

# **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS 3**

---

**Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves  
(Organizador)**

 **Atena**  
Editora

**Ano 2019**

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves  
(Organizador)

# Educação Matemática e suas Tecnologias 3

Atena Editora  
2019

2019 by Atena Editora  
Copyright © Atena Editora  
Copyright do Texto © 2019 Os Autores  
Copyright da Edição © 2019 Atena Editora  
Editora Executiva: Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Antonella Carvalho de Oliveira  
Diagramação: Natália Sandrini  
Edição de Arte: Lorena Prestes  
Revisão: Os Autores

O conteúdo dos artigos e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. Permitido o download da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos aos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

### **Conselho Editorial**

#### **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**

Prof. Dr. Álvaro Augusto de Borba Barreto – Universidade Federal de Pelotas  
Prof. Dr. Antonio Carlos Frasson – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Antonio Isidro-Filho – Universidade de Brasília  
Prof. Dr. Constantino Ribeiro de Oliveira Junior – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Cristina Gaio – Universidade de Lisboa  
Prof. Dr. Deyvison de Lima Oliveira – Universidade Federal de Rondônia  
Prof. Dr. Gilmei Fleck – Universidade Estadual do Oeste do Paraná  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Ivone Goulart Lopes – Istituto Internazionale delle Figlie de Maria Ausiliatrice  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Juliane Sant’Ana Bento – Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Prof. Dr. Julio Candido de Meirelles Junior – Universidade Federal Fluminense  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Lina Maria Gonçalves – Universidade Federal do Tocantins  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Paola Andressa Scortegagna – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Urandi João Rodrigues Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme – Universidade Federal do Tocantins

#### **Ciências Agrárias e Multidisciplinar**

Prof. Dr. Alan Mario Zuffo – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Alexandre Igor Azevedo Pereira – Instituto Federal Goiano  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Daiane Garabeli Trojan – Universidade Norte do Paraná  
Prof. Dr. Darllan Collins da Cunha e Silva – Universidade Estadual Paulista  
Prof. Dr. Fábio Steiner – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul  
Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Girlene Santos de Souza – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia  
Prof. Dr. Jorge González Aguilera – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul  
Prof. Dr. Ronilson Freitas de Souza – Universidade do Estado do Pará  
Prof. Dr. Valdemar Antonio Paffaro Junior – Universidade Federal de Alfenas

### Ciências Biológicas e da Saúde

Prof. Dr. Gianfábio Pimentel Franco – Universidade Federal de Santa Maria  
Prof. Dr. Benedito Rodrigues da Silva Neto – Universidade Federal de Goiás  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Elane Schwinden Prudêncio – Universidade Federal de Santa Catarina  
Prof. Dr. José Max Barbosa de Oliveira Junior – Universidade Federal do Oeste do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Raissa Rachel Salustriano da Silva Matos – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Lima Gonçalves – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Vanessa Bordin Viera – Universidade Federal de Campina Grande

### Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto  
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte  
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

### Conselho Técnico Científico

Prof. Msc. Abrãao Carvalho Nogueira – Universidade Federal do Espírito Santo  
Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Andreza Lopes – Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento Acadêmico  
Prof. Msc. Carlos Antônio dos Santos – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Jaqueline Oliveira Rezende – Universidade Federal de Uberlândia  
Prof. Msc. Leonardo Tullio – Universidade Estadual de Ponta Grossa  
Prof. Dr. Welleson Feitosa Gazel – Universidade Paulista  
Prof. Msc. André Flávio Gonçalves Silva – Universidade Federal do Maranhão  
Prof.<sup>a</sup> Msc. Renata Luciane Polsaque Young Blood – UniSecal  
Prof. Msc. Daniel da Silva Miranda – Universidade Federal do Pará

<b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b>	
E24	Educação matemática e suas tecnologias 3 [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa (PR): Atena Editora, 2019. – (Educação Matemática e suas Tecnologias; v. 3)  Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web Inclui bibliografia ISBN 978-85-7247-349-1 DOI 10.22533/at.ed.491192405  1. Matemática – Estudo e ensino – Inovações tecnológicas. 2. Tecnologia educacional. I. Gonçalves, Felipe Antonio Machado Fagundes. II. Série.  CDD 510.7
<b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>	

Atena Editora  
Ponta Grossa – Paraná - Brasil  
[www.atenaeditora.com.br](http://www.atenaeditora.com.br)  
contato@atenaeditora.com.br

