além da análise de convergência do método, é realizada a análise do erro variando-se o *CFL*. O número de divisões no domínio espacial foi mantido constante em 20 divisões (passo de aproximadamente 0,3142 *m*) para o intervalo $CFL = [9.10^{-3}, 1]$, obtendo-se os gráficos das figuras 1 e 2.

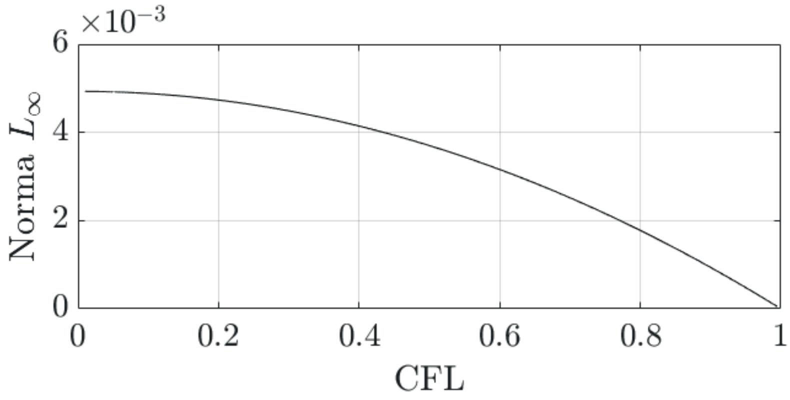


Figura 1: Norma L_∞ em função do *CFL*.

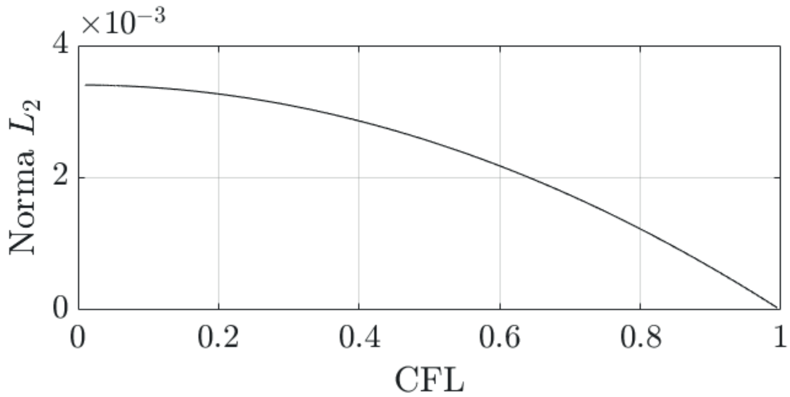


Figura 2: Norma L_2 em função do *CFL*.

Observa-se que nas figuras 1 e 2 o erro numérico descreve uma parábola com a variação do *CFL*, apresentando um máximo para baixos valores de *CFL* e decai à medida que este se aproxima do valor unitário, o que é esperado, visto que na equação 27 o termo de erro de segunda ordem tem caráter quadrático.

5 I CONCLUSÃO

Com a aplicação do método explícito para a solução da equação da onda, apresentam-se soluções numéricas cujos erros decrescem de forma parabólica com o incremento do *CFL*, e quando este possui o valor unitário o erro do método torna-se de pelo menos oitava ordem $(\mathcal{O}(\Delta x^8))$.

Para casos em que se necessite de uma boa exatidão da solução numérica, pode-se fazer proveito dessa propriedade do método explícito, a fim de se obter uma solução com maior acurácia à um baixo custo de recursos computacionais.

REFERÊNCIAS

COURANT, R., FRIEDRICHS, K., LEWY, H. **On the partial difference equations of mathematical physics.** IBM Journal of Research and Development, Nova York, v. 11, i. 2, pp. 215 – 234, 1967.

D'ALEMBERT, J. R. **Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration.** Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres de Berlin, v. 3, pp. 214 – 219, 1747.

LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations:** steady-state and time-dependent problem. 1. ed. Philadelphia: SIAM, 2007.

WARMING, R., HYETT, B. **The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods.** Journal of Computational Physics, California, v. 14, n. 2, pp. 159 – 179, 1974.

CAPÍTULO 25

A IDEIA GEOMÉTRICA DA HOMOLOGIA E DO GRUPO FUNDAMENTAL

Wendy Díaz Valdés
Universidade Federal de Uberlândia, FAMAT
Uberlândia - MG

Lígia Laís Fêmina
Universidade Federal de Uberlândia, FAMAT
Uberlândia - MG

Teófilo Jacob Freitas e Souza
Universidade Federal de Uberlândia, FEMEC
Uberlândia - MG

Joyce Antunes da Silva
Faculdade Pitágoras, Engenharia Mecânica
Uberlândia - MG

RESUMO: Este trabalho tem como finalidade abordar com mais profundidade e detalhamento a ideia geométrica da teoria de homologia e grupo fundamental, proporcionando uma visão ampla da importância dessas teorias. Para tanto foram apresentados os fundamentos teóricos básicos sobre ambos os grupos de uma forma simples. Dando a possibilidade de perceber uma relação entre os mesmos apenas olhando para a ideia geométrica de cada. O que possibilita calcular o grupo fundamental na dimensão 1 de um espaço tendo já calculado o grupo de homologia na dimensão 1 do mesmo espaço, uma vez que este último é mais fácil.
PALAVRAS-CHAVE: Homologia. Grupo fundamental.

THE GEOMETRIC IDEA OF HOMOLOGY AND THE FUNDAMENTAL GROUP

ABSTRACT: This work aims to approach the geometric idea of homology theory and fundamental group in more comprehensively way and detail, providing a broad view of the importance of these theories. For that, the basic theoretical foundations of both groups were presented in a simple way, giving the possibility to perceive a relation between them just considering at the geometric idea of each. This allows possible to calculate the fundamental group in dimension 1 of a space having already calculated the group of homology in dimension 1 of the same space, since the latter is easier.
KEYWORDS: Homology. Fundamental group.

1 I INTRODUÇÃO

A topologia algébrica descreve a estrutura de um espaço topológico por associação com um sistema algébrico, normalmente um grupo ou uma sequência de grupos. Desse modo, a topologia algébrica consiste em resolver problemas topológicos através de métodos puramente algébricos e um conceito importante é o de homologia (CROOM, 1978).

A teoria de homologia é um assunto importante na topologia algébrica, pois fornece um método de associar a cada espaço topológico uma categoria de grupos (ou, mais geralmente, módulos), chamados de grupo de homologia desse espaço, de modo que espaços homeomorfos possuem grupos de homologia isomorfos (LIMA, 2012).

O grupo fundamental cria uma imagem algébrica do espaço de laços em um espaço *X*, esse grupo é denotado por $\pi_1(X, x_0)$. Na maioria das vezes, esse grupo é difícil de calcular. Nesse sentido, relacionar o grupo de homologia com o grupo fundamental se torna uma alternativa mais viável para facilitar tais cálculos.

Este trabalho não tem como intuito abordar as definições e propriedades das teorias de homologia e grupo fundamental, uma vez que essas necessitam de muitos pré-requisitos algébricos e topológicos. O objetivo é apresentar a ideia geométrica dessas teorias, que são de fácil entendimento para qualquer leigo em topologia algébrica.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Homologia

Para muitos a definição da homologia não é óbvia. Desse modo, uma ideia geométrica facilita a compreensão. Os grupos de homologia $H_n(X)$, como $n \geq 1$, identificam no espaço topológico *X* seus n-dimensionais buracos.

Definição 1. Um espaço *X* tem um buraco n-dimensional, se *X* possui alguma imagem de uma esfera S^n dada por uma aplicação contínua $f\colon S^n \to X$, a qual não pode ser deformada em um ponto.

Geometricamente, a estrutura dos grupos $H_n(X)$ fornece informação sobre o número e os tipos de buracos n-dimensionais em *X*.

Por exemplo, seja *X* o espaço formado de quatro caminhos $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e δ_4 ligando os pontos *A* e *B*, conforme mostra a figura 1. Podemos obter outros caminhos em *X* fazendo justaposição dos caminhos $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e δ_4 com os caminhos inversos $-\delta_1, -\delta_2, -\delta_3$ e $-\delta_4$.

Um caminho em *X* é denominado 1-simplexo. Em especial, quando o caminho sai de um vértice e no final volta no mesmo vértice, chamamos de 1-ciclo. Podemos visualizar os 1-ciclos, como os caminhos que fecham um buraco ou são bordo de um subespaço de dimensão 2, que é um 2-simplexo.

Por exemplo, $\delta_1 - \delta_2$ e $\delta_2 - \delta_3$ são 1-ciclos. Todo 1-ciclo que não é bordo de um 2-simplexo, fornece um elemento não nulo em homologia. Isto significa que o 1-ciclo circunda um buraco 1-dimensional do espaço.

Na figura 2, temos três 1-ciclos que são geradores de $H_1(X)$. Ou seja,

$$H_1(X) = \langle \delta_1 - \delta_2, \delta_2 - \delta_3, \delta_3 - \delta_4 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

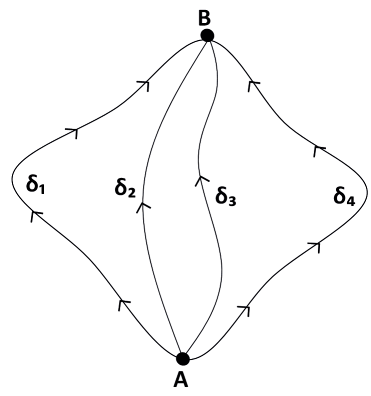


Figura 1: Espaço X.

Então, $H_1(X)$ tem 3 geradores e X tem 3 buracos 1-dimensionais. Como não há buracos de dimensão maior do que 1, temos que

$$H_n(X) = \{0\}, \quad n \geq 2.$$

Considere agora o espaço *X*.

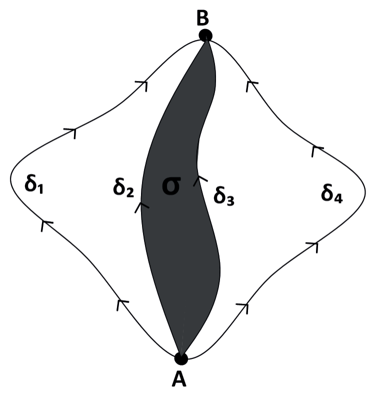


Figura 2: Espaço *X*.

Neste espaço, temos dois 1-ciclos, $\delta_1 - \delta_2$ e $\delta_3 - \delta_4$ que não são bordos de 2-simplexos e assim fornecem os geradores de $H_1(X')$. O 1-ciclo $\delta_2 - \delta_3$ é bordo do 2-simplexo σ. Assim, esse ciclo fornece a classe nula em $H_1(X')$ e temos

$$H_1(X') = \langle \delta_1 - \delta_2, \delta_3 - \delta_4 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Como X' não tem buracos de dimensões maiores do que 1, temos que

$$H_n(X') = \{0\}, \quad n \geq 2.$$

Seguindo o raciocínio do exemplo anterior, podemos calcular os grupos de homologia de outros espaços, uma vez que os mesmos são os buracos dos espaços nas diferentes dimensões. Por exemplo, a figura a seguir mostra um importante espaço topológico chamado toro.

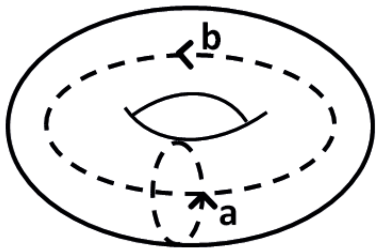


Figura 3: Toro

Observe que no toro há dois buracos 1-dimensionais, determinados por a e b, e um 2-dimensional que seria a parte oca do toro.

Desse modo, o grupo de homologia do toro é $H_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_2(T) = \mathbb{Z}$ e $H_k(T) = \{0\}$ para $k > 2$.

2.2 Grupo Fundamental

Como foi feito anteriormente, para uma melhor compreensão da ideia do grupo fundamental apresentamos a interpretação geométrica, uma vez que há necessidade de muitos pré-requisitos algébricos para o entendimento da definição do mesmo.

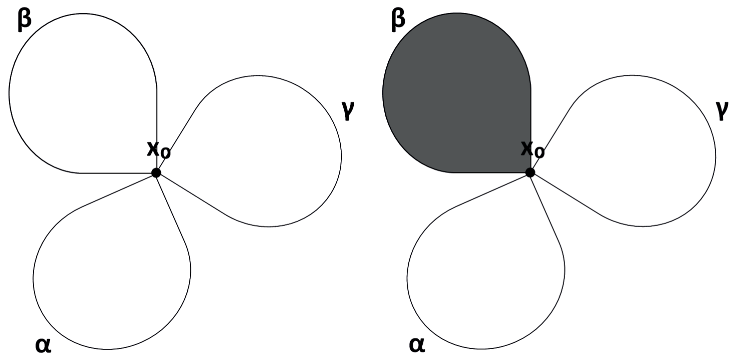
Geometricamente, o grupo fundamental π_1 de um espaço X pode ser definido de modo que seus elementos são "laços" em X, onde $x_0 \in X$ é o ponto de partida e o ponto de chegada de tais laços.

Os laços determinam um mesmo elemento no grupo fundamental se um pode ser deformado continuamente no outro, dentro do espaço X.

Dizemos que um espaço é simplesmente conexo, se todo laço pode ser deformado continuamente num ponto.

O grupo fundamental mede o quão longe um espaço está de ser simplesmente conexo. Isto é, quão longe um espaço está de que todo laço em X determine um mesmo elemento do grupo, o laço trivial, ou seja, o ponto x_0. Se um laço não pode ser deformado continuamente em um ponto é porque há um buraco no seu interior, e π_1 mede o comportamento desses buracos, que chamamos de buracos 1-dimensionais.

Por exemplo, seja o espaço X composto por α, β e γ, três curvas com ponto x_0 em comum, e X o espaço composto por essas três curvas, mas neste caso a curva β está preenchida como na figura 4.



(a) Espaço X (b) Espaço X'

Figura 4: Espaços X e X'.

