

# EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 2

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves  
(Organizador)

 **Atena**  
Editora  
Ano 2019



Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves  
(Organizador)

# Educação Matemática e suas Tecnologias 2

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2019 Os Autores  
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora  
Editora Executiva: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira  
Diagramação: Natália Sandrini  
Edição de Arte: Lorena Prestes  
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

## Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

## Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

## Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
E24	Educação matemática e suas tecnologias 2 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 2)  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-348-4 DOI 10.22533/at.ed.484192405  1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.  CDD 510.7
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br



## APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
O ALGORITMO ESPECTRAL COMO ALTERNATIVA AO ALGORITMO K-MEANS EM CONJUNTO DE DADOS ARTIFICIAIS	
Luciano Garim Garcia Leonardo Ramos Emmendorfer	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924051</b>	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>16</b>
NOVAS RELAÇÕES NA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza Hélio Magalhães De Oliveira	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924052</b>	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>24</b>
ALGORITMOS RÁPIDOS PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL	
Arquimedes José De Araújo Paschoal Ricardo Menezes Campello De Souza	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924053</b>	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>32</b>
ANÁLISE DE CÁLCULO DIFERENCIAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA	
Amanda Barretos Lima Garuth Brenda Anselmo Mendes Isabela Geraldo Reghin Rosângela Teixeira Guedes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924054</b>	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>46</b>
DEFLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	
Mariana Coelho Portilho Bernardi Adilandri Mércio Lobeiro Jeferson Rafael Bueno Thiago José Sepulveda da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924055</b>	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>57</b>
MODELO MATEMÁTICO PARA AUXILIAR O PLANEJAMENTO DA MANUTENÇÃO PREVENTIVA DE MOTORES ELÉTRICOS	
Thalita Monteiro Obal Jonatas Santana Obal	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924056</b>	



<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>64</b>
PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE FLUXO EM AQUÍFERO CONFINADO	
<a href="#">João Paulo Martins dos Santos</a> <a href="#">Alessandro Firmiano de Jesus</a> <a href="#">Edson Wendland</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924057</b>	
<b>CAPÍTULO 8</b> .....	<b>83</b>
RESONANT ORBITAL DYNAMICS OF CBERS SATELLITES	
<a href="#">Jarbas Cordeiro Sampaio</a> <a href="#">Rodolpho Vilhena de Moraes</a> <a href="#">Sandro da Silva Fernandes</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924058</b>	
<b>CAPÍTULO 9</b> .....	<b>91</b>
TESTES ADAPTATIVOS ENVOLVENDO O CONTEÚDO DE DERIVADAS: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL	
<a href="#">Patrícia Liane Grudzinski da Silva</a> <a href="#">Claudia Lisete Oliveira Groenwald</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4841924059</b>	
<b>CAPÍTULO 10</b> .....	<b>104</b>
LOCALIZAÇÃO DE FALTAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO POR ANÁLISE DE SINAIS TRANSITÓRIOS DE TENSÃO	
<a href="#">Danilo Pinto Moreira de Souza</a> <a href="#">Eliane da Silva Christo</a> <a href="#">Aryfrance Rocha Almeida</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240510</b>	
<b>CAPÍTULO 11</b> .....	<b>116</b>
MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA CAUSADA POR MOSCA-BRANCA EM CULTURAS AGRÍCOLA	
<a href="#">Gustavo Henrique Petrolí</a> <a href="#">Norberto Anibal Maidana</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240511</b>	
<b>CAPÍTULO 12</b> .....	<b>133</b>
LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO	
<a href="#">Claudio Fuentealba</a> <a href="#">Edelmira Badillo</a> <a href="#">Gloria Sánchez-Matamoros</a> <a href="#">Andrea Cárcamo</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240512</b>	
<b>CAPÍTULO 13</b> .....	<b>143</b>
OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE PARA A MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS	
<a href="#">Márcio Aurélio da Silva</a> <a href="#">Fran Sérgio Lobato</a> <a href="#">Aldemir Ap Cavalini Jr</a> <a href="#">Valder Steffen Jr</a>	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240513</b>	

<b>CAPÍTULO 14</b> .....	<b>156</b>
SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY	
Gino Gustavo Maqui Huamán	
Ulcilea Alves Severino Leal	
Geraldo Nunes Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240514</b>	
<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>164</b>
VALIDAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA O ESCOAMENTO DE GRÃOS DE SOJA	
Rodolfo França de Lima	
Vanessa Faoro	
Manuel Osório Binelo	
Dirceu Lima dos Santos	
Adriano Pilla Zeilmann	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240515</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>181</b>
TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN PARA FORMAR EL CONCEPTO DE POTENCIA	
Landy Sosa Moguel	
Guadalupe Cabañas-Sánchez	
Eddie Aparicio Landa	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240516</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>192</b>
SINCRONISMO EM UM NOVO MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO INDEPENDENTE DA DENSIDADE	
Francisco Helmuth Soares Dias	
Jacques Aveline Loureiro da Silva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240517</b>	
<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>199</b>
SIMULAÇÃO 3D DO FLUXO DE AR DE UM SISTEMA REAL DE ARMAZENAGEM DE GRÃOS	
Vanessa Faoro	
Rodolfo França de Lima	
Aline Tampke Dombrowski	
Manuel Osório Binelo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240518</b>	
<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>207</b>
CONTROLE ÓTIMO DO FLUXO DE ÁGUA EM UMA FÔRMA DE GELO	
Xie Jiayu	
João Luis Gonçalves	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240519</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>213</b>
CÓDIGOS CÍCLICOS DEFINIDOS POR ANULAMENTO	
Conrado Jensen Teixeira	
Osnel Broche Cristo	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240520</b>	



<b>CAPÍTULO 21</b> .....	<b>216</b>
ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE DISPERSÃO DE UM CONTAMINANTE COM TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E INFERÊNCIA BAYESIANA	
Bruno Carlos Lugão Diego Campos Knupp Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues Antônio José da Silva Neto	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240521</b>	
<b>CAPÍTULO 22</b> .....	<b>225</b>
ANÁLISE WAVELET DE TACOGRAMAS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS	
Ronaldo Mendes Evaristo Kelly Cristiane Iarosz Silvio Luiz Thomaz de Souza Ricardo Luiz Viana Moacir Fernandes de Godoy Antonio Marcos Batista	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240522</b>	
<b>CAPÍTULO 23</b> .....	<b>235</b>
CONSTRUÇÃO DE UM AEROMODELO DE MACARRÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA	
Alissan Sarturato Firão Ernandes Rocha de Oliveira Zulind Luzmarina Freitas	
<b>DOI 10.22533/at.ed.48419240523</b>	
<b>SOBRE O ORGANIZADOR</b> .....	<b>239</b>

## O ALGORITMO ESPECTRAL COMO ALTERNATIVA AO ALGORITMO K-MEANS EM CONJUNTO DE DADOS ARTIFICIAIS

**Luciano Garim Garcia**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
(UFRGS)

Porto Alegre - Rio Grande do Sul

**Leonardo Ramos Emmendorfer**

Universidade Federal do Rio Grande (FURG)

Rio Grande - Rio Grande do Sul

**RESUMO:** Neste trabalho busca-se tratar do problema de agrupamento de dados pela abordagem de particionamento de grafos. Com isto, utiliza-se uma versão espectral e obtém-se uma solução relaxada que é utilizada no processo de agrupamento. No intuito de medir a eficácia do método espectral utiliza-se o algoritmo k-means para comparar resultados de agrupamento de dados artificiais. Finalmente, utiliza-se a medida-F para fazer o comparativo estatístico dos métodos e inferir conclusões.

**PALAVRAS CHAVE:** Particionamento, Agrupamento, Grafos, K-means.

**ABSTRACT:** In this work data clustering problem is transformed in graph partitioning problem. That way, a spectral version is used and a relaxed solution is obtained, and then is used in the clustering process. In order to measure the efficacy of the spectral method, the k-means algorithm is used to compare clustering results with artificial data. Finally, the F-measure is

used to make the statistical comparison of the methods and infer conclusions.

**KEYWORDS:** Partitioning, Clustering, Graphs, K-means.

### 1 | INTRODUÇÃO

O reconhecimento de padrões em matemática sempre foi alvo de estudo de vários pesquisadores. Nas últimas décadas diversos métodos de exploração de dados foram desenvolvidos com a finalidade de extrair informações úteis que antes estavam implícitas em números e tabelas. Sendo assim, pode-se dizer que estudo de agrupamento torna-se uma ferramenta útil para a análise de dados em diferentes situações. A análise de agrupamento tem aplicações em situações simples do dia-a-dia (desde o início da infância, aprende-se a distinguir entre gatos e cachorros, ou plantas e animais, melhorando continuamente esquemas de classificação subconscientes) assim como em diversas áreas, como biologia, pesquisa de mercado, processamento de imagens, reconhecimento de padrões, geografia, e muitas outras (Dos Santos, 2015).

Diversos métodos de agrupamento de dados buscam encontrar agrupamentos ótimos, porém surgem certas limitações correspondentes a cada algoritmo utilizado.



Com isto, existe uma grande necessidade de encontrar métodos inteligentes que realizem esta tarefa de maneira bem geral, independente do formato do conjunto de dados.

Neste trabalho, utiliza-se o método de agrupamento espectral baseado em particionamento grafos para descobrir os grupos existentes em conjuntos de dados artificiais. Desse modo, espera-se que os agrupamentos aconteçam de forma mais natural do que outros algoritmos como, por exemplo, o k-means (LÄNGKVIST, 2014).

## 2 | METODOLOGIA

Considere um conjunto de dados descritos por pares ordenados  $(x_i, x_j) \in \mathbb{R}^2$ . Cada par de elementos descrevem um ponto no plano cartesiano e, sua relação com os demais pode ser descrita por uma função de similaridade. Seja  $W_{ij} = f(d(x_i, x_j), \sigma)$  a matriz simétrica composta pela função de similaridade que leva em consideração a distância euclidiana entre os elementos e parâmetro de distribuição gaussiana dos dados (NG, 2002). Assim pode-se modelar a matriz de similaridade de acordo com a equação abaixo:

$$W_{ij} = e^{-\frac{d^2(x_i, x_j)}{2\sigma^2}}$$

Neste caso, usando a matriz de similaridade dos dados poder-se-ia aplicar algum algoritmo que tomasse as informações dessa matriz para determinar os grupos. Porém, esta formulação é bastante sensível ao parâmetro que é uma medida global, não levando em consideração informações locais dos dados. Nesse sentido propõe-se transformar o problema de agrupamento de dados em um problema de particionamento de dados, conforme descrito na Figura 1.

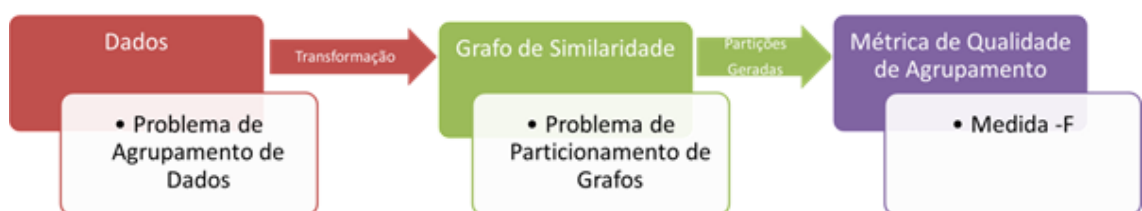


Figura 1- Esquema da metodologia abordada

Para fazer a transformação do problema considera-se cada par ordenado como o vértice do grafo e a medida de similaridade entre os dados é posto como o peso de cada aresta que conecta um vértice em outro. Neste sentido a nova formulação trata de obter partições no grafo que descrevam coerentemente a estrutura dos grupos a serem formados. No ponto de vista de particionamento utilizam-se funções

objetivo com o intuito de medir a qualidade das partições. Otimizada a função de particionamento e gerado os grupos, retorna-se ao problema de agrupamento com a solução obtida e, utiliza-se uma métrica de qualidade de agrupamento para medir a eficácia do resultado.

## 2.1 Solução do Problema de Particionamento de Grafos

Dado um número  $k \in \mathbb{N}_{>1}$  e um grafo  $G = (V, E)$  com pesos não negativos em suas arestas,  $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , o problema de particionamento de grafos busca determinar uma partição  $P$  de  $V$  com grupos de vértices  $P = \{V_1, \dots, V_k\}$  satisfazendo as seguintes condições:  $V_1 \cup \dots \cup V_k = V$  e  $V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i \neq j$ .

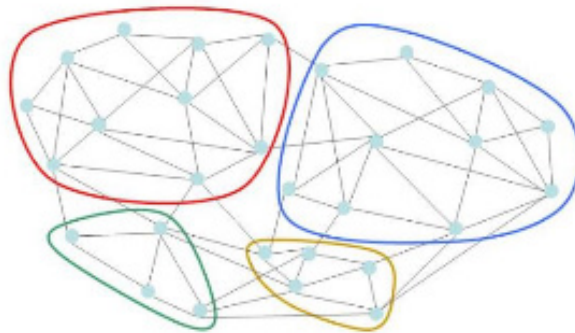


Figura 2- Grafo particionado

Considere a seguinte modelagem para o caso particular do biparticionamento: dados dois conjuntos disjuntos de vértices  $V$  e  $V^c$  de um grafo  $G$  define-se:

- O somatório dos pesos das arestas dos dois conjuntos por:

$$Cut(V, V^c) = \sum_{u \in V, v \in V^c} w_{uv}$$

- O somatório dos pesos das arestas dentro do conjunto  $V$  por:

$$Cut(V, V) = \sum_{u \in V, v \in V} w_{uv}$$

- O total de pesos provenientes do grupo  $V$ :

$$Vol(V) = \sum_{u \in V} d_u$$

Para medir a qualidade das partições é possível recorrer ao uso de funções objetivo que otimizadas propiciem partições equilibradas. Uma partição equilibrada ocorre quando vértices da mesma partição possuem arestas com pesos grandes (alta similaridade) e aresta entre partições distintas possuam pesos pequenos (pouca similaridade). Neste sentido, podem-se utilizar funções de corte mínimo, corte por



razão, e corte normalizado (JIA, 2014). Neste trabalho é utilizado a função de corte normalizado justamente por proporcionar cortes mais equilibrados no grafo (SHI, 2000).

### 2.1.1 Função de Corte Normalizado

O particionamento leva em consideração as conexões dentro e fora de um grupo, ou seja,

$$NCut(V, V^c) = Cut(V, V^c) \left( \frac{1}{Vol(V)} + \frac{1}{Vol(V^c)} \right)$$

Neste caso é levado em consideração o tamanho das partições. Porém, quando se introduz condições para obter partições equilibradas, o problema do corte mínimo embutido na função de corte normalizado torna-se um problema NP-difícil (WAGNER, 1993). Nesse sentido, trabalha-se com a versão relaxada do problema obtendo uma solução aproximada para a função objetivo.

Considere a seguinte relaxação para  $NCut$  :

Seja  $f = [f_1, \dots, f_n]^t$  com  $f_u = \begin{cases} \frac{1}{Vol(V)}, se u \in V \\ -\frac{1}{Vol(V^c)}, se u \in V^c \end{cases}$ . A fim de reescrever  $NCut$  considere:

$$f^t L f = \sum_{uv} w_{uv} (f_u - f_v)^2 = \sum_{u \in V, v \in V} w_{uv} \left( \frac{1}{Vol(V)} + \frac{1}{Vol(V^c)} \right)^2$$

Onde  $L$  é chamada de matriz laplaciana, definida por  $L=D-W$ , tal que  $W$  é a matriz de pesos do grafo (ou adjacências) e  $D$  é a matriz diagonal com elementos descritos por  $Vol(V, V^c)$

Procedendo analogamente para a matriz  $D$ :

$$f^t D f = \sum_{u \in V} d_u f_u^2 = \sum_{u \in V} \frac{d_u}{Vol(V)^2} + \sum_{v \in V^c} \frac{d_u}{Vol(V^c)^2} = \frac{1}{Vol(V)} + \frac{1}{Vol(V^c)}$$

Então, reescreve-se  $NCut$ , como:

$$NCut(V, V^c) = \frac{f^t L f}{f^t D f}$$

Em resumo, tem-se de otimizar a seguinte função:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min NCut(V, V^c) = \min \frac{f^t L f}{f^t D f}, \text{ onde} \\ f = [f_1, \dots, f_n]^t \text{ com } f_u = \begin{cases} \frac{1}{Vol(V)}, se u \in V \\ -\frac{1}{Vol(V^c)}, se u \in V^c \end{cases} \end{array} \right\}$$

Para esse propósito, considera-se:  $\frac{f^t Lf}{f^t Df}$  sujeito a  $f^t Df = 1$  com solução dada pelo segundo menor autovalor do problema (VON LUXBURG, 2007).

$$Lf = \lambda Df$$

$$DD^{-1}Lf = \lambda Df$$

$$D^{-1}Lf = \lambda f$$

$$\mathcal{L}f = \lambda f$$

De acordo com (FIEDLER, 1973), o segundo menor autovetor associado ao segundo menor autovalor, que é solução do problema acima, é capaz de descrever uma partição no grafo determinada pelo sinal das suas componentes. Ou seja, é feito um mapeamento dessas componentes diretamente no grafo gerando as partições. Em suma, ao invés de particionar o grafo de acordo com as componentes dos vetores característicos da solução exata utiliza-se as componentes da solução relaxada conforme a figura abaixo.

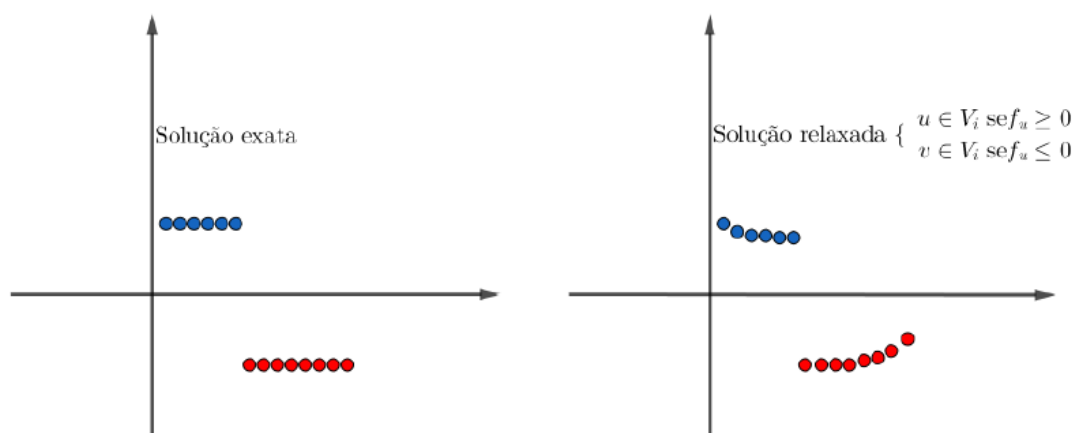


Figura 3 – Solução exata e solução relaxada

Dependendo do volume de dados (quantidade de vértices) é necessário aplicar um algoritmo de agrupamento nas componentes do autovetor solução para determinar os grupos. Em geral, utiliza-se o algoritmo k-means, amplamente utilizado na literatura, já que em poucas iterações é possível obter os grupos. Além disso, no caso geral de partições em subconjuntos disjuntos, utilizam-se as componentes dos  $k$ -menores autovetores para determinar as partições, sendo fundamental o uso de um algoritmo de agrupamento nesta etapa (NG, 2002).

### 3 | ALGORITMOS DE AGRUPAMENTO

Nas próximas seções são apresentados os algoritmos k-means e espectral via k-means, objetos de estudo deste trabalho.

#### 3.1 Algoritmo K-means

O algoritmo k-means baseia-se na minimização de uma medida de custo, a distância interna entre os padrões de um agrupamento (LINDEN, 2009). A minimização do custo garante encontrar um mínimo local da função objetivo, que dependerá do ponto inicial do algoritmo. Esse tipo de algoritmo é chamado de ‘não-convexo’, pois, a cada iteração diminui o valor da distorção, visto que o resultado final depende do ponto inicial usado pelo algoritmo.

##### **Algoritmo 1:** Algoritmo k-means

**Entrada:** Conjunto de exemplos contendo vetores de atributos d-dimensionais e k= número de grupos.

**Saída:** k vetores de média e afiliação para os N vetores de atributos D

1. Escolha estimativas iniciais arbitrárias  $\theta_j$  (0) para os  $\theta_{jis}$ ;  $j=1, \dots, m$  (isto é, para centroides dos k grupos);

2. Repita:

for  $i \leftarrow 1$  to N do

    Determine o representante mais próximo, isto é,  $\theta_j$  (centroide mais próximo) de  $x_i$ .

    Faça  $b(i) = j$ ;

for  $i \leftarrow 1$  to k do

    Atualização dos parâmetros: Determinar  $\theta_j$  como a média dos vetores  $x_i \in X$  com  $b(i) = j$ ;

3. Repetir passo 2 até que não ocorram mudanças em  $\theta_j$  entre duas iterações sucessivas.

A principal vantagem do k-means é a convergência da solução em poucas iterações, sendo esta convergência dependente da inicialização dos centros dos grupos e da geometria dos dados. Outro fator importante para o funcionamento do algoritmo é a informação preliminar da suposta quantidade de grupos contidos na distribuição dos dados. Ou seja, o número de k grupos deve também ser informado pelo usuário, acarretando uma dependência no resultado dos agrupamentos. Além disso, o k-means pode não funcionar de maneira esperada dependendo da curvatura da distribuição dos dados no plano bidimensional (GARCIA, 2017). Geralmente, o método funciona bem em conjuntos onde os grupos estão bem separados, ou seja, em distribuições gaussianas.

#### 3.2 Algoritmo Espectral via K-means

O algoritmo pioneiro desta metodologia surgiu graças ao trabalho de (NG, 2002), que apresentou sua metodologia no artigo intitulado "On spectral clustering: Analysis

and an Algorithm”. Os passos do algoritmo espectral basicamente desempenham a tarefa de obter a matriz laplaciana do grafo de similaridade e calcular os seus autovetores para agrupá-los via k-means.

O parâmetro de escala  $\sigma$  controla a rapidez com que a matriz de similaridade decresce levando em consideração a distância entre  $x_i$  e  $x_j$  (VON LUXBURG, 2007). A matriz  $W$  é obtida calculando-se o peso de cada aresta incidente em um determinado vértice, desse modo, forma-se uma matriz diagonal, a qual é utilizada na obtenção da matriz laplaciana. Calculando-se os  $k$  autovetores de  $L$ , obtêm-se as matrizes  $U$  e logo após  $Y$  onde no passo 5 ocorre a aplicação do algoritmo k-means.

**Algoritmo 2:** Agrupamento espectral via k-means (NG, 2002)

**Entrada:** Conjunto de pontos  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , desvio padrão  $\sigma$  e o número de grupos  $k$ .

**Saída:** Grupos  $A_1, \dots, A_k$

1. Formar a matriz de similaridade  $W$  definida por:  $W_{ij} = e^{-\frac{d^2(x_i, x_j)}{2\sigma^2}}$

2. Construir a matriz laplaciana:  $L = D - W$

3. Encontrar os  $k$  autovetores de  $L$  (escolhidos para serem ortogonais entre si no caso de autovalores repetidos), e forme matriz  $U$  colocando os autovetores em colunas:

$$U[u_1 : \dots : u_k] \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

4. Formar a matriz  $Y$  a partir de  $U$  normalizando cada linha de  $U$  para ter valores unitários.

5. Considerar cada linha de  $Y$  como um ponto em  $\mathbb{R}^k$  e classifique-os em  $k$  grupos via algoritmo k-means  $Y_{ij} = \frac{u_{ij}}{[\sum_{j=1}^k u_{ij}^2]^{\frac{1}{2}}}$

6. Colocar os pontos originais  $x_i$  no grupo  $j$ , se e somente se, a linha  $i$  da matriz  $Y$  for colocada no grupo  $j$ .

## 4 | EXPERIMENTOS

Nesta seção apresenta-se uma série de experimentos feitos com a aplicação dos dois algoritmos de agrupamentos em diversos conjuntos de dados. A utilização do k-means tem por objetivo obter uma comparação de resultados em relação ao algoritmo espectral, já tal algoritmo possui popularidade em diversas aplicações. Para medir a qualidade dos agrupamentos obtidos, optou-se pelo uso da medida-F, sendo que em todos os conjuntos utilizados é possível obter o seu "ground truth" na literatura.

### 4.1 Medida Estatística de Qualidade de Agrupamento

Com o intuito de medir o desempenho dos algoritmos utilizados em cada conjunto de dados foi utilizada a medida-F. Dada uma predição  $(h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))) \in Y$  de rótulo binário  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , a medida-F é definida a seguir:



$$F(y, h(x)) = \frac{(1 + \beta^2) \sum_{i=1}^m y_i h_i(x)}{\beta^2 \sum_{i=1}^m y_i + \sum_{i=1}^m h_i(x)} \in [0,1]$$

Esta medida essencialmente corresponde a uma média harmônica ponderada de precisão e exaustividade (DEMBCZYNSKI, 2013). Para utilizar esta medida foram considerados os resultados corretos dos agrupamentos encontrados na literatura. Para cada teste foram definidas as variáveis TrueCluster e PredictedCluster, ou seja, a informação dos grupos corretos e dos grupos formados pelos algoritmos respectivamente.

## 4.2 Conjunto de Experimentos I

Em cada experimento a seguir existe um determinado problema de agrupamento relacionado à sua estrutura. O primeiro conjunto chamado Two Spirals possui curvaturas acentuadas que dificultam a aplicação dos algoritmos.

No segundo conjunto de dados ClusterinCluster existem dois grupos formados por duas concentrações circulares de pontos, uma pequena e outra maior. Neste caso, o desafio está em agrupar corretamente um grupo que está dentro de outro. Tal dificuldade é evidente, pois os conjuntos não são linearmente separáveis, além de possuírem variâncias distintas.

Por fim, no conjunto Corners existem quatro concentrações de pontos distribuídos em forma de esquinas. Os grupos deste conjunto possuem a característica de serem construídos de maneira bem simétrica, enfatizando claramente a sua divisão. Igualmente espaçados, os retângulos que formam as esquinas possuem a mesma distância em relação aos retângulos dos outros grupos adjacentes. Devido a esta característica, a dificuldade em agrupar as esquinas corretamente consiste em não levar apenas em consideração o fator distância entre grupos, mas também o fator vizinhança de cada elemento.

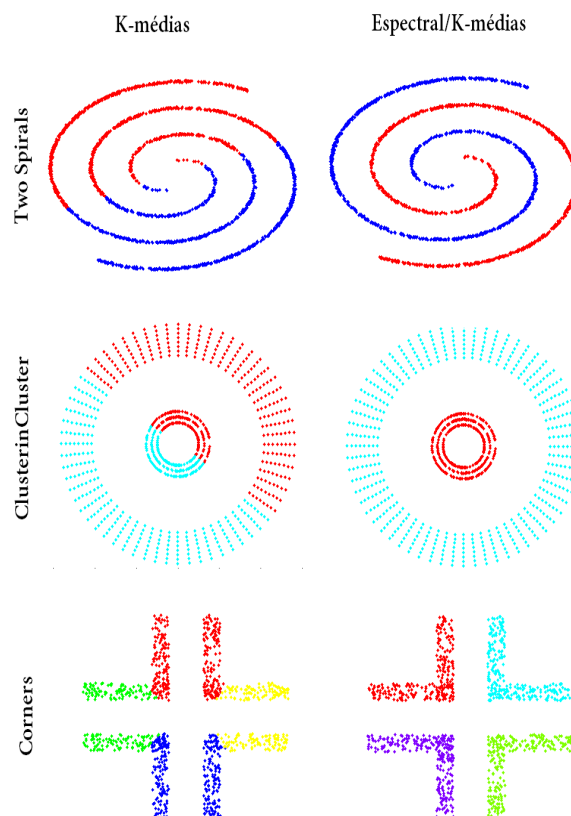


Figura 4 - Resultados dos experimentos referentes aos conjuntos de dados Two Spirals, ClusterinCluster e Corners para os algoritmos k-means e espectral.

A partir da Figura 4 pode-se obter uma visão geral da aplicação dos algoritmos nos conjuntos de dados em estudo. O experimento referente ao conjunto de dados Two Spirals mostrou a eficácia do método espectral em determinar corretamente os grupos. Já a aplicação do k-means resultou em uma partição linear no grafo, gerando também dois grupos, porém com resultados não satisfatórios.

No experimento referente ao conjunto ClusterinCluster, os resultados obtidos pelo k-means foram similares aos resultados do conjunto anterior. Uma partição linear descreve os dois grupos gerados de acordo com os centroides inicializados e posicionados iterativamente entre os dois grupos reais.

No último conjunto de dados Corners o método espectral via k-means obteve corretamente os grupos. Devido a simetria dos dados, o algoritmo k-means agrupou os retângulos de acordo com os centroides posicionados ao norte, sul, leste e oeste do conjunto, não retratando corretamente a estrutura dos grupos.

### 4.3 Conjunto de Experimentos II

Para a aplicação dos métodos de agrupamento discutidos aqui, foram escolhidos alguns conjuntos de dados disponíveis em (FU, 2007), (JAIN, 2005) e (CHANG, 2008). Houve a preocupação em trabalhar com conjuntos de dados de diferentes formatos geométricos, sendo específicos para a finalidade de analisar os resultados de cada algoritmo aplicado.

No primeiro teste foi utilizado o conjunto de dados Jain que possui o formato de duas meias luas conforme a Figura 5. Pode-se inferir visualmente que o conjunto possui dois grupos bem definidos e bem separados no plano bidimensional. A principal dificuldade em agrupar corretamente estes conjuntos está relacionada diretamente à curvatura em que os mesmos se dispõem no plano. Sendo assim, é interessante ressaltar que metodologias que obtenham um particionamento linear no conjunto provavelmente poderão falhar ao tentar descobrir corretamente os grupos.

No segundo experimento foi utilizado o conjunto de dados Flame, que por sua vez possui características geométricas interessantes, composta por uma distribuição esférica de elementos e outra concentração no formato de meia lua conforme Figura 5.

Por fim, é utilizado o conjunto de dados Spiral que também possui um formato de curva, neste caso é possível identificar que o número de grupos existentes no conjunto é três, conforme é possível analisar na Figura 5.

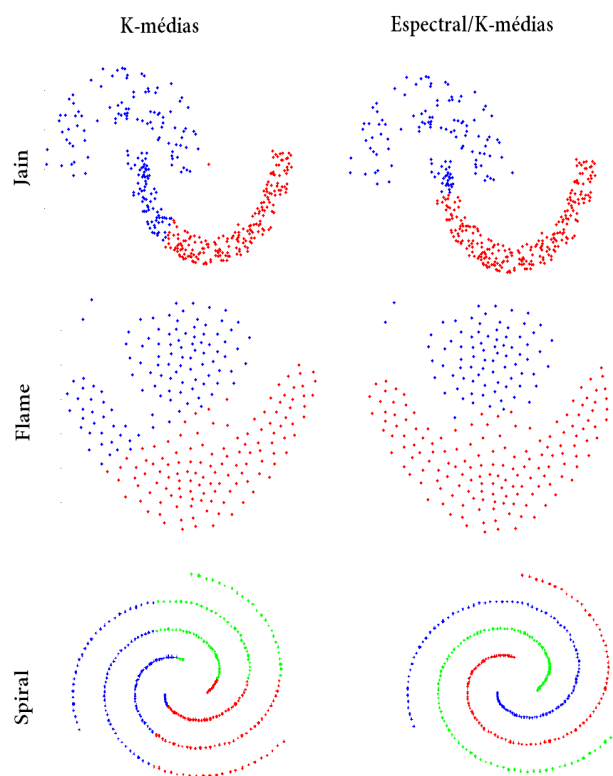


Figura 5 - Resultados dos experimentos referentes aos conjuntos de dados Jain, Flame e Spiral para os algoritmos k-means e espectral.

Conforme a visualização da Figura 5 é possível notar que o algoritmo k-means não obteve um agrupamento coerente de acordo com a estrutura do conjunto Jain. Isto se deve ao fato de que a utilização de centroides como parâmetro de agrupamento não funciona de maneira eficaz em conjuntos de dados que possuem uma determinada curvatura. Como a distribuição dos dados no plano não acompanha uma distribuição gaussiana, então o uso do k-means neste caso não é o mais recomendado. Já os grupos formados pelo algoritmo espectral geraram um resultado melhor que o seu antecessor. Apesar disso, a informação proveniente da matriz laplaciana não foi

suficiente para estabelecer um agrupamento coerente com a geometria do conjunto. Neste caso, existem duas possibilidades para a falha, a primeira seria a ineficácia do k-means quando aplicado nas componentes do autovetor solução e, a segunda a proximidade das componentes que podem levar a um agrupamento equivocado.

Os grupos do conjunto Flame estabelecidos pela metodologia k-means, formaram-se de maneira incorreta, agrupando parte da meia lua juntamente com a concentração superior acima dela. Considerando a concentração circular de elementos neste conjunto, conclui-se que o k-means consegue eficientemente colocar um centroide correto nesta região. Porém, em relação à meia lua este acerto do método torna-se impossível. No segundo algoritmo o resultado coerente, pois visualmente os grupos formaram-se corretamente respeitando a distribuição dos elementos no plano. É interessante ressaltar que o desvio padrão dos dados é moderadamente diferente entre os dois grupos, o que pode dificultar a resposta de vários algoritmos baseados neste parâmetro.

Novamente o número de grupos informado como entrada em ambos os algoritmos é o mesmo, desse modo, será possível estabelecer uma relação entre os resultados obtidos por cada um deles. No experimento com o uso do k-means o agrupamento do conjunto Spiral não foi satisfatório, novamente o problema ocorre devido à curvatura da distribuição dos elementos no plano. Diferente de muitos casos, neste conjunto nem uma boa inicialização do centro irá estabelecer corretamente os grupos, sendo assim, o algoritmo é ineficaz neste caso. Em contrapartida, o algoritmo baseado na metodologia de particionamento espectral apresentou bons resultados.

#### 4.4 Conjunto de Experimentos III

Nesta seção de experimentos os conjuntos de dados foram escolhidos de acordo com a sua dimensão. Em experimentos anteriores os conjuntos utilizados eram bidimensionais, porém, propõe-se nesta seção a aplicação dos algoritmos em elementos com coordenadas  $(x_i, x_j, x_k)$ . A escolha dos dois primeiros bancos de dados foi de acordo com o "The Fundamental Clustering Problems Suite (FCPS)". Cada conjunto possui uma determinada característica que dificulta o processo de agrupamento. Problemas relacionados a densidade, distância, variância e não linearidade são abordados. No último experimento desta seção, é utilizado o conjunto de dados Iris, proveniente do repositório de Aprendizagem de Máquina UCI.

O conjunto de dados Chainlink é composto por dois anéis tridimensionais, tal que sua principal característica de agrupamento é a separação não linear dos grupos. Devido à proximidade entre os elementos dos dois grupos o fator distância não se torna suficiente para a determinação correta do agrupamento.

Analisando a Figura 6 nota-se, primeiramente, que o resultado de agrupamento pelo método k-means não obtém corretamente os grupos formados pelos dois anéis. Esta configuração do conjunto não permite que as posições dos centroides se ajustem



de acordo com a curvatura dos dados, desse modo, ocorre uma partição linear do conjunto gerando dois grupos que não correspondem à geometria correta dos dados.

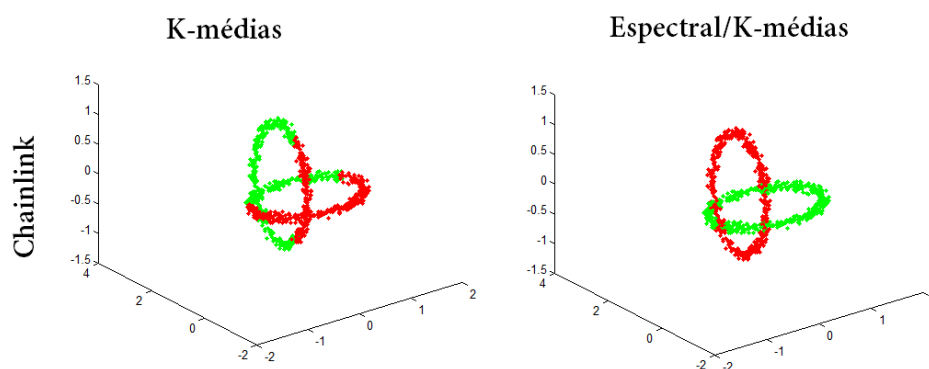


Figura 6 - Resultados dos experimentos referentes ao conjunto de dados Chainlink para os algoritmos k-means e espectral.

Nesse experimento o algoritmo espectral conseguiu identificar corretamente os grupos, isso se deve ao fato de que as componentes do autovetor solução estavam bem separadas, assim não houve dificuldades para o agrupamento e mapeamento dos mesmos.

Um problema interessante muito abordado em técnicas de agrupamento está relacionado a diferença de desvio-padrão e variância entre diferentes grupos. No caso do conjunto Atom, na Figura 7, existem dois grupos que possuem valores bem distintos de desvio-padrão, além de que existe o fato de um grupo menor estar contido dentro de outro maior. A característica do conjunto também não ser linearmente separável torna-se um agravante para o agrupamento correto dos elementos.

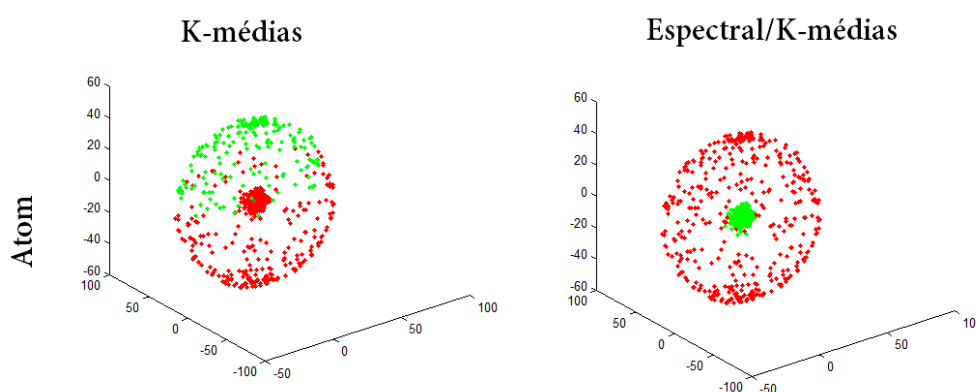


Figura 7 - Resultados dos experimentos referentes ao conjunto de dados Atom para os algoritmos k-means e espectral.

Novamente, o fator agrupamento via centroides não foi eficaz, evidenciando a dificuldade de estabelecer grupos em formato esférico também em dimensão

tridimensional. Em contrapartida, o algoritmo espectral obteve o resultado ótimo mesmo existindo a enorme diferença de desvio-padrão entre os grupos.

O conjunto Iris é um dos mais conhecidos nas áreas de classificação e agrupamento de dados. Introduzido por Ronald Fisher em 1936 no artigo "The use of multiple measurements in taxonomic problems" o seu uso traz importantes avanços na área de análise discriminante linear. O conjunto de dados consiste em 50 amostras de cada uma das três espécies de Iris (Iris setosa, Iris virginica e Iris versicolor). Foram medidas quatro características de cada amostra: o comprimento e a largura das sépalas e pétalas, em centímetros. Com base na combinação dessas quatro características, Fisher desenvolveu um modelo discriminante linear para distinguir as espécies umas das outras.

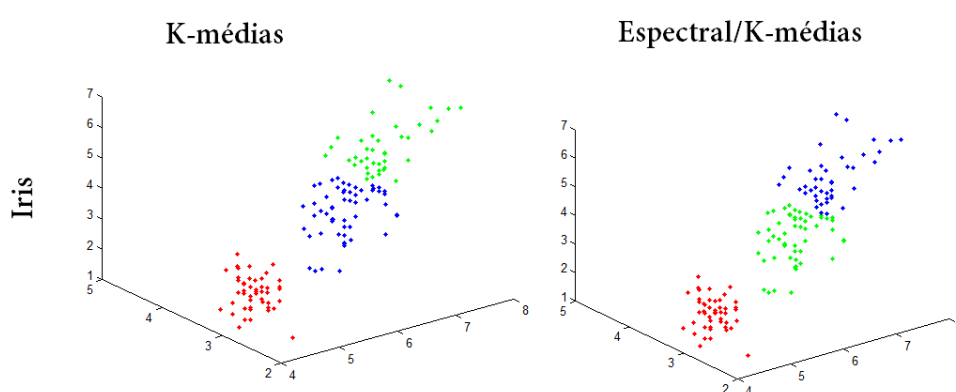


Figura 8 - Resultados dos experimentos referentes ao conjunto de dados Iris para os algoritmos k-means e espectral.

Na Figura 8 nota-se que os algoritmos k-means e espectral via k-medias apresentam resultados bem similares. Pode-se notar que grupo mais abaixo do conjunto é o mesmo em ambos os resultados de agrupamento dos algoritmos, neste caso, este grupo refere-se a Iris setosa. Desse modo, os dois métodos diferem apenas na parte superior do conjunto Iris, onde se concentram os grupos Iris virginica e a Iris versicolor, os quais apresentam uma maior concentração de pontos e proximidade entre si, dificultando a tarefa de agrupamento.

Conforme a tabela abaixo é possível obter um comparativo mais abrangente entre os dois algoritmos abordados neste trabalho. A tabela consta de resultados obtidos de medida-F quando utilizadas as saídas dos algoritmos, e comparadas com os grupos reais fornecidos pelos repositórios de dados utilizados. A partir dos valores da tabela pode-se dizer que o algoritmo k-means obteve uma média de 0,54 de medida-F, indo à contrapartida do algoritmo espectral com média de 0,97 de medida-F. Em geral, considerando conjuntos de dados com uma geometria mais simples, ambos algoritmos podem apresentar resultados similares, conforme pode-se ser visto no conjunto Iris. Porém, quando confrontados para aplicação em dados com certo grau de curvatura o algoritmo espectral é o que possui melhores resultados de medida-F.

Resultado da Medida-F		
Conjuntos de dados	K-means	Espectral
TwoSpirals	0,4797	1
ClusterinCluster	0,4138	1
Corners	0,2813	1
Jain	0,8288	0,9446
Flame	0,806	0,9825
Spiral	0,2695	1
Chainlink	0,384	1
Atom	0,6146	1
Iris	0,8085	0,8148

Tabela 1 – Resultados de medida-F para os conjuntos de dados utilizados nos experimentos.

## 5 | CONCLUSÃO

Neste trabalho foram apresentados conceitos introdutórios de particionamento espectral de grafos, juntamente com a apresentação do principal algoritmo de agrupamento espectral de dados. Pode-se notar a eficácia do método espectral quando utilizado em conjuntos de dados que possuam uma curvatura acentuada, enfatizando a sua utilização nesse contexto. Em diversos problemas de aplicação nem sempre os dados terão um formato viável para o seu agrupamento, sendo assim, o método espectral pode ser utilizado garantindo uma saída melhor do k-means proporcionaria.

No que se refere a medida de qualidade de agrupamento, nem sempre será possível utilizar a medida-F, visto que, em conjunto de dados reais não se sabe previamente a distribuição correta dos grupos. Seria interessante, para trabalhos futuros, estabelecer uma medida que permita ao algoritmo obter um feedback quanto a detecção do número correto de grupos reais. Algumas medidas já possuem tal propósito, como por exemplo, a medida Silhouette, que é amplamente utilizada nos algoritmos baseados no k-means.

Por fim, espera-se que este trabalho contribua como referencial conceitual sobre agrupamento de dados e possa ser utilizado para futuras contribuições nesta área de pesquisa. Além disso, enfatizando os bons resultados, conclui-se que a metodologia é promissora e pode ser aprimorada em trabalhos futuros.

## REFERÊNCIAS

CHANG, Hong; YEUNG, Dit-Yan. **Robust path-based spectral clustering**. Pattern Recognition, v. 41, n. 1, p. 191-203, 2008.

DEMBCZYNSKI, Krzysztof et al. **Optimizing the F-measure in multi-label classification: Plug-in rule approach versus structured loss minimization**. In: International Conference on Machine Learning. 2013. p. 1130-1138.

DOS SANTOS, Daniel F.; DE MENDONÇA, Luziane F.; TEIXEIRA, Marcello G. **Uma algoritmo de agrupamento heterogêneo para formação de grupos de aprendizagem**. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 3, n. 1, 2015.

FIEDLER, Miroslav. Algebraic connectivity of graphs. Czechoslovak mathematical journal, v. 23, n. 2, p. 298-305, 1973.

FU, Limin; MEDICO, Enzo. FLAME, a novel fuzzy clustering method for the analysis of DNA microarray data. BMC bioinformatics, v. 8, n. 1, p. 3, 2007.

GARCIA, Luciano G.; EMMENDORFER, Leonardo R. Agrupamento Espectral Aglomerativo: Uma Proposta de Algoritmo. Anais do Computer on the Beach, p. 190-199, 2017.

JIA, Hongjie et al. The latest research progress on spectral clustering. Neural Computing and Applications, v. 24, n. 7-8, p. 1477-1486, 2014.

LÄNGKVIST, Martin; KARLSSON, Lars; LOUTFI, Amy. **A review of unsupervised feature learning and deep learning for time-series modeling**. Pattern Recognition Letters, v. 42, p. 11-24, 2014.

LINDEN, Ricardo. Técnicas de agrupamento. Revista de Sistemas de Informação da FSMA, v. 4, p. 18-36, 2009.

NG, Andrew Y.; JORDAN, Michael I.; WEISS, Yair. **On spectral clustering: Analysis and an algorithm**. In: Advances in neural information processing systems. 2002. p. 849-856.

SHI, Jianbo; MALIK, Jitendra. **Normalized cuts and image segmentation**. IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, v. 22, n. 8, p. 888-905, 2000.

VON LUXBURG, Ulrike. A tutorial on spectral clustering. Statistics and computing, v. 17, n. 4, p. 395-416, 2007.

WAGNER, Dorothea; WAGNER, Frank. **Between min cut and graph bisection**. In: International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science. Springer, Berlin, Heidelberg, 1993. p. 744-750.



## NOVAS RELAÇÕES NA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL

### Arquimedes José De Araújo Paschoal

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco - Campus Caruaru – Departamento de Engenharia Mecânica Caruaru – PE

### Ricardo Menezes Campello De Souza

Universidade Federal de Pernambuco – Departamento de Eletrônica e Sistemas Recife – PE

### Hélio Magalhães De Oliveira

Universidade Federal de Pernambuco – Departamento de Estatística Recife - PE

**RESUMO:** Neste artigo, a matriz de transformação da Transformada Numérica de Pascal (TNP) é investigada e novas relações baseadas na decomposição desta matriz, por meio do produto de Kronecker de duas matrizes de Pascal, são propostas com aplicações na implementação da TNP.

**PALAVRAS –CHAVE:** Transformada Numérica de Pascal, Triângulo de Pascal Modular, Corpos Finitos, Produto de Kronecker.

**ABSTRACT:** In this paper, the Pascal Number Theoretic Transform (PNTT) matrix is investigated and new relationships based on the decomposition of this matrix, by means of the Kronecker Product of two Pascal matrices,

are proposed with applications on the PNTT implementation.

**KEYWORDS:** Pascal Number-Theoretic Transform, Modular Pascal Triangle, Finite Fields, Kronecker Product.

### 1 | PRELIMINARES

Uma das principais razões de se pesquisar transformadas numéricas é o fato das mesmas não apresentarem o chamado erro de arredondamento ou truncagem, uma vez que toda a aritmética se efetua em um corpo finito. Tais transformadas tem sido aplicadas em algumas áreas da Engenharia Eletrônica, tais como Processamento Digital de Sinais, Códigos Corretores de Erros e Criptografia, entre outras [4, 5]. Recentemente foi introduzida a Transformada Numérica de Pascal (TNP) [8]. Definida sobre o corpo finito com um número primo de elementos,  $GF(p)$  (do inglês, *Galois Field*), e baseada no triângulo de Pascal modular, esta transformada apresenta o interessante aspecto de que seu comprimento e a característica do corpo são independentes, o que não acontece nas demais transformadas numéricas conhecidas na literatura [2, 3, 4, 5]. Neste cenário, uma questão relevante, de um modo geral, é a complexidade aritmética

(entendida aqui como o número de multiplicações e adições) necessária ao cálculo da transformada. Muitos algoritmos eficientes têm sido desenvolvidos visando reduzir esta complexidade aritmética [2]. A utilização do triângulo de Pascal [1] na definição da TNP permite que sejam exploradas relações bem conhecidas, o que leva a implementações eficientes da mesma [9].

**Definição 1.1.** A Transformada Numérica de Pascal (TNP) da sequência  $v = (v_0, \dots, v_{N-1})$ ,  $V_i \in GF(p)$  é a sequência  $V = (V_0, V_1, \dots, V_{N-1})$ ,  $V_k \in GF(p)$  em que

$$V_k := \sum_{i=0}^{N-1} C_{i+k}^i v_i \pmod{p}. \quad (1)$$

Em formato matricial, tem-se  $V = P_N v$ , em que os elementos de  $P_N$  são  $[P_N]_{i,k} := C_{i+k}^i$ ,  $i, k = 0, 1, \dots, N-1$ .

**Teorema 1.1.** (Transformada Inversa) A TNP inversa da sequência  $V = (V_0, V_1, \dots, V_{N-1})$  é a sequência  $v = (v_0, \dots, v_{N-1})$  em que

$$v_i = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ (-1)^{i+k} \sum_{j=\max(i,k)}^{N-1} C_j^i C_j^k \right] V_k. \quad (2)$$

Algumas propriedades da TNP de comprimento  $p$ , sobre  $\mathbb{Z}_p$ , podem ser verificadas [8]:

- I. A TNP de um impulso  $v = (1, 0, \dots, 0)$  é uma constante.
- II. A TNP de uma constante é um impulso deslocado.
- III. Uma dada componente  $V_k$  depende apenas das componentes  $v_i$   $0 \leq i \leq p-1-k$
- IV. A inversa da matriz  $P_p$  é triangular inferior em relação à diagonal secundária. Seus elementos são os mesmos de  $P_p$  porém aparecem refletidos em relação a esta diagonal.
- V. A soma dos elementos das linhas de  $P_p$ , com exceção da última linha, é congruente a zero módulo  $p$
- VI. As complexidades multiplicativa e aditiva para se computar a TNP são, respectivamente,

$$M(N) = \frac{p(p+1)}{2}, \quad A(N) = \frac{p(p-1)}{2}. \quad (3)$$

## 2 | DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ DE PASCAL MODULAR

A matriz de Pascal sobre GF (p) pode ser decomposta como o produto de Kronecker de duas matrizes de Pascal, quando a ordem desta matriz puder ser fatorada como o produto  $N = Lp$ . Esta importante propriedade, demonstrada no Teorema a seguir, tem relação com a autoestrutura da TNP.

**Teorema 2.1.** A matriz de Pascal  $P_N$ , em que  $N = Lp$ , sobre o corpo finito GF (p), pode ser obtida a partir do produto de Kronecker  $P_N = P_L \otimes P_p$  em que  $P_L$  e  $P_p$  são matrizes de Pascal de ordem L e p, respectivamente.

**Prova.** Pela definição do produto de Kronecker, tem-se que os elementos da matriz  $A \otimes B$ , em que A é uma matriz m x n e B é uma matriz p x q, são obtidas multiplicando-se cada elemento da matriz A pela matriz B, obtendo-se uma matriz mp x nq. Como as matrizes de Pascal são quadradas, tem-se que  $m = n = L$  e  $p = q$ . Então, a matriz resultante do produto de Kronecker possui ordem Lp. Considere o produto de Kronecker  $P_N = P_L \otimes P_p$  em que

$$P_L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \dots & C_L^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_L^{L-1} & \dots & C_{2L-2}^{L-1} \end{bmatrix} \text{ e } P_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & \dots & C_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_p^{p-1} & \dots & C_{2p-2}^{p-1} \end{bmatrix}.$$

Tem-se,

$$P_N = P_L \otimes P_p = \begin{bmatrix} P_p & P_p & \dots & P_p \\ P_p & C_2^1 P_p & \dots & C_L^1 P_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_p & C_L^{L-1} P_p & \dots & C_{2L-2}^{L-1} P_p \end{bmatrix}.$$

Sejam r e s os índices que identificam os blocos formados pelas cópias da matriz  $P_p$  multiplicada pelos termos binomiais de  $P_L$ . Então,  $r, s = 0, 1, \dots, L-1$  e  $[P_L]_{r,s} = C_r^{r+s}$ . A matriz  $P_N = P_L \otimes P_p$  é formada pelos elementos obtidos pela multiplicação  $C_{r+s}^r C_{i+j}^j$ , em que  $i, j = 0, 1, \dots, p-1$ . Note que os índices das linhas (i) e das colunas (j) da matriz  $P_N$  são dados por

$$i = \hat{i} + rp, \quad j = \hat{j} + sp,$$

em que  $r = \lfloor \frac{i}{p} \rfloor$  e  $s = \lfloor \frac{j}{p} \rfloor$ . Assim,

$$(P_L \otimes P_p)_{i,j} = C_{r+s}^r C_{i+j}^j \pmod{p} = \frac{(r+s)!}{r!s!} \cdot \frac{[(i+j)-(r+s)p]!}{(i-rp)!(j-sp)!}$$

Deseja-se provar que

$$(P_L \otimes P_p)_{i,j} = C_{r+s}^r C_{i+j}^j \pmod{p} = \frac{(r+s)!}{r!s!} \cdot \frac{[(i+j)-(r+s)p]!}{(i-rp)!(j-sp)!} = C_{i+j}^i \pmod{p}. \quad (4)$$

Fixando-se os valores de  $r$  e  $s$ , a prova é feita por indução em  $i$ . Por simetria, a prova por indução em  $j$  é semelhante.

I. Passo base:  $i = 0 \rightarrow r = 0$  Então

$$\frac{(0+s)!}{0!s!} \cdot \frac{[(0+j)-(0+s)p]!}{(0-0p)!(j-sp)!} = 1 = C_{0+j}^0.$$

II. Passo da Indução:

$$(P_L \otimes P_p)_{i+1,j} = \frac{[(i+1+j)-(r+s)p]!}{(i+1-rp)!} \cdot \frac{(r+s)!}{r!s!} \cdot \frac{[(i+j)-(r+s)p]!}{(i-rp)!(j-sp)!} \quad (6)$$

Supondo que a Equação (4) é verdadeira, então

$$(P_L \otimes P_p)_{i+1,j} = \frac{[(i+1+j)-(r+s)p]!}{(i+1-rp)!} \cdot C_{i+j}^i \equiv C_{i+j+1}^{i+1} \pmod{p}. \quad (7)$$

Este teorema tem consequências que derivam das propriedades do produto de Kronecker, a saber, se  $A$  e  $B$  são duas matrizes quaisquer, então

1. Associatividade:  $A \otimes B \otimes C = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ .
2. Se  $A$  e  $B$  são matrizes triangulares então  $A \otimes B$  é uma matriz triangular.
3. Se  $A$  e  $B$  são matrizes simétricas então  $A \otimes B$  é uma matriz simétrica.
4. Se  $\lambda_i \mu_j$  são os autovalores de  $A$  e  $\mu_j$  são os autovalores de  $B$ , então  $\lambda_i \mu_j$  são os autovalores de  $A \otimes B$ . Esta propriedade auxilia na determinação da autoestrutura da TNP.

**Exemplo 2.1.** A matriz da TNP de comprimento  $N = 5$  possui 1 autovalor no corpo base  $GF(5)$  e 4 autovalores no corpo de extensão  $GF(5^2)$ . Então, é possível determinar de que forma os autovalores da TNP de comprimento  $N = 25$  estão distribuídos em relação a  $GF(5)$  e a  $GF(5^2)$ . O produto de autovalores no corpo base produz autovalores no corpo base e o produto de um autovalor no corpo base por um autovalor no corpo de extensão produz um autovalor no corpo de extensão. O produto de autovalores no corpo de extensão pode produzir autovalores no corpo de extensão



ou no corpo base. Neste caso, o produto de autovalores pertencentes a GF (5<sup>2</sup>) produz metade dos autovalores em GF (5<sup>2</sup>) e metade em GF (5). Dos 25 autovalores, 9 estão em GF (5) e 16 em GF (5<sup>2</sup>).

*Observação.* Apesar de existir a TNP para qualquer comprimento, a fatoração da matriz da TNP por meio de um produto de Kronecker só existe nas condições do Teorema 2.1.

A Proposição 2.1 permite identificar quais as potências de um elemento primitivo do corpo de extensão que produzem elementos no corpo base.

**Proposição 2.1.** Se  $\beta = \alpha^{\left(\frac{p^m-1}{p-1}\right)}$ , em que  $\alpha$  é um elemento primitivo do corpo de extensão GF (p<sup>m</sup>), então,  $\beta \in GF (p)$ . Ademais, os elementos  $\beta^k$ , em que  $k = 1, 2, \dots, p-1$ , pertencem a GF(p)

**Prova.** Observe que

$$\beta^{(p-1)} = \alpha^{p^m-1} = 1,$$

e, portanto,  $\beta \in GF (p)$ . Como as potências de um elemento no corpo base estão no corpo base, e os elementos do corpo base possuem ordens que são divisores de (p - 1), segue-se que  $\beta^k \in GF (p)$ ,  $k = 1, 2, \dots, p-1$

**Proposição 2.2.** Se  $\pi (x)$  é o polinômio gerador de GF (p<sup>m</sup>), então, pelas Relações de Girard pode-se identificar qual o valor da primeira potência do elemento primitivo que se encontra no corpo base, a saber

$$\beta = \alpha^{\left(\frac{p^m-1}{p-1}\right)} = (-1)^m \pi(0) \tag{8}$$

**Prova.** Seja  $\pi(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$  o polinômio gerador de GF (p<sup>m</sup>), em que  $a_m = 1$ . Então se  $\alpha$  e os seus conjugados são as raízes de  $\pi(x)$  pelas relações de Girard tem-se

$$\alpha \alpha^p \dots \alpha^{p^{m-1}} = (-1)^m \pi(0),$$

$$\alpha^{1+p+p^2+\dots+p^{m-1}} = \alpha^{\left(\frac{p^m-1}{p-1}\right)} = (-1)^m \pi(0)$$

e o resultado segue.

### 3 | OS AUTOVALORES DISTINTOS DA MATRIZ P<sup>p<sup>r</sup></sup>

Nesta seção os autovalores distintos da matriz de transformação da TNP de ordem p<sup>r</sup> são encontrados. As operações realizadas a seguir são feitas módulo p

**Proposição 3.1.** A matriz de transformação da TNP sobre GF(p), em que p é um primo ímpar, cuja ordem é  $N = p^r$  satisfaz  $P_N^2 = LP_NL$ , em que  $I_N$  é a matriz identidade de ordem N

**Prova.** A matriz de transformação da TNP cujo comprimento é  $N = p^r$  satisfaz

$$P_N^2 = LP_NL, \quad (9)$$

em que

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma vez que  $L^2 = I_N$ , então  $P_N^4 = LP_NLLP_NL = LP_N^2L$ . Mas

$$LP_N^2L = LLP_NLL = P_N$$

e assim

$$P_N^4 = P_N \Rightarrow P_N^3 = I_N.$$

**Proposição 3.2.** Os autovalores associados à matriz de transformação da TNP de ordem  $N = p^r$  sobre GF (p) em que p é um primo ímpar, satisfazem  $\lambda^3 = 1$ .

**Prova.** Se v é uma autosequência da TNP com autovalor associado  $\lambda$ , então  $P_N v = \lambda v$ . Da Proposição 3.1 pode-se escrever e o resultado segue.

Uma decorrência da Proposição 3.2 é que todos os autovalores da matriz de transformação da TNP de ordem  $p^r$  estão no corpo base GF(p) se, e somente se, 3 é um divisor de  $(p - 1)$ . O exemplo a seguir ilustra de que forma estes resultados podem ser usados para encontrar os autovalores da TNP.

**Exemplo 3.1.** Considere a TNP de comprimento  $N = 25$ , sobre GF(5). Note que como  $3 \nmid (p - 1)$ , então, o único autovalor sobre GF(5) é  $\lambda = 1$ . Os autovalores sobre GF(5) são  $\alpha^8$  e  $\alpha^{16}$  em que  $\alpha$  é um elemento primitivo do corpo. Esses autovalores (1,  $\alpha^8$  e  $\alpha^{16}$ ) possuem multiplicidades 9, 8 e 8, respectivamente.

**Exemplo 3.2.** Sobre GF(7) a matriz de transformação da TNP de comprimento  $N = 7^2$  possui todos os seus autovalores em GF(7). Esses autovalores {1, 2 e 4} possuem multiplicidades 17, 16 e 16, respectivamente.

### 3.1 Uma forma alternativa da matriz de transformação inversa da TNP

Novas relações na matriz de transformação da TNP foram obtidas, as quais permitem uma implementação mais simples da TNP inversa proposta em [8]. Este resultado tem aplicação no cálculo desta inversa (Eq.(2)).

**Proposição 3.3.** (*Transformada de Pascal Inversa para  $N = p^r$* ) A matriz de transformação da TNP inversa de comprimento  $N = p^r$  é a matriz de elementos

$$[P_N^{-1}]_{i,j} = \sum_{k=0}^{p^r-1} C_{i+k}^i C_{j+k}^j \equiv C_{2(p^r-1)-(i+j)}^{(p^r-1)-i} \quad (10)$$

**Prova.** Uma consequência imediata da Proposição 3.1 é que A partir da Definição 1.1, observa-se que os elementos da matriz  $P_N^2$  são dados por

$$[P_N^2]_{i,j} = \sum_{k=0}^{p^r-1} C_{i+k}^i C_{j+k}^j. \quad (11)$$

A ação da matriz L na Eq.(9) é mapear a posição (i,j) da matriz  $P_N^2$  na posição  $(p^r - 1 - i, p^r - 1 - j)$  da matriz  $P_N^2$ ; assim, o resultado segue.

A proposição 3.3 permite reescrever a expressão da TNP inversa, Eq.(2), para o caso em que  $N = p^r$ , na forma

$$v_i = \sum_{k=0}^{N-1} C_{2(p-1)-(i+k)}^{p-1-i} V_k. \quad (12)$$

## 4 | CONCLUSÕES

Neste trabalho novas relações na matriz de transformação da TNP são apresentadas, com aplicações na Transformada Numérica de Pascal (TNP). Mostra-se que, para ordens que são múltiplas da característica do corpo, é possível decompor a matriz de Pascal modular como o produto de Kronecker de matrizes de Pascal de ordens iguais aos fatores envolvidos nesta fatoração. Como consequência direta das propriedades do produto de Kronecker, segue-se que os autovalores da matriz de Pascal original podem ser encontrados a partir dos autovalores das matrizes envolvidas na fatoração. Uma nova expressão para a TNP inversa de comprimento foi apresentada. Aplicações da TNP nas áreas de sistemas de comunicação multiusuário,

codificação de canal e criptografia estão sendo investigadas.

## REFERÊNCIAS

- [1] Birregah, B; Dobb, P. K.; Adjallah, K. H. A systematic approach to matrix forms of the Pascal triangle: The twelve triangular matrix forms and relations, **European Journal of Combinatorics**, 31:1205-1216,2010. DOI: 10.1016/j.ejc.2009.10.009.
- [2] Blahut, R. E. **Fast Algorithms for Signal Processing**, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2010.
- [3] Campello de Souza, R. M.; De Oliveira, H. M. Hartley number-theoretic transforms, **IEEE International Symposium on Information Theory**, ISIT, Washington DC, 2001. DOI: 10.1109/ISIT.2001.936073.
- [4] Lima, J. B.; Campello de Souza, R. M. Finite Field Trigonometric Transforms. **Applicable Algebra in Engineering, communication and computing**, v. 22, p. 393-411, December 2011. DOI: 10.1007/s00200-011-0158-0.
- [5] Lima, J. B.; Campello de Souza, R. M. Fractional cosine and sine transforms over finite fields. **Linear Algebra and its applications**, v. 438, n. 8, p. 3217-3230, 2013. DOI: 10.1016/j.laa.2012.12.021.
- [6] Lima, J. B.; Novaes, L. F. G. Image encryption based on the fractional Fourier transform over finite fields, **European Journal of Combinatorics**, 94:521-530,2014. DOI: 10.1016/j.sigpro.2013.07.020.
- [7] Lima, P. H. E. S.; Lima, J. B.; Campello de Souza, R. M. Fractional Fourier, Hartley, cosine and sine number-theoretic transforms based on matrix functions, **Circuits, Systems and Signal Processing**, 36:2893-2916, 2017. DOI: 10.1007/s00034-016-0447-8.
- [8] Paschoal, A. J. A. Paschoal; Campello de Souza, R. M.; De Oliveira. H. M. A transformada numérica de Pascal, In: **XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações – SBrT 2015**, p. 59-62, Setembro 2015.
- [9] Paschoal, A. J. A. Paschoal; Campello de Souza, R. M. Algoritmos rápidos para a transformada numérica de Pascal, In: **XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional – CNMAC 2017**. DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0310

## ALGORITMOS RÁPIDOS PARA O CÁLCULO DA TRANSFORMADA NUMÉRICA DE PASCAL

### Arquimedes José De Araújo Paschoal

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco - Campus Caruaru – Departamento de Engenharia Mecânica Caruaru – PE

### Ricardo Menezes Campello De Souza

Universidade Federal de Pernambuco – Departamento de Eletrônica e Sistemas Recife – PE

**RESUMO:** Este artigo propõe algoritmos rápidos para computar a Transformada Numérica de Pascal (TNP) de comprimentos  $n$  e  $m$ . As simetrias da matriz da TNP, bem como sua fatoração como um produto de Kronecker, foram usadas para se obter uma redução da complexidade multiplicativa para se implementar a transformada. Os algoritmos propostos resultaram em uma redução da complexidade entre 84% e 99,9%. Considerando o critério de complexidade multiplicativa, os melhores resultados são obtidos quando o comprimento da TNP é uma potência de um primo.

**PALAVRAS –CHAVE:** Transformada Numérica de Pascal, Triângulo de Pascal Modular, Algoritmos Rápidos, Produto de Kronecker.

**ABSTRACT:** This paper proposes fast algorithms for computing the Pascal Number Theoretic Transform (PNTT) of blocklengths

and  $m$ . The symmetries of the PNTT as well as its factorization as a Kronecker product were explored to reduce the multiplicative complexity for implementing the transform. The proposed algorithms resulted in a complexity reduction from 84% to 99.9%. Taking into account the multiplicative complexity criterion, the best results are obtained when the blocklength of the PNTT is a prime power.

**KEYWORDS:** Pascal Number-Theoretic Transform, Modular Pascal Triangle, Fast Algorithms, Kronecker Product.

### 1 | INTRODUÇÃO

Transformadas discretas desempenham um papel relevante em Engenharia e suas aplicações devem-se principalmente à existência de algoritmos rápidos para sua computação. Neste cenário, transformadas definidas sobre corpos finitos são atraentes porque não apresentam o chamado erro de arredondamento ou truncagem, uma vez que empregam aritmética módulo  $p$ . Este trabalho aborda as chamadas transformadas numéricas, isto é, transformadas definidas sobre o corpo finito  $GF(p)$ . Algumas áreas da Engenharia Eletrônica, tais como Processamento Digital de Sinais, Códigos Corretores de Erros e Criptografia, entre outras, têm sido beneficiadas



com o uso de tais transformadas [3, 4]. Uma questão importante para a implementação de uma dada transformada é a complexidade multiplicativa necessária para sua computação. Muitos algoritmos têm sido desenvolvidos visando reduzir esta complexidade. Estes algoritmos, implementados em Processadores Digitais de Sinais (DSP), em FPGA ou em circuitos integrados de aplicação específica (ASIC), permitem o desenvolvimento de equipamentos capazes de processar informações em tempo real.

Recentemente, uma nova transformada definida sobre corpos finitos, a Transformada Numérica de Pascal (TNP), foi introduzida [5]. A TNP se baseia no triângulo de Pascal modular e apresenta propriedades, decorrentes de sua estrutura autossimilar, que podem ser usadas na concepção de algoritmos rápidos. Neste trabalho são propostos algoritmos rápidos para computar a TNP. Na Seção 2, a definição da TNP é apresentada. Nas Seções 3, 4 e 5 são desenvolvidos algoritmos rápidos para a computação da TNP de comprimentos  $N = p$ ,  $N = k_p$  e  $N = p^r$ , respectivamente. Na Seção 6 são apresentadas as conclusões do trabalho.

## 2 | PRELIMINARES

Existem, pelo menos, 12 definições para a matriz de Pascal, todas baseadas no triângulo de Pascal [2]. Neste artigo, foi adotada a definição a seguir, que emprega aritmética sobre o corpo finito  $GF(p)$ .

**Definição 2.1.** A Transformada Numérica de Pascal (TNP) da sequência  $v = (v_0, \dots, v_{N-1})$ ,  $v_i \in GF(p)$ , é a sequência  $V = (V_0, V_1, \dots, V_{N-1})$ ,  $V_k \in GF(P)$ , em que

$$V_k := \sum_{i=0}^{N-1} C_{i+k}^i v_i \pmod{p} \quad (1)$$

A complexidade multiplicativa direta do cálculo da TNP de comprimento  $N$ , por meio da Definição 2.1, é  $M(N) = N^2$ . Pode-se mostrar [5] que, para  $N = p$ , a matriz da TNP é uma matriz triangular superior. Neste caso, a complexidade multiplicativa direta, incluindo-se as multiplicações triviais (multiplicações por  $\pm 1$ ), é

$$M(N) = \frac{p}{2}(p + 1). \quad (2)$$

É possível reduzir esta complexidade multiplicativa observando certas simetrias decorrentes da estrutura do triângulo de Pascal. Assim, inicialmente considera-se um

exemplo em que tais simetrias podem ser observadas e exploradas.

**Exemplo 2.1.** Considere a TNP de comprimento  $N = 7$  da sequência  $v = (v_0, \dots, v_6)^T$ ,  $v_i \in GF(7)$ ,  $V = (V_0, V_1, \dots, V_6)^T$ ,  $V_k \in GF(7)$  em que

$$V_k := \sum_{i=0}^6 c_{i+k}^i v_i \pmod{7}.$$

Em formato matricial, tem-se  $V = P_7 v$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

Note que:

- I. Os coeficientes não nulos da segunda linha da matriz  $P$  são congruentes, módulo 7, aos inteiros 1, 2, 3, -3, -2 e -1, respectivamente. Assim,  $V_1$  pode ser escrita como  $V_1 = (v_0 - v_5) + 2(v_1 - v_4) + 3(v_2 - v_3)$ , reduzindo-se de seis para três o número de multiplicações para sua computação. O mesmo raciocínio pode ser aplicado às outras linhas pares.
- II. Os coeficientes não nulos das linhas ímpares são simétricos. Explorando-se esta simetria,  $V_2$ , por exemplo, pode ser computada como  $V_2 = (v_0 + v_4) + 3(v_1 + v_3) + 6v_2$ , reduzindo-se o número de multiplicações de cinco para três. O mesmo raciocínio pode ser empregado às outras linhas ímpares.

### 3 I A TNP DE COMPRIMENTO PRIMO

As simetrias do triângulo de Pascal modular [1], observadas no Exemplo 2.1, levam ao resultado mostrado a seguir.

**Proposição 3.1.** A TNP de comprimento  $N=p$ , em que  $p$  é um número primo ímpar, pode ser computada por meio de um algoritmo de complexidade multiplicativa dada por

$$M(N) = M(p) = \left( \frac{p^2 - 4p + 3}{4} \right). \quad (3)$$

**Prova.** Se  $M(p) = M_{par}(p) + M_{impar}(p)$ , denotam, respectivamente, as complexidades multiplicativas associadas às linhas pares e às linhas ímpares no cálculo da TNP de comprimento  $p$ , então pode-se escrever  $M_{par}(p)$  e  $M_{impar}(p)$ , em que

$$M_{par}(p) = 1 + 2 + \dots + \left(\frac{p-1}{2}\right) = \left(\frac{p^2-1}{8}\right),$$

$$M_{impar}(p) = 1 + 2 + \dots + \left(\frac{p-1}{2}\right) + p = \left(\frac{p^2-1}{8}\right) + p.$$

Uma vez que a primeira linha somente requer multiplicações triviais, e cada uma das  $(p-1)$  linhas subsequentes possui pelo menos uma multiplicação trivial, resulta

$$M(p) = M_{par}(p) + M_{impar}(p) - p - (p-1) = \left(\frac{p^2 - 4p + 3}{4}\right).$$

O valor para  $M(p)$  indicado na Eq.(3) é uma cota superior para a complexidade multiplicativa, uma vez que existe a possibilidade de se ter outras multiplicações triviais na matriz da TNP. Para se obter uma expressão que não inclua multiplicações triviais, é necessário contabilizar quantos termos são congruentes a  $\pm 1$  módulo  $p$  na matriz  $P_N$ . Assim, por exemplo, para o caso  $N = 11$  tem-se, pela Eq.(3),  $M(11) = 20$ . Todavia, uma análise da matriz  $P_{11}$  revela que o número de multiplicações não triviais é 17. Na Tabela 3.1 são apresentadas as complexidades multiplicativas para o cálculo da TNP, cujo comprimento  $N$  é um número primo ímpar, considerando-se os métodos: i) Método direto (Eq.(2)); ii) Método rápido baseado na Proposição 3.1 (Eq.(3)).

	Comprimento						
Método	7	11	13	17	19	23	29
Eq.(2)	28	66	91	153	190	276	435
Eq.(3)	6	20	30	56	72	110	182

Tabela 3.1: Comparativo da complexidade multiplicativa da TNP de comprimento  $p$ , sobre  $\mathbb{F}_p$ , de acordo com as Equações (2) e (3).

#### 4 | A TNP DE COMPRIMENTO $N = kp$

Quando a matriz da TNP possui uma ordem do tipo  $N = kp, k > 1$  então é possível decompor esta matriz como o produto de Kronecker  $P_N = P_k \otimes P_p$  [6].

**Exemplo 4.1.** Considere a matriz da TNP sobre  $GF(5)$  de comprimento  $N=15$

$$P_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que  $P_{15}$  pode ser escrita como

$$P_{15} = \begin{bmatrix} P_5 & P_5 & P_5 \\ P_5 & 2P_5 & 3P_5 \\ P_5 & 3P_5 & P_5 \end{bmatrix}$$

e a complexidade multiplicativa para a TNP de comprimento  $N = 15$ , sobre  $GF(5)$ , pode ser expressa em função da complexidade da TNP para  $N+5$ . Assim,

$$V = \begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_5 & P_5 & P_5 \\ P_5 & 2P_5 & 3P_5 \\ P_5 & 3P_5 & P_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix},$$

em que  $\hat{V}_0 = (V_0, V_1, \dots, V_4)$ ,  $\hat{V}_1 = (V_5, V_6, \dots, V_9)$ ,  $\hat{V}_2 = (V_{10}, V_{11}, \dots, V_{14})$ ,  $\hat{v}_0 = (v_0, v_1, \dots, v_4)$ ,  $\hat{v}_1 = (v_5, v_6, \dots, v_9)$ ,  $\hat{v}_2 = (v_{10}, v_{11}, \dots, v_{14})$ .

No cálculo de  $\hat{V}_0$  as parcelas  $(P_5\hat{v}_0, P_5\hat{v}_1, P_5\hat{v}_2)$  foram computadas e armazenadas, de modo que, na computação das componentes, não é necessário efetuar nenhuma outra multiplicação por, mas apenas multiplicações para cada termo binomial.

**Teorema 4.1.** A TNP de comprimento, em que é um número primo ímpar, pode ser computada por meio de um algoritmo de complexidade multiplicativa dada por

$$M(N) = M(kp) = \left( \frac{p^2 - 4p + 3}{4} \right) + p(k - 1)^2. \quad (4)$$

**Prova.** Note que quando  $p = 2$  ou  $p=3$  só existem multiplicações triviais. A prova

deste Teorema pode ser feita considerando-se , ou seja,

$$V = \begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \\ \vdots \\ \hat{V}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_p & P_p & \cdots & P_p \\ P_p & C_2^1 P_p & \cdots & C_k^1 P_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_p & C_k^{k-1} P_p & \cdots & C_{2k-2}^{k-1} P_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{v}_{k-1} \end{bmatrix},$$

Note que o vetor coluna  $v$  possui  $k$  componentes, em que cada uma possui dimensão  $p$ . Armazenando-se todos os produtos resultantes da multiplicação da primeira linha da matriz  $P_N$  pelo vetor  $v$ , evitam-se multiplicações adicionais no cálculo das outras componentes de  $V$ . Cada produto requer  $M(p)$  multiplicações, conforme Eq.(3). Note a existência de uma submatriz  $(k-1) \times (k-1)$  em que as únicas multiplicações necessárias são pelos termos binomiais e envolve  $p$  multiplicações cada. O resultado segue.

Na Tabela 4.1 é apresentada a complexidade multiplicativa  $M(N)$ , dada pela Eq.(4), para o cálculo da TNP de comprimento  $N = kp$ . Para efeito de comparação é mostrada a complexidade multiplicativa direta, bem como a redução nesta complexidade proporcionada pelo algoritmo rápido.

N	10	15	20	30	35
M(N)	9	26	53	137	194
$N^2$	100	225	400	900	1225
Redução (%)	91	88,44	86,75	84,77	84,16

Tabela 4.1: Complexidade multiplicativa da TNP de comprimento  $N = 5k, k > 1$ .

## 5 | A TNP DE COMPRIMENTO $N = p^r$

Quando o comprimento da transformada é do tipo  $N = p^r$ , então é possível usar o fato de que a matriz da TNP pode ser decomposta como  $P_N = P_p \otimes P_{p^{r-1}}$

**Teorema 5.1.** A TNP de comprimento  $N = p^r$ , em que  $p$  é um número primo ímpar, pode ser computada por meio de um algoritmo de complexidade multiplicativa dada por

$$M(p^r) = p^{r-1}M(p) + (r-1)p^{r-1} \left( \frac{p^2 - 3p + 2}{2} \right), \quad (5)$$

em que  $M(p)$  é dado pela Eq.(3).

**Prova.** A prova é feita por indução em  $r$ .



Passo Base: Fazendo-se  $r = 1$ , na Eq.(5), resulta em  $M(p) = M(p)$

Passo da Indução: Considera-se a Eq.(5) verdadeira e faz-se  $N = p^{r+1}$ .