Considere ν_1, ν_2 e ν_3 os laços que percorrem uma única vez as curvas α, β e γ, respectivamente. Considere também que $[\nu_1] = \mu_1$ e $[\nu_2] = \mu_2$ e $[\nu_3] = \mu_3$, onde $[\nu_1]$, $[\nu_2]$ e $[\nu_3]$ são as classes de ν_1, ν_2 e $[\nu_3]$, respectivamente. Cada produto de potências de μ_1, μ_2 e μ_3 fornece um elemento distinto de $\pi_1(X)$. Por exemplo, em X, temos que o produto $\nu_1^2 \nu_2^4 \nu_3 \nu_1^{-3} \nu_2 \nu_3^2$ é o laço que dá duas volta ao redor de α, quatro voltas ao redor de β, uma volta ao redor de γ, três voltas ao redor de α no sentido oposto, uma volta ao redor de β e duas voltas ao redor de γ. Temos então que $\mu_1^{-2} \mu_2^4 \mu_3 \mu_1^{-3} \mu_2 \mu_3^2 = [\nu_1^2 \nu_2^4 \nu_3 \nu_1^{-3} \nu_2 \nu_3^2]$.

O conjunto de todas as sequências como esta, consistindo de potências de e μ_1, μ_2 e μ_3 forma um grupo não abeliano, denotado por $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e chamado de grupo livre com três geradores μ_1, μ_2 e μ_3.

Note que o número de geradores do grupo fundamental está relacionado ao número de buracos 1-dimensionais de X.

Já em X como o β está preenchido, ele pode ser $_0$ deformado continuamente no ponto x_0, ou seja, o laço trivial.

Logo, o grupo $\pi_1(X')$ é gerado pelas classes da curva α e γ, ou seja, $\pi_1(X') \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

3 I AUTORIZAÇÕES/RECONHECIMENTO

Ao submeter o trabalho, os autores tornam-se responsáveis por todo o conteúdo da obra.

CONCLUSÕES

Pelo o que foi exposto, é natural perguntar-se sobre a existência de uma relação entre o grupo fundamental e a homologia no nível 1, uma vez que ambos estão relacionados com os buracos 1-dimensional do espaço topológico. O Teorema de Hurewicz relaciona estes dois grupos fornecendo uma função isomorfa entre a abelianização do π_1 e o H_1.

Para maiores detalhes sobre a definição, propriedades e relação dessas teorias, sugerimos (CRISTINA et al., 2013; CROOM, 1978; LIMA, 2003).

REFERÊNCIAS

CRISTINA, J. et al. Algumas considerações sobre homotopia e homologia. **Revista Eletrônica Paulista de Matemáticaletrônica Paulista de Matemática**, v. 2, p. 18–31, 2013.

CROOM, H. F. **Basic concepts of algebraic topology**. 1th. ed. New York: Spinger-Verlag, 1978.

LIMA, E. L. **Fundamental Groups covering spaces**. 1st. ed. [s.l.] A K Peters/CRC Press, 2003.

LIMA, E. L. **Homologia básica**. 2da. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

CAPÍTULO 26

ANÁLISE NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DA DIFUSÃO BIDIMENSIONAL EM REGIME TRANSIENTE PELO MÉTODO EXPLÍCITO

Ítalo Augusto Magalhães de Ávila
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – Minas Gerais

Felipe José Oliveira Ribeiro
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – Minas Gerais

Hélio Ribeiro Neto
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – Minas Gerais

Aristeu da Silveira Neto
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica
Uberlândia – Minas Gerais

RESUMO: O presente trabalho consiste no estudo do erro numérico consequente de uma discretização explícita da equação diferencial parcial parabólica que modela o processo transiente de difusão bidimensional via método de diferenças finitas. Emprega-se o teorema de Clairaut-Schwarz para a simplificação de termos de ordens elevadas no domínio temporal e avalia-se a influência da relação entre os incrementos espacial e temporal sobre o erro numérico. Rotinas numéricas foram implementadas e os resultados computacionais para o problema proposto são comparados à sua solução analítica.

PALAVRAS-CHAVE: análise numérica. difusão bidimensional transiente. diferenças finitas.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE TWO-DIMENSIONAL TRANSIENT DIFFUSION EQUATION FOR THE EXPLICIT SCHEME

ABSTRACT: This paper presents the numerical analysis of the error consequent of an explicit discretization of the parabolic differential equation that models the transient two-dimensional diffusion through the finite difference method. Through the Clairaut-Schwarz theorem, the suppression of high order terms and the evaluation of the influence of the ratio between space and time steps over the numerical error are possible. Numerical routines are implemented and the computational results for the case of study are compared to its analytical solution.

KEYWORDS: numerical analysis. transient two-dimensional diffusion. finite difference method.

1 I INTRODUÇÃO

Muitos fenômenos físicos são modelados, isto é, representados matematicamente, por meio de Equações Diferenciais Parciais (EDPs). A sua solução por métodos analíticos, no entanto, é limitada a casos lineares e simples, que não representam de maneira satisfatória a maioria dos fenômenos físicos. Um exemplo é a solução da equação da energia térmica em regime transiente. As técnicas de solução analíticas são limitadas para resolver tais equações. São exemplos de fatores de limitação, a geometria do domínio, os tipos de condição de fronteira e a presença de termos não lineares na equação. Uma alternativa ás limitações do método analítico é a confecção de modelos numérico-computacionais que, se devidamente implementados, podem fornecer respostas aproximadas para sistemas complexos de equações.

Na literatura da área, existem vários métodos de solução numérica de equações diferenciais. São exemplos o Método dos Elementos Finitos, Método dos Volumes Finitos e Método de Diferenças Finitas. Tais métodos transformam as equações apresentadas na forma contínua em um conjunto de equações algébricas. Esse processo recebe o nome de discretização. A equação gerada pela discretização é uma aproximação da equação original e, portanto, apresenta erro, o qual pode ser quantificado sob determinadas condições. No presente trabalho, procura-se apresentar um estudo de caso para a análise de erro envolvendo a solução numérica da EDP que modela a equação da energia térmica.

2 I MÉTODO NUMÉRICO

Na equação da difusão, para o caso bidimensional (indicada abaixo), aparecem duas parcelas diferenciais (LEVEQUE, 2007).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = 0. \qquad (1)$$

onde ϕ é a variável a ser transportada, função do tempo t e das variáveis espaciais x e y. O símbolo representa a difusividade, isto é, a velocidade na qual a informação é transportada no domínio espacial. A expansão em série de Taylor, apresentada na equação 2, é empregada no processo de discretização dos termos temporal e espacial, visando a resolução numérica do problema.

$$\phi(x,y,t+\Delta t) = \phi(x,y,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{\partial^n \phi(x,t)}{\partial t^n}\Delta t^n. \qquad (2)$$

Para a discretização do termo diferencial de primeira ordem, faz-se uso da equação 2 para a expansão da função no domínio do tempo:

$$\frac{\phi(x,y,t+\Delta t) - \phi(x,y,t)}{\Delta t} = \frac{\partial \phi(x,y,t)}{\partial t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta t^n}{n!}\frac{\partial^n \phi(x,y,t)}{\partial t^n}. \qquad (3)$$

Truncando a equação 3 no termo de primeira ordem $(\mathcal{O}(\Delta t))$, obtém-se o método de Euler explícito. Analogamente, a discretização para os termos de segunda ordem é obtida, fazendo uso de um incremento e um decremento no espaço, enquanto o tempo é fixado.

$$\phi(x+\Delta x,y,t)=\phi(x,y,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta x^{(2n-1)}}{(2n-1)!}\frac{\partial^{(2n-1)}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{(2n-1)}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta x^{2n}}{2n!}\frac{\partial^{2n}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{2n}}. \tag{4}$$

$$\phi(x-\Delta x,y,t)=\phi(x,y,t)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta x^{(2n-1)}}{(2n-1)!}\frac{\partial^{(2n-1)}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{(2n-1)}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta x^{2n}}{2n!}\frac{\partial^{2n}\phi\left(x,t+\frac{\Delta t}{2}\right)}{\partial x^{2n}}. \tag{5}$$

Somando as equações 4 e 5, obtém-se a discretização para a derivada segunda em uma das direções:

$$\frac{\phi(x+\Delta x,y,t)-2\,\phi(x,y,t)+\phi(x-\Delta x,y,t)}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2\phi(x,y,t)}{\partial x^2}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta t^{2(n-1)}}{2n!}\frac{\partial^{2n}\phi(x,y,t)}{\partial x^{2n}}. \tag{6}$$

A mesma metodologia empregada em x é estendida a dimensão y. Substituindo as relações truncadas na equação 1, tem-se a equação da difusão bidimensional pelo método explícito, apresentada a seguir:

$$\frac{\phi(x,y,t+\Delta t)-\ \phi(x,y,t)}{\Delta t}-\alpha\frac{\phi(x+\Delta x,y,t)-2\,\phi(x,y,t)+\phi(x-\Delta x,y,t)}{\Delta x^2} -\alpha\,\frac{\phi(x,y+\Delta y,t)-2\,\phi(x,y,t)+\phi(x,y-\Delta y,t)}{\Delta y^2}=0. \tag{7}$$

A solução numérica requer a discretização dos domínios espacial e temporal. Ou seja, deve-se traduzir um conjunto contínuo e infinito de informações em um conjunto discreto e finito, no qual é empregada a metodologia numérica. Os domínios espacial e temporal são discretizados uniformemente, como indicado na equação 8.

$$\mathcal{M}=\left\{\left(x_{I,}\,y_{J,},t^N\right);\ x_I=I\Delta x,y_J=J\Delta y,t^N=N\Delta t, N=0,1,\dots,K,I=0,1,\dots,L,J=0,1,\dots,M\right\}. \tag{8}$$

É conveniente definir a solução numérica para os pontos discretos $\Phi_{I,J}^{N}$, que não é idêntica à solução analítica de $\phi(x,y,t)$. Assim, é possível reescrever a equação 7 como indicado à seguir.

$$\frac{\Phi_{I,J}^{N+1}-\Phi_{I,J}^{N}}{\Delta t}-\alpha\left[\frac{\Phi_{I+1,J}^{N}-2\Phi_{I,J}^{N}+\Phi_{I-1,J}^{N}}{\Delta x^2}\right]-\alpha\left[\frac{\Phi_{I,J+1}^{N}-2\Phi_{I,J}^{N}+\Phi_{I,J-1}^{N}}{\Delta y^2}\right]=0\,. \quad (9)$$

Para a análise do erro, parte-se para a formulação de uma equação modificada, que descreve qual equação contínua a equação 9 modela sem erros. Define-se uma função $\psi(x,y,t)$ que é contínua e coincidente com a solução no ponto discreto (*I,J,N*) e é diferente da solução exata $\phi(x,y,t)$. Em outras palavras, $\phi(x,y,t)$ é a solução exata, $\Phi_{I,J}^{N}$ é a solução aproximada, obtida do sistema discreto, e $\psi(x,y,t)$ é a solução contínua que está de acordo com a obtida por Φ no ponto (respectivos *I, J* e *N*) e que é diferente de $\phi(x,y,t)$. Substituindo $\Phi_{I,J}^{N}$ na equação 11 por $\psi(x,y,t)$ e expandindo os termos em série de Taylor ao redor do ponto (x,y,t), obtém-se a equação apresentada a seguir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\alpha\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\\ &=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta t^{n-1}}{n!}\frac{\partial^n\psi}{\partial x^n}\\ &+\,2\alpha\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta x^{2(n-1)}}{2n!}\frac{\partial^{2n}\psi}{\partial x^{2n}}+2\alpha\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta y^{2(n-1)}}{2n!}\frac{\partial^{2n}\psi}{\partial x^{2n}}\end{aligned} \quad (10)$$

O lado direito da equação 12 expressa o erro numérico da discretização segundo a metodologia explícita. Tal relação é apresentada em função de termos espaciais e temporais. Visando facilitar a análise, procura-se reescrever a relação em função apenas de termos do domínio espacial. A equação 1 não pode ser empregada, no entanto, para suprimir termos de ordens elevadas (WARMING, 1974), já que a equação 10 descreve a solução discretizada, que se difere da exata. Assim, deve-se empregar sistematicamente a equação 10 na simplificação dos termos desejados.

Truncando termos de ordem superior a 4, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\alpha\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)+\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{\Delta t^2}{6}\frac{\partial^3\phi}{\partial t^3}-\alpha\frac{\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}-\alpha\frac{\Delta x^4}{60}\frac{\partial^6\phi}{\partial x^6}\\ -\alpha\frac{\Delta y^2}{12}\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}-\alpha\frac{\Delta y^4}{60}\frac{\partial^6\phi}{\partial y^6}+\cdots=0\end{aligned} \quad (11)$$

Derivando parcialmente a equação 11 no domínio temporal, multiplicando a equação resultante por $(-\Delta t/2)$ e somando-a à primeira, tem-se a equação indicada a seguir.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) - \frac{\Delta t^2}{12}\frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} + \alpha\Delta t\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t} + \alpha\Delta t\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^2 \partial t} + \alpha\frac{\Delta x^2 \Delta t}{2}\frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5 \partial t} + \alpha\frac{\Delta y^2 \Delta t}{2}\frac{\partial^5 \phi}{\partial x^5 \partial t} + \cdots = 0 \qquad (12)$$

O mesmo procedimento é aplicado até a segunda ordem para a dimensão *t*, multiplicando o resultado por $(\Delta t^2/12)$ e somando-o à equação 12, de forma a suprimir o termo $(\frac{\Delta t^2}{12}\frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3})$. A resultante é indicada a seguir.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) + \frac{\Delta t^3}{12}\frac{\partial^4 \phi}{\partial t^4} + \frac{\Delta t^4}{2(6!)}\frac{\partial^5 \phi}{\partial t^5} - 2\frac{\alpha\Delta x^2}{4!}\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - 2\frac{\alpha\Delta y^2}{4!}\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - 2\frac{\alpha\Delta x^4}{6!}\frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6} - 2\frac{\alpha\Delta y^4}{6!}\frac{\partial^6 \phi}{\partial y^6} - \frac{\alpha\Delta t}{2}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\alpha\Delta t}{2}\frac{\partial^3 \phi}{\partial y^2 \partial t} - \frac{\Delta x^2 \Delta t}{48}\frac{\partial^5 \phi}{\partial x^3 \partial t} - \frac{\Delta y^2 \Delta t}{48}\frac{\partial^5 \phi}{\partial y^3 \partial t} + \cdots = 0 \qquad (13)$$

Para cancelar as derivadas parciais nas duas dimensões, faz-se uso do teorema de Clairaut-Schwarz (inversão da ordem de derivação). Essa metodologia deve ser empregada até que todas as derivadas parciais no tempo sejam suprimidas da equação truncada. Por fim, chega-se a equação modificada, que é apresentada abaixo.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) &= 2\alpha\left(\frac{\Delta x^2}{4!} + \frac{\Delta t}{4}\right)\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\alpha\left(\frac{\Delta y^2}{4!} + \frac{\Delta t}{4}\right)\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \\ &+ 2\alpha\left(\frac{\Delta x^4}{6!} + \frac{\alpha\Delta x^2 \Delta t}{2(4!)} + \frac{\alpha\Delta x^4 \Delta t}{48}\right)\frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6} \\ &+ 2\alpha\left(\frac{\Delta y^4}{6!} + \frac{\alpha\Delta y^2 \Delta t}{2(4!)} + \frac{\alpha\Delta y^4 \Delta t}{48}\right)\frac{\partial^6 \phi}{\partial y^6} \\ &+ 2\alpha\left(\frac{\Delta x^6}{8!} + \frac{\alpha\Delta x^4 \Delta t}{2(6!)} + \frac{\alpha\Delta x^6 \Delta t}{48(4!)}\right)\frac{\partial^8 \phi}{\partial x^8} \\ &+ 2\alpha\left(\frac{\Delta y^6}{8!} + \frac{\alpha\Delta y^4 \Delta t}{2(6!)} + \frac{\alpha\Delta y^6 \Delta t}{48(4!)}\right)\frac{\partial^8 \phi}{\partial y^8} + \cdots\end{aligned} \qquad (14)$$

Ainda, é possível substituir o passo temporal pelo passo espacial. Define-se uma constante *CFL* (COURANT, 1967), que relaciona o passo temporal aos passos espaciais.

$$\Delta t = \frac{CFL}{\alpha}\min[\Delta x^2, \Delta y^2]. \qquad (15)$$

Substituindo tal condição na equação 14, obtém-se a equação 16, apresentada a seguir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\alpha\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\\ &=2\alpha\left(\frac{\Delta x^2}{4!}+\frac{CFL\min[\Delta x^2,\Delta y^2]}{4}\right)\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}\\ &+2\alpha\left(\frac{\Delta y^2}{4!}+\frac{CFL\min[\Delta x^2,\Delta y^2]}{4}\right)\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}\\ &+2\alpha\left(\frac{\Delta x^4}{6!}+\frac{CFL\min[\Delta x^2,\Delta y^2]\,(\Delta x^2+\Delta x^4)}{2(4!)}\right)\frac{\partial^6\phi}{\partial x^6}\\ &+2\alpha\left(\frac{\Delta y^4}{6!}+\frac{CFL\min[\Delta x^2,\Delta y^2]\,(\Delta y^2+\Delta y^4)}{2(4!)}\right)\frac{\partial^6\phi}{\partial x^6}+\cdots\end{aligned}\qquad(16)$$

Reescrevendo a equação acima de forma conveniente, truncando os termos de ordem superior à quatro, chega-se a equação modificada:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\alpha\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)\\ &=\frac{\alpha\Delta x^2}{12}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+\frac{\alpha\Delta y^2}{12}\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}\\ &+\frac{1}{2}\alpha CFL\min[\Delta x^2,\Delta y^2]\left(\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}+\frac{1}{2}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^4\phi}{\partial y^2\partial x^2}\right)\\ &+\frac{2\alpha CFL\Delta x^4}{6!}\frac{\partial^6\phi}{\partial x^6}+\frac{2\alpha CFL\Delta y^4}{6!}\frac{\partial^6\phi}{\partial y^6}\\ &+\frac{1}{4!}\alpha CFL\min[\Delta x^2,\Delta y^2]\left(\frac{\Delta x^2\partial^6\phi}{\partial x^6}+\frac{\Delta y^2\partial^6\phi}{\partial y^6}+\frac{\Delta x^2\partial^6\phi}{\partial x^4\partial y^2}\right.\\ &\left.+\frac{\Delta y^2\partial^6\phi}{\partial y^4\partial x^2}\right)\end{aligned}\qquad(17)$$

Analisando a equação 17, que apresenta os termos de menores (e mais significativas) ordens do erro numérico, pode-se inferir que o erro é proporcional à condição de *CFL*. Ou seja, o erro é ampliado em função do aumento de tal parâmetro.

3 I ESTUDO DE CASO

Para a solução da equação 9 é necessário estabelecer o domínio espacial, condições inicial e de contorno e tempo final de simulação. O domínio espacial escolhido foi de $x=[0,2\pi]$ e $y=[0,2\pi]$ e o tempo final de simulação de 10 segundos. Para este estudo de caso, a condição inicial imposta é indicada na equação 18.

$$\Phi(x,y,0)=U_o\,\mathrm{sen}(\theta x)\,\mathrm{sen}(\theta y)\,,\qquad(18)$$

onde U_o é a amplitude da função e θ é o número de onda. As condições de contorno foram definidas da seguinte maneira:

$$\Phi(0, y, t) = 0\,, \qquad (19)$$

$$\Phi(2\pi, y, t) = 0\,, \qquad (20)$$

$$\Phi(x, 0, t) = 0\,, \qquad (21)$$

$$\Phi(x, 2\pi, t) = 0\,, \qquad (22)$$

Para determinação do erro do método, compara-se a solução numérica com a solução analítica:

$$\Phi(x, t) = U_o \operatorname{sen}(\theta x) \operatorname{sen}(\theta y) e^{-2\alpha\theta^2 t}. \qquad (23)$$

Os valores das variáveis U_o, θ e α devem ser escolhidas em função do problema que se deseja resolver. No presente trabalho, o valor escolhido para as três variáveis foi 1,0. A determinação do erro numérico foi feita, inicialmente, variando o número de divisões espaciais para a condição *CFL* = 1,0. O domínio foi dividido uniformemente nas duas direções $(\Delta x = \Delta y,$ com $\Delta x = 2\,\pi/L = 2\,\pi/M)$. Observa-se na tabela 1 que o erro é reduzido de quatro vezes para o dobro de divisões espaciais em cada direção, comportamento característico de um sistema de segunda ordem, como esperado da análise da equação 17.

Divisões Espaciais	Norma L_∞	Razão	Ordem	Norma L_2	Razão	Ordem
25	$3{,}08.10^{-3}$	$---$	$---$	$1{,}14.10^{-3}$	$---$	$---$
50	$7{,}38.10^{-4}$	4,17	2,09	$2{,}87.10^{-4}$	3,97	1,98
100	$1{,}81.10^{-4}$	4,07	2,04	$7{,}19.10^{-5}$	3,99	1,99
200	$4{,}48.10^{-5}$	4,04	2,02	$1{,}80.10^{-5}$	3,99	2,00

Tabela 1: Erro do método numérico para *CFL* = 0,1.

Segue ainda a avaliação do erro variando-se o *CFL*. O número de divisões para cada direção no domínio espacial foi mantido constante em 50 para o intervalo $CFL \in [2{,}5.10^{-3}, 2{,}5.10^{-1}]$. O resultado obtido é apresentado a seguir.

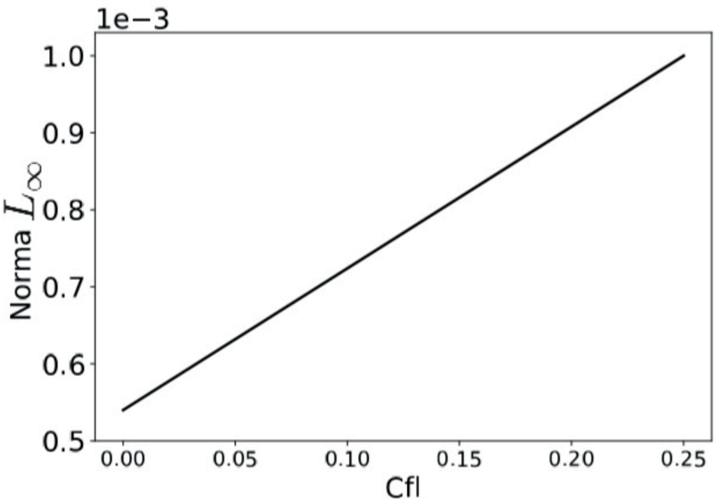


Figura 1: Norma L_∞ em função do *CFL*.

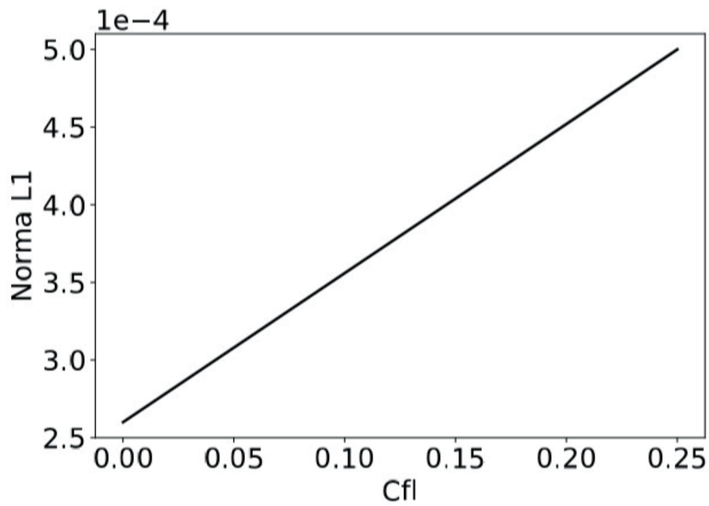


Figura 2: Norma L_1 em função do *CFL*.

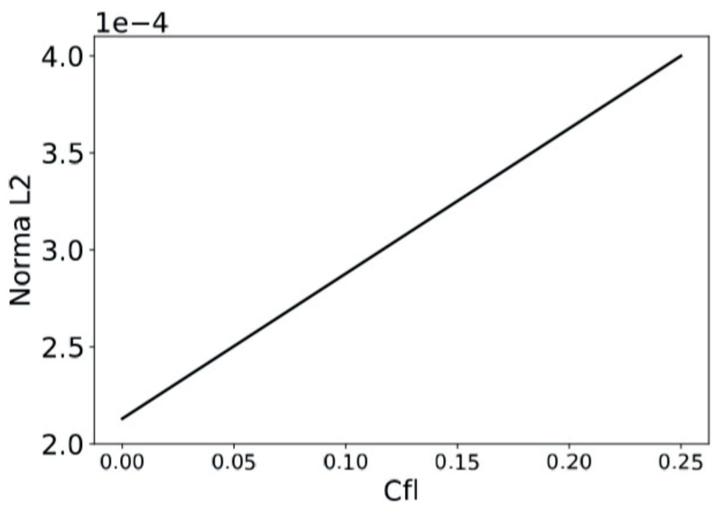


Figura 3: NormaL_2 em função do *CFL*.

Observa-se nas figuras 1, 2 e 3 que o erro numérico é proporcional ao , como esperado pela análise da equação 17.

4 I CONCLUSÃO

Propôs-se a avaliação de erro para a solução numérica da equação diferencial parcial parabólica que modela o fenômeno da difusão bidimensional em regime transiente. Utilizou-se o método de Euler explícito para a derivada parcial temporal e diferenças centradas para a espacial. A análise numérica do método de discretização é desenvolvida e simulações computacionais são conduzidas com o fim de avaliar o erro numérico para o problema proposto. A solução numérica foi comparada com a solução analítica.

Por fim, conclui-se que a parcela de maior representatividade no erro retornado é a do termo de segunda ordem. Ainda, o erro é ampliado em função do aumento da entre os passos espacial e temporal, de acordo com a definição da constante de *CFL.*

REFERÊNCIAS

COURANT, R., FRIEDRICHS, K., LEWY, H. **On the partial difference equations of mathematical physics.** IBM Journal of Research and Development, Nova York, v. 11, i. 2, pp. 215 – 234, 1967.

LEVEQUE, R. J. **Finite difference methods for ordinary and partial differential equations:** steady-state and time-dependent problem. 1. ed. Philadelphia: SIAM, 2007.

WARMING, R., HYETT, B. **The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods.** Journal of Computational Physics, California, v. 14, n. 2, pp. 159 – 179, 1974.

CAPÍTULO 27

TEOREMA DE SINKHORN E KNOPP

Gabriel Santos da Silva
FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia – MG

Daniel Cariello
FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia – MG

Wendy Díaz Valdés
FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia
Uberlândia – MG

Joyce Antunes da Silva
Engenharia Mecânica, Faculdade Pitágoras
Uberlândia – MG

RESUMO: As matrizes estocásticas são amplamente estudadas e possuem diversas aplicações. O teorema de Birkhoff classifica as matrizes duplamente estocásticas. Sinkhorn e Knopp utilizaram esse teorema para descobrir quais matrizes quadradas com entradas não negativas poderiam fornecer uma matriz duplamente estocástica através de um certo procedimento. Esses teoremas formam um capítulo muito interessante da história da Análise Matricial e o objetivo desse trabalho é divulgá-lo.

PALAVRAS-CHAVE: Matrizes Estocásticas. Suporte. Suporte Total.

THEOREM OF SINKHORN AND KNOPP

ABSTRACT: Stochastic matrices are widely studied and have several applications. Birkhoff's theorem ranks doubly stochastic matrices. Sinkhorn and Knopp used this theorem to find which square matrices with nonnegative inputs could provide a doubly stochastic matrix through a certain procedure. These theorems form a very interesting chapter in the history of Matrix Analysis and the purpose of this work is to spread it.

KEYWORDS: Stochastic Matrices. Support. Total Support.

1 I INTRODUÇÃO

Seja A uma matriz quadrada de ordem n com entradas reais não negativas. Dizemos que A é linha estocástica se para cada linha a soma de seus elementos é igual a 1 (i.e., $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ para todo i). Dizemos que ela é coluna estocástica se para cada coluna a soma de seus elementos é igual a 1 (i.e., $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ para todo j). Se a matriz com entradas reais não negativas for linha e coluna estocástica dizemos que ela é duplamente estocástica.

Matrizes estocásticas foram amplamente estudadas e possuem diversas aplicações. Por exemplo, as cadeias de Markov utilizadas em estatística utilizam as matrizes estocásticas e suas propriedades. O algoritmo de busca do Google também está baseado em matrizes estocásticas.

Um teorema muito interessante que classifica as matrizes duplamente estocásticas é o teorema de Birkhoff [1]. Ele diz que uma matriz é duplamente estocástica se, e somente se, ela for uma combinação convexa de matrizes permutação (ver teorema 3).

Sinkhorn e Knopp [2] inventaram um algoritmo para tentar obter de uma matriz com entradas reais não negativas, $A_{n\times n}$, uma matriz duplamente estocástica. Podemos descrever o algoritmo assim:

1. Normalize as linhas de *A* que ela se torne linha estocástica dividindo cada linha por sua soma. Isso significa que estamos multiplicando *A* por uma matriz diagonal positive E_1 à esquerda e obtendo a matriz linha estocástica: E_1A.