Expressando  $P_{p^{r+1}}$  na forma  $P_{p^{r+1}} = P_p \otimes P_{p^r}$ , tem-se

$$V = \begin{bmatrix} \hat{V}_0 \\ \hat{V}_1 \\ \vdots \\ \hat{V}_{p-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{p^r} & P_{p^r} & \cdots & P_{p^r} & P_{p^r} \\ P_{p^r} & 2P_{p^r} & \cdots & (P-1)P_{p^r} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ P_{p^r} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{v}_{p-1} \end{bmatrix},$$

em que os vetores  $\hat{V}_k$  e  $\hat{v}_i$  possuem  $p^r$  componentes,  $i, k = 0, 1, \dots, p-1$ . Observe que

$$\hat{V}_0 = P_{p^r} \hat{v}_0 + P_{p^r} \hat{v}_1 + \cdots + P_{p^r} \hat{v}_{p-1},$$

em que cada uma das  $p$  parcelas contribui com  $M(p^r)$  multiplicações, resultando em uma quantidade de multiplicações igual a  $pM(p^r)$ . As linhas restantes só contêm multiplicações por coeficientes binomiais. Devido à estrutura triangular superior da matriz  $P_{p^{r+1}}$ , a quantidade de coeficientes binomiais é dada por

$$1 + 2 + \cdots + (p-2) = \left( \frac{p^2 - 3p + 2}{2} \right),$$

com  $p^r$  multiplicações para cada componente. Assim, resulta

$$\begin{aligned} M(p^{r+1}) &= pM(p^r) + p^r \left( \frac{p^2 - 3p + 2}{2} \right) \\ &= p^r M(p) + (r-1)p^r \left( \frac{p^2 - 3p + 2}{2} \right) + p^r \left( \frac{p^2 - 3p + 2}{2} \right) \\ &= p^r M(p) + rp^r \left( \frac{p^2 - 3p + 2}{2} \right). \end{aligned}$$

e o resultado segue.

Na Tabela 5.1 é apresentada a complexidade multiplicativa  $M(N)$ , dada pela Eq.(5), para o cálculo da TNP de comprimento  $N = P^R$ , em que  $p$  é um primo maior do que 3. Para efeito de comparação é mostrada a complexidade multiplicativa direta, bem como a redução nesta complexidade proporcionada pelo algoritmo rápido.

N	25	125	625	3.125	15.625
M(N)	40	350	2.500	16.250	100.000
$5^r \left( \frac{5^r + 1}{2} \right)$	325	7.875	195.625	4.884.375	122.078.125
Redução (%)	87,69	95,55	98,72	99,66	99,92

Tabela 5.1: Complexidade multiplicativa da TNP de comprimento  $N = 5^r$ ,  $r > 1$

## 6 | CONCLUSÕES

Neste trabalho são apresentados algoritmos rápidos para computar a Transformada Numérica de Pascal. O fato da TNP usar uma matriz de Pascal modular, trazendo consigo todo um conjunto de propriedades e de simetrias, produz um cenário promissor para a construção de algoritmos rápidos para sua computação. Tendo em vista que a matriz da TNP é triangular superior, quando sua ordem  $N$  é uma potência de um número primo  $p$ , foram propostos algoritmos rápidos para a computação de transformadas de comprimentos  $N = kp$  e  $N = p^r$ . Os algoritmos propostos resultaram em uma redução de complexidade multiplicativa entre 84% e 99,9%. Em relação a esta complexidade, os melhores resultados são obtidos quando o comprimento da TNP é uma potência de um primo.

## REFERÊNCIAS

- [1] Bacher, R.; Chapman, R. Symmetric Pascal matrices modulo , **European Journal of Combinatorics**, 25: 459-473, 2004. DOI: 10.1016/j.ejc.2003.06.001.
- [2] Birregah, B.; Dobb, P. K.; Adjallah, K. H. A systematic approach to matrix forms of the Pascal triangle: The twelve triangular matrix forms and relations, **European Journal of Combinatorics**, 31:1205-1216, 2010. DOI: 10.1016/j.ejc.2009.10.009.
- [3] Lima, J. B.; Novaes, L. F. G. Image encryption based on the fractional Fourier transform over finite fields, **European Journal of Combinatorics**, 94:521-530,2014. DOI: 10.1016/j.sigpro.2013.07.020.
- [4] Lima, P. H. E. S.; Lima, J. B.; Campello de Souza, R. M. Fractional Fourier, Hartley, cosine and sine number-theoretic transforms based on matrix functions, **Circuits, Systems and Signal Processing**, 36:2893-2916, 2017. DOI: 10.1007/s00034-016-0447-8.
- [5] Paschoal, A. J. A., Campello de Souza, R. M.; De Oliveira, H. M. A transformada numérica de Pascal, In: **XXXIII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações – SBrT 2015**, p. 59-62, setembro 2015.
- [6] Paschoal, A. J. A.; Campello de Souza, R. M. Algoritmos rápidos para a transformada numérica de Pascal, In: **XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional – CNMAC 2017**. Vol 6, n.1, p. 010310-1: 010310-7, DOI: 10.5540/03.2018.006.01.0310.

## ANÁLISE DE CÁLCULO DIFERENCIAL USANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

### **Amanda Barretos Lima Garuth**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,  
Cornélio Procópio, UTFPR, amandagaruth@utfpr.  
edu.br.

### **Brenda Anselmo Mendes**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,  
Cornélio Procópio, UTFPR, brendamendes99@  
hotmail.com.

### **Isabela Geraldo Reghin**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,  
Cornélio Procópio, UTFPR, reghinisabela@  
hotmail.com.

### **Rosângela Teixeira Guedes**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,  
Cornélio Procópio, Departamento de Matemática,  
Cornélio Procópio, UTFPR, rtguedes@utfpr.edu.  
br.

**RESUMO:** O objetivo desta pesquisa é apresentar atividades e análise dos conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná do Câmpus de Cornélio Procópio (UTFPR-CP). A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é base para importantes aplicações científicas e tecnológicas na maioria dos campos das ciências pura e aplicada e no entanto, mas nota-se que os alunos apresentam dificuldades no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina, o que acarreta em um alto índice de reprovações e

evasões em cursos de graduação. Pensando nisto, a professora que ministrou a disciplina de Cálculo Diferencial no segundo semestre de 2017 e primeiro semestre de 2018, propôs um Projeto de Extensão, que começou em outubro de 2017 e ainda está em andamento, pautado em construções e animações no Software Geogebra como possibilidade de aprendizagem. Os alunos participantes do Projeto são alunos que estavam cursando ou já haviam cursado a disciplina de Cálculo Diferencial. A metodologia empregada foi análise, construção e animação dos conteúdos de Cálculo Diferencial no Software Geogebra, e os reuniões semanais para o desenvolvimento das atividades no Laboratório de Informática da Matemática (LIM) da UTFPR-CP.

**PALAVRAS-CHAVE:** Álgebra; Aprendizagem; Cálculo Diferencial; Geogebra; Geometria.

### 1 | INTRODUÇÃO

No ambiente educacional uma das grandes buscas dos docentes em relação aos alunos é a aprendizagem. Este processo é complexo, uma vez que o aprender acaba sendo um conjunto de ações, na qual o indivíduo adquire informações, expande as ideias e conceitos, constrói novos significados, para assim utilizar esse conhecimento na resolução de problemas

da vida cotidiana. Na busca de estratégias para compreender as interfaces do processo de ensino e aprendizagem muitos estudiosos têm se dedicado sobre diferentes perspectivas e dentre elas encontra-se a inserção de situações onde o aluno sinta-se motivado a aprender, aproximando os conceitos às situações vivenciadas no cotidiano, tornando a aprendizagem mais relevante e significativa ao aluno. Sendo assim, é possível perceber em encontros e eventos científicos de Educação Matemática que existe, por parte dos professores, uma busca e interesse por materiais, recursos e atividades diversificadas que tornem suas aulas mais atrativas aos olhos dos alunos.

A introdução da Informática na Educação, segundo a proposta de mudança pedagógica, exige formação bastante ampla e profunda dos educadores. Não se trata de criar condições para o professor simplesmente dominar o computador ou o software, mas sim, auxiliá-lo a desenvolver conhecimento sobre o próprio conteúdo e sobre como o computador pode ser integrado no desenvolvimento desse conteúdo. Nesse enfoque, a questão da formação do professor mostra-se de fundamental importância no processo de introdução da Informática na Educação, exigindo soluções inovadoras e novas abordagens que fundamentem os cursos de formação (VALENTE, 2005).

As disciplinas de Matemática são consideradas pelos alunos, mesmo por aqueles que frequentam cursos da área de ciências exatas, como sendo as mais difíceis de suas grades curriculares e, como consequência desta dificuldade, são elas as que geram maiores índices de reprovação. Em particular, nas Universidades, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, propostas nos primeiros e segundos semestres dos cursos tem sido a principal protagonista desses elevados índices de reprovações e evasões estudantis. No entanto, observa-se que o ensino da matemática tem enfrentado dificuldades no que diz respeito ao seu ensino/aprendizagem. Encontrase, na literatura, estudos que buscam entender as razões dessas dificuldades e, ao mesmo tempo, encontrar alternativas que possam contribuir para a aprendizagem dos conteúdos estudados nessas disciplinas (CURY, 2006; FERREIRA & BRUMATTI, 2009 e SILVA & FERREIRA, 2009).

As dificuldades tornam-se bastante visíveis pela referida disciplina, por apresentar um alto grau de abstração e necessidade de representações gráficas e/ou algébricas, motivos esses considerados pelos acadêmicos como sendo difíceis. Dessa maneira, desenvolveu-se nesse Projeto de Extensão a utilização do conceito matemático ligado à tecnologia do Software Geogebra, com o objetivo de auxiliar os acadêmicos na compreensão dos principais conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial, abordando os principais conceitos de funções, limites, derivadas de função de uma única variável real e suas representações gráficas.

## 2 | REFERENCIAL TEÓRICO

A utilização de novas tecnologias como os *softwares* educacionais podem auxiliar na solução de problemas encontrados no âmbito educacional desde o ensino

fundamental ao superior. Os *softwares* matemáticos são apresentados como uma nova proposta pedagógica, utilizados para a motivação da aprendizagem e a participação mais ativa do aluno. O *Geogebra* é um *software* matemático livre, desenvolvido por Markus Hohenwarter no início de 2001 na *University of Salzburg*, na Áustria, para ser utilizado em ambiente de sala de aula, tendo continuidade na *Florida Atlantic University*.

Pelo *Geogebra* se tratar de um *software* livre, os colaboradores podem realizar alterações em seus códigos fontes atualizando ou acrescentando novas ferramentas, a fim de disponibilizarem melhoramentos a todos que o utilizem.

O Cálculo Diferencial e Integral foi desenvolvido por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e por Isaac Newton (1643-1727). O Cálculo Diferencial e Integral tem importância nas diversas ciências, tais como, na matemática pura e aplicada, química, física, engenharias.

O estudante de Cálculo Diferencial e Integral deve ter um conhecimento em certas áreas da matemática, como funções (modular, exponencial, logarítmica, par, ímpar, afim e segundo grau, por exemplo), trigonometria, polinômios, geometria plana, espacial e analítica).

### 3 | PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia empregada foi de reuniões semanais realizadas no Laboratório de Informática da matemática (LIM) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná na cidade de Cornélio Procópio (UTFPR-CP), sendo os participantes, alunos que estavam cursando a disciplina de Cálculo Diferencial no segundo semestre de 2017, novos alunos entraram no Projeto no primeiro semestre de 2018 e alguns que já cursaram a disciplina em outros períodos, e a professora coordenadora do Projeto é a mesma da disciplina.

Nessas reuniões desenvolveu-se atividades do conteúdo de Cálculo Diferencial utilizando o Geogebra. Após a construção geométrica e animação das atividades, eram feitas análises e discussões dos resultados. Em seguida, fazia-se as formalizações da definição, teoremas e resultados matemáticos desta disciplina.

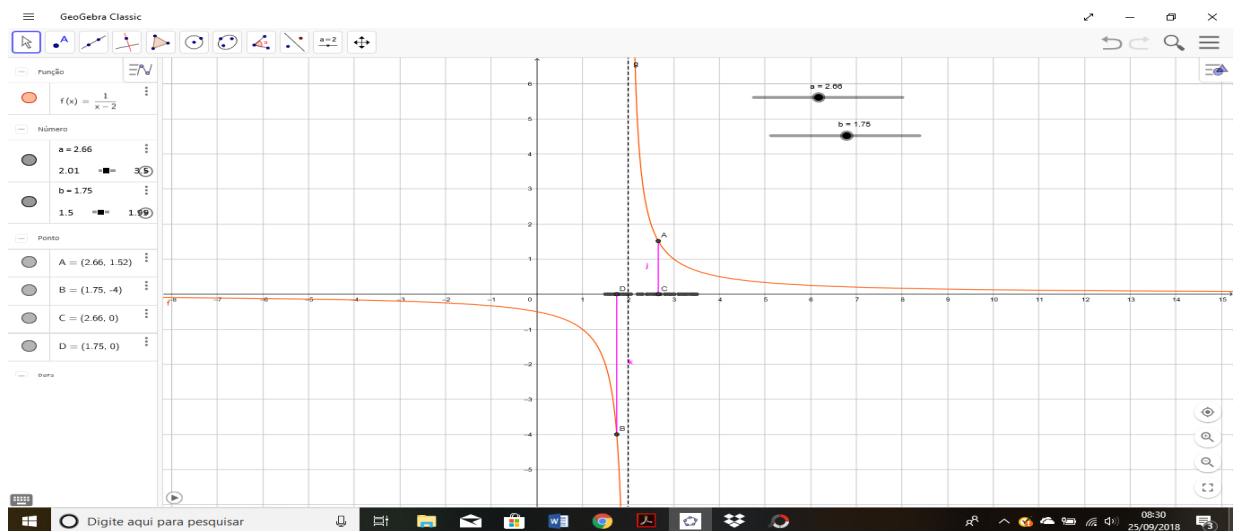
Aqui apresentamos algumas das atividades realizadas nesse Projeto de Extensão, apresentando os comandos para serem realizadas as atividades no Geogebra e a formalização dos conteúdos.

#### Atividade 1: Assíntota Vertical

- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = 1/(x-2)$ ;
- Digite na caixa de entrada a reta  $x=2$ (coloque opção tracejado nesta reta);
- Selecione a opção CONTROLE DESLIZANTE e clique sobre a tela, criando o controle deslizante  $2.01 \leq a \leq 3.5$ . Repita o processo e crie o controle deslizante  $1.5 \leq b \leq 1.99$ ;



- Digite na caixa de entrada os pontos  $A = (a, f(a))$  e  $B = (b, f(b))$ ;
- Selecione a opção RETA PERPENDICULAR, clique no ponto A e o eixo x, criando a reta perpendicular g. Da mesma forma, clique sobre o ponto B e o eixo x, criando a reta perpendicular h;
- Selecione a opção INTERSECÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS, clique sobre o ponto A e o eixo x, e clique em seguida sobre o ponto B e o eixo x, criando os pontos C e D, respectivamente;
- Selecione a opção SEGUIMENTO e crie os seguimentos AC e BD;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto C, e marque a opção EXIBIR RASTRO. Faça o mesmo com o ponto D;
- Clique sobre os controles deslizantes com o botão direito do mouse e selecione a opção ANIMAÇÃO.



Fonte: Autoria Própria (2018).

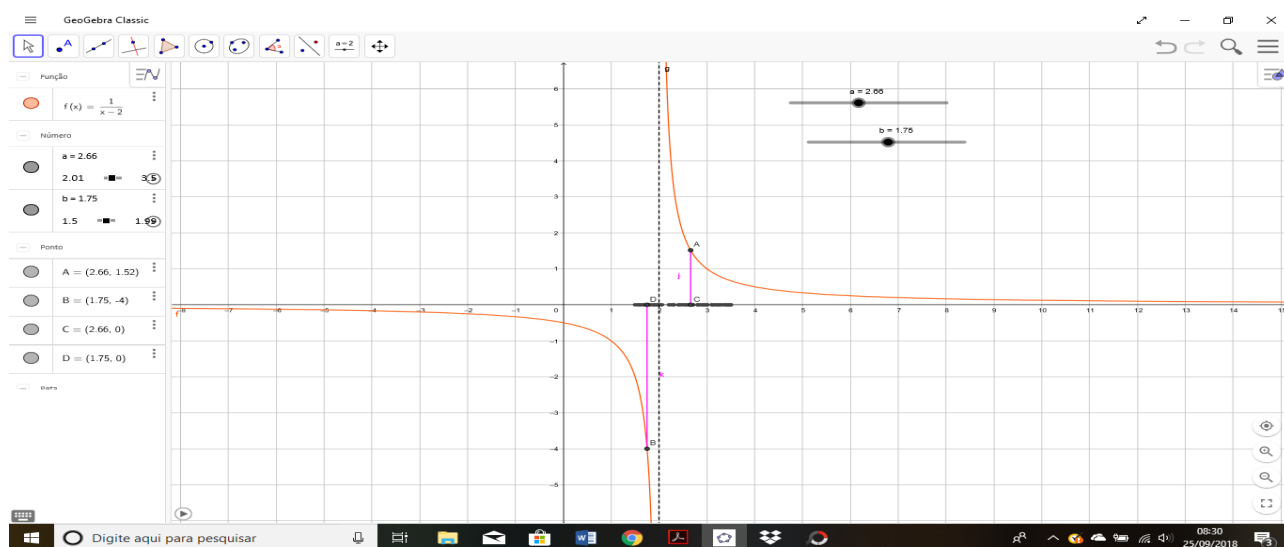
## Atividade 2: Assíntota horizontal

- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = 1/(x-2)$ ;
- Digite na caixa de entrada a reta  $x=2$ ;
- Digite na caixa de entrada a reta  $y=0$ (eixo x);
- Selecione a opção CONTROLE DESLIZANTE e clique sobre a tela, criando o controle deslizante  $3 \leq a \leq 10$ . Repita o processo e crie o controle deslizante  $-5 \leq b \leq 1$ ;
- Digite na caixa de entrada os pontos  $A = (a, f(a))$  e  $B = (b, f(b))$ ;
- Selecione a opção RETA PERPENDICULAR, clique no ponto A e o eixo x, criando a reta perpendicular g. Da mesma forma, clique sobre o ponto B e o eixo x, criando a reta perpendicular h;
- Selecione a opção INTERSECÇÃO ENTRE DOIS OBJETOS, clique sobre o ponto A e o eixo x, e clique em seguida sobre o ponto B e o eixo x, criando os pontos C e D, respectivamente;

- Selecione a opção SEGUIMENTO e crie os seguimentos AC e BD;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto C, e marque a opção EXIBIR RASTRO. Faça o mesmo com o ponto D;
- Clique sobre os controles deslizantes com o botão direito do mouse e selecione a opção ANIMAÇÃO.

**Definição 2:** A reta  $y=b$  é denominada uma assíntota horizontal do gráfico da função  $f$  se pelo menos uma das seguintes afirmações for válida:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  e para um número  $N$ , se  $x > N$ , então  $f(x) \neq b$ ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  e para um número  $N$ , se  $x < N$ , então  $f(x) \neq b$ .



Fonte: Autoria Própria (2018).

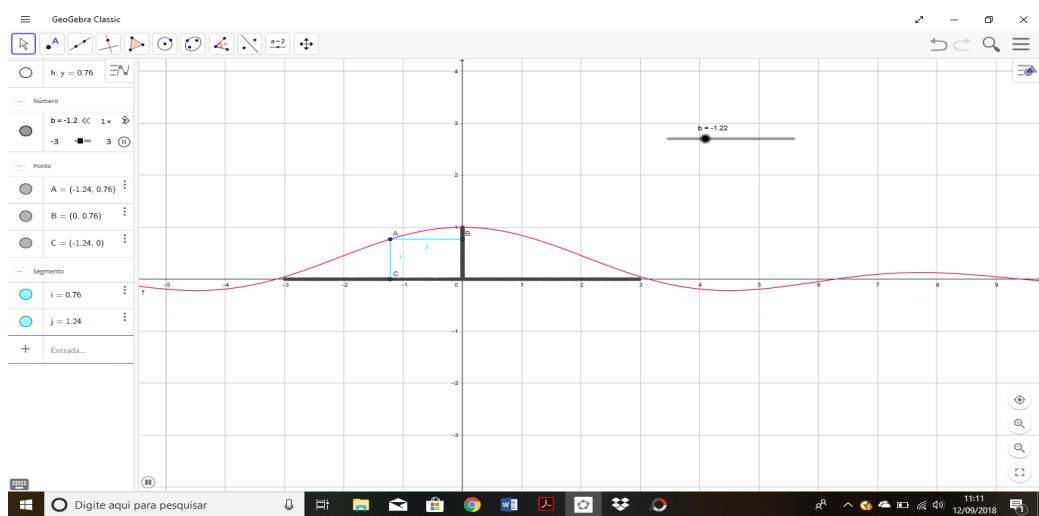
### Atividade 3: Limite de Função Trigonométrica

- Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE (janela 10) e crie um controle  $-3 \leq a \leq 3$ ;
- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = (\sin x)/x$ ;
- Digite na caixa de entrada o ponto  $A = (a, f(a))$ ;
- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR (janela 4), a seguir trace uma reta perpendicular ao eixo  $x$ , passando por  $A$ . Essa reta será rotulada automaticamente como reta  $g$ ;
- Trace agora uma reta perpendicular ao eixo  $y$ , passando por  $A$ . Essa reta será rotulada automaticamente como reta  $h$ ;
- Ative a ferramenta INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS (janela 2), e marque a intersecção da reta  $g$  com o eixo  $x$ . Da mesma forma marque a intersecção da reta  $h$  com o eixo  $y$ . Os pontos de intersecção serão rotulados como  $B$  e  $C$ , respectivamente.

- Ative a ferramenta SEGUIMENTO (janela 3), e crie o seguimento AB e AC;
- Ative a ferramenta EXIBIR/ESCONDER OBJETO (janela 11) e clique sobre as retas g e h;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto B, e marque a opção EXIBIR RASTRO. Faça o mesmo com o ponto C;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção ANIMAÇÃO.

**Definição 4:** Considere a função  $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$ , definida em  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Avaliando o comportamento da função para valores de x próximos a 0, temos:

**Teorema 4:** 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

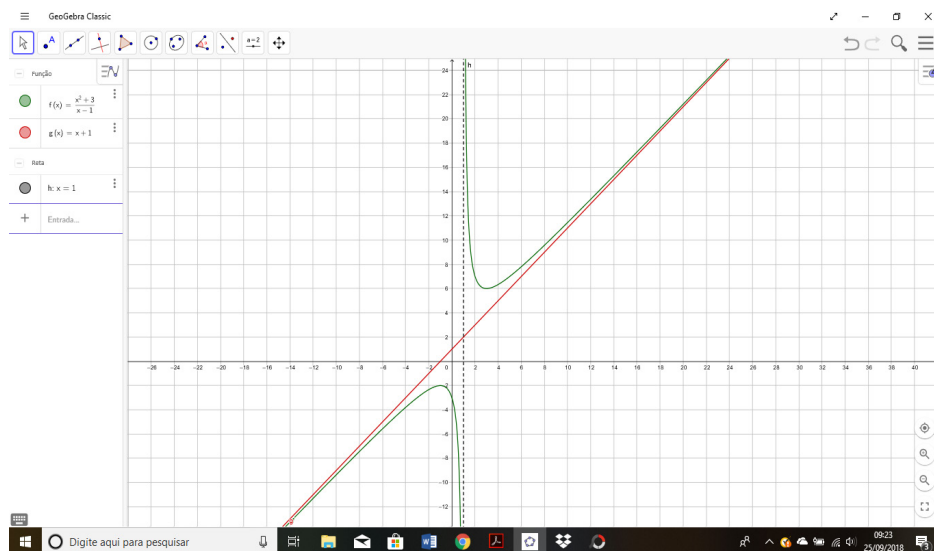


Fonte: Autoria Própria (2018).

#### Atividade 4: Assíntota Oblíqua

- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = (x^2 + 3) / (x-1)$ ;
- Digite na caixa de entrada a reta  $h = 1$ ;
- Digite na caixa de entrada a função  $g(x) = x+1$ .

**Definição 4:** A reta  $y = mx + b$  é denominada uma assíntota oblíqua do gráfico da função f se  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$ , onde  $m \neq 0$ .



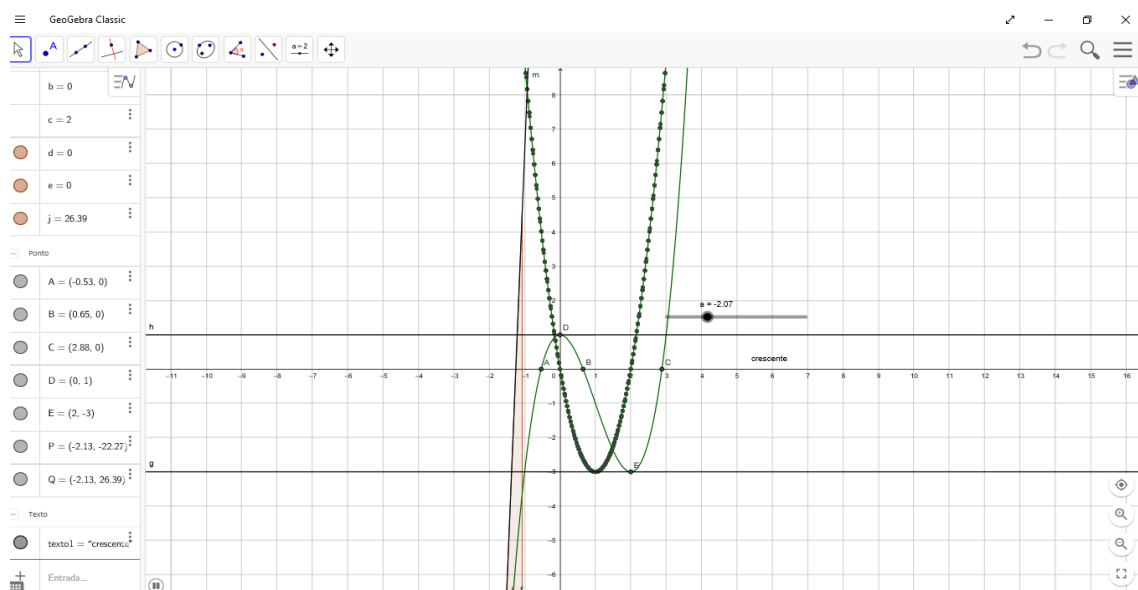
Fonte: Autoria Própria (2018).

### Atividade 5: Teste da Derivada Primeira

- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = x^3 = 3x^2 + 1$ ;
- Digite na caixa de entrada também a função  $m(x) = 3x^2 - 6x$ ;
- Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e crie o controle de  $-5 \leq a \leq 5$ ;
- Digite na caixa de entrada o ponto  $P = (a, f(a))$ ;
- Insira na caixa de entrada o comando Raiz [f], obtendo assim três pontos que serão nomeados automaticamente como A, B e C;
- Digite na caixa de entrada o comando Extremo [f], obtendo assim os pontos D e E;
- Novamente digite na caixa de entrada o comando  $b = x(D)$  e  $c = x(E)$ ;
- Insira na caixa de entrada, o comando: Se [ $a < b$ , “decrecente”, Se [ $b < a < c$ , “decrecente”, Se [ $a > c$ , “crescente”]]];
- Na caixa de entrada digite o comando, Tangente [E,f], criando assim a reta tangente a f, no ponto E, nomeada automaticamente por d;
- Digitando Inclinação [d], na caixa de entrada, obtemos a inclinação;
- Na caixa de entrada digite o comando, Tangente [D,f], criando assim a reta tangente a f, no ponto D, nomeada automaticamente por g. Após digite o comando: Inclinação [g];
- Na caixa de entrada digite o comando, Tangente [P,f], criando assim a reta tangente a f, no ponto P, nomeada automaticamente por j. Após digite o comando: Inclinação [j];
- Insira na caixa de entrada:  $Q = (x(P), j)$ ;
- Selecione a opção HABILITAR RASTRO, no ponto Q;
- Ative a opção ANIMAÇÃO, clicando com o botão direito do mouse e depois o esquerdo sobre o controle deslizante.

**Teorema 5:** (Teste derivada de primeira): Seja  $f$  uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto  $(a, b)$  contendo um número  $c$  e suponha que  $f'$  exista em todos os pontos de  $(a, b)$  exceto possivelmente em  $c$ :

- I. Se  $f'(x) > 0$  para todos os valores de  $x$  em algum intervalo aberto tendo  $c$  como extremo direito e se  $f'(x) < 0$  para todos os valores de  $x$  em algum intervalo aberto tendo  $c$  como extremo esquerdo então  $f$  terá um valor máximo relativo em  $c$ .
- II. Se  $f'(x) < 0$  para todos os valores de  $x$  em algum intervalo aberto tendo  $c$  como extremo direito e se  $f'(x) > 0$  para todos os valores de  $x$  em algum intervalo aberto tendo  $c$  como extremo esquerdo, então  $f$  terá um mínimo relativo em  $c$ .



Fonte: Autoria Própria (2018).

## Atividade 6: Sinal da Derivada de Primeira Ordem

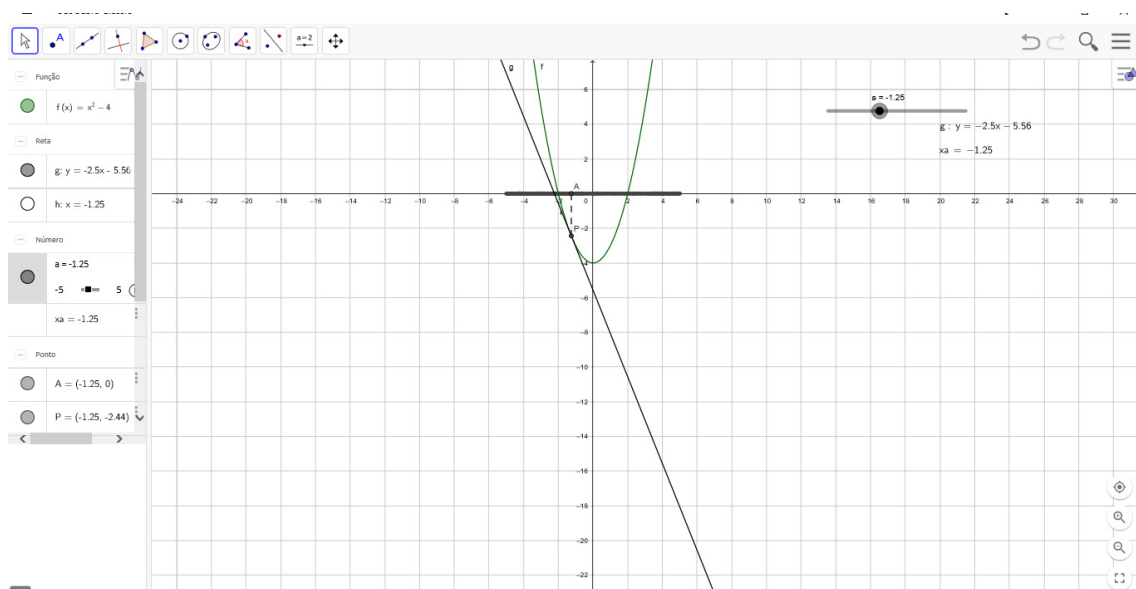
- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = x^2 - 4$ .
- Selecione a opção CONTROLE DESLIZANTE e clique sobre a tela, criando um controle deslizante de  $-5 \leq a \leq 5$ .
- Digite na caixa de entrada o ponto  $P = (a, f(a))$ .
- Digite na caixa de entrada o comando, Tangente  $[P, f]$  criando assim uma reta tangente em  $P$  à curva  $f$ , nomeando automaticamente por  $g$ .
- Selecione a opção RETA PERPENDICULAR, clique sobre o ponto  $P$  e depois sobre o eixo  $x$ .
- Selecione a opção INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, clicando sobre a reta perpendicular  $g$  e sobre o eixo  $x$ , obtendo assim o ponto  $A$ .
- Desative a opção EXIBIR OBJETO, clicando com o botão direito do mouse e depois o esquerdo sobre a reta perpendicular  $h$ .

- Ativando a ferramenta SEGMENTO, crie o segmento , com o botão direito do mouse, selecione a opção
- Digite na caixa de entrada  $x_a = a$ , arraste da janela de visualização  $x_a = a$  e deixe sobre a tela perto do controle deslizante.
- Selecione na janela de visualização a equação da reta tangente e arraste-a para próximo do controle deslizante.

Selecione a opção HABILITAR RASTRO no ponto A e com o botão direito do mouse clique sobre o controle deslizante e selecione a opção ANIMAR.

**Teorema 6:** Seja  $f$  uma função contínua no intervalo fechado  $[a,b]$  e derivável no intervalo aberto  $(a,b)$ :

- se  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  em  $(a,b)$ , então  $f$  será crescente em  $[a,b]$ ;
- se  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  em  $(a,b)$ , então  $f$  será decrescente em  $[a,b]$ .



Fonte: Autoria Própria (2018).

### Atividade 7: Gráfico da Função da Derivada

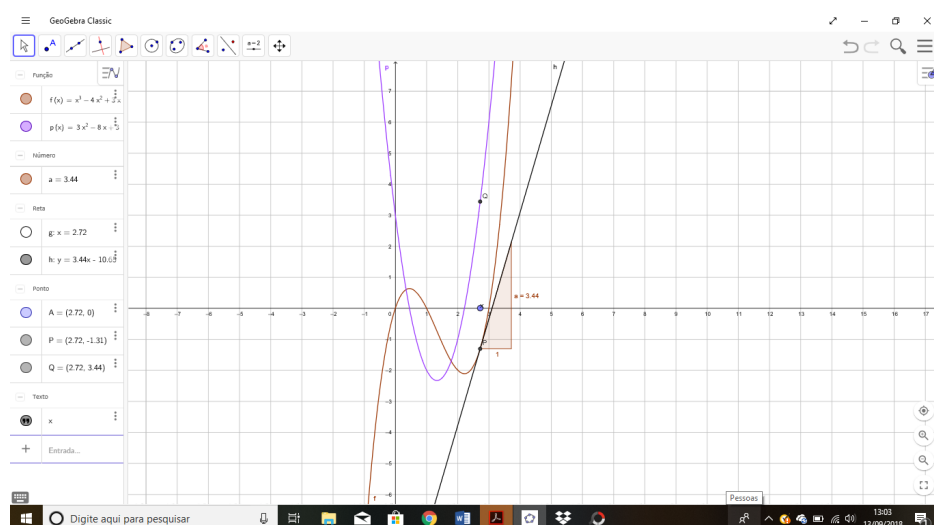
- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = (x^3) - (4 \cdot x^2) + (3 \cdot x)$ ;
- Ative a ferramenta PONTO (janela 2) e marque um ponto qualquer sobre o eixo x. Esse ponto será rotulado automaticamente como ponto A;
- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR (janela 4), a seguir trace uma reta perpendicular ao eixo x passando pelo ponto A. A reta será rotulada automaticamente como reta g;
- Ative a ferramenta INTERSECÇÃO DE DOIS OBJETOS (janela 2), e marque a intersecção entre a reta perpendicular g e a função f. Esse ponto será rotulado automaticamente como ponto B;
- Ative a ferramenta EXIBIR/ESCONDER OBJETO (janela 11) e clique sobre a reta g;



- Ative a ferramenta RETA TANGENTE (janela 4), a seguir trace a reta tangente a função  $f$  passando pelo ponto B. Essa reta será rotulada automaticamente como reta  $h$ ;
- Ative a ferramenta INCLINAÇÃO (janela 8), e marque a inclinação da reta tangente  $h$ . Essa inclinação será rotulada automaticamente como inclinação  $a$ ;
- Digite na caixa de entrada o ponto  $C=(x(B),a)$ ;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto C e marque a opção EXIBIR RASTRO;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto A e desmarque a opção EXIBIR RÓTULO;
- Ative a ferramenta TEXTO (janela 10) e clique num lugar próximo do ponto A. Ao aparecer uma janela texto, digite  $x$  e clique em ok;
- Clique com o botão direito do mouse sobre o texto  $x$  e selecione PROPRIEDADES;
- Clique sobre a guia POSIÇÃO na caixa de seleção e vincule o texto ao ponto A, assim teremos o ponto X;
- Clique sobre o ponto X e arraste sobre o eixo  $x$ .

**Definição 7:** Dizemos que  $f'(a)$  representa a derivada de uma função  $f$  em um número  $a$  do domínio de  $f$ , ou seja, a inclinação da reta tangente a  $f$  em  $a$ . Se deixarmos o número  $a$  variar, substituindo-o por pela variável  $x$ , chegamos à definição de função derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right), \text{ onde } \Delta x \text{ é a variação em } x.$$



Fonte: Autoria Própria (2018).

## Atividade 8: Limite de Função Exponencial

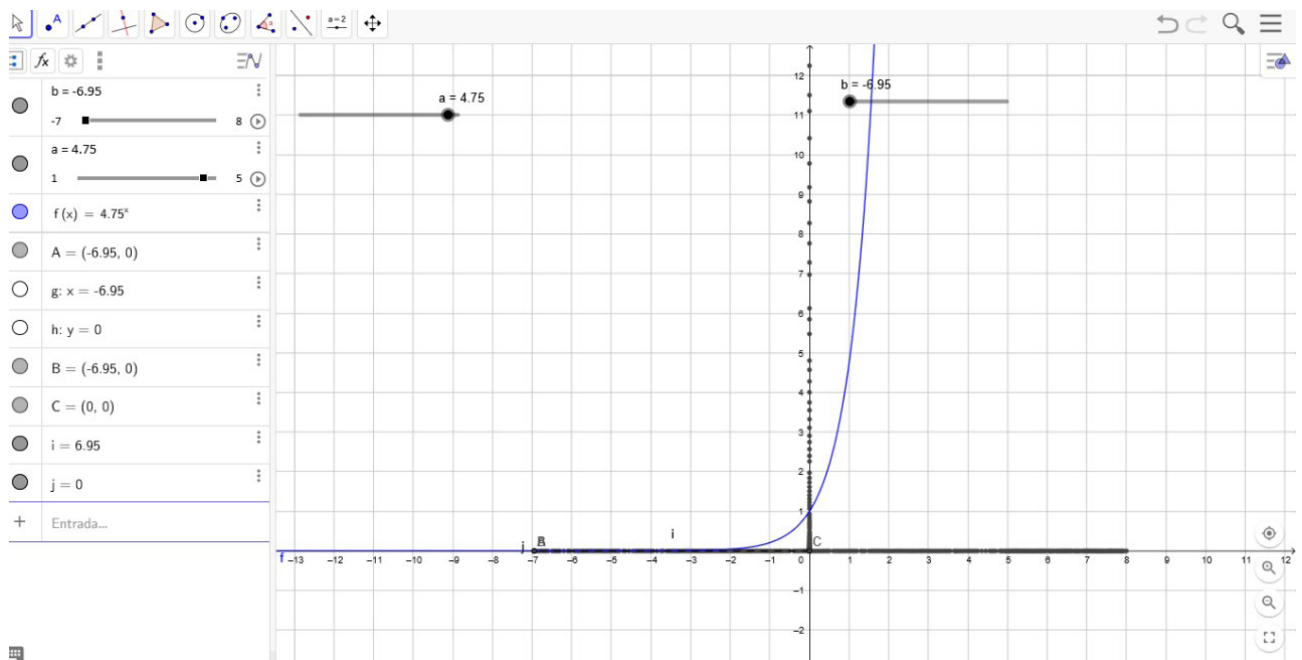
i)  $a > 0$ ,  $f$  é crescente

- Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e crie o controle de  $1 \leq a \leq 5$ , com incremento igual a 0,01
- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = a^x$ , observe assim o comportamento do gráfico de  $f(x) = a^x$ , onde  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .
- Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e crie o controle de  $-7 \leq b \leq 8$ , com incremento igual a 0,01
- Digite na caixa de entrada o ponto  $A = (b, f(b))$ .
- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR, clicando com o botão esquerdo sobre o ponto A e depois sobre o eixo x, obtendo uma reta perpendicular por A ao eixo x. Será nomeada automaticamente como g.
- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR, clicando com o botão esquerdo sobre o ponto A e depois sobre o eixo y, obtendo uma reta perpendicular por A ao eixo y. Será nomeada automaticamente como h.
- Selecione a opção INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, clicando com o botão esquerdo do mouse sobre as retas g e h.
- Clique com o botão direito do mouse sobre as retas g e h, desativando a opção EXIBIR OBJETO.
- Selecione a opção SEGMENTO, clicando primeiramente sobre o ponto A e depois sobre o ponto B. Ative novamente a opção SEGMENTO clicando primeiramente sobre o ponto A e depois sobre o ponto C, com isso obtemos os segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$ .
- Clicando com o botão esquerdo do mouse sobre o ponto A, ative a opção EXIBIR RASTRO, refaça o mesmo procedimento para os pontos B e C.
- ii)  $0 < a < 1$ , f é crescente
- Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e crie o controle de  $0 \leq a \leq 1$ , com incremento igual a 0,01
- Digite na caixa de entrada a função  $f(x) = a^x$ , observe assim o comportamento do gráfico de  $f(x) = a^x$ , onde  $0 < a < 1$ .
- Ative a ferramenta CONTROLE DESLIZANTE e crie o controle de  $-7 \leq b \leq 8$ , com incremento igual a 0,01
- Digite na caixa de entrada o ponto  $A = (b, f(b))$ .
- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR, clicando com o botão esquerdo sobre o ponto A e depois sobre o eixo x, obtendo uma reta perpendicular por A ao eixo x. Será nomeada automaticamente como g.
- Ative a ferramenta RETA PERPENDICULAR, clicando com o botão esquerdo sobre o ponto A e depois sobre o eixo y, obtendo uma reta perpendicular por A ao eixo y. Será nomeada automaticamente como h.
- Selecione a opção INTERSEÇÃO DE DOIS OBJETOS, clicando com o botão esquerdo do mouse sobre as retas g e h.
- Clique com o botão direito do mouse sobre as retas g e h, desativando a opção EXIBIR OBJETO.

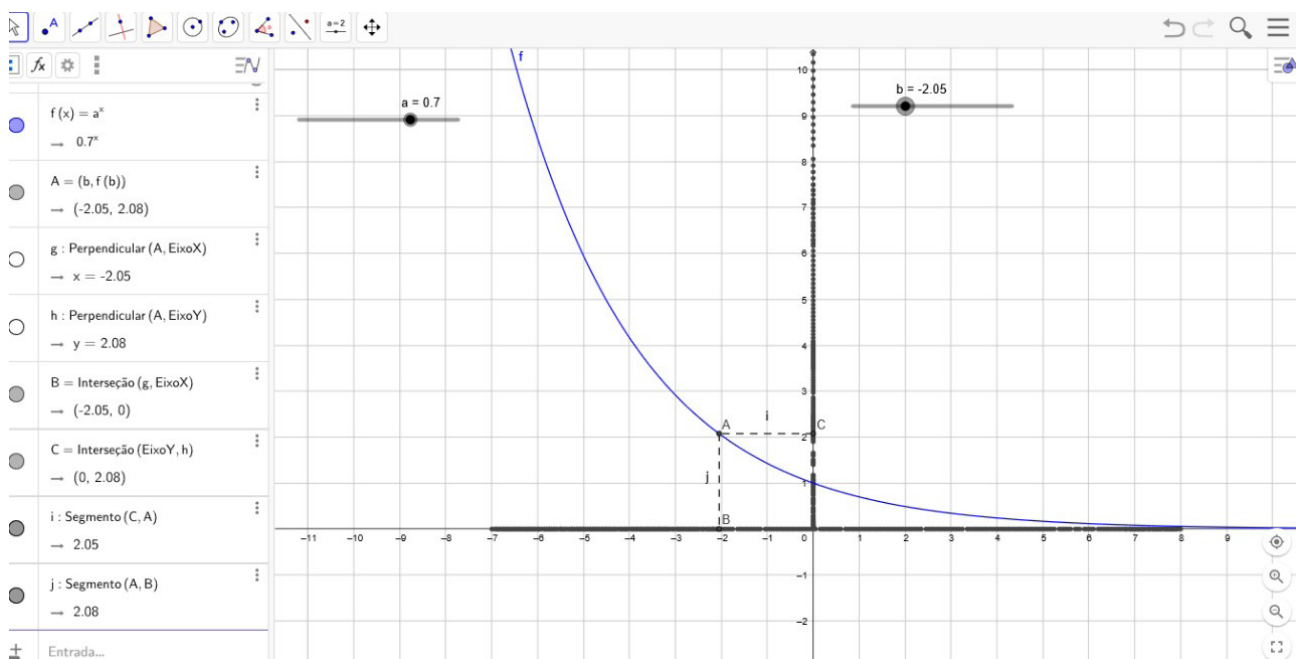
- Selecione a opção SEGMENTO, clicando primeiramente sobre o ponto A e depois sobre o ponto B. Ative novamente a opção SEGMENTO clicando primeiramente sobre o ponto A e depois sobre o ponto C, com isso obtemos os segmentos  $(AB)$  e  $(AC)$ .
- Clicando com o botão esquerdo do mouse sobre o ponto A, ative a opção EXIBIR RASTRO, refaça o mesmo procedimento para os pontos B e C.

**Teorema 8:** Seja  $a > 0$  e  $a \neq 1$  um real qualquer. Existe uma única função  $f$ , definida e contínua em  $\mathbb{R}$ , tal que  $f(x) = a^x$ , para todo racional  $x$ .

**Propriedade 8:** i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a)^x = +\infty$   
 ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (a)^x = 0$



Fonte: Autoria Própria (2018).



Fonte: Autoria Própria (2018).

## 4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nestas reuniões desenvolveu-se atividades do conteúdo de Cálculo Diferencial ministrado nas aulas do curso de Licenciatura em Matemática fazendo o uso do Software Geogebra, os quais foram realizadas atividades em relação aos seguintes conteúdos: Função definida por partes, limites de função definida por partes, limite de função quadrática, limites no infinito e assíntotas horizontais, limites infinitos e assíntotas verticais, assíntota oblíqua, continuidade de funções, Teorema do Confronto, limite de uma função exponencial, logarítmica e trigonométricas, reta tangente ao gráfico de funções, derivada pela definição de limite, derivada de função constante, derivada de função seno e cosseno, derivada de função logarítmica, derivada de função de polinômios, Teorema de Weirstrass, sinal da derivada primeira, sinal da derivada segunda, Teste da Derivada Segunda e Teorema do Valor Extremo. Primeiramente, foi feita uma discussão e questionamentos de como seriam realizadas as atividades, em seguida, os alunos do Projeto faziam as etapas das construções no Geogebra, e com as animações dos gráficos discutimos e analisamos a formalização matemática das definições e Teoremas apresentados da disciplina de Cálculo Diferencial.

## 5 | CONCLUSÃO

Considerando a relevância da utilização de recursos computacionais na sala de aula e tendo em vista a importância da abordagem conceitual de Cálculo Diferencial, este Projeto de Extensão auxiliou os alunos no ensino de Cálculo Diferencial a partir da interpretação geométrica, o qual foi explorado graficamente os conteúdos e os alunos puderam visualizar e investigar. É importante no estudo de Cálculo Diferencial e Integral, a parte teórica conciliada com a parte geométrica. Com relatos dos alunos do Projeto, as atividades realizadas no Projeto de Extensão com o Software Geogebra foram importantes na aprendizagem de Cálculo Diferencial, pois conseguiram uma melhor visualização das teorias estudadas em sala de aula, bem como, auxílio no processo de ensino- aprendizagem. Observaram também, que através do software Geogebra como ferramenta de ensino, foi possível evidenciar hipóteses e conceitos matemáticos aliando software educacional juntamente com o conhecimento já obtido nesta disciplina, com propósito de alcançar e ampliar a compreensão dos conceitos. Diante deste contexto, esta experiência vivenciada semanalmente no âmbito da Universidade pretende auxiliar o ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos por intermédio da visualização gráfica do software Geogebra, podendo favorecer o discente na compreensão dos conteúdos matemáticos, bem como estimular o docente em suas atividades pedagógicas. Com a manipulação e aprendizado das ferramentas no Software Geogebra, este Projeto de Extensão também contribui para os alunos em outras disciplinas. A professora deste Projeto também aproveitou as atividades desenvolvidas nas reuniões para auxiliar em suas aulas na disciplina de Cálculo

Diferencial que ministrou.

## REFERÊNCIAS

CURY, H. N. **Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores**. III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Águas de Lindóia, Anais.. Águas de Lindóia: SBEM, CD-ROM. 2006.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001, v.1

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda., 1994.

RICHIT, A., FARIAS, M.M.R. **Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais: Perspectivas de Exploração no Software GeoGebra**. I CEMACYC, República Domini- cana, 2013.

SILVA, J. I. G.; FERREIRA, D. H. L. **O uso de tecnologias na disciplina de cálculo diferencial e integral I**. Anais do XIV Encontro de Iniciação Científica da PUC-Campinas. 29 e 30 de setembro de 2009.

VALENTE, J. A. **O computador na sociedade do conhecimento**. Brasília: Estação Palavra - USP. 2005.

VAZ, D.A.F, JESUS, P.C.C. **Uma sequência didática para o ensino da matemática com o software Geogebra** *Revista Estudos*, Goiânia, v. 41, n. 1, p. 59-75, jan./mar. 2014.

## DEFLEXÃO EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO SOLUÇÃO ANALÍTICA E NUMÉRICA VIA MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

### **Mariana Coelho Portilho Bernardi**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,  
DACOC – Departamento Acadêmico de  
Construção Civil  
Campo Mourão – Paraná

### **Adilandri Mércio Lobeiro**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,  
DAMAT – Departamento Acadêmico de  
Matemática  
Campo Mourão – Paraná

### **Jeferson Rafael Bueno**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,  
DACOC – Departamento Acadêmico de  
Construção Civil  
Campo Mourão – Paraná

### **Thiago José Sepulveda da Silva**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná,  
DAMAT – Departamento Acadêmico de  
Matemática  
Campo Mourão – Paraná

**RESUMO:** Neste artigo, apresenta a dedução matemática e encontra a solução analítica e numérica da equação diferencial ordinária linear de segunda ordem, com condições de contorno do tipo Dirichlet-Dirichlet, que descreve um arranjo estrutural viga-pilar utilizado na Engenharia Civil. Como estudo de caso, obtém-se a equação diferencial da linha elástica de uma viga biapoiada com carregamento

distribuído. A priori, foi encontrado a solução analítica desta equação e implementou-se um programa em MATLAB, em que, calculou a solução numérica, com base no Método das Diferenças Finitas, aplicando o Método de Decomposição em LU para resolver o sistema de equações lineares. Por fim, para validação dos resultados numéricos, os mesmos foram comparados com a solução analítica.

**PALAVRAS-CHAVE:** Linha elástica; Análise Estática; Euler-Bernoulli.

**ABSTRACT:** In this paper, he presents the mathematical deduction and finds the numerical and analytical solution of the second order linear differential equation, with Dirichlet-Dirichlet boundary conditions, which describes a structural beam-pillar arrangement used in Civil Engineering. As a case study, we obtain the differential equation of the elastic line of a biapoiada beam with distributed load. A priori, the analytical solution of this equation was found and a MATLAB program was implemented, in which the numerical solution was calculated based on the Finite Differences Method, applying the Decomposition Method in LU to solve the system of linear equations. Finally, for validation of the numerical results, they were compared with the analytical solution.

**KEYWORDS:** Elastic line, Static analysis, Euler-Bernoulli.



## 1 | INTRODUÇÃO

O estudo de deflexão de vigas é importante na Engenharia Civil. Utiliza o termo deflexão para se referir a configuração deformada do eixo longitudinal de uma viga, que ocorre quando a mesma é submetida a carregamentos que causam flexão. Em projetos de Engenharia, busca-se que a estrutura (ou elemento estrutural) satisfaça os parâmetros aceitáveis onde, evita-se deslocamentos excessivos para que, o Estado Limite de Serviço (ELS) e o Estado Limite Último (ELU) sejam atendidos, conforme recomenda a NBR 6118 [1].

Neste trabalho, apresenta a dedução matemática da equação diferencial ordinária (EDO) linear de segunda ordem, conforme [3], que controla a deflexão em vigas, conhecida como equação da linha elástica, dado por (1),

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{M}{E_{cs}I_z} \quad (1)$$

em que,  $u$  denota a função que governa a deflexão da viga a uma distância  $x$ ,  $M$  o momento fletor,  $I_z$  o momento de inércia da seção transversal da viga e  $E_{cs}$  o módulo de elasticidade secante a ser utilizado nas análises elásticas de projeto, conforme recomenda a NBR 6118 [1].

O produto  $E_{cs}I_z$  é chamado de rigidez à flexão da viga e o momento fletor pode ser obtido por meio do equilíbrio estático em uma seção transversal da viga, Figura 1. Na Figura 1,  $q$  é a intensidade da carga uniformemente distribuída,  $l$  é o comprimento do vão e  $R_a$  a reação de apoio.

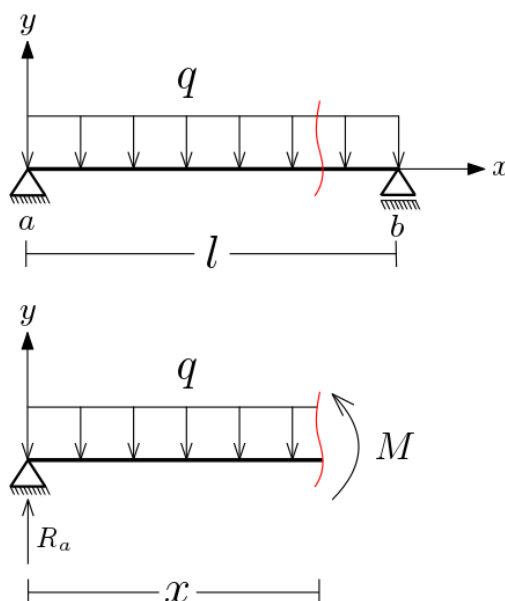


Figura 1 - Viga biapoiada com corte na seção transversal a uma distância  $x$ , em que  $0 \leq x \leq l$ .

A Figura 2, denota a seção transversal da viga em questão, em que  $b_w$  é a largura e  $H$  é a altura da seção transversal.

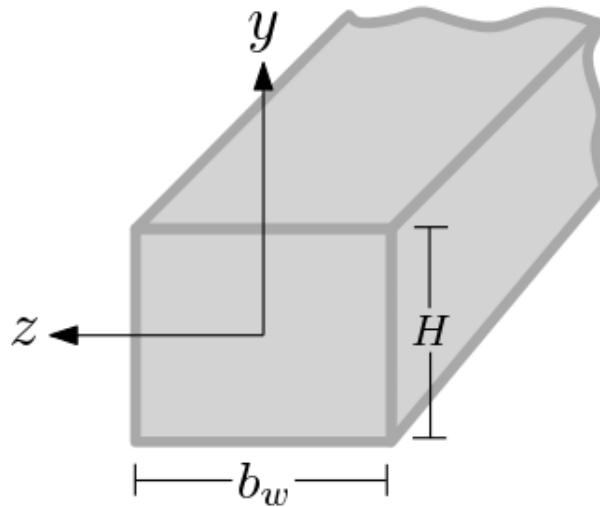


Figura 2 - Seção transversal de uma viga retangular.

Ao observar a Figura 1, obtém-se a equação do momento fletor na viga, (2) onde realiza-se o equilíbrio de momentos na seção de corte, [3], [6],

$$\Sigma M = M + \frac{qx^2}{2} - xR_a = 0. \quad (2)$$

A reação de apoio,  $R_a$ , pode ser determinada ao fazer o equilíbrio de forças na direção  $y$ , ao utilizar o carregamento total, conforme (3),

$$R_a = \frac{ql}{2}. \quad (3)$$

Ao substituir (3) em (2), obtém-se (4),

$$M + \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2} = 0, \quad (4)$$

e ao isolar  $M$  encontra (5),

$$M = \frac{qx}{2}(l - x). \quad (5)$$

A equação (5) representa a variação do momento fletor ao longo do comprimento da viga. Ao substituir (5) em (1), obtém-se (6),

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{qx}{2E_{cs}I_z}(l - x), \quad (6)$$

que representa a equação da Linha Elástica de uma viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído, sujeita as condições de contorno dadas em (7),

$$u(0) = 0 \text{ e } u(l) = 0, \quad (7)$$

nas quais, indicam que os deslocamentos nos extremos da viga são nulos, ou seja, não há deflexão nos apoios. As equações (6) e (7) garantem a unicidade da solução do problema de valor de contorno (PVC), conhecido como Dirichlet-Dirichlet.

## 2 | APLICAÇÃO EM VIGAS PRÉ-FABRICADAS

A idealização de vigas e as equações apresentadas anteriormente podem ser utilizadas em diversos casos na Engenharia Civil, como exemplo, apresenta-se o caso de vigas pré-fabricadas em concreto armado, Figura 3, em que, observa-se uma viga apoiada em dois pilares, sendo este um arranjo estrutural muito comum em edifícios pré-fabricados e pré-moldados [4].



Figura 3 - Viga típica de concreto armado pré-fabricada.

Esse tipo de estrutura recebe o nome de pré-fabricada, pois os elementos estruturais são produzidos em indústrias especializadas, sob condições rigorosas de controle de qualidade, conforme item 3.6 da NBR 9062 [2]. Em outras palavras, os elementos estruturais pré-fabricados chegam na obra prontos para serem utilizados.

Não se deve confundir o termo pré-fabricado com o termo pré-moldado, já que o segundo se refere a elementos executados fora do local de utilização definitiva na estrutura item 3.5 da NBR 9062 [2], mas, são feitos na própria obra. A ligação entre viga e pilar é garantida por meio de detalhes de encaixe, como mostra a Figura 4.

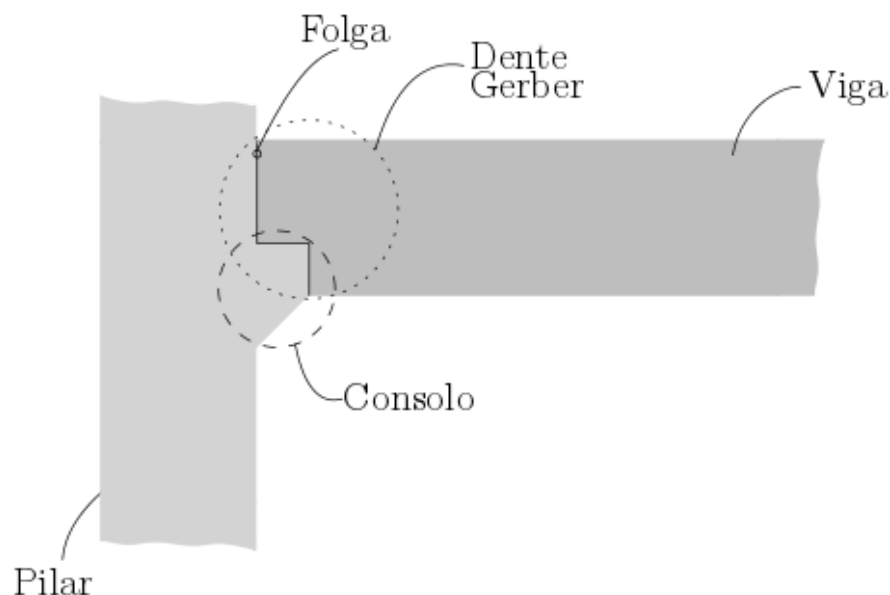


Figura 4 - Detalhe típico de ligação viga-pilar pré-fabricados.

Ao considerar a situação problema apresentada na Figura 3, nota-se que o carregamento da viga será devido apenas ao seu peso próprio e pode ser representado como um carregamento uniformemente distribuído. Dessa forma, o modelo estrutural dessa viga pré-fabricada será o mesmo apresentado na Figura 1.

### 3 | PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DE DEFLEXÃO EM VIGAS

Como estudo de caso, utiliza-se a EDO (6) para determinar os deslocamentos ao longo do vão da viga, a qual, possui tais propriedades geométricas:

- Comprimento do vão:  $l = 5000\text{mm}$
- Seção transversal:
  - Largura:  $b_w = 200\text{mm}$ ;
  - Altura:  $H = 500\text{ mm}$
  - Momento de Inércia:  $I_z = 10^8\text{mm}^4$

e, para as propriedades do material, concreto armado, de acordo com a NBR 6118 [1], tem-se,

- Peso específico:  $p = 25\text{KN}$
- Resistência à compressão:  $f_{ck} = 30\text{MP}_a$
- Módulo de elasticidade:
  - Tangente inicial:  $E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}}$ ;
  - Secante:  $E_{CS} = 0,85_{ci} = 26071,6\text{ MP}_a$

O carregamento da viga é obtido pelo produto de peso específico pela área da seção transversal, o que resulta em uma carga uniforme  $q = 2,5\text{ N/mm}$ .

Pelo fato, da viga estar biapoiada obtém-se o Problema de Valor de Contorno

(PVC), do tipo Dirichlet-Dirichlet,

$$\begin{cases} \frac{d^2u(x)}{dx^2} = \frac{qx}{2E_{cs}I_z} (l-x), & 0 < x < l, \\ u(0) = 0, & u(l) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

em que,  $u(0)=0$  e  $u(l)=0$  são as condições de contorno, as quais indicam que nas extremidades da viga o deslocamento vertical é nulo.

#### 4 | SOLUÇÃO NUMÉRICA

Um Problema de Dirichlet-Dirichlet é caracterizado conforme apresentado em (9),

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, & y(b) = \beta, \end{cases} \quad (9)$$

A solução numérica deste tipo de problema pode ser obtida pelo *Método das Diferenças Finitas* (MDF). O MDF é um método consagrado em transformar uma equação diferencial em uma equação de diferenças, que gera um sistema de equações lineares, [5].

Para fazer a discretização do intervalo  $[a;b]$ , em primeiro lugar, selecione um número inteiro  $N>0$  e divide o intervalo  $[a;b]$  em  $N+1$  subintervalos iguais, cujos extremos são os pontos de malha,

$$x_i = a + ih. \quad (10)$$

Ao substituir  $i=0$  e  $i=N+1$  em (10), obtém-se os extremos do intervalo,  $x_0 = a$  e  $x_{N+1} = b$  respectivamente. Em particular, par  $i=N+1$  encontra-se o tamanho do passo,  $h$ , dado por,

$$h = \frac{b-a}{N+1}. \quad (11)$$

A equação diferencial a ser aproximada é,

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x). \quad (12)$$

Ao substituir as equações

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i+h) - y(x_i-h)}{2h} + O(h^2) \quad (13)$$

e

$$y''(x_i) = \frac{y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h)}{h^2} + O(h^2), \quad (14)$$

em (12), obtém-se

$$-r(x_i) = \left( \frac{-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1}}{h^2} \right) + p(x_i) \left( \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right) + q(x_i)w_i, \quad (15)$$

em que  $w_i \approx y(x_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Observe que  $w_i$  representa a solução numérica,  $y(x_i)$  a solução analítica e  $p$ ,  $q$  e  $r$  são as funções dadas em (9), juntamente com as condições de contorno que são escritas em (16),

$$w_0 = \alpha, \quad w_{N+1} = \beta. \quad (16)$$

A equação (15) é conhecida como Método das Diferenças Finitas para problemas lineares de segunda ordem do tipo de Dirichlet-Dirichlet, com erro de truncamento da ordem  $O(h^2)$ .

Ao multiplicar a equação (15) por  $h^2$  e rearranjar os termos, encontra-se,

$$h^2 r(x_i) = \left( 1 - \frac{h}{2} p(x_i) \right) w_{i-1} + (2 + h^2 q(x_i)) w_i + \left( 1 + \frac{h}{2} p(x_i) \right) w_{i+1}, \quad (17)$$

e ao fazer  $i$  variar de 1 até  $N$  em (17), obtém-se o sistema de equações,

$$Aw = b \quad (18)$$

em que,  $A_{N \times N}$  é uma matriz tridiagonal,  $w_{N \times 1}$  e  $b_{N \times 1}$  são matrizes coluna.

Para obter a solução numérica do PVC (8), foi desenvolvido um código em MATLAB, baseado no MDF aplicando a Decomposição em LU, para resolver o sistema dado em (18), na qual foi criada uma interface amigável ao usuário final. A Figura 5, apresenta a primeira janela, onde o usuário digita os valores de  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  e  $N$ .

Figura 5 - Janela para inserir os dados da EDO.



Na Figura 6, insere as condições de contorno, ou seja, os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $y(a)$  e  $y(b)$ .

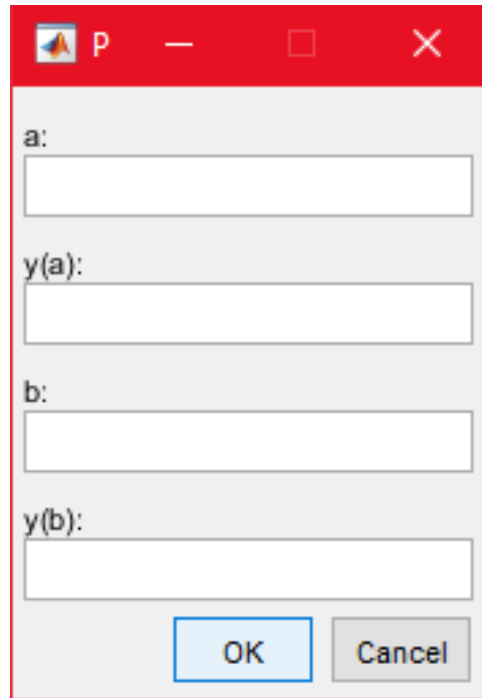


Figura 6 - Janela para inserir as condições de contorno.

Por fim o usuário digita, caso seja conhecida a solução analítica, Figura 7.

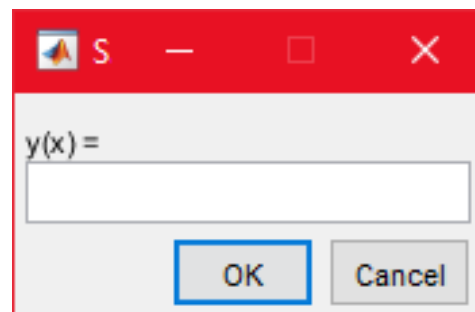


Figura 7 - Janela para inserir a solução analítica.

Ao clicar em “OK”, resolve-se numericamente o PVC, fornecendo como resultado uma tabela de dados e um gráfico.

## 5 | SOLUÇÃO ANALÍTICA

Para obter a solução analítica de (8), aplica-se, inicialmente a integral de ambos os membros em (8) e obtém-se,

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{q}{2E_{cs}I_z} \left( lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) + c_1. \quad (19)$$

Ao aplicar novamente a integral de ambos os membros de (19), encontra-se,

$$u(x) = \frac{q}{2E_{cs}I_z} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + c_1x + c_2, \quad (20)$$

em que,  $c_1$  e  $c_2$  são as constantes de integração.

Para encontrar os valores de  $c_1$  e  $c_2$  basta utilizar as condições de contorno dadas em (8). Ao utilizar  $u(0)=0$ , encontra-se  $c_2=0$  e (20) pode ser escrita,

$$u(x) = \frac{q}{2E_{cs}I_z} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + c_1x. \quad (21)$$

Ao aplicar a condição de contorno,  $u(l)=0$ , em (21), obtém-se,

$$c_1 = -\frac{ql^3}{24E_{cs}I_z}. \quad (22)$$

Após substituir (22) em (21), encontra-se,

$$u(x) = \frac{q}{2E_{cs}I_z} \left( \frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) - \frac{qx^4}{24E_{cs}I_z} \quad (23)$$

que representa a solução analítica de (8).

## 6 | RESULTADOS

Para o estudo de caso, PVC (8), tem-se  $p(x) = 0, q(x) = 0, r(x) = (qlx - qx^2) / (2E_{cs}I_z)$ ,  $N = 1001, \alpha = 0, b = 5000, y(\alpha) = 0, y(b) = 0$  e  $y(x)$  dada por, (23). Ao inserir esses valores no código, obtém-se a solução numérica do PVC.

A Tabela 1 ilustra alguns valores para os deslocamentos ao longo do vão da viga pré-fabricada em questão, indicando os resultados obtidos para a solução numérica e analítica.

$x_n$ (mm)	$w_n$ (mm)	$y_n$ (mm)	Erro percentual (%)
0	0	0	0
503,9920	-0,54855523	-0,54855473	0,0000913
1002,9940	-1,03255795	-1,03255706	0,0000858
1501,9960	-1,41130420	-1,41130304	0,0000823
2000,9980	-1,65176397	-1,65176264	0,0000803
2500	-1,73411922	-1,73411784	0,0000796
3003,9920	-1,65011991	-1,65011859	0,0000803
3502,9940	-1,40815717	-1,40815601	0,0000823
4001,9960	-1,02817283	-1,02817195	0,0000858
4500,9980	-0,54332905	-0,54332856	0,0000913

5000	0	0	0
------	---	---	---

Tabela 1 - Comparação dos resultados numéricos e analíticos

O gráfico, Figura 8, demonstra a deflexão que ocorre na viga.

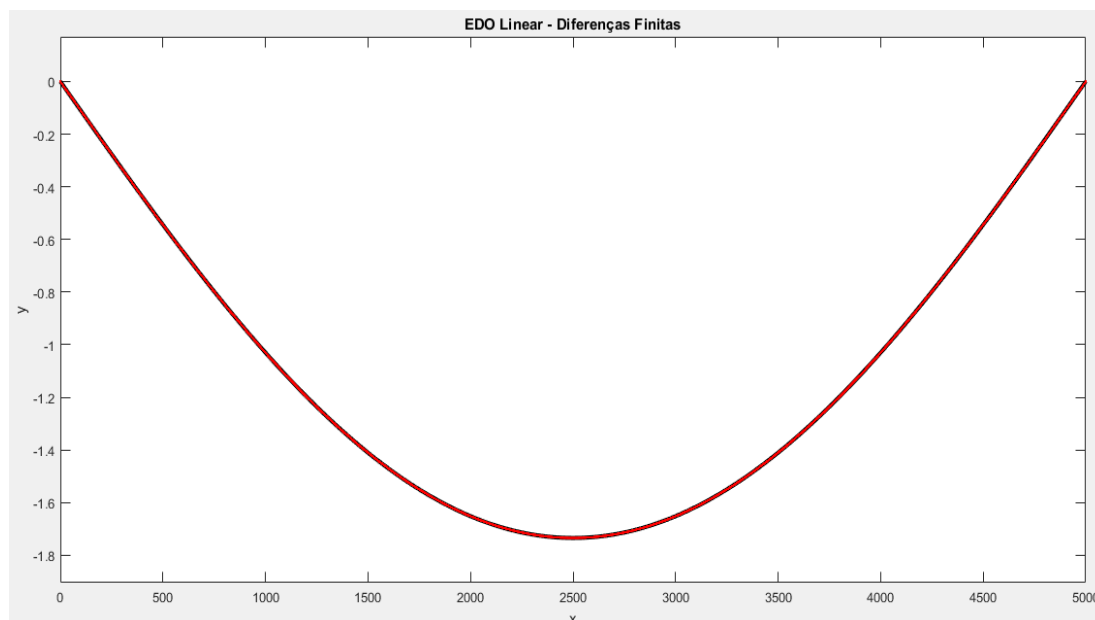


Figura 8 - Gráfico das soluções numérica e analítica representando a deflexão da viga.

Pelo fato de a viga ser biapoiada, a mesma não sofre deslocamento nos apoios e a flecha, ou seja, a deflexão máxima, ocorre no meio do vão.

## 7 | CONCLUSÃO

Deduzir a equação da Linha Elástica de uma viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído foi de suma importância para entendimento dos termos que a compõem.

A partir daí, implementou um algoritmo no MATLAB baseado no Método das Diferenças Finitas, onde foi possível obter a solução numérica da equação, ou seja, obteve-se a deformação máxima da viga e verificou a simetria que existe nos deslocamentos ao longo da viga com relação ao seu centro.

A solução analítica foi calculada para validação do método numérico, e é notório que os resultados obtidos pelas soluções numérica e analítica foram muito próximos, mostrando a eficiência do método.

## 8 | AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Campo Mourão (UTFPR-CM) pelo Projeto LaTeX para instituições de ensino superior,

que proporcionou a possibilidade desse estudo. A primeira autora, agradece ao Professor Orientador Dr. Adilandri Mércio Lobeiro e ao Coorientador Dr. Jeferson Rafael Bueno, pela orientação nesse estudo.

## REFERÊNCIAS

- [1] Associação Brasileira de normas técnicas. NBR 6118: **Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.
- [2] Associação Brasileira de normas técnicas. NBR 9062: **Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado**. Rio de Janeiro, 2001.
- [3] F. P. Beer e E. R. Johnston Jr. **Resistência dos Materiais**, 3 ed. MAKRON Books, São Paulo, 1996.
- [4] M. K. El Debs. **Concreto pré-moldado: Fundamentos e Aplicações**. Oficina de Textos, 2017.
- [5] R. L. Burden e J. D. Faires. **Análise Numérica**. Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2003.
- [6] R. C. Hibbeler. **Resistência dos Materiais**, 3 ed. Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2000.

## MODELO MATEMÁTICO PARA AUXILIAR O PLANEJAMENTO DA MANUTENÇÃO PREVENTIVA DE MOTORES ELÉTRICOS

**Thalita Monteiro Obal**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Guarapuava/PR

**Jonatas Santana Obal**

Cooperativa Agrária

Guarapuava/PR

**RESUMO:** A escolha de motores elétricos para manutenção preventiva em uma parada de máquinas de indústria é complexa devido às várias características envolvidas. Este trabalho propõe um modelo matemático para auxiliar na solução deste problema. A metodologia é aplicada na Indústria de Óleo e Farelo da Cooperativa Agrária que possui 224 motores, com limite monetário para revisão preventiva. Para a escolha dos motores, os dados de entrada do modelo matemático são: tamanho do motor, tempo decorrido desde a última revisão, tempo para troca do motor, criticidade e custo de manutenção. Os resultados obtidos com o modelo proposto foram satisfatórios, e apresentaram melhorias se comparados à outras metodologias empregadas no problema. **PALAVRAS-CHAVE:** Manutenção preventiva, motores elétricos, modelo multiobjetivo, método exato.

### 1 | INTRODUÇÃO

A manutenção preventiva tem como objetivo evitar ou reduzir falhas em equipamentos antes que elas aconteçam e manter o desempenho destes com segurança e confiabilidade.

Para tal manutenção é necessário um planejamento prévio do que será executado, já que se trata de uma manutenção que é realizada durante um tempo pré-estabelecido e acontece com a indústria ou o equipamento fora de funcionamento (PINTO & XAVIER, 2006).

Como, de modo geral, não é possível realizar manutenção em toda planta da indústria, se faz necessário escolher quais equipamentos serão revisados, considerando diversos fatores envolvidos, os quais acarretam gastos. Por exemplo, para o caso de manutenção preventiva de motores elétricos, consideram-se os seguintes fatores:

- tempo deste motor em funcionamento;
- criticidade do equipamento em que o motor está instalado;
- vida útil dos rolamentos;
- custo monetário da sua manutenção;
- existência de um motor reserva;
- tempo de substituição deste motor;

- tempo em que este equipamento pode ficar parado;
- dados da manutenção preditiva;
- local de instalação;
- entre outros.

Observando os fatores envolvidos, pode-se notar a complexidade da escolha de quais motores revisar na manutenção preventiva. Por exemplo, é melhor revisar um motor com menos tempo de funcionamento e criticidade elevada, ou um motor com mais tempo de funcionamento e tempo elevado para substituição? Na prática da indústria, cabe ao especialista esta tomada de decisão, a qual é extremamente complexa e foge da capacidade humana.

Obal et al (2017) resolveram este problema utilizando Algoritmo Genético. Os resultados encontrados apresentaram melhorias, se comparadas à escolha feita manualmente pelo especialista decisor. Porém, por se tratar de uma metaheurística, não há garantia de obtenção de solução ótima.

Desta forma, este trabalho propõe um modelo matemático, resolvido por método exato (logo apresenta solução ótima), que auxilie na tomada de decisão de quais motores elétricos enviar para manutenção em uma parada de planta.

## 2 | MANUTENÇÃO PREVENTIVA

O termo “manutenção”, segundo a concepção de Monchy (1989), vem do vocabulário militar e significava manter, nas unidades de combate, o efetivo e o material num nível constante. Na indústria, seu surgimento ocorreu nos Estados Unidos, nos anos 50.

Neste período, e ainda durante período posterior, os aspectos mais conhecidos da manutenção caracterizavam-se como sendo de serviços repetitivos e de rotina, pura troca de peças, pouca técnica, improvisações e emergências. Ou seja, num passado histórico, a manutenção era considerada como fator de custos e gastos (RAMOS (2009)).

Posteriormente, percebe-se a importância da manutenção para a lucratividade da empresa (MORAES et. al (2017)).

Nicoletti (2005) afirma que as áreas de manutenção, quando identificadas e otimizadas dentro da cadeia de valor da organização, podem oferecer vantagem competitiva. As vantagens da manutenção abrangem redução de custos, aumento da lucratividade, garantia da eficiência dos equipamentos, aumento da capacidade do processo, diminuição do risco de acidentes.

Desta forma, é essencial, especialmente no cenário da indústria hoje, caracterizadas por unidade de grande volume de produção e de alta complexidade, a necessidade de estratégias de manutenção.



Dentre as formas de manutenção, estão (OTANI & MACHADO (2008)):

- Manutenção corretiva - é a atuação para correção de falha ou do desempenho menor que o esperado.
- Manutenção preventiva - é a atuação realizada para reduzir falhas ou queda no desempenho, obedecendo a um planejamento baseado em períodos estabelecidos de tempo.
- Manutenção preditiva - é um conjunto de atividades de acompanhamento das variáveis ou parâmetros que indicam o desempenho dos equipamentos, de modo sistemático, visando a definir a necessidade ou não de intervenção.
- Manutenção detectiva - é a atuação efetuada em sistemas de proteção ou comando, buscando detectar falhas ocultas ou não perceptíveis ao pessoal de operação e manutenção.

Neste cenário, o presente trabalho abrange a manutenção preventiva de motores elétricos.

Com intuito de evitar falhas e paradas não programadas, a revisão dos motores elétricos de maior importância é essencial na manutenção preventiva. Assim, esta pesquisa auxilia na tomada de decisão de qual motor revisar, haja visto impossibilidade de revisar todos os motores elétricos na indústria do estudo de caso apresentado.

### 3 | MODELO DE OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

Esta seção apresenta o modelo de otimização multiobjetivo para o problema da escolha de motores elétricos para a manutenção preventiva. Considera-se que há um número fixo de motores elétricos na indústria, e que o número de motores a serem escolhidos para manutenção elétrica esteja limitado apenas pelo valor monetário disponível. Deseja-se revisar o máximo de motores possíveis, dentro do limite orçamentário, escolhendo os de maior prioridade.

#### Parâmetros

$n$ : número total de motores

$a_j$ : custo monetário de levar o motor para manutenção

$h$ : limite monetário

$m$ : número de características dos motores (como tempo de manutenção, criticidade, etc)

$b_j$ : valor da característica do motor

## Variáveis de decisão

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o motor } i \text{ for escolhido para manutenção} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$i = 1, \dots, n$$

## Restrições

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \leq \eta$$

## Funções objetivo

$$f_j = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i, \quad \forall j$$
$$j = 1, \dots, m$$

As funções objetivos serão de maximização ou minimização, dependendo da característica  $j$ . Se, quanto maior o valor da característica mais urgente a manutenção, considera-se maximizar  $f_j$ , caso contrário, minimiza-se  $f_j$ . As características a se maximizar pertencem ao conjunto  $j^+$  e, caso contrário, ao  $j^-$ .

## Modelo multiobjetivo

$$\text{Max } f_j = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i, \quad \forall j \in j^+ \quad (1)$$

$$\text{Min } f_j = \sum_{i=1}^n b_i \cdot x_i, \quad \forall j \in j^- \quad (2)$$

s. a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \leq \eta \\ x_i = \{0,1\} \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

### 3.1 Metodologia de Solução

Utilizou-se o método da soma ponderada dos objetivos. Assim, no modelo (5)-(7) proposto, os pesos  $c_j$  dos objetivos são dados pelas preferências do especialista decisor.

Neste caso, como as funções objetivo tem unidades de medidas diferentes, se faz necessário a normalização dos dados.

$$\text{Max } z = \sum_{j^+} c_j \cdot f_j - \sum_{j^-} c_j \cdot f_j \quad (5)$$

s. a

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \leq \eta \\ x_i = \{0,1\} \end{array} \right. \quad (6)$$

(7)

O modelo é resolvido por metodologia exata, assim, as soluções encontradas são soluções ótimas, dadas as preferências do especialista decisor.

## 4 | APLICAÇÃO DA METODOLOGIA

Periodicamente a Cooperativa Agrária realiza processos de parada em máquinas, ou de partes de processos de fabricação, para realização de manutenção preventiva. Para uma inspeção mais minuciosa e detalhada nos motores elétricos, uma vez ao ano a indústria para os processos de fabricação para tal manutenção. Contudo, devido ao número de motores e ao custo de manutenção, apenas alguns são selecionados para esta manutenção.

Devido à complexidade de escolha dos motores, a necessidade de uma metodologia que auxilie na tomada de decisão é imprescindível.

Assim, a metodologia proposta neste trabalho foi aplicada ao problema da escolha de motores elétricos para manutenção anual na Indústria de Óleo e Farelo da Cooperativa Agrária. Esta indústria possui ao todo 224 motores elétricos, dentre os quais limita-se o número de motores para a manutenção preventiva pelo custo monetário da manutenção.

Consideraram-se as seguintes informações dos motores elétricos:

- (i) tamanho do motor, indicado pela sua potência (quanto maior a potência, maior o motor);
- (ii) tempo decorrido desde a última revisão (em dias);
- (iii) tempo para troca do motor (em horas);
- (iv) criticidade;
- (v) custo de manutenção (em R\$).

A sessão a seguir apresenta a aplicação do modelo proposto para todo o conjunto de motores da indústria.

### 4.1 Aplicação do modelo matemático ao problema da escolha de motores na indústria

O modelo proposto foi resolvido com auxílio do software CPLEX, num computador Intel Core i7, com processador 3.40GHz e 8.00 GB de RAM.

Os dados são relativos ao ano de 2017, considerando o conjunto de 224 motores

elétricos da Indústria de Óleo e Farelo da Cooperativa Agrária. No referido ano, o limite monetário para esta manutenção foi  $h=R\$240.000,00$ .

Foram considerados pesos equivalentes para todas as funções objetivo  $f_j$ , ou seja, todas as características tem igual importância. Além disso, todas as características utilizadas na aplicação do modelo ao problema são de tal forma que, quanto maior seu valor, mais urgente é a manutenção, logo, há necessidade de somente maximizar a soma das funções objetivo  $f_j$ .

A tabela 1 apresenta a solução proposta manualmente pelo especialista da indústria e a solução ótima obtida pela aplicação de método exato no modelo.

Tipo de solução	N. de motores escolhidos	% de equivalência	Custo monetário	Valor de z	% de melhoria de z
Manual	182	92,31	241.017,68	3,27	17,97
Exata	188		239.990,35	3,86	

Tabela 1: Comparação da solução manual com a do modelo matemático

A partir dos dados obtidos e resumidos na tabela 1, pode-se notar que a solução exata escolhe mais motores para revisão, com percentual de equivalência de 92,31% em relação aos motores escolhidos manualmente. A solução do modelo obedeceu ao limite monetário imposto, o que não ocorreu com a solução manual. O percentual de melhoria no valor de z para a solução do modelo foi de aproximadamente 18% em relação à solução manual.

Observando os valores obtidos, nota-se que a solução do modelo é melhor que a solução manual, pois revisa mais motores, dentro do limite orçamentário e, ao mesmo, tempo, com maior valor da função objetivo z.

## 5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista a otimização dos processos de fabricação, a manutenção preventiva em motores elétricos numa parada de máquinas é essencial em uma indústria. Contudo, como dificilmente todos os motores são revisados, a escolha de quais motores passarão por manutenção é uma tarefa complexa.

Desta forma, este trabalho propôs um modelo matemático de otimização para auxiliar na escolha de quais motores realizar manutenção.

O modelo foi aplicado aos dados da Indústria de Óleo e Farelo da Cooperativa Agrária, considerando a escolha dos motores elétricos para manutenção com a maximização de características específicas destes motores, com restrição de custo monetário.

A solução apresentada pelo modelo foi superior à solução proposta manualmente pelo especialista, tanto em termos de valor z, quanto em número de motores revisados.

Como trabalhos futuros, pode-se verificar a inclusão de outras características, a aplicação do modelo para dados referentes à outros anos, assim como avaliar o uso de outros métodos de solução do modelo multiobjetivo proposto.

## REFERÊNCIAS

- JONES, D. TAMIZ, M. **Practical Goal Programming**. International Series in Operations Research & Management Science 141 Springer, 2010.
- MORAIS, C. L. MARQUES, L. P. F. BELINOVSKI, L. F. A. S. **Estudo e implementação de um plano de manutenção preventiva para motores elétricos assíncronos trifásicos com equipamento fora de serviço**. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – UTFPR, Ponta Grossa, 2017.
- MONCHY, F. **A função manutenção: formação para a gerência da manutenção industrial**. Rio de Janeiro: Durban, 1989.
- NICOLETTI, J. R. **Gestão de facilidades**. Novatec Editora, 2006.
- OBAL, T. M. OBAL, J. S. KLAUS, A. Algoritmo Genético aplicado na escolha de motores elétricos para manutenção preventiva. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE MANUTENÇÃO E GESTÃO DE ATIVOS, 32., 2017, Curitiba. **Anais**. Curitiba/PR.
- OTANI, M. M.W. V. **A proposta de desenvolvimento de gestão da manutenção industrial na busca da excelência ou classe mundial**. Revista Gestão Industrial, v. 04, n. 02., p. 01-16, 2008.
- PINTO, A. K. XAVIER, J. de A. N. **Manutenção: Função Estratégica**. 2. ed. Rio de Janeiro: Qualitymark, 2006.
- RAMOS, F. A. **Influência da manutenção em uma fábrica de transformação de plásticos**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Faculdade de Tecnologia da Zona Leste, São Paulo, 2009.

## PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE FLUXO EM AQUÍFERO CONFINADO

**João Paulo Martins dos Santos**

Academia da Força Aérea-AFA  
Pirassununga-SP

**Alessandro Firmiano de Jesus**

Academia da Força Aérea-AFA  
Pirassununga-SP

**Edson Wendland**

Universidade de São Paulo-USP  
São Carlos-SP

**RESUMO:** O Princípio da Superposição de soluções analíticas do problema do fluxo de águas subterrâneas, em aquífero confinado, fornece uma superfície de rebaixamento provocada pela ação de poços de bombeamento no interior do domínio computacional. Por outro lado, no caso transiente, uma solução aproximada pelo método de elementos finitos pode ser obtida da formulação fraca do modelo matemático desse fenômeno hídrico subsuperficial. Neste capítulo, a linguagem de programação Python foi utilizada para implementar e comparar essas resoluções analítica e numérica para três casos de bombeamento conjunto. Na solução de Theis, o rebaixamento foi determinado por meio das contribuições de poços reais e poços imagens, sob processo adaptativo na função de poço. Após refinamentos sucessivos na malha computacional, bibliotecas do FEniCS

permitiram a resolução automatizada e a visualização da concordância obtida numa comparação gráfica de resultados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Princípio da Superposição. Projeto FEniCS. Método de Elementos Finitos. Equação do Fluxo Subterrâneo.

**ABSTRACT:** In confined aquifer, the Superposition Principle well analytical solutions of groundwater flow problem, provides the lowering surface caused by the action of pumping wells within the computational domain. On the other way, in the transient case, the approximate solution by the finite element method can be obtained from the weak formulation of the mathematical model of this subsurface hydric phenomenon. Here, the Python programming language was used to implement and to compare the analytical and numerical solutions in three cases of joint pumping. In Theis solution, the lowering surface was determined by the contributions of real and images wells under adaptive process in the function. After successive refinements in the computational mesh, the FEniCS libraries have enabled the automated resolution and in the visualization of the agreement obtained in the graphical results.

**KEYWORDS:** Principle of Superposition. FEniCS Project. Finite Element Method.



## 1 | INTRODUÇÃO

São várias as contribuições da Matemática e de suas Tecnologias no estudo quantitativo e qualitativo das Ciências Naturais. Em posse de equações governantes, das condições iniciais e de fronteira estabelecidas sobre um domínio computacional, certas linguagens de programação científica, fundamentadas em conhecimentos matemáticos, serão capazes de disponibilizar códigos numéricos para buscar resolução automatizada de determinada lei da Física ou comportamento observável na Natureza. Especificamente, numa certa região de interesse na subsuperfície, esse suporte tecnológico poderia auxiliar na compreensão da ocorrência dos fenômenos naturais relacionados aos recursos hídricos subterrâneos. Desta forma, situações problemas adotadas neste capítulo, ilustram certas aplicações de conceitos matemáticos e de suas tecnologias, abordando um estudo da distribuição de cargas hidráulicas em águas subterrâneas, no intuito de validar resoluções obtidas com o uso de códigos numéricos e de implementar soluções analíticas para um ambiente natural fisicamente inacessível.

Inicialmente, considere que o rebaixamento da superfície potenciométrica de um aquífero confinado possa ser provocado pela ação de um ou de mais poços de bombeamento atuando, em conjunto, no interior do seu domínio. No caso da ação de um poço, sem influência direta das fronteiras, a solução de Theis disponibiliza uma expressão analítica para a superfície de rebaixamento. Caso o poço, em função do seu raio de influência, sofra alguma alteração dada pela fronteira de Dirichlet ou de Neumann, o Princípio da Superposição acrescenta, nessa solução analítica de Theis, a contribuição do rebaixamento do correspondente poço imagem. Se a abordagem for numérica, tal resolução poderia ser obtida através do método de elementos finitos (MEF) aplicado sobre a formulação fraca da equação de fluxo subterrâneo com termo de fonte não nulo e com apropriadas condições de contorno. Neste sentido, esse capítulo implementa, em linguagem de programação científica Python, a solução de Theis sob o Princípio da Superposição para determinar a superfície de rebaixamento de um aquífero confinado sujeito, inicialmente, à ação de um poço. O mesmo processo será aplicado para o bombeamento conjunto de dois poços e, finalmente, generalizado para descrição do rebaixamento conjunto sob a ação de cinco poços no interior do domínio. Para cada um desses três casos, além da solução analítica, o capítulo ainda apresenta a respectiva resolução numérica MEF. Desta forma, o objetivo é apresentar a validação dessa resolução numérica Python, para a equação do fluxo transiente, através de uma concordância de resultados obtidos com a respectiva solução analítica de Theis, proveniente do Princípio da Superposição aplicado na ação conjunta de vários poços de bombeamento.

A resolução numérica Python, além de uma malha de elementos finitos, considera ainda: a definição de um espaço de funções; a adequada apresentação das condições iniciais e de fronteira, e um apropriado método de resolução numérica para os imensos sistemas lineares resultantes. A utilização da plataforma FEniCS (FENICS, 2018), que engloba uma série de outros softwares para a solução automatizada de equações diferenciais parciais, facilita tanto a modelagem computacional, quanto a simulação do rebaixamento permitindo, ainda, a visualização gráfica dos resultados.

## 2 | EQUAÇÕES GOVERNANTES DO FLUXO DE ÁGUA SUBTERRÂNEA

Um modelo matemático para a distribuição de cargas hidráulicas que regem o fluxo de água subterrânea em aquífero confinado, obtido por meio da Lei de Darcy e pelo princípio da conservação de massa em um volume elementar representativo, segundo Cleary (2007) é dado pela seguinte expressão linear e transiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \right] + F(x, y, z, t) = S_e \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

sendo  $h = h(x, y, z, t)$  a carga hidráulica total [L],  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$  e  $K_{zz}$  os componentes principais do tensor de condutividade hidráulica [ $LT^{-1}$ ],  $S_e$  o coeficiente de armazenamento específico [ $L^{-1}$ ] e  $F(X, Y, Z, T)$  o termo de fonte ou sorvedouro agindo no interior  $(X, Y, Z)$  do aquífero [ $L^{-1}$ ] num determinado tempo  $t$ .

No caso estacionário, o termo de fonte pode ser representado por:

$$F(x, y, z) = \sum_i Q_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \delta(z - z_i) \quad (2)$$

sendo  $Q_i$  a taxa de bombeamento ou injeção do poço  $i$  na coordenada  $(x_i, y_i, z_i)$  [ $L^3 T^{-1}$ ] e  $\delta$  a função delta de Dirac com unidades [ $L^{-1}$ ].

Se considerar a hipótese de Dupuit, ou seja, que as variações das cargas hidráulicas são desprezíveis ao longo da dimensão vertical  $z$ , e que a dimensão horizontal dos aquíferos em escalas regionais pode ser da ordem de dezenas de quilômetros, então a equação do fluxo subterrâneo pode ser modelada por uma equação bidimensional em  $x$  e  $y$  e representada, segundo Cleary (2007), por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right] + F(x, y, t) = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3)$$

sendo  $T_{xx} = b \cdot K_{xx}$  e  $T_{yy} = b \cdot K_{yy}$  [ $L^2 T^{-1}$ ] as transmissividades nas respectivas direções  $x$  e  $y$  do aquífero confinado de espessura  $b$ . O coeficiente de armazenamento  $S = S_e \cdot b$  é [adimensional] e a função  $F$  representa os termos de drenança dos fluxos verticais remanescentes em  $z = 0$  (camada confinante inferior) e em  $z = b$  (camada confinante superior) acrescidos da atividade de um poço  $i$  na atuando na coordenada  $(x_i, y_i)$ . Assim, a equação governante do fluxo transiente de água subterrânea em aquífero confinado, acrescido de suas condições iniciais e de fronteira, compõe o

seguinte Problema do Fluxo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[ T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ T_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right] + F(x, y, t) = S \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{em } \Omega \times (0, t_f] \\ h = h_0 \quad \text{sobre } \Gamma_D \times (0, t_f] \\ \mathbf{n} \cdot D\nabla h = g \quad \text{sobre } \Gamma_N \times (0, t_f] \\ h(\cdot, t_0) = h_0 \quad \text{em } \Omega \quad \text{para } t = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

sendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um domínio poligonal limitado e com fronteira Lipschitz  $\Gamma$  que consiste de duas partes disjuntas: a fronteira de Dirichlet  $\Gamma_D$  e a fronteira de Neumann  $\Gamma_N$ , tais que  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ . O tempo final  $t_f$  é arbitrário, no entanto  $\Omega$ , precisa ser especificado.

Segundo Bear (1972), se o domínio possui um poço de extração atuando em seu interior, sem influência da fronteira  $\partial\Omega$ , então a solução de Theis fornecerá a carga hidráulica  $h$  da equação (4) por meio da seguinte expressão analítica:

$$h = h_0 - \frac{Q}{4\pi T} \left[ -0,5772 - \ln(u) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n \cdot n!} \right] = h_0 - \frac{Q}{4\pi T} W(u) \quad (5)$$

sendo a transmissividade  $T = K \cdot b$  para espessura  $b$  do aquífero e condutividade hidráulica  $K$  e a função  $u = r^2 \cdot \frac{S_e}{4Tt}$  para  $r$  a distância radial até o poço no tempo  $t$ . E ainda,  $W(u)$  define a função de poço,  $Q$  representa a vazão e  $h_0$  é a carga hidráulica inicial. Em contrapartida, a respectiva resolução numérica aproximada pelo método de elementos finitos, requer uma formulação fraca do problema do fluxo da equação, conforme detalhado em Verfürth (2004) e em Santos (2015).

### 3 | PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E RESOLUÇÃO NUMÉRICA

O Princípio da Superposição considera a construção de poços imagens, para fornecer rebaixamentos adicionais através da soma de rebaixamentos individuais (BEAR, 1972), (REILLY *et al.*, 1984). Para ilustrar esse princípio no caso de dois poços de bombeamento no domínio computacional unidimensional, obtido por secção vertical do domínio bidimensional retangular, considere  $\Omega$  de dimensões  $M \times M$  e dois poços de bombeamento de mesma vazão localizados nas posições  $P_1 \left( \frac{M}{3}, \frac{M}{2} \right)$  e  $P_2 \left( \frac{2M}{3}, \frac{M}{2} \right)$  conforme representado na figura 1. Além de receber a imposição da condição de fronteira do tipo Dirichlet  $h=h_0$ , a fronteira  $x = 0$  define, em  $P_{imag1} \left( -\frac{M}{3}, \frac{M}{2} \right)$ , um poço imagem na posição simétrica à  $P_1$  e a fronteira  $x = M$  define, em  $P_{imag2} \left( \frac{4M}{3}, \frac{M}{2} \right)$ , outro poço imagem na posição simétrica à  $P_2$ . Esses novos poços imagens, em virtude da linearidade da equação, atuarão como sendo poços de injeção com a mesma vazão observada em seus respectivos poços reais. As respectivas cargas hidráulicas de  $P_1$  e  $P_2$  são  $h_1 = h_0 - S_1$  e  $h_2 = h_0 - S_2$ , sendo  $S_1 \geq 0$  e  $S_2 \geq 0$  os rebaixamentos individuais causados pelo bombeamento dos poços  $P_1$  e  $P_2$ . Para satisfazer as condições nas fronteiras de Dirichlet, os poços imagens de injeção são necessários, pois, esses contribuem com pequenas parcelas para os respectivos rebaixamentos.

Especificamente, o poço imagem contribui com uma pequena parcela para o rebaixamento do poço P1, enquanto que o poço imagem 1 contribui, da mesma forma, com o poço P2. Observe que o poço imagem 1 não contribui no rebaixamento do poço P2 e nem o poço imagem 2 não contribui no rebaixamento do poço P1.

Desta forma, o rebaixamento em um ponto específico do domínio será a soma dos rebaixamentos individuais. Consequentemente, a carga hidráulica  $h$  em um ponto específico do domínio será fornecido pela expressão analítica:

$$h = h_0 - (S_1 + S_2) + (S_{1imag} + S_{2imag}) \quad (6)$$

sendo  $S_{1imag} \geq 0$  e  $S_{2imag}$  respectivas contribuições de cada poço imagem.

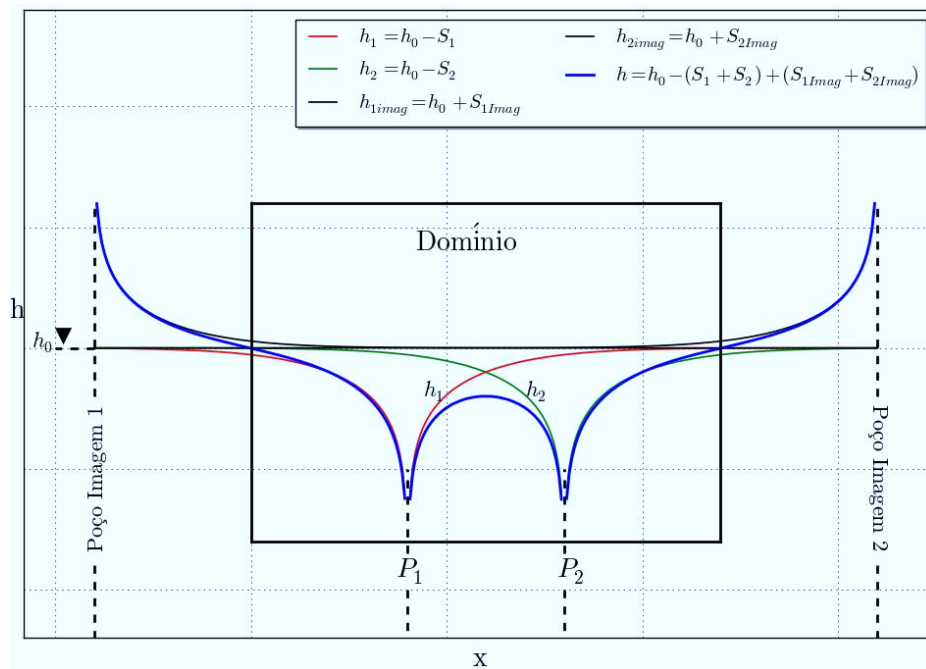


Figura 1 - O Princípio da Superposição para domínio unidimensional com duas fronteiras de Dirichlet. Os poços imagens são de injeção com localização simétrica em relação às fronteiras. A parcela  $h_0 - S_j$  representa a carga hidráulica devido o bombeamento do poço  $j$  enquanto que  $h_0 + S_{jimag}$  representa a carga hidráulica devido à contribuição de injeção do poço imagem  $j$  para  $j = 1$  e  $2$ .

Na figura 1 pode ser verificado que  $S_1 = S_{1imag}$  no perfil da fronteira  $x=0$  e que o valor da carga hidráulica  $h$  coincide com a média das funções  $h_1$  e  $h_{1imag}$ , ou seja,

$$h_{x=0} = \frac{h_1 + h_{1imag}}{2} = \frac{(h_0 - S_1) + (h_0 + S_{1imag})}{2} = \frac{(h_0 - S_1) + (h_0 + S_1)}{2} = h_0$$

e ainda,  $S_2 = S_{2imag}$  no perfil da fronteira  $x=M$  com valor de  $h$  coincidindo com o valor médio das funções  $h_2$  e  $h_{2imag}$ , isto é,

$$h_{x=M} = \frac{h_2 + h_{2imag}}{2} = \frac{(h_0 - S_2) + (h_0 + S_{2imag})}{2} = \frac{(h_0 - S_2) + (h_0 + S_2)}{2} = h_0$$

Assim, a solução analítica obtida pelo Princípio da Superposição satisfaz a condição de Dirichlet do problema de fluxo (4) na qual impõe  $h = h_0$  sobre  $\Gamma_D \times (0,tf]$ .

Esse princípio representado na equação (6) pode ser estendido para a obtenção da superfície de rebaixamento em um domínio  $\Omega$  com vários poços de bombeamento, ou de injeção, mesmo sob atuação com taxa de vazões distintas.

Além disso, condições de fronteira de Neumann podem ser adotadas em conjunto com as condições de Dirichlet. Nas simulações deste capítulo, apenas as condições de Dirichlet serão adotadas, pois o foco inicial está na apresentação didática e tecnológica para implementação computacional da solução analítica (5) sujeita à generalização pela equação (6). No entanto, no interesse de considerar a condição de Neumann, basta definir cada poço imagem simétrico à fronteira em questão como sendo poço de bombeamento sob a mesma vazão do seu respectivo poço real.

Se a abordagem computacional inicia na definição da lista de pares ordenados, então  $L = [(X_1, Y_1); (X_2, Y_2); \dots; (X_k, Y_k)]$ , dará a posição de cada poço no interior e as sublistas  $listaCoorX = [X_1; X_2; \dots; X_k]$  e  $listaCoorY = [Y_1; Y_2; \dots; Y_k]$  serão para as posições cartesianas na direção dos respectivos eixos x e y. Adicionalmente, a taxa de vazão  $Q_j$  e o raio  $r_j$  do poço na posição  $(X_j, Y_j)$  seguirão armazenados pelas listas  $L_{Q_w} = [Q_1; Q_2 \dots; Q_k]$  e  $L_{r_w} = [r_1; r_2 \dots; r_k]$ . A obtenção da resolução numérica da equação (4), sujeita a uma lista L de fontes pontuais no interior do domínio  $\Omega$  e taxa de vazões  $L_{Q_w}$ , se apoiará no método de elementos finitos e utilizará as ferramentas computacionais e conceitos de adaptatividade disponíveis na programação científica do projeto FEniCS (LOGG *et al.* 2012). A validação dessa resolução numérica, obtida por programada em linguagem Python, será baseada na comparação gráfica de resultados obtidos com a respectiva solução analítica de Theis que generaliza a expressão sobre o conjunto de k poços.

Além do funcionamento conjunto dos poços atuando sob vazões distintas, dadas pela lista  $L_{Q_w}$ , será ainda estabelecido que:

*i.)* o rebaixamento resultante, que não pode ser superior a  $h_0$ , dependa apenas da distância entre o ponto de observação  $(X, Y)$  e das coordenadas  $(CoorX, CoorY)$  do poço, ou seja, dependa da distância  $r = \sqrt{(X - CoorX)^2 + (Y - CoorY)^2}$ ;

*ii.)* o índice n na função de poço  $W(u)$  da solução analítica de Theis (5) não precisa ser especificado, pois o cálculo será realizado iterativamente por procedimento adaptativo implementado para cada ponto do domínio computacional;

*iii.)* supondo  $\Omega$  um domínio retangular definido pelas as coordenadas da diagonal  $(x_0, y_0) = (0,0)$  e  $(x_1, y_1)$ , então as posições dos possíveis 8 poços imagens de um poço real situado em  $(P_x, P_y)$  serão:  $(-P_x, P_y)$ ,  $(P_x, -P_y)$ ,  $(-P_x, -P_y)$ ,  $(2x_1 - P_x, P_y)$ ,  $(2x_1 - P_x, 2y_1 - P_y)$ ,  $(P_x, 2y_1 - P_y)$ ,  $(2x_1 - P_x, -P_y)$  e  $(-P_x, 2y_1 - P_y)$ . Dessa forma, dado , todas as listas de coordenadas dos poços imagens podem ser obtidas;

*iv.)* para a lista L de k poços, o rebaixamento ocasionado em um ponto específico será dado pela soma de todas as contribuições dos poços reais e imagens, sendo que, em função do raio de influência, alguns poços imagens construídos em *iii.)* podem ser descartados por não apresentarem efeitos de rebaixamento em certas regiões do domínio computacional.

### 3.1 Implementação das soluções Python-FEniCS

Baseado nos itens *i.)* a *iv.)* estabelecidos na seção anterior, a implementação da solução analítica para a contribuição de todos os poços da lista L, será fornecido por:

$$WellFunctionAdaptiveTheis(mesh, listaCoorX, listaCoorY, listaR_w, listaQ_w, V) \quad (7)$$

um código Python-FEniCS, programado para implementar a generalização da equação (6) disponibilizando a solução analítica do problema de fluxo subterrâneo (4). Esse código é alimentado por malha refinada no entorno dos poços reais e por informações sobre coordenadas de posicionamento, raios de abertura, taxas de bombeamento e um espaço V de funções interpoladoras. E devolve a solução analítica obtida pelo Princípio da Superposição. As principais linhas de programação do código Python (7) são:

```
1 def WellFunctionAdaptiveTheis(mesh, listaCoorX, listaCoorY, listaRw, listaQw, V):
2     class Well(Expression):
3         def eval( self, value, x):
4             tol=1.0E-15
5             TheisPartialSum=0.0
6             TolForTheis=1.0E-07
7             valor1=0.0
8             for i in range(rangeToRun):
9                 Rad=np.sqrt((x[0]- listaCoorX[ i ])**2+(x[1]- listaCoorY[ i ])**2);
10                u=(Rad**2*S*e)/(4.0*T*t)
11                if (Rad<=listaRw[i]):
12                    TheisPartialSum`iWell0=-0.5772-np.log(u)+u-u**2/(2.0*2.0)+u**3/(3.0*6.0)-u**4/(4.0*24.0)
13                    TheisPartialSum`iWell1=-0.5772-np.log(u)+u-u**2/(2.0*2.0)+u**3/(3.0*6.0)-u**4/(4.0*24.0)
14                    l=5;
15                    AbsValue=1000.0
16                    while( Abs Value<TolForTheis):
17                        TheisPartialSum`iWell1 += (-1)**(l+1)*u**l/(1*math. factorial( l))
18                        Abs Value=np.abs(TheisPartialSum`iWell1 - TheisPartialSum`iWell0)
19                        TheisPartialSum`iWell0=TheisPartialSum`iWell1
20                        if TheisPartialSum`iWell1 <= lconstant*listaQw[ i ]/(4*np.pi*T):
21                            TheisPartialSum`iWell1=0
22                            TheisPartialSum`iWell0=0
23                            Abs Value=0
24                            l+=1
25                            valor1 +=(listaQw[ i ]/(4.0*np.pi*T))*TheisPartialSum`iWell1
26                value[0]= valor1
27                if abs( value [0]) > 1.0E-10:
28                    value [0]=0.0
29                elif ( value [0]>0.0) :
30                    value [0]=0.0
31                value [0]=value [0]
32            Imagx= Well(element=V.ufl`element());
33            Imagx = interpolate (Imagx,V)
34            return Imagx
```

E ainda, os poços imagens indicados em *iii.)* foram obtidos por estratégias de reflexão e translação das coordenadas da lista , implementados pelos códigos Python:

```
1 def MakeImag(listaCoor):
2     lista =[]
3     for i in range(rangeToRun):
4         lista .append(- listaCoor [ i ])
5     return lista
```

```
1 def MakeImagMove(listaCoor,xi):
2     lista =[]
3     for i in range(rangeToRun):
4         distanceFromXi=xi- listaCoor [ i ]
5         valor=xi+distanceFromXi;
6         lista .append(valor)
7     return lista
```



Para evitar contribuições não significativas, devido o raio de influência de certos poços da lista L, foi adotado um critério de parada para o cálculo das somas parciais em (5). Considerando que a função de poço não depende do tipo de bombeamento, então  $W(u) > h_0$  foi usado como critério de detecção daqueles poços que não fornecem contribuições significativas ao rebaixamento.

Em relação à resolução obtida por métodos numéricos, a habilidade de uma malha computacional representar a discretização do domínio  $\Omega$  influenciará a qualidade de seus resultados. Na obtenção da resolução Python MEF do problema de fluxo (4), o processo de geração de malhas não estruturadas também será facilitado pela utilização direta de classes disponíveis nas bibliotecas do projeto FEniCS (FENICS, 2018). Nessa malha MEF não estruturada, a definição na posição dos poços requer que os mesmos sejam vértices da malha de elementos finitos (ISTOK, 1989). Assim, uma mudança de coordenadas para que vértices da malha assumam a posição do poço mais próximo será realizada pela função Python, *MeshPassingToWellAsVertex(\*\*)*. Essa função recebe a malha inicial, as listas *listaCoorX* e *listaCoorY* e retorna a malha final em que as coordenadas da lista L são vértices dos elementos finitos. O *script* abaixo descreve a implementação do código mencionado:

```

1 def MeshPassingToWellAsVertex(mesh,listaCoorX,listaCoorY):
    coords=mesh.coordinates(); tree = mesh.bounding_box_tree()
3     point_cloud = [ dolfin.Point(point) for point in mesh.coordinates() ]
    tree.build(point_cloud, 2); p=Point(coorx[0],coory[0])
5     p_i, distance = tree.compute_closest_point(p); lengthCoor=np.shape(coords)[0]
    for i in range(len(coorx)):
7         p=Point(coorx[i],coory[i])
        p_i, distance = tree.compute_closest_point(p); print "p:", p.str()
9         coords[p_i][0]=coorx[i]; coords[p_i][1]=coory[i];
    return mesh

```

Uma estratégia de refinamento local, conforme descrição do código a seguir, foi adotada para as regiões radiais em torno dos poços para elevar o nível de acurácia da solução numérica na proximidade das coordenadas que representam os poços reais.

```

def FunctionToRefine(mesh,listaCoorX, listaCoorY, lista ):
2     for i in range(len( lista )):
        cell_markers = MeshFunction("bool",mesh, mesh.topology().dim())
4         cell_markers.set_all(False)
        for c in cells(mesh):
6             for w in range(len(listaCoorX)):
                p=Point(listaCoorX[w],listaCoorY[w])
8                 if (c.midpoint().distance(p) < lista[i]):
                    cell_markers[c] = True
10            mesh = refine(mesh, cell_markers);
    return mesh

```



A manipulação da resolução numérica utilizou a biblioteca NumPy (WALT *et al.*, 2011) e resultados gráficos foram gerados por meio da biblioteca Matplotlib (HUNTER, 2007). A integração entre componentes do Projeto FEniCS (FENICS, 2018) e a programação científica dos demais códigos foi realizada computacionalmente em ambiente de desenvolvimento Python da Plataforma Eclipse (ECLIPSE, 2015). A arquitetura do ParaView (AHRENS *et al.*, 2005) também contribuiu para a visualização científica dos níveis de detalhes na sobreposição de resultados analíticos e numéricos.

É importante ressaltar que a totalidade da metodologia computacional descrita nesta seção empregou a filosofia colaborativa para a utilização de códigos abertos.

## 4 | COMPILAÇÃO DE RESULTADOS

Nesta seção, quatro simulações numéricas serão consideradas para exemplificar e ilustrar a metodologia computacional e os códigos Python previamente apresentados. O primeiro exemplo considera uma discussão sobre a adaptatividade que otimiza os resultados numéricos para aproximar o termo de série da equação (5) e ilustra o cálculo iterativo da função de poço  $W(u)$  com quantidade distintas de termos em cada ponto do domínio computacional  $\Omega$ . O segundo problema trata da solução numérica MEF e analítica de Theis com ação de um único poço no domínio. O terceiro problema ilustra a aplicação do Princípio da Superposição com a comparação de resultados analítico e numérico. E, finalmente, o quarto exemplo discute os resultados para um conjunto de cinco poços reais no domínio computacional através de comparação entre as respectivas soluções numérica MEF e analítica de Theis.

Os exemplos envolvendo a resolução do problema do fluxo de água subterrânea (4), sob a ação de poços de bombeamento serão obtidos, analiticamente, pela solução de Theis generalizada na equação (6) e submetidas, em conjunto aos poços imagens, no código Python (7) do Princípio da Superposição. A respectiva resolução numérica, fornecida pelo método de elementos finitos que utilizam bibliotecas do projeto FEniCS (FENICS, 2018), considera domínios computacionais retangulares sobre malhas triangulares não estruturadas. A geração dessas malhas MEF, de extensão .xml, são obtidas pelo código FEniCS `generatemesh(rect,l,"cgal")` sob o domínio retangular  $\Omega$  predefinido na linha de comando Python `rect = Rectangle(P0,P1)`. A figura 2 ilustra o domínio computacional onde cada vértice da malha MEF, que está mais próximo de um poço real, foi redefinido para assumir a respectiva coordenada antes de aplicar as estratégias de refinamento, através dos códigos `MeshPassingToWellAsVertex(**)` e `FunctionToRefine(**)`.

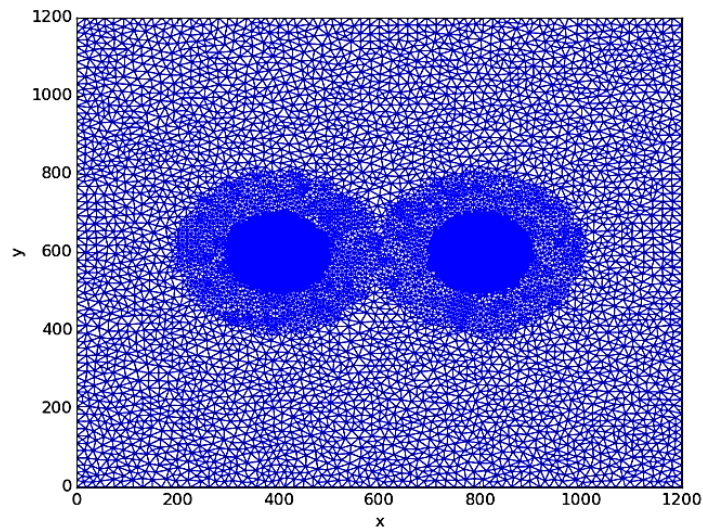


Figura 2 – Domínio computacional MEF e estratégias de refinamento adaptativo

#### 4.1 Adaptatividade para o cálculo da função de poço $W(u)$

Conforme apresentado na equação (5), a solução analítica de Theis envolve o cômputo da função de poço  $W(u)$  que depende de uma soma com infinitos termos. Uma forma de estabelecer um critério de parada para o termo de truncamento da série é realizar a soma parcial e obter uma aproximação  $S_n$  definida por:

$$W(u) \approx S_n = -0,5772 - \ln(u) + u - \frac{u^2}{2 \cdot 2!} + \frac{u^3}{3 \cdot 3!} - \frac{u^4}{4 \cdot 4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n \cdot n!} \quad (8)$$

Esta abordagem não é muito apropriada, pois conduz a uma escolha empírica do índice  $n$ , no qual pode não refletir na quantidade de termos necessários em um ponto específico do domínio computacional. Ou seja, algumas regiões do domínio retangular  $\Omega$  podem requerer mais termos da série, enquanto que, em outras regiões, um número menor de termos pode ser aceitável. Uma alternativa para contornar este problema foi utilizar somas parciais  $S_n$  e  $S_{n+1}$  e um critério de parada tal que  $|S_{n+1} - S_n| < \epsilon$  para um valor tolerável do erro de truncamento  $\epsilon > 0$ . Neste caso, a soma aproximada  $W(u) \approx S_{n+1}$  satisfaz o mesmo critério de parada para todo ponto do domínio. Com esta estratégia de adaptatividade nas simulações numéricas, ao impor  $\epsilon = 10^{-8}$ , o valor máximo requerido foi de  $n = 22$  termos e o valor mínimo foi de apenas  $n = 3$  termos, evidenciando uma apropriada otimização computacional que foi obtida com esse critério adaptativo adotado.

No intuito de representar a influência da estratégia adaptativa no critério de parada, visando a qualidade da solução analítica, as figuras 3(a) e 3(b) ilustram mapas de diferenças entre expressões calculadas de forma distinta para a aproximação de (7). Para isto, considere que  $W_1$ ,  $W_2$  e  $W_3$  representem as aproximações obtidas com os respectivos critérios:  $\epsilon = 10^{-8}$ ,  $n=10$  e  $\epsilon = 10^{-3}$ .

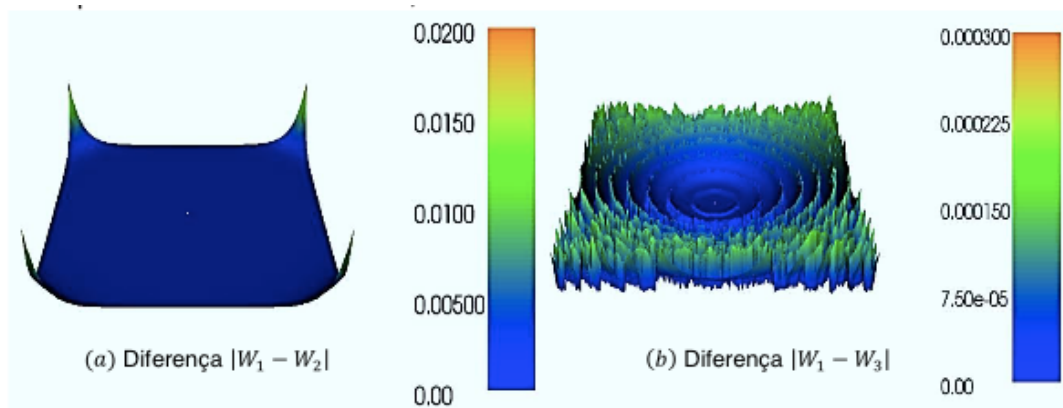


Figura 3 - Diferenças entre as aproximações  $W_1$ ,  $W_2$ , e  $W_3$ , sendo que  $W_1$  foi obtida com critério de parada  $\epsilon = 10^{-8}$ ,  $W_2$  uma expressão obtida com  $n=10$  termos em (7) e  $W_3$  obtido com  $\epsilon = 10^{-3}$

Na figura 3(a), ilustrando o gráfico da diferença  $|W_1 - W_2|$ , verifica-se que nessa estratégia existe uma discordância da ordem  $10^{-2}$  em regiões nas proximidades dos cantos do domínio  $\Omega$ . Na figura 3(b), que ilustra o gráfico da diferença  $|W_1 - W_3|$ , a discordância entre as estratégias é da ordem  $10^{-4}$  em todo domínio  $\Omega$ . Ou seja, o grau de grandeza observado nos valores graduados em cada escala dessas figuras revela a equivalência entre  $W_1, W_2$  e  $W_3$ . Assim, ao comparar  $W_1$  com  $W_2$ , observa-se regiões onde  $n=10$  termos não foram suficientes para fornecer uma aproximação adequada de  $W(u)$ . Desta forma, essa análise nos resultados gráfico evidencia que a aproximação  $W_3$  apresenta maior qualidade numérica do que  $W_2$ , pois, observando as diferenças, essa estratégia é a que mais se aproxima de  $W_2$ . Logo, o erro de aproximação envolvido ao usar  $W_3$  será menor do que o da estratégia  $W_2$  que necessita  $n=10$  termos para representar  $W(u)$  em todos os pontos do domínio  $\Omega$ .

Portanto, pode ser sugerido que a estratégia adaptativa que adota o critério de parada  $|S_{n+1} - S_n| < \epsilon$  disponibiliza aproximações de melhores qualidade do que a estratégia que aplica um valor constante de termos para todo o domínio  $\Omega$ .

#### 4.2 Comparação entre Solução de Theis e Solução Numérica para 1 poço

Considere um poço de bombeamento operando, com taxa de vazão constante  $Q$ , as águas subterrâneas no interior de um aquífero confinado de domínio com dimensões retangulares  $\Omega = 1.200\text{m} \times 1.200\text{m}$ . Para determinar a solução numérica da distribuição de cargas hidráulicas do problema de fluxo, a programação Python empregou o método de elementos finitos na formulação fraca do problema (4), conforme descrição nas linhas de comando do código abaixo:

```

1 # VARIATIONAL FORMULATION OF FINITE ELEMENTS
2 u = TrialFunction(V)
3 v = TestFunction(V)
4 f2=Constant(0.0)
5 f2=WellsLocFunction
6 a = S'e*b*u*v*dx + theta*dt*K*b*inner(nabla'grad(u), nabla'grad(v))*dx
7 L = (S'e*b*u'1*v + dt*f2*v -(1.0- theta)*dt*T*inner(nabla'grad(u'1), nabla'grad(v)))*dx
8
9 A = assemble(a)
10 b = None # variable used for memory savings in assemble calls
11
12 u = Function(V)
13
14 # LOOPING START
15 t = dt
16 while t <= t'stop :
17     b = assemble(L, tensor=b)
18     for bc in bcs:
19         bc.apply(A,b)
20     solve(A, u, vector(), b)
21     if t == dt:
22         plot(u'1, interactive =False, title =' Solution by FEM of Flux Equation')
23     t += dt
24     u'1.assign(u)
25     plot(u'1)

```

Para o cálculo dessa solução numérica MEF, foi gerado uma malha inicial não estruturada contendo  $N_v = 3.281$  vértices distribuídos num total de  $N_e = 6.304$  elementos triangulares. Na sequência, visando uma melhor qualidade da solução MEF, foram realizados refinamentos sucessivos nas regiões próximas ao centro do poço cujas distâncias radiais são inferiores à [600m, 100m, 50m,10m]. O resultado final foi uma malha mais fina contendo  $N_v = 12.743$  vértices sobre  $N_e = 25,187$  elementos.

Na figura 4, sobreposta à malha do domínio computacional  $\Omega$ , está representada a solução numérica MEF da equação do fluxo subterrâneo (4) sob a atuação de 1 poço de bombeamento em seu interior.

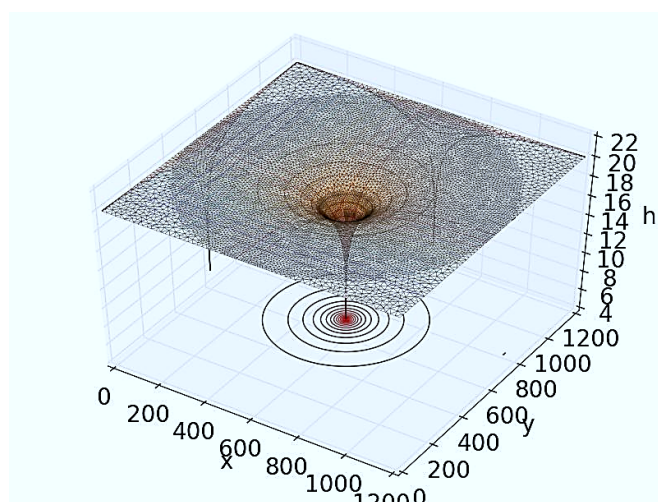


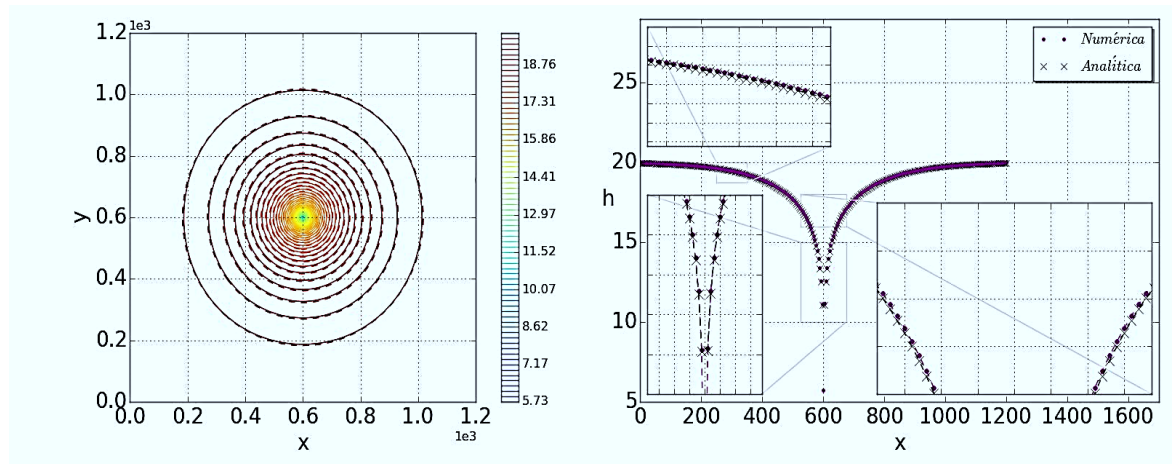
Figura 4 – Domínio computacional  $\Omega = 1.200\text{m} \times 1.200\text{m}$  e a solução numérica MEF do rebaixamento  $h(x, y, t)$  seguido de projeções de perfis sobre os planos coordenados

Em relação à solução analítica de Theis para o problema de fluxo (4), não houve a necessidade da aplicação do Princípio da Superposição, pois, o poço ficou situado no centro do domínio  $\Omega$  e, em função da vazão constante adotada, o raio de influência



permanece menor do que a distância do poço à fronteira  $\partial\Omega$ . Assim, para nesta primeira simulação, a solução de Theis foi obtida com a aplicação direta da equação por meio da função Python implementada no código (7) *WellFunctionAdaptiveTheis(\*\*)*.

Uma comparação dos resultados observados nas avaliações numérica e analítica do problema de fluxo (4) são apresentados pelas curvas de nível e pela projeção de perfis das figuras 5(a) e 5(b).



Curvas de nível das soluções MEF e Theis Perfis do rebaixamento

Figura 5 – Sobreposição das curvas de nível das soluções numérica e analítica e detalhes da concordância dos perfis das soluções MEF e de Theis para o rebaixamento

Se considerar desprezível o esforço computacional no cálculo da solução de Theis através da estratégia  $\epsilon = 10^{-8}$  para o critério de parada, observa-se, pela sobreposição gráfica das soluções MEF e analítica do problema de fluxo (4), uma adequada concordância entre os resultados simulados sob o domínio  $\Omega$ .

A finalidade da comparação entre a solução numérica e a solução analítica da equação (4), para situações simplificadas, é a validação do código numérico MEF implementado em linguagem Python apoiada em bibliotecas computacionais do projeto FEniCS. Assim, a solução MEF obtida por esse código numérico será capaz de disponibilizar, mesmo em situações inevitáveis em que a solução analítica não se encontra disponível ou é inexistente, resultados robustos e apropriados para o problema de fluxo subterrâneo em aquífero confinado, sob imposição de outras condições iniciais e de fronteira ou ação transiente de um poço de bombeamento.

#### 4.3 Princípio da Superposição e a Solução Numérica para 2 poços

Nesta seção de aplicação do Princípio da Superposição e obtenção da solução numérica MEF, serão considerados dois poços atuando no mesmo domínio computacional do exemplo anterior, ou seja, a superfície de rebaixamento resultará da atuação conjunta desses dois poços de bombeamento, conforme ilustra a figura 6.

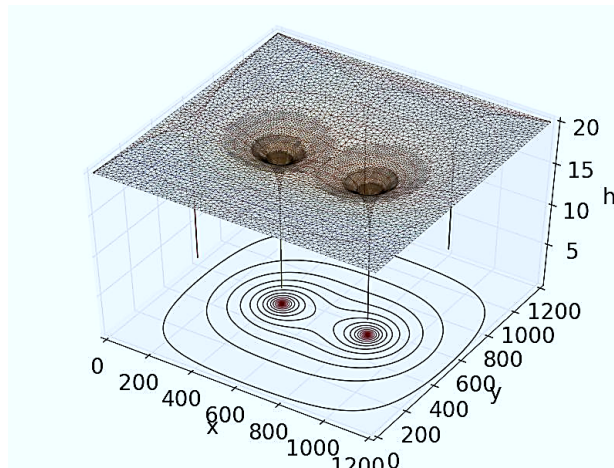


Figura 6 – Solução Python MEF do rebaixamento  $h(x, y, t)$  e perfis da sobreposição com a respectiva solução de Theis obtida com a aplicação do Princípio da Superposição para 2 poços de bombeamento

Nesta situação, além da interação entre os poços reais P1 e P2, haverá a necessidade da construção dos poços imagens de modo que as condições de fronteira de Dirichlet sejam satisfeitas. É importante notar que nem todos os poços imagens fornecerão contribuições significativas ao rebaixamento  $(x, y, t)$ . Por exemplo, em função das disposições adotadas, o poço imagem de P1, em relação a fronteira de Dirichlet  $x=0$ , contribuirá para o rebaixamento de P1, mas, em função da distância e vazão atribuída, não contribuirá para o rebaixamento de P2. Analogamente, o poço imagem de P2, em relação a fronteira  $x=1.200$ , contribuirá para o rebaixamento de P2, mas não terá influência no rebaixamento de P1.

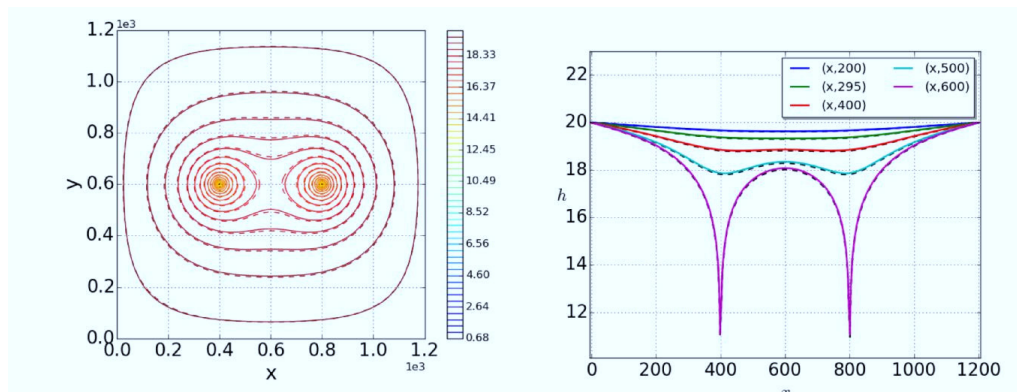
Baseado na lista L de coordenadas dos poços, todas as listas de coordenadas dos poços imagens podem ser obtidas por meio das funções *MarkelMag*(□) e *MarkelMagMove*(□) apresentadas no final da seção Implementação Python-FEniCS. Assim, enquanto a solução analítica, que aplica o Princípio da Superposição, foi obtida por meio da aplicação sucessiva da função *WellFunctionAdaptiveTheis*(\*\*) nas listas de poços reais e imagens, a correspondente resolução numérica da equação do fluxo (4), com 2 poços de bombeamento, foi obtida com a implementação do método de elementos finitos baseada nas bibliotecas do projeto FEniCS (FENICS, 2018).

Nessa obtenção da solução numérica Python MEF, considerou-se uma malha inicial não estruturada com  $N_v = 4.624$  vértices distribuídos em  $N_e = 8.990$  elementos triangulares. Em seguida, após realizado estratégias de refinamentos sucessivos em região de proximidades radiais a cada poço com distância inferior à

$$[200m, 100m, 50m, 10m, 1m, 0.50m, 0.25m, 0.20m, 0.19m, 0.18m, 0.17m]$$

obteve-se uma malha final com  $N_v = 26.690$  vértices sobre  $N_e = 53.122$  elementos.

A adequada concordância entre a solução analítica de Theis, com  $\epsilon = 10^{-8}$ , para aproximação da função de poço  $W(u)$  e a solução numérica Python MEF pode ser observada pela sobreposição gráfica das correspondentes curvas de nível e perfis de suas projeções em planos coordenados, conforme visto na figura 7.



(a) Curvas de nível das soluções MEF e analítica      (b) Perfis das soluções em malha regular

Figura 7 - Solução numérica Python MEF em adequada concordância com a solução analítica obtida pelo Princípio da Superposição para 2 poços de bombeamento em domínio retangular

As figuras 7(a) e 7(b) ilustram, respectivamente, as curvas de nível e os perfis de soluções com sobreposições adequadas dos resultados numéricos Python MEF sobre os resultados analíticos do Princípio da Superposição.

A reutilização da função Python FEniCS (7) *WellFunctionAdaptiveTheis(\*\*)* para todas as listas de poços imagens foi responsável pelo fornecimento de todas as contribuições necessárias para a definição adequada do rebaixamento final.

Outra vantagem observada nessa metodologia do Princípio da Superposição, sob a ação de 2 poços reais para o agrupamento das contribuições no rebaixamento  $h(x, y, t)$  dado pelos poços imagens, foi a independência do número de poços reais no domínio computacional. Assim, qualquer quantidade de poços imagens podem ser construídos por meio das funções de reflexão e translação apresentadas anteriormente.

De forma semelhante ao que foi discutido na seção anterior, a comparação e verificação de equivalência entre as soluções numérica e analítica para a equação, revela, novamente, uma apropriada robustez e confiabilidade do código Python FEniCS para aplicação na resolução do problema de fluxo de água subterrânea sob a ação de dois poços de bombeamento em situações em que a solução analítica não está disponível. Ou seja, para outros problemas de fluxo (4) que podem estar sujeitos às condições de fronteiras aplicadas sobre domínios poligonais de formas irregulares e complexas ou sob condições iniciais de taxas de vazões mudando com o tempo.

#### 4.4 Princípio da Superposição e a Solução Numérica para 5 poços

Para finalizar a comparação entre os resultados da solução Python FEniCS com os respectivos resultados da solução analítica obtida pelo Princípio da Superposição no problema do fluxo em aquífero confinado, serão considerados cinco poços de bombeamento atuando, conjuntamente, no mesmo domínio computacional  $\Omega$  da seção anterior. A lista  $L_5$  de coordenadas para a posição dos poços reais será dada por:

$$L_5 = [(300,300); (300,900); (600,600); (900,300); (900,900)]$$



Nesta situação, a estratégia de refinamentos locais sucessivos será conduzida por lista contendo valores para as distâncias radiais  $R = [200\text{m}, 100\text{m}, 50\text{m}, 10\text{m}, 1\text{m}]$ . A figura 8 ilustra a malha final refinada em regiões de proximidades dos 5 vértices que representam a posição dos poços. Conforme apresentado anteriormente, a obtenção da solução analítica para este caso também considerou a construção de todas as possíveis listas com informações dos poços imagens e a aplicação sucessiva do código Python *WellFunctionAdaptiveTheis(\*\*)* para o cálculo das contribuições de rebaixamento para cada um deles numa lista de poços.

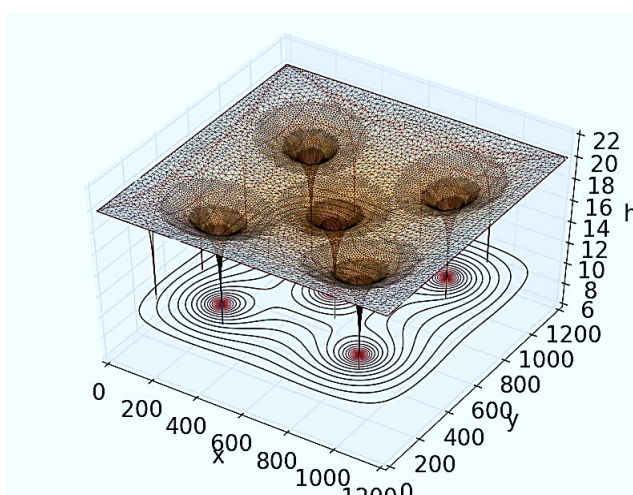
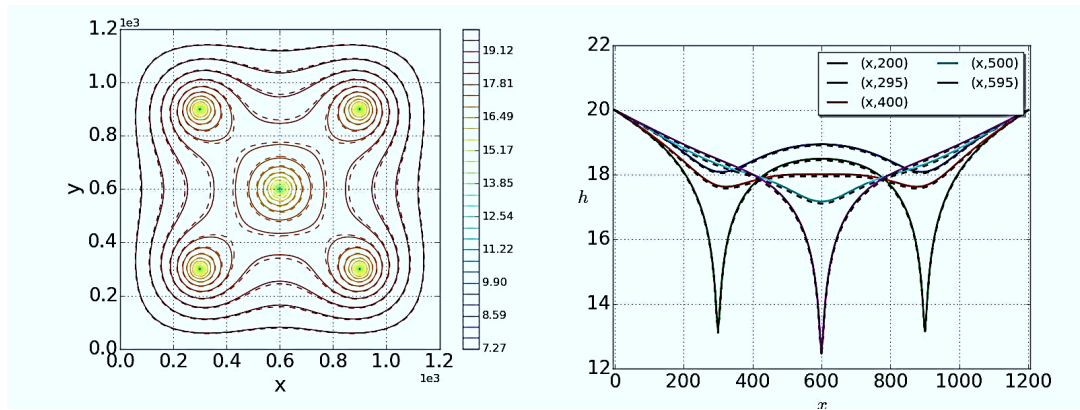


Figura 8 - Solução Python MEF sobreposta à solução analítica obtida pela generalização do Princípio da Superposição em domínio computacional sob a ação conjunta de 5 poços de bombeamento

Este caso pode ser considerado como uma generalização do Princípio da Superposição, implementada pela equação (6), para obtenção da superfície do rebaixamento provocado na interação de 5 poços reais do interior do domínio  $\Omega$  e os seus respectivos poços imagens. O valor  $\epsilon = 10^{-8}$  foi novamente usado na estratégia adaptativa para o cálculo de cada função de poço  $W(u)$ . Este exemplo difere do caso para dois poços, em termos das listas de poços imagens, apenas pela quantidade de elementos, pois a quantidade de listas é a mesma. No entanto, se considerar as contribuições dos poços imagens, em todas as listas geradas sempre haverá pelo menos um poço imagem com contribuição significativa para o rebaixamento, e poços que não fornecem contribuições significativas. Neste caso, o critério de parada para estabelecer se a contribuição é significativa será ativado. Este critério, em conjunto com a adaptatividade da solução analítica, fornece uma maneira eficiente para o cálculo das contribuições e facilita a obtenção da solução analítica via o Princípio da Superposição. A partir de resultados gráficos, a figura 9(a) ilustra uma adequada concordância observada na sobreposição das curvas de nível da solução analítica e a correspondente solução numérica Python FEniCS, e a figura 9(b) ilustra a projeção de cinco perfis de solução analítica determinada pelo Princípio da Superposição satisfatoriamente sobrepostos às respectivas soluções numéricas Python FEniCS.



(a) Sobreposição das curvas de nível

(b) Perfis das soluções MEF e analítica

Figura 9 - Curvas de nível das soluções analítica e numérica e a comparação entre os perfis de solução obtido pelo Princípio da Superposição com a respectiva solução Python FEniCS

Esses resultados numéricos e analíticos revelam a equivalência nos dois métodos de resolução do problema do fluxo sob a atuação de 5 poços de bombeamento em aquífero confinado. A escolha dessa quantidade e da disposição dos poços reais foi empírica, no entanto, de caráter didático. Em relação à implementação da solução numérica Python FEniCS para representação do comportamento hidráulico, o código se demonstrou isento de maiores dificuldades para aplicação em situações de aquíferos confinados que possuam geometria complexa da sua fronteira irregular ou estão submetidos a ação simultânea de diversas fontes de extração em seu interior.

Sob condições simplificadas do domínio, a eficiência computacional e robustez para obtenção da solução analítica, através do proposto código Python 7, também se apresenta de forma independente da quantidade e disposição dos poços reais.

## 5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Especificamente, neste capítulo, um código Python-FEniCS foi desenvolvido para a validação da implementação computacional de uma solução aproximada para o problema do fluxo de água subterrânea, que simula a superfície de rebaixamento sob a ação de poços de bombeamento, em aquífero confinado. A solução analítica de Theis e o Princípio da Superposição foram implementadas para o mesmo conjunto de poços de bombeamento sob condições de fronteira de Dirichlet. Resultados disponíveis em visualizadores científicos apresentaram adequada concordância, entre as soluções numéricas e as respectivas soluções analíticas, ao considerar 1, 2 e 5 poços de bombeamento no interior do domínio computacional. Essas simulações numéricas mostraram tanto uma adequação e robustez da solução aproximada pelo método de elementos finitos, quanto a capacidade da correspondente solução analítica, baseada no Princípio da Superposição, para englobar uma lista de  $k$  poços de bombeamento ou de injeção atuando, em conjunto, na mesma região de um determinado aquífero confinado. Portanto, importantes conceitos matemáticos e certos aplicativos de códigos abertos

foram utilizados para a modelagem, simulação, descrição e previsão da distribuição de cargas hidráulicas no meio subterrâneo. O emprego das citadas tecnologias, tais como, plataformas de programação Eclipse e FEniCS, linguagem Python científico de alto nível, bibliotecas MEF para códigos numéricos, geradores de malhas Dolfin, visualizadores gráficos Matplotlib e ParaView, de forma adequadamente integrada, serviram como ferramentas essenciais para a compreensão de um fenômeno físico de complexidade considerável. Na intenção de proporcionar maior leveza ao texto desse capítulo, as demonstrações matemáticas das equações (1) a (6), a descrição da formulação fraca do Problema de Fluxo, os detalhes da expressiva programação Python FEniCS e dos visualizadores científicos, ficaram apenas como sugestões para encorajar um aprofundamento nas obras científicas citadas na Referência.

Evidenciando a característica multidisciplinar que pode ser extraída de várias áreas do conhecimento, são muitos os conceitos da Matemática e suas Tecnologias que contribuem para resolução de problemas provenientes das Ciências Naturais. E ainda, sobreposto à uma mera apresentação de resultados numéricos em comparação aos resultados analíticos, a concordância obtida em diferentes enfoques ressalta, além da validação de implementação, a integração de ferramentas digitais e a confiabilidade computacional para que metodologias de simulação sigam seus caminhos distintos.

Para complementar, é possível que qualquer compreensão do comportamento de fenômenos hídricos na subsuperfície desperte interesses que vão além da comunidade de pesquisadores da hidrogeologia ou de especialistas em representação de leis da natureza através da modelagem matemática. Ou seja, programadores gráficos e os desenvolvedores de tecnologias computacionais, com algum conhecimento avançado de métodos numéricos, também podem contribuir nos estudos e desenvolvimentos relacionados nessa importante área da Dinâmica dos Fluidos Computacional.

## REFERÊNCIAS

AHRENS, J. *et al.*, **ParaView: An End-User Tool for Large Data Visualization, Visualization Handbook**, Elsevier, 2005,

BEAR, J. **Hydraulics of Groundwater**. New York: McGraw Hill, 2012.

CLEARY, R. **Águas Subterrâneas**. Clean Environment Brasil e Princeton Groundwater, 2007.

FENICS PROJECT. **Documentation for DOLFIN-1.6.0 (Python)**. Disponível em: <https://fenicsproject.org/olddocs/dolfin/1.6.0/python/demo/index.html>. Acesso em: 13 jul. 2018.

HUNTER, J.D. **Matplotlib: A 2D graphics environment**. Computing In Science & Engineering, v.9, n.3, pg. 90-95, 2007.

ISTOK, J. **Groundwater Modeling by the Finite Element Method**. Water Resources Monograph 13, American Geophysical Union, 1989.

LOGG, A. *et al.* **Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method**.

Springer, 2012.

REILLY, T. E.; FRANKE, L.; BENNETT, G. D. **The Principle of superposition and its application in ground-water hydraulics**, U.S.GEOLOGICAL SURVEY, Open-File Report 84-459, 1984.

SANTOS, J. P. M. **Método Multigrid Algébrico: Reutilização das Estruturas Multigrid no Transporte de Contaminantes**. 2015. 191 f. Tese (Doutorado em Ciências) – Escola de Engenharia de Sao Carlos, EESC/USP, Sao Carlos, 2015.

VAN DER WALT, S.; COLBERT, S. C.; VAROQUAUX, G. **The NumPy Array: A Structure for Efficient Numerical Computation**, Computing in Science Engineering, v13, n2, 2011.

VERFÜRTH, R. **Adaptive Finite Element Methods**: Lecture Notes Winter Term 2013/14. Disponível em <http://www.ruhr-unibochum.de/num1/files/lectures/AdaptiveFEM.pdf>. Acesso em: 24 maio 2018.

## RESONANT ORBITAL DYNAMICS OF CBERS SATELLITES

**Jarbas Cordeiro Sampaio**

IFBA – Inst Federal da Bahia  
Camacari – Bahia

**Rodolpho Vilhena de Moraes**

UNIFESP- Univ Federal de Sao Paulo  
Sao Jose dos Campos – Sao Paulo

**Sandro da Silva Fernandes**

ITA- Inst Tecnológico de Aeronautica  
Sao Jose dos Campos – Sao Paulo

**ABSTRACT:** Synchronous satlites have been studied in literature, due to the research of resonant orbits. In this work, CBERS - 2 (China-Brazil Earth Resource Satellite) satellite is investigated observing resonance effects which compose your orbit. Energy's curves are observed indicating the presence of Kozai's resonance in your orbit.

**KEYWORDS:** CBERS Satellites, Orbital Motion, Resonance

### 1 | INTRODUCTION

The technological development has provided several space missions with different goals and proposals. The artificial satellites orbiting the Earth represents 29% of the cataloged objects, but, only 7% are operational spacecraft. Considering approximately 10000

cataloged objects around the Earth, one can verify the distribution of the others objects as: 41% of miscellaneous fragments, 13% of mission-related objects and about 17% of rocket bodies. The uncatalogued objects larger than 1 cm are estimated in some value between 50000 and 600000 (OSIANDER; OSTDIEK, 2009).

Currently, the orbital motions of the cataloged objects can be analyzed using the 2-Line Elements set of the NORAD (North American Defense) (SPACE TRACK, 2013). The TLE are composed by seven parameters and epoch. These data can be compared, for example, with the model of the orbit propagator on board in the artificial satellite. A similar study is done for the Brazilian satellite CBERS-1 in cooperation with China. The CBERS satellites provided important scientific advances to Brazil and the images generated are used in several areas, as water resources monitoring, urban growth, deforestation control, soil occupation and education (CBERS SATELLITES, 2013).

The objects in the space between the Earth and the Moon are classified in low earth orbit (LEO), medium earth orbit (MEO) and geostationary orbit (GEO). In the last years, the LEO region have been studied about the space debris mitigation due to the increasing number of this kind of object through the years.

These aspects englobe the observation, spacecraft protection and collision avoidance (HOOTS; ROECHRICH, 1980).

The present distribution of objects by the value of the mean motion  $n$  indicates the commensurability between the frequencies of the mean motion of the object and the Earth's rotation motion. It is verified that most of objects are in the region  $13 \leq n(\text{rev} / \text{day}) \leq 15$ .

The space between the Earth and the Moon has several artificial satellites and distinct objects in some resonance. Synchronous satellites in circular or elliptical orbits have been extensively studied in literature, due to the research of resonant orbits characterizing the dynamics of these satellites (see [SAMPAIO et al., 2012a, 2012b, 2014] and references here in)

In this work, resonant orbital motions of the CBERS satellites are studied using the TLE files of the NORAD. Figures show the time behavior of the orbital keplerian elements, resonant angles and resonant periods. Energy's curves are observed in the  $(\omega, e)$  plane of the orbital motions indicating the presence of Kozai's resonance in their orbits.

## 2 | PURPOSE AND METHODOLOGY

In this section, the TLE data are used to verify objects in resonant orbital motions, specifically space debris and CBERS satellites around the 14:1 resonance (SPACE TRACK, 2013).

To study the resonant objects using the TLE data, a criterium is established for the resonant period  $Pres$ , by the condition  $Pres > 100$  days. Note that, the resonant period is related with a resonant angle which can influence the orbital motion of a particular object, a CBERS satellite or space debris, for example. The value of  $Pres$  helps to understand the influence of each resonant angle and a minimum value is established for the resonant period.  $Pres$  is calculated by the relation,

$$Pres = \frac{2\pi}{\dot{\phi}_{lmpq}}, \quad (1)$$

and  $\dot{\phi}_{lmpq}$  is obtained from (LANE, 1988),

$$\phi_{lmpq}(M, \omega, \Omega, \Theta) = (l - 2p + q)M + (l - 2p)\omega + m(\Omega - \Theta - \lambda_{lm}). \quad (2)$$

where  $a$ ,  $e$ ,  $l$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $M$  are the classical keplerian elements:  $a$  is the semi-major axis,  $e$  is the eccentricity,  $l$  is the inclination of the orbit plane with the equator,  $\omega$  is the argument of pericentre,  $\Omega$  is the longitude of the ascending node and  $M$  is the mean



anomaly, respectively; is the corresponding reference longitude along the equator and  $\Theta$  is the Greenwich sidereal time. So,  $\dot{\phi}_{tmpq}$  is defined as

$$\dot{\phi}_{tmpq}(M, \omega, \Omega, \Theta) = (l - 2p + q)\dot{M} + (l - 2p)\dot{\omega} + m(\dot{\Omega} - \dot{\Theta}). \quad (3)$$

Substituting  $k = l - 2p$  in (3), one finds

$$\dot{\phi}_{kmq} = (k + q)\dot{M} + k\dot{\omega} + m(\dot{\Omega} - \dot{\Theta}). \quad (4)$$

The terms  $\dot{\omega}$ ,  $\dot{\Omega}$  and  $\dot{M}$  can be written as (HOOTS; ROECHRICH, 1980).

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\frac{3}{4}J_2 n_o (a_e/a_o)^2 \frac{(1-5\cos^2(I))}{(1-e^2)^2}, \\ \dot{\Omega} &= -\frac{3}{2}J_2 n_o (a_e/a_o)^2 \frac{(\cos(I))}{(1-e^2)^2}, \\ \dot{M} &= n_o - \frac{3}{4}J_2 n_o (a_e/a_o)^2 \frac{(1-3\cos^2(I))}{(1-e^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

$a_e$  is the Earth mean equatorial radius,  $a_e = 6378.140 \text{ km}$ ,  $J_2$  is the second zonal harmonic,  $J_2 = 1.0826 \times 10^{-3}$ .

The term  $\dot{\Theta}$  in  $rad=day$  is

$$\dot{\Theta} \approx 1.00273790926 \times 2\pi. \quad (6)$$

In order to use orbital elements compatible with the way in which Two-Line Elements were generated, some corrections are done in the mean motion of the TLE data. Considering as  $n_1$  the mean motion of the 2-line, the semi-major axis  $a_1$  is calculated (HOOTS; ROECHRICH, 1980),

$$a_1 = (\sqrt{\mu}/n_1)^{2/3}, \quad (7)$$

where  $\mu$  is the Earth gravitational parameter,  $\mu = 3.986009 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ . Using  $a_1$ , the parameter  $\delta_1$  is calculated by the Eq. (8) (HOOTS; ROECHRICH, 1980),

$$\delta_1 = \frac{3}{4}J_2 (a_e^2/a_1^2)^2 \frac{(3\cos^2(I)-1)}{(1-e^2)^{3/2}} \quad (8)$$



Now, the new semi-major axis  $a_0$  used in the calculations of the resonant period is defined using  $\sigma_1$  from the Eq. (8) (HOOTS; ROECHRICH, 1980),

$$a_0 = a_1 \left[ 1 - \frac{1}{3} \delta_1 - \delta_1^2 - \frac{134}{81} \delta_1^3 \right], \quad (9)$$

and the new mean motion  $n_0$  used in the calculations is found considering the semi-major axis corrected  $a_0$ ,

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}}. \quad (10)$$

The simulation identified CBERS satellites and space debris with resonant period greater than 100 days. Several values of the coefficients,  $k$ ,  $q$  and  $m$  are considered in the Eq. (2) producing different resonant angles to be analyzed by the Eq. (1).

These studies allow to investigate the real influence of the resonance effect in the orbital dynamics of the CBERS satellites and space debris. The number of resonant objects in comparison with the total number of objects in the TLE data shows the great influence of the commensurability between the mean motion of the object and the Earth's rotation angular velocity on its orbits.

In the next section, the orbital motion of CBERS-2 satellite is studied.

### 3 | RESULTS AND COMMENTS

In this section, the real data of CBERS-2 is used to study the possible regular or irregular orbital motion.

Figure 1 shows the time behavior of the classical keplerian elements of CBERS-2 satellites. The orbital motion of CBERS-2 satellite satisfies the condition  $Pres > 100$  days. Figure 2 shows the resonant periods and resonant angles.

Observing the time behavior of the orbital elements of the object CBERS-2 in Fig. 1, one can verify possible regular and irregular motions in the trajectories of these objects. The time behavior of the semi-major axis and eccentricity of the CBERS-2 show irregularities. Note that in the interval between 500 and 600 days, Fig. 1, a fast increase in the semi-major axis occurs and these variations is about 300 meters and it may be related with some disturbance added to the motion.

Analyzing the time behavior of the resonant period in Fig. 2 a), it is verified that the resonant angles remain confined for a few days. The term confined means that the orbital motion is inside a region delimited for resonant angles with biggest resonant

periods.

To continue the analysis about the irregular orbital motions, the time behavior of the  $\dot{\phi}_{nkq}$  is studied verifying if different resonant angles describe the orbital dynamics of these objects at the same moment.

Analyzing the time behavior of the resonant angles in Fig. 2 b), one can verify that all resonant angles have the same  $\alpha$ ,  $\alpha = 3/43$ , in different combinations for  $(k + q)$ . Object CBERS-2 have your orbital motion inuenced by resonant angles in the neighborhood of the exact 14:1 resonance and they need a full system with different resonant angles which compose their motions.

To verify the Lidov-Kozai's mechanism in a specified orbital motion, curves of same energy in the  $(\omega, e)$  plane is verified showing libration and circulation curves. Where  $\omega$  is the argument of pericentre and  $e$  is the eccentricity. The study of the Lidov-Kozai's mechanism is based on the parameter  $h$ , related with the  $z$  component of the angular momentum. The parameter  $h$  is given by (KINOSHITA; NAKAI, 2007):

$$h = (1 - e^2) \cos^2(I) = \text{const.} \quad (11)$$

where  $I$  is the inclination of the orbit plane with the equator.

Figure 3 shows the  $(\omega, e)$  plane using the TLE data of the CBERS-2 satellite. Figure 3 a) shows circulation and libration regions in the  $(\omega, e)$  plane for CBERS-2 in the period January/2011 to March/2013. Figure 3 b) shows circulation and libration regions considering the orbital motion of CBERS-2 in the period October/2003 to March/2013, analyzing real data since launch.

This analysis helps to find stable regions in the orbital motions around the Earth.

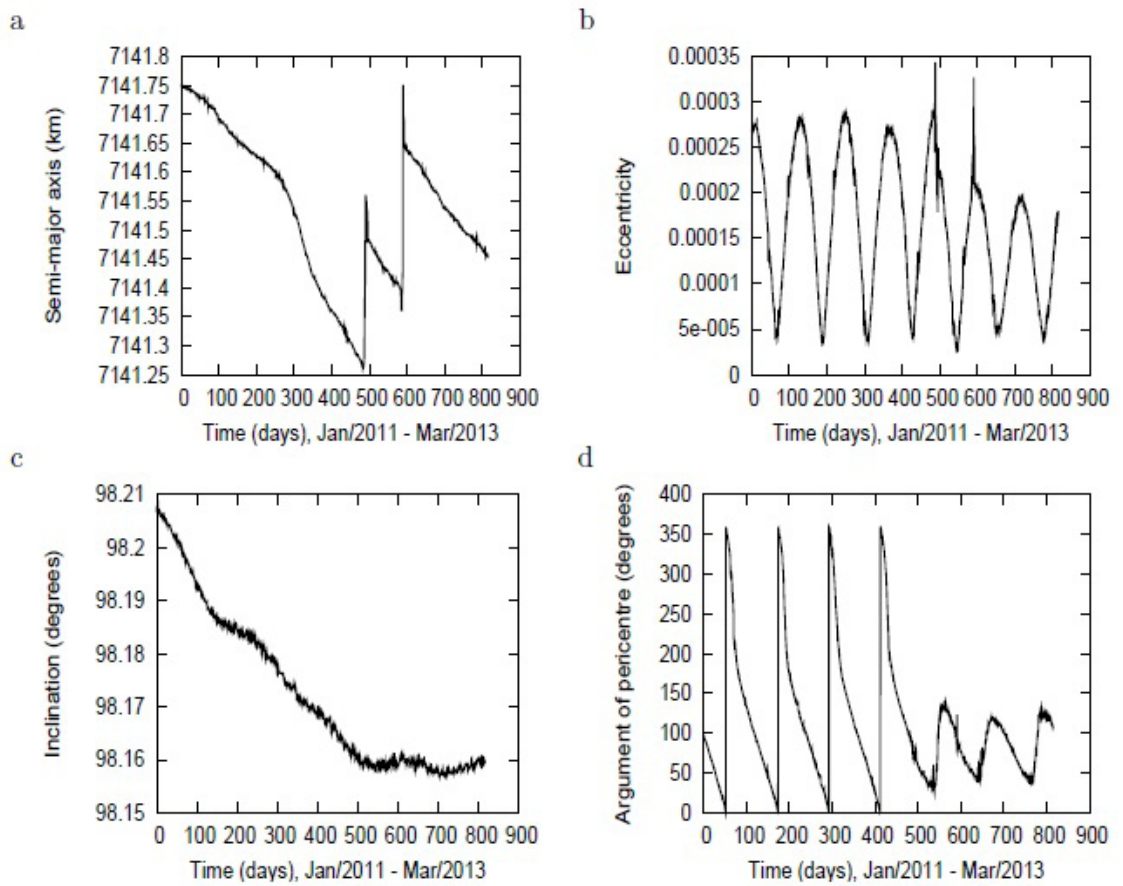


Figure 1: Orbital motions of CBERS-2 corresponding to January/2011 to March/2013; a) Time behavior of the semi-major axis, b) Time behavior of the eccentricity c) Time behavior of the inclination and d) Time behavior of the argument of pericentre.