2. Normalize as coluna E_1A de para obter uma matriz coluna estocástica. Isso significa que estamos multiplicando E_1A por uma matriz diagonal positiva D_1 à direita e obtendo a matriz coluna estocástica: E_1AD_1.

3. Provavelmente E_1AD_1 não é mais linha estocástica, mas podemos repetir o processo com E_1AD_1.

Assim obtemos uma sequência de matrizes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ora linha estocástica, ora coluna estocástica:

$$A_{2n-1} = (E_n \dots E_1)A(D_1 \dots D_{n-1}),\ \ A_{2n} = (E_n \dots E_1)A(D_1 \dots D_n),$$

Note que se essa sequência convergir então ela converge para uma matriz duplamente estocástica.

A grande descoberta de Sinkhorn e Knopp foi uma condição necessária e suficiente para a convergência dessa sequência. Ela está baseada no teorema de Birkhoff.

Definição 1. *Uma diagonal de* $A_{n\times n}$ *é uma sequência de elementos* $a_{1\sigma(1)}, \dots, a_{n\sigma(n)}$ *onde* σ *é uma permutação de* $1, \dots, n$*. Dizemos que A tem* ***suporte*** *se existir uma diagonal de A com todos os elementos diferentes de zero.*

Dizemos que A tem ***suporte total*** *se todo* $a_{ij} \neq 0$ *pertencer a alguma diagonal de A com elementos não nulos.*

Sinkhorn e Knopp descobriram que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se, e somente se, a matriz *A* tem suporte. Isso é surpreendente, pois suporte é uma condição muito simples.

Além disso, como o produto de matrizes diagonais também é uma matriz diagonal então as matrizes da sequência $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem o formato *DAD*', onde *D* e *D'* são matrizes diagonais positivas.

Aqui podemos fazer uma pergunta interessante: Será que existe uma matriz duplamente estocástica com o formato *DA'D* ?

A resposta para essa pergunta é a segunda parte do teorema de Sinkhorn e Knopp.

Existem matrizes diagonais positivas D e D' tais que DAD' é duplamente estocástica se, e somente se, A tiver suporte total.

O objetivo desse trabalho é mostrar que essas condições são necessárias através do teorema de Birkhoff. A demonstração de que elas são suficientes é muito elaborada. Sinkhorn e Knopp fizeram um trabalho excepcional nessa demonstração.

2 I TEOREMAS DE BIRKHOFF E DE SINKHORN-KNOPP

Definição 2. *Seja* $\sigma \in S_n$ *(i.e. uma permutação de* $1, \dots, n$*). Seja* P_σ *uma matriz de ordem* n *tal que* $(P_\sigma)_{i,\sigma(i)} = 1$ *e* $(P_\sigma)_{i,j} = 0$ se $j \neq \sigma(i)$*. Essa* P_σ *é chamada de matriz permutação.*

Teorema 3. *(Teorema de Birkhoff) Seja* $B_{n\times n}$ *uma matriz duplamente estocástica. Existem permutações* $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_n$ *e* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ *tais que:*

1) $B = \sum_{i=1}^{k} a_i P_{\sigma_i}$ 2) $a_i \geq 0, \forall i$ 3) $\sum_{i=1}^{k} a_i = 1$

Em outras palavras, *B* é uma combinação convexa de matrizes permutações.

Teorema 4. *(Teorema de Sinkhorn-Knopp) Seja* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *com entradas não negativas. Uma condição necessária e suficiente para existir uma matriz duplamente estocástica B da forma* D_1AD_2*, onde* D_1 *e* D_2 *são matrizes diagonais positivas é A ter suporte total. Se existir B com esse formato então ela é única.*

Uma condição necessária e suficiente para que no processo iterativo de normalizar linhas e colunas alternadamente convirja a um limite duplamente estocástico é A ter suporte. Se A tem suporte total então o limite do processo é a única *duplamente estocástica do tipo* D_1AD_2 *que existe. Se A tem suporte, mas não total, então o limite não pode ser do tipo* D_1AD_2*.*

3 I CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA O TEOREMA 4

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida na introdução. Se $\lim_{n\to\infty} A_n = B$, então *B* é duplamente estocástica.

Pelo teorema 3, a matriz *B* é uma combinação convexa de matrizes permutação. Cada matriz permutação dessa combinação convexa fornece uma diagonal positiva para *B*. Portanto *B* tem pelo menos uma diagonal positiva.

Como $\lim_{n\to\infty} A_n = B$ então existe algum A_n com diagonal positiva, mas isso significa que *A* também tem uma diagonal não nula. Portanto *A* tem suporte se o limite existir.

Agora se existirem matrizes diagonais positivas D_1, D_2 tais que $D_1\ AD_2$ é duplamente estocástica então

$$A = \sum_{i=1}^{s} c_i D_1^{-1} P_{\sigma_i} D_2^{-1},$$

onde $c_i > 0$ e $\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$ e pelo Teorema de Birkhoff. Note que as entradas não nulas de *A* vem das entradas não nulas de $P_{\sigma_1}, \dots, P_{\sigma_k}$. Portanto se $a_{ij} \neq 0$ então existe l tal que $(P_{\sigma_l})_{ij} \neq 0$.

Assim a diagonal $a_{1\sigma_l(1)}, \dots, a_{n\sigma_l(n)}$ é positiva e $a_{ij} = a_{i\sigma_l(i)}$.

Portanto dada qualquer entrada a_{ij} não nula, existe uma diagonal não nula de *A* que a contém, ou seja, *A* tem suporte total.

Exemplos:

1. Não existem matrizes diagonais positivas D_1,D_2 tais que $D_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_2$ é duplamente estocástica, pois $a_{1,2} = 1$ não pertence a uma diagonal não nula de *A*.

2. Entretanto $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem suporte, pois $a_{11} = a_{22} = 1$. Assim o processo iterativo de normalizar linhas e colunas alternadamente converge a uma matriz duplamente estocástica.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow A_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow A_4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$A_{2n+1} = \begin{pmatrix} \frac{2n+1}{2n+2} & \frac{1}{2n+2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2n+1} \\ 0 & \frac{2n}{2n+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 I CONCLUSÃO

Neste trabalho utilizamos o teorema de Birkhoff para mostrar as condições necessárias do teorema de Sinkhorn e Knopp. Esse teorema nos ensina de quais matrizes com entradas não negativas podemos obter matrizes duplamente estocásticas através do processo iterativo de normalizar linhas e colunas. Essas condições necessárias também são suficientes e isso é surpreendente. Esses teoremas formam um capítulo muito interessantes da história da Análise Matricial.

REFERÊNCIAS

M. Marcus and H. Minc, **A Survey of matrix theory and matrix inequalities**, Courier Corporation, vol 14, 1992.

R. Sinkhorn and P. Knopp, **Concerning nonnegative matrices and doubly stochastic matrices**, Pacific Journal of Mathematics (1967) 21, no. 2, 343--348.

CAPÍTULO 28

O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM O AUXILIO DO *SOFTWARE GEOGEBRA* UTILIZANDO PROJEÇÃO PARA ÓCULOS ANAGLIFO

Rosângela Costa Bandeira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins – IFTO
Paraíso do Tocantins – TO

Aécio Alves Andrade
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins – IFTO
Paraíso do Tocantins – TO

Hudson Umbelino dos Anjos
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins – IFTO
Paraíso do Tocantins – TO

Jarles Oliveira Silva Nolêto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins – IFTO
Paraíso do Tocantins – TO

RESUMO: Atualmente o *software* Geogebra vem auxiliando os discentes, na abordagem e na formulação de conceitos, proporcionando uma qualidade na aprendizagem. O presente trabalho tem como público alvo os discentes e docentes com o propósito de facilitar o estudo da Geometria Espacial melhorando a percepção tridimensional devido a noção de profundidade através do óculo 3D anaglífico. O trabalho e de caráter exploratório e bibliográfico e é do tipo qualitativo, visando o estudo da Geometria Espacial com o uso do *software* Geogebra na abordagem de conteúdos e na formalização de conceitos. O Geogebra nos permite construir sólidos como o prisma, cilindro, pirâmide e o cone, que tem suas construções representadas neste trabalho. Dessa forma, essa ferramenta auxilia no desenvolvimento do aprendizado de forma direta tendo em vista melhoria na capacidade de relacionar e aprender conteúdos sobre Geometria Espacial e suas aplicações em diferentes contextos.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática, Ensino-aprendizagem, Recurso didático.

ABSTRACT: Currently Geogebra software has been helping students in approaching and formulating concepts, providing quality learning. The present work is aimed at students and teachers with the purpose of facilitating the study of Spatial Geometry by improving the three-dimensional perception due to the notion of depth through the anaglyphic 3D oculus. The work is exploratory and bibliographic and is of a qualitative type, aiming at the study of Spatial Geometry with the use of Geogebra software in the content approach and in the formalization of concepts. Geogebra allows us to build solids such as prism, cylinder, pyramid and cone, which have their constructions represented in this work. Thus, this tool helps in the development of learning directly in order to improve the ability to relate and learn content about spatial geometry and its applications in different contexts.

KEYWORDS: Mathematics education, Teaching-learning process, Didactic resource.

1 I INTRODUÇÃO

Em meio a tantos avanços tecnológicos é indispensável o uso das tecnologias em sala aula, pois na maioria das vezes a Matemática é apresentada de forma abstrata e sem o uso de recursos didáticos. Diante desta questão, é abordado no decorrer deste trabalho o estudo de alguns sólidos geométricos com o auxílio do *software* Geogebra. No estudo da Geometria Espacial, os alunos demonstram ter uma dificuldade na compreensão dos conceitos abordados pelo professor. Diante desta questão argumenta-se que o software Geogebra favorece esta percepção, pois permite visualizar a projeção em 3D dos sólidos facilitando a visualização de determinadas propriedades que dificilmente seriam obtidas utilizando quadro e pincel. Com a utilização do *software* é possível formalizar os conceitos da Geometria Espacial.

Um dos maiores problemas apontados pelos professores do ensino médio, é a dificuldade dos estudantes em visualizar as representações dos sólidos geométricos desenhados no quadro. Tendo em vista esta dificuldade foi elaborado o presente trabalho na intenção de auxiliar o professor no ensino da Geometria Espacial. É nesta perspectiva que segue o problema: de que forma recursos tecnológicos podem auxiliar os alunos a sanarem a dificuldade de conhecer propriedades e elementos da geometria espacial?

Pensando em algo que pudesse minimizar essas dificuldades ao ensinar o conteúdo de Geometria Espacial, surge o *software* Geogebra 5:0 versão beta que permiti a visualização da projeção 3D com a utilização de óculos anaglíficos, melhorando a visualização, devido ser possível enxerga a profundidade das figuras, como uma ferramenta para auxiliar os discentes a fixarem melhor os conteúdos. Pois os alunos construirão seus próprios conceitos referentes à matéria. As construções feitas pelos alunos com o auxílio do Geogebra visam possibilitar um maior aprofundamento dos conceitos formais, criar estímulos para uma aprendizagem significativa e favorecer o desenvolvimento da autonomia, transformando-os em agentes do seu próprio conhecimento.

As tecnologias nas aulas de Matemática, que vem sendo cada vez mais necessária em meio a tantos avanços tecnológicos, devido alguns pesquisadores revelarem que o ensino da Matemática vem regredindo com o passar dos anos, que as aulas tradicionais não satisfazem mais os novos alunos que vivem em um ambiente cada vez mais tecnológico.

A pesquisa tem caráter exploratório e bibliográfico e é do tipo qualitativo, visando o estudo da Geometria Espacial com o uso do *software* Geogebra na abordagem de conteúdos e na formalização de conceitos. A pesquisa foi distribuída em quatro etapas: estudo da Geometria Espacial, estudo do *software* Geogebra, aplicação dos conceitos de Geometria Espacial no *software* Geogebra, análise e resultados das vantagens obtidas com o auxílio do *software* Geogebra. Com base nas teorias dos autores Dolce e Pompeo (1997) e Lima et al. (2006) que definem os conceitos de Geometria Espacial mostrando possíveis aplicações.

O objetivo é mostrar aos docentes e discentes como o *software* Geogebra pode facilitar o ensino da Geometria Espacial, melhorar a percepção tridimensional devido a noção de profundidade através do óculo 3D anaglífico.

2 I O USO DAS TECNOLOGIAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Tecnologia é uma palavra originada na Grécia: TEKNE (arte, técnica ou ofício) e LOGOS (conjunto de saberes), ou seja, possibilita as pessoas mudarem o meio no qual estão inseridas, trazendo facilidades no modo de vida. É conceituada como um conjunto de instruções técnicas ou práticas.

Segundo Ferreira (2013), começou a se falar de tecnologia no processo de ensino aprendizagem no final da década de 70, nessa época os professores pensaram que iriam perder seu emprego, que a máquina iria substituir o homem. Tinham esse ponto de vista porque em vários campos, as pessoas estavam sendo demitidas por causa dos avanços tecnológicos.

Com o passar dos anos percebeu-se que isso não era possível, mas que os docentes poderiam utilizar esses recursos como aliados em suas aulas. Depois que aconteceu a revolução tecnológica no século XXI, ficou mais difícil viver sem as tecnologias em nosso dia a dia, essa ferramenta tornou-se indispensável aos seres humanos. E no ensino da Matemática não poderia acontecer o contrário, pois o ensino de Matemática e tecnologia na maioria das vezes seguem caminhos distintos. Observou-se a necessidade de transformação, pois o ensino não poderia ficar para trás em meio a tantos avanços. Com o auxílio das novas tecnologias o professor deixa de ser transmissor do conhecimento e passa a ser mediador deste conhecimento.

A sociedade em que vivemos encontra-se em constante transformação, já o ensino da Matemática, segundo Perius (2012), no país e no mundo encontra-se em crise, devido aos avanços tecnológicos, estes exigem cada vez mais dos professores uma formulação no seu método de ensino. Deve haver aprendizagem do aluno dentro do contexto em que ele estar inserido. Enquanto docentes ministram aulas no quadro com pincel e régua de madeira, os estudantes trocam mensagens em redes sociais, com *Smartphones* e *notebooks* de última geração.

Conforme Ferreira (2013), Mueller (2013) e Perius (2012), para que haja uma aprendizagem significativa é necessário que os professores estejam capacitados e dispostos a encarar o uso das novas tecnologias sem medo de serem substituídos por elas.

A utilização das tecnologias deixam os docentes motivados quando estes percebem que podem otimizar o tempo ao preparar suas aulas, ao usarem softwares e jogos, por exemplo, devem apenas verificar se os objetivos alcançados com os *softwares* condizem com a aula que ele iria ministrar de forma tradicional. Estes também não precisam preocupar-se com impressão de material e em arquivar esse material de forma que não venha a perdê-los futuramente. Além de trazer motivação para os discentes, dado que um dos maiores desafios enfrentados pelos professores é ensinar um aluno que não tem motivação para aprender.

As escolas e docentes devem fazer das tecnologias aliadas no processo de ensino aprendizagem de Matemática. Conforme Perius (2012), o uso de software de geometria dinâmica na construção de figuras pode auxiliar os alunos a compreenderem os conceitos e propriedades das figuras geométricas, dificilmente entendidas em um simples desenho no quadro. Ainda segundo o mesmo autor a internet pode ser um instrumento expressivo na Matemática, pois possibilita acesso a materiais diferenciados como: imagens, músicas, vídeos que auxiliam na construção do conhecimento.

2.1 Funcionalidade da Tecnologia 3D

A visualização 3D que vemos nos cinemas e nas TVs são diferentes das imagens 3D, estas expressando largura, altura e profundidade, já a visualização 3D pode ser simulada de varias formas. Na fotografia e no desenho, ela se chama perspectiva. Quando uma coisa salta para fora é uma simulação Estereoscópica, imagens sobrepostas feitas conforme (DICIO, 2017), em um "instrumento de óptica no qual duas imagens planas, superpostas pela visão binocular, dão impressão de uma única imagem em relevo”.

Veja (2017) o professor Yuzo Iano, da faculdade de engenharia elétrica e de comunicação da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), explica que isso ocorre devido o cérebro achar que está vendo duas perspectivas distintas de uma mesma imagem.

> Tudo começou quando o cientista Kepler, em 1611, publicou um artigo explicando o fato do cérebro humano mesclar duas imagens diferentes para produzir a percepção dos 3 eixos do campo tridimensional. [...] Nossos olhos não olham para frente, como muitos pensam, e sim em uma diferença de eixos que nos proporciona duas visões diferentes de um mesmo plano. Ou seja, nosso olho direito está um pouco inclinado para esquerda, enquanto o nosso olho esquerdo está inclinado para a nossa direita. (GEN1GENESIS, 2008).

A disposição dos nossos olhos ao ver as imagens pode ser percebida na Figura 1 abaixo.

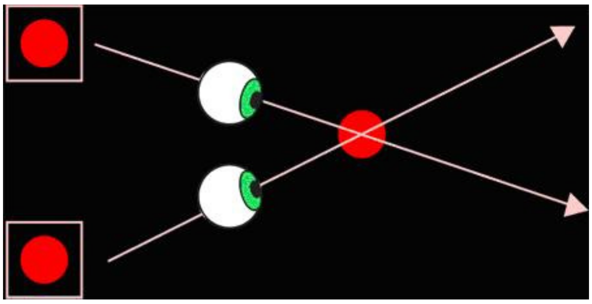


Figura 1 – Disposição dos olhos

Fonte: <http://4.bp.blogspot.com/_Z3UamIw9Xos/SN2i1ETcS8I/AAAAAAAAAEE/c_13cMS-vXM/s1600/olho+em+3d.JPG> Acesso em 06/08/2019

Ainda segundo Gen1genesis (2008), o cérebro verifica as duas imagens que chegam ao mesmo tempo atrás do ponto de convergência, que é definido pelo cérebro como ponto zero, a sensação de próximo e longe criada na fusão das duas imagens.

No mercado Existem quatro tipos de 3D: anaglífico, ativo, passivo ou polarizado e barreira de paralaxe. O ativo oferece uma melhor qualidade das imagens, pois são visualizadas com óculos de cristal líquido com baterias recarregáveis, é sincronizado a televisores através de conexão via *bluetooth*. Os óculos bloqueiam a visão e os olhos veem as imagens em momentos distintos. Já o 3D passivo é mais acessível ao consumidor e é a mesma tecnologia adotada nos cinemas, tanto o televisor como os óculos são mais baratos. Suas lentes têm cor cinza e há uma maior fidelidade das cores. Os óculos anaglifos são óculos especiais que filtram as imagens, sua lente direita pode ser azul ou verde e a esquerda vermelha. A imagem na cor azul não é vista pelo filtro de mesma cor, mas é vista como vermelha indo cada imagem para seu olho correspondente, conforme podemos observar na Figura 2.

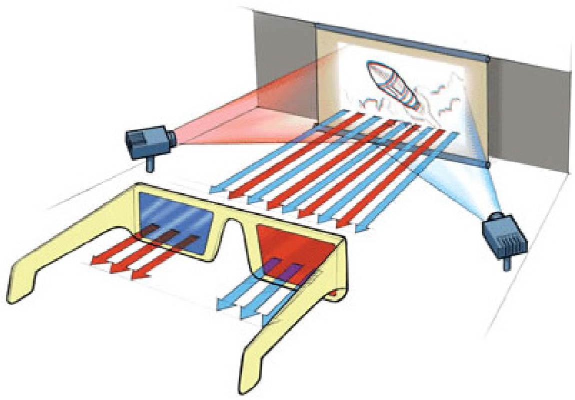


Figura 2 – Óculos 3D anáglifo

Fonte: <http://www.pisitoenmadrid.com/blog/wp-content/uploads/2010/07/gafas-3d-rojo-azul.jpg> Acesso em 06/08/2019

A Figura 2 mostra a projeção de duas cenas de angulação distintas, que são bloqueadas conforme seu ângulo, que pode ser contra luz, polarização linear, as imagens vistas em linha e circular, as imagens são bloqueadas em qualquer uma das direções.

Pessoas incapazes de enxergar a projeção 3D podem obter essa capacidade através de terapia para os olhos, a terapia irá sincronizar os olhos, fazendo com que a pessoa assista a projeção 3D sem nenhum problema.

2.2 Geogebra e projeção para óculos 3D

A versão 5:0 do Geogebra lançada em 2014 utilizada como objeto de estudo neste trabalho traz uma novidade: a opção de projeção para óculos 3D anaglifo. Esta versão possibilita o trabalho de conteúdos que necessitem de uma visualização tridimensional.

Conteúdos como a Geometria Espacial podem ser bastante difíceis de serem compreendidos observando apenas imagens em livros didáticos e desenhos no quadro. Esses recursos trazem apenas visualização de imagens estáticas perdendo a noção de profundidade e posicionamento. Para Campos et al.(2015, p. 2), "se há figuras tridimensionais, há a necessidade de observá-las assim como são, evitando uma caracterização plana", por isso se faz necessário o uso de recursos tecnológicos, como a projeção para óculos anaglifos do software Geogebra que permite a visualização completa do espaço tridimensional. Observe na Figura 3 uma a projeção em 3D de um cubo construído no software Geogebra.

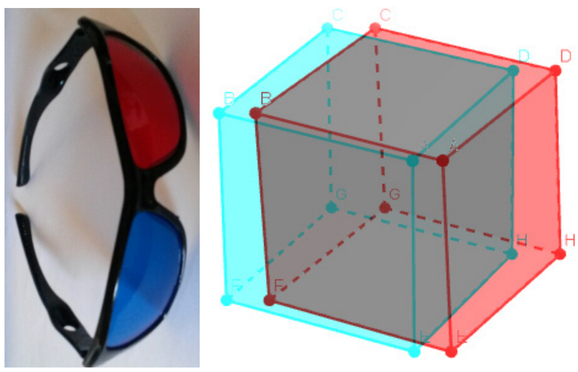


Figura 3 – Visualização do cubo com óculos 3D no Geogebra

Fonte: Elaborado pelos autores.

As projeções em 3D que o software possibilita tornam a compreensão dos conceitos matemáticos mais acessíveis, uma vez que esta projeção pode ser manipulada permitindo aos estudantes testarem e tirarem suas próprias conclusões sobre o assunto estudado.

Segundo (OLIVEIRA, 2016, p. 50):

> A utilização de novas tecnologias, mais especificamente a utilização de anaglifos aliada ao uso do software Geogebra para o ensino de Matemática pode, se bem conduzida, levar o aluno a fazer Matemática, descobrir através de suas experiências e simulações, relações e conceitos matemáticos importantes para o seu crescimento. A visualização de figuras tridimensionais que poderia ser um

> obstáculo passa a ser motivador da aprendizagem, pois o uso dos anaglifos além de eficaz, seduz o estudante trazendo um atrativo já conhecido por eles nos jogos eletrônicos e nos cinemas que é a visão 3D.

É nessa perspectiva que a visualização 3D torna-se uma importante aliada do aluno no estudo de objetos tridimensionais.

3 I O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

O estudo da Geometria no Brasil teve início no século XX e era baseado no pensamento lógico dedutivo. Na década de 50 quando surgiu a Matemática moderna a Geometria deixou de fazer parte do currículo dando lugar a Álgebra vetorial à Teoria dos Conjuntos. Tendo retorno somente no ano de 1998 quando o Ministério da Educação (MEC) publica os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), onde o ensino é abordado fazendo construções com instrumentos de desenho, como régua e compasso, conforme é relatado no trabalho de Parise e Villwock (2013).

A Geometria Espacial está presente na vida de todos e tem uma enorme relevância na vida em sociedade, porém os estudantes apresentam dificuldades na aprendizagem deste conteúdo, pois é abordado de forma estática com desenhos no quadro que não facilitam a visualização dos elementos espaciais.

Os estudantes são familiarizados apenas com aplicações diretas, ou seja no cálculo de áreas e volumes onde eles utilizam apenas fórmulas prontas, quando se deparam com situações mais elaboradas apresentam uma certa dificuldade em compreender e resolver a situação.

> Os alunos muitas vezes não se interessam pelos métodos tradicionais de aprendizagem que se tornaram, ao longo do tempo, desmotivantes em relação aos recursos tecnológicos que passaram a fazer parte da vida dos adolescentes inseridos no processo de globalização que traz a informação de forma instantânea. (SILVA, 2013, p. 12)

Quando os estudantes tem a possibilidade de manipular figuras, eles podem entender o porquê das fórmulas e representações, diminuindo as dificuldades encontradas no estudo da Geometria Espacial.

4 I O *SOFTWARE* GEOGEBRA

O Geogebra foi criado por Markus Hohenwarter em sua tese de doutorado no ano de 2001, sendo a visualização 3D com óculos anaglífico disponibilizada somente no ano de 2014. O *software* visa o trabalho com a Matemática através da construção de objetos e analise dos mesmos.

> Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300000 downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de ***software*** educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo. (PUC-SP, 2017, p. 1).

Os diversos tipos de visualizações é um diferencial deste material que possui janela de álgebra, janela de visualização 2D, 3D, projeção para óculos 3D, calculadora de probabilidade, planilha, protocolo de construção, teclado e janela CAS, 1 Observe na Figura 4 a interface do *software* Geogebra.

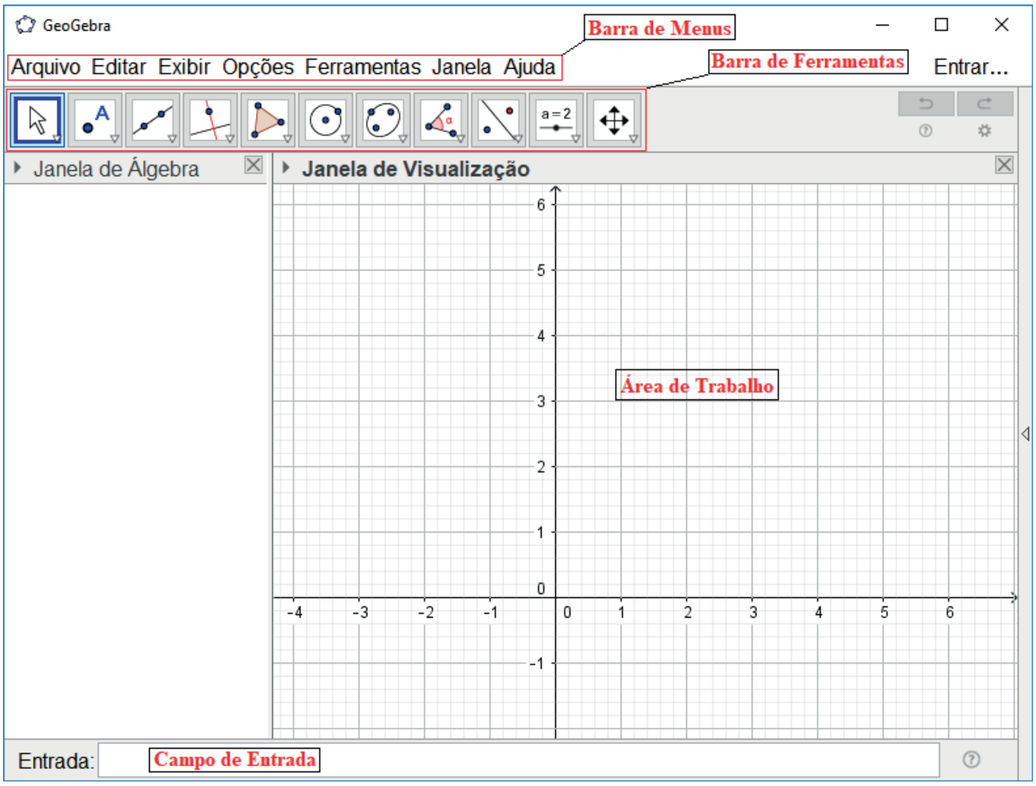


Figura 4 – Interface do *software* Geogebra

Fonte: Elaborado pelos autores.

O *software* Geogebra é um aplicativo gratuito, classificado como *software* de geometria dinâmica livre e de multiplataforma. Tem por finalidade o aprendizado e pode ser usado como auxílio nas aulas de Geometria Espacial. O Geogebra possibilita a manipulação no computador de sólidos geométricos de várias formas. Com ele é possível visualizar de diferentes modos os diversos tipos de sólidos, pois podemos rotacionar o sólido, tendo uma visualização ampla de todos os seus ângulos. Podemos também utilizar a projeção para óculos 3D do tipo anaglífico além de visualizar a planificação dos mesmos.

5 I O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL COM AUXILIO DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Atualmente os *softwares* de geometria dinâmica vêm auxiliando os discentes, na visualização e formulação de conceitos, proporcionando melhora no ensino aprendizagem. O *software* Geogebra é uma alternativa de recurso tecnológico que tem a possibilidade de promover o raciocínio matemático.

O Geogebra vem com a função de auxiliar o professor da disciplina, visando um melhor desenvolvimento cognitivo dos discentes, pois o *software* possibilita visualizar de várias formas a mesma figura, motivando os alunos na construção do seu próprio conhecimento.