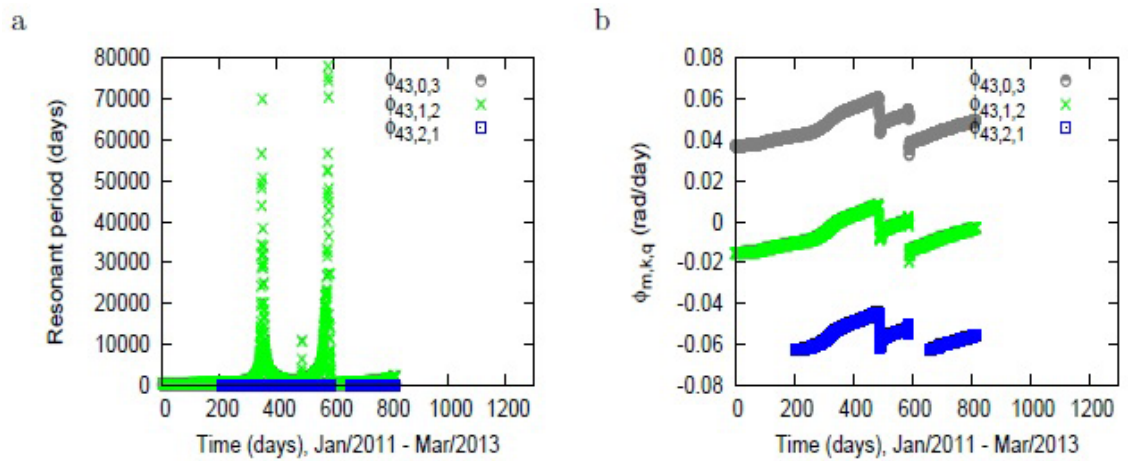


Figure 2: Orbital motion of CBERS-2 corresponding to January/2011 to March/2013 a) Time behavior of the resonant period b) Time behavior of the .

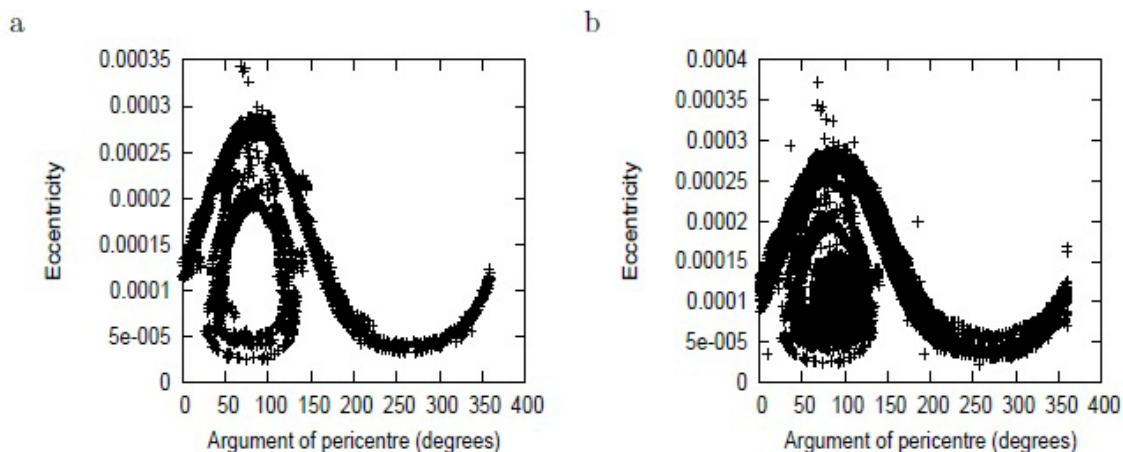


Figure 3: Orbital motion of CBERS-2 satellite. a) Argument of pericentre versus eccentricity corresponding to January/2011 to March/2013. b) Argument of pericentre versus eccentricity corresponding to October/2003 to March/2013.

## 4 | CONCLUSIONS

In this work, resonant orbital motions of CBERS-2 (China-Brazil Earth Resource Satellite) satellite is studied using an analytical model and TLE files of the NORAD.

The orbital motions of the CBERS satellites can be corrected during your lifetime, because some disturbances, resonance effects or collision risk can affect their missions. These corrections can be seen by the abrupt change in the values of the semi-major axis. In this way, the study of the resonant angles using real data of the artificial satellites is limited to the period without corrections. However, the study involving space debris allows to use a long time and consequently a better analysis about the resonant period in a given region.

The results and discussions show the complexity in the orbital dynamics of this object caused by the resonance effects. Figures show time behavior of classical keplerian elements, resonant angles and resonant periods.

Energys curves are observed in the  $(\omega, e)$  plane of the orbital motion of CBERS-2 satellite indicating the presence of Kozais resonance in your orbit.

## ACKNOWLEDGEMENTS

This work was accomplished with support of the FAPESP under the contracts No 2012/24369-0 and 2012/21023-6, SP-Brazil, and CNPQ (contract 303070/2011-0) and CAPES.

## REFERENCES

CBERS Satellites, **Archives of the CBERS Satellites**, Available at: [www.cbears.inpe.br](http://www.cbears.inpe.br), accessed in August, 2013.

Hoots, F. R.; Roehrich, R. L. **Models for Propagation of NORAD Element Sets**, Spacetrack Report No. 3, 1980.

Kinoshita H.; Nakai, H. **General solution of the mechanism** Celestial. Mech Dyn Astr 98, p. 67-74, 2007.

Lane, M. T. **An Analytical Treatment of Resonance Effects on Satellite Orbits**, Celestial Mechanics 42, p. 3-38, 1988.

Osiander R.; Ostdiek, P. **Introduction to Space Debris**, Handbook of Space Engineering, Archeology and Heritage, 2009.

Sampaio, J. C.; Vilhena de Moraes R.; Fernandes, S. S. **The Orbital Dynamics of Synchronous Satellites: Irregular Motions in the 2:1 Resonance**, Mathematical Problems in Engineering, 2012a.

Sampaio, J. C.; Neto, A. G. S.; Fernandes, S. S.; Vilhena de Moraes R.; Terra, M. O. **Artificial satellites orbits in 2:1 resonance: GPS constellation**. Acta Astronautica 81, p. 623-634, 2012b

Sampaio, J. C.; Wnuk, E.; Vilhena de Moraes, R.; Fernandes, S. S. **Resonant Orbital Dynamics in LEO Region: Space Debris in Focus**, Mathematical Problems in Engineering, 2014.

Space Track. **Archives of the 2-lines elements of NORAD**. Available at: [www.space-track.org](http://www.space-track.org), accessed in August - November, 2013.

## TESTES ADAPTATIVOS ENVOLVENDO O CONTEÚDO DE DERIVADAS: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DE ENGENHARIA CIVIL

**Patrícia Liane Grudzinski da Silva**

ULBRA – Universidade Luterana do Brasil  
Canoas – RS

**Claudia Lisete Oliveira Groenwald**

ULBRA – Universidade Luterana do Brasil  
Canoas – RS

**RESUMO:** A pesquisa busca investigar as dificuldades dos alunos na disciplina de Cálculo I, no conteúdo de Derivadas, do Curso de Engenharia Civil do Centro Universitário Luterano de Palmas/TO – CEULP/ULBRA. Conhecer as dificuldades enfrentadas pelos discentes neste conteúdo pode ser relevante para o professor realizar um planejamento de aula buscando melhor qualidade no ensino. Para tanto, o objetivo geral foi investigar as dificuldades de 20 alunos ao resolverem Testes Adaptativos no sistema SIENA. A metodologia da pesquisa é de caráter qualitativo, com enfoque no estudo de caso, analisando registros escritos e eletrônicos dos investigados. O experimento foi realizado nas dependências da instituição CEULP/ULBRA, em dois dias durante o turno vespertino, perfazendo um total de 8 horas, com 20 estudantes matriculados no curso de Engenharia Civil. Para o desenvolvimento desta pesquisa foram construídos seis bancos de questões, contendo 20 questões de múltipla escolha, para cada nível de dificuldade: fácil,

médio e difícil, totalizando 360 questões. Os seis conceitos do grafo foram: três de Matemática Básica: Aritmética; Álgebra e Funções; três de Derivadas: Diretas, Regra do Produto e do Quociente; Regra da Cadeia e suas Aplicações. Foi possível analisar que as dificuldades existem devido a quantidade de repetições de testes que os alunos realizaram para atingir a nota mínima e assim conseguir avançar. O maior número de erros foi identificado no conceito 5 do grafo: Derivadas pela Regra da Cadeia, onde enfrentaram dificuldades na resolução das atividades propostas envolvendo funções compostas. Destaca-se ainda, dificuldades em interpretação de situações problemas e matemática básica.

**PALAVRAS-CHAVE:** Testes Adaptativos; Derivada; Dificuldades; Erro; Sistema SIENA.

**ABSTRACT:** The research seeks to investigate the difficulties of students in the discipline of Calculus I, in the content of Derivatives, of the Civil Engineering Course of the Lutheran University Center of Palmas / TO - CEULP / ULBRA. Knowing the difficulties faced by the students in this content may be relevant for the teacher to carry out a lesson planning seeking a better quality in teaching. Therefore, the general objective was to investigate the difficulties of 20 students when solving Adaptive Tests in the SIENA system. The methodology of the



research is qualitative, focusing on the case study, analyzing written and electronic records of the investigated. The experiment was carried out in the premises of the CEULP / ULBRA institution, in two days during the afternoon shift, for a total of 8 hours, with 20 students enrolled in the Civil Engineering course. For the development of this research six questions banks were constructed, containing 20 multiple choice questions, for each level of difficulty: easy, medium and difficult, totaling 360 questions. The six concepts of the graph were: three of Basic Mathematics: Arithmetic; Algebra and Functions; three of Derivatives: Direct, Product Rule and Quotient; Chain Rule and its Applications. It was possible to analyze that the difficulties exist due to the amount of repetitions of tests that the students realized to reach the minimum mark and thus to be able to advance. The largest number of errors was identified in concept 5 of the graph: Derived by the Chain Rule, where they faced difficulties in solving proposed activities involving composite functions. It also highlights difficulties in interpreting problem situations and basic mathematics.

**KEYWORDS:** Adaptive Tests; Derivative; Difficulties; Error; SIENA system.

## 1 | INTRODUÇÃO

A preocupação com a qualidade do ensino e da aprendizagem em diversos níveis de ensino vem crescendo ao longo das últimas décadas (PITON-GONÇALVES, 2013), principalmente na disciplina de Matemática nos Ensinos Fundamental e Médio. Mudar a forma de ensinar e aprender matemática, não é uma tarefa fácil, é preciso mudar hábitos, quebrar paradigmas, inovar sem perder de vista o objeto de estudo da matemática que é o conhecimento historicamente construído (LIMA; COSTA, 2018).

Neste sentido nesta pesquisa busca-se investigar as causas do índice, considerado alto, de reprovação na disciplina de Cálculo I, especificamente com o conteúdo de Derivadas, do Curso de Engenharia Civil do CEULP/ULBRA. Considerando que esta disciplina é importante para a continuação dos estudos no referido curso, pois é pré-requisito para outras do curso.

Conhecer as dificuldades e incompreensões enfrentadas pelos discentes ao responder questões de Derivadas na disciplina de Cálculo I, pode ser relevante para que seja possível para o professor, realizar um planejamento de aula buscando sanar as dificuldades individuais dos estudantes, procurando resgatar os conceitos e aplicações de conteúdos que os estudantes apresentam dificuldades, bem como visando ampliar os conceitos já conhecidos pelos discentes. Quando isto é possível o professor tem condições de planejar e dedicar-se a desenvolver aplicações e modelagens que se utilizam em tais conceitos.

Diante disso, surge o seguinte questionamento para a investigação: Quais são as dificuldades evidenciadas por alunos do Curso de Engenharia Civil do CEULP/ULBRA na resolução de testes adaptativos envolvendo os conteúdos de Derivadas na disciplina de Cálculo I?

Para responder a referida pergunta propõe-se investigar as dificuldades de alunos



matriculados no Curso de Engenharia Civil, do CEULP/ULBRA, os quais já cursaram a disciplina de Cálculo I, ao resolverem Testes Adaptativos no sistema SIENA. Para atingir este objetivo a pesquisa teve um caráter qualitativo com enfoque em um estudo de caso, analisando registros eletrônicos e escritos dos investigados.

Os pressupostos básicos de uma pesquisa qualitativa são descritos por Knechtel (2014), como: preocupação primária com processos, interesse central no significado, a necessidade do trabalho de campo – o pesquisador vai ao campo adequado para observar e coletar dados pertinentes dos sujeitos investigados, ênfase na descrição e na explicação do fenômeno e a utilização de processos indutivos, sendo classificada como um estudo de caso.

Para Chizzotti (2008 apud KNECHTEL, 2014) estudo de caso é uma caracterização abrangente de pesquisas que coletam e registram dados de um caso particular ou de vários, para organizar um relatório crítico e/ou analítico de uma experiência, com o objetivo de tomar decisões a seu respeito ou propor uma ação transformadora. O caso é considerado como unidade significativa do todo, por isso, suficiente para fundamentar um julgamento quanto a propor uma intervenção.

## 2 | TESTES ADAPTATIVOS

Para Van Der Linden e Glas (2000 apud MOREIRA JR. et al, 2013) “Testes Adaptativos Informatizados (TAI) são testes que procuram estimar a habilidade do respondente através da aplicação de itens que sejam adequados a ele”.

O teste adaptativo “procura encontrar um teste ótimo para cada examinando” (COSTA, 2009, p. 3), sempre relacionando e verificando as questões que apresentam erros e as questões respondidas corretamente. Segundo Wainer (2000 apud COSTA, 2009, p. 3) “a noção básica de um teste adaptativo é imitar automaticamente o que um sábio examinador faria”.

Em um teste adaptativo as questões são calibradas de acordo com o nível de conhecimento do examinando. As questões são de nível de dificuldade diferentes e caso seja respondido corretamente um item este sobe o nível de dificuldade e, caso responda incorretamente, diminui-se o nível de dificuldade do próximo item do teste.

A informatização do teste adaptativo passou a ser denominado Teste Adaptativo Informatizado ou Teste Adaptativo Computadorizado (do inglês, *Computer Adaptive Test* ou *Computerized Adaptive Testing* – CAT).

Os testes adaptativos computadorizados ou informatizados, possuem como instrumento um meio eletrônico, visando a agilidade em sempre direcionar, adaptando a questão seguinte, perante a resposta do examinando estar correta ou incorreta.

Este teste ficará personalizado para cada examinando, pois a cada grupo de questões respondidas incorretamente o teste propõe um grupo de questões de um nível inferior, ou seja, mais fáceis, e a cada grupo de questões respondidas

corretamente, o teste propõem questões de nível superior, ou seja, mais difíceis.

Um teste adaptativo computadorizado (*CAT*) ou informatizado tem o objetivo de organizar questões ou itens, de um banco de dados previamente elaborado e abastecido, que correspondam ao nível de capacidade do examinando. Geralmente, essas questões são selecionadas de acordo com o modelo da Teoria de Resposta ao Item (*TRI*), que é assumido para descrever o comportamento da resposta do indivíduo. Ao contrário dos testes com papel-e-caneta, diferentes examinandos podem receber diferentes testes de tamanhos variados, visto que se busca a proficiência de cada indivíduo (COSTA, 2009).

Todo teste possui um critério de parada, o qual representa a finalização do teste, que dependerá de alguns fatores, tais como: os objetivos do teste, os modelos estatísticos adotados para calcular a proficiência e/ou realizar a análise desejada pelo examinador, o estresse do examinando, dentre outros fatores (PITON-GONÇALVES, 2013).

Segundo Costa (2009), os métodos bayesianos surgem pela necessidade de aprimoramento do método por Máxima Verossimilhança, afim de sanar problemas existentes de estimação de parâmetros e de proficiências. Sua aplicação na TRI tem sido importante para o avanço da teoria.

Marques e Dutra (2018, p. 1) afirmam que: “As Redes Bayesianas são grafos acíclicos dirigidos que representam dependências entre variáveis em um modelo probabilístico”. Esta definição de forma sucinta explica a grandiosidade deste conceito, que é utilizado para avaliar e analisar relações entre variáveis de forma probabilística.

Portanto, é necessário construir um grafo esquematizando os conceitos, ou seja, os *nós* que se deseja analisar, fazendo as ligações necessárias entre eles. O aluno só terá progressão para o próximo conceito se estiver compreendido e realizado todas as perguntas e atividades pertencentes ao conceito anterior.

### 3 | SISTEMA SIENA

Na busca dos educadores por diferentes formas de ensinar para atingir toda a diversidade presente em uma sala de aula surge a possibilidade do uso de recursos informáticos que podem influenciar benéficamente quando utilizados como suporte ao trabalho docente, contribuindo na agilização das tarefas dos mesmos, como fonte de informação do conhecimento real dos alunos, ou na utilização de sistemas inteligentes que auxiliem o professor na sua docência (GROENWALD e RUIZ, 2006).

Nesta perspectiva, o SIENA foi organizado pelos grupos de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna, Tenerife, Espanha e o GECM (Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática) da ULBRA (Universidade Luterana do Brasil). O SIENA é um sistema inteligente que é:

capaz de comunicar informações sobre o conhecimento dos alunos em determinado

tema, tem o objetivo de auxiliar no processo de recuperação de conteúdos matemáticos, utilizando a combinação de mapas conceituais e testes adaptativos (GROENWALD; RUIZ, 2006, p.26).

Para o desenvolvimento desta pesquisa foram construídos seis bancos de questões, contendo 20 questões de múltipla escolha com 5 opções de respostas cada, para cada nível de dificuldade: fácil, médio e difícil, sendo assim 60 questões, em cada conceito do grafo, totalizando um banco de dados com 360 questões. Apresenta-se na figura 1 o grafo e seus conceitos.

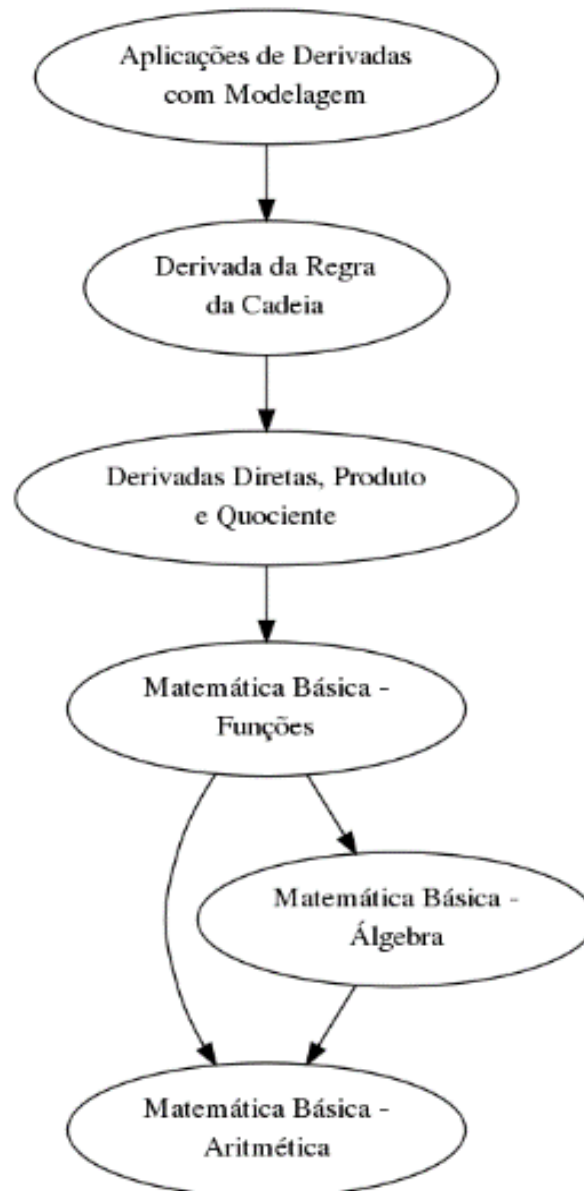


Figura 1 – Grafo Derivada e suas aplicações

Fonte: a pesquisa, disponível em: <http://www.siena.ulbra.br>.

#### 4 | DIFICULDADES E ERROS

É fundamental diferenciarmos as dificuldades encontradas pelos alunos no processo de ensino aprendizagem, as quais compõem conhecimentos que ainda não

foram compreendidos pelos alunos, bem como falta de aptidão para resolver uma determinada questão. Já os erros são consequências destas dificuldades. Ou seja, quando o discente possui dificuldades sobre algum conhecimento, isto acarretará em erros nas resoluções de questões, exercícios e problemas propostos sobre os conteúdos que está sendo desenvolvido.

Encontrar dificuldade para resolver certa parte de uma questão matemática é algo normal e até previsto por ambas as partes, professor e discente, ou seja, quem propõe a questão a ser resolvida, e quem a resolve. O termo dificuldade aqui refere-se a não conseguir solucionar, não ter aptidão, não ser capaz de interpretar as questões.

O aluno possui a tendência de usar a mesma ideia para resolver diversos problemas e situações, porém há estratégias eficazes para algumas situações e que são ineficazes para outras. Cabe ao aluno, selecionar e modificar, ou seja, refazer seu raciocínio, utilizando os conhecimentos prévios de forma coerente para cada aplicação. Cury (2007, p. 35) afirma que “É por esse motivo que se torna tão difícil superá-lo, já que para isso, o aluno (e o professor, por suposto) terá de trabalhar da mesma forma que o faz quando da construção de um novo conhecimento” levando o aluno a construção de novas estratégias e mostrando que para cada situação é possível uma forma diferenciada de aplicar os conhecimentos prévios.

Para Cury (2007) durante a análise das respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou o erro em si, os quais são pontuados e apresentados pelo professor em uma prova de avaliação de aprendizagem, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem, este é o ponto crucial em que devemos nos ater. Pois, observando o erro, podemos intervir para sanar estas dificuldades de aprendizagens dos alunos.

Os erros são frequentemente originados de uma dificuldade que possui origem em conteúdos básicos, os quais o aluno do Ensino Superior já deveria dominar. Cury e Konzen (2006, p. 1) afirmam que “Efetivamente, a maioria dos problemas é decorrente da falta de pré-requisitos, especialmente quanto aos assuntos relacionados à Álgebra do ensino fundamental e médio”. Pois, se a dificuldade não é sanada no momento que surge, o aluno irá tentar resolver sem buscar auxílio, e isso possivelmente acarretará em um erro na solução da questão.

Conforme Cury (2007) “o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas (...)”. Sendo assim, o aluno será capaz, com o auxílio do professor, de questionar suas respostas e reparar seus erros, sem precisar realizar exercícios de forma repetitiva, os quais não levam a raciocinar e elaborar estratégias para as soluções.

## 5 | DERIVADAS

Segundo Cantoral (2013), Anton (2000), Swokowski (1994), Leithold (1994) a derivada de uma função  $f$  é a função  $f'$  definida por

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

desde que o limite exista. Esta definição se origina da inclinação da reta tangente ao gráfico da função  $f$ , a qual passa por um ponto existente neste gráfico.

O conceito básico para compreender a definição de derivada é o do diferencial. Visto que, os infinitesimais são aceitos e utilizados em Cálculo. Segundo Quezada (2008, p. 13) “a derivada será o quociente de dois diferenciais e a integral a operação inversa da diferenciação”.

O conceito de diferencial pode ser introduzido indicando que um aumento infinitesimal de uma quantidade variável será chamado de diferencial, caso em que um “ $d$ ” será usado em vez de  $\Delta$ . Assim,  $dx$  denotará um aumento infinitesimal de  $x$  (QUEZADA, 2008).

Agora bem, com referência a uma função  $f$  definida por  $y = f(x)$ , se  $x$  tende a um valor inicial ‘ $a$ ’ e um incremento  $dx$  (portanto um valor final  $a + dx$ ), então, o correspondente aumento da função – o qual, supõe continuidade na função, espera-se que seja também infinitesimal – é o diferencial da função, ou seja:  $df(a, dx) = f(a + dx) - f(a)$  (QUEZADA, 2008).

A taxa de variação é um conceito importante que pode ser apresentado pela seguinte forma: se as variáveis  $x$  e  $y$  estiverem relacionadas por  $y = f(x)$ , de maneira que a cada valor de  $x$  (no domínio da função  $f$ ) corresponda a um único valor de  $y$ , e se  $y$  variar seu valor de  $f(a)$  para  $f(a + \Delta x)$  quando  $x$  for de  $a$  para  $a + \Delta x$  diremos que a taxa média de variação de  $y$  em relação a  $x$ , no momento correspondente a  $x = a$ , é a relação entre o aumento da função e o aumento da variável, ou seja:

$$\frac{\Delta y(a, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

a taxa média de variação sempre, ou seja, como a relação entre os aumentos de duas variáveis (QUEZADA, 2008).

Derivada possui a interpretação geométrica como a inclinação de uma reta tangente a uma curva. Uma função que tenha uma derivada será denominada derivável. A derivada é calculada pela operação de derivação, provados por teoremas que auxiliam o cálculo de funções algébricas. A interpretação de uma derivada é a taxa de variação, o que a torna importante em diversos campos.

É primordial entender como o pensamento humano evolui para a aquisição do conhecimento matemático, ou seja, estudar como ocorre a construção social deste conhecimento. Para tanto, Cantoral (2013) afirma que o ponto de vista sistêmico assume o saber como a construção social do conhecimento, esta é a parte principal explicar os mecanismos funcionais que permitem o trânsito do conhecimento ao saber.

## 6 | AMBIENTE DE INVESTIGAÇÃO

Nesta investigação, foram cadastradas no SIENA 360 questões, as quais estão disponíveis no endereço: <http://www.siena.ulbra.br>. A seguir apresentam-se 3 questões de cada nível, de um conceito do grafo – Matemática Básica: Aritmética. Para exemplificar esta categorização dos níveis: fácil, médio e difícil, segue a justificativa por receber tal enquadramento e os objetivos da pesquisa em cada questão selecionada. As respostas corretas, de cada questão, estão assinaladas e indicadas com “XXX”.

As questões da figura 2 pertencem ao nível fácil, visto que se faz necessário interpretar uma situação problema e/ou resolver as operações fundamentais da matemática. Assim, objetivou-se verificar se o aluno sabe resolver operações de radiciação, multiplicação, adição e subtração, envolvendo a ordem das operações, bem como a compreensão do aluno quanto a interpretação de um problema considerado simples.

<p>1. O quociente <math>(7\sqrt{4} - 5\sqrt{9} + 2\sqrt{16}) : \sqrt{49}</math> é igual a:</p> <p>1) 8/7 2) 0 3) 9/7 4) 37/7 5) 1 XXX</p>	<p>2. Solange possui certa quantidade de CD's. Ela dividiu esses CD's em 3 caixas, colocando a mesma quantidade em cada uma. Sabendo que em cada caixa Solange colocou 39 CD's, quantos CD's ela possui?</p> <p>1) 98 CD's 2) 117 CD's XXX 3) 107 CD's 4) 122 CD's 5) 123 CD's</p>	<p>3. Marta vende uniformes escolares. Pela venda de 3 uniformes de mesmo valor, ela recebeu R\$ 70,95. Qual o valor de cada uniforme?</p> <p>1) R\$ 25,25 2) R\$ 23,65 XXX 3) R\$ 23,15 4) R\$ 21,75 5) R\$ 24,55</p>
---	--	--

Figura 2 – Exemplos de questões Matemática Básica: Aritmética – Nível Fácil

Fonte: a pesquisa, disponível em: <http://www.siena.ulbra.br>.

Na figura 3 há questões do nível médio, visto que as questões possuem uma situação problema a ser interpretada, a qual exige mais atenção e mais informações, portanto será mais complexa de resolver. Pretende-se verificar se o respondedor compreende os conceitos de porcentagem e acréscimo, lucro e se sabe realizar operações envolvendo frações.



<p><b>1.</b> A venda de um videocassete da marca X estava sendo anunciada por R\$ 297,00, à vista, ou em 10 parcelas mensais de R\$ 34,80. Quem comprar esse videocassete a prazo pagará um acréscimo:</p> <p>1) Entre 10% e 20%. XXX  2) Entre 20% e 30%.  3) Menor do que 10%.  4) Maior do que 30%.  5) Igual a 20%.</p>	<p><b>2.</b> Um produto foi vendido por 100 reais. Se o vendedor lucrou <math>\frac{1}{4}</math> do preço de custo. Calcule este lucro.</p> <p>1) 80  2) 40  3) 45  4) 20 XXX  5) 25</p>	<p><b>3.</b> Carolina tinha R\$ 175,00. Gastou <math>\frac{1}{7}</math> de <math>\frac{1}{5}</math> dessa importância. Quanto sobrou?</p> <p>1) R\$ 150,00  2) R\$ 120,00  3) R\$ 170,00 XXX  4) R\$ 140,00  5) R\$ 135,00</p>
---	--	--

Figura 3 – Exemplos de questões Matemática Básica: Aritmética – Nível Médio

Fonte: a pesquisa, disponível em: <http://www.siena.ulbra.br>.

As questões apresentadas na figura 4 foram classificadas como nível difícil, considerando que envolvem a interpretação das situações problema, a análise dos dados, a aplicação da regra de três composta, a realização de operações com frações e o raciocínio geométrico em cálculo de área. Portanto, são questões mais elaboradas e que envolvem raciocínios para a resolução e, não somente, o desenvolvimento de cálculos mecânicos. Buscou-se analisar se o pesquisado é capaz de resolver operações envolvendo regra de três composta, frações e cálculo de área de figura plana, os quais são conteúdos relevantes para a área em que pretendem atuar, a Engenharia Civil.

<p><b>1.</b> O consumo de 8 lâmpadas, acesas durante 5 horas por dia, em 18 dias, é de 14 quilowatts. Qual será o consumo em 15 dias, deixando apenas 6 dessas lâmpadas acesas durante 4 horas por dia?</p> <p>1) 10 Kw  2) 7 Kw XXX  3) 9 Kw  4) 13 Kw  5) 20 Kw</p>	<p><b>2.</b> Dona Solange pagou R\$ 5 960,00 por <math>\frac{4}{7}</math> de um terreno. Quanto pagaria por <math>\frac{4}{5}</math> desse terreno?</p> <p>1) R\$ 8 344,00 XXX  2) R\$ 4 065,00  3) R\$ 7 200,00  4) R\$ 6 700,00  5) R\$ 8 150,00</p>	<p><b>3.</b> Para azulejar uma parede retangular, que tem 6,5 m de comprimento por 3 m de altura, foram usados 390 azulejos. Quantos azulejos iguais a esses seriam usados para azulejar uma parede que tem 15 m<sup>2</sup> de área?</p> <p>1) 200                      2) 350  3) 300 XXX                4) 340  5) 320</p>
---	--	---

Figura 4 – Exemplos de questões Matemática Básica: Aritmética – Nível Difícil

Fonte: a pesquisa, disponível em: <http://www.siena.ulbra.br>.

## 7 | ANÁLISE DE DADOS

A pesquisa contou com a participação de 20 alunos do Curso de Engenharia Civil do CEULP/ULBRA.

As notas adquiridas em cada conceito do grafo foram altas, a maioria variou de 0.900 a 1.000. Porém, em alguns casos, os alunos necessitaram realizar o teste mais de uma vez para conseguir atingir a média, 0.600, para poder prosseguir para o próximo conceito, o que caracteriza uma dificuldade naquele quesito, como pode-se



verificar na figura 5 que consta um gráfico informando a seguinte relação: quantidade de alunos e o número de repetições que eles realizaram os testes de cada conceito do grafo.

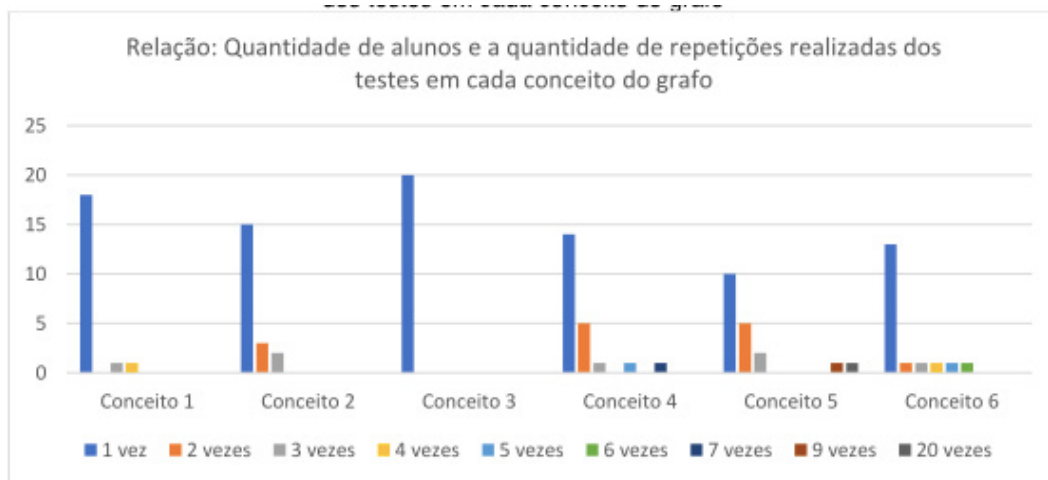


Figura 5 – Gráfico – Relação: Quantidade de alunos e a quantidade de repetições realizadas dos testes em cada conceito do grafo

Fonte: a pesquisa.

Diante desses dados, pode-se constatar que o conceito 5: Derivada da Regra da Cadeia foi o mais difícil para os investigados, visto que repetiram várias vezes os testes, e um aluno até desistiu de realizá-lo, após a oitava tentativa frustrada.

Pelos registros é possível analisar que os alunos não identificam que as funções apresentadas para a derivação são definidas como funções compostas e, portanto, exigem a necessidade de derivar aplicando a Regra da Cadeia. Sendo assim, utilizam o formulário de derivadas, disponibilizado nos livros didáticos de Cálculo, incorretamente. A resolução apresentada na figura 6 foi realizada utilizando o formulário de derivadas, identificando a função como , ou seja, como função potência, e não como função composta, a qual exige a aplicação da Regra da Cadeia. Logo, conjectura-se dificuldade em identificar a função composta, e aplicar a Regra da Cadeia para derivação.

18. Indique qual alternativa que representa a derivada da função:  $f(x) = \frac{3}{2}e^{x^3} - 4x$

1)  $f'(x) = \frac{9}{2}x^2 \cdot e^{x^3} - 4$  XXX      2)  $f'(x) = \frac{3}{2}e^{x^3} - 4$       3)  $f'(x) = \frac{9}{2}e^{x^3} - 4$

4)  $f'(x) = \frac{9}{2}x^2 \cdot e^{x^3}$       5)  $f'(x) = \frac{9}{2}e^{x^2} - 4$

Figura 6 – Questão 1 e resolução proposta de análise do conceito 5 do grafo da pesquisa  
 Fonte: a pesquisa.

Nesta resolução, apresentada na figura 7, conjectura-se que o aluno não compreende a aplicação da Regra da Cadeia, visto que não identifica a função composta. Portanto, inicia corretamente quando aplica a Regra da Potência para derivar a função  $\mu^n$ , no caso  $n = 4$ . Prossegue com a derivação da função  $\mu = x^2 - 3$  de forma correta, apresentando  $2x$ , porém confunde sua opção, ao realizar uma troca da função original,  $\mu = x^2 + 3$  pela sua derivada  $\mu' = 2x$ , ao invés de apresentá-la em forma de produto do coeficiente “4”, mantendo a função original conforme já havia operado anteriormente. Enfim, conjectura-se a possibilidade de dificuldade em compreensão e identificação da função composta, bem como a utilização da Regra da Cadeia para efetivar a derivação deste tipo de função.

17. Marque a opção correta para  $\frac{\partial x}{\partial y} = (x^2 - 3)^4$ :

1)  $\frac{\partial x}{\partial y} = 4 \cdot (x^2 - 3)^3$       3)  $\frac{\partial x}{\partial y} = (x^2 - 3)^3$

2)  $\frac{\partial x}{\partial y} = 8x(x^2 - 3)^3$  XXX      4)  $\frac{\partial x}{\partial y} = 4(2x)^3$

5)  $\frac{\partial x}{\partial y} = 4(x^2 - 3)^3 + 2x$

Figura 7 – Questão 2 e resolução proposta de análise do conceito 5 do grafo da pesquisa  
 Fonte: a pesquisa.

É possível inferir, mediante as análises das questões apresentadas acima que os investigados não identificam as seguintes funções compostas: Exponencial, Trigonométrica, Raiz Quadrada e Potência, utilizadas nas questões. Mediante essa dificuldade, não aplicam a Regra da Cadeia para solucionar as derivadas que

envolvem esses tipos de funções. Para Cury e Cassol (2004) erros na derivada da função composta, as quais utilizam a Regra da Cadeia recebem uma classe específica de categorização do erro em sua pesquisa, na qual estão incluídos vários erros, causados, provavelmente, pela dificuldade em reconhecer a função composta.

## 8 | CONCLUSÃO

Ao realizar esta pesquisa compreende-se que os objetivos foram alcançados, visto que as resoluções que apresentam erros foram diversas e plausíveis de explicações sobre o ocorrido, levando a compreensão das dificuldades destes estudantes. Esse diagnóstico sobre os erros, levou a identificação das dificuldades, pois mediante as construções redigidas em papel pelos investigados, considerando que através destes registros a análise pôde ser realizada observando o processo e não apenas a resolução final, o que possibilita que o professor realize um plano individual de trabalho de recuperação destas dificuldades.

Os investigados mostraram-se interessados em conhecer seu rendimento após cada teste adaptativo realizado mediante a nota disponibilizada pelo sistema. Diante disso, pode-se concluir que há o interesse em identificar o erro cometido, analisar a questão, verificar o erro para evitá-lo em situações posteriores e sanar a dificuldade surgida. Logo, constata-se a relevância disto no processo de aprendizagem dos alunos, possibilitando que os estudantes realizem estudos focados em suas dificuldades.

A pesquisa é interessante para os docentes aprimorarem o processo de ensino e aprendizagem, pois é possível verificar os erros e mediante eles, conjecturar sobre as dificuldades dos alunos na compreensão de conteúdos que envolvem a matemática básica. Para o professor é essencial em sua prática de sala de aula identificar e diagnosticar as dificuldades para garantir uma qualidade na aprendizagem dos discentes.

Na busca de identificar os erros e as dificuldades, o professor pode utilizar o banco de questões construído para esta investigação, visto que as questões são com alternativas estruturadas através de hipóteses sobre os erros e dificuldades que os educandos cometem. Destaca-se o aspecto dos conteúdos abordados, pois as questões foram organizadas por conceitos matemáticos, tais como: matemática básica – envolvendo aritmética, álgebra e funções, Derivadas – diretas do formulário, Regra do Produto, do Quociente e da Cadeia e Aplicações de Derivadas. As questões disponibilizadas podem ser utilizadas para desenvolvimento de sequências didáticas buscando o aprimoramento no processo de ensino e aprendizagem, ou podem ser desenvolvidas para recuperação e/ou fixação dos conteúdos.

## REFERÊNCIAS

- ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte**. Trad. Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000, V 1.
- CANTORAL, Ricardo Uriza. **Teoría Socioepistemológica de al Matemática Educativa**. México: Gedisa, S.A., 2013.
- COSTA, Denise Reis. **Métodos Estatísticos em Testes Adaptativos Informatizados**. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Estatística – Departamento de Métodos Estatísticos) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <<http://www.pg.im.ufrj.br/teses/Estatistica/Mestrado/121.pdf>> Acesso em: 16 fev 2017.
- CURY, Helena Noronha. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007, 116p. Disponível em: <<http://ulbra.bv3.digitalpages.com.br/users/publications/9788582170809/pages/-2>> Acesso em fev. 2017.
- CURY, Helena Noronha; CASSOL, Mariana. Análise de erros em Cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças. **Revista Acta Scientiae**, Canoas, v.6, n.1, p. 27-36 jan./jun., 2004. Disponível em: <<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/128>> Acesso em: 10 dez. 2018.
- CURY, Helena Noronha; KONZEN, Beatriz. Classificação e análise de erros em álgebra. In: **IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática–EGEM**. Caxias do Sul: SBEM, 2006. Disponível em: <[http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/EncontroGaicho\\_Ed\\_Matem/cientificos/CC26.pdf](http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/EncontroGaicho_Ed_Matem/cientificos/CC26.pdf)> Acesso em: 02 maio 2017.
- GROENWALD, Cláudia Lisete Oliveira; RUIZ, Lorenzo Moreno. Formação de Professores de Matemática: uma proposta de ensino com novas tecnologias. **Revista Acta Scientiae**, Canoas, v.8, n.2, jul./dez.2006.
- KNECHTEL, Maria do Rosário. **Metodologia da pesquisa em educação: uma abordagem teórico-prática dialogada**. Curitiba: InterSaberes, 2014.
- LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3.ed. São Paulo: Harbra Ltda., 1994, V 1.
- LIMA, Denilson Alves de; COSTA, João Candido Bracarense. **Construção de uma metodologia para ensinar e aprender Matemática** – um estudo de caso da segunda série do ensino médio. Disponível em:<[http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes\\_pde/artigo\\_denilson\\_alves\\_lima.pdf](http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_denilson_alves_lima.pdf)> Acesso em 09 jul. 2018.
- MARQUES, Roberto Ligeiro; DUTRA, Inês. Redes Bayesianas: o que são, para que servem, algoritmos e exemplos de aplicações. **Coppe Sistemas UFRJ**. Rio de Janeiro. Disponível em: <<http://www.cos.ufrj.br/~ines/courses/cos740/leila/cos740/Bayesianas.pdf>>. Acesso em: 26 fev. 2018.
- MOREIRA JR, Fernando de Jesus; TEZZA, Rafael; ANDRADE, Dalton Francisco de; BORNIA, Antônio César. Algoritmo de um teste adaptativo informatizado com base na teoria da resposta ao item para a estimação da usabilidade de sites de e-commerce. **Produção**. v. 23, n. 3, p. 525-536, jul./set. 2013. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0103-6513201300030007&lng=pt&tlng=pt](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-6513201300030007&lng=pt&tlng=pt)> Acesso em: 16 jul. 2018.
- PITON-GONÇALVES, Jean. **Desafios e perspectivas da implementação computacional de testes adaptativos multidimensionais para avaliações educacionais**. 153 f. Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Ciências de Computação e Matemática Computacional) -Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2013. Disponível em:<<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55134/tde-13032013-105955/pt-br.php>> Acesso em: 16 fev. 2017.
- QUEZADA, José Ismael Arcos. **Un curso de Cálculo Infinitesimal para Bachillerato**. In: Ivestigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano. México: Díaz de Santos S.A., 2008.
- SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com Geometria Analítica**. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1994. V1.

## LOCALIZAÇÃO DE FALTAS EM LINHAS DE TRANSMISSÃO POR ANÁLISE DE SINAIS TRANSITÓRIOS DE TENSÃO

### Danilo Pinto Moreira de Souza

Universidade Federal de Juiz de Fora, Modelagem Computacional  
Juiz de Fora - MG

### Eliane da Silva Christo

Universidade Federal Fluminense, Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia  
Volta Redonda - RJ

### Aryfrance Rocha Almeida

Universidade Federal do Piauí, Centro de Tecnologia  
Teresina - PI

**RESUMO:** O desenvolvimento e aperfeiçoamento de algoritmos que possibilitem a análise e diagnóstico de falhas em sistemas elétricos de potência tem importante impacto econômico tanto para as concessionárias de energia quanto para os consumidores, pois possibilita a continuidade e confiabilidade do setor elétrico. O transporte de energia elétrica é realizado por meio das linhas de transmissão que, por serem de longas distâncias e em grande quantidade, tornam os sistemas elétricos de potência mais susceptíveis à ocorrência de perturbações causadas, principalmente, por fenômenos naturais com destaque para as descargas atmosféricas. Ocorrências de curtos circuitos geram sinais de tensão que se propagam em forma de ondas em ambos

os sentidos da linha de transmissão e sofrem sucessivas reflexões e refrações entre o ponto de origem do curto circuito e os terminais da linha. Este estudo tem por objetivo localizar faltas em linhas de transmissão através da identificação de padrões nos sinais gerados por estas faltas conforme varia-se os pontos de ocorrência dos curtos circuitos nas linhas de transmissão. Este estudo está dividido em duas etapas: na primeira etapa, apresentada neste artigo, é utilizado Análise de Fourier a fim de desacoplar o sinal transitório de tensão da falta do característico sinal senoidal proveniente da linha de transmissão; na segunda etapa será realizada a modelagem matemática dos sinais de falta por meio de modelos Box & Jenkins sazonais, autorregressivos, diferenciados, com médias móveis.

**PALAVRAS-CHAVE:** séries temporais, séries de Fourier, Box & Jenkins

### 1 | INTRODUÇÃO

O consumo de energia é um dos principais indicadores do desenvolvimento econômico e do nível de qualidade de vida de qualquer sociedade. Ele reflete tanto o ritmo de atividade dos setores industrial, comercial e de serviços, quanto a capacidade da população para adquirir bens e serviços tecnologicamente mais

avançados, como automóveis (que demandam combustíveis), eletrodomésticos e eletroeletrônicos (ANEEL, 2008).

No sistema elétrico, as falhas podem ocorrer nos diversos componentes, dentre os quais destacam-se as linhas de transmissão (LTs) como os elementos mais suscetíveis à falhas, especialmente se considerarmos suas dimensões físicas, quantidade, complexidade funcional e o ambiente em que se encontram, apresentando assim, maior dificuldade para manutenção e monitoramento (ALMEIDA et al., 2014). Dentre os principais causadores de falhas destacam-se principalmente descargas atmosféricas (VISACRO, 2005).

Com a importância de se ter um sistema elétrico onde a continuidade, conformidade, flexibilidade e manutenibilidade sejam observados e garantidos, vêm-se buscando o aperfeiçoamento e inovação de técnicas empregadas em equipamentos de proteção e supervisão do sistema, proporcionando também a expansão do setor elétrico mantendo a qualidade de operação do sistema (FORMIGA, 2012). O desenvolvimento e aperfeiçoamento de algoritmos que possibilitem a análise e diagnóstico de falhas em sistemas elétricos de potência tem importante impacto econômico tanto para as concessionárias de energia quanto para os consumidores. Sistemas inteligentes, autônomos e online vêm sendo desenvolvidos e aplicados de forma significativa para lidar com esse tipo de problema.

As tecnologias de ponta hoje disponíveis incluem processamento digital de sinais de oscilografia, bancos de dados, interface gráfica, localização de faltas, simulação dinâmica de equipamentos de proteção, sistemas inteligentes de análise automática de oscilogramas e redes de oscilografia. Este aparato tecnológico possibilita um diagnóstico rápido e preciso com a mínima intervenção humana (CEPEL, 2017).

A localização precisa de faltas auxilia o setor de operação do sistema elétrico diminuindo o tempo de ocorrência do distúrbio e contribuindo para continuidade do fornecimento de energia elétrica (COSTA; SOUZA; BRITO, 2012). O desenvolvimento de novos métodos de localização digital de faltas em linhas de transmissão utilizando dispositivos baseados em microprocessadores é questão de interesse de pesquisadores e engenheiros de potência. Nos últimos anos, com um número muito grande de propostas tanto para novos métodos quanto para aperfeiçoamento de técnicas localização de faltas já existentes, visando melhorar a precisão das localizações de faltas em linhas de transmissão (ALMEIDA, 2007). Todavia, a grande maioria dos estudos voltados para localização de faltas em LTs se baseia na análise de componentes principais, na análise de transitórios, com a teoria das ondas viajantes, no uso de redes neurais artificiais, ou na junção de alguns destes métodos.

A aplicação de modelos de séries temporais (ST) com a finalidade de extrair informações de distâncias de faltas é um campo ainda pouco explorado. Atualmente esses modelos de ST são utilizados no estudo de demanda em energia elétrica. Aplica-se também modelos de STs no estudo de uso de redes de computadores, tanto para a análise de preferência de certo assunto por determinado grupo de pessoas,



quanto para a proteção de um servidor de Internet buscando determinar se uma ação na rede parte de um usuário ou de vírus de computador instalado nessa rede. Em (SILVA, 2015) mostra-se em seu a aplicabilidade das STs na análise de fluxo de rede de computadores. Visto a enorme semelhança entre o comportamento dos dados de fluxo de rede e o comportamento dos dados tratados no presente trabalho, iniciou-se a tentativa de utilizar modelos de STs na abordagem desse problema.

O objetivo deste trabalho é propor um método que possibilite a localização de faltas em linhas de transmissão aéreas. O método proposto é baseado na análise de séries temporais. O método consiste em verificar e analisar tendências e periodicidades presentes nos sinais de tensão analisados e com isso obter modelos Box & Jenkins, onde os coeficientes destes modelos gerados sejam proporcionais aos fatores causadores da falta analisada. Um destes fatores é a localização da falta na LT.

## 2 | SINAIS TRANSITÓRIOS DE TENSÃO

No percurso entre a fonte geradora e centros de consumo, as linhas de transmissão estão sujeitas a perturbações e anomalias de funcionamento. Descargas atmosféricas, surtos de tensão, vandalismo e incêndios são algumas das ameaças às quais um sistema de transmissão está sujeito. E buscando prever a ocorrência destas anomalias, meios de proteção são implementados no início e ao longo da rede. Estes dispositivos atuam de modo a evitar as falhas elétricas e limitar os defeitos caso falhas ocorram. Características como sensibilidade, seletividade, velocidade, confiabilidade e precisão necessitam ser dimensionadas para atender as necessidades do sistema, não as exceder demasiadamente, evitando assim tornar inviável a instalação de proteções em linhas de transmissão.

Ao se analisar a proteção de sistemas elétricos é necessário distinguir situações de operação do sistema. Em situações de operação normal tem-se a ausência de falhas nos equipamentos de operação ou falhas aleatórias. Já em uma situação de anormalidade ocorrem distúrbios na rede elétrica, tais como oscilações nos níveis de tensão, mas com corrente não atingindo níveis de curto-circuito. E em situações de curto-circuito pode ocorrer danos irreversíveis a todo o sistema (geração, transmissão e distribuição).

Conforme mencionado, são diversos os fenômenos que podem vir a ocorrer nos sistemas elétricos. Estes fenômenos podem ser agrupados conforme a velocidade de suas ocorrências. Sinais transitórios ultrarrápidos, surtos, podem por exemplo ser causados por uma descarga atmosférica ou pelo chaveamento da rede. Sua natureza é totalmente elétrica, sendo causados pela reflexão e refração de ondas eletromagnéticas entre os terminais do trecho da linha onde ocorreu o fenômeno. Tem uma curta duração de apenas alguns milésimos de segundos. Já transitórios meio rápidos, curto circuitos, têm origem em mudanças estruturais bruscas. Se devem ao contato indevido entre as partes energizadas que constituem as fases (F) e o referencial terra (T). Para o



sistema composto por três fases as possibilidades de falhas são mostradas na Figura 1 a seguir:

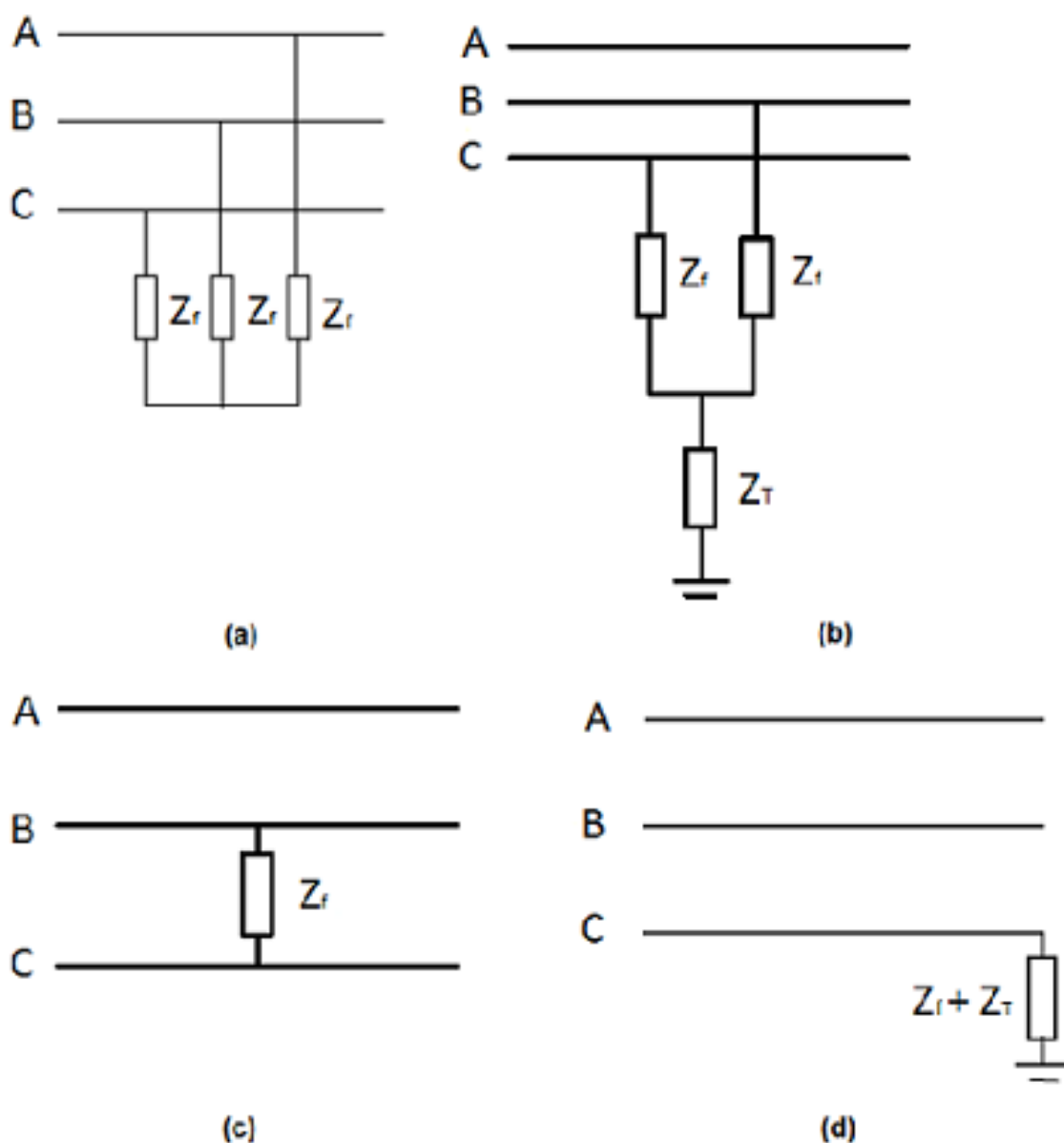


Figura 1: Tipos de faltas em um LT trifásica: (a) falta trifásica; (b) falta bifásica aterrada; (c) falta bifásica; (d) falta monofásica. Onde:  $Z_f$  - impedância de falta e  $Z_T$  - impedância de terra. Fonte: Adaptado de (SOUZA; CHRISTO; ALMEIDA, 2017b).

Os sinais transitórios de tensão em uma linha de transmissão são orientados segundo a Teoria das Ondas Viajantes. Nesta teoria, a mudança abrupta do nível de tensão em uma linha de transmissão se propaga por esta linha desde o ponto de origem da perturbação até as extremidades da linha, em ambos os sentidos. Ao encontrar uma descontinuidade no “percurso” estas ondas se dividem em ondas refletidas. Este processo de reflexão ocorre diversas vezes, até a total absorção da energia de onda pelos componentes da linha, atingindo o regime estacionário novamente. Em situações de faltas onde ocorra o contato entre pelo menos uma das fases e o terra (Figura 1(b) e Figura 1(d)) ocorrem ainda refrações no ponto de origem da falta (SOUZA, 2017).

A Figura 2 a seguir mostra este processo de propagação dos sinais transitórios na LT. Para isso, é utilizado o chama diagrama de Lattice.

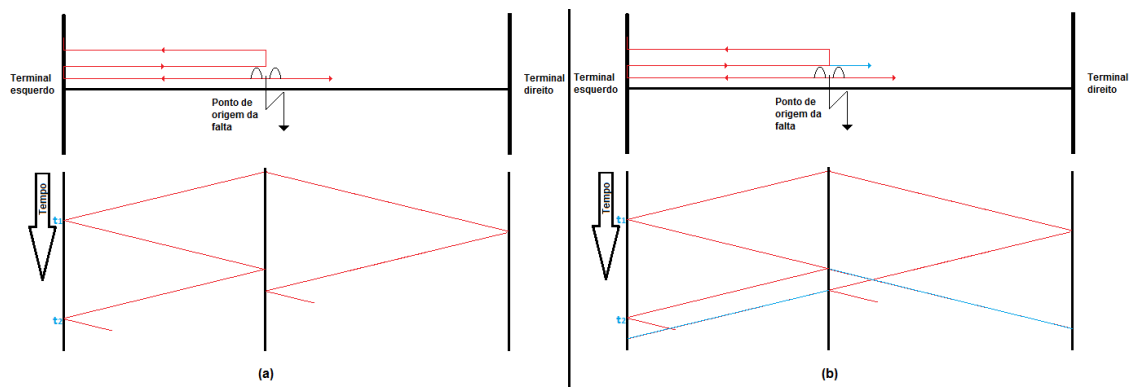


Figura 2: Diagrama de Lattice para propagação dos sinais transitórios. (a) faltas sem o componente terra; (b) faltas com o componente terra. Em vermelho os sinais refletidos e em azul os sinais refratados. Onde:  $t_1$  e  $t_2$  são os tempos de chegada das primeira e segunda frentes de onda, respectivamente, no terminal esquerdo da LT. Fonte: Adaptado de (SOUZA et al., 2018).

### 3 | MODELOS DE SÉRIES TEMPORAIS

Considere um processo estocástico estritamente estacionário, com  $N$  observações  $(x_{t_1}; x_{t_2}; x_{t_3} \dots x_{t_N})$  associadas aos tempos  $(t_1; t_2; t_3 \dots t_N)$ . Tal processo trata-se de uma série temporal, uma vez que trata-se de um conjunto de observações ordenadas no tempo, onde cada valor tem a si atrelado um indicador do tempo onde esse valor ocorreu ou foi observado (VALINS, 2005).

Uma série temporal é construída quando se tem o interesse de: investigar o mecanismo gerador da série temporal; fazer previsões de valores futuros da série; descrever apenas o comportamento da série; procurar periodicidades relevantes nos dados. E por sua vez, um modelo é uma descrição probabilística de uma série temporal (MORETTIN; TOLOI, 2006).

#### 3.1 Modelos Box & Jenkins

Dentre os diversos modelos de séries temporais existem os modelos da família Box & Jenkins descritos por Box e Jenkins na década de 1970 (BOX; JENKINS; REINSEL, 2008). Dentre estes, um bastante comum e útil é o modelo autorregressivo (AR). Neste modelo, uma determinada observação é dada pelo somatório de observações anteriores com diferentes pesos. A Equação 1 mostra um processo autorregressivo AR ( $p$ ) de ordem  $p$ :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t \quad (1)$$

Onde:  $\phi_i (i \leq p)$  denota os parâmetros do processo auto regressivo e  $a_t$  um ruído branco.

Através do operador de retrocesso  $B^m X_t = X_{t-m}$  ( $m \leq p$ ) dado por:

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad (2)$$

A Equação 2 pode ser reescrita como mostrado na Equação 3:

$$\phi(B) X_t = a_t \quad (3)$$

Outro modelo que tem grande importância em observações de séries temporais são os modelos de médias móveis, onde  $X_t$  é linearmente dependente de um número finito  $q$  dos valores de  $a_t$ . Ao invés de tomar a observação mais recente como a previsão da próxima observação, toma-se uma média das últimas observações para filtrar o ruído e estimar com mais precisão a média local. A Equação 4 representa um modelo de médias móveis MA( $q$ ):

$$X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (4)$$

Onde:  $\theta_j$  ( $j \leq q$ ) denota os parâmetros do processo de médias móveis, e  $a_t$  é o erro entre o valor real e o valor previsto pela média móveis.

$$a_i = \sum_{j=i}^{M+i-1} \frac{X_j}{M} - X_{M+i} \quad (5)$$

$i = (1, 2, 3, \dots, q), M = N - q$

Onde:  $q$  é o número de coeficientes de médias móveis utilizados,  $N$  é o tamanho da série temporal  $X$ ,  $M$  é o número de termos da ST utilizado nas médias móveis.

De forma similar aos modelos AR, os modelos MA também podem ser expressos por meio do operador de retrocesso. Com isso tem-se:

$$X_t = \theta(B) a_t \quad (6)$$

A união do modelo autorregressivo de ordem  $p$  com o modelo de médias móveis às vezes pode beneficiar a montagem das séries temporais. Isso leva ao modelo autorregressivo de médias móveis ARMA ( $p, q$ ), já representado em termos do operador de retrocesso é mostrado na Equação 7 a seguir.

$$\phi(B) X_t = \theta(B) a_t \quad (7)$$

Muitas das vezes pode ser necessário realizar diferenciações na série antes de se buscar um modelo adequado. A Equação 8 traz o operador de diferenças utilizado:

$$\begin{aligned}\nabla X_t &= X_t - X_{t-1} \\ \nabla^d X_t &= X_t - X_{t-d} = (1 - B)^d X_t\end{aligned}\tag{8}$$

Com a realização de  $d$  diferenciações em uma série, um modelo ARMA  $(p,q)$  por exemplo, pode ser representado por ARIMA  $(p,d,q)$ . A inserção do número de diferenciações no modelo faz com que a representação seja dada por:

$$\phi(B) \nabla^d X_t = \theta(B) a_t\tag{9}$$

Por fim, um último modelo Box & Jenkins a ser aqui apresentado é o modelo sazonal. Para este modelo considera-se a existência de sazonalidade na ST. Para um processo ARIMA sazonal tem-se SARIMA com sazonalidade  $S$ , um polinômio AR sazonal  $\Phi(B^S)$  de ordem  $P$ , um polinômio sazonal  $\theta(B^S)$  de ordem  $Q$  e um operador de diferenças sazonais de ordem  $D$ .

$$\nabla_S^D X_t = (1 - B)^D a_t\tag{10}$$

Um modelo SARIMA  $(p,d,q) (P,d,Q)_s$  é então dado por:

$$\Phi(B^S) \phi(B) \nabla^d \nabla_S^D X_t = \theta(B^S) \theta(B) a_t\tag{11}$$

### 3.2 Decomposição de séries temporais

Um modelo de decomposição consiste em escrever  $X_t$  como a soma de três componentes não observáveis, para modelos aditivos e o produto de três componentes não observáveis, para modelos multiplicativos, respectivamente mostrada na Equação 12 (MORETTIN; TOLOI, 2006):

$$X_t = T_t + S_t + a_t\tag{12}$$

$$X_t = T_t S_t a_t$$

Onde:  $T_t$  e  $S_t$  representam as partes tendenciosas e sazonais, respectivamente, e  $a_t \approx N(0, \sigma^2)$  um ruído branco.

O principal interesse ao se considerar a série temporal sendo da forma conforme mostrada na Equação 12 é calcular estimativas dos valores de  $T_t$  e construir a série livre de sazonalidade.

Para a eliminação da componente tendenciosa é utilizada neste trabalho a análise de Fourier, que consiste em aproximar uma função do tempo por uma combinação linear de harmônicos (componentes senoidais), os coeficientes dos quais são as transformadas de Fourier discreta da série (MORETTIN; TOLOI, 2006).

$$T_t \approx \frac{2}{N} \left( \sum_{t=1}^N \frac{V_t}{2} + \cos \omega t \sum_{t=1}^N V_t \cos \omega t + \sin \omega t \sum_{t=1}^N V_t \sin \omega t \right)$$

$$\omega = 2\pi f \neq \pi, i = (1, 2, \dots, N)$$

Onde  $f$  é a frequência fundamental da LT.

Para a determinação da componente sazonal, é utilizada a análise da função de autocorrelação sucessiva ( $fac^{(n)}$ ), que consiste no cálculo sucessivo da  $fac$  funcionando como um filtro eliminando componentes não correlacionadas (SHIMAMURA; NGUYEN, 2010):

### 3.3 Formas de identificação de modelos

O objetivo da identificação consiste em determinar os coeficientes do modelo além de estimativas preliminares dos parâmetros a serem usadas no estágio de estimação. São diversos os métodos que visam identificar qual modelo é o mais indicado para determinada ST. O mais comum talvez seja a análise da função de autocorrelação ( $fac$ ) juntamente com a da função de autocorrelação parcial ( $facp$ ). Contudo, este método de identificação é bastante subjetivo pois depende de análises gráficas onde diferentes modelos podem ser obtidos.

Um método bastante eficaz e simples é a análise do critério de informação de Akaike (AIC) proposto por Akaike em 1974 (AKAIKE, 1974). Para a verificação de um modelo, por exemplo, o critério de informação de Akaike é mostrado na Equação 14.

$$AIC(k, d, l) = N \ln \hat{\sigma}_\alpha^2 + \frac{N}{N-d} + 2(k+l+1 + \delta_{d0}) + N \ln 2\pi + N$$

$$0 \leq k \leq K, 0 \leq l \leq L$$

$$K \text{ e } L = f(N), K = L = \ln N$$

Onde:  $\hat{\sigma}_\alpha^2$  é o estimador de máxima verossimilhança da variância,  $\sigma_\alpha^2$ ,  $N$  é o número de observações da série e  $\delta_{d0}$  é delta de Kronecker.

Para a determinação dos coeficientes dos modelos escolhidos pelo AIC, normalmente usa-se o erro percentual médio absoluto (MAPE) calculado conforme Equação 15.

$$MAPE(\%) = \frac{\sum_{i=1}^N \left| \frac{V_{iR} - V_{iC}}{V_{iR}} \right|}{N} \times 100$$

Onde:  $V_{ir}$  é o valor real,  $V_{ic}$  é o valor calculado e  $N$  é o tamanho da ST.

## 4 | SIMULAÇÃO DE FALTAS

Para a criação de um banco de dados de faltas onde seja relacionado distância de falta com coeficientes de modelos Box & Jenkins, é utilizado o software livre

ATPDraw®. Nesta ferramenta computacional é possível gerar diferentes situações de faltas mediante alterações dos parâmetro de faltas: número de elementos envolvidos (fases  $F_A$ ,  $F_B$ , e  $F_C$  e terra T); frequência de amostragem dos dados; localização da falta na LT; resistência da falta; ângulo de incidência da falta na senóide característica da LT (SOUZA; CHRISTO; ALMEIDA, 2017b).

## 5 | RESULTADOS

O método de localização de faltas aqui proposto, descrito na Figura 3, consiste em monitorar de forma contínua e online os dados de tensão das três fases da LT analisada. Em uma primeira etapa é feita a busca por quedas bruscas dos níveis de tensão, o que caracteriza uma anormalidade no funcionamento da LT. Para realizar esta busca é utilizada a análise de Fourier destes sinais, onde o efeito da senóide característica da LT é eliminada, restando apenas dados de tensão relacionados ao distúrbio.

Detectada a presença de distúrbios é então feito a geração de um modelo SARIMA ótimo, seguindo o AIC como critério. Os coeficientes deste modelo obtido são então comparados a um banco de dados já existente e criado a partir de dados simulados de faltas onde se tem o pré conhecimento dos parâmetros geradores da falta. Ou seja, com a informação dos valores dos coeficientes é possível recorrer ao banco de dados onde já se conhece qual distância de falta está relacionada àqueles coeficientes do modelo SARIMA obtido.

O fluxograma e um exemplo gráfico de sua aplicação são mostrados na Figura 3 a seguir.

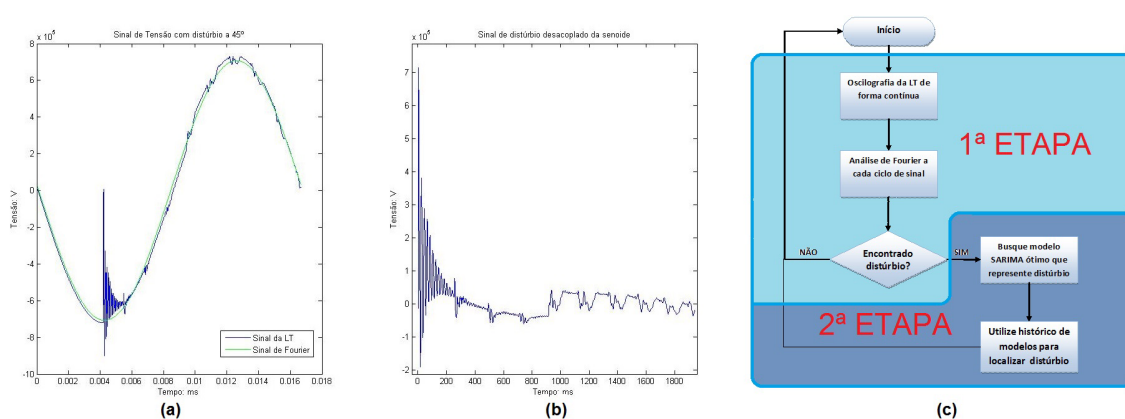


Figura 3: (a) Sinal de tensão com distúrbio. (b) Sinal de distúrbio desacoplado. (c) Fluxograma do Trabalho. Fonte: Adaptado de (SOUZA; CHRISTO; ALMEIDA, 2017a).

Como mencionado, o objetivo deste trabalho é relacionar as distâncias de ocorrências de falhas com as curvas dos modelos SARIMA. A Tabela 1 mostra alguns resultados obtidos, mostrando a relação distância-coeficiente. Todos os casos são faltas bifásicas com um ângulo de incidência de 90.



Pode ser visto na Tabela 1 que os coeficientes dos modelos SARIMA obtidos são iguais para as mesmas distâncias de falta. Por exemplo, para faltas que ocorrem a 10 km, os modelos obtidos são SARIMA (2,0,2) (2,0,4)<sub>19</sub> onde  $\phi_1 = 1,2830$ ,  $\phi_2 = -0,3496$ ,  $\theta_1 = -0,3440$ ,  $\theta_2 = 0,0283$ ,  $\Phi_1 =$ ,  $\Phi_2 =$ ,  $\theta_1 = -1,3330$ ,  $\theta_2 = -0,7397$ ,  $\theta_3 = 0,0437$  e  $\theta_4 = 0,0730$  em todas as falhas cujo ângulo de incidência é 90°, independentemente dos valores de resistência de falta.

Distância	10		45		84		155	
	20	240	20	240	20	240	20	240
$\phi_1$	1,2830		1,5420		1,5888		1,4780	
$\phi_2$	-0,3496		-0,5945		-0,6358		-0,5263	
$\phi_3$	0,0000		0,0000		0,0000		0,0000	
$\theta_1$	-0,3440		-0,1750		-0,3322		-0,6510	
$\theta_2$	0,0283		0,0000		0,0000		0,0000	
$\theta_1$	-1,4600		0,0000		0,0000		0,0000	
$\theta_2$	-0,9181		0,0000		0,0000		0,0000	
$\theta_1$	-1,3330		0,0000		0,0000		0,0000	
$\theta_2$	-0,7397		0,0000		0,0000		0,0000	
$\theta_3$	0,0437		0,0000		0,0000		0,0000	
$\theta_4$	0,0730		0,0000		0,0000		0,0000	
Constante	17,9800		14,4800		10,6400		14,6500	
AIC	15369,26		13025,38		17984,45		4889,99	

Tabela 1: Alguns exemplos de modelos obtidos.

## 6 | CONCLUSÕES

O método proposto é eficaz na detecção de alterações de dados simulados de diferentes localizações de falhas na linha. No entanto, também é sensível a variações nos ângulos de incidência do aparecimento de perturbações nos sinais AC de onda senoidal. Isto é particularmente verdadeiro quando a distância da falta se torna maior em relação ao início da linha de transmissão. Com melhorias no algoritmo, é possível, além de identificar o posicionamento de curtos-circuitos na linha, também identificar o ângulo do referido ângulo de incidência, a fim de melhorar a sensibilidade dos relés utilizados para este tipo de monitoramento.

O algoritmo é insensível a mudanças no valor da resistência a falhas. Este é, de fato, um fator importante para a metodologia adotada, uma vez que a resistência a falhas é altamente aleatória e variável, dependendo das condições ambientais e

do tipo e localização da falha. A resistência à falta influencia o comportamento do amortecimento do sinal transiente (variações verticais no plano cartesiano do sinal), mas a localização da fonte da perturbação está relacionada com a frequência de oscilação do sinal (variações horizontais no plano cartesiano do sinal).

Outro fator importante refere-se ao tipo de falha em relação ao número de elementos envolvidos, que são monofásicos, bifásicos ou trifásicos. Dados de falha envolvendo o componente terra apresentam maior volatilidade, uma vez que esses tipos de ondas transientes, além de sofrerem sucessivas reações entre o ponto de origem e os terminais da linha, também sofrem refrações. Alguns dos sinais refletidos nos terminais excedem o ponto de origem da perturbação no terminal oposto, fazendo com que os dados fiquem entrelaçados. Para trabalhos futuros, sugerimos avaliar modelos mais robustos para o pré-processamento dos dados. Uma alternativa possível para eliminar os dados provenientes do terminal oposto seria o uso de transformada discreta de Wavelet.

## REFERÊNCIAS

AKAIKE, H. **A new look at the statistical model identification**. IEEE transactions on automatic control, IEEE, v. 19, n. 6, p. 716723, 1974.

ALMEIDA, A. R. **Localização de Faltas em Sistemas de Transmissão de Alta Tensão usando ICA**. 2007.

ALMEIDA, A. R. et al. **Localização de faltas em sistemas de transmissão de alta tensão a partir de registros oscilográficos usando análise de componentes independentes**. Anais do V Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos, 2014.

ANEEL. **Agência nacional de energia elétrica**. Brasília: Aneel, 2008.

BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C. **Time Series Analysis**. [S.l.: s.n.], 2008.

CEPEL **Análise de Perturbações em Sistemas Elétricos**. 2017. Disponível em: <http://www.cepel.br/linhas-de-pesquisa/menu/analise-de-perturbacoes-em-sistemas-eletricos.htm>. Acesso em: 30 jun. 2017.

COSTA, F. B.; SOUZA, B. A.; BRITO, N. S. D. **A wavelet-based method for detection and classification of single and crosscountry faults in transmission lines**. In: International Conference on Power Systems Transients. [S.l.: s.n.], 2009.

FORMIGA, D. A. **Estimação de Fasores para Proteção de Sistemas Elétricos Baseada em Mínimos Quadrados e Morfologia Matemática**. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2012.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. **Análise de séries temporais**. [S.l.]: Blucher, 2006.

SHIMAMURA, T.; NGUYEN, N. D. **Autocorrelation and double autocorrelation based spectral representations for a noisy word recognition system**. In: Eleventh Annual Conference of the International Speech Communication Association. [S.l.: s.n.], 2010.

SOUZA, D. P. M. de; CHRISTO, E. da S.; ALMEIDA, A. R. **Localização de Falhas em Linhas de Transmissão por Análise de Transitórios**. In: SBMAC. In: XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC). Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics. São José dos Campos. [S.I.], 2017. v. 1, p. 250-254.

SOUZA, D. P. M. de; CHRISTO, E. da S.; ALMEIDA, A. R. **Location of faults in power transmission lines using the ARIMA method**. Energies, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 10, n. 10, p. 1596, 2017.

SOUZA, D. P. M. de et al. **Fault location in power transmission lines using autocorrelation function**. (IJAERS, International Journal of Advanced Engineering Research and Science, v. 5, n. 5, p. 296304, 2018.

SILVA, V. L. P. da. **Identificação de Anomalias em Fluxos de Rede utilizando Previsões em Séries Temporais pelo Método Holt-Winters**. 2015.

VALINS, T. F. **Relé Digital de Distância Baseado na Teoria de Ondas Viajantes e Transformada de Wavelet**. 2005.

VISACRO, S. **Descargas Atmosféricas: Uma abordagem de Engenharia**. 1ª ed. [S.I.]: Prentice Hall, 2005.

## MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA CAUSADA POR MOSCA-BRANCA EM CULTURAS AGRÍCOLA

**Gustavo Henrique Petrolí**

Universidade Federal do Mato Grosso,  
Departamento de Matemática  
Cuiabá – MT

**Norberto Anibal Maidana**

Universidade Federal do ABC, Centro de  
Matemática, Computação e Cognição.  
Santo André – SP

**RESUMO:** A cada ano agrícola, a população de mosca-branca (*Bemisia tabaci* biótipo B) vem aumentando consideravelmente. O manejo de *B. tabaci* biótipo B tem se tornado um grande desafio, pois a sua dispersão entre as culturas, seu alto potencial reprodutivo, o hábito polífago, a resistência aos inseticidas, viver na superfície abaxial das folhas e o seu comportamento de se alimentar constantemente contribuem para a complexidade e a dificuldade de seu controle. Este trabalho propõe um modelo matemático não linear para descrever a dinâmica da *Bemisia tabaci* na evolução de seus estádios, junto a incidência da propagação dos danos indiretos que o mesmo causa em uma plantação, a fim de avaliar estratégias de combate efetivo contra a praga.

**PALAVRAS-CHAVE:** Mosca-branca, Fumagina, Dinâmica de Populações, Modelagem Matemática.

**ABSTRACT:** In every agricultural year, the whitefly population (*Bemisia tabaci* biotype B) has increased considerably. The management of *B. tabaci* biotype B has become a major challenge because its dispersion among crops, its high reproductive potential, polyphagous habit, resistance to insecticides, to live on the abaxial surface of leaves and their eating behavior constantly contribute to the complexity and difficulty of their control. This work proposes a nonlinear mathematical model to describe the dynamics of *Bemisia tabaci* in the evolution of its stages, together with the incidence of the propagation of the indirect damages that cause the same in a plantation, in order to evaluate strategies of effective combat against the pest.

**KEYWORDS:** Whitefly, Sooty mold, Population Dynamics, Mathematical modeling.

### 1 | INTRODUÇÃO

A Mosca-branca (*Bemisia tabaci*) é uma das pragas mais conhecidas no mundo e está em praticamente todas as regiões agrícolas, principalmente em áreas de clima tropical e subtropical (STANSLY, et.al.,2010).

No Brasil, até o final da década de 60, vários vírus transmitidos pela mosca-branca já tinham sido determinados, mas todos considerados como causadores de doenças

secundárias, sem importância econômica, em razão com que ocorriam nas culturas (COSTA, 1975).

Mas em meados dos anos 90, mais precisamente no estado de São Paulo, foi constatado um elevadíssimo surto de *Bemisia tabaci* de biótipo B, também conhecido como *Bemisia argentifolli*, proveniente de plantas ornamentais importadas da Europa e dos Estados Unidos.

Após sua introdução no Brasil, *B. tabaci* biótipo B deslocou as populações de *B. tabaci* que aqui existiam (biótipo A), predominando atualmente nas áreas agrícolas do país. O biótipo A não era considerado importante como praga, apenas como vetor de vírus. Já o biótipo B, além de atuar como vetor de vírus, também é considerado uma praga pelos seus danos indiretos.

## 2 | BEMISIA TABACI BIÓTIPO B

### 2.1 Aspectos taxonômicos, biológicos e morfológicos

As Moscas-brancas pertencem à ordem Homóptera, subordem *Sternorrhyncha*, família *Aleyrodidae* e subfamília *Aleyrodinea*, (BÔAS, et. al., 2009). Dentre os biótipos conhecidos, o B é considerado um dos mais nocivos, por possuir ampla gama de hospedeiros e alta fecundidade (VIVAN, et.al.,2007).