O *software*, por ser gratuito e de fácil utilização, pode ajudar no estudo da Geometria Espacial no ensino médio e superior, na maioria das vezes apresentada de forma abstrata, sem que haja interação dos estudantes com a disciplina, deixando-os cada vez mais desmotivados e sem interesse de aprender o conteúdo.

O uso do Geogebra pode contribuir no ensino-aprendizagem dos licenciandos, pois os discentes podem manipular as construções feitas, além de ter autonomia para fazer novas construções, tornando-se construtores dos seus conhecimentos.

De acordo com Maia (2015), o uso de do Geogebra pode facilitar a passagem da Geometria Plana para a Geometria Espacial, além de trazer uma compreensão do mundo em 3D.

O *software* traz como ferramenta principal a possibilidade de girar as construções feitas em qualquer direção além da projeção para óculos 3D anaglífico, facilitando a visualização de suas faces, arestas, vértices e diagonais, quando existirem. Os sólidos trabalhados foram o prisma, cilindro, pirâmide e cone. Observe a seguir a representação da projeção 3D destes sólidos:

Definição de Prisma

É denominada de **prisma** a região de todos os segmentos de reta paralelos a reta dada com uma das extremidades no polígono e a outra no plano superior. Veja na Figura 5 a representação de alguns prismas e a planificação do prisma hexagonal.

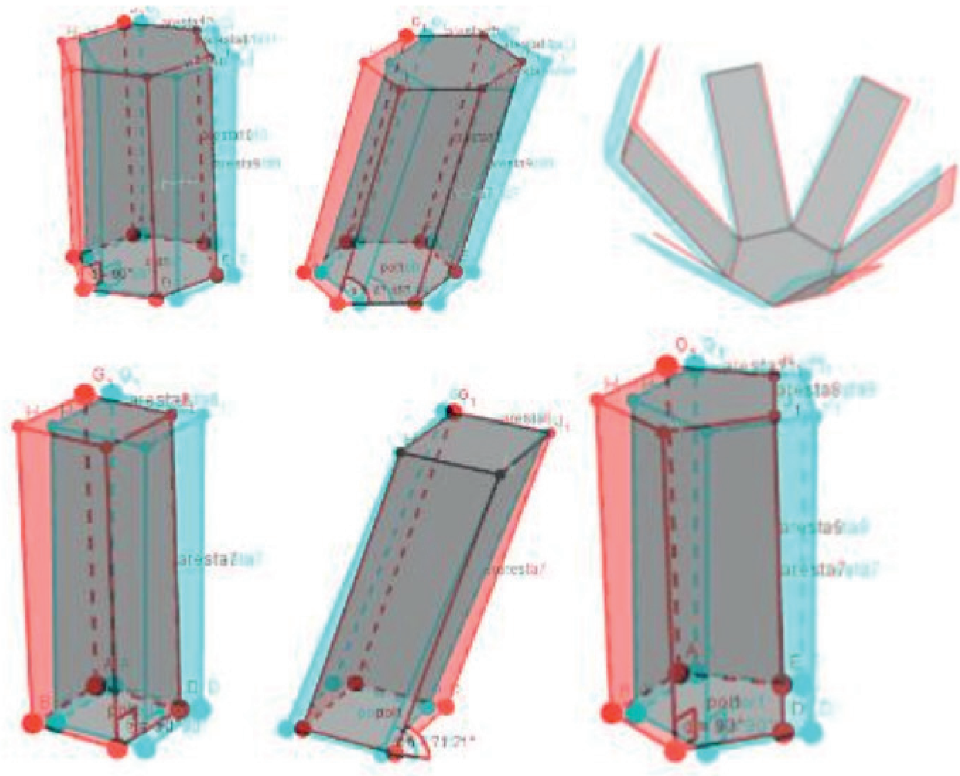


Figura 5 – Representações de Prismas

Fonte: Elaborado pelos autores.

Definição do Cilindro

Suponha dois planos distintos e paralelos, um círculo de raio dado, contido no plano inferior e uma reta pertencente ao plano. Chamamos de cilindro, a reunião de todos os segmentos paralelos e congruentes a reta com uma extremidade no círculo e outra extremidade no plano superior. Veja na Figura 6 representações de Cilindros e sua planificação.

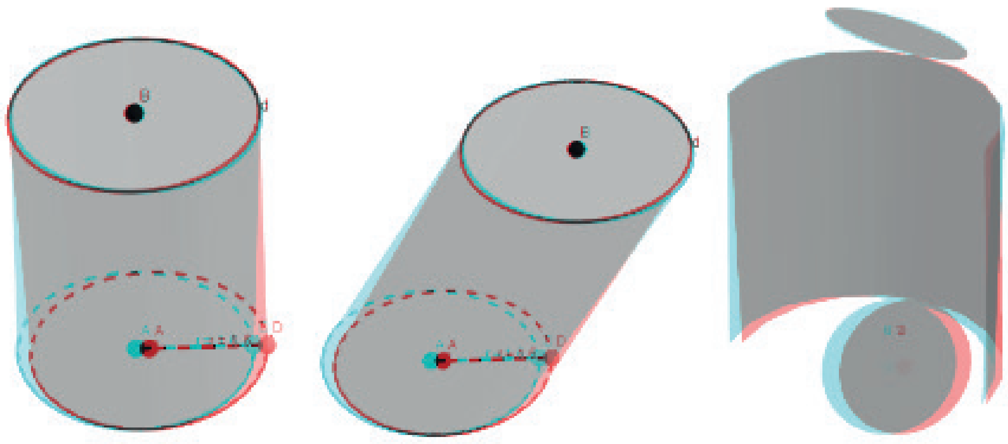


Figura 6 – Representações de Cilindros

Fonte: Elaborado pelos autores.

Definição de Pirâmide

Considere um plano e um polígono convexo contido no plano e um vértice fora do plano. A pirâmide é formada pelo conjunto de segmentos de reta com uma extremidade no vértice e outra em um ponto do polígono. Veja a seguir representações de pirâmides e a planificação de uma pirâmide de base quadrada na Figura 7.

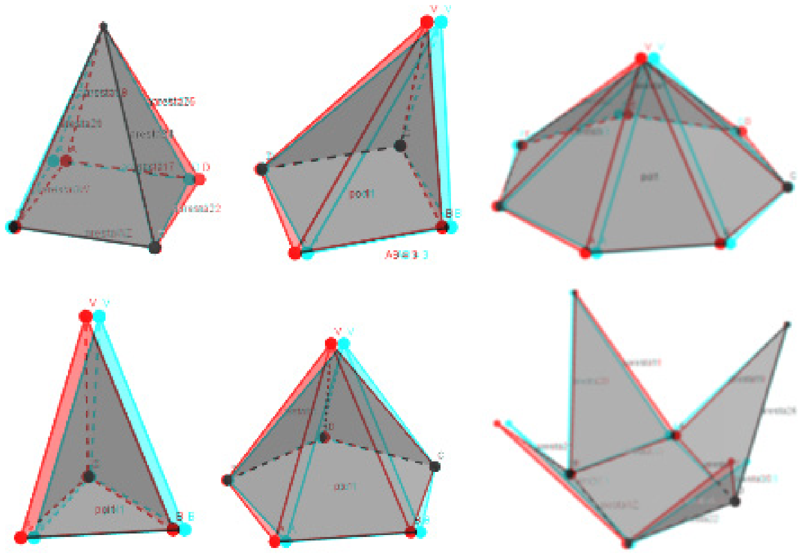


Figura 7 – Representações de Pirâmides

Fonte: Elaborado pelos autores.

Definição de Cone

Considere um plano, um círculo de centro contido nele e um ponto não pertencente a ele. Chamamos de cone, o conjunto de todos os segmentos com uma extremidade no círculo e a outra extremidade no ponto não pertencente ao círculo, veja na Figura 8 a representação de cones e sua planificação:

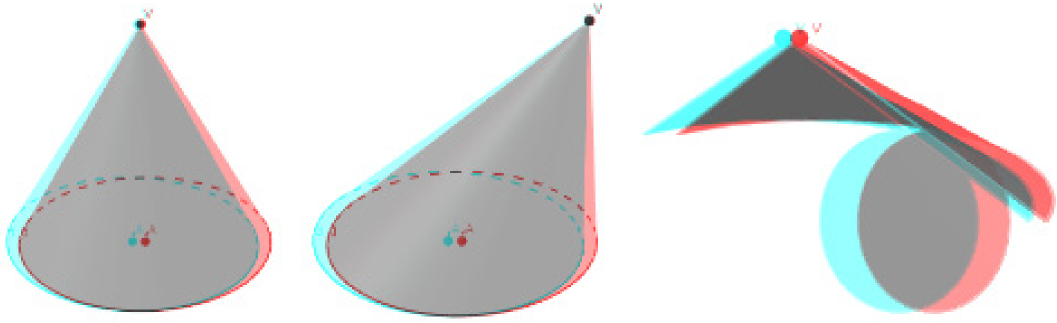


Figura 8 – Representações de Cones

Fonte: Elaborado pelos autores.

Foi verificada facilidade tanta na construção como manipulação dos objetos construídos.

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi observado que essa ferramenta possui algumas diferenças dos demais *softwares*, uma vez que este é gratuito e pode ser baixado facilmente da internet. Seu uso contribui no ensino-aprendizagem dos licenciandos, pois os discentes podem manipular as construções feitas e utilizar óculos anaglifos para visualizar a projeção 3D dos sólidos, além de ter autonomia para fazer novas construções.

A projeção 3D fornece uma melhor visualização e compreensão dos sólidos estudados, podendo também facilitar o estudo de áreas e, no caso da superfície a planificação que o Geogebra disponibiliza. Facilita a abordagem do conteúdo de Geometria Espacial, pois segundo dados bibliográficos a maior dificuldade dos discentes é visualizar objetos tridimensionais, e da maioria dos docentes, conseguir representar no quadro estes sólidos, com o *software* os professores não precisarão mais desenha-los, somente orientar os alunos a construírem seus sólidos no Geogebra.

O uso do *software* Geogebra aliado a materiais concretos e ao livro didático auxilia na apresentação do conteúdo, no desenvolvimento do aprendizado de forma direta, tendo em vista melhoria na capacidade de relacionar e aprender conteúdos de Geometria Espacial e suas aplicações em diferentes contextos.

A utilização do *software* Geogebra pode minimizar o tempo gasto na conceituação do conteúdo de Geometria Espacial e o desinteresse dos estudantes. Este permite uma melhor visualização devido a percepção de profundidade e manipulação dos objetos criados pelos próprios discentes, podendo eles testar, explorar e fazer. Mas o *software* sozinho não ajudará os alunos, é necessário que docente instigue-os e questione-os. Por este motivo é apresentado aos professores e alunos o *software* Geogebra que permite trabalhar os conceitos de Geometria Espacial, podendo afirmar que o Geogebra pode permitir que os estudantes desenvolvessem seu raciocínio matemático.

REFERÊNCIAS

Estereoscópio. In: DICIO, Dicionário Online de Português. Porto: 7Graus, 2018. Disponível em: <https://www.dicio.com.br/estereoscopio/>. Acesso em: 10 abr. 2017.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar 10.** 5. ed. São Paulo: Atual, 1997.

FERREIRA, Fernanda Pires. **Uso das TIC nas Aulas de Matemática na Perspectiva do Professor.** 2013. 68 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2013.

GEN1GENESIS. **ANAGLIFOS: Saindo do papel com óculos 3d.** 2008. Neide Costa. Disponível em: <http://gene1genesis.blogspot.com/2008/09/anaglifos-saindo-do-papel-com-culos-3d.html>. Acesso em: 06 ago. 2019.

Laboratório de Matemática: **uma análise sobre o uso das novas tecnologias no ensino de matemática numa escola rural do Município de Escada-PE, tecnologia, modernidade**. 2017. Disponível em: <http://monografias.brasilescola.uol.com.br/educacao/ laboratorio-matematica-uma-analise-sobre-uso-das-novas-.htm>. Acesso em: 25 jun. 2017.

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio - volume 1.** 11. ed. São Paulo: SBM, 2006. 237 p.

MAIA, Marcelo Batista Pascoal. **Uso dos softwares construfig3d, poly, geogebra e sketchup nas aulas de geometria espacial.** 2015. 99 f. Dissertação (Mestrado) – PROFMAT-UFC, Fortaleza, 2015.

MUELLER, Liliane Carine. **Uso de Recursos Computacionais nas Aulas de Matemática.** 2013. 117 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, Univates, Lajeado, 2013.

OLIVEIRA, Emerson Ferreira de. **ANAGLIFOS: Geometria Espacial Sob Outra Perspectiva.** Dissertação (Mestrado) - PROFMAT-UFBA, Salvador - Bahia, 2016.

PARISE, Giovana. **Geometria Espacial: Possibilidades de Ensino.** Unidade Didática produzida na Universidade Estadual do Oeste do Paraná sob a orientação da Prof. Rosangela Villwock – Flor da Serra do Sul – PR: 2013.

PERIUS, Ana Amélia Butzen. **A Tecnologia Aliada ao Ensino de Matemática.** 2012. 55 f. Monografia (Especialização) - Curso de Mídias na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Cerro Lago, 2012.

PUC-SP - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. **Sobre o Geogebra.** 2017. Disponível em: <https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html>. Acesso em: 25 jun. 2017.

SILVA, Alex Reis da. **Uma Proposta para o Ensino de Geometria Espacial Métrica para o Ensino Médio.** 2013. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2013.

VEJA, Revista. **Entenda como funciona a tecnologia por trás das TVs 3D.** 2017. Claudia Tozetto. Disponível em: <https://veja.abril.com.br/tecnologia/entenda-como-funciona-a-tecnologia-por-tras-das-tvs-3d/>. Acesso em: 25 jun. 2017

CAPÍTULO 29

O USO DE SOFTWARES EDUCACIONAIS COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS

Cristiane Batista da Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO
Paraíso do Tocantins – TO

Aécio Alves Andrade
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO
Paraíso do Tocantins – TO

Hudson Umbelino dos Anjos
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO
Paraíso do Tocantins – TO

Jarles Oliveira Silva Nolêto
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO
Paraíso do Tocantins – TO

RESUMO: As vivências no âmbito educacional têm ocasionado reflexões, de modo a aprimorar o mesmo. Na Matemática, as funções comumente são postas diante dos alunos mediante abordagem tradicional, na qual, muitas vezes, este *método não é suficiente para* tornar a aprendizagem de fato significativa. Assim, em contraste com a presença das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação e em vista das dificuldades ocasionadas no processo de ensino e aprendizagem das funções Matemáticas, este trabalho tem por finalidade ressaltar as contribuições que o os *softwares* educacionais podem propiciar ao ensino e a aprendizagem das funções. A pesquisa é de abordagem qualitativa do tipo bibliográfica, em que se utiliza de outros autores para evidenciar tais contribuições. Desse modo, o objetivo fora atingido com êxito, indicando que os *softwares* educacionais proporcionam aos alunos a construção autônoma de seu próprio conhecimento.