São insetos pequenos, sendo a fêmea maior que o macho. Ambos possuem o dorso amarelo-pálido e as asas brancas (BÔAS, et.al., 1997), conforme vemos na figura 1.



Figura 1: Adulto de *Bemisia tabaci* biótipo B, medindo de 1 a 2 mm de comprimento e 0,36 a 0,51 mm de largura. Fonte: (STANSLY, et.al., 2010)

São sugadores de seiva, como os demais membros da subordem *Sternorrhyncha*, com aparelho digestivo diferenciado em “câmara-filtro”, que permite que o excesso de alimento sugado seja excretado como *honeydew*, uma espécie de melado (SOTORRIVA, 2010).

Os principais fatores que afetam o desenvolvimento do inseto são a planta hospedeira e a temperatura. As fêmeas ovipositam preferencialmente na face inferior

das folhas jovens e, após a eclosão, as ninfas se locomovem pela folha até um local adequado para sua fixação, durante um período que pode variar de uma até várias horas (BÔAS, et.al., 1997). Após inserirem seu aparelho bucal e atingirem o floema da planta, permanecem sésseis até a emergência dos adultos (SOTORRIVA, 2010).

Em relação a reprodução, uma fêmea pode colocar cerca de trinta a quatrocentos ovos durante seu ciclo de vida (BYRNE, 1991), sendo que a taxa de oviposição depende da temperatura e da planta hospedeira. Quando ocorre escassez de alimento, as fêmeas interrompem a postura.

As moscas-brancas apresentam metamorfose incompleta, ou seja, não precisam jejuar durante um longo período para evoluir, passando pelas fases de ovo, quatro estádios ninfaís, sendo o último também chamado de “pupa” ou pseudo-pupa, e adulto, conforme vemos na figura 2. No qual, o adulto é o único capaz de migrar até novas plantas.

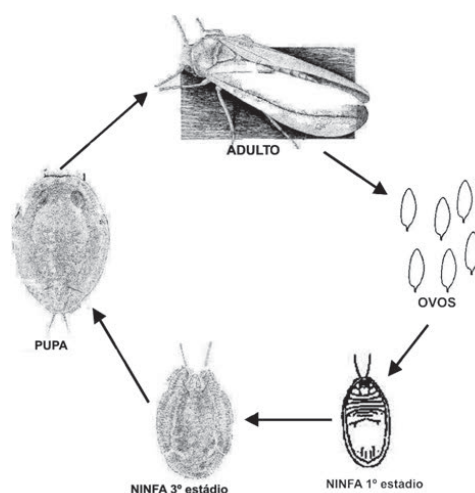


Figura 2: Ciclo biológico (adulto, ovo, ninfas e “pupa”) da mosca-branca *Bemisia tabaci* biótipo B. Fonte: (BÔAS, et.al., 2009).

## 2.2 Danos causados aos hospedeiros

A mosca-branca apresenta um grande número de plantas hospedeiras de interesse econômico, tais como hortaliças e também em plantas ornamentais (BÔAS, et. al., 1997). Destacam-se também várias espécies de plantas daninhas, o que significa que, na entressafra, esses insetos sobrevivem muitas vezes em alta população nas áreas de cultivo. Desta forma, não há interrupção no ciclo de vida da praga e, em um próximo cultivo, a pressão de mosca-branca sobre as plantas pode ser ainda maior que no cultivo anterior (VIVAN, et.al., 2007).

Por ser uma espécie de homóptera, ao sugar a seiva das plantas, os insetos nos estádios de ninfa e adulto podem causar injúrias como murchamento das plantas, amadurecimento irregular dos frutos e até a morte. Em adição, diversos fungos, coletivamente chamados de fumagina (*Capnodium ssp. Capnodiaceae*), devido à sua aparência negra, podem crescer sobre o *honeydew* (melado) excretado pelas moscas-

brancas, que é rico em açúcares que servem de substrato para o desenvolvimento desses fungos (VIVAN, et.al., 2007).

A fumagina pode impedir a luz solar de alcançar a superfície foliar, reduzindo a fotossíntese, além de prejudicar os frutos, quando incidir sobre eles, tornando-os não-comercializáveis (ISLAM, et.al., 2008). As perdas pela sucção da seiva e fumagina podem chegar de 50% a 100% da produção, quando ocorrerem altas infestações (BÔAS, et.al., 1997).

### 3 I MODELANDO A PROPAGAÇÃO DE FUMAGINA

Diante de todo levantamento biológico realizado a partir da problemática envolvendo os estádios e a incidência da propagação de Fumagina em uma plantação, consideram-se no modelo os seguintes fatos:

- Para os insetos no estágio de Ovo, a dinâmica vital é dada por uma função logística;
- Na ausência de plantação, a sobrevivência da *B. tabaci* fica sustentada através das plantas daninhas que estão na região;
- A população de plantas suscetíveis possui um valor inicial que decrescerá no decorrer do tempo, assume-se no processo que elas serão colhidas ao término da safra ou sofrerão extinção em virtude ao dano causado pela mosca-branca;
- Uma planta suscetível se torna infectada no momento em que uma ninfa ou mosca adulta se alimenta da mesma e excreta *honeydew*, causando fumagina;
- Plantas infectadas não conseguem se recuperar dos danos causados pela fumagina.

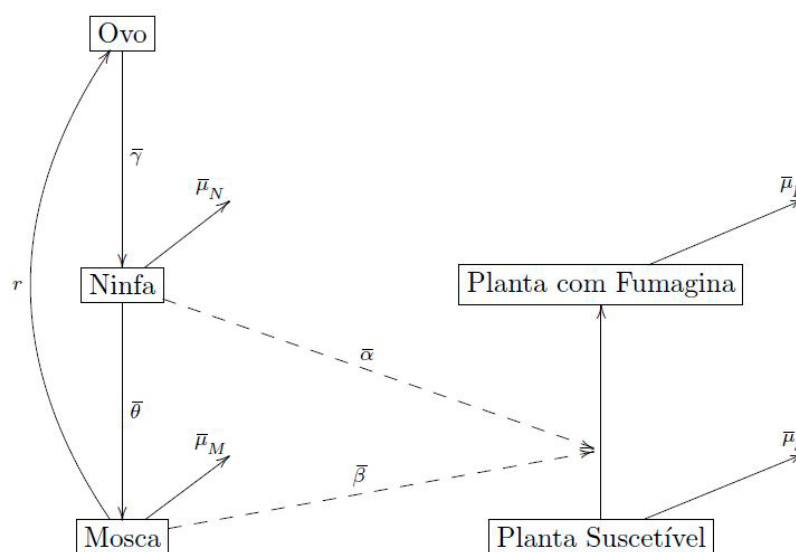


Figura 3: Diagrama da dinâmica da Fumagina.



Baseado nas hipóteses acima, o modelo é descrito como:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{O}}{d\bar{t}} = r\bar{M} \left( 1 - \frac{\bar{O}}{\epsilon k + \bar{a}\bar{S}} \right) - \bar{\gamma}\bar{O}, \\ \frac{d\bar{N}}{d\bar{t}} = \bar{\gamma}\bar{O} - \bar{\theta}\bar{N} - \bar{\mu}_N\bar{N}, \\ \frac{d\bar{M}}{d\bar{t}} = \bar{\theta}\bar{N} - \bar{\mu}_M\bar{M}, \\ \frac{d\bar{S}}{d\bar{t}} = -\bar{\alpha}\bar{N}\bar{S} - \bar{\beta}\bar{M}\bar{S} - \bar{\mu}_S\bar{S}, \\ \frac{d\bar{F}}{d\bar{t}} = \bar{\alpha}\bar{N}\bar{S} + \bar{\beta}\bar{M}\bar{S} - \bar{\mu}_F\bar{F}, \end{cases} \quad (3.1)$$

no qual as variáveis ,  $\bar{O}$ ,  $\bar{N}$  e  $\bar{M}$  correspondem a população total da *B.tabaci* nos estádios de Ovo, Ninfa e Mosca adulta, respectivamente.  $\bar{S}$  é a população de Planta Suscetível e  $\bar{F}$  refere-se a população de Planta com fumagina. O parâmetro  $r$  significa a oviposição per capita realizada pela Mosca adulta. O crescimento é dado por uma função logística, onde a oviposição é proporcional à quantidade de Moscas ( $r\bar{M}$ ) e é considerada uma saturação dada pela capacidade de suporte ( $\epsilon k + \bar{a}\bar{S}$ ), sendo  $k$  as plantas daninhas que fazem com que o inseto sobreviva na entressafra, a quantidade de ovos por planta daninha e  $\bar{a}$  a quantidade de ovos por Planta Suscetível.

Assim, consideramos então  $d = \epsilon k$ , número total de ovos viáveis na população de plantas daninhas. A taxa de eclosão do Ovo é dada por  $\bar{\gamma}$  e  $\bar{\delta}$  denota a taxa de evolução da Ninfa. Os parâmetros  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  são as taxas de contaminação da Planta suscetível pela fumagina gerada através do *honeydew* da Ninfa e da Mosca adulta, respectivamente. E por fim, a taxa de mortalidade da Ninfa é denotada por  $\bar{\mu}_N$ , da Mosca adulta por  $\bar{\mu}_M$ , da Planta suscetível por  $\bar{\mu}_S$  e da Planta com fumagina por  $\bar{\mu}_F$ .

### 3.1 Adimensionalização

Para se ter uma compreensão do comportamento previsto pelo modelo do sistema (3.1). Em primeiro lugar, consideramos o caso de um ambiente uniforme em que todos os parâmetros são constantes. Estamos interessados na dinâmica da população de plantas quando algumas moscas-branca são introduzidas em uma população livre de fumagina inicialmente estável.

No modelo, é instrutivo para introduzir quantidades não-dimensionais, escrever:

$$O = \frac{\bar{O}}{d}; N = \frac{\bar{N}}{d}; M = \frac{\bar{M}}{d}; S = \frac{\bar{S}}{S_0}; F = \frac{\bar{F}}{S_0}; t = \bar{t}r \quad (3.2)$$

Como consequência, temos os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\bar{\gamma}}{r}; & \theta &= \frac{\bar{\theta}}{r}; & a &= \frac{\bar{a}S_0}{d}; & \alpha &= \frac{\bar{\alpha}d}{r}; & \beta &= \frac{\bar{\beta}d}{r}; \\ \mu_N &= \frac{\bar{\mu}_N}{r}; & \mu_M &= \frac{\bar{\mu}_M}{r}; & \mu_S &= \frac{\bar{\mu}_S}{r}; & \mu_F &= \frac{\bar{\mu}_F}{r}. \end{aligned}$$

Isto nos permite determinar os agrupamentos de parâmetros efetivos no sistema, e obter uma compreensão qualitativa do sistema em termos dos mesmos.

Fazendo as devidas substituições de (3.2) no modelo (3.1), obtemos o modelo adimensionalizado:

$$\begin{cases} \frac{dO}{dt} = M \left( 1 - \frac{O}{1 + \alpha S} \right) - \gamma O, \\ \frac{dN}{dt} = \gamma O - \theta N - \mu_N N, \\ \frac{dM}{dt} = \theta N - \mu_M M, \\ \frac{dS}{dt} = -\alpha NS - \beta MS - \mu_S S, \\ \frac{dF}{dt} = \alpha NS + \beta MS - \mu_F F. \end{cases} \quad (3.3)$$

### 3.2 Pontos de equilíbrio e número de descendentes basal

Para o sistema (3.3), temos dois pontos de equilíbrio:

- $P_1 = (0, 0, 0, 0, 0)$  é o ponto de equilíbrio trivial;
- $P_2 = (O^*, N^*, M^*, S^*, F^*) = \left( 1 - \frac{1}{Q_0}, \frac{\gamma}{(\theta + \mu_N)} \left( 1 - \frac{1}{Q_0} \right), \gamma(Q_0 - 1), 0, 0 \right)$ ;

Para o ponto de equilíbrio  $P_2$  encontrado ser positivo, precisamos que:

$$Q_0 = \frac{\theta}{\mu_M(\theta + \mu_N)} > 1, \quad (3.4)$$

onde  $Q_0$  é dito *Número Básico de Descendentes* ou *Número de Descendentes Basal* em macroparasitas.

O Número de Descendentes Basal é um parâmetro adimensional simbolicamente representado por  $Q_0$  e é definido como sendo o número médio de descendentes que gera um parasita adulto ao atingir a idade reprodutiva. A reprodutibilidade basal é determinada por fatores biológicos inerentes ao agente e fatores do meio que intermedeiam a probabilidade de contatos efetivos.

Tal valor é considerado um limiar para garantir a existência dos pontos de equilíbrio e estabilidade do sistema.

Partindo da condição para que o ponto de equilíbrio não trivial seja biologicamente viável, reescrevendo (3.4) com os parâmetros originais, temos:

$$Q_0 = \frac{\bar{\theta}}{(\bar{\theta} + \bar{\mu}_N)} \times \frac{r}{\bar{\mu}_M} = \left[ \frac{1}{\frac{\bar{\mu}_M}{r}} \right] \times \left[ \frac{1}{\frac{(\bar{\theta} + \bar{\mu}_N)}{\bar{\theta}}} \right]. \quad (3.5)$$

Dessa forma podemos encontrar uma relação biológica entre os parâmetros envolvidos.

Entende-se por  $\frac{1}{\bar{\theta}}$  como tempo médio de vida de ninfa e  $\frac{1}{\bar{\theta} + \bar{\mu}_N}$  como a sobrevivência no estágio de ninfa, então  $\frac{\bar{\theta}}{(\bar{\theta} + \bar{\mu}_N)}$  representa a probabilidade de uma ninfa sobreviver e se tornar uma mosca adulta, que por sua vez sobrevivem por um período  $\frac{1}{\bar{\mu}_M}$  e geram em média  $\frac{r}{\bar{\mu}_M}$  ovos viáveis durante sua vida adulta. Com isso o limiar de infestação de mosca ocorre quando uma fêmea gera em média uma outra fêmea ( $Q_0 = 1$ ).

### 3.3 Análise de estabilidade de local

A estabilidade local dos pontos de equilíbrio é determinada através do estudo dos sinais da parte real dos autovalores da matriz jacobiana do sistema (3.3), calculada em cada ponto de equilíbrio. Considerando as equações do sistema (3.3), como sendo:

$$\begin{aligned} f_1(O, N, M, S, F) &= M \left( 1 - \frac{O}{1 + aS} \right) - \gamma O, \\ f_2(O, N, M, S, F) &= \gamma O - \theta N - \mu_N N, \\ f_3(O, N, M, S, F) &= \theta N - \mu_M M, \\ f_4(O, N, M, S, F) &= -\alpha NS - \beta MS - \mu_S S, \\ f_5(O, N, M, S, F) &= \alpha NS + \beta MS - \mu_F F. \end{aligned}$$

Onde a matriz jacobiana é dada por:

$$J(O, N, M, S, F) = \begin{bmatrix} -\frac{m}{(1+aS)} - \gamma & 0 & 1 - \frac{O}{1+aS} & \frac{aMO}{(1+aS)^2} & 0 \\ \gamma & -\theta - \mu_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & -\mu_M & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha S & -\beta S & -\alpha N - \beta M - \mu_S & 0 \\ 0 & \alpha S & \beta S & \alpha N + \beta M & -\mu_F \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

#### 3.3.1 Estabilidades de equilíbrio trivial e não-trivial

A estabilidade dos pontos de equilíbrio será determinada pelas raízes da equação característica da matriz jacobiana (3.6), calculada em P1 E P2. Foram gerados os seguintes teoremas:

**Teorema 1.** O ponto de equilíbrio trivial,  $P1 = (0,0,0,0,0)$  do sistema (3.3) é localmente assintoticamente estável se  $Q_0 < 1$ . E, instável se  $Q_0 > 1$ .

**Teorema 2.** Se  $Q_0 > 1$  o ponto de equilíbrio não trivial,  $P2 = (0^*, N^*, M^*, S^*, F^*)$  do sistema (3.3) existe e é localmente assintoticamente estável.

Dos quais por possuírem grande similaridade no processo de demonstração entre eles, optamos aqui por demonstrar o Teorema 1.

Demonstração (Teorema 1). Seja  $J(0,0,0,0,0)$ , a matriz jacobiana dada por:

$$J(0,0,0,0,0) = \begin{bmatrix} -\gamma & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma & -\theta - \mu_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & -\mu_M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_F \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

A equação característica da matriz (3.7) é:

$$P(\lambda) = (\mu_F + \lambda)(\mu_S + \lambda)(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0$$

Onde,

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma + \theta + \mu_N + \mu_M, \\ a_2 &= \gamma\theta + \gamma\mu_N + \gamma\mu_M + \mu_N\mu_M, \\ a_3 &= \gamma\theta\mu_M + \gamma\mu_N\mu_M - \gamma\theta. \end{aligned}$$

Inicialmente temos que  $\lambda_1 = -\mu_F < 0$  e  $\lambda_2 = -\mu_S < 0$ .

Agora, utilizando o critério de Routh-Hurwitz na verificação da estabilidade do ponto, para que todas as raízes do termo  $(\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3) = 0$  da equação tenham  $\text{Re}\lambda < 0$ , temos as seguintes condições necessárias e suficientes:

- (i)  $a_1 > 0$ ;
- (ii)  $a_3 > 0$ ;
- (iii)  $a_1a_2 - a_3 > 0$ .

Atente-se que a condição (i)  $a_1 = \gamma + \theta + \mu_N + \mu_M > 0$  é satisfeita.

Para a condição (ii) ser satisfeita temos que,

$$\gamma\theta\mu_M + \gamma\mu_N\mu_M - \gamma\theta > 0.$$

O que implica que:

$$\frac{\theta}{\mu_M(\theta + \mu_N)} < 1,$$

Ou seja,  $Q_0 < 1$

Agora, para que a condição (iii) se faça satisfeita, vamos analisar  $a_1a_2 - a_3$ :

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_3 &= (\gamma + \theta + \mu_N + \mu_M)(\gamma\theta + \gamma\mu_N + \gamma\mu_M + \mu_N\mu_M) - (\gamma\theta\mu_M + \gamma\mu_N\mu_M \\ &\quad - \gamma\theta) \end{aligned}$$

No qual, ao realizarmos algumas mudanças algébricas, temos:

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_3 &= \gamma(\gamma\theta + \gamma\mu_N + \gamma\mu_M + \mu_N\mu_M) + \mu_N(\gamma\theta + \gamma\mu_N + \theta\mu_M + \mu_N\mu_M) \\ &\quad + (\theta + \mu_M)(\gamma\theta + \gamma\mu_N + \gamma\mu_M + \theta\mu_M + \mu_N\mu_M) + \gamma\theta > 0. \end{aligned}$$

Assim, segue que  $a_1a_2 - a_3 > 0$ . Portanto, se  $Q_0 < 1$  temos, pelo critério de Routh-Hurwitz, que a equação (3.3) tem todas as raízes com parte real negativa, e portanto, o ponto de equilíbrio trivial será localmente assintoticamente estável. Contudo, se  $Q_0 > 1$ , temos na condição (ii) que  $a_3 < 0$ . Devido tal fato, quando  $\lambda = 0$ , obtemos na equação característica que  $P(0) = a_3 < 0$ , ou seja, o polinômio de quinto grau corta a parte negativa do eixo das ordenadas. Como  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} P(\lambda) = +\infty$ , nos asseguramos que ele corta pelo menos uma vez o eixo das abscissas com um valor  $\lambda = k$ , onde  $k > 0$ , conseqüentemente  $k$  será uma raiz de  $P(\lambda)$ . Logo, a matriz jacobiana do sistema (3.3)

tem ao menos um autovalor positivo, fazendo assim, com que o ponto de equilíbrio trivial seja instável.

#### 4 | ANÁLISES NUMÉRICAS

Na metodologia usada para as simulações, considerou-se a temperatura constante, em aproximadamente 25°C, usando uma cultura de soja (*Glycine max (L.) Merrill*), cultivar Msoy 8001, como planta hospedeira.

Nos cenários com plantação, assumiu-se uma área de um hectare, para a população inicial de plantas no modelo, segundo dados fornecidos pela Embrapa (Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária), temos como população padrão de soja aproximadamente, 320 mil plantas por hectare.

A duração média de uma safra é de aproximadamente 125 dias, onde as simulações da interação entre *B. tabaci* biótipo B e cultura de soja ocorrem após o 10º dia do início do plantio, referentes ao tempo médio para a planta entrar em estágio emergencial.

O propósito das simulações apresentadas nesta seção é observar o que acontece com as trajetórias do modelo formulado, afim de facilitar sua compreensão, avaliar estratégias de combate efetivo contra a praga e manifestar o interesse do problema a pesquisadores de várias áreas do conhecimento.

A tabela 1 a seguir contempla os valores para os parâmetros utilizados na modelagem do problema:

Parâmetros	Interpretação biológica	Valor
$r$	oviposição per capita realizada pela Mosca adulta	4,4379 dias <sup>-1</sup>
$k$	plantas daninhas que fazem com que o inseto sobreviva na entressafra	40
$\epsilon$	quantidade de ovos por planta daninha	10
$\bar{a}$	quantidade de ovos por Planta Suscetível	50
$\bar{\gamma}$	taxa de eclosão do Ovo	0,1190 dias <sup>-1</sup>
$\bar{\theta}$	taxa de evolução da ninfa	0,786 dias <sup>-1</sup>
$\bar{\alpha}$	taxa de contaminação da Planta Suscetível pela Fumagina gerada através do Honeydew da Ninfa	0,00028
$\bar{\beta}$	taxa de contaminação da Planta Suscetível pela Fumagina gerada através do Honeydew da Mosca adulta	0,00028
$\bar{\mu}_N$	taxa de mortalidade da Ninfa	0,0476 dias <sup>-1</sup>
$\bar{\mu}_M$	taxa de mortalidade da Mosca adulta	0,0296 dias <sup>-1</sup>
$\bar{\mu}_S$	taxa de mortalidade da Planta Suscetível	0,0078 dias <sup>-1</sup>
$\bar{\mu}_F$	taxa de mortalidade da Planta com Fumagina	0,0061 dias <sup>-1</sup>

Tabela 1: Descrição dos parâmetros do modelo e interpretação biológica.

Agora, considerando o modelo (3.3) para a propagação de Fumagina com base nos valores da tabela 1, temos que o Número de Descendentes Basal fornecido é  $Q_0 \approx 141,37$ .

Para o entendimento inicial da estrutura do controle de *B. tabaci* biótipo B, foram considerados os seguintes cenários:

- Cenário 1:

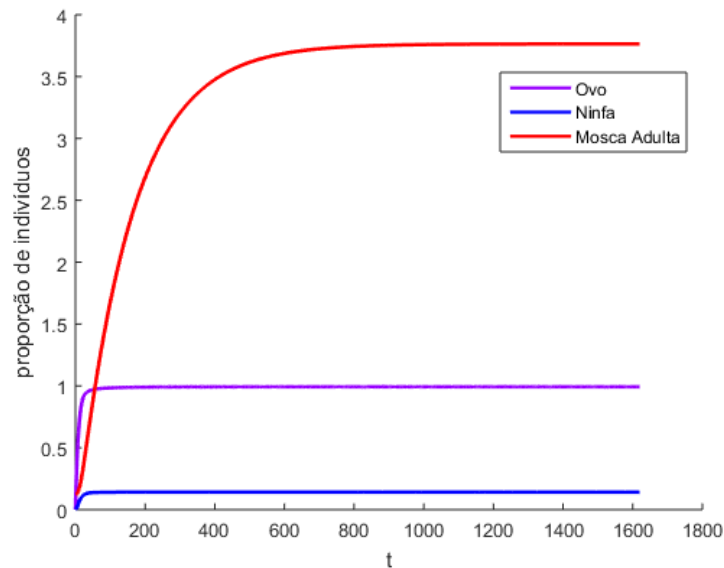


Figura 4: Simulação da dinâmica populacional de *B. tabaci* biótipo B ao longo de um ano, na ausência de cultura agrícola, considerando  $k = 40$ .

A figura 4 mostra a simulação da dinâmica populacional de *B. tabaci* biótipo B, ao longo de um ano, na ausência de culturas agrícola e estratégias de controle. Para a condição inicial do sistema, considerou-se 50 moscas adultas distribuídas homogeneamente em um hectare, com 40 plantas daninhas, sendo considerado um campo limpo.

Pode-se observar que as moscas adultas de *B. tabaci* biótipo B atingem a estabilidade populacional no tempo  $t = 887,58$  que correspondem, em unidades dimensionais, à 200 dias. Sua população alcança 376,38% da capacidade máxima no estágio de ovo, no qual, voltando em unidades dimensionais, refletem à aproximadamente 1500 indivíduos adultos. Já a população de ovos e ninfas, tornam-se estáveis no tempo aproximado de  $t = 66,56$  (15 dias).

Isso se dá devido à pressão que o meio exerce sobre os insetos, onde a taxa de oviposição sofre uma saturação na função logística, em razão da limitação do espaço.

- Cenário 2:

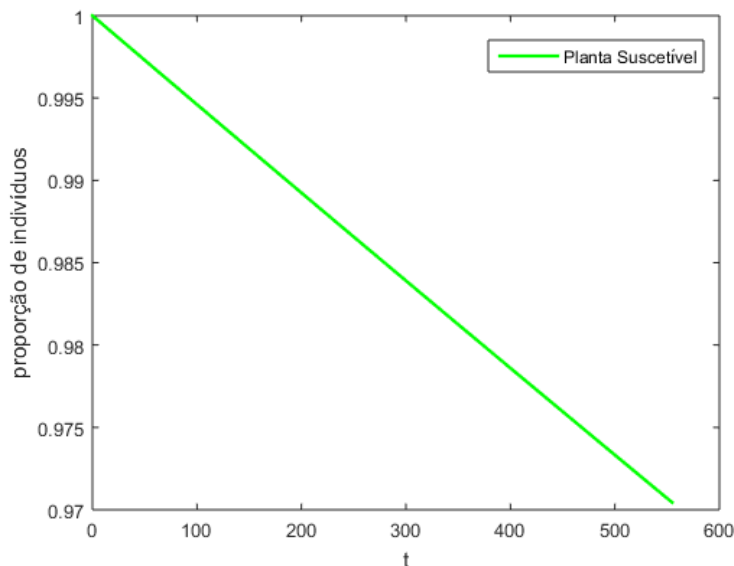


Figura 5: Simulação da dinâmica populacional da cultura de soja, na ausência de *B. tabaci* biótipo B, considerando  $k=40$ .

A figura 5 mostra a simulação da dinâmica populacional da Planta Suscetível, ao longo de uma safra, na ausência da praga. Para a condição inicial do sistema, considerou-se  $S(0)$ , que equivale à 320.000 plantas de soja, distribuídas homogeneamente em um hectare.

Ao final do tempo  $t = 554,74$  (125 dias), observa-se a perda de aproximadamente 3% da produção total devido ao debulho natural que a planta sofre ao decorrer da safra (SCHANOSKI, et.al., 2011).

- Cenário 3:

A figura 6 mostra a simulação da dinâmica populacional de *B. tabaci* biótipo B interagindo com a população de plantas, a partir do décimo dia do início da safra.

Para a condição inicial do sistema, temos  $O(0) = 0, N(0) = 0, M(0) = 0,125, S(0) = 1$  e  $F(0) = 0$ . Utilizou-se os dados da tabela 1, sendo  $k = 40$ , equivalendo biologicamente à 50 moscas adultas distribuídas homogeneamente em um hectare de plantação de soja com 320.000 unidades, sem estratégias de controle. Assim, obtivemos que quando  $Q_0 > 1$ , todas as trajetórias do modelo (3.3) convergem para o ponto de equilíbrio  $P2 = (O^*, N^*, M^*, S^*, F^*) \approx (0,9929, 0,1417, 3,7638, 0, 0)$ .



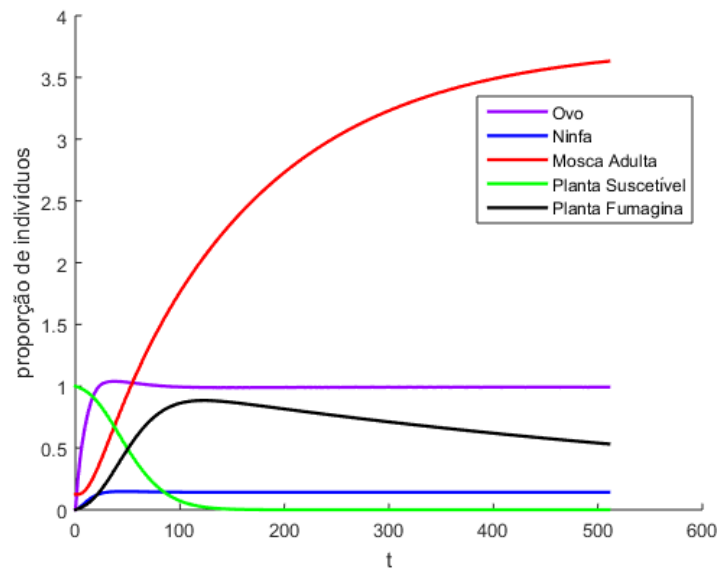


Figura 6: Simulação da dinâmica populacional da cultura de soja, infestada por *B. tabaci* biótipo B, considerando  $k=40$ .

Se analisarmos no sentido de produção, observamos que ao final da safra, restaram aproximadamente apenas 53% de plantas infectadas com fumagina para serem colhidas, gerando um grande prejuízo econômico.

O fato de as simulações aqui apresentadas não considerarem invasões contínuas de moscas adultas na plantação servem como uma simplificação da realidade, isso facilita o entendimento do funcionamento básico da dinâmica populacional desta espécie e da sua interação com a cultura plantada, mostrando assim os grandes danos teóricos que *B. Tabaci* biótipo B pode causar a uma produção.

#### 4.1 Estratégias de controle combinadas

Um dos métodos numéricos para propor estratégias de controle a pragas é realizando uma análise quantitativa do Número de Descendentes Basal, afim de avaliar quais variações de parâmetros tornam mais sensível a mudança do mesmo.

De modo geral, concluiu-se a partir da análise qualitativa que  $Q_0$  é mais sensível a taxa de oviposição e as taxas de mortalidade, tanto da ninfa, quanto da mosca adulta.

No entanto, o controle isolado de cada parâmetro não é o mais indicado, uma vez que a praga possui grande capacidade de desenvolver resistência a diferentes tipos de combate (BÔAS, et.al., 1997). Isso reforça que usos de estratégias combinadas como forma de diminuir ou até mesmo erradicar a praga.

A seleção e o emprego inteligente de diversas táticas de controle asseguram resultados positivos, como a preservação do meio-ambiente e dos mecanismos naturais de controle, gerando resultados econômicos favoráveis ao agricultor.

Por serem estratégias viáveis a serem aplicadas, optamos por analisar três táticas de controle combinadas:

- Variação nos parâmetros  $r$  e  $\overline{\mu_N}$ , correspondendo o uso de óleos e deter-

gentes de baixa concentração para a redução da oviposição e aumento na mortalidade de ninfas;

- Variação nos parâmetros  $\overline{\mu_N}$  e  $\overline{\mu_M}$ , representando o uso de inseticidas como do grupo químico “Piretróide” que reduzem a população de ninfas e moscas adulta (BÔAS, et. al., 2009);
- Variação nos parâmetros  $r$  e  $\overline{\mu_M}$ , retratando o uso de inseticidas como do grupo químico “Neonicotinóide” que inibe a alimentação, voo e movimentação da mosca adulta, reduzindo a oviposição (BÔAS, et. al., 2009).

Para essas simulações foram utilizados os dados da tabela 1, com população inicial de 50 moscas adultas em uma cultura de 320.000 plantas de soja.

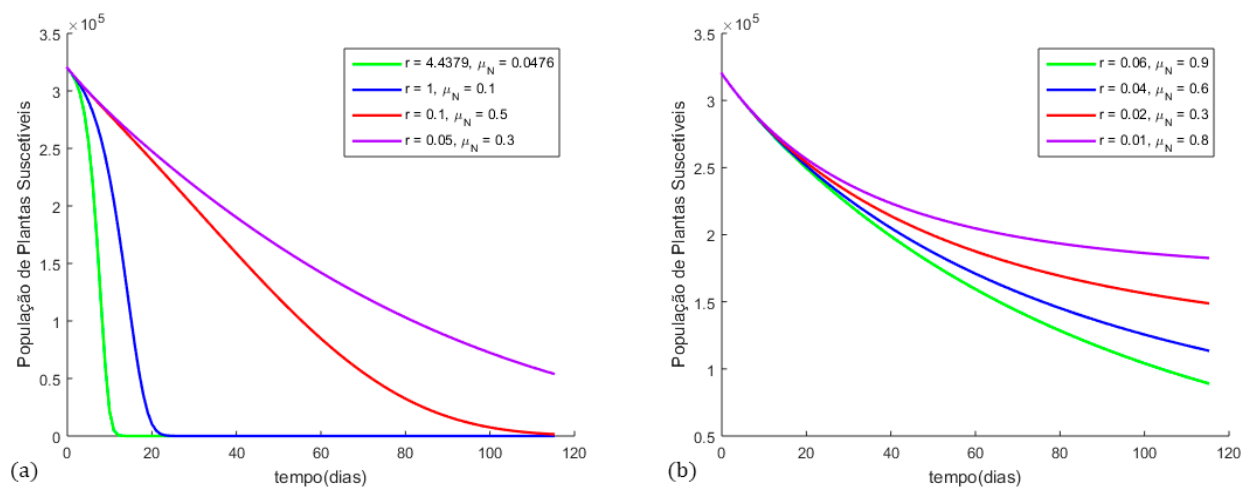


Figura 7: Gráfico da flutuação da população de Plantas Suscetíveis considerando variação simultânea de  $r$  e  $\overline{\mu_N}$ , com  $k = 40$ . Em (a) temos  $Q_0 > 1$  e em (b) temos  $Q_0 < 1$ .

Na figura 7 podemos observar como se comporta a população de Plantas Suscetíveis à medida que  $Q_0$  diminui com a variação dos parâmetros  $r$  e  $\overline{\mu_N}$ .

$r$	$\overline{\mu_N}$	$Q_0$	Plantas Suscetíveis
4,4379	0,0296	141,36	0
1	0,1	29,97	0
0,1	0,5	2,06	1.510
0,05	0,3	1,22	54.170
0,06	0,9	0,94	89.300
0,04	0,6	0,76	113.710
0,02	0,3	0,48	148.920
0,01	0,8	0,16	182.660

Tabela 2: Comportamento de  $r$  e  $\overline{\mu_N}$  e das Plantas Suscetíveis com a variação de  $r$  e  $\overline{\mu_N}$ .

Estamos interessados também qual será a repercussão na população de plantas suscetíveis quanto as maneiras de controle aqui propostas, pois sabemos que independente do tempo, para valores de  $Q_0 > 1$  a população de *B. tabaci* tende

a aumentar até atingir sua estabilidade e quando  $Q_0 < 1$ , tende a extinção da espécie na lavoura.

Analisando a figura 7 em conjunto com os dados fornecidos na tabela 2, constatamos que mesmo fazendo um intenso controle na oviposição e taxa de mortalidade da ninfa, a população de plantas suscetíveis decai expressivamente no decorrer da safra. Como exemplo disso temos a variação de  $r = 0,01$  e  $\bar{\mu}_N = 0,8$ , onde  $Q_0 = 0,16$  e mesmo assim acaba gerando uma perda teórica de aproximadamente 42,9%.

Dando continuidade aos métodos de controle propostos, do mesmo modo que anteriormente, temos agora a variação nos parâmetros  $\bar{\mu}_N$  e  $\bar{\mu}_M$ , representando o uso de inseticidas como do grupo químico “Piretróide” que reduzem a população de ninfas e moscas adulta.

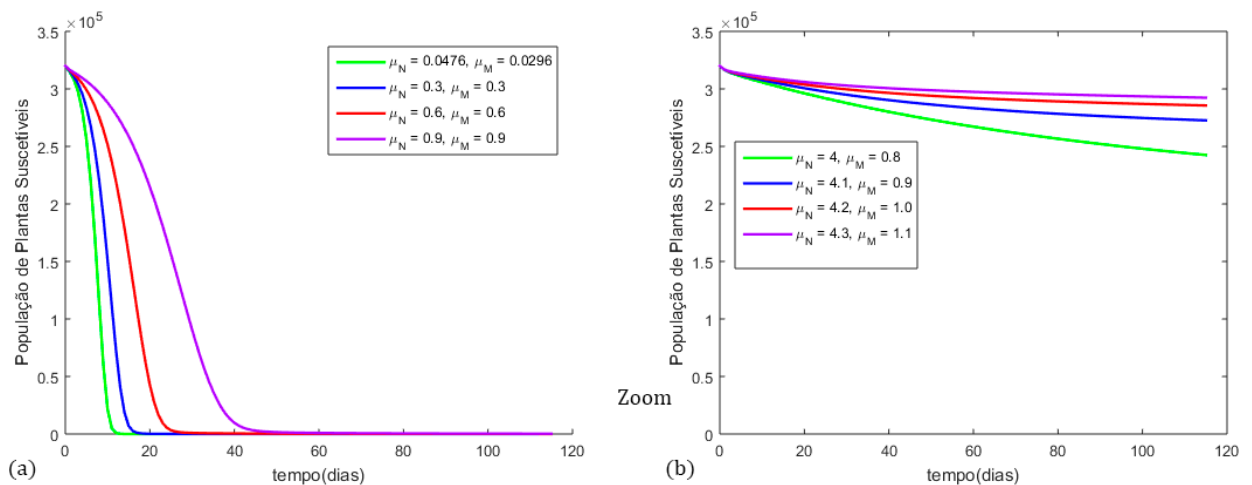


Figura 8: Gráfico da flutuação da população de Plantas Suscetíveis considerando variação simultânea de  $\bar{\mu}_N$  e  $\bar{\mu}_M$ , com  $k = 40$ . Em (a) temos  $Q_0 > 1$  e em (b) temos  $Q_0 < 1$ .

Na figura 8 podemos observar como se comporta a população de Plantas Suscetíveis na medida que  $Q_0$  diminui com a variação dos parâmetros  $\bar{\mu}_N$  e  $\bar{\mu}_M$ .

$\bar{\mu}_N$	$\bar{\mu}_M$	$Q_0$	Plantas Suscetíveis
4,4379	0,0476	141,36	0
0,3	0,3	10,70	0
0,6	0,6	4,19	0
0,9	0,9	2,29	10
4	0,8	0,91	242.370
4,1	0,9	0,79	272.590
4,2	1	0,69	285.580
4,3	1,1	0,62	292.330

Tabela 3: Comportamento de  $Q_0$  e das Plantas Suscetíveis com a variação de  $\bar{\mu}_N$  e  $\bar{\mu}_M$ .

Apesar de conseguir aproximadamente 91,35% de plantas suscetíveis ao fim

da safra quando  $\overline{\mu}_N = 4,3$ ,  $\overline{\mu}_M = 1,1$  e  $Q_0 = 0,62$ , não podemos cogitar que a técnica de controle é mais efetiva que a primeira, pois precisou-se de valores elevados nas taxas de mortalidade para que  $Q_0 < 1$ . Isso faz com que o custo de inseticida seja muito alto devida a várias aplicações, além de poder gerar uma seleção natural de moscas-brancas resistentes a esses tipos de inseticidas, fato que vem preocupando pesquisadores da área (BÔAS, et. al., 2009).

Passando para a última estratégia de controle proposta, temos a variação nos parâmetros  $r$  e  $\overline{\mu}_M$ , retratando o uso de inseticidas como do grupo químico “Neonicotinóide”.

Na figura 9 podemos observar como se comporta a população de Plantas Suscetíveis à medida que  $Q_0$  diminui com a variação dos parâmetros  $r$  e  $\overline{\mu}_M$ .

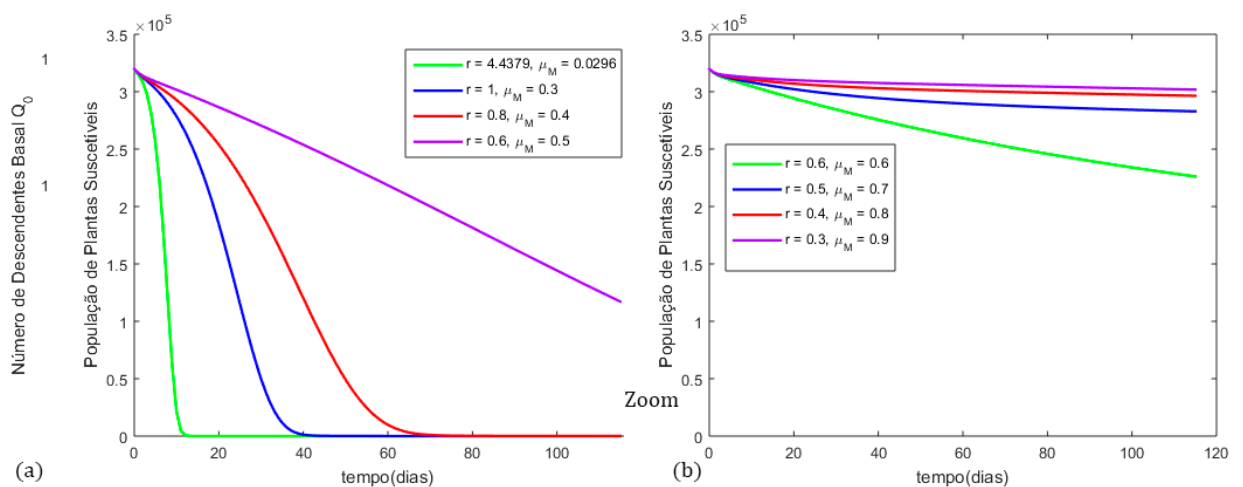


Figura 9: Gráfico da flutuação da população de Plantas Suscetíveis considerando variação simultânea de  $r$  e  $\overline{\mu}_M$ , com  $k = 40$ . Em (a) temos  $Q_0 > 1$  e em (b) temos  $Q_0 < 1$ .

Conforme visto acima, vemos que  $Q_0$  é mais sensível quando combinamos variações na oviposição e taxa de mortalidade da mosca adulta. Tal fato é confirmado no momento em que variamos  $r = 0,3$  e  $\overline{\mu}_M = 0,9$  conseguindo uma perda teórica de aproximadamente 5,6% nas plantas suscetíveis, conforme Tabela 4.

$r$	$\overline{\mu}_M$	$Q_0$	Plantas Suscetíveis
4,4379	0,0296	141,36	0
1	0,3	3,14	0
0,8	0,4	1,88	0
0,6	0,5	1,13	116.970
0,6	0,6	0,94	226.140
0,5	0,7	0,67	282.860
0,4	0,8	0,47	296.420
0,3	0,9	0,31	301.810

Tabela 4: Comportamento de  $Q_0$  e das Plantas Suscetíveis com a variação de  $r$  e  $\overline{\mu}_M$ .

Outro fato importante, é que esse tipo de produto inibe o voo e a movimentação da mosca adulta, controlando a dispersão na lavoura, conseqüentemente fazendo com que o combate seja mais eficaz.

## 5 | DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

De maneira geral, nossa expectativa é que este trabalho possa contribuir no entendimento qualitativo mais aprofundado sobre as estruturas básicas das dinâmicas populacionais de *B.tabaci*, e auxiliar em uma tomada de decisão cada vez mais eficientes, visto que a partir da análise de sensibilidade de  $Q_0$  através das variações dos parâmetros, encontramos resultados interessantes, como a efetividade na quebra do ciclo de vida da *B.tabaci* através da redução de oviposição e taxa de mortalidade da mosca adulta.

O modelo ganha mais validade ainda quando comparamos com os dados encontrados na literatura, onde na atualidade, os inseticidas eficientes no controle de mosca-branca são os do grupo químico “Neonicotinóides” (VIVAN, et.al.,2007).

Encontramos na literatura, que alguns inseticidas do grupo químico “Piretróides” e “Organofosforados” perderam sua eficácia para o controle de mosca-branca. No qual, devido a aplicações sucessivas com o mesmo produto ou com inseticidas que tem o mesmo modo de ação geraram níveis de resistência elevados na mosca-branca (VIVAN, et.al., 2007), reforçando os resultados não satisfatórios encontrados no controle por variação de  $\bar{\mu}_N$  e  $\bar{\mu}_M$ , simultaneamente.

Outra prática importante a ser adotada é a manutenção da lavoura no limpo, eliminando-se as plantas daninhas hospedeiras de mosca-branca antes do plantio e nos primeiros dias do estabelecimento da lavoura (BÔAS, et. al., 2009), onde conforme visto nas simulações, a erradicação das plantas daninhas é necessária, mas não suficiente para o controle da Mosca-branca.

## REFERÊNCIAS

BÔAS, G.L.V.; BRANCO, M.C. **Manejo Integrado da Mosca-Branca (*Bemisia tabaci* biótipo B) em Sistema de Produção Integrada de Tomate Industrial (PITI)**. Circular técnica. Embrapa Hortaliças. 2009, vol.70. INNS:1415-3033.

BÔAS, G.L.V.; FRANÇA, F.H.; ÁVILA A.C.; BEZERRA, I.C. **Manejo Integrado de mosca branca *Bemisia argentifolli***. Circular técnica. Embrapa Hortaliças. 1997, vol.9.

BYRNE, D.N.; BELLOWS JUNIOR, T.S. **Whitefly biology**. Annual Review of Entomology. 1991, v. 36, p.431-457.

BYRNE, D.N.; MILLER, W.B. **Carbohydrate and amino acid composition of phloem sap and honeydew by *Bemisia tabaci***. Journal of Insect Physiology. 1991, vol.36. p.431-457.

COSTA, A.S. **Increase in the populational density of *Bemisia tabaci* a threat of widespread virus infection of legume crops in Brazil**. J. Bird & K Maramorosch. Tropical Diseases of Legumes, 1975.

p.27-50.

ISLAM, M.T.; SHUNXIANG, R. **Development and reproduction of *Bemisia tabaci* on three tomato varieties.** *Journal of Entomology*. 2008, vol.4. p.10-16.

SCHANOSKI, R.; RIGHI, E.Z.; WERNER, V. **Perdas na colheita mecanizada de soja (*Glycine max*) no município de Maripá - PR.** *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*. 2011, v.15, n.11. p.1206-1211.

SOTORRIVA, L.M. **Aspectos biológicos de *Bemisia tabaci* biótipo B em plantas infestantes.** 2010. 49 f. Dissertação (Mestrado em Agricultura Tropical e Subtropical) - Instituto Agronômico, Campinas, SP, 2010.

STANSLY, P. A.; NARANJO, S. E. ***Bemisia*: Bionomics and Management of a Global Pest.** Springer Science+Business Media B.V. Springer Netherlands, 2010.

VIVAN, L.M.; ROFRIGUES, S.M.M. **A Mosca-Branca (*Bemisia tabaci* Biótipo B) no Mato-Grosso.** Circular técnica. Embrapa Algodão. 2007, vol.111. INSS: 0100-6460.

## LOS SUBNIVELES DE DESARROLLO DEL ESQUEMA DE DERIVADA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO EN EL NIVEL UNIVERSITARIO

**Claudio Fuentealba**

Universidad Austral de Chile  
Facultad de Ciencias de la Ingeniería  
Chile

**Edelmira Badillo**

Universidad Autónoma de Barcelona  
Departamento de Didáctica de la Matemática y de  
las Ciencias Experimentales  
España

**Gloria Sánchez-Matamoros**

Universidad de Sevilla  
Departamento de Didáctica de la Matemática  
España

**Andrea Cárcamo**

Universidad Austral de Chile  
Facultad de Ciencias de la Ingeniería  
Chile

**RESUMEN:** Los resultados de investigaciones relacionadas con el aprendizaje del concepto de derivada constatan que, a pesar de ser un concepto indispensable, su comprensión resulta muy compleja, observándose una cantidad significativa de estudiantes universitarios que solo logra alcanzar una comprensión parcial. Esta problemática a pesar de no ser nueva, aún constituye un gran desafío de la educación matemática a nivel universitario y es una constante preocupación para las

instituciones educativas de nivel superior. En esta investigación presentamos un análisis exploratorio cuyo fin es identificar y caracterizar los subniveles de desarrollo del esquema de derivada alcanzados por estudiantes universitarios con instrucción previa en Cálculo Diferencial.

**PALABRAS CLAVE:** Derivada; Teoría APOE; Subniveles de Desarrollo; Esquema de Derivada

**ABSTRACT:** The results of research related to the learning of the derivative concept confirm that, despite being an essential concept, its understanding is very complex, observing a significant number of university students that only achieves a partial understanding. This problem, despite not being new, still constitutes a great challenge for mathematics education at the university level and is a constant concern for higher education institutions. In this research, we present an exploratory analysis whose purpose is to identify and characterize the sub-levels of development of the derivative schema reached by university students with previous instruction in Differential Calculus.

**KEYWORDS:** Derivative; APOS Theory; Sub-levels of Development; Derivative Schema



## 1 | INTRODUCCIÓN

La derivada es uno de los conceptos más importantes del cualquier curso de Cálculo y corresponde a una herramienta fundamental en la comprensión de los fenómenos que involucran el cambio y variación de magnitudes. Sin embargo, a pesar de ser un concepto básico y transversal en los currículos universitarios de matemáticas, ingeniería y otras ciencias, su comprensión es compleja para una gran parte de los estudiantes. Entre algunos de los aspectos más importantes que provocan esta dificultad en la comprensión del concepto de derivada por parte de los estudiantes se encuentran; (1) la creación y utilización de diseños instruccionales que privilegian la excesiva mecanización y memorización, convirtiendo al concepto de derivada en un conocimiento algorítmico que se construye por medio de la resolución de cientos de tareas que solo involucran la aplicación correcta de determinadas operaciones algebraicas, lo cual, obstaculiza la construcción de una comprensión más completa del concepto (DAWKINS & EPPERSON, 2014), (2) la excesiva predilección de por el uso de tareas que involucran la utilización de un solo modo de representación, olvidando que la conversión entre modos de representaciones y la coordinación (síntesis) entre distintas representaciones es fundamental para lograr un nivel alto de comprensión, pues cada representación tiene asociadas algunas características del concepto, pero no todas (DUVAL, 2006; SÁNCHEZ-MATAMOROS, GARCÍA & LLINARES, 2006). Como consecuencia de lo anterior, se observa que una gran parte de los estudiantes tienen éxito al enfrentarse a ese tipo de tareas, sin embargo, estos mismos estudiantes pueden mostrar dificultades y errores cuando la resolución de la tarea que requiere de la comprensión del significado de la derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o de su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente, o de ambas simultáneamente (SÁNCHEZ-MATAMOROS, GARCÍA & LLINARES, 2008; BAKER, COOLEY & TRIGUEROS, 2000).

En este trabajo nos centramos en identificar el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada alcanzado por un grupo de estudiantes universitarios luego de un curso de Cálculo Diferencial.

## 2 | MARCO TEÓRICO

En este trabajo hemos consideramos el marco propuesto por la Teoría APOE (ARNON ET AL., 2014; ASIALA ET AL., 1997), la cual se basa en la idea de abstracción reflexiva propuesta por Piaget y García (1983). La Teoría APOE considera que la comprensión de un concepto, por parte de un estudiante, comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente contruidos, en términos de acciones. Estas acciones se interiorizan para formar procesos que, a su vez, se encapsulan para formar objetos. Con relación a los procesos, éstos pueden ser generados a partir de mecanismos de coordinación o reversión de otros procesos, previamente contruidos

por el estudiante, o bien por medio de la generalización de éstos. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas (DUBINSKY, 1991; ARNON ET AL., 2014).

Un esquema debe entenderse como una construcción cognitiva compleja y conformada por acciones, procesos, objetos, otros esquemas y sus interrelaciones. Dichas estructuras se encuentran relacionadas en la mente del estudiante, consciente o inconscientemente, y son evocadas cuando se enfrenta a distintas tareas. Este constructo de esquema y los mecanismos de abstracción reflexiva permiten explicar la manera en que se construyen los conocimientos matemáticos en la mente de un estudiante, a través de las estructuras cognitivas y las relaciones establecidas entre ellas (TRIGUEROS, 2005). Los esquemas según Piaget y García (1983) crecen a través de distintos mecanismos y se desarrollan o evolucionan pasando por tres niveles, Intra-Inter-Trans. Estos niveles son denominados triada y se suceden según un orden fijo, caracterizándose por el grado de construcción de relaciones entre los elementos matemáticos constitutivos del concepto.

Para Arnon et al. (2014) un estudiante en el nivel Intra del desarrollo de un esquema se centra en acciones, procesos y objetos individuales sin relacionarlos. En el nivel Inter, hace uso de elementos matemáticos de forma correcta en algunos modos de representación y establece relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en el mismo modo de representación. Este nivel se caracteriza por la construcción de relaciones y transformaciones entre los procesos y los objetos que conforman el esquema. Finalmente, en el nivel Trans, el estudiante usa elementos matemáticos de forma correcta en todos los modos de representación y establece relaciones lógicas entre elementos matemáticos que se encuentran en diferentes modos de representación. Los estudiantes en este nivel han construido el objeto derivada, y toman consciencia de las relaciones que pueden establecer entre distintos modos de representación llegando a la síntesis de éstos (SÁNCHEZ-MATAMOROS ET AL., 2006).

Es importante destacar que Piaget y García (1983) consideran que cada fase o nivel (Intra, Inter y Trans) implican, a su vez, la existencia de algunos subniveles que siguen el mismo orden de progresión. Un ejemplo de ello, es lo reportado en la investigación de Sánchez-Matamoros et al. (2006) que identifica y describe dos subniveles para los niveles de desarrollo Intra e Inter. La existencia de estos subniveles podría dar explicación de las diferencias que se observan entre estudiantes asignados a un mismo nivel de desarrollo del esquema.

### 3 | METODOLOGÍA

Esta investigación es de tipo cuantitativa y tiene carácter descriptivo exploratorio. En ella participaron 40 estudiantes universitarios de segundo año del grado doble de

Matemáticas y Física de una universidad pública de Cataluña. Todos los estudiantes habían cursado y aprobado como mínimo una asignatura de Cálculo Diferencial.

El instrumento de recolección de datos correspondió a un cuestionario conformado por tres tareas (ver Tabla 1) entregadas en distintos modos de representación. Dichas tareas fueron seleccionadas y modificadas de investigaciones previas sobre la comprensión del concepto de derivada (BAKER ET AL., 2000; SÁNCHEZ-MATAMOROS ET AL., 2006; FUENTEALBA, SÁNCHEZ-MATAMOROS, BADILLO & TRIGUEROS, 2017). Para su resolución era necesario utilizar y coordinar distintos elementos matemáticos que configuran el concepto de derivada.

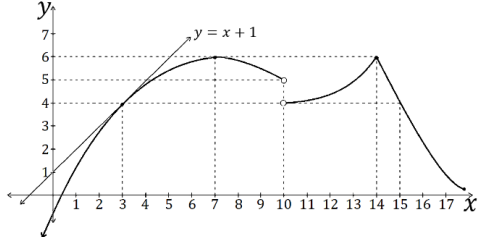
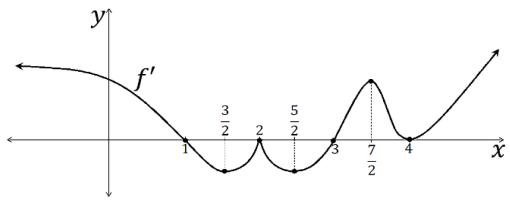
Tarea	Enunciado	Descripción de aspectos asociados a la resolución
1	<p>Esboza la gráfica de una función <math>f</math> que satisfice las siguientes condiciones:</p> <p>a) <math>f</math> es continua en su dominio</p> <p>b) <math>f(2) = 0</math>.</p> <p>c) <math>f'(2) = f'(5) = 0</math></p> <p>d) <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4</math></p> <p>e) <math>\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = -\infty</math></p> <p>f) <math>f'(x) &lt; 0</math> cuando <math>5 &lt; x &lt; 8</math></p> <p>g) <math>f'(x) \geq 0</math> cuando <math>x &lt; 5</math></p> <p>h) <math>f''(x) &lt; 0</math> cuando <math>3 &lt; x &lt; 8</math></p> <p>i) <math>f''(x) &gt; 0</math> cuando <math>x &lt; 3</math></p>	<p><u>Modo de representación:</u> analítico → gráfico</p> <p><u>Elementos matemáticos:</u> Interpretación analítica de la derivada y sus implicaciones sobre la gráfica de la función (existencia de valores extremos, puntos de inflexión). Signo de la primera derivada y su relación con respecto a los intervalos de monotonía de la función. Signo de la segunda derivada y su relación con respecto a los intervalos de convexidad de la función.</p>
2	 <p>Dada la gráfica de la función <math>f</math>, formada por las ramas de parábolas</p> <p>a) Obtener los valores de <math>f'(3)</math>, <math>f'(7)</math>, <math>f'(10)</math>, <math>f'(14)</math> y <math>f'(15)</math>. Explicando cómo los obtienes.</p> <p>b) Realiza un esbozo de la gráfica de <math>f'</math>. Explica cómo los has obtenido.</p>	<p><u>Modo de representación:</u> gráfico → analítico → gráfico</p> <p><u>Elementos matemáticos:</u> Interpretación geométrica y analítica de la derivada (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía y convexidad de la función y su relación con el signo de la primera derivada o segunda derivada según sea el caso. El operador derivada (si <math>f</math> es una parábola entonces <math>f'</math> es una recta).</p>
3	 <p>La Figura muestra la gráfica de la derivada de <math>f</math>, esboza las posibles gráficas de <math>f</math>.</p>	<p><u>Modo de representación:</u> gráfico → analítico → gráfico</p> <p><u>Elementos matemáticos:</u> Interpretación geométrica (existencia de valores extremos, puntos de inflexión, discontinuidades y picos). Intervalos de monotonía de la primera derivada y su relación con el signo de la segunda derivada (intervalos de convexidad de la función). Intervalos de cambio de signo de la primera derivada y su relación con respecto a la monotonía de función.</p>

Tabla 1. Tareas propuestas en el cuestionario y descripción de aspectos asociados a su resolución

Para discretizar los protocolos de resolución y obtener un vector asociado a cada uno de ellos, definimos 27 variables (ver Tabla 2) que son el resultado de la descomposición de: los elementos matemáticos en ambos modos de representación (analítico/gráfico), la utilización de relaciones lógicas y de otros estudios previos (TRIGUEROS & ESCANDÓN, 2008; FUENTEALBA ET AL., 2017).

Elemento matemático	Variable a observar
1. Derivada en un punto $f'(a)$	$V_1$ . Usa correctamente el significado geométrico de la derivada en $x=a$ $V_2$ . Usa correctamente el significado analítico de la derivada en $x=a$
2. Función derivada $f'(x)$	$V_3$ . Usa correctamente el significado de función derivada $V_4$ . Usa correctamente el significado del operador derivada
3. Valor extremo de $f$	$V_5$ . Usa correctamente el significado de máximo local geoméricamente $V_6$ . Usa correctamente el significado de máximo local analíticamente $V_7$ . Usa correctamente el significado de mínimo local geoméricamente $V_8$ . Usa correctamente el significado de mínimo local analíticamente
4. Punto de inflexión de $f$	$V_9$ . Usa correctamente el significado de punto de inflexión geoméricamente $V_{10}$ . Usa correctamente el significado de punto de inflexión analíticamente
5. Relación de equivalencia lógica entre el signo de $f'$ en un intervalo $I$ , la monotonía de $f$ en dicho intervalo	$V_{11}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de $f'$ en un intervalo $I$ y el crecimiento estricto de $f$ en dicho intervalo $V_{12}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: el crecimiento estricto de $f$ en un intervalo $I$ y el signo positivo de $f'$ en dicho intervalo $V_{13}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo $f'$ en un intervalo y el decrecimiento estricto de $f$ en dicho intervalo $V_{14}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: el decrecimiento estricto de $f$ en un intervalo $I$ y el signo negativo de $f'$ en dicho intervalo
6. Relación de equivalencia lógica entre el signo de $f''$ en un intervalo $I$ y, la curvatura de $f$ en dicho intervalo	$V_{15}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo positivo de $f''$ en un intervalo $I$ y la convexidad de $f$ en dicho intervalo $V_{16}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: la convexidad de $f$ en un intervalo $I$ y el signo positivo de $f''$ en dicho intervalo $V_{17}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: el signo negativo de $f''$ en un intervalo $I$ y la concavidad de $f$ en dicho intervalo $V_{18}$ . Usa correctamente la relación de implicación entre: la concavidad de $f$ en un intervalo $I$ y el signo negativo de $f''$ en dicho intervalo
7. Puntos de no derivabilidad de $f$	$V_{19}$ . Usa correctamente las derivadas laterales $V_{20}$ . Usa correctamente el significado de los puntos conflictivos (cúspides y angulosos)

8. Continuidad y derivabilidad de $f$	$V_{21}$ . Usa correctamente la relación directa: si $f$ es derivable en $x=a$ , entonces $f$ es continua en $x=a$ $V_{22}$ . Usa correctamente la relación contrarrecíproca: si $f$ no es continua en $x=a$ , entonces $f$ no es derivable en $x=a$
Otras variables generales observables	$V_{23}$ . Es capaz de dividir correctamente una gráfica en distintos intervalos determinados por los elementos gráficos proporcionados (monotonía y curvatura). $V_{24}$ . Es capaz de definir correctamente distintos intervalos del dominio de la función determinados por la información analítica proporcionada (signo y ceros). $V_{25}$ . Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades gráficas. $V_{26}$ . Es capaz de graficar correctamente una función a partir del conocimiento de sus propiedades analíticas. $V_{27}$ . Es capaz para establecer correctamente relaciones entre la primera y segunda derivada

Tabla 2. Variables utilizadas para discretizar los protocolos de resolución de cada uno de los cuestionarios

El propósito del establecimiento de estas variables fue realizar un análisis de conglomerados que nos permitirá identificar y caracterizar preliminarmente los subniveles de desarrollo del esquema de derivada (subgrupos entregados por el análisis de conglomerados). Sin embargo, para cuantificar la presencia o ausencia de cada una de las variables, en los protocolos de resolución de los estudiantes, era necesario utilizar una escala de medida para asignar una puntuación a cada una de ellas. Para el caso específico de este estudio utilizaremos una escala de tipo binaria 1 o 0 (1: se observa la variable; 0: no se observa la variable). A partir de estas dos herramientas (variables y escala) obtuvimos para cada uno de los cuestionarios un vector del tipo  $(V_1, V_2, V_3, \dots, V_{27})$ , en donde cada variable tiene un valor de 0 o 1.

#### 4 | ANÁLISIS Y RESULTADOS

Para el análisis de conglomerados utilizamos el software Infostat versión 2016. Por otra parte, dadas las características del estudio seleccionamos como distancia la euclídea al cuadrado (por tratarse de variables binarias) y como método de agrupamiento el de encadenamiento completo (vecino más lejano). Además, considerando los elementos aportados por la Teoría APOE indicamos que el número inicial de conglomerados es 3 (3 conglomerados iniciales correspondientes a los niveles de desarrollo del esquema Intra-Inter-Trans). A partir de estas consideraciones obtuvimos el dendograma que se muestra en la Figura 1.

El análisis e interpretación del dendograma nos permite indicar que la primera línea vertical de la derecha determina los tres grupos correspondiente a los niveles de desarrollo del esquema de derivada Inter-Intra-Trans y, la segunda línea vertical correspondiente a la mitad de la distancia total (criterio comunmente utilizado) nos indica las subdivisión de cada nivel en dos subniveles de desarrollo, que para cada uno de los casos hemos denominado A y B.

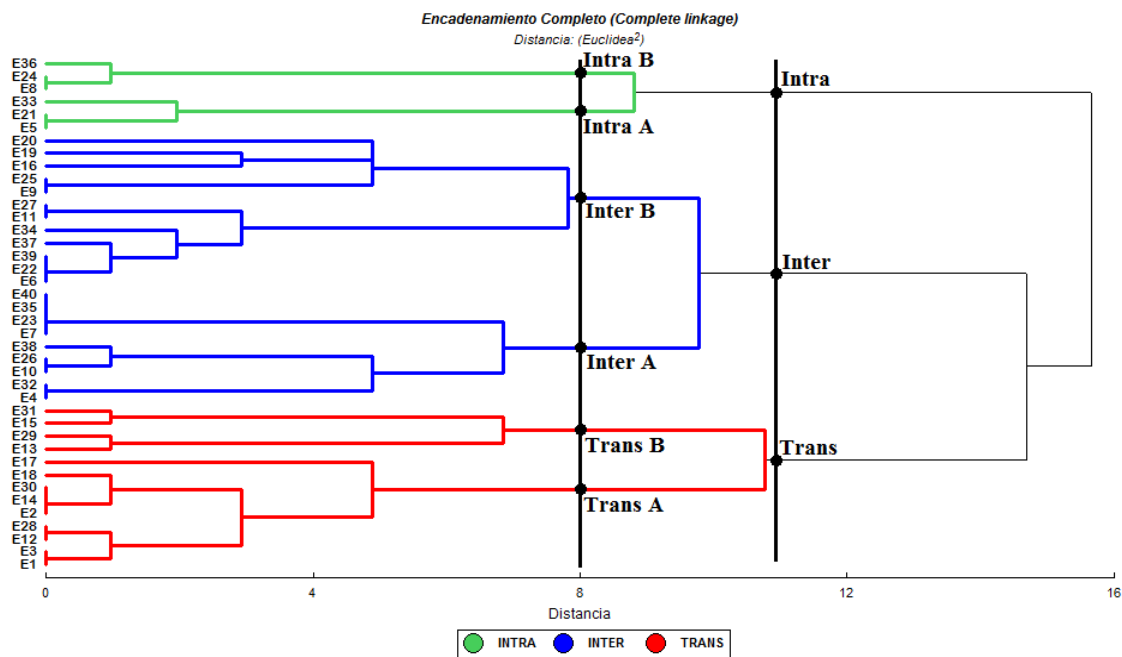


Figura 1. Dendrograma obtenido del análisis de conglomerados con encadenamiento completo y distancia euclídea al cuadrado.

El agrupamiento de los estudiantes en los distintos niveles y subniveles (A y B) se muestra en la Tabla 3.

	INTRA		INTER		TRANS	
<b>Estudiantes</b>	E5, E8, E21, E24, E33, E36		E4, E6, E7, E9, E10, E11, E16, E19, E20, E22, E23, E25, E26, E27, E32, E34, E35, E37, E38, E39, E40		E1, E2, E3, E12, E13, E14, E15, E17, E18, E28, E29, E30, E31	
<b>Total</b>	6		21		13	
<b>SUBNIVELES</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>B</b>
<b>Estudiantes</b>	E5, E21, E33	E8, E24, E36	E4, E7, E10, E23, E26, E32, E35, E38, E40	E6, E9, E11, E16, E19, E20, E22, E25, E27, E34, E37, E39	E1, E2, E3, E12, E14, E17, E18, E28, E30	E13, E15, E29, E31
<b>Total</b>	3	3	9	12	9	4

Tabla 3. Distribución de los estudiantes según los niveles y subniveles entregados por el análisis de conglomerados.

Posteriormente, a partir la asignación de estudiantes a los distintos subniveles de desarrollo determinados por el análisis de conglomerados, observamos cada uno



de los subgrupos generados con el objetivo de caracterizarlos en términos de la presencia y/o ausencia de las variables observadas.

Con relación a los subniveles de desarrollo Intra, se observa que en ambos subniveles no existe comprensión del significado de derivada en un punto. Además, los estudiantes asignados a estos subniveles, no ven a la derivada como una función o como un operador lineal. Es importante destacar que estos estudiantes no hacen uso de derivadas laterales o puntos conflictivos y no establecen relaciones entre la primera y segunda derivadas. Sin embargo, son capaces de determinar intervalos a partir de la información analítica o gráfica, aunque no grafican correctamente.

Por otra parte, en subnivel Intra A, a diferencia de lo que ocurre con el subnivel Intra B, se establecen relaciones directas entre el signo de  $f'$  y la monotonía de  $f$ . Los estudiantes no son capaces de establecer relaciones entre continuidad y derivabilidad, las cuales sí las realizan los estudiantes asignados al subnivel Intra B.

Los estudiantes asignados a los subniveles Inter utilizan el significado geométrico de la derivada (pendiente de la recta tangente), pero no el analítico. Además, utilizan correctamente el significado de los valores extremos y puntos de inflexión en ambos modos de representación. Asimismo, al igual que los estudiantes de los subniveles Intra, no logran establecer relaciones entre la primera y segunda derivadas. Sin embargo, ellos utilizan las derivadas laterales y son capaces de establecer intervalos para graficar a partir de información entregada, aunque grafican con poca precisión.

En cuanto, a las diferencias entre los dos subniveles Inter, podemos indicar que los estudiantes de nivel Inter B no consideran a la derivada como función ni como operador, en contraste con los estudiantes del subnivel Inter A que sí la consideran como función. Además, los estudiantes del subnivel Intra A tienen dificultades en establecer la relación directa entre el crecimiento de la función y el signo de la derivada. En tanto, los estudiantes del subnivel Inter B, tienen dificultades para establecer la relación directa entre la curvatura de la función y el signo de la segunda derivada.

Finalmente, en relación con los subniveles de desarrollo Trans podemos indicar que el subnivel Trans A observamos las 27 variables. Sin embargo, en los protocolos de resolución de los estudiantes, asignados al subnivel Trans B, se observan dificultades para establecer relaciones entre la primera y segunda derivadas, del mismo modo, no observamos la utilización del significado geométrico del punto de inflexión y tampoco el establecimiento de relaciones entre la curvatura de la función y el signo de la segunda derivada.

## 5 | CONCLUSIONES

Los resultados de este trabajo nos han permitido identificar dos subniveles asociados a cada nivel de desarrollo de esquema de derivada, lo cual, es coincidente con los resultados obtenidos por Sánchez-Matamoros et al. (2006) para los niveles de desarrollo Intra e Inter. Sin embargo, el tratamiento estadístico de los datos nos



ha mostrado la existencia, hasta ahora, de dos subniveles asociados al nivel de desarrollo Trans. Cada par de subniveles (Intra- Inter-Trans) tiene asociadas algunas características comunes y otras, que los diferencian. Dichas divergencias se acentúan en los niveles de desarrollo más bajos (Intra, Inter) y son menos notorias, en el nivel de desarrollo Trans. Esta primera caracterización confirma algunas conclusiones de otros estudios previos (SÁNCHEZ-MATAMOROS ET AL., 2006; BAKER ET AL., 2000) en cuanto al papel fundamental que juegan los modos de representación, los extremos y puntos de inflexión, así como también, las relaciones lógicas que pueden establecerse entre elementos matemáticos. Estos últimos son los que determinan los niveles y subniveles de desarrollo del esquema. Finalmente, esperamos que al aumentar la muestra podamos encontrar otros subniveles que nos permitan refinar esta caracterización preliminar.

## REFERENCIAS

ARNON, ILANA ET AL. APOS theory: **A framework for research and curriculum development in mathematics education**. New York: Springer-Verlag, 2014.

ASIALA, MARK ET AL. A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In: Schoenfeld, Alan; Kaput, Jim; Dubinsky, Ed (Coords.). **Research in collegiate mathematics education II, CBMS issues in mathematics education**. American Mathematical Society: MAA NOTES, 1997, p. 37-54.

BAKER, BERNADETTE; COOLEY, LAUREL; TRIGUEROS, MARÍA. A Calculus Graphing Schema. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 31, n. 5, p. 557-578, nov. 2000.

DAWKINS, PAUL; EPPERSON, JAMES. The development and nature of problem-solving among first-semester calculus students. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 45, n. 6, p. 839-862, feb. 2014.

DUBINSKY, ED. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: Tall, David (Coord.). **Advanced Mathematical Thinking**. Netherlands: Springer, 1991, p. 95-123.

DUVAL, RAYMOND. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational studies in mathematics**, v. 61, n. 1, p. 103-131, feb. 2006.

FUENTEALBA, CLAUDIO; SÁNCHEZ-MATAMOROS, GLORIA; BADILLO, EDELMIRA; TRIGUEROS, MARÍA. Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 48, n. 3, p. 374-392, jul. 2017.

PIAGET, JEAN; GARCÍA, ROLANDO. **Psicogénesis e historia de la ciencia**. México, España, Argentina, Colombia: Siglo veintiuno editores, S.A, 1983.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, GLORIA; GARCÍA, MERCEDES; LLINARES, SALVADOR. El desarrollo del esquema de derivada. **Enseñanza de las ciencias**, v. 24, n. 1, p. 85-98, mar. 2006.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, Gloria; GARCÍA, Mercedes; LLINARES, Salvador. La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa**, v. 11, n. 2, p. 267-296, jun. 2008.

TRIGUEROS, MARÍA; ESCANDÓN, COVADONGA. Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación: un análisis a través de la estadística implicativa. **Revista mexicana de investigación educativa**, v. 13, n. 36, p. 59-85, mar. 2008.

TRIGUEROS, María. La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. **Educación Matemática**, v. 17, n. 1, p. 5-31, abr. 2005.

## OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE PARA A MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES MATEMÁTICAS

### Márcio Aurélio da Silva

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade  
de Engenharia Mecânica  
Uberlândia – MG

### Fran Sérgio Lobato

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade  
de Engenharia Química  
Uberlândia – MG

### Aldemir Ap Cavalini Jr

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade  
de Engenharia Mecânica  
Uberlândia – MG

### Valder Steffen Jr

Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade  
de Engenharia Mecânica  
Uberlândia – MG

**RESUMO:** Nos últimos anos, inúmeros pesquisadores têm se dedicado ao desenvolvimento de estratégias para o tratamento de problemas que apresentam incertezas no modelo matemático, no vetor de variáveis e/ou no vetor de parâmetros. A presente contribuição tem por objetivo o desenvolvimento de uma estratégia para o tratamento de incertezas no vetor de variáveis de busca em problemas de otimização. A metodologia proposta consiste na associação do algoritmo de Evolução Diferencial (ferramenta para a otimização) com a técnica denominada

de Análise de Confiabilidade Inversa (ferramenta para o tratamento de incertezas). Os resultados obtidos com a aplicação em funções matemáticas demonstram que a metodologia proposta configura-se como uma alternativa interessante em relação às técnicas tradicionais que são empregadas para essa finalidade. Todavia, cabe ressaltar que, devido a natureza do algoritmo de otimização utilizado, o número de avaliações da função objetivo é bastante superior ao utilizado por estratégias clássicas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Otimização Baseada em Confiabilidade, Evolução Diferencial, Análise de Confiabilidade Inversa, Funções Matemáticas.

**ABSTRACT:** In the last years, various researchers have been dedicating their efforts on the development of new strategies to deal with problems that present uncertainty in the mathematical model, in the vector of variables, and/or in the vector of parameters. In this context, the present contribution aims at developing a strategy for the treatment of uncertainties in the vector of variables associated with optimization problems. The proposed methodology associates the Differential Evolution algorithm (a tool for optimization) and the Inverse Reliability Analysis approach (a tool for the treatment of uncertainties). The results obtained using mathematical functions demonstrate that the

proposed methodology is an interesting alternative strategy as compared with traditional techniques. However, due to the nature of the optimization algorithm used, the number of objective function evaluations is greater than the one required by classic strategies. **KEYWORDS:** Reliability-Based Optimization, Differential Evolution, Inverse Reliability Analysis, Mathematical Functions.

## 1 | INTRODUÇÃO

Tradicionalmente, durante o processo de otimização considera-se que o valor da função objetivo não é influenciado por incertezas presentes, seja na modelagem do problema de interesse, no vetor de variáveis de busca e/ou no vetor de parâmetros, caracterizando a otimização determinística ou nominal (DEB et al., 2009). Todavia, na prática, a implementação do resultado oriundo da otimização determinística pode ser sensível a pequenas perturbações, o que pode implicar em desvios significativos no valor da função objetivo obtida, comprometendo o desempenho do sistema. Um exemplo prático dessa influência pode ser observado na manufatura de componentes de máquinas. Neste caso, apesar da precisão associada a este procedimento, os erros de produção são inerentes ao próprio processo, e estes podem influenciar o desempenho do projeto como um todo.

Para a avaliação da influência de incertezas durante o processo de otimização, dois tipos de abordagens têm sido empregados, a saber, a otimização robusta e a otimização baseada em confiabilidade. Na otimização robusta objetiva-se determinar uma solução que seja pouco sensível a pequenas perturbações do vetor de variáveis de busca a partir da geração de amostras na vizinhança da mesma (TAGUCHI, 1984). Já a otimização baseada em confiabilidade consiste na obtenção de uma solução que, sob determinadas condições (avaliação do coeficiente de confiabilidade), não viole uma ou mais restrições probabilísticas (CARTER, 1997). Embora estas duas abordagens tenham a mesma finalidade, isto é, quantificar incertezas, são estratégias conceitualmente distintas (LOBATO et al., 2017). Por outro lado, ambas possuem uma mesma desvantagem, a saber, requerem um número maior de avaliações da função objetivo em relação ao necessário na solução determinística. Assim, obter uma solução considerando incertezas implica em realizar um número maior de avaliações da função objetivo (LOBATO et al., 2017).

Diante do que foi apresentado acima, esta contribuição tem por objetivo propor uma metodologia para a solução de problemas de otimização considerando incertezas no vetor de variáveis de busca. A metodologia proposta consiste na associação do algoritmo de Evolução Diferencial (ED) (STORN e PRICE, 1997) com a técnica denominada como Análise de Confiabilidade Inversa (IRA - *Inverse Reliability Analysis*) (DU, 2005).

Neste contexto, este trabalho está estruturado como segue. A seção 2 apresenta aspectos relacionados com a otimização baseada em confiabilidade. Já nas seções

3 e 4 são apresentados, brevemente, os conceitos do algoritmo ED e a descrição da metodologia para a inserção de confiabilidade, respectivamente. Os resultados obtidos com a aplicação da metodologia proposta em funções matemáticas são apresentados na seção 5. Finalmente, as conclusões são mostradas na última seção deste trabalho.

## 2 | OTIMIZAÇÃO BASEADA EM CONFIABILIDADE

Como observado na Figura 1, a solução de um problema de otimização determinístico é obtida pela ativação de uma ou mais restrições (equação de estado limite). Neste caso, qualquer perturbação no vetor solução ( $x_1$  e  $x_2$ ) pode resultar em uma solução inviável e com uma distribuição de probabilidade em torno da solução ótima.

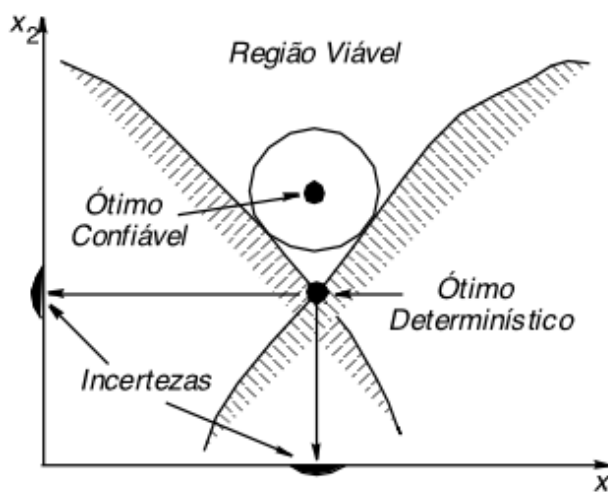


Figura 1 – Conceito de otimização baseada em confiabilidade.