PALAVRAS–CHAVE: Ensino-Aprendizagem; Funções; Software.

THE USE OF EDUCATIONAL SOFTWARE AS AN AUXILIARY TOOL IN THE TEACHING OF MATHEMATICAL FUNCTIONS.

ABSTRACT: The experiences in the educational field have caused reflections in order to improve the same. In mathematics, functions are commonly put before students through a traditional approach, in which this method is often not enough to make learning meaningful. Thus, in contrast to the presence of Digital Information and Communication Technologies and in view of the difficulties caused in the process of teaching and learning of mathematical functions, this paper aims to highlight the contributions that educational software can provide to teaching and learning. of the functions. The research is a qualitative approach of the bibliographic type, which uses other authors to highlight such contributions. Thus, the goal was successfully

achieved, indicating that educational software provides students with the autonomous construction of their own knowledge.
KEYWORDS: Teaching-Learning; Function; Software.

1 I INTRODUÇÃO

Na atualidade, é simples perceber o quanto as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) têm favorecido o dia-a-dia das pessoas, onde a praticidade e a otimização de tempo que estes recursos proporcionam é tão grande, que se tornou difícil não utilizá-los.

Apesar das tecnologias transformarem com suas inovações as mais variadas áreas do conhecimento, a prática docente, em muitos casos, parece continuar do mesmo modo que estava há décadas atrás: com um ensino passivo, na qual os alunos apenas recebem as informações que são transmitidas pelo professor.

Na Matemática, no caso especifico das funções, este modelo de ensino também se faz presente, na qual muitas vezes não atua de maneira eficaz, onde os alunos simplesmente decoram as fórmulas e definições, atitude que gera dúvidas e dificuldades na hora de aplicar o conteúdo. Assim, a falta de entendimento necessário acerca do conteúdo implica no desenvolvimento do sentimento de desprezo pela Matemática, fazendo com que a considerem muito complexa e, na maioria das vezes, resulte na reprovação dos mesmos.

As vivências no contexto educacional têm gerado reflexões acerca do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, especialmente, no que se refere ao conteúdo de funções, com a intenção de estabelecer melhorias para o mesmo. Entretanto, é perceptível que o uso das TDIC vem trazendo possibilidades e oportunidades de melhorias para muitos setores e, dentre eles, a Educação, mais especificamente a disciplina de Matemática, campo onde o uso das TDIC pode compor um instrumento didático de importante valia para a prática docente, acarretando em um novo modo de ensinar e de aprender.

Dentre os recursos oferecidos pelas TDIC, tem-se a possibilidade de usar os *softwares* educacionais como um objeto didático no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática. Assim, este trabalho tem por objetivo evidenciar as contribuições que tal recurso pode trazer ao processo de ensino e aprendizagem das funções, de modo a proporcionar ao professor uma nova via para a abordagem deste conteúdo.

2 I DELINEAMENTO METODOLOGICO

Este artigo desenvolveu-se mediante pesquisa bibliográfica de abordagem qualitativa, com o propósito de ressaltar a importância da utilização de *softwares* educativos tanto para o ensino como para a aprendizagem das funções Matemáticas.

O levantamento bibliográfico, em parte, originou-se da banca de dissertações do PROFMAT – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, sendo alguns outros trabalhos de autores que também discutiram, em suas pesquisas, o uso das tecnologias e/ou o uso dos *softwares* educacionais, no paradigma educacional.

Primeiramente, examina-se o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação a fim de compreender o panorama de sua inserção no contexto educacional, em especial, no contexto da educação Matemática.

Posteriormente, discute-se o processo de ensino e de aprendizagem das funções Matemáticas e, por fim, em vista da gama de possibilidades que as TDIC oferecem ao ensino da Matemática, buscou-se salientar, através de outras pesquisas e estudos já realizados, o auxílio que o uso dos *softwares* educacionais pode propiciar ao ensino e à aprendizagem das funções Matemáticas.

3 I AS TECNOLOGIAS DIGITAIS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO E O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

A abordagem metodológica de ensino atual ainda é marcada, em muitos casos, pelo uso em excesso de aulas expositivas. Tal abordagem ainda é muito utilizada em grande parte das escolas brasileiras que, no caso da Matemática, é caracterizada pela memorização excessiva de fórmulas e teoremas, além da resolução de grandes listas de exercícios. Dessa maneira, a educação é centrada no professor, que transmite uma informação ou algoritmo ao aluno que, por sua vez, decora e repete. Paulo Freire (2011) denomina este método de ensino de “educação bancária”, em vista de que o professor é tomado pelo hábito de “depositar” informações na mente do discente, sendo este impedido de participar da construção do seu próprio saber.

Lorenzato (2006) afirma que ministrar aulas é diferente de ensinar, visto que ensinar é propiciar condições para que o discente construa seu próprio conhecimento. Pereira (2015) destaca que a prática docente deve estar em constante atualização, a fim de tornar o ensino e a aprendizagem não somente um processo de caráter atualizador, mas também motivador, não somente para os professores, mas também para os alunos.

Os métodos empregados ao ensino da Matemática devem estar interligados à realidade que alunos vivem para que possam fazer sentido para os mesmos, assim, é de responsabilidade do professor examinar sua prática docente de modo a atualizá-la constantemente, (LORENZATO, 2006), buscando, através de novos métodos e estratégias, se reinventar, de forma que tais métodos e estratégias impliquem em melhorias no ensino e na aprendizagem.

Por outra perspectiva, as TDIC tornaram-se parte da vida das pessoas, imersas em suas rotinas, onde o acesso às novas tecnologias provocou alterações no modo pela qual vivemos, modificando nossa maneira de pensar e compreender o espaço ao nosso redor.

Diante desta geração de jovens nascidos em meio a essa expansão tecnológica, Silva (2018) enfatiza que as práticas docentes tradicionais tornam-se insignificantes e desprovidas de prazer, fato que resulta em alunos desinteressados e professores com dificuldades para ensinar.

A metodologia que comumente é empregada no ensino da Matemática, em geral, é caracterizada pela grande ênfase nos cálculos, onde tal metodologia não tem acompanhado o desenvolvimento tecnológico da sociedade. O cotidiano tecnológico em que o aluno se encontra difere da realidade que ele vivencia na escola, realidade esta que elimina o uso das TDIC em suas práticas pedagógicas.

Entretanto, as TDIC concedem um leque de possibilidades para que o ensino e a aprendizagem tenham seu processo aprimorado e, em especial, no âmbito da Matemática. São muitos os recursos educativos proporcionados pelas TDIC, tais como televisão, vídeo, projetor, lousa digital, calculadoras, computador, entre outros; porém o computador, dentre os outros recursos tecnológicos, é o de maior destaque.

É importante ressaltar que o uso do computador no ambiente educacional não tem por objetivo torná-lo um objeto de estudo, mas sim um meio, diferente do fim, para adquirir conhecimento. Jesus (2013) destaca que a vantagem do computador, em relação aos demais recursos, está na sua interatividade, visto que este pode interagir com os demais recursos tecnológicos.

Valente (1998) afirma que “o computador deve ser utilizado como um catalisador de uma mudança do paradigma educacional [...] que promove a aprendizagem ao invés do ensino” (VALENTE, 1998, p. 49), fazendo com que o processo de aprendizagem encontre-se nas mãos do aprendiz, ocasionando a aprendizagem ao contrário do ensino, implicando na percepção de que a educação é uma construção de conhecimentos que se dá através do próprio educando.

Quando se fala em utilizar as TDIC no ensino, principalmente o computador, não implica em dizer que o método tradicional deve ser excluído, mas sim que é necessário aprimorar o mesmo, conciliando-o com os novos recursos oferecidos pela nossa geração tecnológica. Entretanto, estudiosos ressaltam que existe a necessidade de utilizá-lo de forma equilibrada, para que os objetivos da aula sejam atingidos com êxito, de modo que ela não se torne apenas uma aula diferente ou divertida.

Apenas o acesso ao computador não modifica, sozinho, o processo de ensinar e de aprender. Pesquisas realizadas por Gracias et al. (2000) ressaltam que as possibilidades de trabalhar com este recurso trazem novas perspectivas para a profissão docente, porém a implantação da tecnologia na prática docente exige um aperfeiçoamento profissional por parte do professor. Também é enfatizado que o uso de tal máquina traz motivação aos alunos, uma vez que apresenta dinamismo em seu uso. Desse modo, o ensino da Matemática com auxilio das TDIC faz com que a aprendizagem tenha autonomia, na qual o educando constrói seu próprio saber, sendo isso possível através das atividades investigativas propiciadas pelo computador.

Sabemos que um dos desafios do professor é induzir seus alunos a desenvolver a habilidade de se pensar matematicamente (SIDEL, 2015). Pereira (2015) ressalta que utilizar das tecnologias como objeto didático permite "estabelecer relações cognitivas abertas em que o individuo se permite errar e aprender com o erro, errar e não se sentir pré-julgado no seu erro, tentar novamente até aprender" (Pereira, 2015, p. 14). Dessa forma, o ensino da Matemática com apoio das TDIC oportuniza o desenvolvimento de novas habilidades com os quais os discentes podem se identificar e se orientar neste mundo de conhecimento, sendo capaz de tomar decisões através do pensamento matemático.

Portanto, considerando que a educação Matemática não deve limitar-se a transmissão e memorização de conceitos e que as possibilidades proporcionadas pelas TDIC vão além da simples transmissão de informações, é relevante utilizá-las associadas ás práticas pedagógicas, visando a participação dos discentes no processo de ensino e de aprendizagem e a autonomia do aluno, onde poderá participar da construção de seu próprio conhecimento, de modo a tornar-se um ser humano crítico, reflexivo, transformador do mundo e de si próprio.

4 I O ENSINO E APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES

O conceito de função, segundo Ponte (1990), é um dos mais relevantes da Matemática. O autor destaca que Galileu considerava a Matemática como sendo a linguagem certa para estudar a natureza. Isso se deve ao fato de que era necessário "medir grandezas, identificar regularidades e obter relações que tivessem tanto quanto possível uma descrição Matemática simples" (PONTE, 1990, p.5) e, dessa maneira, as funções tornavam-se instrumentos essenciais para o estudo de problemas de variação. Ponte (1990) ainda atribui três elementos que constituem uma formação primitiva do conceito de função: (a) a notação algébrica; (b) a representação geométrica e (c) a ligação com os problemas concretos do mundo físico; estes aspectos constituem de um valor importante para serem desenvolvidos durante o ensino das funções. Assim, apesar de que as funções, no passado, estarem ligadas apenas ás ciências físicas, hoje elas também são utilizadas no estudo dos fenômenos das mais variadas áreas de conhecimento e, principalmente, em situações comuns do nosso dia-a-dia.

Na educação básica, o conteúdo de funções é apresentado durante o Ensino Médio, estendendo-se, algumas vezes, até o Ensino Superior. Porém, devido à maneira pela qual é abordado, este conteúdo gera muitas dificuldades. Rocha, Poffal e Meneghetti (2015) acreditam que a teoria e o quadro não estão sendo instrumentos suficientes para a eficácia da aprendizagem de funções.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, o conceito de função propicia através da leitura, da interpretação e da construção de gráficos, a habilidade de estudar e compreender certos fenômenos do cotidiano. Portanto, fica a cargo da Matemática garantir que o discente tenha flexibilidade para lidar com as funções em diversas ocasiões.

Para que esta flexibilidade seja possível, as funções devem ser estudadas tendo como foco principal os seus contextos e aplicações, utilizando de situações problemas não somente da Matemática, como também de outros ramos do conhecimento, de modo a evidenciar que as funções também permitem analisar as mais variadas situações cotidianas. Além disso, utilizar de situações problemas implica em um discente investigativo, na qual constrói soluções com base no seu conhecimento acerca das funções e na habilidade de interpretação que é possibilitada pelo mesmo. Dessa maneira, as situações problemas enriquecem a abordagem das funções.

Em vista das possibilidades que as TDIC oferecem para a educação, acredita-se que o uso dos *softwares* proporcionaria uma melhor abordagem do conteúdo de funções, uma vez que permite ao discente uma ampla e enriquecida visualização de seus gráficos.

5 I O USO DE SOFTWARES EDUCACIONAIS COMO FERRAMENTA AUXILIAR NO ENSINO DAS FUNÇÕES MATEMÁTICAS.

Um *software* educacional é um sistema computacional e interativo que possui a finalidade de proporcionar a autoaprendizagem:

> Ao considerar as possibilidades de ensino com o computador, o que pretendo destacar é a dinamicidade desse instrumento que pode ser utilizado para que os alunos trabalhem como se fossem pesquisadores, investigando os problemas matemáticos propostos pelo professor construindo soluções ao invés de esperarem um modelo a ser seguido. (LIMA, 2009, p.36)

O ensino, estabelecido com auxílio do *software,* faz com que o professor deixe de ser aquele que transmite o saber para ser aquele que faz intermédio entre o programa e o aluno, orientando os saberes que os discentes pouco a pouco vão adquirindo através da investigação dos problemas propostos.

Existem *softwares* que contribuem para o ensino de muitos conteúdos matemáticos, inclusive, ao ensino de funções. Para este conteúdo em especial, há *softwares* que possibilitam a visualização daquilo que se está trabalhando através de, basicamente, dois diferentes pontos: do ponto de vista gráfico e do ponto de vista algébrico.

Dessa maneira, o professor pode trabalhar com atividades que contenham situações problemas envolvendo funções, de modo que o aluno encontre soluções para estas situações através de um novo método, desvendando e aprendendo novos conceitos durante este caminho. São várias opções que os *softwares* oferecem para facilitar o processo de ensino e aprendizagem das funções, inclusive, diversos pesquisadores e estudiosos já exibiram em seus trabalhos as vantagens e contribuições que os *softwares* proporcionam para o ensino e aprendizagem de tal conteúdo.

Inicialmente, ao se ensinar a construção dos gráficos das funções, os professores propõem a construção de uma tabela, atribuindo valores arbitrários para *x* e calculando os valores respectivos de *y*. Rocha, Poffal e Meneghetti (2015) sugerem que as planilhas de cálculo como, por exemplo, o Excel podem ser grandes aliados ao construir este tipo de tabela, além de também serem úteis para construir gráficos através das respectivas tabelas.