Conforme destacado por Deb et al. (2009), obter uma solução confiável, isto é, associada a uma dada probabilidade, implica na penalização da solução determinística. Neste caso, observa-se que uma solução confiável deverá apresentar um valor pior em termos da função objetivo do que aquele considerando na solução determinística. Conceitualmente, este problema pode ser definido da seguinte forma (LOBATO et al., 2017): a partir de uma dada medida de confiabilidade  $R$ , objetiva-se encontrar uma solução viável que garanta que a probabilidade de encontrar uma solução inviável seja dada por  $1-R$ . Matematicamente, este problema pode ser formulado como:

$$\min f(x_d, x_r) \quad (1)$$

$$P(G_j(x_d, x_r) \leq 0) \geq R_j, \quad j = 1, \dots, n_g \quad (2)$$

$$x_{di}^l \leq x_d \leq x_{di}^u, \quad i = 1, \dots, n_d, \quad x_{rk}, \quad k = 1, \dots, n_r \quad (3)$$

em que  $f$  e  $G_j$  representam a função objetivo e as restrições, respectivamente,

$x_d$  é o vetor de variáveis de busca (valores determinísticos associados aos limites superiores  $x_{di}^l$  e inferiores  $x_{di}^u$ ),  $x_r$  é o vetor de variáveis aleatórias,  $n_g$  é o número de restrições probabilísticas,  $n_d$  é o número de variáveis de busca,  $n_r$  é o número de variáveis aleatórias e  $R_j$  é a confiabilidade desejada.  $P$  é a probabilidade de  $G_j$  ser menor ou igual a zero ( $G_j=0$  indica falha).

A probabilidade de falha pode ser definida por uma função de distribuição cumulativa, isto é:

$$P(G_j(x_d, x_r) \leq 0) = \int \dots \int_{G_j \leq 0} f_x(x_r) dx_r \quad (4)$$

em que  $f_x$  é uma função de densidade de probabilidade conjunta.

A integral dada pela Equação 4 deve ser avaliada ao longo do espaço de busca definido pelas restrições de desigualdade para determinar a probabilidade de falha  $P$ . A avaliação analítica (ou numérica) desta integral é uma tarefa complexa devido ao domínio considerado. Para superar esta dificuldade, o problema original, definido em termos das variáveis aleatórias  $x_r$ , pode ser reescrito em termos de um novo conjunto de variáveis aleatórias  $u$  usando a transformação de Rosenblatt (1952). Nesta abordagem, considerando o novo espaço de busca em termos do vetor  $u$ , o ponto mais provável para a falha é encontrado localizando a distância mínima entre a origem e a equação de estado limite, que é definida em termos do coeficiente de confiabilidade  $\beta$ . Assim, a restrição probabilística pode ser expressa através de uma transformação inversa, dada pela Equação 5.

$$P(G_j(x_d, x_r, x_p) \leq 0) = \Phi(\beta) \quad (5)$$

em que  $\Phi$  é a função de distribuição normal padrão. Esta transformação é utilizada para medir a confiabilidade associada e evitar a avaliação analítica ou numérica da integral apresentada na Equação 4.

Dentre as técnicas empregadas para a avaliação das restrições probabilísticas (Equação 5) pode-se citar os tradicionais métodos de Monte Carlo, o FORM (*First-Order Reliability Method*) e o SORM (*Second-Order Reliability Method*). O Método de Monte Carlo, também conhecido como simulação estocástica, pode ser definido como uma abordagem empregada para representar a solução de um problema a partir da caracterização de uma população hipotética, gerada a partir de observações considerando algum tipo de distribuição de probabilidade (GENTLE, 2002). O método FORM consiste de uma aproximação analítica (linear) para a restrição de desigualdade na qual o índice de confiabilidade é interpretado como a distância mínima entre a origem

e a equação de estado limite normal padronizada em termos da variável  $u$  (HASOFER e LIND, 1974; SHINOZUKA, 1983). Já o método SORM foi proposto como uma tentativa de melhorar a precisão do FORM. O SORM consiste de uma aproximação quadrática para a equação de estado limite no espaço  $u$  (FIESSLER et al., 1979). Para essa finalidade, o resultado obtido com o FORM é atualizado considerando informações oriundas do cálculo da matriz de derivadas segundas (matriz Hessiana).

Diferentemente das estratégias apresentadas, a próxima seção trata da metodologia empregada para o tratamento de incertezas. Esta se fundamenta na formulação e resolução de um problema inverso.

## 2.1 Análise de Confiabilidade Inversa

Para a avaliação do vetor de restrições probabilísticas (Equação 5) será considerada a técnica proposta por Du (2005) e denominada como IRA. Esta abordagem consiste na formulação e resolução de um problema inverso para a análise de confiabilidade, isto é, a partir da definição da confiabilidade  $R$  ou do coeficiente de confiabilidade  $\beta$ , obtêm-se o ponto mais provável para a falha. De posse deste ponto, a restrição probabilística pode ser avaliada e o efeito prático da presença de incertezas pode ser contabilizado.

Para aplicar esta abordagem, o vetor de variáveis aleatórias  $x_r$  é reescrito em termos do vetor  $u$ , conforme a justificativa apresentada anteriormente. Em linhas gerais, o procedimento para a determinação do ponto mais provável de falha  $u$  é descrito como segue (DU, 2005):

- Passo 1: Inicialmente, define-se os parâmetros de entrada do IRA, isto é, uma estimativa inicial para o vetor  $u$  ( $u^0=0$  foi o valor considerado neste trabalho), o valor do índice de confiabilidade  $\beta$  desejado e o tipo de distribuição considerado para cada uma das variáveis (ou parâmetros) que apresentam incerteza;
- Passo 2: Avalia-se, em cada iteração, o gradiente das restrições para a atualização do parâmetro  $a^k$ , conforme a seguinte relação:

$$a^k = \frac{\nabla G_j(u^k)}{\|\nabla G_j(u^k)\|} \quad (6)$$

- Passo 3: Atualiza-se o vetor  $u$  conforme a relação  $u^{k+1} = -\beta a^k$ , bem como o contador para o número de iterações  $k=k+1$ ;
- Passo 4: Repete-se este procedimento (Passos 2 e 3) até que um determinado critério de parada seja satisfeito. Neste caso, definiu-se como critério de parada a norma Euclidiana em relação ao vetor  $u$  calculada em duas iterações consecutivas ser menor do que  $10^{-5}$ .

Como pode ser observado neste procedimento, faz-se necessária a definição do valor do índice de confiabilidade  $\beta$  desejado, o que caracteriza o problema inverso diferentemente dos métodos FORM e SORM, onde este índice é um parâmetro de



saída destes algoritmos.

### 3 | ALGORITMO DE EVOLUÇÃO DIFERENCIAL

Para resolver o problema de otimização formulado anteriormente, será considerado o algoritmo ED (STORN e PRICE, 1997). Esta abordagem heurística consiste da geração de uma população de candidatos para a resolução de problemas de otimização, em que são empregadas operações vetoriais para essa finalidade. Em linhas gerais, a partir da geração de uma população com  $NP$  candidatos, seleciona-se dois destes (candidatos distintos) para a realização de uma subtração vetorial. Esta subtração é ponderada por uma constante  $F$  (denominada de taxa de perturbação). A esta operação é adicionada a um outro indivíduo (distinto dos outros dois) de modo que este seja perturbado. O indivíduo gerado via este procedimento é avaliado de acordo com a função objetivo considerada, sendo que este pode ou não substituir um indivíduo da população corrente. Para essa finalidade, a partir da comparação de uma probabilidade de cruzamento  $CR$  definida pelo usuário, com um número aleatório entre 0 e 1, avalia-se se este novo candidato poderá substituir ou não um outro na geração corrente. Este teste tem por objetivo permitir que um indivíduo que não tenha um bom valor em termos da função objetivo, sobreviva, pelo menos para a próxima geração, de modo a promover a diversidade da população. O procedimento apresentado é repetido até que uma nova população seja gerada e até o número máximo de gerações ser alcançado (critério de parada *default* do algoritmo de ED).

Storn e Price (1997) propuseram inicializar o algoritmo de ED considerando  $NP$  como sendo um valor entre 5 e 10 vezes a dimensão do problema em análise,  $F$  definido no intervalo 0,4 e 1, sendo 0,5 uma boa estimativa para esse parâmetro. Esses autores também recomendam uma probabilidade de cruzamento da ordem de 0,8. Já a geração de candidatos em potencial pode ser realizada considerando diferentes esquemas de mutação, dentre os quais pode-se citar os seguintes (STORN e PRICE, 1997).

$$rand / 1 \rightarrow x = x_{\alpha_1} + F(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_3}) \quad (7)$$

$$rand / 2 \rightarrow x = x_{\alpha_1} + F(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_3} + x_{\alpha_4} - x_{\alpha_5}) \quad (8)$$

$$best / 1 \rightarrow x = x_{best} + F(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_3}) \quad (9)$$

$$best / 2 \rightarrow x = x_{best} + F(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_3} + x_{\alpha_4} - x_{\alpha_5}) \quad (10)$$

$$rand / best / 2 \rightarrow x = x_{r_1} + F(x_{best} - x_{r_1}) + F(x_{r_1} - x_{r_2} + x_{r_3} - x_{r_4}) \quad (11)$$

em que  $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, x_{\alpha_4}$  e  $x_{\alpha_5}$  são indivíduos aleatoriamente escolhidos na população corrente e  $x_{best}$  é a melhor solução encontrada na geração corrente.

## 4 | METODOLOGIA

A metodologia proposta neste trabalho e denominada como ED+IRA é baseada em um processo de iteração de laço duplo. No laço externo, o algoritmo de ED é aplicado para determinar o valor das variáveis de busca que não apresentam qualquer tipo de incerteza a elas associada. No laço interno, o procedimento IRA é executado para encontrar o vetor  $u$  para cada uma das variáveis que apresentam incerteza, de modo que todos os candidatos gerados pelo algoritmo de ED possam ser avaliados de acordo com a função objetivo e as restrições (determinísticas e probabilísticas).

Em linhas gerais, o procedimento adotado neste trabalho pode ser resumido como segue: *i)* Definir os parâmetros de entrada, ou seja, a função objetivo, restrições, número de variáveis de busca (variáveis determinísticas no algoritmo de ED), índice de confiabilidade, tipo de distribuição e os parâmetros do algoritmo de ED - tamanho da população, número de gerações, taxa de perturbação, probabilidade de cruzamento e a estratégia para a geração de candidatos; *ii)* Laço externo: a população de candidatos é gerada usando o algoritmo de ED onde apenas o vetor de variáveis determinísticas  $x_d$  é gerado; *iii)* Laço interno: para cada candidato gerado pelo algoritmo de ED, o IRA é aplicado para determinar o valor de cada restrição de desigualdade através do cálculo do vetor de variáveis aleatórias  $u$  e, conseqüentemente,  $x_r$ ; *iv)* Atualizar os valores de  $x_d$  e  $x_r$  para avaliar a função objetivo e as restrições, o que é realizado utilizando o Método da Função Penalidade; *v)* Repetir o processo iterativo até que a convergência seja alcançada.

## 5 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na presente seção, a metodologia proposta será empregada para a resolução de três estudos de caso. Para essa finalidade foram considerados os seguintes parâmetros:

- Algoritmo de ED: 10 indivíduos, 100 gerações, taxa de perturbação e probabilidade de cruzamento iguais a 0,8, estratégia DE/rand/1/bin para a geração de candidatos potenciais (STORN e PRICE, 1997) e número máximo de gerações como critério de parada;
- Considera-se  $u=0$  na primeira iteração do IRA;
- Norma Euclidiana menor que  $10^{-5}$  como critério de parada do IRA;
- As derivadas de  $G_j$  foram obtidas analiticamente;
- Todos os estudos de caso foram executados 10 vezes considerando diferentes sementes para a inicialização do gerador de números aleatórios no algoritmo de ED, de modo que sejam apresentados os valores médios, bem com os desvios padrão associados.

## 5.1 Estado Limite Não-Linear

O primeiro estudo de caso foi proposto e resolvido por Aoues e Chateauneuf (2009) e consiste da otimização da seguinte função matemática:

$$\min_{x_d} x_{d1}^2 + x_{d2}^2 \quad (12)$$

$$P(x_{d1}x_{d2}x_{r2} - \ln(x_{r1}) \leq 0) \geq R \quad (13)$$

$$0 \leq x_{di} \leq 15, \quad i = 1,2 \quad (14)$$

Este problema contém duas variáveis de busca ( $x_{d1}$  e  $x_{d2}$ ) e duas variáveis aleatórias ( $x_{r1}$  e  $x_{r2}$ ), que são normalmente distribuídas com médias iguais a 5 e 3, respectivamente. Os coeficientes de variação são iguais a 0,3 para ambas as variáveis. A confiabilidade  $R$  é igual a 98,9830% ( $\beta=2,32$ ).

Aoues e Chateauneuf (2009) analisaram este problema considerando o par  $(x_{d1}; x_{d2})=(12;12)$  como estimativa inicial e as seguintes abordagens: *Reliability Index Approach* (RIA) ( $f=63,88$  e 466 avaliações da função objetivo), *Performance Measure Approach* (PMA) ( $f=63,88$  e 220 avaliações da função objetivo), *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) ( $f=63,88$  e 211 avaliações da função objetivo), *Single Loop Approach* (SLA) ( $f=63,88$  e 42 avaliações da função objetivo), *Sequential Optimization and Reliability Assessment* (SORA) ( $f=63,88$  e 200 avaliações da função objetivo), e *Sequential Approximate Programming* (SAP) ( $f=63,88$  e 48 avaliações da função objetivo).

Na Tabela 1 são apresentados os resultados obtidos pela metodologia agora proposta considerando diferentes valores para o coeficiente de confiabilidade  $\beta$ .

$R\%$ ( $\beta$ )	$f$ (Equação 12)	$x_{d1}$	$x_{d2}$	$n_{eval}^{(1)}$
97,7250 (2)	36,6543 <sup>(1)</sup> /1,1×10 <sup>-4(2)</sup>	4,2811 <sup>(1)</sup> /4,5×10 <sup>-4(2)</sup>	4,2809 <sup>(1)</sup> /1,23×10 <sup>-4(2)</sup>	12116
98,9830 (2,32)	63,0955/1,2×10 <sup>-4</sup>	5,6206/3,4×10 <sup>-4</sup>	5,6128/2,6×10 <sup>-4</sup>	12198
99,3791 (2,5)	92,8246/1,2×10 <sup>-4</sup>	6,8105/2,6×10 <sup>-4</sup>	6,8147/2,7×10 <sup>-4</sup>	12202
99,5339 (2,6)	119,4582/1,9×10 <sup>-4</sup>	7,7284/1,8×10 <sup>-4</sup>	7,7284/1,7×10 <sup>-4</sup>	12202
99,6534 (2,7)	159,5449/1,9×10 <sup>-4</sup>	8,9330/2,6×10 <sup>-4</sup>	8,9300/2,2×10 <sup>-4</sup>	12314
99,7445 (2,8)	224,0137/2,2×10 <sup>-4</sup>	10,5810/1,5×10 <sup>-4</sup>	10,5805/2,2×10 <sup>-4</sup>	12248
99,8135 (2,9)	337,7114/2,3×10 <sup>-4</sup>	12,9901/1,5×10 <sup>-4</sup>	12,9987/1,1×10 <sup>-4</sup>	12770

Tabela 1: Resultados obtidos considerando a metodologia proposta e diferentes índices de confiabilidade para o problema do Estado Limite Não-Linear.

<sup>(1)</sup>Média e <sup>(2)</sup>Desvio Padrão.

Na Tabela 1 observa-se que, para um índice de confiabilidade igual a 2,32, o resultado obtido pelo ED+IRA é coerente com o obtido na literatura, com uma pequena redução (aproximadamente 1,3%) em relação ao valor da função objetivo dado por Aoues e Chateauneuf (2009). Além disso, também se observa que, todas as

execuções do algoritmo de ED convergiram para a mesma solução, visto o valor do desvio padrão encontrado. Em relação ao número de avaliações da função objetivo ( $n_{eval}$ ), observa-se que a metodologia proposta requer mais avaliações. Isto se deve a natureza do método de otimização considerado, o qual trabalha com uma população de candidatos, implicando em um maior  $n_{eval}$  do que requerido pelos métodos (clássicos) considerados por Aoues e Chateauneuf (2009). Finalmente, como esperado, o aumento no valor do parâmetro  $\beta$  faz com que o valor da função objetivo seja deteriorado, isto é, quanto maior a confiabilidade, pior será o valor da função objetivo. Do ponto de vista matemático isto implica no aumento da distância entre a solução obtida e a respectiva restrição de desigualdade.

## 5.2 Estado Limite Altamente Não-Linear

Este problema consiste em uma pequena modificação na restrição de desigualdade considerada no estudo de caso anterior. Matematicamente, este problema consiste da otimização da seguinte função matemática (AOUES e CHATEAUNEUF, 2009):

$$\min_{x_d} x_{d1}^2 + x_{d2}^2 \quad (15)$$

$$P(0,2x_{d1}x_{d2}x_{r2}^2 - x_{r1} \leq 0) \geq R \quad (16)$$

$$0 \leq x_{di} \leq 15, \quad i = 1,2 \quad (17)$$

O número de variáveis de busca, de variáveis aleatórias ( $x_{r1}$  e  $x_{r2}$ ), do tipo de distribuição (normal), bem como os valores das médias, dos coeficientes de variação e do índice de confiabilidade são os mesmos apresentados para o estudo de caso anterior. Aoues e Chateauneuf (2009) também empregaram as mesmas técnicas descritas para resolver este estudo de caso. Para essa finalidade, estes autores consideraram o par  $(x_{d1}; x_{d2}) = (12; 12)$  como estimativa inicial e as seguintes abordagens: *Reliability Index Approach* (RIA) (não convergiu), *Performance Measure Approach* (PMA) ( $f=3,67$  e 210 avaliações da função objetivo), *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) (não convergiu), *Single Loop Approach* (SLA) ( $f=3,67$  e 60 avaliações da função objetivo), *Sequential Optimization and Reliability Assessment* (SORA) ( $f=3,67$  e 136 avaliações da função objetivo), e *Sequential Approximate Programming* (SAP) (não convergiu).

Na Tabela 2 são apresentados os resultados obtidos pela metodologia agora proposta considerando diferentes valores para o coeficiente de confiabilidade  $\beta$ . Nesta tabela observa-se que a metodologia proposta foi capaz de encontrar um valor menor para  $f$  em relação às outras abordagens considerando  $\beta$  igual a 2,32 (uma melhora de cerca de, aproximadamente, 0,45%). Além disso, em todas as execuções do algoritmo proposto, a metodologia sempre convergiu para a mesma solução (visto o valor do desvio padrão), diferentemente de algumas abordagens consideradas por

Aoues e Chateauneuf (2009), que não convergiram. Como observado, o aumento do parâmetro  $\beta$  implica na deterioração do valor da função objetivo. Este resultado era esperado, já que uma solução mais confiável significa que a restrição, em relação a um determinado valor de  $\beta$ , não corre o risco de ser violada. Finalmente, em termos do parâmetro  $n_{eval}$ , observa-se que a metodologia proposta requer mais avaliações do que aquelas reportadas por Aoues e Chateauneuf (2009) considerando métodos clássicos de solução.

$R\%$ ( $\beta$ )	$f$ (Equação 15)	$x_{d1}$	$x_{d2}$	$n_{eval}^{(1)}$
97,7250 (2)	2,7869 <sup>(1)</sup> /1,4×10 <sup>-4(2)</sup>	1,1805 <sup>(1)</sup> /2,4×10 <sup>-4(2)</sup>	1,1804 <sup>(1)</sup> /1,7×10 <sup>-4(2)</sup>	13340
98,9830 (2,32)	3,6532/1,3×10 <sup>-4</sup>	1,3512/4,7×10 <sup>-4</sup>	1,3518/2,3×10 <sup>-4</sup>	13052
99,3791 (2,5)	4,4275/1,4×10 <sup>-4</sup>	1,4860/2,7×10 <sup>-4</sup>	1,4897/1,3×10 <sup>-4</sup>	11814
99,5339 (2,6)	5,0196/1,7×10 <sup>-4</sup>	1,5844/1,3×10 <sup>-4</sup>	1,5840/2,8×10 <sup>-4</sup>	11834
99,6534 (2,7)	5,7969/1,5×10 <sup>-4</sup>	1,7025/3,5×10 <sup>-4</sup>	1,7024/1,1×10 <sup>-4</sup>	11840
99,7445 (2,8)	6,8634/1,4×10 <sup>-4</sup>	1,8491/2,4×10 <sup>-4</sup>	1,8558/1,3×10 <sup>-4</sup>	11564
99,8135 (2,9)	8,4207/1,3×10 <sup>-4</sup>	2,0726/1,3×10 <sup>-4</sup>	2,0310/1,4×10 <sup>-4</sup>	11732

Tabela 2: Resultados obtidos considerando a metodologia proposta e diferentes índices de confiabilidade para o para o problema do Estado Limite Altamente Não-Linear.

<sup>(1)</sup>Média e <sup>(2)</sup>Desvio Padrão.

### 5.3 Problema com Múltiplas Restrições

O último exemplo consiste em um problema de otimização com três restrições probabilísticas. Matematicamente, este problema pode ser descrito como (AOUES e CHATEAUNEUF, 2009):

$$\min_{x_d} x_{d1} + x_{d2} \quad (18)$$

$$G_1 \equiv P(x_{r1}^2, x_{r2}/20 - 1 \leq 0) \leq R \quad (19)$$

$$G_2 \equiv P\left(\left(x_{r1} + x_{r2} - 5\right)^2/30 + \left(x_{r1} - x_{r2} - 12\right)^2/120 - 1 \leq 0\right) \leq R \quad (20)$$

$$G_3 \equiv P\left(80/(x_{r1}^2 + 8x_{r2} + 5) - 1 \leq 0\right) \leq R \quad (21)$$

em que  $x_{d1}$  e  $x_{d2}$  representam as médias das variáveis  $x_{r1}$  e  $x_{r2}$ , respectivamente. As variáveis apresentam coeficientes de variação iguais a 0,3 e distribuição normal.

Aoues e Chateauneuf (2009) resolveram este problema considerando diferentes valores para  $\beta$  (2, 3 e 4) e condição inicial dada por  $(x_{d1}; x_{d2})=(5;5)$ . Os autores obtiveram os seguintes resultados para  $\beta=2$ : *Reliability Index Approach* (RIA) ( $f=6,1923$  e 560 avaliações da função objetivo), *Performance Measure Approach* (PMA) ( $f=6,1923$  e 612 avaliações da função objetivo), *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) ( $f=6,1923$  e 756 avaliações da função objetivo), *Single Loop Approach* (SLA) ( $f=6,1920$  e 144 avaliações da função objetivo), *Sequential Optimization and Reliability Assessment* (SORA) ( $f=6,1923$  e

348 avaliações da função objetivo), e *Sequential Approximate Programming* (SAP) ( $f=6,1926$  e 240 avaliações da função objetivo).

A Tabela 3 apresentada os resultados obtidos pela metodologia proposta considerando diferentes valores para o coeficiente de confiabilidade  $\beta$ .

$R\%$ ( $\beta$ )	$f$ (Equação 18)	$x_{d1}$	$x_{d2}$	$n_{eval}^{(1)}$
84,1344 (1)	5,6737 <sup>(1)</sup> /1,7×10 <sup>-5</sup> <sup>(2)</sup>	3,1835 <sup>(1)</sup> /2,1×10 <sup>-5</sup> <sup>(2)</sup>	2,4902 <sup>(1)</sup> /2,9×10 <sup>-5</sup> <sup>(2)</sup>	15234
93,3193 (1,5)	5,9308/1,2×10 <sup>-5</sup>	3,2347/1,1×10 <sup>-5</sup>	2,6962/2,7×10 <sup>-5</sup>	15076
97,7250 (2)	6,1924/4,2×10 <sup>-5</sup>	3,2950/1,3×10 <sup>-5</sup>	2,8972/2,7×10 <sup>-5</sup>	14564
99,3791 (2,5)	6,4576/2,2×10 <sup>-5</sup>	3,3634/2,6×10 <sup>-5</sup>	3,0942/1,3×10 <sup>-5</sup>	13987
99,8651 (3)	6,7257/2,1×10 <sup>-5</sup>	3,4391/4,7×10 <sup>-5</sup>	3,2866/1,4×10 <sup>-5</sup>	14949
99,9768 (3,5)	6,9962/3,3×10 <sup>-5</sup>	3,5213/5,1×10 <sup>-5</sup>	3,4750/4,1×10 <sup>-5</sup>	14454
99,9969 (4)	7,2683/1,8×10 <sup>-5</sup>	3,6090/3,2×10 <sup>-5</sup>	3,6594/6,1×10 <sup>-5</sup>	15034
99,9997 (4,5)	7,5418/1,2×10 <sup>-5</sup>	3,7018/4,3×10 <sup>-5</sup>	3,8399/3,2×10 <sup>-5</sup>	15374
99,9999 (5)	7,8162/2,4×10 <sup>-5</sup>	3,7991/2,1×10 <sup>-5</sup>	4,0171/2,3×10 <sup>-5</sup>	14348

Tabela 3: Resultados obtidos considerando a metodologia proposta e diferentes índices de confiabilidade para o problema com múltiplas restrições.

<sup>(1)</sup>Média e <sup>(2)</sup>Desvio Padrão.

Assim como nos estudos de caso anteriores, é possível observar que a metodologia proposta foi capaz de encontrar uma solução melhor (em termos de média e desvio padrão) que as obtidas pelas outras abordagens considerando  $\beta$  igual a 2. Além disso, o aumento do parâmetro  $\beta$  implica na deterioração do valor da função objetivo. Note que o valor de  $n_{eval}$  requerido pelo IRA+ED é maior do que o requerido considerando os métodos clássicos (AOUES e CHATEAUNEUF, 2009). É importante ressaltar que os valores obtidos pela metodologia proposta são coerentes com os reportados por Aoues e Chateauneuf (2009) para valores de  $\beta$  iguais a 3 e 4.

## 6 | CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo a apresentação de uma estratégia para o tratamento de problemas de otimização que apresentam incerteza no vetor de variáveis de busca. De forma geral, a metodologia proposta consiste da associação do algoritmo de ED com a técnica IRA. A partir dos resultados apresentados nas Tabelas 1 a 3 é possível concluir que a metodologia proposta foi capaz de encontrar resultados que estão em concordância com aqueles obtidos considerando outras estratégias. Em termos do número de avaliações da função objetivo, observa-se um aumento significativo no valor deste parâmetro quando comparado com outras abordagens (clássicas). Esse resultado era mesmo esperado devido à natureza da técnica de otimização considerada; isto é, foi usada uma técnica heurística baseada em população, levando naturalmente ao aumento do número de avaliações da função objetivo.



Cabe ressaltar que, para a aplicação da metodologia proposta, a mesma requer como parâmetro de entrada o valor do índice de confiabilidade, diferentemente dos métodos FORM e SORM, onde este índice é um parâmetro de saída nestes algoritmos. Neste caso, como alternativa, pode-se formular um problema multi-objetivo em que o objetivo adicional será a maximização do índice de confiabilidade. Assim, ao invés de se definir esse parâmetro, o algoritmo multi-objetivo encontrará uma faixa de valores para o mesmo de forma que, a partir de uma análise de pós-processamento, o usuário poderá escolher o melhor compromisso entre o valor da função objetivo e o índice de confiabilidade.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq (574001/2008-5, 304546/2018-8, and 431337/2018-7), a FAPEMIG (TEC-APQ-3076-09, TEC-APQ-02284-15, TEC-APQ-00464-16, and PPM-00187-18) e a CAPES pelo suporte financeiro. O terceiro autor agradece o suporte financeiro através da FAPEMIG e do CNPq (INCT-EIE).

## REFERÊNCIAS

AOUES, Y., CHATEAUNEUF, A. **Benchmark study of numerical methods for reliability-based design**. Structural and Multidisciplinary Optimization, v. 41, p. 277-294, 2009.

CARTER, A.D.S. Mechanical Reliability and Design, New York, Wiley, 1997.

DEB, K., PADMANABHAN, D., GUPTA, S., MALL, A.K. **Handling uncertainties through reliability-based optimization using evolutionary algorithms**. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, v. 13, n. 5, p. 1054-1074, 2009.

DU, X. **Probabilistic Engineering Design - First Order and Second Reliability Methods**. University of Missouri-Rolla, 2005.

FISSLER, B., NEUMANN, H.-J., RACKWITZ, R. **Quadratic limit states in structural reliability**. J Engrg Mech, ASCE, v. 105, n. 4, p. 661-676, 1979.

GENTLE, J. **Elements of Computational Statistics**. Springer-Verlag, New York, 420 páginas, 2002.

HASOFER, A.M., LIND, N.C. **Exact and invariant second-moment code format**. J Engrg Mech Division, ASCE, v.100, n. 1, p. 111-121, 1974.

LOBATO, F.S., GONÇALVES, M.S., JAHN, B., CAVALINI JR, A.AP., STEFFEN JR, V. **Reliability-based optimization using differential evolution and inverse reliability analysis for engineering system design**. Journal of Optimization Theory and Applications, v. 174, n. 3, p. 894-926, 2017.

ROSENBLATT, M. **Remarks on a multivariate transformation**. The Annals of Mathematical Statistics, v. 23, p. 470-472, 1952.

SHINOZUKA, M. **Basic analysis of structural safety**. J of Struct Engrg, ASCE, v. 109, n. 3, p. 721-740, 1983.



STORN, R., PRICE, K. **Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces**. Journal of Global Optimization, v. 11, p. 341-359, 1997.

TAGUCHI, G. **Quality engineering through design optimization**. Kraus International Publications. New York, 1984.

## SEQUÊNCIAS: INTERVALARES E FUZZY

### **Gino Gustavo Maqui Huamán**

Instituto de Ciências Exatas e Naturais,  
Universidade Federal do Pará  
Belém, Pará

### **Ulcilea Alves Severino Leal**

Universidade Federal do Triângulo Mineiro  
Iturama, Minas Gerais

### **Geraldo Nunes Silva**

Departamento de Matemática Aplicada,  
Universidade Estadual Paulista  
São José do Rio Preto, São Paulo

fuzzy mathematics, aiming to show applications and implications of interval arithmetic in the fuzzy context. In this way, we will present interval sequences, convergence and their properties, and later, extended in the fuzzy context. In addition, the influence of interval arithmetic on the Zadeh extension principle will be exemplified. Finally, the sequences of fuzzy numbers will be studied.

**KEYWORDS:** Interval Arithmetic, Zadeh's Extension Principle, Fuzzy Sequences.

**RESUMO:** Este trabalho apresenta um dos conceitos elementares da análise intervalar e da matemática fuzzy, objetivando-se mostrar aplicações e implicações das aritméticas intervalares no contexto fuzzy. Neste sentido, será apresentado sequências intervalares, convergência e suas propriedades, e posteriormente, estendidas no contexto fuzzy. Além disso, será exemplificado a influência das aritméticas intervalares no princípio de extensão de Zadeh. Finalmente, serão estudadas as sequências de números fuzzy.

**PALAVRAS-CHAVE:** Aritmética Intervalar, Princípio de Extensão de Zadeh, Sequências Fuzzy.

**ABSTRACT:** This paper presents one of the elementary concepts of interval analysis and

### 1 | INTRODUÇÃO

A análise intervalar e a teoria dos conjuntos fuzzy são disciplinas matemáticas relativamente novas, difundidas e criadas por R. E. Moore e L. A. Zadeh, respectivamente. Moore com seu livro em análise intervalar (MOORE, 1966) em 1966 e Zadeh com seu original e influente artigo sobre teoria de conjuntos fuzzy (ZADEH, 1965) em 1965, estes trabalhos, com o passar do tempo, mostraram uma conexão entre estas áreas na matemática das incertezas. R.E. Moore junto com seus colaboradores aportaram ao desenvolvimento da análise no contexto intervalar, começando com a computação científica, equações diferenciais, análise funcional, otimização global e álgebra linear intervalar. Alguns destes resultados

foram utilizados no desenvolvimento da teoria Fuzzy, como também, resultados do contexto fuzzy foram utilizados no contexto intervalar. Isto pode ser evidenciado em Interval and fuzzy analysis: A unified approach de W. A. Lodwick (LODWICK, 2007), por outro lado a aritmética encontrada em Moore (MOORE, 1966) produz uma sobre-estimação nos cálculos, ver (CHALCO-CANO, LODWICK BEDE e JENKINS, 2006), fato que motivou o nosso interesse em estudar outra estrutura algébrica intervalar e aplicar-a as sequencias intervalares e fuzzy.

## 2 | ESPAÇO INTERVALAR

Esta seção apresenta definições básicas da análise intervalar e algumas propriedades destas, onde essas podem ser encontradas com maior detalhe em (MOORE, 1966), (LODWICK, 2007) e (MAQUI-HUAMAM, 2014).

**Definição 2.1** (MAQUI-HUAMAM, 2014) Chama-se de subespaço intervalar próprio real ao conjunto  $\mathbb{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  de modo que os elementos de  $\mathbb{I}$  sejam da forma  $[\underline{a}, \bar{a}] = \{z \in \mathbb{R} : \underline{a} \leq z \leq \bar{a}\}$ . Em geral, diz que,  $\mathbb{I}^n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  é o subespaço intervalar próprio n-dimensional, sendo este definido pelo produto cartesiano de n subespaços intervalares próprios reais, isto é,  $\underbrace{\mathbb{I} \times \dots \times \mathbb{I}}_{n\text{-vezes}}$ ; os elementos deste conjunto são denominados de vetores intervalares n-dimensionais e serão denotados por uma n-upla intervalar do tipo  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , onde  $X_i \in \mathbb{I}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

Chama-se de Intervalo degenerado ao intervalo  $X = [\underline{a}, \bar{a}] \in \mathbb{I}$  onde  $\underline{a} = \bar{a}$ .

**Definição 2.2** (LODWICK, 2007) Um intervalo  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ , é o grafo de uma função real  $A'(\lambda_a)$ , onde:

$$A'(\lambda_a) = \underline{a} + \lambda_a(\bar{a} - \underline{a}); \lambda_a \in [0, 1] \quad (1)$$

Estritamente falando, em (1) como os números  $\underline{a}$  e  $\bar{a}$  são conhecidos, eles serão coeficientes, enquanto  $\lambda_a$  esta variando entre 0 e 1.  $A'(\lambda_a)$  será chamada de função restrição associada ao intervalo A. Para simplificar a notação escreveremos  $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots$  para denotar aos parâmetros associados a cada intervalo. Assim a representação paramétrica restrita de um intervalo A será:

$$A = [\underline{a}, \bar{a}] = \left\{ a(\lambda) = \underline{a} + \lambda_a(\bar{a} - \underline{a}); \lambda_a \in [0, 1] \right\}.$$

Todo elemento A de  $\mathbb{I}$  tem associado uma função restrição. Sobre o espaço  $\mathbb{I}$  são definidas algumas aritméticas que, pelo geral, são utilizadas nos contextos intervalares e fuzzy. Com uma estrutura métrica neste espaço, o conceito de convergência de sequências intervalares será analisado.

## 2.1 Operações Aritméticas

Consideremos dois intervalos  $A = \{a(\lambda_1) : \lambda_1 \in [0,1]\}$  e  $B = \{b(\lambda_2) : \lambda_2 \in [0,1]\}$ , então:

$$\begin{aligned}
 A \circledast B &= C \\
 &= [\underline{c}, \bar{c}] \\
 &= \{a(\lambda_1) * b(\lambda_2) : \lambda_1, \lambda_2 \in \delta\} \\
 &= \{c : c = a(\lambda_1) * b(\lambda_2), \lambda_1, \lambda_2 \in \delta\} \\
 \text{onde } \underline{c} &= \min \{c\}, \bar{c} = \max \{c\}, \delta \subset \mathbb{R} \\
 & \text{ e } * \in \{+, -, \times, \div\}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

**Definição 2.3** (Aritmética Intervalar Restrita – CIA) Dados  $A, B \in \mathbb{I}$  e considerando (2) esta aritmética fica determinada quando  $\delta = \{0,1\}$ .

**Definição 2.4** (Aritmética Intervalar Standard – SAI) Dados  $A, B \in \mathbb{I}$  e considerando (2) esta aritmética fica determinada quando  $\delta = \{0,1\}$ .

**Definição 2.5** (Aritmética Intervalar Restrita em Níveis Simples – SLCIA) Dados  $A, B \in \mathbb{I}$  e considerando (2) esta aritmética fica determinada quando  $\lambda_1 = \lambda_2$  e  $\delta = [0,1]$ .

**Definição 2.6** Dados  $A, B \in \mathbb{I}$  a métrica de Pompeiu-Hausdorff é definida por  $H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , tal que:

$$H(A, B) = \max\{d_1(A, B), d_1(B, A)\},$$

onde,  $d_1 : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  dado por:

$$d_1(A, B) = \sup_{a \in A} d_2(a, B)$$

é uma quase métrica, e  $d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  é dado por

$$d_2(a, B) = \inf_{b \in B} d_3(a, b)$$

com  $d_3$  distância euclidiana.

Equivalente a esta métrica tem-se a métrica  $d$ , onde dados  $A, B \in \mathbb{I}$ ,  $d : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  é definida por:

$$d(A, B) = \max_{\lambda \in [0,1]} |A(\lambda) - B(\lambda)|,$$

Onde  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$  são as funções restrição associadas a  $A$  e  $B$ , respectivamente, ver (CHALCO-CANO, LODWICK E BEDE, 2014).

**Definição 2.7** (MAQUI-HUAMAM, 2014) Seja  $\mathbb{I}$  o espaço intervalar próprio. Uma sequência em  $\mathbb{I}$  é uma aplicação  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}$ . Onde,  $\phi$  é denotada por:

$$(A_n); (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ou } (A_0, A_1, A_2, \dots)$$

e  $A_n := \phi(n)$  é o  $n$ -ésimo termo da sequência  $\phi = (A_0, A_1, A_2, \dots)$ .

**Definição 2.8** (MAQUI-HUAMAM, 2014) Dada uma sequência de números

intervalares  $(A_n)$ ;  $A_n \in \mathbb{I}, \forall n$  (não necessariamente monótona), diz-se que  $A_n$  converge para o número intervalar  $A$ , e escreve-se  $A = \lim A_n$ , quando para cada  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, for possível obter um número  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $H(A_n, A) < \epsilon$ , sempre que  $n > n_0$ .

**Proposição 2.1** (MAQUI-HUAMAM, 2014) A sequência de números intervalares  $(A_n)$  é convergente se, e somente se,  $(A_n)$  é convergente nível a nível. Isto é, a sequência  $(A_n)$  é convergente nível a nível se, e somente se  $A_n(\lambda)$  é convergente para cada  $\lambda \in [0,1]$ .

### 3 | PRELIMINARES DA LÓGICA E MATEMÁTICA FUZZY

A seguir, apresenta-se conceitos fundamentais, ver (BARROS e BASSANEZI, 2006), (CHALCO-CANO, LODWICK BEDE e JENKINS, 2006), para o desenvolvimento de conceitos básicos sobre conjuntos fuzzy utilizando o conceito de  $\alpha$ -nível.

**Definição 3.1** (BARROS e BASSANEZI, 2006) Seja  $U$  um conjunto clássico; um subconjunto fuzzy  $F$  de  $U$  é caracterizado por uma função

$$\mu_F : U \rightarrow [0,1]$$

pré-fixada, chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy  $F$ . Assim, ao falar sobre conjunto um fuzzy simplesmente será mencionada a sua função de pertinência para referir-se ao conjunto.

#### 3.1 Níveis de Conjunto Fuzzy

**Definição 3.2** (CHALCO-CANO, LODWICK BEDE e JENKINS, 2006) Seja  $\mu : U \rightarrow [0,1]$  e  $\alpha \in [0,1]$ . Define-se o  $\alpha$ -nível de  $\mu$  como o conjunto:

$$[\mu]^\alpha = \{x \in U : \mu(x) \geq \alpha\}, \alpha > 0$$

Além disso, o Suporte  $[\mu]^0$  de um conjunto fuzzy  $\mu$  é definido por:

$$\text{supp}(\mu) = [\mu]^0 = \overline{\{x \in U : \mu(x) > 0\}}.$$

**Definição 3.3** (CHALCO-CANO, LODWICK BEDE e JENKINS, 2006) Dado um conjunto fuzzy  $\mu$  em  $U$ , diz-se que:

1.  $\mu$  é compacto, se  $[\mu]^\alpha$  é compacto para todo  $\alpha \in [0,1]$ ;
2.  $\mu$  é convexo, se  $[\mu]^\alpha$  é convexo para todo  $\alpha \in [0,1]$ ;
3.  $\mu$  é normal, se existe  $x_0 \in U$  tal que  $\mu(x_0) = 1$ .

Denota-se por:

- $\mathcal{F}(U)$  a família de conjuntos fuzzy compactos e normais.
- $\mathcal{F}_c(U)$  a família de conjuntos fuzzy compactos, convexos e normais, família que normalmente é conhecida como família de intervalos fuzzy e cujos elementos chamaremos de números fuzzy.

### 3.2 Operações Algébricas sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

Observe que, se  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , então as operações algébricas usuais entre funções não são adequadas sobre  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ . Por exemplo, se somar  $\mu_1$  e  $\mu_2$  ponto a ponto, poderia ocorrer que:

$$(\mu_1 + \mu_2)(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) \notin [0,1].$$

Visando superar essa situação utiliza-se o chamado princípio de extensão de Zadeh, como definido a seguir:

**Definição 3.4** (Princípio de Extensão de Zadeh)

Seja  $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$  uma função,  $f$  pode ser estendida ao contexto fuzzy por:

$$\hat{f}: \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$$

onde:

$$\hat{f}(\mu_1, \mu_2)(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2) \in f^{-1}(y)} \mu_1(x_1) \wedge \mu_2(x_2) & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

para cada  $y \in Y$ .

Mesmo que, o Princípio de Extensão estenda o conceito de uma função aplicada a um subconjunto clássico de  $X$ , em geral, o cálculo de  $\hat{f}$  não foi implementada de modo prático, exceto para funções muito simples.

**Exemplo 3.1** Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax + b$  com  $a \neq 0$  pode-se obter facilmente  $\hat{f}: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$  definida por:  $\hat{f}(\mu)(y) = \mu\left(\frac{a}{y-b}\right), \forall \mu \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ .

**Teorema 3.1** Sejam  $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$  uma função contínua e  $\mu$  um subconjunto fuzzy de  $X_1 \times X_2$ , então para todo  $\alpha \in [0,1]$  vale:  $[\hat{f}(\mu)]^\alpha = f([\mu]^\alpha)$ .

Este resultado indica que os  $\alpha$ -níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo princípio de extensão, coincidem com as imagens dos  $\alpha$ -níveis determinado pela função crisp. Contudo, obter  $\hat{f}(\mu)$  utilizando a aritmética intervalar standard traz um sério inconveniente, o que acontece nos processos de cálculo com intervalos e é conhecido como efeito de sobrestimação.

**Exemplo 3.2** Considere o número triangular fuzzy  $\mu(1/2;1;3/2)$  onde:

$$[\mu]^\alpha = \left[ \frac{1+\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2} \right].$$

Para obter  $\mu^2 - 2\mu$ , utiliza-se a função  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2 - 2x$  e a partir daí obtêm-se  $\hat{f}(\mu) = \mu^2 - 2\mu$ . Utilizando a SIA teremos que:

$$[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[ -\frac{11}{4}, \frac{5}{4} \right]$$

Agora, se fatorar a função a ser estendida; isto é,  $f(x) = x(x-2)$  se obtém a sua extensão:  $\hat{f}(\mu) = \mu(\mu-2)$ . Dessa forma,  $[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[ -\frac{9}{4}, -\frac{1}{4} \right]$ . Todavia, se utilizar a SLCIA pode-se observar que mesmo fatorando a função a se estendida obtêm-se o mesmo resultado. Neste contexto,  $[\hat{f}(\mu)]^0 = \left[ -1, -\frac{3}{4} \right]$  independentemente se  $f(x) = x^2 - 2x$  ou  $f(x) = x(x-2)$ .

**Proposição 3,1** Sejam  $A$  e  $B$  números fuzzy com  $\alpha$ -níveis dados, respectivamente, por  $[A]^\alpha = [\underline{A}_\alpha, \bar{A}_\alpha]$  e  $[B]^\alpha = [\underline{B}_\alpha, \bar{B}_\alpha]$ . Então, utilizando a SLCIA valem as seguintes propriedades:

1.  $[A \pm B]^\alpha = [A]^\alpha \pm [B]^\alpha$ ;
2.  $[\delta A]^\alpha = \delta[A]^\alpha$ ;
3.  $[A \cdot B]^\alpha = [A]^\alpha \cdot [B]^\alpha$ ;
4.  $\left[ \frac{A}{B} \right]^\alpha = \frac{[A]^\alpha}{[B]^\alpha}$   $0 \notin [B]^\alpha$ .

Considerando o exemplo anterior e aplicando a Teorema, tem que  $[\hat{f}(\mu)]^\alpha = f([A]^\alpha)$  é uma função intervalar, e assim, ela pode ser descrita por:

$$f([A]^\alpha) = f\left(\left[\frac{1+\alpha}{2}, \frac{3-\alpha}{2}\right]\right) = \left[ \min_{\lambda \in [0,1]} \{f_\lambda([A]^\alpha)\}, \max_{\lambda \in [0,1]} \{f_\lambda([A]^\alpha)\} \right],$$

$$\text{onde } f_\lambda([A]^\alpha) = \left( \frac{1+\alpha}{2} + \lambda(1-\alpha) \right)^2 - 2 \left( \frac{1+\alpha}{2} + \lambda(1-\alpha) \right).$$

Destas últimas expressões se considerar o nível zero obtêm-se:

$$f([A]^0) = f\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \left[ \min_{\lambda \in [0,1]} \left\{ \lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4} \right\}, \max_{\lambda \in [0,1]} \left\{ \lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4} \right\} \right] = \left[ -1, -\frac{3}{4} \right].$$

Note que, isto é o esperado quando analisamos a imagem desta função ponto a ponto.

Uma outra aplicação imediata da SLCIA é a seguinte:

### 3.3 Sequências de Números Fuzzy

Nesta parte será apresentada a sequência de números fuzzy e analisada a sua convergência.

**Definição 3.5** Uma sequência em  $\mathcal{F}_f(\mathbb{R})$  é simplesmente uma função  $A: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}_f(\mathbb{R})$  denotada por:



$$(A_n); (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ou } (A_0, A_1, A_2, \dots)$$

Essas sequências serão chamadas de Sequências de Números Fuzzy, e a seguir, define-se a convergência das mesmas.

**Definição 3.6** Uma sequência de números fuzzy  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente se sua correspondente sequência de  $\alpha$ -níveis o é; isto é,

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow A \in \mathcal{F}_I(\mathbb{R}) \text{ se, e somente se } ([A_n]^\alpha)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow [A]^\alpha \in \mathbb{I}$$

**Proposição 3.2** Sejam  $A_n, B_n, A, B \in \mathcal{F}_I(\mathbb{R})$  tal que  $A_n \rightarrow A, B_n \rightarrow B$ , então tem-se os seguintes resultados:

- i.  $A_n \pm B_n \rightarrow A \pm B$ ;
- ii.  $A_n \cdot B_n \rightarrow A \cdot B$ ;
- iii.  $\frac{A_n}{B_n} \rightarrow \frac{A}{B}$ , para todo  $B_n, B \neq 0$ .

**Exemplo 3.3** Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de números fuzzy, tal que, sua sequência de  $\alpha$ -níveis é  $([A_n]^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  com  $[A_n]^\alpha = [-1 - e^{-n} + (1 + e^{-n})\alpha, 1 + e^{-n} - (1 + e^{-n})\alpha]$ . Assim,  $([A_n]^\alpha)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$ .

**Exemplo 3.4** Seja  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de números fuzzy, tal que, a sequência de  $\alpha$ -níveis é  $([A_n]^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $[A_n]^\alpha = \left[ \frac{\sin n}{n} - 1 + \alpha, 1 + e^{-n} - \alpha \right]$  onde  $\alpha = 1 + \frac{1}{2}e^{-n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin n}{n}$ . É fácil

ver que  $([A_n]^\alpha)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow [-1 + \alpha, 1 - \alpha]$ .

## 4 | CONCLUSÕES

Neste trabalho foram apresentados alguns resultados sobre o Cálculo Intervalar e algumas aplicações no contexto fuzzy, mostrando assim uma forte relação entre estas. O presente estudo é de fundamental importância para o desenvolvimento do cálculo intervalar, das equações diferenciais intervalares e outras áreas via SLCIA. Assim como, cálculo fuzzy, equações diferenciais fuzzy entre outras.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES e FAPESP pelo apoio.

## REFERÊNCIAS

BARROS L.C. e BASSANEZI R. C., **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**, Unicamp-Imecc, (2006).

CHALCO-CANO Y., LODWICK W. A., BEDE B. and JENKINS O., **Spline approximation for Zadeh's**

**extensions**, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, World Scientific, (2008).

CHALCO-CANO Y., LODWICK W. A. and BEDE B., **Single level constraint interval arithmetic**, Fuzzy Sets and Systems 257, 146-168 (2014).

LODWICK W. A., **Interval and fuzzy analysis: A unified approach**, Advances in Imaging and Electron Physics, Elsevier, (2007).

MAQUI-HUAMÁN G. G., **Introdução à Análise Intervalar em Níveis Simples e Extensão de Zadeh**, Dissertação de Mestrado, Unesp-Ibilce, (2014).

MOORE R. E., **Interval analysis**. Vol. 4. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, (1966).

ZADEH L. A., **Fuzzy sets**. Information and control, v. 8, n. 3, p. 338-353, (1965).

## VALIDAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS PARA O ESCOAMENTO DE GRÃOS DE SOJA

### **Rodolfo França de Lima**

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul  
Departamento de Ciências Exatas e Engenharias  
Ijuí – Rio Grande do Sul

### **Vanessa Faoro**

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul  
Departamento de Ciências Exatas e Engenharias  
Ijuí – Rio Grande do Sul

### **Manuel Osório Binelo**

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul  
Departamento de Ciências Exatas e Engenharias  
Ijuí – Rio Grande do Sul

### **Dirceu Lima dos Santos**

Universidade de Passo Fundo  
Departamento de Ciências Exatas e Geociências  
Passo Fundo – Rio Grande do Sul

### **Adriano Pilla Zeilmann**

Universidade de Passo Fundo  
Departamento de Ciências Exatas e Geociências  
Passo Fundo – Rio Grande do Sul

**RESUMO:** A modelagem matemática do fluxo de grãos é um problema difícil de ser modelado, dada a natureza discreta do meio. Algumas pesquisas recentes estão sendo direcionadas para a análise do escoamento de materiais

granulares em silos e secadores de grãos. Pesquisadores tem se dedicado a estudar a modelagem do fluxo de grãos, através de simulações numéricas, entre algumas técnicas de simulação está o Método dos Elementos Discretos (MED). Neste trabalho foram criadas simulações numéricas do comportamento do fluxo de grãos de soja em uma geometria tridimensional reduzida que imita, parcialmente, características de um secador de fluxo misto. De maneira a confrontar e validar os dados gerados pelas simulações foi construído um aparato experimental idêntico ao modelo usado nas simulações. Por fim conclui-se que o MED implementado no pacote de software Yade modelou corretamente o fluxo de soja dentro de uma geometria não-trivial, análogo ao usado no secador de fluxo misto. Os resultados das simulações foram muito satisfatórios, concordando com os experimentos não apenas sobre o tempo de descarga, mas também sobre os padrões de escoamento da massa de grãos ao longo do processo de descarga.

**PALAVRAS-CHAVE:** Modelagem Matemática, Fluxo de Grãos, Método dos Elementos Discretos.

**ABSTRACT:** Mathematical modeling of grain flow is a difficult problem to model, given the discrete nature of the medium. Some recent research is being directed toward the analysis

of the flow of granular materials in silos and grain dryers. Researchers have been dedicated to studying grain flow modeling, through numerical simulations, among some simulation techniques is the Discrete Element Method (DEM). In this work numerical simulations of soybean grain flow were created in a reduced three-dimensional geometry that partially mimics the characteristics of a mixed flow dryer. In order to confront and validate the data generated by the simulations an experimental apparatus was constructed identical to the model used in the simulations. Finally, it is concluded that the DEM implemented in the Yade software package correctly modeled the soybean flow within a non-trivial geometry, analogous to that used in the mixed flow dryer. The results of the simulations were very satisfactory, agreeing with the experiments not only on the discharge time, but also on the flow patterns of the grain mass throughout the discharge process.

**KEYWORDS:** Mathematical Modeling, Flow of Grain, Discrete Element Method.

## 1 | INTRODUÇÃO

O cultivo da soja tem papel de destaque na cultura agrícola brasileira, pois sua alta produção movimentou o mercado agroindustrial do país, gerando um grande número de empregos impulsionando a economia das regiões produtoras.

Várias pesquisas foram e continuam sendo realizadas buscando encontrar melhorias na produção e no armazenamento de grãos, visando além do consumo nacional à exportação de tais produtos e também a expansão das áreas de plantações para localidades onde não há prática de seu plantio.

Antes que os grãos estejam prontos para serem comercializados, eles precisam passar por algumas etapas pós-colheitas como a limpeza e secagem. O processo de secagem de grãos vem sendo

amplamente estudado, é possível citar, Bortolaia (2011), Khatchaturian (2003), entre outros. Embora estas pesquisas sobre transferência de calor e massa possuam um vasto acervo na literatura, poucos destes estudos citados tem como objetivo avaliar o efeito do fluxo dos grãos ao processo de secagem.

Conhecer o fluxo de grãos é fundamental em uma rede armazenadora, pois, sua irregularidade pode produzir uma secagem não uniforme do grão, e, em alguns casos, aumentar o risco de incêndio no interior do secador.

Estudos recentes estão sendo direcionados para a análise do fluxo de materiais granulares em silos e secadores de grãos. Pesquisadores como Montellano et al (2011) e Mellmann et al (2011) tem se dedicado a estudar a modelagem do fluxo de grãos, através de simulações numéricas.

A modelagem do fluxo de grãos é um problema difícil, dada à natureza discreta do meio, ou seja, as interações de grãos individuais. Algumas técnicas de simulação têm sido estudadas, entre elas está o Método dos Elementos Discretos (MED). O DEM representa o meio como um conjunto de partículas independentes, interagindo umas

com as outras, reproduzindo explicitamente a natureza discreta de um meio granular (Neves, 2009). De acordo com Silva e Bernardes (2010), autores têm-se dedicado a simular computacionalmente o problema da geração de um pacote granular denso em um silo (seja ele bi ou tridimensional) e sua posterior descarga por um orifício usando o Método dos Elementos Discretos.

É possível destacar alguns trabalhos que utilizaram esse método, como o estudo realizado por Langston et al (1995) que utilizaram um modelo computacional para simular o fluxo de material granular armazenado em um silo e sua posterior descarga por um funil.

Outro trabalho usando o MED foi realizado por Montellano et al (2011) que desenvolveu um modelo de três dimensões, capaz de simular o fluxo de grãos de milho (representados por esferas) durante a descarga de um pequeno silo.

O autor utilizou um modelo preliminar para o material estudado com base em valores de parâmetros medidos em laboratório ou feitos a partir da literatura, utilizando três variáveis: a densidade média no final da fase de enchimento, a taxa de descarga e o padrão de escoamento. Para a comparação dos resultados para a última destas variáveis foi necessário que o processo de descarga fosse filmado com uma câmara de alta resolução, a fim de reconhecer mais facilmente os detalhes do fluxo. O modelo preliminar para os grãos de milho teve necessidade de ajustamento. Isto envolveu a alteração dos valores das propriedades de atrito do material até a obtenção um modelo capaz de fazer previsões aceitáveis. Os resultados obtidos destacaram a influência das propriedades de atrito sobre as características do fluxo de descarga.

Goda e Ebert (2005) analisaram o preenchimento inicial e posteriormente a descarga em silos utilizando o MED. Foram observados dois tipos de silos: um tipo de silo com funil e outro com fundo chato. O material granular foi gerado como um conjunto de partículas esféricas e seu movimento provocado pela ação da gravidade durante o escoamento também foi estudado. Os resultados da simulação obtidos pelos autores foram muito próximos a dados reais e mostram claramente as vantagens do MED para entender o comportamento do fluxo complexo de materiais granulares.

Mellmann et al (2011) usou o MED para investigar o fluxo de trigo em secadores de fluxo misto. O domínio simulado tinha metade do tamanho do equipamento de ensaio e 1/4 da dimensão do fluxo, e que também era uma simulação 2D. Um dos problemas destas simplificações é que os tempos de fluxo não podem ser comparados diretamente entre os experimentos e as simulações. A fim de comparar os dados, os autores transformaram as coordenadas para variáveis adimensionais. Seus resultados permitiram compreender características importantes do fluxo, com boa concordância entre as simulações e os experimentos, mas ser capaz de comparar tempos absolutos entre os experimentos reais e as simulações numéricas, sendo muito importante para validar o método MED para o problema, o que é mais difícil para uma simulação 2D.

Com intuito de averiguar detalhes do fluxo de grãos, o objetivo principal deste trabalho é a validação do MED com a modelagem matemática do fluxo de grãos de

soja em um secador com calhas. Segundo [5] este tipo de secador é amplamente utilizado na agricultura em todo o mundo, porém ainda existe uma necessidade de aperfeiçoar a eficácia deste tipo de equipamento.

Além do objetivo principal citado, alguns objetivos secundários do trabalho são descritos a seguir:

- Realizar experimentos para determinar as características do fluxo de grãos de soja.
- Implementar o MED para a simulação numérica do fluxo de grãos de soja em um secador com calhas.
- Estimar os parâmetros usados no MED de acordo com os experimentos realizados.

## 2 | MATERIAIS E MÉTODOS

Como parte deste artigo foram criadas simulações numéricas do comportamento do fluxo de grãos de soja em uma geometria tridimensional reduzida que imita, parcialmente, características de um secador de fluxo misto com calhas. De maneira a confrontar e validar os dados gerados pelas simulações computacionais foi construído um aparato experimental idêntico ao modelo usado nas simulações.

### 2.1 Método dos Elementos Discretos

O Método dos Elementos Discretos é um método de simulação numérica do movimento de um grande número de partículas (normalmente modeladas por geometrias simples) dentro de um sistema fixo ou móvel variante com o tempo. O MED foi desenvolvido por Cundall e Strack (1979), sendo baseado em um esquema numérico explícito no qual a interação das partículas é monitorada individualmente (um requisito quando se trata de materiais granulares). Em cada contato o sistema é modelado usando as leis do movimento. Estes elementos discretos podem ser rígidos ou deformáveis e interagem entre si por meio de forças de contato normais e cisalhantes (tangenciais).

Segundo Geng et al (2010) o MED oferece a possibilidade de investigar o comportamento mecânico de materiais granulares, tanto a nível micro e macro, sendo um método superior na modelagem de um material descontínuo do que outras ferramentas numéricas. Ele considera a interação de partículas em escala, permitindo que as respostas micro - mecânicas do material a ser estudado sejam analisadas em detalhes. No MED, a interação das partículas discretas é monitorada contato por contato e o movimento das partículas é calculado partícula por partícula.

Simulações numéricas usando o MED se tornaram uma ferramenta valiosa para o estudo de diferentes fenômenos que ocorrem em escala micro em materiais granulares, fornecendo um laboratório virtual que permite ao pesquisador realizar

experiências que são difíceis ou impossíveis de realizar em experimentos físicos. O MED é utilizado principalmente para estudar a estrutura de tecido e materiais granulares sob carregamento ou descarga e dá a contribuição no desenvolvimento de relações constitutivas do solo usando discos (2D) e esferas (3D) (Geng et al, 2010).

OMED compreende dois estágios: o cálculo das forças de contato e posteriormente o cálculo do movimento das partículas através da segunda Lei de Newton.

O método considera um número finito de partículas discretas interagindo por meio de forças de contato e não-contato (Zhu, 2008). Em um primeiro momento as forças de interação entre partículas são calculadas permitindo-se uma interpenetração entre os seus elementos, utilizando estas informações para o cálculo da relação força – movimento. (Zhu, 2008 e Neves, 2009).

As partículas atuam como se fossem unidas por molas nos seus contatos. Baseada nesta hipótese, a força gerada no contato será o produto da deformação da mola pela sua rigidez. Assim, o deslocamento no sentido normal que seria a deformação da mola nessa orientação é a superposição de duas entidades. Desta maneira a força normal é determinada pela equação (1):

$$F_i^n = K^n U^n n_i \quad (1)$$

Sendo  $F_i^n$  o vetor da força normal,  $K^n$  a rigidez normal do contato,  $U^n$  a superposição entre partículas e  $n_i$  o vetor normal. No segundo estágio a segunda lei de Newton é usada para determinar as velocidades e acelerações de cada partícula, e a partir disso, a nova posição dos elementos. A modelagem do movimento das partículas consiste na resolução da equação do movimento da segunda lei de Newton através de integração numérica. As forças e momentos externos agindo em cada partícula são devidos a choques com outras partículas, choques com as superfícies de contorno do escoamento, força gravitacional e também devido à influência de ondas provocadas por outras partículas que não estão em contato, ou ainda devido ao fluido no qual as partículas estão contidas (Neves, 2009).

Após o cálculo da força do contato e a sua contribuição para cada partícula, o movimento das partículas pode ser determinado, pois o movimento de uma única partícula é determinado por meio dos vetores de força e momento resultantes atuantes sobre a mesma. Esse cálculo pode ser deduzido em função do movimento translacional de um ponto na partícula e do movimento rotacional da própria.

O movimento translacional pode ser escrito em termos de posição  $x$ , velocidade  $\dot{x}$  e aceleração  $\ddot{x}$  (Neves, 2009 e Geng et al, 2010).

O movimento translacional é calculado como:

$$F_i = m(\ddot{x}_i - g_i) \quad (2)$$



Sendo  $F_i$  a força resultante de todas as forças externas atuantes na partícula, igual à massa da partícula e  $g_i$  a aceleração da gravidade.

Para Langston et al (2004) a principal limitação para uso do MED é a exigência computacional, uma vez que o método inerentemente usa um esquema de integração de tempo explícito e repete cálculos sequenciais ao longo de um período de tempo limitado, com passos muito pequenos de tempo.

## 2.2 Ciclo de Cálculo do Método dos Elementos Discretos

Nesta seção será apresentada uma breve descrição do ciclo de cálculo presente nas simulações MED explícitas, com referência a implementação destes algoritmos no Yade (*Yet Another Dynamic Engine*). Estas descrições são dadas aproximadamente na ordem em que aparecem na simulação. Duas partículas podem estabelecer uma nova interação, que consiste em:

- detecção de contato entre partículas;
- criação de nova interação e determinar suas propriedades (tais como a rigidez), pois elas são ou pré-computadas ou derivadas de propriedades de ambas as partículas;

Então, para as interações já existentes, é realizado o seguinte:

- avaliação da tensão;
- estresse computacional baseada nas tensões;
- aplicação da força para partículas em interação.

Algumas hipóteses referentes ao MED foram adotadas nesta pesquisa. São as seguintes:

Em uma simulação MED, a seguinte sequência é executada repetidamente de acordo com Smilauer e Chareyre (2010):

- Estabelecer as condições iniciais;
- detecção das colisões aproximadas;
- detectar as colisões exatas dos corpos e as interações de atualização, se necessário;
- resolver interações, aplicando forças sobre as partículas;
- aplicar outras condições externas (força da gravidade, por exemplo);
- mudar a posição dos corpos com base em forças, integrando as equações de movimento;

Este ciclo de cálculo é mostrado na figura 1:

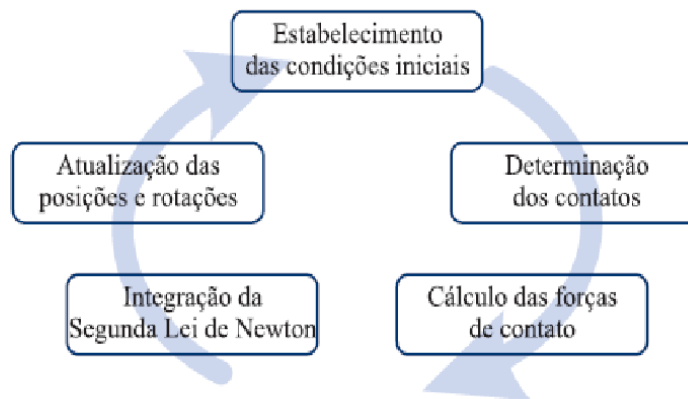


Figura 1: Ciclo de cálculo do Método dos Elementos Discretos. Fonte: Pinto (2011).

### 3 | EQUIPAMENTO

Uma das principais motivações deste trabalho é examinar o fluxo de grãos de forma mais semelhante possível ao de um secador típico de fluxo misto com calhas. As dimensões de secadores de soja são enormes, e a demanda computacional para realizar simulações com o MED é muito elevada, o que torna impossível para simular um sistema na mesma escala de um secador real. Uma possibilidade seria a comparação de dados de um dispositivo de um secador real para a simulação em escala menor, mas considerando que o objetivo principal do estudo é a validação do método MED para o problema, uma experiência que permitiria uma comparação em escala 1:1 com a simulação seria de maior relevância.

Levando isso em conta, a solução adotada foi a de construir um aparato menor que poderia ser totalmente modelado com MED, mas que iria manter algumas características de um secador de fluxo misto. O aparato experimental é composto por uma placa plana de acrílico transparente e chapas de MDF (*Medium Density Fiberboard*), além de obstáculos internos semelhantes aos que o grão iria encontrar em um secador de real, o esquema do aparato é mostrado na figura 2.

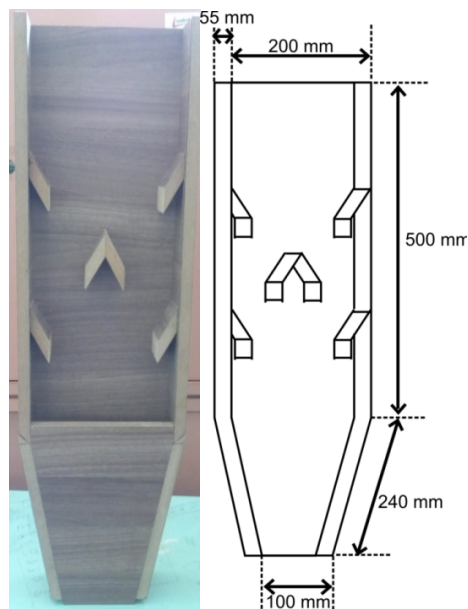


Figura 2: Vista frontal do aparato e suas medidas. Fonte: Autoria própria.

Para a montagem do aparato, foi cortada uma placa de acrílico transparente de 50 x 20 cm (comprimento x largura), para ser usada como sua parte frontal. A parte traseira do aparato tem as mesmas dimensões da frontal, porém o material utilizado foi uma chapa de MDF. Para compor a lateral foram usadas duas chapas de MDF, sendo cada uma delas com 50 cm de altura e 5 cm de largura. Foram cortadas ainda mais quatro chapas em MDF para serem usadas para construir o funil do secador, tais peças foram fixadas no corpo do secador com inclinação de  $73^\circ$ . A saída dos grãos ficou com abertura de 10 x 5 cm (comprimento e largura), todavia foram colocadas mais duas pequenas chapas de acrílico, de modo que possibilitasse a abertura, fechamento e regulagem na saída do funil. De modo a tentar simular o fluxo de grãos de maneira mais próxima a um secador real. Esta folga ajustável foi instalada de modo a testar a diferentes taxas de descarga. E este detalhe pode ser visto na figura 3:



Figura 3: Vista da saída do funil do aparato experimental. Fonte: Autoria própria.

## 4 | YADE

Para a realização das simulações computacionais no presente trabalho, foi utilizado o software Yade, arquitetado por Frédéric Donze em 2004.

O software implementa o MED e também possibilita o acoplamento a outros métodos, como por exemplo o Método dos Elementos Finitos, o SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) e o LGM (Lattice Geometric Model). O Yade é um projeto que utiliza a abordagem software livre, sob licença GPL, desta forma tem a possibilidade de se expandir em passo acelerado com a contribuição da comunidade científica. A principal restrição ao uso do Yade é quanto a sua portabilidade, visto que o software só é executável na plataforma Linux.

Nos últimos anos o movimento para o uso de software livre cresceu muito, com isso a utilização do Yade vem aumentando constantemente, sendo utilizado para pesquisas em diversas áreas do conhecimento. Favier et al (2009) usaram o Yade para realizar um projeto estrutural de proteção passiva contra avalanches de neve, considerando uma dependência direta de obstáculos. Os autores consideraram que uma avalanche de neve flui como um fluxo granular e estudaram numericamente e experimentalmente o impacto de um fluxo granular contra obstáculos. Para validar o modelo numérico foram realizados experimentos de laboratório de pequena escala. Para avaliar a força de impacto granular foram estimados em laboratório perfis de velocidade e espessura. O modelo foi validado por meio de comparações com as duas as características de fluxo experimentais e do histórico de carga de impacto.

De acordo com Donzé e Kozicki (2008) diferentes tipos de geometrias para os elementos discretos podem ser criadas no Yade: poliédrica, elipsóide, esférica ou aglomerados de tais elementos. No entanto, apenas trabalhos com materiais esféricos foram validados, enquanto pesquisas com outras formas geométricas estão em desenvolvimento.

Mesmo que o Yade suporte diferentes tipos de geometria, a maioria das validações foram feitas utilizando esferas. Este trabalho também usa esferas, uma vez que esta geometria reproduz de forma satisfatória os grãos da soja cultivada no Brasil. O Yade foi construído em linguagem de programação C ++, mas as simulações são criadas usando scripts Python. As simulações criadas em scripts Python tem suas vantagens, é um sistema muito mais flexível e as interfaces gráficas típicas de pacotes de softwares comerciais, e desde que não modifique a fonte C ++ não é necessário recompilar o sistema para cada nova simulação. O Yade tem-se um sistema de visualização OpenGL, mas também exporta os dados para Paraview, um software poderoso de visualização.

O processamento no Yade é dividido em três partes distintas responsáveis pelas atividades de pré-processamento, análise dos resultados e visualização.

A primeira etapa é o pré-processamento. Nesta etapa é feita uma análise através do MED, definindo dados referentes ao meio estudado. São definidas geometrias e as

propriedades dos materiais que compõe as partículas em estudo, bem como condições de contorno empregadas, restrições, passo de tempo dentre outros.

A segunda etapa é a etapa de processamento, onde o algoritmo construído para ser aplicado o MED apresenta um ciclo de repetição de processos, descrevendo assim o comportamento dinâmico do meio.

A terceira etapa é destinada a visualização dos resultados. O pós-processador é utilizado para a visualização dos resultados obtidos no processador na forma de gráficos e animações.

No início das simulações as posições das partículas virtuais foram geradas aleatoriamente dentro do volume da geometria criada, e deixou-se cair sob ação da gravidade até que a geometria estivesse cheia, considerando a mesma altura dos experimentos em laboratório. O enchimento da geometria virtual (Fig. 4) foi considerado completo quando todas as partículas permaneceram estáticas, um estado identificado pelo valor para a energia cinética de todo o sistema de ser desprezível.

Após as partículas estarem estáticas a placa de bloqueio da saída do funil foi aberta até o ponto desejado, de tal maneira que as partículas começaram a descarregar. A simulação de descarga continua até que todas as partículas tinham passado pelo começo do funil.

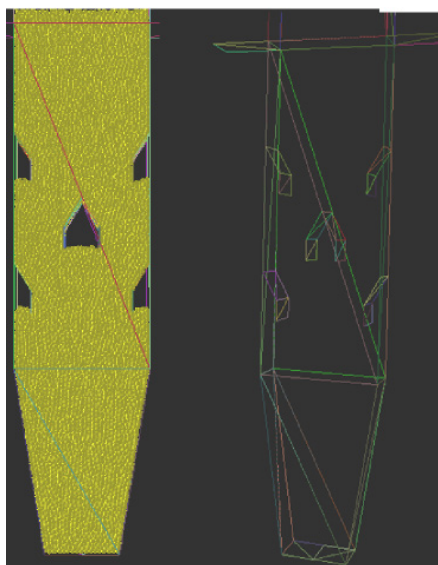


Figura 4: Geometria computacional criada no YADE. Fonte: Autoria própria.

## 5 | DEFINIÇÃO DE PARÂMETROS

As simulações em Yade foram feitas utilizando um modelo 3D idêntico ao aparato utilizado nos experimentos. O primeiro ponto a decidir sobre o modelo foi a modelagem da partícula. A soja não é esférica, mas elipsoidal, mas considerando que outros trabalhos têm utilizado a esfera para modelar a soja com sucesso, como em Boac et al (2012), foi decidido usar o modelo de esfera única, a fim de simplificar os cálculos.

Para encontrar a distribuição do tamanho dos grãos, 30 sementes foram escolhidas aleatoriamente e devidamente medidas com o auxílio de um paquímetro, a fim de se encontrar o raio médio dos grãos de soja. Então, considerando todas as 30 sementes amostradas, o raio médio e seu desvio padrão obtidos foram 3,08 mm e 0,2730 mm respectivamente.

As propriedades dos materiais utilizados nas simulações foram obtidas através de dados presentes na literatura. Esta foi uma escolha deliberada, pois poderiam ser feitos experimentos para determinar os parâmetros do material que possa dar os melhores resultados no Yade, porém um dos objetivos deste trabalho é verificar a robustez do código Yade considerando as propriedades dos materiais já utilizados por outras obras que usaram grãos de soja em outros códigos de MED que conseguiram validar seus modelos.

Além de parâmetros que descrevem o material constitutivo das partículas, outros são necessários para a configuração da simulação, como por exemplo, o passo de tempo de simulação e o coeficiente de amortecimento. O fator de amortecimento, é usado no MED a fim de ter em consideração a dissipação da energia cinética do sistema, é usado para a estabilidade numérica e também para acelerar a convergência para o estado quase estático de equilíbrio. Este coeficiente de amortecimento tem como valor padrão no Yade de 0,2. Foram realizadas simulações utilizando o fator de amortecimento padrão 0,2, onde apresentaram um fluxo de descarga incorreto e mais lento quando comparado com o experimento, como pode ser visto na figura 5 que compara o estado do fluxo durante a descarga dos grãos no momento 16 segundos.

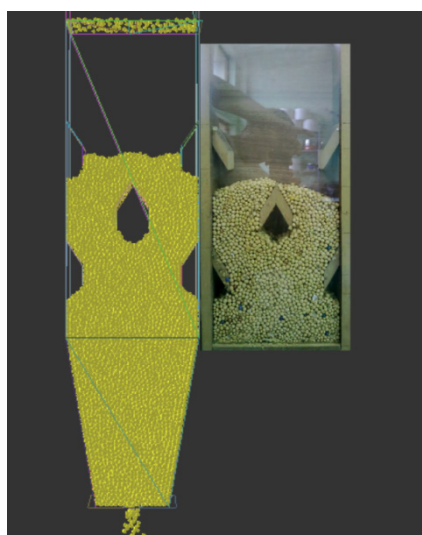


Figura 5: Comparação do fluxo usando coeficiente de amortecimento 0.2. Fonte: Autoria própria.

Outra simulação realizada, foi utilizando um coeficiente de amortecimento igual a 0. Esta simulação também resultou em um fluxo incorreto, como mostrado na figura 6. Nesta imagem se pode ver que depois de carregar o aparato, os elementos ocupavam todos os espaços que a geometria continha, de forma diferente dos experimentos,

onde espaços vazios foram deixados abaixo dos obstáculos.

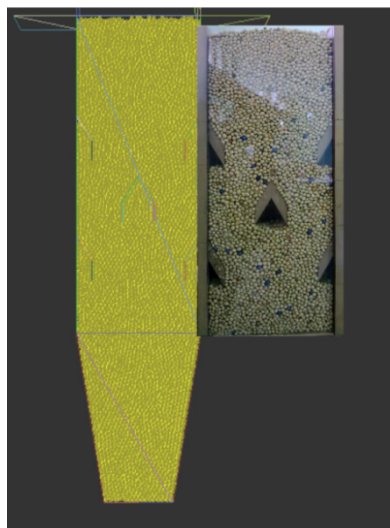


Figura 6: Comparação do fluxo usando coeficiente de amortecimento 0. Fonte: Autoria própria.

Na figura 7 é mostrada novamente a comparação entre a simulação e o experimento, mas neste caso, para a simulação usou-se um fator de amortecimento de valor 0,05. Agora se pode ver que a simulação MED previu o fluxo de descarga com boa precisão. É importante notar que não apenas os tempos são coincidentes, mas também o padrão do fluxo da massa dos grãos durante a descarga é precisamente reproduzido pela simulação.

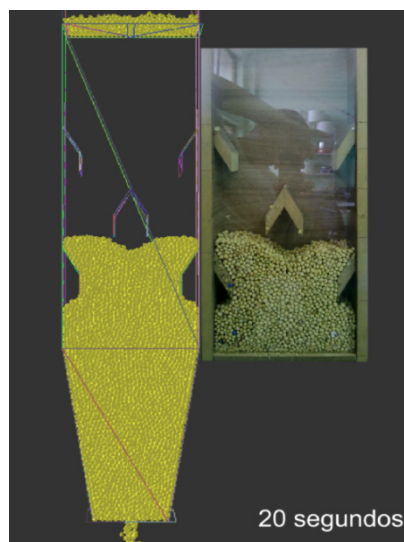


Figura 7: Comparação do fluxo usando coeficiente de amortecimento 0.05. Fonte: Autoria própria.

Concordando com a comparação presente na Fig. 7 o coeficiente de amortecimento de valor 0,05 implementado no Yade, pode ser considerado um valor ideal para as demais simulações deste trabalho, já que com este coeficiente e as propriedades dos materiais já consolidadas por outros pesquisadores em outros códigos MED podem



reproduzir muito bem o fluxo de soja em um domínio não-trivial.

Os valores para as variáveis das propriedades dos materiais usados nesta pesquisa foram obtidos em grande parte usando dados de trabalhos relevantes presentes na literatura e também dados medidos em laboratório. A Tabela 1 resume os valores usados para as propriedades das partículas. A densidade, módulo de Young, coeficiente de Poisson e coeficiente de atrito de rolamento das partículas foram determinadas conforme Boac et al (2012), trabalho no qual os pesquisadores estudaram detalhes do fluxo de grãos de soja. Para o ângulo de atrito dos grãos de soja foram usados os dados obtidos por Kibar e Osturk (2008), no qual o grão de soja possuía grau de umidade de 14% (mesmo grau de umidade das sementes usadas nos experimentos). Os dados referentes ao raio médio dos grãos foram medidos em laboratório pelo próprio autor conforme citado anteriormente.

Variável	Soja	Unidade
Densidade	1243 <sup>[a]</sup>	Kg/m <sup>3</sup>
Coeficiente de Poisson	0,25 <sup>[a]</sup>	-
Módulo de Young	2.6E+06 <sup>[a]</sup>	Pa
Ângulo de atrito	0.4712 <sup>[b]</sup>	Radianos
Coeficiente de amortecimento	0,05	-
Raio médio das partículas.	3.08 <sup>[c]</sup>	Mm
Desvio padrão	0.2730 <sup>[c]</sup>	Mm
Passo de tempo da simulação	3.8E+06	

[a] Boac et al (2012)  
[b] Kibar e Öztürk (2008)  
[c] Dados obtidos pelo autor

Tabela 1: Parâmetros de entrada para simulação DEM.

Fonte: Autoria própria

## 6 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com o objetivo de validar o método dos elementos discretos nesta pesquisa, foram realizados experimentos em laboratório e simulações com o Yade, nos quais foram analisados o fluxo de descarga e o padrão de escoamento dos grãos de soja, variando a abertura por onde os grãos saíam.

### 6.1 Descarga de grãos

No primeiro experimento realizado, a abertura da tampa para a saída dos grãos escolhida foi de 2 cm. A figura 8 traz um quadro comparativo entre as simulações realizadas no Yade (esquerda) e o experimento (direita) em seis diferentes momentos distintos durante a descarga.

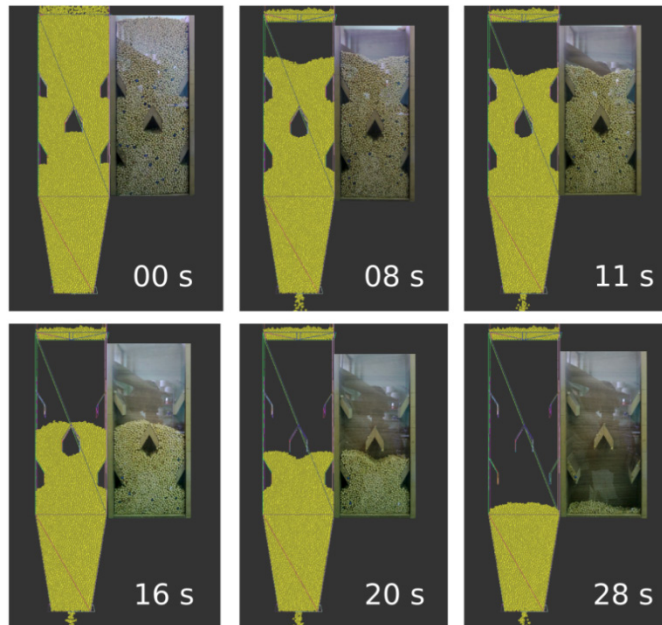


Figura 8: Comparação do fluxo em vários estágios da descarga com abertura da tampa de 2 cm. Fonte: Autoria própria.

De acordo com a figura 8 é possível verificar que a simulação MED previu o fluxo de descarga com boa precisão. É de suma importância ressaltar que além dos tempos serem coincidentes, as trajetórias da massa dos grãos durante a descarga são reproduzidas pela simulação com boa exatidão.

No segundo experimento realizado a tampa de saída dos grãos foi posicionada com 2,5 cm de abertura. A figura 9 apresenta um quadro com seis imagens da descarga para diferentes tempos durante a descarga.

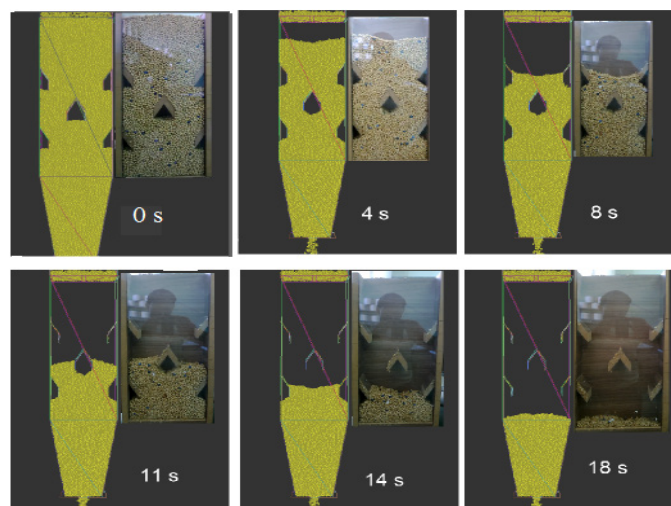


Figura 9: Comparação do fluxo em vários estágios da descarga com abertura da tampa de 2.5 cm. Fonte: Autoria própria.

Como previsto, com o aumento da abertura para saída dos grãos o tempo de escoamento dos grãos foi mais rápido em comparação a Fig. 8. Observando a imagem 9 é possível constatar que novamente simulação MED previu o fluxo de descarga com

concordância em relação ao experimento realizado.

Foi ainda realizado um terceiro experimento, no qual a tampa de saída dos grãos foi posicionada com 1,7 cm de abertura. A figura 10 apresenta um quadro com seis imagens da descarga para diferentes tempos durante a descarga.

Como pode ser visto no quadro comparativo, nesta terceira descarga aconteceu a maior discrepância entre os resultados. É possível verificar que até o instante 14 segundos a simulação MED previu o tempo e padrão do fluxo de descarga com excelente aceitação em relação ao experimento realizado, porém depois disso a simulação ficou mais lenta. Isso pode ser atribuído à diferença da forma elipsoidal das sementes de soja e das esferas usadas na simulação. Como neste experimento foi usada uma abertura pequena, se pode concluir que a forma geométrica da esfera tem influência nas áreas de contato na saída da geometria.

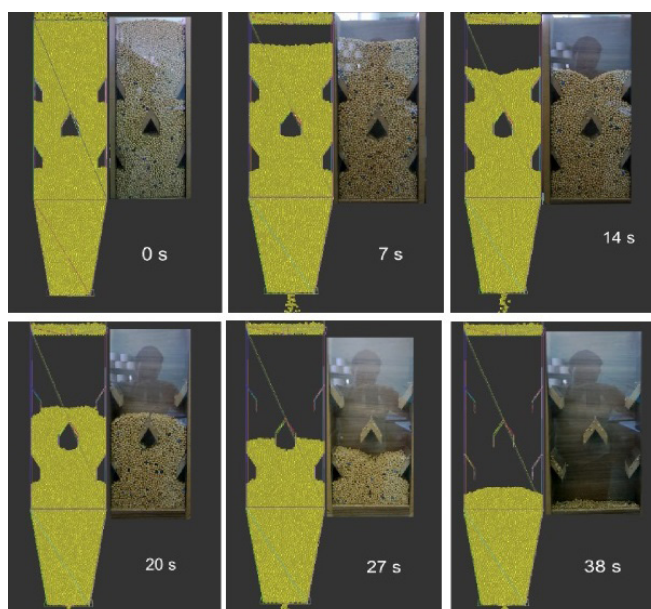


Figura 10: Comparação do fluxo em vários estágios da descarga com abertura da tampa de 1.7 cm. Fonte: Autoria própria.

## 7 | CONCLUSÕES

A capacidade do modelo para prever o fluxo de descarga foi testada através de um procedimento de validação, confrontando os resultados obtidos com os observados em um aparato experimental. Conclui-se que o MED pode ser utilizado para modelar a resposta complexa do fluxo de grãos.

As primeiras simulações foram sujeitas a um procedimento de calibração para o coeficiente de amortecimento. O valor padrão deste coeficiente no Yade é de 0,2, porém os resultados das simulações utilizando este coeficiente não foram satisfatórios, uma vez que o tempo de descarga e o padrão de escoamento não condisseram com os dados experimentais.

O mesmo se pode dizer quando foi usado o coeficiente de amortecimento com

valor igual a zero, o padrão de enchimento da geometria ficou aquém dos experimentos. Somente quando usado o coeficiente de amortecimento de 0,05 o tempo de descarga e padrão de escoamento foram condizentes com os dados experimentais.

Após a calibração do coeficiente de amortecimento os dados obtidos pelas simulações MED nas demais amostragens mostraram boa concordância quando confrontados com os dados experimentais.

A partir dos resultados apresentados as seguintes conclusões podem ser mencionadas:

- O pacote de software Yade modelou corretamente o fluxo de soja dentro de uma geometria não-trivial, análogo ao usado no secador de fluxo misto.
- Os resultados das simulações concordam com os experimentos não apenas sobre o tempo de descarga, mas também sobre os padrões de escoamento da massa de grãos ao longo do processo de descarga.
- O grão de soja pode ser modelado como esferas individuais alcançando bons resultados.
- O coeficiente de amortecimento tem um impacto importante no modelo utilizado pelo Yade, tornando-se importante estimar corretamente o seu valor.
- Como sugestões para trabalhos futuros seguem os seguintes itens:
- Realizar simulações usando elipsóides a fim de aplicar um modelo mais realista quanto a forma geométrica das partículas.
- Considerar o fluxo de ar e transferência de calor e massa, que foram negligenciados no presente trabalho.

## REFERÊNCIAS

BOAC, J. M., CASADA, M. E., MAGHIRANG, R. G., & III, J. P. H. (2012). **3d and quasi-2d discrete element modeling of grain commingling in a bucket elevator boot system**. Transactions of the American Society of Agricultural and Biological Engineers, 55, 659 - 672. doi:10.13031/2013.39812.

BORTOLAIA, L. A., **Modelagem matemática e simulação do processo de secagem artificial de grãos de soja em secadores de fluxo contínuo**. (2011). 160 f. Tese de doutorado (Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. – UFRGS. Porto Alegre.

CUNDALL, P. A., & STRACK, O. D. L. (1979). **Discrete numerical model for granular assemblies**. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics. Abstracts Geotechnique, 16, 77. doi:http://dx.doi.org/10.1016/0148-9062(79)91211-7.

DONZÉ, F.V. KOZICKI, J. (2008). **A new open-source software developed for numerical simulations using discrete modeling methods**.

FAVIER, L. DAUDON, D. DONZÉ, F. MAZARS, J. (2009). **Validation of a dem granular flow model aimed at forecasting snow avalanche pressure**. In AIP Conference Proceedings.

GENG, X.; FRASER, W.; VANDENBYGAART, B.; SMITH, S.; WADELL, A.; JIAO, Y. & PATTERSON, G. **Toward digital soil mapping in Canada: Existing soil survey data and related expert knowledge**. In: BOETTINGER, J.L.; HOWELL, D.W.; MOORE, A.C.; HARTEMINK, A.E. & KIENAST-BROWN, S., eds. Digital soil mapping; Progress in soil science, 2. Amsterdam, Springer, 2010. p.325-

GODA, T. J., EBERT, F. (2005). **Three-dimensional discrete element simulations in hoppers and silos**. Powder Technology, v. 158, p. 58-68.

KHATCHATOURIAN, O.BORGES, P. (2003). **Simulation of soy grains drying dynamics in camera of fixed bed**. In Anais CD/ROM, volume 17. COBEM, International Congress of Mechanical Engineering.

KIBAR, H., & OZTURK, T. (2008). **Physical and mechanical properties of soybean**. International Agrophysics, (pp. 239 - 244).

LANGSTON, P. A., TUZUN, U., HEYE, D. M. (1995). **Discrete element simulation of granular flow in 2d and 3d hoppers: dependence of discharge rate and wall stress on particle interactions**. Chemical Engineering Science, v. 50, n. 6, p. 967-987.

LANGSTON, P.A., AL-AWAMLEH, M.A., FRAIGE, F.Y., ASMAR, B.N. (2004). **Distinct element modelling of non-spherical frictionless particle flow**. Chemical Engineering Science 59 (2), 425–435.

MELLMANN, J., IROBA, K., METZGER, T., TSOTSAS, E., MSZROS, C., & FARKAS, I. (2011). **Moisture content and residence time distributions in mixed-flow grain dryers**. Biosystems Engineering, 109, 297 - 307. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2011.04.010.

MONTELLANO, C. RAMIREZ, Á. GALLEGO, E. AYUGA, F. (2011). **Validation and experimental calibration of 3D discrete element models for the simulation of the discharge flow in silos**. Chemical Engineering Science Volume 66, Issue 21, 1 November, Pages 5116–5126.

NEVES, Carlos Eduardo Veras. (2009). **Comportamento de materiais granulares usando o método dos elementos discretos**. 166 f. Dissertação (Mestrado em Geotecnia)-Universidade de Brasília, Brasília.

PINTO, Constantino Niño. (2011). **Uso de elementos discretos na modelagem numérica da perfuração de poços de petróleo por brocas PDC**. 2011. 139 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Pontífice Universidade Católica, Rio de Janeiro.

SILVA, A. C. BERNARDES, A. T. (2010). **Simulação computacional do escoamento de grãos em silos**. *Exacta*, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 45-53.

SMILAUER, V. CHAREYRE, B. (2010). **Yade dem formulation**. In *Yade Documentation* (V. Šmilauer, ed.), The Yade Project, 1st ed.

ZHU, H.P., ZHOU, Z.Y., YANG, R.Y., YU, A.B. (2008). **Discrete particle simulation of particulate systems: A review of major applications and findings**. Chemical Engineering Science, V.63, p. 5728 – 5770.



## TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN PARA FORMAR EL CONCEPTO DE POTENCIA

**Landy Sosa Moguel**

Universidad Autónoma de Guerrero  
Chilpancingo de los Bravo – Guerrero

**Guadalupe Cabañas-Sánchez**

Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de  
Matemáticas  
Chilpancingo de los Bravo – Guerrero

**Eddie Aparicio Landa**

Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de  
Matemáticas  
Chilpancingo de los Bravo – Guerrero

\*Adscritos a la Universidad Autónoma de Yucatán,  
Mérida – Yucatán, México

**RESUMEN:** Se presentan algunos principios y la estructura de tareas de generalización matemática para favorecer el desarrollo del razonamiento inductivo en profesores de matemáticas de educación básica (secundaria), así como para la formación del concepto potencia en ellos. En las tareas, la potenciación es tratada como el proceso para resolver una situación problema sobre el comportamiento exponencial de valores numéricos y la potencia como su solución. Con este tipo de tratamiento se espera mejorar la articulación conceptual en el trabajo con exponentes numéricos naturales y no naturales. Finalmente, se hace una reflexión sobre el papel de la generalización inductiva para identificar elementos conceptuales,

procedimentales y estructurales ligados a la naturaleza epistémica del concepto potencia.

**PALABRAS CLAVE:** Tareas, generalización, razonamiento inductivo, potencia.

**ABSTRACT:** The structure of tasks and some principles of the mathematical generalization that enhance the development of inductive reasoning and the formation of the concept of power in middle school mathematics teachers are shown. In these tasks, exponentiation is used as the process to solve a problem situation on the exponential behavior of numerical values and power as its solution. The intention of this kind of treatment is to improve the conceptual articulation of the work of natural and non-natural numerical exponents. Finally, further reflection is made on the role of inductive generalization to identify conceptual, procedural and structural elements connected with the epistemic nature of the concept of power.

**KEYWORDS:** Tasks, generalization, inductive reasoning, power.

### 1 | INTRODUCCIÓN

En la educación básica (secundaria), procesos matemáticos como la generalización, la argumentación, la conjetura, la resolución de problemas y la construcción de pruebas, por

mencionar algunos, son vertebrales en el aprendizaje (NTCM, 2000; CCSSI, 2010). El favorecimiento del desarrollo de dichos procesos en el aula por parte del profesor demanda no solo un conocimiento profundo de los conceptos matemáticos que se enseñan, sino el entendimiento e interpretación del tipo de razonamiento asociado, por ejemplo, inductivo y deductivo (AMTE, 2017).

Si bien la inducción es una forma de razonamiento que sustenta y potencializa tales procesos (e.g. Castro, Cañadas y Molina, 2010; Cañadas, Deulofeu, Figueras, Reid y Yevdokimov, 2007; Haverty, Koedinger, Klahr y Alibali, 2000; Martínez y Pedemonte, 2014; Yopp, 2010), en programas de desarrollo profesional con profesores de matemática en educación secundaria en México, se han detectado dificultades en su razonamiento inductivo para interpretar y resolver problemas matemáticos de generalización.

En adición, Goizueta y Planas (2013) reportan que un problema en la enseñanza de las matemáticas es la omisión o falta de explicitación de lo epistémico (del conocimiento matemático), en articulación con lo comunicativo, en la gestión de prácticas argumentativas por el profesorado. Al respecto, se ha reportado que el conocimiento matemático que predomina en la mayoría de los profesores de educación básica es de tipo operativo y bajo nivel conceptual (Hill, Rowan y Ball, 2005; Tzur y Timmerman, 1997).

Diversas investigaciones se han centrado en delimitar el conocimiento matemático y pedagógico del profesor, con énfasis en el *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (Contreras, Montes, Climent y Carrillo, 2017), otros bajo el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball, Thames y Phelps, 2008) o en estudiar las dimensiones del *Conocimiento Didáctico-Matemático* (Pino y Godino, 2015). Sin embargo, en pocos estudios se ha cuestionado cómo construye conocimiento matemático y didáctico el profesor. En la literatura en educación matemática, escasos han sido los esfuerzos por trascender del conocimiento al razonamiento del profesor, particularmente el inductivo, para examinar el proceso o la forma en que conceptualiza.

Considerando la existencia de rupturas conceptuales y la ausencia de significados asociados al concepto potencia por parte de profesores de matemáticas, especialmente en el caso con exponentes no naturales (Martínez-Sierra, 2005), se diseñaron tareas de generalización por inducción para examinar la formación del concepto potencia y promover el razonamiento inductivo en profesores de secundaria. En este escrito se presentan los principios y la estructura de las tareas, con base en el establecimiento de elementos teórico-metodológicos para responder a la pregunta ¿Bajo qué principios se pueden estructurar tareas de generalización por inducción para la formación de un concepto, en particular, el de potencia?



## 2 | ELEMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Los conceptos medulares en este estudio son el *razonamiento inductivo* y la *formación de conceptos*, ambos ligados a la *generalización*.

### 2.1 Razonamiento inductivo

Filosófica e históricamente una vía para la generación de conocimiento científico ha sido la búsqueda de relaciones invariantes en un conjunto de hechos, objetos o fenómenos para descubrir las leyes que los rigen. Esta vía es la del razonamiento inductivo (Pineda, 2009; Poincaré, 1948), la cual permite el paso de los hechos singulares a las proposiciones generales (Frolov, 1984).

El razonamiento inductivo es el proceso cognitivo que consiste en inferir una regla general mediante el análisis y la conexión de casos particulares (Pólya, 1957). Es un proceso importante para la formación de conceptos y la resolución de problemas matemáticos, debido a que ayuda a realizar abstracciones y generalizaciones (Sriraman y Adrian, 2004).

En el campo de las matemáticas, Pólya (1966) mostró que es posible descubrir propiedades y teoremas matemáticos razonando de manera inductiva, con base en la sistematización del análisis de datos parciales para detectar regularidades numéricas. Y propuso cuatro fases para ello: observar alguna similitud entre casos particulares, formular una conjetura haciendo un juicio sobre los casos observados, generalizar y verificar la conjetura ensayando con otros casos.

Con base en el trabajo de Pólya, Cañadas y colaboradores (2007, 2009) formularon un modelo empírico de siete fases para describir el razonamiento inductivo en la resolución de problemas de generalización, las cuales se consideraron para delimitar los principios de las tareas. Las fases del razonamiento en este modelo son: trabajo con casos particulares, organización de casos particulares, identificación de patrones, formulación y justificación de conjeturas, generalización y demostración.

### 2.2 Formación de conceptos

Cada vez se aporta mayor evidencia al hecho de que el conocimiento y el pensamiento matemático de una persona está asociado al tipo de experiencias y contextos en los que esta se sitúe, y no solo atañe a la cognición (e.g. Cobb y Yackel, 1996). La *conceptualización* o *formación de conceptos* matemáticos consiste en formar un sistema de representaciones mentales de las características esenciales de un objeto matemático y de sus relaciones con otros objetos (Aparicio, Sosa, Torres y Gómez, 2018). Cognitivamente, formar un concepto implica “seleccionar algunas características de las entidades particulares y descartar otras” (Čadež y Kolar, 2015, p. 286), abstrayendo lo esencial en distintas situaciones y englobarlas en una categoría universal. En ese sentido, puede interpretarse como un proceso de *generalización* conceptual (Davýdov, 1990) para transitar de un elemento o situación particular al

conjunto completo al que pertenecen (el concepto).

La transformación o ampliación de la conceptualización que profesores de matemáticas poseen de un concepto matemático, puede llevarse a cabo mediante experiencias de aprendizaje colectivo basadas en la reflexión de la naturaleza epistémica del concepto (Aparicio et al., 2018). Es decir, experiencias que ofrezcan la oportunidad de reconocer, explicar y usar los conocimientos matemáticos más allá del escenario en que fueron estudiados. Esta posibilidad radica en gran medida en reconocer los elementos conceptuales, procedimentales y estructurales que constituyen un concepto.

Hiebert y Lefevre (1986) sugieren relacionar dos tipos de conocimiento matemático para el desarrollo de habilidades y la comprensión en matemáticos: *conceptual* y *procedimental*. El *conocimiento conceptual* se caracteriza por la construcción de relaciones entre piezas de información (conocer qué). El *conocimiento procedimental* refiere al lenguaje o formas de representación simbólica de las matemáticas, así como a los algoritmos, reglas y métodos para resolver tareas matemáticas (conocer cómo). Jonassen, Beissner y Yacci (2013) señalan que además se debe adquirir un *conocimiento estructural*, es decir, conocer cómo se interrelacionan los conceptos. Esto es, cómo la información está organizada en un dominio de conocimiento.

### 2.3 Generalización por inducción en el diseño de tareas para formar conceptos

La generalización se asume como una fase esencial del razonamiento inductivo y también interviene en la formación de conceptos. Para la formación del concepto potencia se diseñó un conjunto de tareas que promueven el razonamiento inductivo para formular generalizaciones, denominadas de *generalización por inducción* en lo que sigue.

Lo inductivo y la generalización se trabajan en las tareas en dos niveles:

- I. *En lo individual*, cada tarea demanda generalizaciones matemáticas mediante el razonamiento inductivo para resolver situaciones de potenciación.
- II. *En lo global*, se espera que los profesores generalicen elementos epistémicos del concepto potencia, al reconocer una particularidad de estos en la solución de cada situación del conjunto de tareas.

Por ejemplo, generalizar la noción de potencia tratada en cada situación, para englobarla en una categoría general: el significado de potencia como una *relación matemática*. Con este término se denomina a la forma de asociación entre objetos, variables o entes en una situación de la que se puede abstraer alguna cualidad.

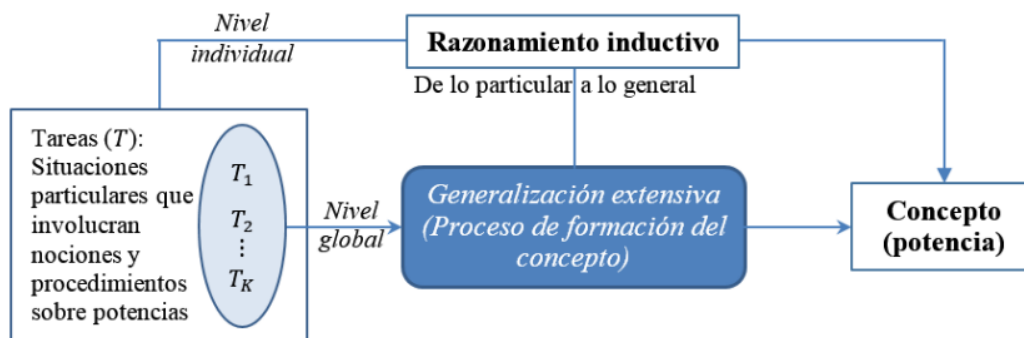


Figura 1. Esquema de generalización inductiva para la formación de un concepto.

### 3 | DISEÑO DE TAREAS DE GENERALIZACIÓN POR INDUCCIÓN SOBRE POTENCIAS

El objetivo de las tareas fue promover el razonamiento inductivo y la generalización para la formación del concepto potencia.

#### a. Principios de las tareas

El diseño de las tareas ( $T$ ) de generalización inductiva se rige por tres principios:

1. Identificar una regularidad o un patrón en un conjunto de objetos, valores o situaciones mediante la examinación de casos concretos o particulares;
2. Formular una conjetura acerca de la regularidad o patrón observado al aplicarlo a otros casos;
3. Generalizar la conjetura y justificarla.

Tales principios se fundamentan en el establecimiento de una correlación entre las fases del razonamiento inductivo (Cañadas y Castro, 2007) y las actividades (A) de generalización propuestas en Ellis (2007), según el siguiente esquema:

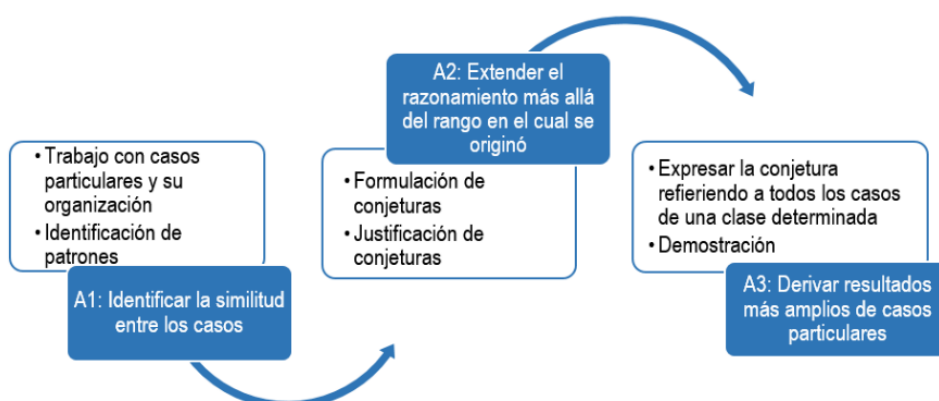


Figura 2. Esquema de la relación generalización-inducción.

#### b. Estructura de las tareas

Las tareas se estructuraron de tal manera que:

- I. En cada una, se presenta una situación que involucra a la *potenciación* como el *proceso* para resolverla y una *potencia* como solución, mediante estrategias de generalización por inducción.
- II. En lo global, un conjunto de tareas tiene como elemento invariante algún aspecto conceptual y operativo del concepto potencia, con el propósito de que los profesores tomen consciencia de y generalicen estos elementos epistémicos.

Por ejemplo, en lo *operativo*, efectuar el cálculo numérico, mediante multiplicaciones reiteradas, de una colección de potencias con base decimal y exponente natural para representar un proceso de potenciación. En lo *conceptual*, reconocer la potencia como una relación que representa la disminución de una cantidad de forma exponencial.

### c. Contenido matemático: elementos epistémicos del concepto potencia

Análisis de aspectos epistemológicos, didácticos y cognitivos asociados al concepto potencia, condujeron a identificar elementos epistémicos del concepto, en síntesis:

- **Lo conceptual.** Refiere a una relación de aumento o disminución, con un comportamiento exponencial, de una cantidad que se multiplica por sí misma. Es el valor que resulta de un proceso de potenciación (Aparicio, Sosa y Gómez, 2016).
- **Lo operativo.** Involucra operaciones, leyes, símbolos y signos para expresar la multiplicación sucesiva de un número o cantidad, es decir, la potenciación.
- **Lo estructural.** Como una estructura algebraica del pensamiento matemático y de la matemática como un todo, está asociada a la multiplicación, la progresión geométrica y lo exponencial. Se conforma de operaciones, símbolos, propiedades, teoremas, etc. para interpretar, representar y describir relaciones matemáticas en situaciones de crecimiento o decrecimiento exponencial de cantidades discretas y continuas.

## 4 | EJEMPLIFICACIÓN DE LAS TAREAS. ANÁLISIS A PRIORI

A continuación se presentan dos tareas (T1 y T2) de generalización por inducción para la formación del concepto potencia, que tratan con colecciones de potencias con base una cantidad decimal o fraccionaria, las cuales tienen comportamiento decreciente.













T1	T2															
<p><b>Situación.</b> En un laboratorio se guarda de un elemento que se reduce el 2% anualmente.</p> <p>Determine cuántos gramos del elemento quedará en doce años.</p> <p>Explique por qué la situación es de potenciación y por qué una potencia es la solución de ésta. Justifique su respuesta.</p>	<p><b>Situación*</b>. Una tira de papel de longitud se divide sucesivamente a la mitad en distintos momentos, como se ilustra a continuación:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Cantidad de papel</th> <th>Momento 1</th> <th>Momento 2</th> <th>Momento 3</th> <th>Momento x</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 m</td> <td>0.5m o <math>\frac{1}{2}m</math></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>a) Calcule la longitud de un pedazo de la tira en el momento 3. Proponga una expresión para calcular la longitud de un pedazo de la tira en el momento .</p> <p>*Adaptada de Aparicio, Sosa y Gómez (2016)</p>	Cantidad de papel	Momento 1	Momento 2	Momento 3	Momento x						1 m	0.5m o $\frac{1}{2}m$			
Cantidad de papel	Momento 1	Momento 2	Momento 3	Momento x												
																
1 m	0.5m o $\frac{1}{2}m$															

Tabla 1. Ejemplos de tareas de generalización inductiva sobre potencias.

Por cuestiones de espacio se ejemplifica y muestra el análisis a priori de T1.

### a. Acerca de la generalización por inducción

En esta tarea se espera que se movilicen estrategias heurísticas de generalización inductiva, como la siguiente:

Paso	Descripción										
1	Plantear la situación en términos de potencias o exponenciales, esto es, representar algunos casos particulares aritmética o geoméricamente. Por ejemplo: <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="padding: 2px;">Año (n)</th> <th style="padding: 2px;">Cantidad de elemento</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center; padding: 2px;">1</td> <td style="padding: 2px;"><math>1 - (1)(0.02) = 0.98</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;"><math>(1 - 0.02) - (1 - 0.02)(0.02) = (1 - 0.02)^2 = (0.98)^2</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 2px;">3</td> <td style="padding: 2px;"><math>(1 - 0.02)^3 = (0.98)^3</math></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 2px;">⋮</td> <td style="text-align: center; padding: 2px;">⋮</td> </tr> </tbody> </table>	Año (n)	Cantidad de elemento	1	$1 - (1)(0.02) = 0.98$	2	$(1 - 0.02) - (1 - 0.02)(0.02) = (1 - 0.02)^2 = (0.98)^2$	3	$(1 - 0.02)^3 = (0.98)^3$	⋮	⋮
Año (n)	Cantidad de elemento										
1	$1 - (1)(0.02) = 0.98$										
2	$(1 - 0.02) - (1 - 0.02)(0.02) = (1 - 0.02)^2 = (0.98)^2$										
3	$(1 - 0.02)^3 = (0.98)^3$										
⋮	⋮										
2	Establecer un patrón exponencial de forma verbal, aritmética, algebraica, geométrico-gráfico o combinación de ellos que represente al proceso de decrecimiento. Ejemplo: [Patrón algebraico]										
3	Reconocer que la respuesta corresponde a un valor numérico (una potencia) que debe ser resultado de un proceso de potenciación:										

### b. Sobre la formación del concepto potencia

Se prevé el reconocimiento de la *potenciación (lo procedimental)* en el proceso de resolución de la tarea por parte de los profesores respecto a los dos aspectos siguientes:

1. Se trata de una situación de *crecimiento exponencial*, por ejemplo, en el comportamiento de la variable llamada “cantidad de elemento”. La reducción del elemento sigue un *comportamiento exponencial*, es decir, *la rapidez con que decrece la cantidad de elemento por año es cada vez mayor*; no se reduce de forma constante cada año. Lo anterior puede analizarse numérica y gráficamente.
2. En la situación interviene un *factor multiplicativo* reductivo de una cantidad en forma no lineal o constante. La cantidad de gramos que quedan del

elemento en cada año representa una colección de potencias con la misma base, es decir, *un proceso de multiplicación reiterada de un número () por sí mismo*. A este proceso operativo aritmético se denomina *potenciación*.

Asimismo, en lo **conceptual** se espera que se identifique que la solución o resultado de la situación representa una *potencia*. La solución es la cantidad de elemento que queda a los doce años y representa *una relación multiplicativa sucesiva de un número (0.98) cierta cantidad de veces (12)*. Esto es, la potencia:  $(0,98)^{12}$ .

El reconocimiento de la dimensión **estructural** del concepto potencia reside en la posibilidad de llevar el razonamiento inductivo a otro nivel más allá de la particularidad de cada tarea, a través de reflexionar sobre la idea de que la situación y la solución de cada una constituyen solamente un caso particular que puede sentar la base para racionalizar a la potencia como un concepto general.

## 5 | DISCUSIÓN

Cognitivamente, todo pensamiento y, por ende, la generación de conocimiento se realiza por medio de la producción de generalizaciones (Rubinstein, 1979). La formación de conceptos matemáticos en tanto un proceso del pensamiento, se basa en la generalización (Dörfler, 1991; Sriraman y Adrian, 2004), pues este proceso cognitivo permite percibir y abstraer las propiedades o características generales de un conjunto de objetos, hechos o situaciones. Es por esta razón que los principios y la estructura de las tareas para la formación del concepto potencia en particular (o matemáticos en general) tienen soporte en la generalización. Según Davýdov (1990), hacer una generalización significa “descubrir un principio, una conexión necesaria del fenómeno individual dentro de cierta totalidad” (p. 138). Un aspecto medular de dicho proceso es la percepción de lo general en lo particular, y está ligado al desarrollo del razonamiento inductivo.

Llegar a la instancia del reconocimiento de un concepto en su dimensión estructural amerita acciones de generalización extensiva como las propuestas por Ellis (2007). En el caso del concepto potencia, el entendimiento de esta dimensión por los profesores se vislumbra como la base para el establecimiento de un marco de referencia que permita subsanar la ruptura epistemológica referida en Martínez-Sierra (2005) del paso del exponente natural al entero negativo y al racional. De este modo, se espera favorecer una forma de otorgar significado a expresiones de potencias que involucran exponentes no naturales tal como  $(0,98)^{12}$ , por ejemplo, como un modelo de comportamiento exponencial decreciente.

En este trabajo, la propuesta para transitar conceptualmente de la potencia de números con exponente natural a la de exponente negativo o racional, consiste en la resolución de tareas de generalización por inducción. Un elemento epistémico estructural para la conceptualización de este concepto matemático, es la idea de que la potencia de un número representa el crecimiento o decrecimiento exponencial de



una cantidad. En las tareas, la generalización del comportamiento exponencial de una cantidad variable es considerada como un mecanismo para pasar del conocimiento procedimental al conceptual en la formación del concepto potencia.

## 6 | REFLEXIONES FINALES

Si bien se atribuye un papel al contexto y a las experiencias en la conceptualización matemática, en este escrito se presenta la componente cognitiva de una propuesta para la formación del concepto potencia, que consiste en un conjunto de tareas que demandan generalizar usando razonamiento inductivo.

La interpretación y resolución de tareas de generalización por inducción para abstraer elementos epistémicos del concepto potencia, se propone no solo como una forma para desarrollar el razonamiento inductivo de profesores, sino para sensibilizarlos sobre una forma didáctica-pedagógica de promover el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. En efecto, la resolución y análisis de las tareas en experiencias de aprendizaje profesional docente ha conducido a la reflexión de que cada situación propuesta y su solución son casos particulares de potenciación que se pueden llegar a generalizar y, por tanto, constituyen ejemplos de tareas que favorecen la inducción y la generación de conocimiento sobre potencia.

## REFERENCIAS

APARICIO, E. et al. **Reconceptualización del saber matemático en educación básica**. Mérida: Editorial de la Universidad Autónoma de Yucatán, 2018

APARICIO, E.; SOSA, L.; GÓMEZ, K. Álgebra y pensamiento algebraico. Experiencias de aprendizaje en bachillerato. Mérida: Editorial de la Universidad Autónoma de Yucatán, 2016.

ASSOCIATION OF MATHEMATICS TEACHER EDUCATORS. **Standards for preparing teachers of mathematics**. Disponible em: <<http://amte.net/standards/>>. Acesso em: 30 Mar. 2017.

BALL, D.L.; THAMES, M.H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of teacher education**, Michigan, v. 56, n. 5, p. 389-407, 2008.

ČADEŽ, T. H.; KOLAR, V. M. Comparison of types of generalizations and problem-solving schemas used to solve a mathematical problem. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 89, n. 2, p. 283-306, 2015.

CAÑADAS, M. C.; CASTRO, E. A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. **PNA: Revista de investigación en didáctica de la matemática**, Granada, v. 1, n. 2, p. 67-78, 2007.

CAÑADAS, M. C.; CASTRO, E.; CASTRO, E. Utilización de un modelo para describir el razonamiento inductivo de los estudiantes en la resolución de problemas. **Electronic Journal of Research in Educational Psychology**, Almeria, v. 7, n. 1, p. 261–278, 2009.

CAÑADAS, M. C. et al. The conjecturing process: perspectives in theory and implications in practice. **Journal of teaching and learning**, Windsor, v. 5, n. 1, 2007.



CASTRO, E.; CAÑADAS, M. C.; MOLINA, M. El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. **UNO**, Barcelona, n. 54, p. 55-67, abr. 2010.

COBB, P.; YACKEL, E. Constructivist, emergent and sociocultural perspectives in the context of developmental research. **Educational psychologist**, Philadelphia, v. 31, n. 3/4, p. 175-190, 1996.

CONTRERAS, L. et al. Introducción al modelo MTSK: Origen e investigaciones realizadas. **Revista FOR-MATE**, Zacatecas, n. 3, p. 7-15, 2017.

COMMON CORE STATE STANDARDS INITIATIVE. **Common core state standards for mathematics**. Disponível em: <<http://www.corestandards.org/>> Acesso em: 21 Nov. 2016.

DAVYDOV, V. Type of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. In: KILPATRICK, J. (Ed.). **Soviet studies in mathematics education**. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, 1990, v. 2, p. 2-223.

ELLIS, A. B. Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. **Journal for Research in Mathematics Education**, Virginia, v. 38, n. 3, p. 194-229, 2007.

FROLOV, I. **Diccionario de filosofía**. Moscú: Editorial Progreso, 1984.

GOIZUETA, M.; PLANAS, N. El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. **PNA: Revista de investigación en didáctica de la matemática**, Granada, v. 7, n. 4, p. 155-170, jun. 2013.

Haverty, L. et al. Solving Inductive Reasoning Problems in Mathematics: Not-so-Trivial Pursuit. **Cognitive Science**, New Jersey, v. 24, n. 2, p. 249-298, 2000.

HIEBERT, J.; LEFEVRE, P. Conceptual and procedural in mathematics: an introductory analysis. In: HIEBERT, J. (Ed.). **Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics**. New York: Routledge, 1986, pp. 1-28.

HILL, H.; ROWAN, B.; BALL, D. Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. **American Educational Research Journal**, Washington, D.C., v. 42, n. 2, p. 371-406, 2005.

JONASSEN, D. H.; BEISSNER, K.; YACCI, M. **Structural knowledge: techniques for representing, conveying, and acquiring structural knowledge**. New York: Routledge, 2013.

MARTÍNEZ-SIERRA, G. Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 8, n. 2, p. 195-2018, 2005.

MARTINEZ, M. V.; PEDEMONTE, B. Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 86, n. 1, p. 125-149, 2014.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Standards and Principles for School Mathematics**. Disponível em: <<http://www.nctm.org/standards/>> Acesso em: 24 Oct. 2015.

PINEDA, O. Inducción y deducción como origen de la ciencia. **Konvergencias: filosofía y culturas en diálogo**, Buenos Aires, n. 21, p. 122-133, 2009.

PINO-FAN, L.; GODINO, J. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

**Paradigma**, Aragua, v. XXXVI, n. 1, p. 87-109, 2015.

POINCARÉ, H. **Science and Method**. New York: Dover Publications, 1948.

PÓLYA, G. **How to solve it**. 2. ed. New York: Doubleday, 1957.

PÓLYA, G. **Matemáticas y razonamiento plausible**. Madrid: Tecnos, 1966.

RUBINSTEIN, S. **El desarrollo de la psicología**: principios y métodos. Tradução Augusto Vidal. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1979.

SRIRAMAN, B.; ADRIAN, H. The Pedagogical Value and the Interdisciplinary Nature of Inductive Processes in Forming Generalizations: Reflections from the Classroom The University of Montana. **Interchange**, New York, v. 35, n. 4, p. 407–422, 2004.

TZUR, R.; TIMMERMAN, M. Why do we invert and multiply? Elementary teachers' struggle to conceptualize division of fractions. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 19, 1997, Illinois, **Proceedings**... Normal: Illinois State University, 1997. p. 553-559.

YOPP, D. A. Inductive reasoning to proof. **Mathematics teaching in the middle school**, Virginia, v. 15, n. 5, p. 286-291, 2010.

## SINCRONISMO EM UM NOVO MODELO METAPOPOPULACIONAL COM TAXA DE MIGRAÇÃO INDEPENDENTE DA DENSIDADE

**Francisco Helmuth Soares Dias**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Aplicada  
Porto Alegre – RS

**Jacques Aveline Loureiro da Silva**

Universidade Federal do Rio Grande do Sul,  
Departamento de Matemática  
Porto Alegre – RS

**RESUMO:** Neste trabalho apresentamos um novo modelo metapopulacional com taxa de migração independente da densidade. Obtemos também um critério para a estabilidade do estado síncrono, baseado no cálculo do número de Lyapunov Transversal do atrator sincronizado.

**PALAVRAS-CHAVE:** Metapopulação, Estabilidade, Sincronismo, Número de Lyapunov.

**ABSTRACT:** In this work we present a new metapopulation model with density independent migration rate. We also obtain a criterion for the stability of the synchronous state, based on the calculation of the Transversal Lyapunov number of the synchronized attractor.

**KEYWORDS:** Metapopulation, Stability, Synchronism, Lyapunov number.

### 1 | INTRODUÇÃO

As pesquisas em dinâmicas populacionais têm crescido nas últimas décadas, principalmente aquelas que consideram que a população está dividida em pequenos fragmentos adequados para reprodução e sobrevivência da espécie, ditos sítios ou *patches*, e ao conjunto discreto deles denominado metapopulação, como pode ser visto em Jansen e Lloyd (2000) e Silva, Barrionuevo e Giordani (2010).

O termo metapopulação foi utilizado pioneiramente por Levins (1969), para descrever uma população de populações. Uma metapopulação em que todos os seus sítios possuem a mesma dinâmica local (reprodução e sobrevivência) é dita homogênea. Caso contrário, a metapopulação é dita heterogênea.

Os sítios estão cercados por um ambiente hostil e totalmente impróprio para reprodução e sobrevivência. A conexão entre eles ocorre através de movimentos migratórios. Neste trabalho, migração e dispersão terão o mesmo significado, e serão utilizadas para descrever o movimento dos indivíduos de um sítio para outro.

Com a movimentação entre os sítios, pode-se dar início a um outro processo muito importante, denominado sincronização. Segundo Earn, Levin e Rohani (2000) a

sincronização está fortemente correlacionada com a extinção da metapopulação. Uma dinâmica sincronizada ocorre quando todos os sítios da população, com condições iniciais diferentes, passam a ter o mesmo número de indivíduos num determinado instante de tempo, a partir do qual oscilam de maneira idêntica.

## 2 | O MODELO METAPOPOPULACIONAL

Consideremos uma metapopulação homogênea formada por  $n$  sítios enumerados de 1 até  $n$ . Em cada sítio existe uma população de uma única espécie, chamada população local ou subpopulação. Denotamos por  $x_t^i$  o número de indivíduos do sítio  $i$  no instante de tempo  $t$  e vamos supor que uma função  $f$ , suave em  $[0, \infty)$  descreve o processo de dinâmica local. Então, na ausência de migração entre os sítios, a evolução de cada população é dada por

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), i = 1, 2, \dots, n, t = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

Exemplos para a função  $f$  podem ser encontrados em Hassel (1975).

Terminado o processo de dinâmica local em cada sítio, ocorre o processo de migração. A cada passo de tempo, uma fração  $\mu$  de indivíduos,  $\mu \in [0, 1]$ , deixa um dado sítio e migra para outros sítios mais próximos. Dos indivíduos que migram dos sítios vizinhos  $j$ , uma fração  $c_{ij}$  chegará ao sítio  $i$ . Por se tratar de um processo de curta duração, supomos que não há perdas durante essa movimentação, ou seja,  $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1, j = 1, \dots, n$ . Assumimos ainda que  $c_{ii} = 0$ . Os elementos  $c_{ij}$  formam a matriz de conexão  $C = [c_{ij}], i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Uma vez que existe a dispersão, precisamos definir a topologia da rede. Como queremos evitar efeitos de fronteira, utilizaremos redes unidimensionais em forma de anéis cíclicos. Neste caso, a matriz de conexão para um anel cíclico de conexão local e para um anel cíclico de conexão global são matrizes circulantes de ordem  $n$ , dadas respectivamente por

$$C = \text{circ} \left( 0, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2} \right), \quad (2)$$

e

$$C = \text{circ} \left( 0, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1} \right). \quad (3)$$

Levando em conta as considerações anteriores, podemos escrever um sistema de equações que descreve a dinâmica metapopulacional, dado por

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t^i) + \mu \sum_{j=1}^n c_{ij} \frac{f(x_t^i)}{\sum_{k=1}^n c_{kj} f(x_t^k)} f(x_t^j), i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

### 3 | SINCRONIZAÇÃO

A sincronização do sistema (4) é obtida quando todos os sítios apresentam a mesma densidade populacional em cada tempo  $t$ . Isto significa que  $x_t^i = x_t$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Substituindo isso em (4) obtemos

$$x_{t+1}^i = (1 - \mu)f(x_t) + \mu \frac{f(x_t) \sum_{j=1}^n c_{ij}}{f(x_t) \sum_{k=1}^n c_{kj}} f(x_t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Já sabemos que  $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Supondo que  $\sum_{i=1}^n c_{ij} = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , obtemos que a matriz  $C$  é duplamente estocástica, e por consequência a expressão acima torna-se

$$x_{t+1}^i = f(x_t^i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

que é exatamente a dinâmica de um sítio isolado dada em (1). Portanto, a dinâmica de cada sítio no estado sincronizado satisfaz a dinâmica de um sítio isolado.

Consideremos a órbita sincronizada  $s_t = (x_t, x_t, \dots, x_t) \in \mathbb{R}^n$  do sistema (4). Queremos determinar se as órbitas que iniciam próximas do estado sincronizado, serão atraídas para este estado. Com este objetivo, linearizamos o sistema (4) em torno da órbita sincronizada. Para isso, calculamos a matriz Jacobiana e aplicamos ela na órbita sincronizada, obtendo

$$J(s_t) = \Omega f'(x_t), \tag{5}$$

onde  $\Omega = I_n - \mu B$  com  $I_n$  a matriz identidade de ordem  $n$  e  $B = [b_{ij}]$  a matriz quadrada de ordem  $n$  definida por

$$b_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n c_{ik}^2, & \text{se } i = j, \\ \sum_{k=1}^n c_{ik}c_{jk} - c_{ij}, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \tag{6}$$

Temos que a matriz  $B$  é circulante. Logo, existe uma matriz  $F$  que diagonaliza a matriz  $B$  (Davis, 1979). Mais precisamente,  $B = FDF^{-1}$ , onde  $F = [f_{ij}]$  é a matriz de Fourier, definida por  $f_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \exp(-\frac{2\pi}{n} \sqrt{-1}) \right)^{(i-1)(j-1)}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , e  $D = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$  sendo  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ , os autovalores da matriz  $B$ .

Uma vez que  $\sum_{j=1}^n b_{ij} = 0$ , segue que  $\lambda_0 = 0$  é um autovalor simples da matriz  $B$  associado ao autovetor  $v = (1, 1, \dots, 1)$ , já que  $Bv = (0, 0, \dots, 0)^T = 0v$ . Portanto, a matriz  $\Omega$  toma a forma

$$\Omega = F \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & I_{n-1} - \mu \bar{D} & & \\ 0 & & & \end{bmatrix} F^{-1}, \tag{7}$$

onde  $\bar{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ .

Observemos que  $\omega = 1$  é um autovalor simples de  $\Omega$  e seu correspondente autoespaço é exatamente a diagonal do espaço de fase que é precisamente o estado sincronizado. Isto significa, que as perturbações nesse espaço podem ocorrer

livremente. Já as perturbações no espaço gerado pelos autovalores de  $I_{n-1} - \mu\bar{D}$  são transversais ao estado sincronizado e deverão tender a zero para obtermos estabilidade assintótica.

Como o objetivo é verificar o crescimento das perturbações transversais à órbita sincronizada, basta considerar

$$J(s_t) = F[(I_{n-1} - \mu\bar{D})f'(x_t)]F^{-1},$$

e analisar a evolução da equação de perturbação, dada por

$$\Delta_{t+1} = (I_{n-1} - \mu\bar{D})f'(x_t)\Delta_t,$$

onde  $\Delta_t$  é um vetor perturbação em  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Escolhendo uma perturbação inicial  $\Delta_0$  qualquer, obtemos

$$\Delta_t = (I_{n-1} - \mu\bar{D})f'(x_{t-1}) \dots (I_{n-1} - \mu\bar{D})f'(x_1)(I_{n-1} - \mu\bar{D})f'(x_0)\Delta_0.$$

Desta forma a perturbação tenderá a zero quando  $t \rightarrow \infty$  se, e somente se,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|P_{\tau-1} \dots P_1 P_0\|^{\frac{1}{\tau}} < 1, \quad (8)$$

onde  $P_t = (I_{n-1} - \mu\bar{D})f'(x_t)$ , com  $t = 0, 1, 2, \dots$

Podemos escrever

$$\|P_{\tau-1} \dots P_1 P_0\|^{\frac{1}{\tau}} = \|(I_{n-1} - \mu\bar{D})^\tau \prod_{t=0}^{\tau-1} f'(x_t)\|.$$

Portanto, temos que

$$L_\perp(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \|P_{\tau-1} \dots P_1 P_0\|^{\frac{1}{\tau}} = L(x_0)\Lambda,$$

onde

$$L(x_0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (\prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)|)^{\frac{1}{\tau}}, \quad (9)$$

é o número de Lyapunov com órbita iniciando em  $x_0$  e  $\Lambda$  é o raio espectral de  $(I_{n-1} - \mu\bar{D})$ , ou seja,

$$\Lambda = \max_{1 \leq i \leq n-1} \{ |1 - \mu\lambda_i| \}. \quad (10)$$

Considerando que a função  $f$  preserva a medida natural  $p$ , aplicando o logaritmo natural em  $(\prod_{t=0}^{\tau-1} |f'(x_t)|)^{\frac{1}{\tau}}$  e utilizando o Teorema de Birkoff, presente em Díaz e Jorge (2007), podemos escrever (9) na forma

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{\tau-1} \ln |f'(x_t)| = \int_0^\infty \ln |f'(x)| d\rho(x),$$

para todo  $x_0$ , a menos de um conjunto de medida  $p$  nula. Consequentemente, o número de Lyapunov é dado por

$$L = e^{\int_0^{\infty} \ln |f'(x)| d\rho(x)}.$$

Podemos assim, a menos de um conjunto de medida  $p$  nula, eliminar a dependência do número de Lyapunov de  $x_0$  e estabelecer  $L_{\perp} = L\Lambda < 1$  como critério para a estabilidade assintótica do atrator sincronizado.

## 4 | APLICAÇÕES

Para a conexão local temos que a matriz  $C$  é dada por (2) e a matriz  $B$  (para  $n \geq 6$ ) torna-se  $B = \text{circ} \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right)$ . Como a matriz é circulante seus autovalores são da forma

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} b_j (\xi_k)^j, \quad (11)$$

com  $\xi_k = \exp \left( \frac{2\pi k}{n} \sqrt{-1} \right)$ ,  $k = 0, \dots, n-1$ . Com alguns cálculos chegamos que

$$\lambda_k = \cos^2 \left( \frac{2\pi k}{n} \right) - \cos \left( \frac{2\pi k}{n} \right).$$

Para  $k=0$  temos  $\lambda_k = 0$ , que é o autovalor associado a diagonal do espaço de fase. Estamos interessados nas perturbações transversais à diagonal do espaço de fase. Dessa forma,

$$\Lambda = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ \left| 1 - \mu \left[ \cos^2 \left( \frac{2\pi i}{n} \right) - \cos \left( \frac{2\pi i}{n} \right) \right] \right| \right\}.$$

Portanto,

$$L_{\perp} = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ \left| 1 - \mu \left[ \cos^2 \left( \frac{2\pi i}{n} \right) - \cos \left( \frac{2\pi i}{n} \right) \right] \right| \right\} L$$

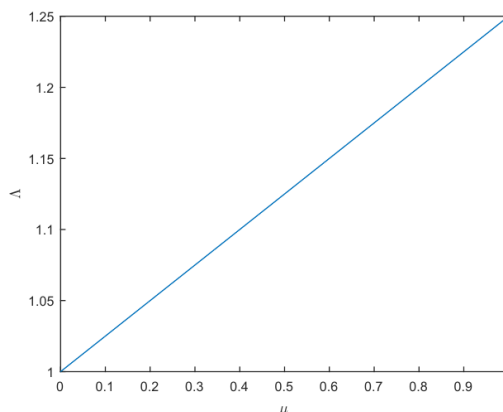


Figura 1:  $\Lambda$  em função de  $\mu$ .

Por sua vez, considerando a rede global, representada pela matriz (3), temos que a matriz  $B$  é dada por  $B = \text{circ} \left( \frac{1}{n-1}, -\frac{1}{(n-1)^2}, \dots, -\frac{1}{(n-1)^2} \right)$ . Da mesma forma, que no caso anterior, os autovalores de  $B$  são dados por (11). Para  $k=0$  temos o autovalor



$\lambda_k = 0$ , o qual está associado ao estado síncrono e não nos interessa. Já para  $k \neq 0$ ,

$$\lambda_k = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2} \sum_{j=1}^{n-1} (\xi_k)^j.$$

Mas  $\sum_{j=1}^{n-1} (\xi_k)^j = -1$ , logo,

$$\lambda_k = \frac{n}{(n-1)^2}, k = 1, \dots, n-1.$$

Consequentemente,

$$\Lambda = \left| 1 - \mu \frac{n}{(n-1)^2} \right|,$$

e dessa maneira,

$$L_{\perp} = \left| 1 - \mu \frac{n}{(n-1)^2} \right| L.$$

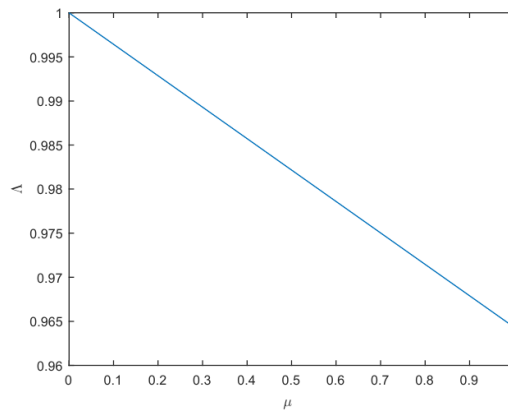


Figura 2:  $\Lambda$  em função de  $\mu$ .

## 5 | CONCLUSÕES

Desenvolvemos um critério para a análise da estabilidade local assintótica da solução sincronizada do sistema (4). Conluímos que quando o número de Lyapunov Transversal  $L_{\perp} < 1$ , ocorre estabilidade local do estado síncrono e para  $L_{\perp} > 1$  ocorre instabilidade local do estado síncrono. Podemos notar ainda, que em ambas as redes local e global, o número de Lyapunov transversal é calculado como o produto de uma componente associada à rede e à taxa de migração, e outra componente dependente da dinâmica local.

## REFERÊNCIAS

DAVIS, P. J. **Circulant Matrices**. John Wiley & Sons Inc, 1979.

DÍAZ, L. J.; JORGE, D. **Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

EARN, D. J. D.; LEVIN, S. A.; ROHANI, P. **Coherence and conservation**. Science, v. 290, p. 1360-1364, 2000.

HASSEL, M. P. **Density-dependence in single-species populations**. J. Anim. Ecology, v. 44, p. 283-295, 1975.

JANSEN, V. A. A.; LLOYD, A. L. **Local stability analysis of spatially homogeneous solutions of multi-patch systems**. J. Math Biol., v. 41, p. 232-252, 2000.

LEVINS, R. **Some demographic and genetic consequences of environmental heterogeneity for biological control**. Bulletin of Entomological Society of America, v. 15, p. 237-240, 1969.

SILVA, J. A. L.; BARRIONUEVO, J. A.; GIORDANI, F. T. **Synchronism in population networks with non linear coupling**. Nonlinear Analysis: Real World Applications, v. 11, p. 1005-1016, 2010.

## SIMULAÇÃO 3D DO FLUXO DE AR DE UM SISTEMA REAL DE ARMAZENAGEM DE GRÃOS

### **Vanessa Faoro**

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul Departamento de Ciências Exatas e Engenharias DCEEng  
Ijuí – Rio Grande do Sul

### **Rodolfo França de Lima**

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul Departamento de Ciências Exatas e Engenharias DCEEng, Ijuí – RS  
Ijuí – Rio Grande do Sul

### **Aline Tampke Dombrowski**

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul Departamento de Ciências Exatas e Engenharias DCEEng, Ijuí – RS  
Ijuí – Rio Grande do Sul

### **Manuel Osório Binelo**

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul Departamento de Ciências Exatas e Engenharias DCEEng, Ijuí – RS  
Ijuí – Rio Grande do Sul

**RESUMO:** Em armazéns graneleiros a conservação dos grãos por determinado tempo depende principalmente de um eficiente sistema de aeração, preservando a quantidade e a qualidade dos grãos armazenados. Para um bom sistema de aeração um modelo matemático e software foram desenvolvidos para simular a distribuição do fluxo de ar em armazéns graneleiros horizontais, em condições

não homogêneas e anisotrópicas. Com a simulação foi possível analisar a distribuição do fluxo de ar em todos os pontos da massa de grãos armazenada. Dados experimentais sobre a distribuição de pressão de um sistema real de armazenagem de grãos foram obtidos. Comparação entre os dados experimentais e simulados mostraram concordância satisfatória. Avaliação do desempenho do sistema de aeração foi realizada, usando critério proposto pelos autores para estimar a eficácia da distribuição do fluxo de ar em armazéns graneleiros.

**PALAVRAS-CHAVE:** Modelagem Computacional, Modelagem Matemática, Método dos Elementos Finitos, Sistema de Aeração.

**ABSTRACT:** In warehouses, storing grain in bulk for a given time depends primarily on an efficient aeration system, preserving the quantity and quality of the stored grain. For a good aeration system and software were developed to simulate the distribution of horizontal bulk materials in nonhomogeneous and anisotropic conditions. With the simulation it was possible to analyze the distribution of airflow at all points of the mass of stored grains. Experimental data on the pressure distribution of a real grain storage system were obtained. Comparison between the experimental and simulated data

showed satisfactory agreement. Evaluation of the performance of the aeration system was performed, using criteria proposed by the authors to estimate the efficiency of the distribution of airflow in storage bins.

**KEYWORDS:** Computational Modeling, Mathematical Modeling, Finite Element Method, Aeration System.

## 1 | INTRODUÇÃO

Devido ao clima quente e úmido no Brasil, a armazenagem de grãos ao longo prazo só é possível com o uso de sistemas de aeração. A fim de compensar a deficiência de capacidade de armazenamento no país, a construção e exploração de grandes armazéns horizontais atinge dimensões adotadas amplamente significativas, tornando difícil e as vezes impossível a aeração no armazém graneleiro. Durante o tempo de armazenamento, a quantidade do produto armazenado não é constante (parte da massa de grãos pode ser extraído ou adicionado), que altera as condições de fluxo de ar.

Além disso, há presença da não homogeneidade da massa de grãos, devido à compactação e anisotropia da forma esférica das sementes, torna o problema da distribuição do fluxo de ar no armazenamento mais difícil. Conforme Weber (2005), sistema de aeração ineficiente pode causar problemas como migração de umidade de grãos, superaquecimento de grãos devido à atividade biológica, e a proliferação de fungos e insetos.

Existem vários fatores que afetam a distribuição do fluxo de ar em armazéns graneleiros, por exemplo, o método de enchimento, a profundidade da massa de grãos, a morfologia dos grãos, velocidade dos ventiladores acionados, etc. Em obras de Shedd (1953), Brooker et al. (1982), Jayas et al. (1987), Maier et al. (1992), Weber (2005), Khatchatourian et al. (2006), Khatchatourian et al. (2007) e Khatchatourian et al. (2009), o fluxo de ar através da massa de grãos sob a influência de algumas destas características foi estudada. Em grandes armazéns, a não homogeneidade foi estudada por Khatchatourian e Binelo (2008) e anisotropia da massa de grãos por Hood e Thorpe (1992).

Os principais objetivos do presente trabalho foram: *a)* contribuição da implementação do modelo matemático e software para calcular a pressão estática, analisar a distribuição do fluxo de ar em 3D, com condições não homogêneas e anisotrópicas; *b)* coletar dados experimentais da distribuição de pressão em diferentes profundidades de um sistema real de armazenagem de grãos; *c)* realizar simulações numéricas 3D do fluxo de ar do sistema real de armazenagem de grãos horizontal; *d)* validar o modelo desenvolvido com dados experimentais; *e)* detectar áreas de risco operacional.

## 2 | DESCRIÇÃO DO SISTEMA DO SISTEMA REAL E ARMAZENAGEM DE GRÃOS

O objeto de estudo deste trabalho é um sistema real de armazenagem de grãos de propriedade de uma empresa, localizada na região do noroeste do estado do Rio Grande do Sul, Brasil (características são apresentadas na Tabela 1). O armazém possui estrutura fundo V, com 180 metros de comprimento e 40 metros de largura. Existem dois sistemas de entrada de ar: 1) sistema de entrada central, 2) sistema de entrada lateral, conforme a Figura 1.

Tipo de grão	Soja
Tipo do armazém	Abaixo do solo, em fundo V
Número de entrada da aeração central	12 registros
Número de ventiladores da aeração central	12 motores de 44 kW/1730 RPM
Número de entrada da aeração lateral	6 registros
Número de ventiladores da aeração lateral	2 motores de 44 kW/1730 RPM
Valor de pressão da aeração central	2942 Pa
Valor de pressão da aeração lateral	982 Pa
Profundidade do armazém estudado	10 m

Tabela 1: Características do armazém graneleiro estudado.

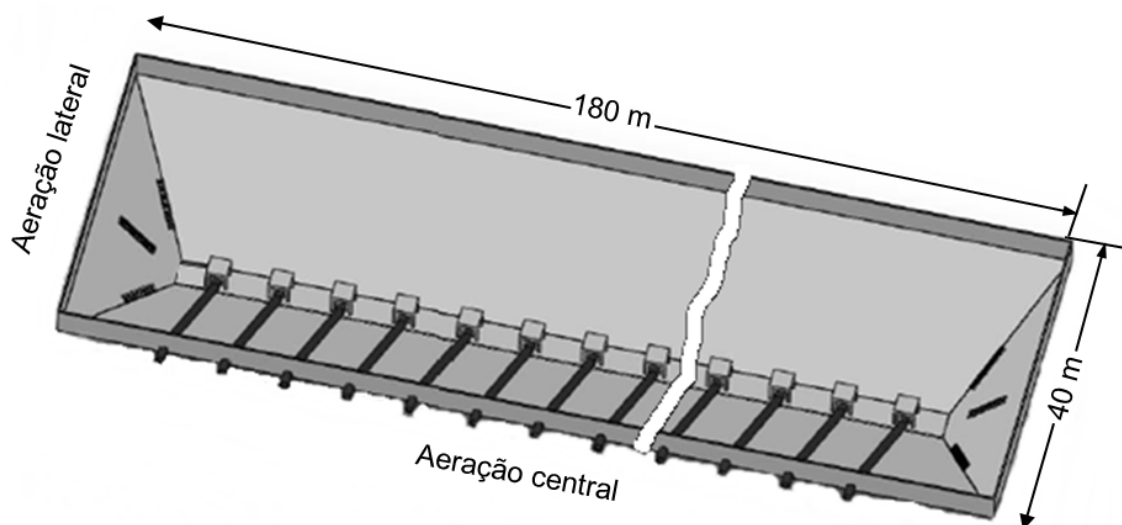


Figura 1: Estrutura do armazém graneleiro estudado.

## 3 | MODELAGEM MATEMÁTICA E DESCRIÇÃO DO SOFTWARE

### 3.1 Modelo matemático

Para simular o fluxo de ar tridimensional em meio particulado, foi utilizado o modelo matemático descrito por Khatchatourian et al. (2009). Para simplificar o modelo, a relação entre a velocidade e o gradiente de pressão estudado, foi apresentada de forma semelhante à equação proposta por Bachmat (1965) e apresentado em Bear

(1988):

$$\text{grad}P = aV + b |V|V \quad (1)$$

onde  $V$  é o vetor velocidade em  $\text{ms}^{-1}$ ; é o gradiente de pressão em  $\text{Pa}$ ;  $a$  e  $b$  são constantes que dependem do tipo de grão.

Como resultado a equação diferencial parcial não-linear para a pressão tem a forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -K_x \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -K_y \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -K_z \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0 \quad (2)$$

onde  $K_x$ ,  $K_y$  e  $K_z$  em  $\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}$ , são os coeficientes de permeabilidade nas principais direções.

Neste trabalho assume-se que: a) o coeficiente de permeabilidade  $K_z$  correspondente à direção vertical; b) os coeficientes pertencentes ao plano horizontal são iguais, isto é,  $K_x = K_y$ . Em grandes armazéns, o coeficiente  $K$  e o gradiente de pressão varia de acordo com a profundidade em que está localizado a camada de grãos. Os resultados obtidos em Khatchatourian e Binelo (2008) foram utilizados para esclarecer a influência do fator de compactação em grandes quantidades na massa de grãos sobre o coeficiente de permeabilidade. A anisotropia da massa de grãos (a diferença entre  $K_x$ ,  $K_y$  e  $K_z$ ) foi obtida de acordo com o trabalho Khatchatourian et al. (2009).

Para avaliar a aeração foi utilizado o critério criado por Khatchatourian e Binelo (2008), chamado de vazão específica local, permitindo avaliar a qualidade da aeração em qualquer ponto do produto. A taxa de fluxo de ar local específica para todos os pontos internos  $X(x,y,z)$  do armazém é:

$$q_L(X) = \frac{V(X)}{\rho(X)L(X)} \quad (3)$$

onde  $q(X)$  é a vazão específica local no ponto  $X(x,y,z)$  em  $\text{m}^3\text{s}^{-1}\text{kg}^{-1}$ ,  $V(X)$  é a velocidade do ar no ponto  $X$  em  $\text{m s}^{-1}$ ,  $\rho(X)$  é a densidade da massa de grãos no ponto  $X$  em  $\text{kg m}^3 \text{ s}^{-1}$ ,  $L(X)$  é o comprimento total em  $\text{m}$  da trajetória do ar que passa pelo ponto  $X$ .

### 3.2 Breve descrição do software

O método dos elementos finitos foi usado para resolver a equação (2) (Seagerlind, 1979). A matriz de coeficientes de permeabilidade  $K$  foi calculada em cada nó da malha

de elementos finitos, utilizando um processo iterativo. O software, desenvolvido em *ANSI C ++* e *Pascal*, usa ferramentas de software livre sempre que possível. Uma descrição mais detalhada do software pode ser encontrado em Khatchatourian e Binelo (2008).

## 4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para validar o modelo matemático e o software, foram obtidos dados experimentais sobre a distribuição de pressão estática em duas camadas de grãos do armazém graneleiro, após foram comparados com os dados da simulação.

### 4.1 Simulação Numérica

Devido ao estudo experimental, foram acionados quatro entradas de ar central e uma lateral, correspondente a massa de grão estudada do armazém. Com a execução do programa, foi obtido como resultado a simulação do fluxo de ar de um sistema real de armazenagem de grãos, onde a pressão é dada em Pascal (Pa).

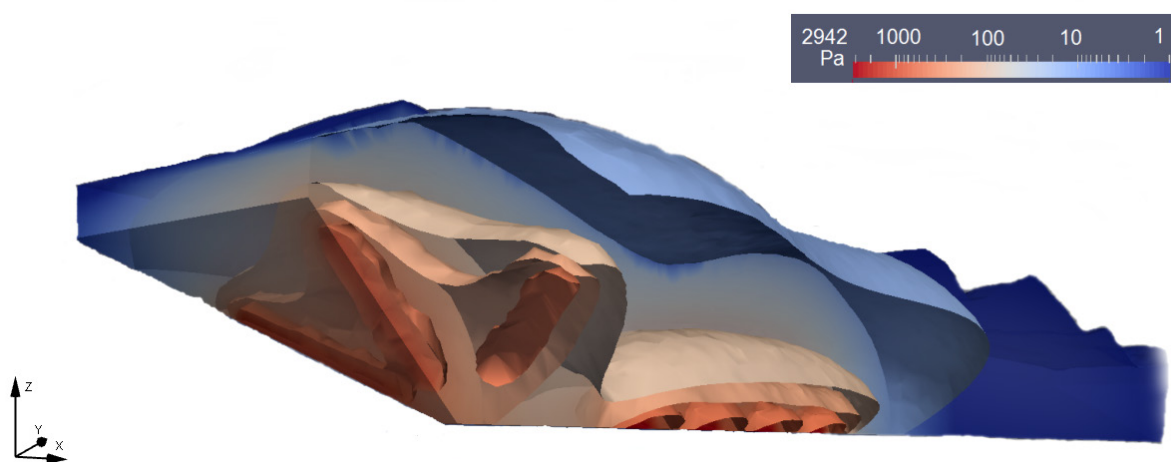


Figura 2: Superfícies isobáricas do armazém estudado.

A Figura 2, apresenta a localização das superfícies isobáricas espacial da distribuição de pressão do ar no armazém, verifica-se o sistema de aeração central e lateral, e a distribuição do fluxo de ar em diferentes valores de pressão na massa de grãos. A Figura 3, mostra a vazão específica local do sistema de aeração estudado, em um corte na secção vertical central, em direção ao eixo x. Percebe-se que a massa central de grãos, possui um grande volume do escoamento do ar transportado em um intervalo de tempo, devido à menor resistência oferecida pela massa de grãos nesta direção.



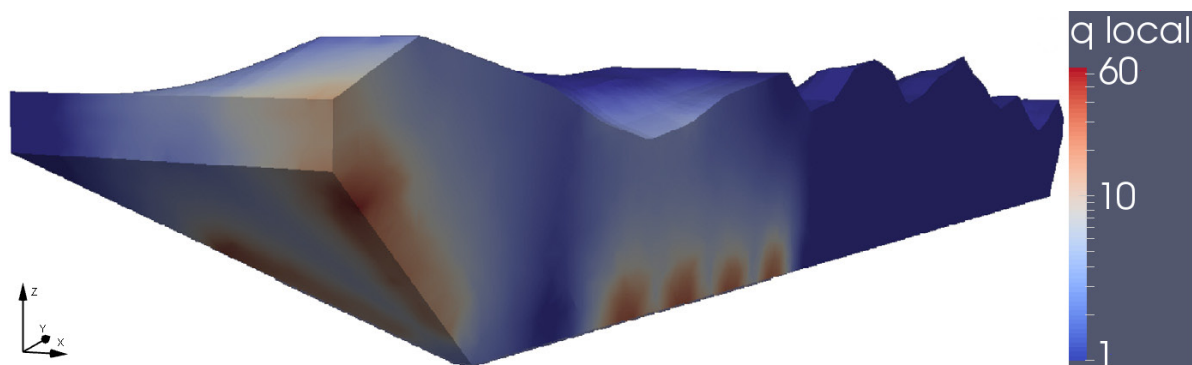


Figura 3: Distribuição de taxas da vazão específica local do sistema real de armazenamento estudado.

As entradas de ar centrais são importantes para o sistema de aeração estudado, contudo, com a análise da vazão específica local do ar, pode-se perceber domínios centrais da massa de grãos com muita vazão, afastando-se do valor taxa recomendado pela literatura mundial de  $13m^3h^{-1}t^{-1}$ . Devido ao volume e a não uniformidade significativa da massa de grãos do armazém, a eficácia do sistema de aeração deve ser melhorada. Para armazéns horizontais estas melhorias podem ser alcançadas, em particular, através da otimização do controle do sistema de aeração, abrangendo um dimensionamento e pressão das entradas de ar adequados para um bom armazenamento.

#### 4.2 Resultado experimental, validação do modelo e software

O estudo experimental foi realizado em apenas um terço da massa de grãos do armazém, portanto foram acionados as entradas de ar correspondente a massa de grão estudada (Figura 1, lado direito). A pressão estática foi medida em profundidades de 1 e 2 metros abaixo da massa de grãos, em 28 pontos, (com espaçamento no eixo  $x$  a cada 8 metros). Para a coleta dos dados experimentais de pressão, foram imersas na massa de grãos, sondas com as respectivas profundidades, analisando a pressão através manômetro. Foi adotado o manômetro tubo U inclinado em relação ao eixo horizontal com ângulo de  $30^\circ$ , adequado para medições de pequenas pressões com boa precisão. Para a medição da pressão da entrada do ar, foi adotado o manômetro Tubo em U.

Os dados experimentais da medição da pressão estática estão apresentados na Figura 4. De acordo com o esquema de enchimento do armazém, com a redução da profundidade da camada de grãos perto do eixo longitudinal, a pressão estática tem valor maior em pontos situados mais próximo do eixo longitudinal do armazém graneleiro. Por conseguinte, na periferia do armazém, em que o caminho entre a entrada e saída de ar é máxima, a pressão tem valores menores. O valor mais alto de pressão estática ( $44 Pa$ ) foi obtido na secção de  $X = 30 m$ , na profundidade de 2 metros.

A análise estatística dos dados experimentais e simulados foi satisfatória (Figura

4). Os valores do coeficiente de determinação ( $R^2 = 0,72$  profundidade de 1 metro e  $R^2 = 0,92$  profundidade de 2 metros) indicam a precisão do modelo e do software desenvolvido, possibilitando utilizar a simulação tridimensional do fluxo de ar em armazéns graneleiros horizontais, para problemas de otimização do fluxo de ar.

## 5 | CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi estudado a distribuição do fluxo de ar de um sistema real de armazenagem de grãos, uma análise foi realizada para detectar áreas de risco e, conseqüentemente, melhorar a eficiência do processo de aeração. A fim de validar o modelo e o software desenvolvido, dados experimentais sobre a distribuição de pressão de um sistema real de armazenagem de grãos foram obtidos. Comparação entre os dados experimentais e simulados mostrou uma concordância satisfatória (coeficiente de determinação  $R^2 = 0.72$  profundidade de 1 metro e  $R^2 = 0,92$  profundidade de 2 metros). Esta validação possibilita utilizar o método para melhorar e otimizar a distribuição do fluxo de ar em armazéns graneleiros horizontais.

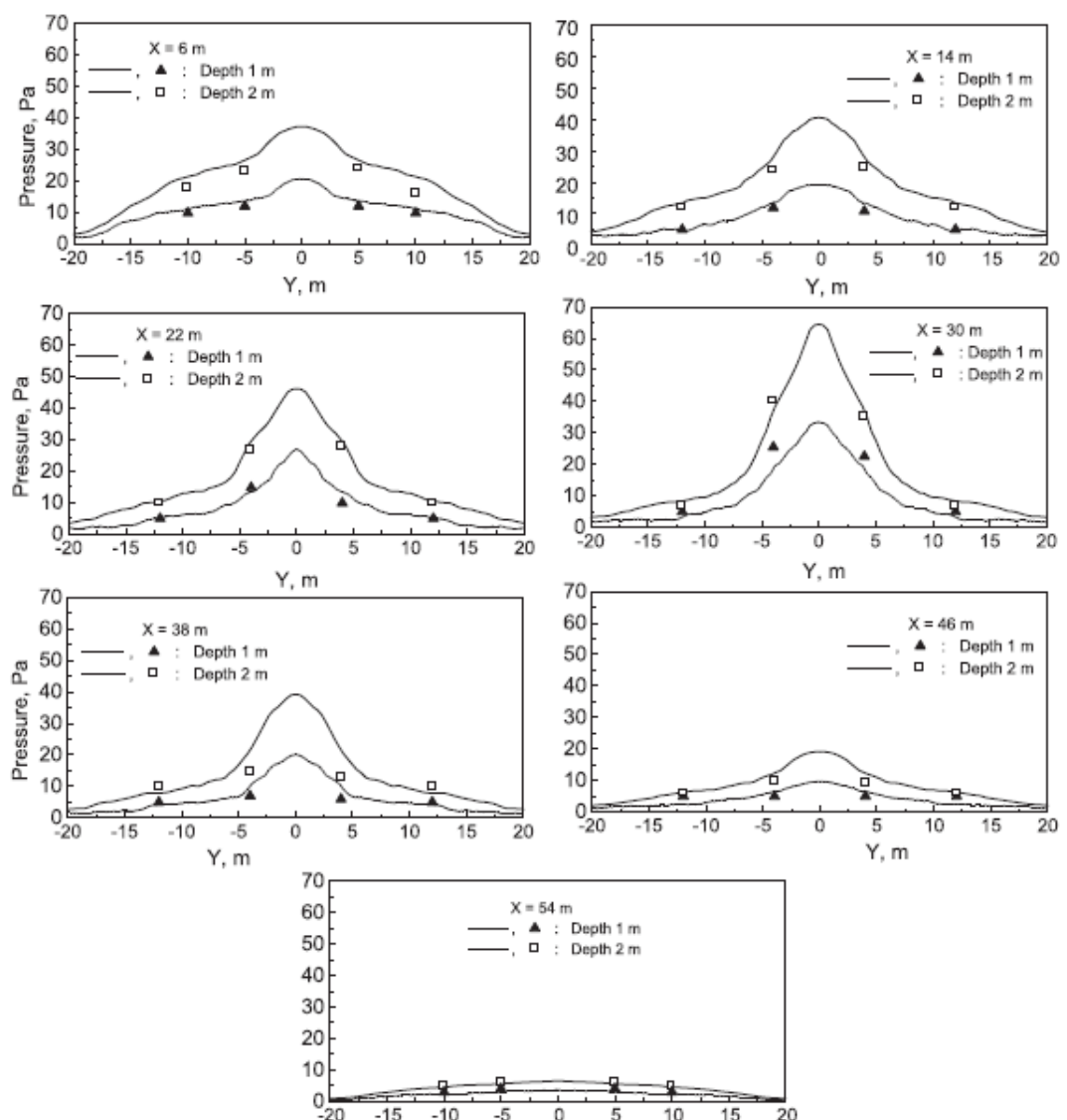


Figura 4: Distribuição de pressão nas camadas de grãos localizadas a uma profundidade de um e dois metros abaixo da massa de grãos: dados experimentais (pontos) e dados simulados (linhas), o coeficiente de determinação de profundidade de um metro  $R^2 = 0.72$  e de dois metros de  $R^2 = 0.92$ .

## 6 | AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (UNIJUÍ) pelo apoio financeiro e a empresa pela ajuda e disponibilidade na coleta dos dados experimentais.