Os gráficos de funções que, muitas vezes, não são tão simples de serem compreendidos através de desenhos feitos no quadro pelo professor, podem ser melhores visualizados através dos *softwares* de visualização em duas dimensões, oportunizando aos alunos visualizar e investigar diversos aspectos do gráfico que os auxiliarão a compreender os conceitos que abrangem as funções.

Jesus (2013) realizou uma atividade com o *software* Winplot, onde os participantes construíram gráficos de diversas funções com diferentes coeficientes (números inteiros, fracionários ou na forma decimal), podendo proporcionar aos alunos a observarem a representação gráfica das funções, a analisarem as diferenças presentes nas representações gráficas das funções com diferentes coeficientes e a localizar a intersecção dos gráficos com os eixos do plano cartesiano, determinando suas coordenadas. O autor também propôs aos estudantes uma questão contextualizada que remete a uma situação do cotidiano e, através do *software* utilizado, os participantes inseriram o gráfico de duas funções, simultaneamente, podendo identificar o ponto de interseção entre as duas funções, visualizando assim as coordenadas deste ponto que era a solução do problema proposto.

Utilizando de um software, Paiva (2016) propôs atividades para ensinar as funções quadráticas. O autor sugere atividades que analisem a variação dos coeficientes "a", "b" e "c" de funções do tipo $ax^2 + bx + c$, avaliando o comportamento destes gráficos por meio da variação destes coeficientes. Ao fazer o coeficiente "a" variar, é possível que os discentes notem que quando $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima; com $a < 0$ a concavidade da parábola é voltada para baixo. Ao alterar o coeficiente "b" é possível para os discentes observar que o valor deste coeficiente possibilita identificar o ponto de intersecção com o eixo y na parte crescente ou decrescente da parábola de acordo com $b > 0$ ou $b < 0$ e, por fim, ao alterar o coeficiente "c" o gráfico da função é transladado para cima ou para baixo. Ou seja, através do *software* foi possível observar e estudar as diversas características que compõem as funções quadráticas.

Santos Neto (2017) realizou atividades com o *software* KmPlot para estudar o gráfico das funções. Antes de aplicar a atividade, o autor percebeu que existia nos alunos a dificuldade para construir os gráficos das funções, observando, ainda, a dificuldade dos mesmos em aprender os conteúdos de Matemática que teriam sido abordados de maneira tradicional nas salas de aula, entretanto, ao utilizarem do KmPlot para aprender funções, os alunos atingiram os objetivos esperados das atividades com facilidade.

Sá e Machado (2017) afirmam que o *software* Geogebra aplicado ao ensino das funções motiva os discentes ao aprendizado, fazendo-o associar, de maneira simples, o cálculo à representação gráfica. De acordo com os autores, com este *software* o aluno tem a possibilidade de construir, interpretar, manipular gráficos, o que permite uma melhor compreensão das relações existentes nestes gráficos.

Existe ainda possibilidade de trabalhar com as funções de forma interdisciplinar, envolvendo a geografia, física, química, economia, entre outros, para que seja evidente ao discente a sua utilidade em outras áreas do conhecimento, tornando as funções um conteúdo mais contextualizado e rico em significados. Zica (2013), por exemplo, utilizou de um *software* para trabalhar com a função seno. Percebendo que grande parte de seus alunos trabalhava com construção civil, o autor propôs uma atividade vinculada à rotina destes alunos: um problema relacionado à construção de uma rampa. Podemos, então, perceber que os *softwares* podem ser utilizados não somente para facilitar o ensino e a aprendizagem, mas também para revelar ao aluno as utilidades e os potenciais que uma função, até mesmo aliada aos *softwares,* possui.

Alves (2018) utilizou do *software* WxMaxima para incentivar o estudo do conceito de limites de funções reais, observando que os alunos apresentavam dificuldades em compreender o conteúdo que era ministrado através de aulas expositivas, porém, ao utilizarem do *software* para realizar seus estudos, os alunos conseguiram alcançar os objetivos das atividades propostas facilmente, tornando-as mais significativas, uma vez que os alunos conseguiram entender melhor o conteúdo proposto.

Torma (2018) utilizou o *software* Graphmatica para abordar conceitos básicos de funções trigonométricas. O autor considera que o conteúdo abordado através do *software* gerou motivação para os alunos, na qual permitiu aos alunos o descobrimento de resultados e formulação de suas próprias conjecturas. Através da resolução das atividades, os alunos foram capazes de interpretar os gráficos e explorar a resolução de problemas de forma diferenciada, investigando aspectos característicos de cada tipo de função.

Dessa maneira, utilizar de *softwares* que proporcionam a visualização gráfica amplia para o discente a sua percepção em relação a vários conceitos, viabilizando aos alunos construir seu próprio conhecimento e associá-los a outras áreas do conhecimento. Além disso, utilizar *softwares* que proporcionam a visualização e análise gráfica das funções contribui diretamente para o desenvolvimento da interpretação do discente, onde ao se deparar com gráficos durante situações rotineiras de sua vida saberá interpretar as situações que nele estão contidas.

Assim, é notável que o uso dos *softwares*, se bem utilizado, pode vir a ser um bom recurso de apoio no ensino das funções, indo além da mera memorização de conceitos, tornando as aulas mais dinâmicas, estimulando o a aprendizagem e diminuindo possíveis dificuldades dos alunos para apreender e, principalmente, propiciando aulas mais significativas, às quais os alunos aprendem em seu próprio ritmo, de modo investigativo. No ensino de funções através dos s*oftwares*, os alunos não se restringem á meros cálculos e decoração de fórmulas, uma vez que estes instrumentos proporcionam a visualização dos gráficos das funções e de seus grandiosos detalhes, que enriquecem o aprendizado. Além disso, os professores conseguem trabalhar com maior economia de tempo, visto que os *softwares* constroem rapidamente gráficos que muitas vezes exigem tempo e dedicação por parte dos professores para construí-los.

Os *softwares* constituem de uma tecnologia que ao serem associados às funções, têm a possibilidade de contextualizar e interligar os conhecimentos de todas as áreas, portanto, utilizá-los durante a resolução de situações problemas possibilita aos alunos solucionar os problemas de diferentes maneiras, induzindo-os a formularem hipóteses e testá-las, buscando soluções através da investigação. Ou seja, torna-se possível conectar os conhecimentos com suas aplicações de forma tecnológica, propiciando ao discente a capacidade, estudar possibilidades, tomar decisões e resolver problemas.

Também é possível lidar com o conceito de função estabelecido por Ponte (1990), uma vez que os *softwares* possuem o potencial de trabalhar com a notação algébrica, a representação gráfica e, principalmente, conectar o conteúdo de funções com problemas do mundo físico. Por exemplo, o professor pode propor problemas, na qual o aluno irá inserir uma função no *software*, utilizando da notação algébrica, em seguida irá visualizar seu gráfico que foi construído pelo programa e, por fim, os alunos investigarão, através do *software*, uma solução para determinada situação. Assim, aos poucos o estudante irá relacionar as funções ás situações do mundo físico, percebendo que este conteúdo está presente até nas mais simples atividades que desenvolvemos. Dessa maneira, é perceptível que o conceito de função é abordado como um todo e não de maneira fragmentada muitas vezes acontece.

Um aspecto importante é que os *softwares* também contribuem para que os professores possam tirar suas próprias dúvidas, quando houver, em relação ás funções. Outra possibilidade é na hora de elaborar provas: muitos professores retiram as figuras de gráficos da internet, porém, com os *softwares*, é possível que os professores construam seus próprios gráficos, adaptando-os às suas necessidades, possibilitando até desenvolverem suas próprias questões, o que é importante, uma vez que o professor é quem conhece o nível de dificuldade de seus alunos e, assim, poderá formular questões que se adequem ao nível de conhecimento da classe.

Entretanto, é importante ressaltar que de nada adianta levar os alunos até a sala de informática, lhes dar uma quantidade de exercícios e deixar que os resolvam sozinhos através do *software*. Para que a aprendizagem de fato aconteça, é necessário que ela seja mediada pelo professor, onde o mesmo atuará como um orientador, e que o uso dos *softwares* seja, além de dinâmico, desafiador, despertando o interesse do discente de modo a levá-lo a um crescimento intelectual.

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em meio às alternativas oferecidas pelas tecnologias para aprimorar a educação Matemática estão os *softwares*, instrumento que tem sido amplamente estudado como recurso didático para o ensino de diversos conteúdos matemáticos, principalmente, as funções.

A utilização deste recurso pode em muito contribuir para o processo de ensino e de aprendizagem das funções, acarretando em uma aula mais dinâmica e atrativa, possibilitando ao aluno investigar os conceitos, dando-lhe a oportunidade de participar de seu processo de aprendizagem, de se tornar um humano crítico, capaz de refletir sobre os problemas aos quais se depara ao logo de sua vida, analisando-os e tomando importantes decisões acerca dos mesmos, evitando assim a “educação bancária”, na qual o professor deixa de ser um mero transmissor de conteúdos para ser um mediador e/ou orientador do saber na qual os discentes estarão adquirindo.

Por intermédio deste trabalho, tornou-se possível tomar conhecimento das contribuições que o uso dos *softwares* pode trazer tanto para o ensino como para a aprendizagem das funções. Espera-se que os professores incluam os *softwares* em suas metodologias e práticas docentes, tendo em mãos uma nova forma de ministrar o conteúdo de funções e, ainda, que este seja um instrumento didático que venha a acrescentar na aprendizagem dos alunos, tornando os conteúdos mais legíveis, as aulas mais dinâmicas e atrativas e os alunos mais motivados e interessados, que consigam enxergar o real significado de se estudar as funções Matemáticas.

REFERÊNCIAS

ALVES, Leopoldo José. **Estudo do conceito de limites de funções reais no ensino médio: uma proposta de atividades utilizando o software WxMaxima**. 2018. 121 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Matemática, Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150300111>. Acesso em: 20 mar. 2019.

ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcini de; VALENTE, José Armando. **Tecnologias e currículo: trajetórias convergentes ou divergentes?** São Paulo: Paulus, 2011. 93 p.

BRASIL, 2000. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio**. Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 02 fev. 2019

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido.** 50. ed. Rio de Janiero: Paz e Terra, 2011

GRACIAS, Telma S. et al. **A informática em ação.** São Paulo: Olho D'Água, 2000.

LIMA, Luciano Feliciano de. **Grupo de estudos de professores e a produção de atividades matemáticas sobre funções utilizando computadores.** 2009. 59 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática.** Campinas: Autores Associados, 2006.

SÁ, Adriana Lourenço de; MACHADO, Marília Costa. O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO

ESTUDO DE FUNÇÕES. **Anais do Encontro Virtual de Documentação em Software Livre e Congresso Internacional de Linguagem e Tecnologia Online**, [S.l.], v. 6, n. 1, jun. 2017. ISSN 2317-0239. Disponível em: <http://www.periodicos.letras.ufmg.br/index.php/anais_linguagem_tecnologia/article/view/12142>. Acesso em: 10 maio 2019

VALENTE, José Armando (Org). **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.

VALENTE, José Armando (Org.). **Computadores e Conhecimento: Repensando a educação.** 2. ed. Campinas: Unicamp/nied, 1998. 501 p. Disponível em: <https://odisseu.nied.unicamp.br/wp-content/uploads/other-files/livro-computadores-e-conhecimento.pdf>. Acesso em: 06 mar. 2019.

JESUS, Sílvio Márcio Costa de. **Estudo das funções afins, quadráticas e equações polinomiais com o auxilio do software Winplot no ensino médio**. 110 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2013.

PAIVA, Marco Antônio Brito. **UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DO WINPLOT NO ENSINO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA NAS TURMAS DO 9º ANO.** 2016. 81 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2016.

PEREIRA, Willian de Souza. **Uma proposta para o uso do software Winplot no ensino da Matemática para estudantes do ensino médio do IFMT, campus Cuiabá**. 2015. 66 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2015.

PONTE, João Pedro da. (1990). **O conceito de função no currículo de Matemática**. Educação e Matemática, 15, 3-9. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/handle/10451/4473 Acesso em: 19 mar. 2019

ROCHA, Lúcia Andréia de Souza; POFFAL, Cristiana Andrade; MENEGHETTI, Cinthya Maria Schneider. **A utilização de softwares no ensino de funções quadráticas.** Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37, n. 3, p.19-35, 2015. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=467547643003>. Acesso em: 02 fev. 2019.

SANTOS NETO, Graciano dos. **Proposta de Ensino para o estudo de gráficos de funções através do software KmPlot.** 2017. 76 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Departamento de Pós-graduação, Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=94619>. Acesso em: 10 mar. 2019.

SIDEL, Stenio José Moreira. **Algumas implicações do movimento parabólico com barreira, no esporte, mediante sistema de equações implícitas usando o Winplot**. 2015. 62 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2015.

SILVA, Antonio Ribeiro da. **As tecnologias digitais como estratégia para o ensino e aprendizagem de matemática na escola Marcelino Machado do município Fortaleza dos Nogueiras/MA.** 2018. 59 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Floriano, 2018.

TORMA, Luciano da Silva. **Funções Trigonométricas no Ensino Médio: Construindo uma paisagem utilizando o software Graphmatica.** 2018. 134 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2018. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160680101>. Acesso em: 24 mar. 2019

ZICA, César de Oliveira. **Uma proposta de utilização do Winplot no ensino da função seno nas turmas do Proeja.** 2013. 106 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2013. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=42199>. Acesso em: 13 fev. 2019

SOBRE O ORGANIZADOR

Eliel Constantino da Silva - Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Brasil, e Universidade do Minho, Portugal, respectivamente. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e membro do Grupo de Pesquisa Ensino e Aprendizagem como Objeto da Formação de Professores (GPEA). Atuou como professor bolsista do Departamento de Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Tem interesse e desenvolve pesquisas nos seguintes temas: Educação Matemática, Pensamento Computacional, Robótica, Programação Computacional, Tecnologias Digitais na Educação, Ensino e Aprendizagem, Teoria Histórico-Cultural e Formação de Professores. Atualmente é doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), editor de conteúdo da Geekie, colunista do InfoGeekie, membro do Comitê Técnico Científico da Atena Editora, professor do Colégio Internacional Radial e desenvolve ações de formação de professores relacionadas ao uso de tecnologias e Pensamento Computacional na Educação.

ÍNDICE REMISSIVO

A

D

E

F

G

H

I

J

L

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-7247-545-7
9 788572 475457