## REFERÊNCIAS

- BACHMAT, Y. **Basic transport coefficients as aquifer characteristics**. Proceedings of the Dubrovnik Symposium, Hydrology of Fractured Rocks., 1:63–75, 1965.
- BEAR, J. **Dynamics of fluids in porous media**. Dover Publications., 1988.
- BROOKER, D. B.; BAKKER-ARKEMA, F. W.; HALL, C. W. **Drying cereal grains**. AVI Publishing Co., Inc., Westport, CT., 1982.
- HOOD, T. J. A.; THORPE, G. R. **The effects of the anisotropic resistance to airflow on the design of aeration systems for bulk stored grains**. Agricultural Engineering Australia. 21:18–23, 1992.
- JAYAS, D. S.; SOKHANSANJ, S.; MOYSEY, E. B.; BARBER, E. B. **The effect of airflow direction on the resistance of canola (rapeseed) to airflow**. Canadian Agricultural Engineering. 29:189–192, 1987.
- KHATCHATOURIAN, O. A.; OLIVEIRA, F. A. **Mathematical modelling of airflow and thermal state in large aerated grain storage**. Biosystems Engineering., 95(2):159–169 , 2006. DOI:10.1016/j.biosystemseng.2006.05.009.
- KHATCHATOURIAN, O. A.; OLIVEIRA, F. A.; BIHAIN, A. **Estado térmico de produtos armazenados em silos com sistema de aeração: estudo teórico e experimental**. Engenharia Agrícola. 27(1):247–258, 2007. DOI:10.1590/S0100-69162007000100019.
- KHATCHATOURIAN, O. A.; BINELO, M. O. **Simulation of three-dimensional airflow in grain storage bins**. Biosystems Engineering., 101(2):225–238, 2008.
- KHATCHATOURIAN, O. A.; TONIAZZO, N. A.; GORTYSHOV, Y. F. **Simulation of airflow in grain bulks under anisotropic conditions**. Biosystems Engineering., 104(2):205–215 , 2009. DOI:10.1016/j.biosystemseng.2009.06.023.
- MAIER, D. E.; MOREIRA, R. G.; BAKKER-ARKEMA, F.W. **Comparison of conventional and chilled aeration of grains under texas conditions**. Applied Engineering in Agriculture., 8(5):661–667, 1992.
- SEGERLIND, L. J. **Applied Finite Element Analysis**. J. Wiley and Sons Inc, New York, USA, 1979
- SHEDD, C. K. **Resistance of grains and seeds to air flow**. Agricultural Engineering, St Joseph, Michigan, 1953.
- WEBER, E. **Excelência em Beneficiamento e Armazenagem de Grãos**. Canoas, RS, 2005.

## CONTROLE ÓTIMO DO FLUXO DE ÁGUA EM UMA FÔRMA DE GELO

**Xie Jiayu**

UTFPR – Departamento Acadêmico de  
Engenharia Eletrônica  
Curitiba – PR

**João Luis Gonçalves**

UTFPR – Departamento Acadêmico de  
Matemática  
Curitiba – PR

**RESUMO:** Este trabalho trata da modelagem do preenchimento de uma fôrma de gelo com água. Desejamos que esse preenchimento seja eficiente. A eficiência pode significar minimizar o desperdício de água ou minimizar o tempo necessário para encher a fôrma, entre outras possibilidades. Os resultados mostraram-se condizentes, uma vez que já havíamos previsto os comportamentos de cada compartimento teoricamente.

**PALAVRAS-CHAVE:** Controle Ótimo; Otimização; Modelagem Matemática; Cálculo Numérico; Bocop.

**ABSTRACT:** This work deals with the modeling of the filling of an ice mold with water. We hope this filling is efficient. Efficiency can mean minimizing waste of water or minimizing the time needed to fill the mold, among other possibilities. The results were consistent, since we had already predicted the behavior of each

compartment theoretically.

**KEYWORDS:** Optimal Control; Optimization; Mathematical Modeling; Numerical Calculus; Bocop.

### 1 | INTRODUÇÃO

Neste trabalho elegemos um problema modelo para aplicar os conceitos estudados na área de cálculo numérico. O problema escolhido pode ser sintetizado na questão “Como encher uma fôrma de gelo de forma ótima?”. Observa-se que essa postura, estudar temas de cálculo numérico conforme a necessidade de um problema modelo de controle ótimo, implica na necessidade de instruir-se em outros temas, como por exemplo modelagem matemática de fenômenos, implementação computacional e otimização, ainda que de forma menos aprofundada.

Tratamos esse problema integralmente, desde sua descrição/modelagem até a aproximação numérica da solução. As duas principais ferramentas computacionais usadas para resolver o problema foram o *Mathematica* e o *Bocop*.

## 2 | OBJETIVOS

- Modelar o preenchimento de uma fôrma com água.
- Estabelecer um funcional que quantifique a eficiência do procedimento.
- Formular o problema de controle ótimo associado ao problema modelo.
- Estudar e aplicar métodos de cálculo numérico.

## 3 | MODELO

O fenômeno que vamos descrever é o enchimento com água de uma fôrma de gelo retangular de 6 compartimentos de dimensões  $1 \times 1 \times 1$ , como a da Figura 1. Para modelar o fenômeno, vamos fazer algumas suposições simplificadoras. Considerando a fôrma com os compartimentos enumerados como na Figura 2, supomos que a água será adicionada apenas pelo compartimento 1, entrando a uma taxa constante igual a 1 e que a diagonal  $d$  da fôrma seja inclinada  $\alpha$  graus em relação ao plano horizontal, sendo o compartimento 1 o mais alto.



Figura 1: Exemplo de fôrma de gelo.

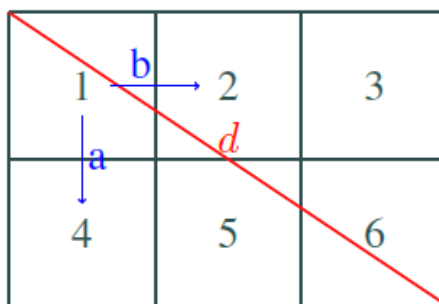


Figura 2: Esboço da fôrma de gelo com seus respectivos cubos enumerados e a diagonal  $d$ .

Supomos ainda que a água não muda de compartimento através da direção diagonal do compartimento, por exemplo, na Figura 2, a água que sai de 1 vai para 2 e 4, conforme setas em azul, mas não vai para 5. Essa suposição não é realística, mas simplifica bastante a dinâmica do modelo. Como único controle sobre o fenômeno, vamos permitir que a fôrma seja rotacionada  $\theta(t)$  graus em torno de  $d$ , com  $\theta_0 \leq \theta(t) \leq \theta_1$ . Note que o volume de água que cada compartimento suporta depende de  $\theta(t)$  e

de  $\alpha$ , esse volume é chamado de volume de suporte,  $V_S(\theta)$ , e é igual para todos os compartimentos.

O volume de água no compartimento  $i$  no instante de tempo  $t$  é dado pela função  $V_i(t)$ . Como  $\theta$  também poderá variar ao longo do tempo, definimos a função  $\theta(t)$ .

Consideramos que a água sai do compartimento  $i$ , no instante  $t$ , se  $V_i(t) > V_S(\theta(t))$  e que a quantidade de água que sai é  $V_i(t) - V_S(\theta(t))$ . Essa quantidade de água é distribuída em duas direções, as direções indicadas pelas setas  $a$  e  $b$  na Figura 2. Assumimos que a distribuição depende do ângulo  $\theta(t)$ , sendo que as direções  $a$  e  $b$  recebem, respectivamente,

$$a(\theta(t)) [V_i(t) - V_S(\theta(t))] \quad \text{e} \quad b(\theta(t)) [V_i(t) - V_S(\theta(t))].$$

A Figura 3 mostra que as funções  $a$  e  $b$  são complementares entre si, totalizando 100%, o que é condizente, visto que todo excesso de água deve sair e se distribuir para os compartimentos vizinhos.

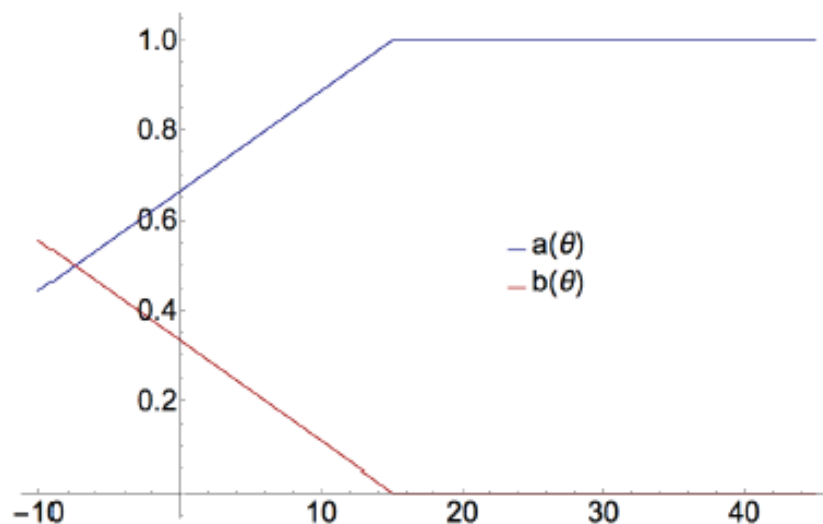


Figura 3: Funções  $a$  e  $b$ .

Assim, o seguinte conjunto de equações descreve a dinâmica do fluxo de água entre os compartimentos:

$$\frac{dV_i(t)}{dt} = (E_i(t) - S_i(t)), \quad \text{para } i = 1, \dots, 6.$$

onde

$$D_i(t) = V_i(t) - V_S(t), \quad \text{para } i = 1, \dots, 6 \text{ e } k = 0, \dots, N$$

$$C_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } D_i(t) > 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

E as equações de entrada,  $E_i$ , e saída,  $S_i$  para cada compartimento são:

$$\begin{aligned}
 E_1(t) &= 1; \\
 S_1(t) &= C_1(t) * (E_1(t) + D_1(t)); \\
 E_2(t) &= b(\theta(t)) * S_1(t); \\
 S_2(t) &= C_2(t) * (E_2(t) + D_2(t)); \\
 E_3(t) &= b(\theta(t)) * S_2(t); \\
 S_3(t) &= C_3(t) * (E_3(t) + D_3(t)); \\
 E_4(t) &= a(\theta(t)) * S_1(t); \\
 S_4(t) &= C_4(t) * (E_4(t) + D_4(t)); \\
 E_5(t) &= b(\theta(t)) * S_4(t) + a(\theta(t)) * S_2(t); \\
 S_5(t) &= C_5(t) * (E_5(t) + D_5(t)); \\
 E_6(t) &= b(\theta(t)) * S_5(t) + a(\theta(t)) * S_3(t); \\
 S_6(t) &= C_6(t) * (E_6(t) + D_6(t));
 \end{aligned}$$

A quantidade de água dentro da fôrma de gelo é

$$J(t) = \sum_{i=1}^6 V_i(t)$$

O problema de controle é, então,

$$\max J(t_f)$$

ou, de forma equivalente,

$$\min -J(t_f)$$

sujeito à

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_i(t)}{dt} &= E_i(t) - S_i(t), \text{ para } i = 1, \dots, 6. \\
 \theta_0 &\leq \theta(t) \leq \theta_1
 \end{aligned}$$

## 4 | RESULTADOS E CONCLUSÃO

Os parâmetros definidos para um dos testes consistem em:

- $V_i(0) = 0$  com  $i = 1, \dots, 6$
- $-5 \leq \theta \leq 5$
- tempo final: 120
- time steps: 120
- tolerância:  $10^{-4}$
- Método usado: Gauss 4ª ordem



O comportamento de cada compartimento no decorrer do tempo está apresentado na Figura 4.

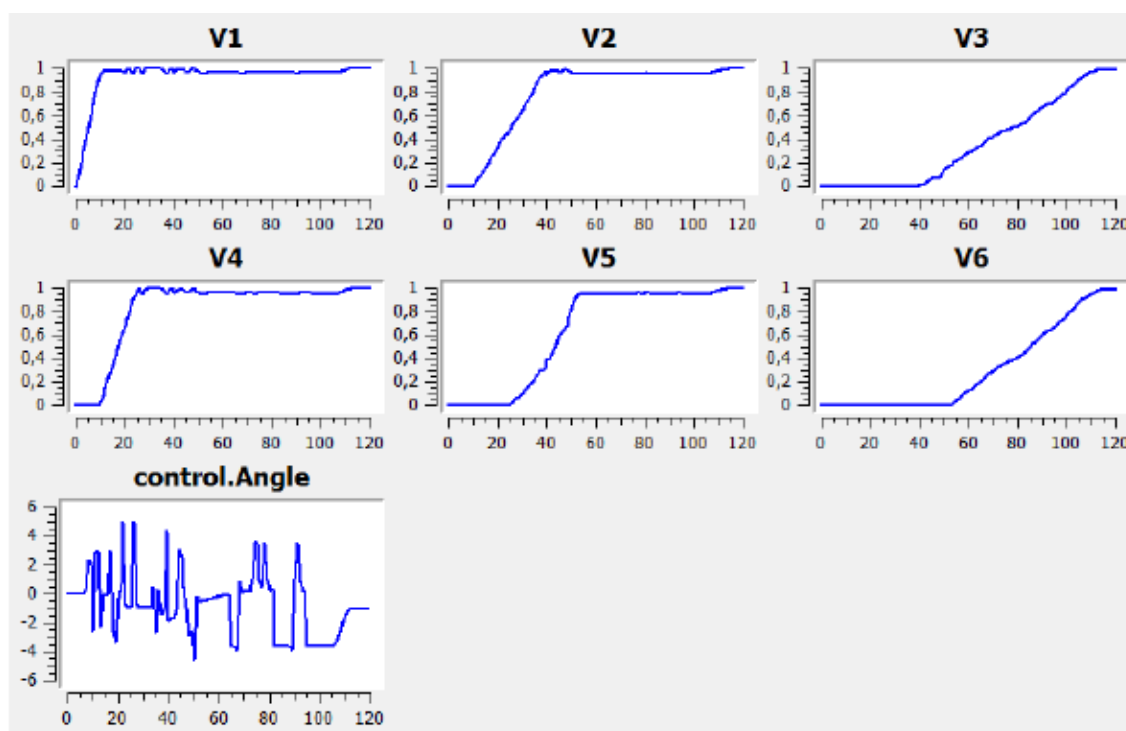


Figura 4: Resultado usando Gauss 4<sup>a</sup> ordem.

Resultado obtido (Gauss 4<sup>a</sup> ordem): -5,971721

Esse resultado corresponde à fôrma de gelo estar com o volume de 5,971721.

Repetindo-se o experimento, com os mesmos parâmetros, mas usando-se o método de Euler implícito de 1<sup>a</sup> ordem, temos um resultado menos próximo do valor teórico:

Resultado obtido (Euler 1<sup>a</sup> ordem): -5,967968

Esse resultado corresponde à fôrma de gelo estar com o volume de 5,967968.

Todos os resultados obtidos, apesar de terem convergido, dentro das iterações máximas do Bocop e dentro da tolerância estipulada, não atingem -6. Isso ocorreu devido a uma aproximação do volume de suporte e da inclinação  $\alpha \neq 0$  feita inicialmente, impedindo que a capacidade máxima em cada compartimento permaneça igual a 1.

## 5 | AGRADECIMENTOS

Agradecemos à CAPES pela manutenção da bolsa para que o projeto fosse possível, ao PICME pela oportunidade do curso de verão e aos pesquisadores Professor Dr. Jair Koiller (INMETRO), Professora Dra. Maria Soledad Aronna (FGV) e ao próprio criador do Bocop, Professor Dr. Pierre Martinon (École Polytechnique), pelo apoio técnico com o Bocop.

## REFERÊNCIAS

F. Bonnans, D. Giorgi, V. Grélard, S. Maindrault and P. Martinon. **BOCOP - User Guide**. 2014.

M. A. G. Ruggiero and V. L. R. Lopes. **Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais**. Pearson Makron Books, São Paulo, 1996.

N. F. Valle, **Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta**, tese de monografia, UFMG, 2012.

V. M. Becerra and R. K. H. Lopes, **Um tutorial sobre métodos pseudo-espectrais para controle ótimo computacional**, *Revista Controle e Automação*, 21:224--244, 2010.

## CÓDIGOS CÍCLICOS DEFINIDOS POR ANULAMENTO

### Conrado Jensen Teixeira

Universidade Federal de Lavras, Departamento  
de Exatas  
Lavras – MG

### Osnel Broche Cristo

Universidade Federal de Lavras, Departamento  
de Exatas  
Lavras – MG

**RESUMO:** Neste trabalho, desenvolvemos a teoria de códigos corretores de erros por condição de anulamento. Para tanto, introduzimos alguns conceitos e ferramentas da álgebra linear, álgebra abstrata e da teoria clássica dos códigos corretores de erros.

**PALAVRAS CHAVES:** Álgebra, Códigos Cíclicos, Códigos Polinomiais, Anulamento.

**ABSTRACT:** In this work, we will present the error-correcting codes by cancellation condition. For this, we introduce some topics of linear algebra, abstract algebra and the classic error-correcting codes theory.

**KEYWORDS:** Abstract Algebra, Cyclic Codes, Polynomial Codes, Cancellation Condition.

### 1 | INTRODUÇÃO

Os códigos corretores de erros se apresentam de forma discreta, porém muito

frequente em nosso cotidiano. Eles surgem sempre quando fazemos uso de informações digitalizadas, tais como assistir um programa de televisão, falar ao telefone, navegar pela internet, enviar mensagem por celular, e ainda em comunicações via satélites, processamento de imagens digitais, entre outros.

Dentre os códigos corretores de erros a classe mais utilizada na prática é a classe dos códigos lineares, do qual destaca-se a classe dos códigos cíclicos. No aspecto teórico, a importância dos códigos cíclicos vem do fato de que vários resultados da álgebra abstrata, em particular corpos finitos, constata-se bastante úteis para caracterizar as propriedades algébricas dessa classe de códigos. Na visão prática, a importância vem do fato desses códigos apresentarem bons algoritmos de codificação e decodificação.

Neste trabalho apresentam-se os códigos cíclicos definidos por condição de anulamento.

### 2 | ELEMENTOS PRINCIPAIS

Seja  $\mathbb{F}$  um corpo finito de dimensão  $n$ . Um código linear  $C \in \mathbb{F}^n_q$  é dito ser um código cíclico se para todo vetor  $(c_0, \dots, c_{n-1})$  pertencente a  $C$ , o vetor  $c = (c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-1})$  também pertence a  $C$ . Similarmente, dado um código linear  $C$ , uma

permutação  $\pi$  de  $0, \dots, n-1$  definida do seguinte modo

$$\pi(i) = \begin{cases} i-1, & \text{se } i \geq 1 \\ n-1, & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

e dada uma transformação linear  $T_\pi(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) = (c_{n-1}, c_0, \dots, c_{n-2})$ , temos que  $C$  será um código cíclico se  $T_\pi(c) \in C$  para todo  $c \in C$ .

Tem que o anel  $R_n = \mathbb{F}[x]/(x^n - 1)$  é isomorfo a  $\mathbb{F}^n$  por meio da transformação linear  $v(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$  tal que  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in R_n$

Todo ideal de  $R_n$  é da forma  $I([f(x)])$  em que  $f(x)$  é um divisor de  $x^n - 1$ . Determina-se  $v(C)$  como um ideal  $R_n$  se, e somente se,  $C$  é um código cíclico.

Seja  $I = I([g(x)])$  em que  $g(x)$  é um divisor de  $x^n - 1$  de grau  $s$ . Caracteriza-se  $I$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{F}$  por  $[g(x)], [xg(x)], \dots, [x^{n-s-1}g(x)]$ .

Para todo código cíclico  $C$  existe um vetor  $v$  que gera  $C$ , matematicamente podemos dizer que  $\exists v \in C$  tal que  $C = \langle v \rangle$ .

### 3 | CÓDIGOS CÍCLICOS POR ANULAMENTO

Seja dado um código cíclico  $C \subset \mathbb{F}_q^n$  em que  $n$  e  $q$  são primos entre si. Seja  $k$  uma extensão do corpo  $\mathbb{F}$  sobre o qual o polinômio  $x^n - 1$  se fatora em fatores lineares mônicos distintos. Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  as raízes de  $g(x)$  em  $k$  que são, portanto, duas a duas distintas. Assim, segue que  $v(C) = I([g(x)]) = \{[f(x)] \in R_n; f(\alpha_1) = \dots = f(\alpha_r) = 0\}$ .

Seja  $f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \in \mathbb{F}[x]$  Tem-se que  $[f(x)]$  é um elemento de  $I([g(x)])$  se, e somente, se  $f(\alpha_i) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \alpha_i^j = 0$  para  $i = 1, \dots, r$ . Pode-se então definir  $C$  pelo polinômio  $g(x)$ , a partir da matriz formada por  $\alpha_i^j$  e o conjunto  $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{F}^n$ . Assim,  $\tilde{H}\alpha^t = 0$ , em que  $\tilde{H}$  é a seguinte matriz com entradas em  $K$

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_r^0 & \dots & \alpha_r^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Como os  $\alpha_i$  são as raízes de  $g(x)$  em  $K$  tem-se que  $\tilde{H}$  não é a matriz teste de paridade de  $C$ . Para se determinar a matriz teste de paridade de  $C$  olha-se para  $K$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{F}_q$  de dimensão finita  $d$ . Logo, pode-se representar os elementos  $\alpha_i^j$  como vetores colunas  $\langle \alpha_i^j \rangle \in (\mathbb{F}_q)^d$ . De modo que  $f(\alpha_i) = \langle \sum_{j=0}^{n-1} a_j \alpha_i^j \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \langle \alpha_i^j \rangle$ .

Define-se, assim, a matriz  $H'$  como sendo

$$H' = \begin{pmatrix} \langle \alpha_1^0 \rangle & \langle \alpha_1^1 \rangle & \dots & \langle \alpha_1^{n-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \alpha_r^0 \rangle & \langle \alpha_r^1 \rangle & \dots & \langle \alpha_r^{n-1} \rangle \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $\alpha \in C$  se, e somente se,  $H'\alpha^t = 0$

## 4 | CONCLUSÕES

Em geral, para conferir se um vetor  $v \in \mathbb{F}^n$  é um elemento de  $C$  com matriz geradora  $G$ , deve-se solucionar um sistema com  $n$  equações e  $k$  incógnitas  $x$ , dado por  $xG = v$ . No entanto, quanto maior o sistema mais custos computacionais se têm. De forma a minimizar esse custo, desenvolve-se uma matriz teste de paridade  $H$ . A matriz teste de paridade permite caracterizar os elementos do código  $C$  por condição de anulamento. Assim, basta verificar se  $Hv^t = 0$ .

## REFERÊNCIAS

A. Hefez, and M. L. T. Villela. **Códigos Corretores de Erros**. Rio de Janeiro, IMPA, 2008. 216 pg. (Série Computação e Matemática).

## ANÁLISE TEÓRICO-EXPERIMENTAL DE DISPERSÃO DE UM CONTAMINANTE COM TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E INFERÊNCIA BAYESIANA

### **Bruno Carlos Lugão**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Instituto Politécnico  
Nova Friburgo, RJ, Brasil

### **Diego Campos Knupp**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Instituto Politécnico  
Nova Friburgo, RJ, Brasil

### **Pedro Paulo Gomes Watts Rodrigues**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Instituto Politécnico  
Nova Friburgo, RJ, Brasil

### **Antônio José da Silva Neto**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Instituto Politécnico  
Nova Friburgo, RJ, Brasil

**RESUMO:** A proposta deste trabalho consiste em estimar a velocidade média e o coeficiente de dispersão longitudinal da equação da advecção-dispersão unidimensional em regime transiente através de um problema inverso. Para tal, foram utilizados dados de um experimento de campo realizado por Sousa (2009), onde foi simulado o lançamento instantâneo de um contaminante conservativo (NaCl) em um trecho do rio São Pedro, localizado na cidade de Nova Friburgo/RJ. O problema direto é resolvido com o método híbrido analítico-numérico conhecido como Técnica da Transformada Integral Generalizada

(GITT). O problema inverso é formulado através da Inferência Bayesiana e resolvido com o Método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC). Os resultados obtidos demonstram a robustez da combinação de transformações integrais e inferência Bayesiana nesta análise.

**PALAVRAS-CHAVE:** Técnica da Transformada Integral Generalizada, Problemas Inversos, Inferência Bayesiana, Monte Carlo via Cadeias de Markov.

**ABSTRACT:** The purpose of this study is to estimate the average speed and the longitudinal dispersion coefficient of the advection-dispersion equation transient one-dimensional through an inverse problem. For this, we used data from a field experiment conducted by Sousa (2009), which was simulated instantaneous release of a conservative contaminant (NaCl) on a stretch of the river San Pedro, located in the city of Nova Friburgo / RJ. The direct problem is solved with the analytical-numerical hybrid method known as Generalized Integral Transform Technique (GITT). The inverse problem is formulated by Bayesian Inference and solved with the Markov Chains Monte Carlo method (MCMC). The results demonstrate the robustness of the combination of integral transformation and Bayesian inference in this analysis.

**KEYWORDS:** Generalized Integral Transform Technique, Inverse Problems, Bayesian

## 1 | INTRODUÇÃO

A previsão do comportamento da dispersão de poluentes em rios, conduzida através de modelos matemáticos, é importante para a análise e redução de impactos ambientais, uma vez que pode levar a estimativas do alcance e das concentrações a serem observadas na pluma de contaminantes.

Neste trabalho é realizada a análise da dispersão de um contaminante conservativo lançado de maneira instantânea em um rio, através da comparação entre os resultados obtidos em um experimento de campo e aqueles calculados por um modelo matemático. O transporte deste contaminante foi simulado através da equação da advecção-dispersão unidimensional em regime transiente com velocidade e coeficiente de dispersão longitudinal constantes. A solução desta EDP é obtida por meio do método híbrido analítico-numérico conhecido como Técnica da Transformada Integral Generalizada (GIT) (Cotta, 1993). Esta escolha é importante, pois por tratar-se de uma metodologia parcialmente analítica a solução do problema direto é realizada com custo computacional menor e com grande precisão. Este é um passo fundamental na solução do problema inverso aqui tratado, pois este envolve um processo iterativo intenso computacionalmente. O problema inverso para estimativa dos parâmetros do modelo (velocidade média e coeficiente de dispersão longitudinal) é então formulado por meio de Inferência Bayesiana (Kaipio, 2004), permitindo assim a incorporação no modelo inverso de informações a priori disponíveis para estes parâmetros.

## 2 | DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

O experimento foi realizado por Sousa (2009) no verão de 2009, em um pequeno curso fluvial, Rio São Pedro, localizado na região rural do município de Nova Friburgo, centro-norte do estado do Rio de Janeiro. Foram lançadas 2000 gramas de cloreto de sódio, diluídos em aproximadamente 15 litros de água em um balde, de maneira instantânea em um ponto da seção de injeção, sobre a linha de corrente central do escoamento.

Em duas seções, localizadas, respectivamente, a 50 e 100 metros a jusante do local de injeção, foram colhidas, a cada 15 segundos, amostras de 200 ml da água, durante período de tempo suficiente para que ocorresse, por completo, a passagem da pluma do traçador. Apenas as amostras obtidas na seção a 100 metros do ponto de lançamento foram utilizadas. Em todas as amostras foi determinada a condutividade elétrica, posteriormente convertida em concentração de sais dissolvidos, através da curva de calibração que modelada para este fim. De acordo com esse procedimento, a concentração de sais a montante do ponto de lançamento seria de 15.5 mg/l .



### 3 | FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA DIRETO

Considere uma seção de um rio com comprimento  $L$ , inicialmente com velocidade média e coeficiente de dispersão longitudinal constantes. Em  $x_1$  é simulado o lançamento instantâneo de um poluente. A representação esquemática deste problema é apresentada na figura 1.

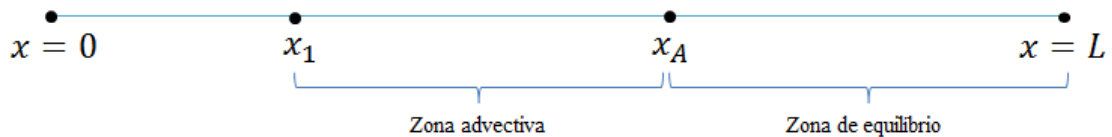


Figura 1: Representação Esquemática

A zona de equilíbrio deste problema, marcada esquematicamente a partir do ponto  $x_A$  na figura 1, pode ser modelada pela equação da advecção-dispersão unidimensional em regime transiente (Fischer, 1979):

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} + u \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} = E_L \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \text{ e } t > 0 \quad (1)$$

$$C(0,t) = c_0, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}(L,t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.2)$$

$$C(x,0) = \frac{M}{A} \delta(x - x_1) + c_0, \quad 0 < x < L \quad (1.3)$$

onde  $u$  é a velocidade média na seção transversal,  $E_L$  é o coeficiente de dispersão longitudinal,  $A$  é a área da seção transversal,  $M$  é a massa do poluente,  $\delta(x - x_1)$  é a função Delta de Dirac e  $c_0$  é o valor da concentração medido no rio antes do lançamento do poluente.

Para o experimento descrito na Seção 2, os seguintes parâmetros são conhecidos:  $c_0 = 15.5$  mg/l,  $M = 2000$ g,  $A = 0.9$ m<sup>2</sup>,  $L = 1000$  m e  $x_1 = 500$ m. Os parâmetros  $u$  e  $E_L$  serão estimados por meio do problema inverso.

### 4 | TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

A solução formal através da Técnica da Transformada Integral Generalizada segue o seguinte procedimento sistemático: (i) definição do problema de autovalor, (ii) desenvolvimento do par de transformação integral, (iii) realização da transformação integral na EDP original, (iv) solução do sistema de EDO's resultante da transformação integral e (v) utilização da fórmula de inversão para construir o potencial original (Cotta, 1993).

De modo a acelerar a convergência da solução através da GITT, é desejável que

as condições de contorno sejam homogêneas. Portanto, considera-se o seguinte filtro:

$$C(x, t) = C^*(x, t) + C_f(x) \quad (2)$$

onde  $c^*(x, t)$  é o potencial filtrado e  $c_f(x)$  é a solução do problema filtro. Para o problema aqui tratado,  $c_f(x) = c_0$  é considerado, sendo o suficiente para homogeneizar as condições de contorno.

O problema de autovalor diferencial é definido como o problema de Helmholtz, cujas autofunções,  $\psi_i(x)$ , e seus respectivos autovalores,  $\mu_i$ , para as condições de contorno dadas são:

$$\psi_i(x) = \cos\left(\frac{\mu_i x}{\sqrt{E_L}}\right), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$\mu_i = \frac{\sqrt{E_L}(2i - 1)\pi}{2L}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Define-se então o par de transformação integral como:

$$\text{Transformada: } \bar{C}_i(t) = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) C^*(x, t) dx \quad (5.1)$$

$$\text{Inversa: } C^*(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{C}_i(t) \tilde{\psi}_i(x) \quad (5.2)$$

onde

$$\tilde{\psi}_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\sqrt{N_i}}, \quad N_i = \int_0^L \psi_i^2(x) dx \quad (6)$$

Operando o problema filtrado com  $\int_0^L \tilde{\psi}_i(x) (\cdot) dx$  e realizando manipulações algébricas para cada uma das integrais resultantes, obtém-se o seguinte sistema de EDO's para os potenciais  $\bar{C}_i(t)$ :

$$\frac{d\bar{C}_i(t)}{dt} + \mu_i^2 \bar{C}_i(t) = \bar{g}_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (7.1)$$

onde

$$\bar{g}_i(t) = -u \sum_{j=1}^{\infty} \bar{C}_j(t) D_{ij} \quad (7.2)$$

$$D_{ij} = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) \frac{d\tilde{\psi}_j(x)}{dx} dx \quad (7.3)$$

Com as condições iniciais transformadas dadas por:

$$\bar{C}_i(0) = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) f^*(x) dx, \quad f^*(x) = f(x) - c_f(x) \quad (7.4)$$

Para a solução do sistema de EDO's dado em (7), foi utilizada a rotina NDSolve do software Mathematica. Uma vez conhecidos os potenciais transformados  $\bar{C}_i(t)$ , a fórmula de inversão, Eq. (5.2), pode ser utilizada para a obtenção do campo filtrado,  $C^*(x,t)$ . Para a obtenção do campo original,  $C(x,t)$ , a Eq. (2) é empregada, resultando:

$$C(x,t) = C^*(x,t) + C_f(x) = \sum_{i=1}^{N_{tr}} \bar{C}_i(t) \tilde{\psi}_i(x) + C_f(x) \quad (8)$$

## 5 | FORMULAÇÃO E SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

Considere que no problema modelado pela eq. (1) estejam disponíveis dados experimentais  $\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{N_d}\}$ , medidos em uma determinada posição e em tempos distintos, onde  $N_d$  representa o número de dados disponíveis. Considere agora que os valores do conjunto de parâmetros  $\alpha = \{u, E_l\}$  sejam desconhecidos, mas seja necessário estimá-los. Este é o problema de interesse deste trabalho.

Na abordagem Bayesiana o problema inverso é formulado como um problema de inferência estatística, onde se busca uma função de densidade de probabilidade *a posteriori* dadas as observações experimentais. Dessa maneira, as informações *a priori* sobre os parâmetros do modelo podem ser utilizadas na formulação do problema inverso.

O teorema de Bayes para a análise inversa pode ser formulado da seguinte maneira (Kaipio, 2004):

$$\pi_{pos}(\alpha) = \pi(\alpha|\mathbf{Z}) = \frac{\pi_{pr}(\alpha)\pi(\mathbf{Z}|\alpha)}{\pi(\mathbf{Z})} \quad (9)$$

onde  $\pi_{pos}(\alpha)$  é a função de densidade de probabilidades *a posteriori*,  $\pi_{pr}(\alpha)$  é

a função de densidade de probabilidades *a priori*,  $\Pi(\mathbf{Z}|\alpha)$  é a função de máxima verossimilhança e  $\Pi(\mathbf{Z})$  é a densidade marginal que exerce o papel de constante de normalização.

Se os erros experimentais forem aditivos e descritos por uma distribuição normal, a função de máxima verossimilhança pode ser definida como:

$$\pi(\mathbf{Z}|\alpha) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{N_d} \det(\mathbf{W})}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_{calc})^T \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_{calc})\right] \quad (10)$$

onde  $\mathbf{W}$  é a matriz de covariância relacionado aos dados experimentais. Para o experimento realizado por Sousa (2009) foi considerado um desvio padrão constante igual a  $\sigma_{exp} = 1.55 \text{ mg/l}$ . Para simular amostras de  $\pi_{pos}(\alpha)$  através do MCMC é empregado o algoritmo de Metropolis-Hastings (Metropolis, 1953; Hastings, 1970).

## 6 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

A metodologia apresentada foi formulada computacionalmente no software de computação algébrica Mathematica utilizando uma ordem de truncamento  $N_{tr} = 100$ . Na tabela 1 pode-se acompanhar a convergência da GITT para diversas ordens de truncamento. Para  $t = 90\text{s}$  utilizando  $N_{tr}=100$  tem-se 5 algarismos convergidos, enquanto que, em  $t=150\text{s}$  com  $N_{tr}= 60$ , é possível constatar uma convergência melhor. Este resultado já era esperado, pois o método necessita de uma quantidade maior de termos para representar de maneira mais fiel os valores nas proximidades do contorno.

Ntr	t= 90s			t = 150s		
	50m	100m	150m	50m	100m	150m
20	51.1036	23.2132	13.4647	29.4998	45.6128	17.3230
40	61.7399	16.7798	15.0933	24.8485	49.2443	16.9888
60	62.6123	17.5713	15.4851	24.9217	49.2696	16.9684
80	62.6311	17.5495	15.4999	24.9217	49.2696	16.9686
100	62.6312	17.5497	15.5001	24.9217	49.2696	16.9686

Tabela 1: Tabela de Convergência

Para a solução do problema inverso foram consideradas informações a priori disponíveis para os parâmetros  $\mu$  e  $E_L$  obtidos por Sousa (2009), modeladas como distribuições normais com  $\mu_u = 0.59\text{m/s}$ ,  $\sigma_u = 0.3\text{m/s}$ ,  $\mu_{EL} = 1.75\text{m}^2/\text{s}$  e  $\sigma_{EL} = 0.8\text{m}^2/\text{s}$ . Para a construção das Cadeias de Markov, no algoritmo de Metropolis-Hastings foram utilizados estados iniciais diferentes das médias a priori, com o objetivo de testar a implementação, verificando a convergência das cadeias.

A Cadeia de Markov foi construída com 20.000 estados e um aquecimento de

6.000 estados, que são descartados na computação das estatísticas da distribuição *a posteriori*. As figuras 2 (a) e (b) mostram a evolução das cadeias para os parâmetros  $E_L$  e  $u$ , respectivamente, onde é observado que os 6.000 estados utilizados como amostras de aquecimento são mais do que o suficiente para as cadeias alcançarem a distribuição de equilíbrio.

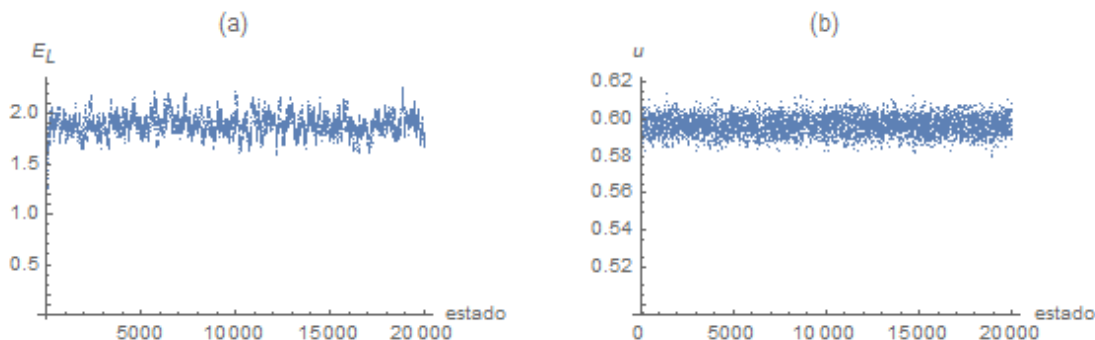


Figura 2: Evolução das Cadeias para  $E_L$  e  $u$ , respectivamente em (a) e (b)

Nas figuras 3 (a) e (b) são apresentados os histogramas das distribuições *a posteriori* para  $E_L$  e  $u$ , respectivamente, onde é possível observar que as densidades tendem para uma distribuição normal.

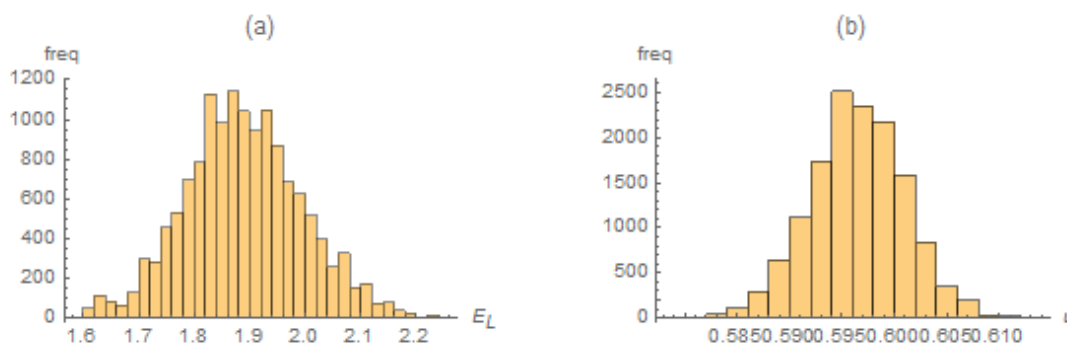


Figura 3: Histogramas para as distribuições *a posteriori* de  $E_L$  e  $u$ , respectivamente em (a) e (b)

A tabela 2 apresenta os intervalos de confiança estimados de 95% para cada uma das distribuições *a posteriori* amostradas pelo MCMC, bem como a média e o desvio padrão de cada um dos parâmetros. É importante notar que os valores estimados por Sousa (2009),  $E_L = 1.75$  e  $u = 0.59$ , encontram-se dentro do intervalo de confiança determinado neste trabalho.

	$E_L$ (m <sup>2</sup> /s)	$u$ (m/s)
IC	[1.69 ; 2.11]	[0.59 ; 0.61]
$\mu$	1.89	0.60
$\sigma$	0.105	0.0045

Tabela 2 Intervalos de confiança de 95%, média e desvio padrão para  $E_L$  e  $u$

Por fim, é possível observar na figura 4 uma comparação entre as concentrações calculadas e os dados experimentais. A linha azul representa a solução via GITT utilizando os valores médios dos parâmetros dados na tabela 2, resultando em um erro absoluto total de 74mg/l, enquanto que a linha tracejada refere-se aos resultados encontrados por Sousa (2009), resultando em um erro absoluto total de 78mg/l .

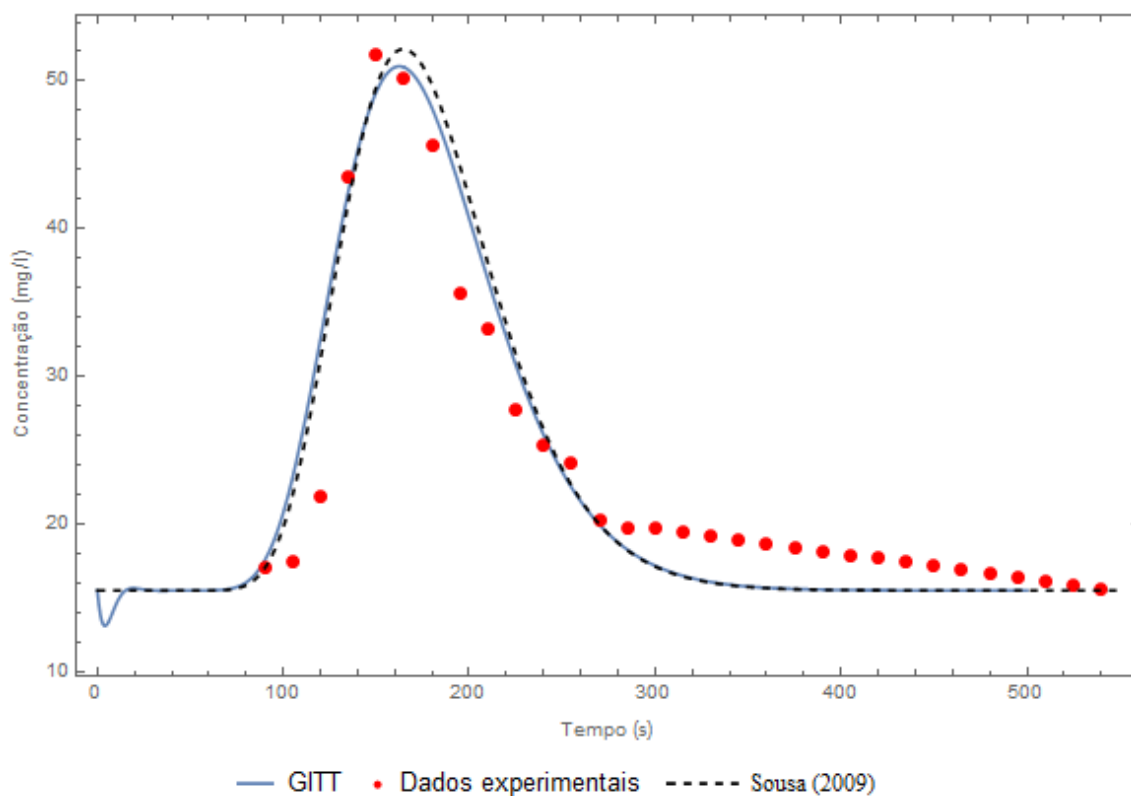


Figura 4: Comparação dos resultados obtidos em relação aos dados experimentais

## 7 | CONCLUSÕES

A metodologia empregada neste trabalho, combinando transformações integrais e inferência Bayesiana, foi demonstrada eficaz para a estimativa do coeficiente de dispersão longitudinal e a velocidade média empregando-se informação a priori. Os resultados obtidos apresentaram uma pequena melhora em relação aos encontrados por Sousa (2009). Além disso, ressalta-se o fato da solução do problema inverso na abordagem Bayesiana ser densidades de probabilidade para os parâmetros buscados, trazendo maior nível de informação quanto às incertezas dos parâmetros estimados.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem pelo apoio financeiro das agências CNPq, CAPES e FAPERJ.

## REFERÊNCIAS

Cotta, R. M. **Integral transforms in computational heat and fluid flows**. Florida , CRC Press, 1993.

Fischer, H. B., List, J. E., Koh, C. R., Imberger, J. e Brooks, N. H. **Mixing in inland and coastal waters**. London, Academic Press, 1979.

Hastings, W. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. **Biometrika**, v.57,n.1:97-109, 1970.

Metropolis, N., Rosenbluth, A., Rosenbluth, M., Teller A. Equation of state calculations by fast computing machine. **The journal of chemical physics**, v.21:1087-1091, 1953.

Sousa, E. P. **Avaliação de mecanismos dispersivos em rios através de problemas inversos**, Nova Friburgo, UERJ, 2009.

Kaipio, J., Sommersalo, E. **Statistical and Computational Inverse Problems**, Springer-Verlag, 2004.



## ANÁLISE WAVELET DE TACOGRAMAS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS

### Ronaldo Mendes Evaristo

Instituto Federal do Paraná, Telêmaco Borba, PR  
Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR (e-mail: antoniomarcosbatista@gmail.com)

### Kelly Cristiane Iarosz

Universidade de São Paulo, São Paulo, SP

### Silvio Luiz Thomaz de Souza

Universidade Federal de São João Del-Rei, Divinópolis, MG

### Ricardo Luiz Viana

Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR

### Moacir Fernandes de Godoy

Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto, São José do Rio Preto, SP

### Antonio Marcos Batista

Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR (e-mail: antoniomarcosbatista@gmail.com)

**RESUMO:** A evolução dos dispositivos processadores, das linguagens computacionais e de ações multidisciplinares permitem o uso de modelos matemáticos e inovações tecnológicas para complementar os métodos para avaliação do desempenho de um dos órgãos vitais do corpo humano, o coração. O crescente número de casos envolvendo doenças cardiovasculares motiva a comunidade científica a buscar novas técnicas, dentre as quais destacam-se análises

não invasivas, capazes de detectar patologias leves e moderadas. De modo a contribuir com estudos complementares, apresenta-se neste trabalho um modelo matemático que permite a simulação da morfologia de eletrocardiograma de adultos sadios e revela tacogramas que podem ser comparados com dados coletados de forma experimental.

**ABSTRACT:** The evolution of processing devices, computational languages, and multidisciplinary actions allow the use of mathematical models and technological innovations to improve the analyze of one of the vital organs of the human body, the heart. The increase of the number of cases involving cardiovascular diseases motivates the scientific community to research new techniques, mainly non invasive analyzes, capable of detecting mild and moderate pathologies. In this work, a mathematical model is presented. It allows the simulation of electrocardiogram morphology of healthy adults and reveals tachographs that can be compared with experimental data.

**PALAVRAS-CHAVE:** coração, variabilidade da frequência cardíaca, transformada wavelet discreta.

## 1 | INTRODUÇÃO

O coração humano é o órgão vital responsável por controlar a vida vegetativa (involuntária) enquanto é monitorado pelo sistema nervoso autônomo (SNA) (BEAR et al., 2008), tem a função de bombear sangue para o corpo (MOHRMAN e HELLER, 2008). O SNA é dividido em dois subsistemas: sistema nervoso simpático (SNS), responsável por controlar as situações de alerta como, por exemplo, susto, medo, exercícios físicos e estresse mental e o sistema nervoso parassimpático (SNP), responsável pelo controle do corpo em repouso (ACHARYA et al., 2006).

No coração, o regime sinusal o ritmo cardíaco é controlado pelo SNP, considerado normal quando o indivíduo apresenta aproximadamente 72 batimentos por minuto (bpm) e bombeia 0,07 litros de sangue por contração (CURTIS, 1997; HALL, 2016). Caso o indivíduo seja submetido a alguma situação de alerta, o aumento da atividade cardíaca é controlado pelo SNS (BEAR et al., 2008). Uma das formas mais comuns de avaliar a atividade elétrica do coração é conhecido como eletrocardiograma (ECG). Essa forma de registro foi introduzida Willem Eithovem em 1902 (DUBIN, 1996), um registro de dados da relaxação e contração do coração, que normalmente é apresentado em forma gráfica com linhas que indicam o comportamento ao longo do tempo. Os pontos coletados durante a evolução temporal da atividade elétrica permitem avaliar o ritmo, a quantidade e a velocidade dos batimentos cardíacos (FERREIRA et al., 2010).

Na Figura 1 (a) é representada graficamente a atividade cardíaca durante 4 segundos. Três formas básicas de onda são mostradas e descritas pela sequência simbólica P, QRS e T (SCHMIDT et al., 1999). Onde a onda P representa a despolarização (contração) dos átrios. Neste momento, o sangue passa dos átrios para os ventrículos. Na sequência observa-se a onda QRS, este complexo representa a contração ventricular (sístole), onde o sangue é forçado para fora dos ventrículos, sentido aos pulmões e ao resto do corpo. Por fim, tem-se a onda T representando a repolarização dos ventrículos (diástole), momento em que o sangue venoso (não oxigenado) entra no átrio direito, enquanto o sangue oxigenado (arterial) oriundo dos pulmões entra no átrio esquerdo, ficando o coração preparado para o próximo ciclo (DUBIN, 1996). A Figura 1 (b) permite a observação da evolução temporal ( $n=1000$  batimentos cardíacos) da atividade elétrica ( $r[n][s]$ ) de um coração. Na representação gráfica tem-se uma grande quantidade de pontos que dão a característica visual de um ECG e é conhecida como tacograma e pode ser estudada por meio da variabilidade da frequência cardíaca (VFC).

Um estudo detalhado deste tipo de imagem pode ser realizado observando características da evolução temporal. A detecção de patologias leves e moderadas associadas ao SNA como arritmias, bradicardias e taquicardias, além de distúrbios na relação entre os SNS e SNP pode ser realizada por meio do estudo da VFC (VANDERLEI et al., 2009) via ECG, um método não invasivo e coerente nas respostas. Além disso, modelos matemáticos vêm sendo estudados com finalidade de compreender

o funcionamento fisiológico do sistema cardiovascular (SCV). Alguns modelos são baseados na equação clássica de Van der Pol (VAN DER POL, 1926). Gois e Savi (GOIS e SAVI, 2009), por exemplo, consideraram três osciladores de Van der Pol modificados, conectados por um acoplamento com atraso de tempo para descrever o comportamento do ritmo cardíaco.

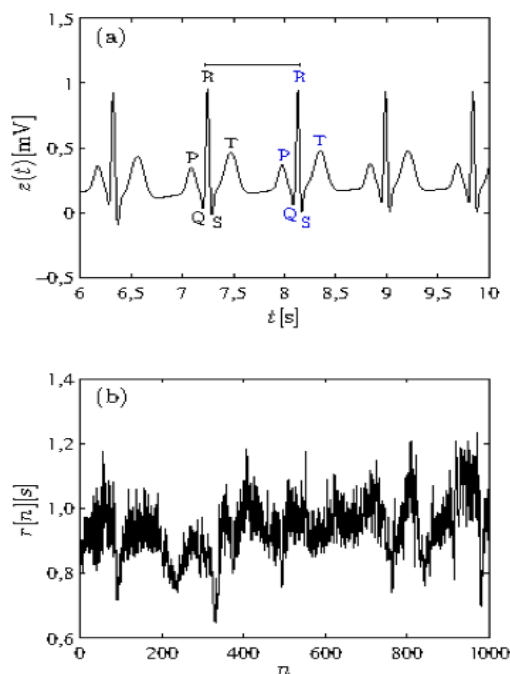


Figura 1: Evolução temporal da atividade elétrica permite avaliar o ritmo, a quantidade e a velocidade dos batimentos cardíacos. Em (a) representa-se um padrão de eletrocardiograma (ECG) com sequência simbólica das principais ondas em (b) encontra-se a amostra gráfica de um tacograma.

Esta análise é feita por meio da avaliação do intervalo entre ondas R consecutivas (Figura 1 (a)). O sinal de tempo discreto, derivado de ECG, denotado por  $r[n]$ , com  $0 \leq n \leq N-z$ , é conhecido como espectro do tacograma ou simplesmente tacograma. A Figura 1 (b) mostra um exemplo de tacograma (KITNEY e ROMPELMAN, 1980).

Acharya e colaboradores (ACHARYA et al., 2006), apresentam uma revisão de várias técnicas para análise do tacograma, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Os autores apresentam uma descrição detalhada sobre as relações entre a VFC para indivíduos que fazem parte de grupos de risco (consumidores de álcool e cigarro, uso de medicamentos, diabetes, entre outros). No domínio da frequência, o espectro do tacograma possui duas bandas principais (ACHARYA et al., 2006): no intervalo de  $0,04 \leq f \leq 0,15\text{Hz}$  encontram-se as baixas frequências (BF), enquanto no intervalo  $0,04 \leq f \leq 0,4\text{Hz}$  estão as altas frequências (AF). As atividades dos SNP e SNS são associadas, respectivamente, às bandas AF e BF.

Avalia-se que durante o exame os indivíduos permanecem acordados em posição de repouso, espera-se somente a atuação do SNP. Desta forma, um indivíduo sadio deve possuir baixa atividade em BF e alta em AF, além do que, com o espectro de energia da transformada wavelet discreta (TWD) (DAUBECHIES, 1992 e VIDAKOVIC,

1996) o tacograma pode ser melhor aproximado por um processo estocástico autorregressivo (AR) do que por meio dos espectros gaussianos.

A estrutura apresentada neste trabalho tem a seguinte forma: na Seção 2 apresenta-se o modelo matemático para simulação do batimento cardíaco; na Seção 3, trata-se da transformada wavelet discreta (TWD); na Seção 4 mostra-se os resultados obtidos e na última Seção as conclusões são apresentadas.

## 2 | MODELO MATEMÁTICO PARA BATIMENTOS CARDÍACOS

Neste trabalho, é utilizado um modelo matemático de três equações diferenciais acopladas introduzidas por McSharry e colaboradores (McSHARRY et al., 2003),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \omega y \\ \dot{y} &= \alpha y + \omega x \\ \dot{z} &= z_0 - z - \sum_i \alpha_i \Delta\theta_i e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta\theta_i}{b_i} \right)^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

com  $i \in \{P, Q, R, S, T\}$ ,  $\alpha = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\Delta\theta_i = (\theta - \theta_i) \bmod 2\pi$ ,  $\theta = \arctan 2(y, x)$   
 $z_0(t) = A \sin(2\pi f_2 t)$  onde a amplitude é dada por  $A = 0,15 \text{ mV}$  e considera-se a frequência de respiração do indivíduo  $f_2 = 0,25 \text{ Hz}$ . A velocidade angular  $\omega$  pode ser encontrada efetuando-se o cálculo de  $\omega(t) = 2\pi / r(t)$ , onde  $r(t)$  é a conversão discreto-contínua do tacograma  $r[n]$  (OPPENHEIM et al., 2010). Na Tabela 1, apresentam-se os demais parâmetros do modelo.

Índice (i)	Tempo [s]	$e_i$ [rad]	$\alpha_i$	$b_i$
P	-0,2	$-\pi/3$	1,2	0,25
Q	-0,05	$-\pi/3$	-5	0,1
R	0	0	30	0,1
S	0,05	$\pi/12$	-7,5	0,1
T	0,3	$\pi/2$	0,75	0,4

Tabela 1: Parâmetros do modelo apresentado por McSharry e colaboradores.

No trabalho apresentado originalmente por McSharry et al. (McSHARRY et al., 2003), o tacograma  $r[n]$  (Figura 2(a)) é determinado pela transformada inversa de Fourier (OPPENHEIM et al., 2010) do espectro  $H_G(f) = |H_G(f)|e^{i\Phi}$ , com módulo

$$|H_G(f)| = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\sqrt{2\pi}c_1^2} e^{\frac{1}{2} \left( \frac{f-f_1}{c_1} \right)^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{2\pi}c_2^2} e^{\frac{1}{2} \left( \frac{f-f_2}{c_2} \right)^2}}, \quad (2)$$

fase  $\Phi$  aleatória uniformemente distribuída entre  $-\pi$  e  $\pi$  e  $f_1 = 0,1 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 0,25 \text{ Hz}$ ,  $c_1 = c_2 = 0,01$  e  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 0,5$ . O modelo dinâmico descreve a geração de sinais sintéticos

de eletrocardiograma. Esse modelo é baseado em um conjunto de três equações diferenciais ordinárias onde são incorporadas as ondas de Mayer e a arritmia sinusal respiratória (ASR) por meio de um espectro bimodal consistindo da soma de duas funções gaussianas (McSHARRY et al., 2003).

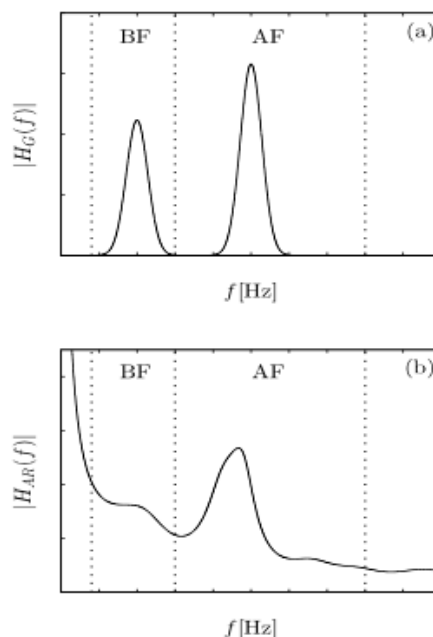


Figura 2: Representação do espectro gaussiano (a) e espectro autorregressivo (b), com suas respectivas faixas de baixa frequência (BF) e alta frequência (AF).

Como comentado anteriormente, o procedimento de geração do tacograma foi alterado em relação ao espectro. Ao invés da Equação (2), relacionada a uma distribuição gaussiana, a sequência  $r[n]$  é tomada como sendo uma realização de um processo AR,

$$R[n] = \sum_{l=1}^p d_l R[n-l] + \varepsilon[n], \quad (3)$$

onde  $\varepsilon[n]$  é um ruído branco com média zero e variância unitária. A ordem do modelo é  $p = 16$ , com base no trabalho de Boardman et al. (BOARDMAN et al., 2002), e os coeficientes utilizados são apresentados na Tabela 2:

$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$
-0,9099	0,5188	-0,2840	-0,2063	0,0382	0,0709
$d_7$	$d_8$	$d_9$	$d_{10}$	$d_{11}$	$d_{12}$
0,0305	-0,1533	0,0009	-0,0070	-0,0218	0,0043
	$d_{13}$	$d_{14}$	$d_{15}$	$d_{16}$	
	0,0316	0,0155	-0,0591	0,0252	

Tabela 2: Coeficientes do tacograma para o processo estocástico autorregressivo.

O espectro da Equação (3) é obtido por

$$|H_{AR}(f)| = \frac{1}{|1 - \sum_{l=1}^p a_l e^{-i2\pi fl}|}, \quad (4)$$

e apresentado na Figura 2(b) com suas respectivas faixas de frequências.

### 3 | TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

As wavelets são funções localizadas no tempo utilizadas para analisar outras funções em posição e escala (frequência) (GROSSMANN e MORLET, 1984). Os parâmetros de uma wavelet são o tempo, a dilatação e a translação. Existem dois tipos principais de transformadas wavelets (TW): contínua (TWC) e discreta (TWD), que por sua vez pode ser de tempo contínuo ou discreto. Neste trabalho utilizamos a TWD. Trata-se de uma forma de decomposição em multibandas baseada em bancos de filtros espelhados em quadratura de dois canais (OPPENHEIM et al., 2010), conforme mostra a Figura 3.

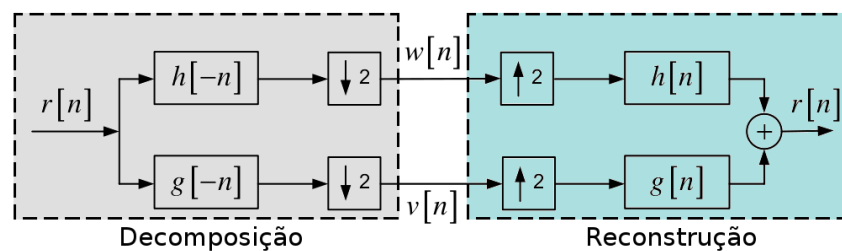


Figura 3: Banco de filtros utilizado pela transformada wavelet discreta.

Onde os filtros wavelet  $h[n]$ :  $n=0, \dots, L-1$  e escala  $g[n]$ :  $n=0, \dots, L-1$  são construídos de acordo com a família de wavelets utilizada, sendo  $L$  o comprimento do filtro (VIDAKOVIC et al., 1999).

Para o presente trabalho a família escolhida denomina-se Daubechies (DAUBECHIES, 1992) com  $L=80$ , para este caso, não foram considerados aspectos de reconstrução.

Os coeficientes  $w[n]$  e  $v[n]$  são obtidos por convoluções circulares de  $r[n]$  com as versões reversas dos filtros  $h[n]$  e  $g[n]$  seguidas de decimação por fator dois. A Figura 4 mostra a decomposição em quatro níveis utilizada neste estudo. Os sinais são representados por matrizes, visto que possuem comprimento finito.

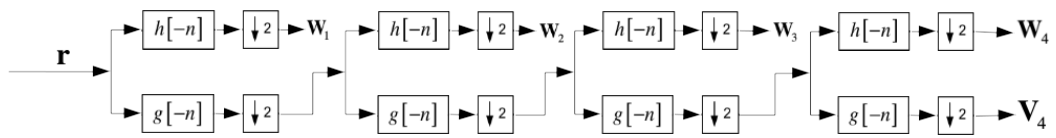


Figura 4: Esquema representativo da decomposição de um tacograma em quatro níveis pela transformada wavelet discreta.

A decomposição permite que sejam definidas bandas para o domínio wavelet, na Figura 5 mostra-se a relação entre os coeficientes wavelet e suas respectivas bandas de frequências: wavelet baixa frequência (wBF), intervalo  $1/32 \leq f \leq 1/8$  Hz; wavelet alta frequência (wAF), intervalo  $1/8 \leq f \leq 1/2$  Hz.

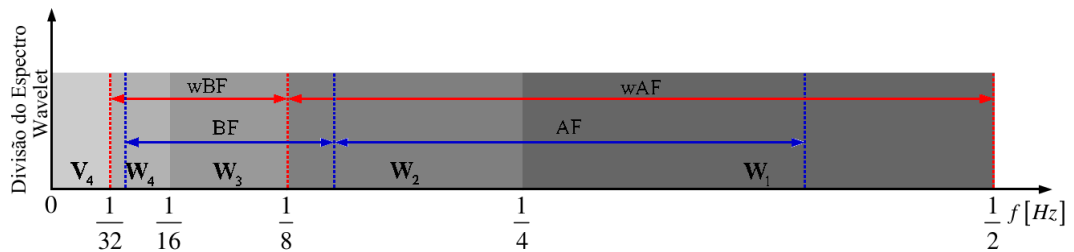


Figura 5: Representação esquemática do espectro de frequências feito pela transformada wavelet discreta.

A energia do tacograma pode ser calculada por  $\|r\|^2 = \|V_4\|^2 + \sum_{j=1}^4 \|W_j\|^2$ , com  $\|r\|^2 = r^T r$  (VIDAKOVIC et al., 1999). Já, as energias nas bandas wBF e wAF podem ser determinadas por,  $\|W_{AF}\|^2 = \|W_1\|^2 + \|W_2\|^2$  e  $\|W_{BF}\|^2 = \|W_3\|^2 + \|W_4\|^2$ .

## 4 | RESULTADOS

Baseando-se em trabalhos anteriores foi realizado um estudo do espectro a fim de se obter a velocidade angular utilizada em um conjunto de equações diferenciais e consequentemente o ECG. Durante as simulações foram criados 124 sinais teóricos de ECG, sendo metade (62) gerados por meio de espectro gaussiano e 62 pelo espectro autorregressivo.

Os resultados das simulações obtidas foram apresentados em forma de tacogramas e comparados com 62 tacogramas experimentais (N= 100 batimentos) de adultos saudáveis. Esses dados, assim como todos os demais dados experimentais utilizados neste trabalho foram coletados na Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto pelo grupo do Prof. Dr. Moacyr Fernandes de Godoy.

Para cada tacograma são calculadas as energias da Equação (5) e obtidas  $\|W_{BF}\|_G^2$ ,  $\|W_{BF}\|_{AR}^2$ ,  $\|W_{BF}\|_{exp}^2$ , para baixa frequência (Figura 6(a)) e  $\|W_{AF}\|_G^2$ ,  $\|W_{AF}\|_{AR}^2$ ,  $\|W_{AF}\|_{exp}^2$  para alta frequência (Figura 6(b)). Os índices se referem aos tacogramas obtidos pelos espectros gaussiano (G), autorregressivo (AR) e experimental (EXP).



Nas Figuras 6(a) e 6(b), observam-se as bandas (wBF e wAF), e a energia obtida do tacograma autorregressivo se aproximando, em média, da energia do tacograma experimental em relação ao tacograma gaussiano.

Quanto a variabilidade das energias experimentais, apresentam-se maiores. Esse efeito é comumente observado nos ECG, visto que, o coração possui a habilidade de responder a vários estímulos e situações de alerta pelo qual o corpo passa durante o dia, além de possíveis desordens induzidas por doenças.

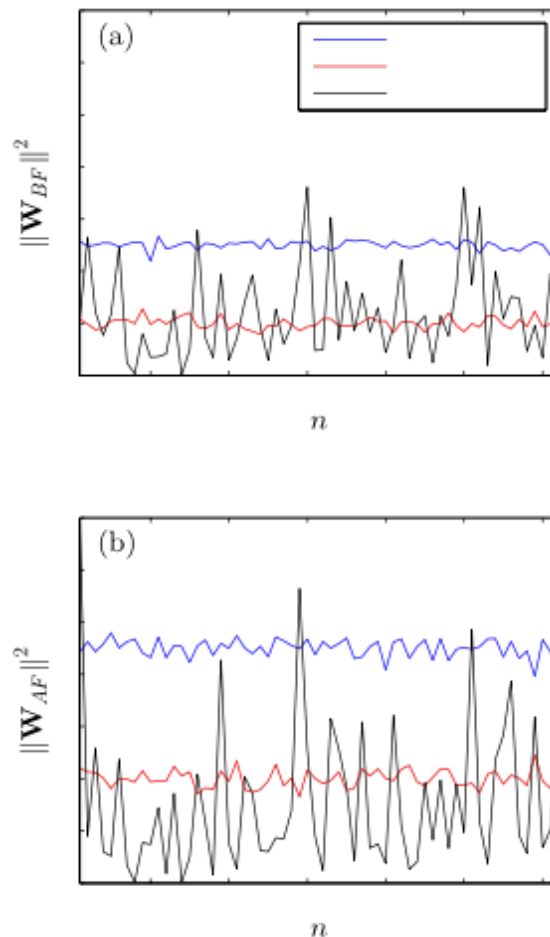


Figura 6: Energia dos tacogramas nas bandas (a) wBF e (b) wAF. Em azul, o gaussiano; em vermelho o autorregressivo; em verde o experimental.

## 5 | CONCLUSÕES

Estudou-se um modelo matemático dado por equações diferenciais acopladas que descrevem sinais de eletrocardiograma. Estabeleceu-se comparações entre tacogramas teóricos gerados por espectros gaussianos e autorregressivos com tacogramas experimentais de 62 pacientes sadios. Conclui-se que os tacogramas obtidos de processos autorregressivos levam a resultados mais realistas, quando comparadas suas energias no espectro da Transformada Wavelet Discreta.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a CAPES, CNPq, Fundação Araucária e FAPESP (2015/07311-7, 2018/03211-6).

## REFERÊNCIAS

- ACHARYA, U. R.; JOSEPH, K. P.; KANNATHAL, N.; LIM, C. M.; SURI, J. S. Heart rate variability: a review. **Med. Bio. Eng. Comput.**, vol. 44, p. 1031-1051, 2006.
- BEAR, M. F.; CONNORS, B. W.; PARADISO, M. A. **Neurociências: Desvendando o Sistema Nervoso**. Artmed, Porto Alegre, 2008.
- BOARDMAN, A.; SCHLINDWEIN, F. S.; ROCHA, A. P.; LEITE, A. A study on the optimum order of autoregressive models for heart rate variability. **Physiological Measurement**, vol. 23, p. 325-336, 2002.
- CURTIS, H. **Biologia**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1997.
- DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets**. SIAM, Philadelphia, 1992.
- DUBIN D. **Interpretação rápida do ECG**. EPUB, São Paulo, 1996.
- FERREIRA, M. T.; MESSIAS, M.; VANDERLEI, L. C. M.; PASTRE, C. M. Caracterização do comportamento caótico da variabilidade da frequência cardíaca (VFC) em jovens saudáveis, **TEMA: Tend. Mat. Apl. Comput.**, vol. 11, p. 141-150, 2010.
- GOIS, S. R. F. S. M.; SAVI, M. A. **An Analysis of Heart Rhythm Dynamics using a Three-Coupled Oscillator Model**. *Chaos, Solitons and Fractals*, v. 41, p. 2553-2565, 2009.
- GROSSMANN, A.; MORLET, J. **Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape**. *SIAM J. Math. Anal.*, v. 15, p. 723-736, 1984.
- HALL, J. E. **Guyton & Hall Tratado de Fisiologia Médica**. 13. ed. São Paulo: Elsevier, 2016.
- KITNEY, R. I.; ROMPELMAN, O. (Eds.). The assessment of fluctuations in heart rate. In: Kitney, R. I., Rompelman, O. (Eds.), *The Study of heart-rate variability*, pp. 59-77, Oxford, England, Clarendon Press, 1980.
- McSHARRY, P. E.; CLIFFORD, G. D.; TARASSENKO, L.; SMITH, L. A. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals. **IEEE Trans. Biomed. Eng.**, vol. 50, p. 289-294, 2003.
- MOHRMAN, D. E.; HELLER, L. J. **Fisiologia Cardiovascular**. 6. ed. Porto Alegre: Mc-Graw-Hill, 2008.
- OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Discrete-Time Signal Processing**. 3. ed., Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2010.
- SCHMIDT, G., SCHNEIDER, R., BARTHEL, P. "Heart Rate Turbulence", *Cardiac Electrophysiology Review*, v. 3, pp. 297-301, 1999.
- VANDERLEI, L. C. M.; PASTRE, C. M.; HOSHI, R. A.; CARVALHO, T. D.; GODOY, M. F. Noções básicas de variabilidade da frequência cardíaca e sua aplicabilidade clínica, **Rev. Bras. Cir. Cardiovasc.**, vol. 24, p. 205-217, 2009.

VAN DER POL, B. **On Relaxation Oscillations**. *Philosophical Magazine*, v. 2, p. 978-992, 1926.

VIDAKOVIC, B. **Statistical Modeling by Wavelets**. John Wiley & Sons, New York, 1999.

## CONSTRUÇÃO DE UM AEROMODELO DE MACARRÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA E FÍSICA

### **Alissan Sarturato Firão**

Licenciatura em Matemática, UNESP, Ilha Solteira, SP

### **Ernandes Rocha de Oliveira**

Departamento de Matemática, UNESP, Ilha Solteira, SP

### **Zulind Luzmarina Freitas**

Departamento de Matemática, UNESP, Ilha Solteira, SP

**RESUMO:** Existem muitas propostas de trabalho com projetos nas escolas de educação básica mas ainda existem discussões sobre como integrar nesses projetos de forma consistente e coerente os conteúdos de Ciências e Matemática, uma educação sobre tecnologias e ainda motivar alunos e professores em seus trabalhos diários. Trazemos aqui uma proposta de trabalho nascida a partir de demandas de uma escola pública de ensino médio e da interação com a universidade. Usar o projeto de construção de um aeroplano de macarrão para trabalhar conceitos das disciplinas foi um experimento muito proveitoso.

**PALAVRAS-CHAVE:** Educação Matemática, ensino de Física, trabalho com projetos

**ABSTRACT:** There are many proposals for working with projects in secondary education, but there are still discussions about how to

consistently and coherently integrate the contents of Science and Mathematics, an education on technologies, and motivate students and teachers in their daily work. We bring here a proposal of work born from the demands of a public high school and its interaction with the university. Using the design of a noodle airplane to work on disciplinary concepts was a very fruitful experiment.

**KEYWORDS:** Mathematics Education, Physics Teaching, Project Work.

### 1 | INTRODUÇÃO

Este trabalho trata de uma experiência de formação em ensino de Ciências e Matemática desenvolvido em uma escola pública de ensino médio por alunos de cursos de formação de professores de Matemática, Física e por alunos dos primeiros anos dos cursos de Física e Engenharias Mecânica e Civil. Dentre os objetivos deste projeto está o de desenvolver uma estrutura de trabalho que possibilite que estudantes universitários em formação tenham oportunidades de se envolver em um problema complexo, um problema em um contexto real de uma escola, e desenvolver estratégias de resolução de problemas. Por uma questão de contextualização da pesquisa, é importante evidenciar as crenças do grupo sobre o ganho

que um estudante, de engenharia ou futuro professor, pode ter em participar de projetos que envolvam a Educação, a Ciência a Matemática e a Tecnologia. Nas disciplinas dos currículos normais de Engenharia, Matemática e Física, existe uma deficiência que é a pouca importância dada aos aspectos sociais na formação desses estudantes. No entanto a literatura tem amplamente alertado para a responsabilidade da educação científica e tecnológica de influenciar decisões futuras sobre a melhoria da qualidade de vida no planeta (VILLANI, 1999). Uma das formas de esta responsabilidade ser trabalhada é aproximar o estudante de problemas sociais locais. A situação levou à necessidade de resolver o problema de como abordar assuntos de ciências e matemática a partir de projetos práticos significativos tanto para os universitários quanto para os alunos da escola, a necessidade de reconhecerem as suas próprias dificuldades no decorrer do processo e construir em pequenos grupos e com a ajuda de um grupo maior, suas próprias soluções. Esta proposta aproxima-se da pedagogia freiriana uma vez que prevê a integração de conteúdos como parte do processo de crescimento do estudante de forma tanto a ampliar o horizonte do estudante, como a de mostrar a importância de utilizar as várias áreas para a resolução de problema. Nessa pedagogia procura-se tratar as disciplinas como não isoladas e a responsabilidade do estudante em integrar as disciplinas é realizada através do diálogo e do auto-direcionamento dos alunos em refletir sobre o seu próprio processo de aprendizagem e buscar novos conhecimentos sobre como a Ciência, a Engenharia e a Tecnologia podem promover situações desafiadoras e motivadoras dentro de uma perspectiva crítica de olhar o mundo, isto interagindo com colegas de outros cursos de graduação na proposição de atividades didáticas e de intervenções na escola.

No ano de 2015 o projeto escolhido foi o de lançamento de foguetes e em 2016 a construção de aviões de macarrão. Estes projetos foram escolhidos tomando como base experiências de outras instituições, algumas que adotam políticas de incentivo aos alunos de ensino médio a se aproximarem do estudo da tecnologia, envolvendo-os em conteúdos de física, matemática, química e outros.

O foco das experiências realizadas foi reunir aspectos relacionados ao Projeto e neste sentido torna-se fundamental relacionar aspectos voltados para o processo construtivo com outros relacionados aos conteúdo das áreas de física, química e matemática. Esse trabalho ocorreu no interior de uma escola de educação básica a partir de um projeto conjunto da universidade com a escola.

## 2 | DESENVOLVIMENTO

O Projeto Pela Real Dignidade do Aluno teve como objetivo auxiliar os alunos de uma Escola Estadual de Ensino Médio localizada em um município do interior do Estado de São Paulo em seus processos de aprendizagem dos conteúdos de Matemática e Física. Os graduandos são alunos dos cursos de Engenharia Mecânica,

Engenharia Civil, Engenharia Elétrica, Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física. Além de trabalharmos com os professores nas salas de aula, também atuamos em monitorias para que os alunos conversassem sobre suas dúvidas, exercitassem o que foi aprendido com o professor e, o que mais nos preocupamos, trabalhar conteúdos que ainda tinham dúvidas e que eram matérias de anos anteriores. A partir dessa preocupação, tivemos a ideia de fazer o Projeto de um Aeromodelo de Macarrão (avião de macarrão). Seriam trabalhados conteúdos básicos de Física e Matemática.

Iniciamos com uma introdução histórica, revelando a importância do aeromodelismo, do transporte aéreo, e das curiosidades gerais. Nas aulas da construção do Aeromodelo de Macarrão, havia muita troca de informação entre professor-aluno, essa conexão Paulo Freire o chama de “pedagogia emancipadora”. Através do diálogo, o professor-dos-estudantes e os estudantes-do-professor se desfazem, o professor que ensina também aprende com seu estudante que também ensina os colegas e o professor (SKOVSMOSE, 2001). O Projeto tem como foco retomar conteúdos dos anos anteriores e reforçar os conteúdos que estão aprendendo no ano, promover a atividade em grupo e a troca de experiências entre os alunos e os graduandos do Projeto. A ideia foi organizar os alunos em grupos, cada um construir o seu aeromodelo e organizar uma gincana, cujo vencedor seria o avião que voasse mais longe.

Ao longo do projeto, discutimos sobre a história do avião e da aviação, a matemática e a física envolvidas na construção e no voo e também algumas curiosidades trazidas pelos próprios alunos. Dentre os assuntos que podemos aqui destacar tratou-se o Efeito Asa. Foi realizado um experimento com um mini túnel de vento criado pelos graduandos da Licenciatura em Física, mostrando o quão importante são os perfis e o ângulo de ataque das asas de um avião, trabalhamos os conceitos de velocidade, aceleração e tipos de asas.

Na Matemática trabalhamos razão e proporção para fazer as arestas na estrutura do avião. Em relação à utilização de treliças na estrutura de macarrão do avião, explicamos que triângulo é uma figura geométrica indeformável e uma vez fixadas as três medidas de seus lados, não conseguimos mudar seus ângulos internos. Depois de discutirmos a Física e a Matemática envolvidas nos aviões, fomos obtendo alguns resultados: os alunos se interessavam mais pelas matérias e pelo trabalho em equipe e houve um interesse pela aprendizagem dos conteúdos básicos da Física e Matemática.

### 3 | CONCLUSÕES

Ao final desse Projeto, percebemos que os alunos tinham melhorado suas atitudes em relação aos conteúdos de Física e Matemática e não viam mais a Matemática como um “bicho-de-sete-cabeças”. Além disso, os alunos se divertiam fazendo o avião de macarrão. Por ser algo diferente e incomum numa sala de aula, diziam

que adoravam nossas aulas por serem aulas dinâmicas. Para os monitores e futuros profissionais, foi uma experiência de muita aprendizagem, por aprender metodologias de ensino diferentes daquelas que tiveram na escola básica, aprender a trabalhar em grupo, saber como a Escola Básica Pública funciona e ter a alegria de ver alunos, que antes não gostavam das aulas de Matemática e Física, e hoje já conseguem resolver sozinhos exercícios e problemas dessas disciplinas.

## REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002, 389 p.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: A questão da democracia**. Educação Matemática versus Educação Crítica. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 2001. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

VILLANI, A. **O professor é como um analista?** Ensaio, 1, 5-26. 1999.



## **SOBRE O ORGANIZADOR**

**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES** Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-348-4