## APRESENTAÇÃO

A obra “Educação Matemática e suas tecnologias” é composta por quatro volumes, que vêm contribuir de maneira muito significativa para o Ensino da Matemática, nos mais variados níveis de Ensino. Sendo assim uma referência de grande relevância para a área da Educação Matemática. Permeados de tecnologia, os artigos que compõem estes volumes, apontam para o enriquecimento da Matemática como um todo, pois atinge de maneira muito eficaz, estudantes da área e professores que buscam conhecimento e aperfeiçoamento. Pois, no decorrer dos capítulos podemos observar a matemática aplicada a diversas situações, servindo com exemplo de práticas muito bem sucedidas para docentes da área. A relevância da disciplina de Matemática no Ensino Básico e Superior é inquestionável, pois oferece a todo cidadão a capacidade de analisar, interpretar e inferir na sua comunidade, utilizando-se da Matemática como ferramenta para a resolução de problemas do seu cotidiano. Sem dúvidas, professores e pesquisadores da Educação Matemática, encontrarão aqui uma gama de trabalhos concebidos no espaço escolar, vislumbrando possibilidades de ensino e aprendizagem para diversos conteúdos matemáticos. Que estes quatro volumes possam despertar no leitor a busca pelo conhecimento Matemático. E aos professores e pesquisadores da Educação Matemática, desejo que esta obra possa fomentar a busca por ações práticas para o Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Felipe Antonio Machado Fagundes Gonçalves

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
YENDO MÁS ALLÁ DE LA LÓGICA CLÁSICA PARA ENTENDER EL RAZONAMIENTO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA	
Francisco Vargas Laura Martignon	
DOI 10.22533/at.ed.4911924051	
<b>CAPÍTULO 2</b> .....	<b>7</b>
APROXIMANDO A PROBABILIDADE DA ESTATÍSTICA: CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO SOBRE A CURVA NORMAL	
André Fellipe Queiroz Araújo José Ivanildo Felisberto de Carvalho	
DOI 10.22533/at.ed.4911924052	
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>18</b>
DESCOMPLICANDO FÓRMULAS MATEMÁTICAS	
Marília do Amaral Dias	
DOI 10.22533/at.ed.4911924053	
<b>CAPÍTULO 4</b> .....	<b>26</b>
REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS DE FUNÇÕES: O SOFTWARE SIMCALC E A ANÁLISE DE PONTOS MÁXIMOS E MÍNIMOS	
Paulo Rogério Renk Rosana Nogueira de Lima	
DOI 10.22533/at.ed.4911924054	
<b>CAPÍTULO 5</b> .....	<b>36</b>
UMA ANÁLISE PANORÂMICA E REFLEXIVA DOS OBJETOS DE APRENDIZAGEM DA PLATAFORMA SCRATCH PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA	
Renato Hallal Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro Luiz Carlos Aires de Macêdo Eliziane de Fátima Alvaristo	
DOI 10.22533/at.ed.4911924055	
<b>CAPÍTULO 6</b> .....	<b>49</b>
LESSON STUDY: O PLANEJAMENTO COLABORATIVO E REFLEXIVO	
Renata Camacho Bezerra Maria Raquel Miotto Morelatti	
DOI 10.22533/at.ed.4911924056	
<b>CAPÍTULO 7</b> .....	<b>60</b>
FAMÍLIAS CONSISTENTES E A COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS	
Abel Rodolfo García Lozano Angelo Santos Siqueira Sergio Ricardo Pereira de Mattos Valessa Leal Lessa de Sá Pinto	
DOI 10.22533/at.ed.4911924057	

<b>CAPÍTULO 8 .....</b>	<b>70</b>
BIBLIOTECA ESTATÍSTICA DESCRITIVA INTERVALAR UTILIZANDO PYTHON	
Lucas Mendes Tortelli	
Dirceu Antonio Maraschin Junior	
Alice Fonseca Finger	
Aline Brum Loreto	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4911924058</b>	
<b>CAPÍTULO 9 .....</b>	<b>73</b>
COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS EXATOS FATORAÇÃO LU DOOLITTLE E FATORAÇÃO DE CHOLESKY	
Matheus Emanuel Tavares Sousa	
Matheus da Silva Menezes	
Ivan Mezzomo	
Sarah Sunamyta da Silva Gouveia	
<b>DOI 10.22533/at.ed.4911924059</b>	
<b>CAPÍTULO 10 .....</b>	<b>79</b>
HISTÓRIAS E JOGOS COMO POSSIBILIDADE DIDÁTICA PARA INTRODUIR O ESTUDO DE FRAÇÕES	
Cristalina Teresa Rocha Mayrink	
Samira Zaidan	
<b>DOI 10.22533/at.ed.49119240510</b>	
<b>CAPÍTULO 11 .....</b>	<b>93</b>
HISTÓRIAS EM QUADRINHOS (HQ'S) NO CONTEXTO DE ENSINO: UMA PROPOSIÇÃO METODOLÓGICA PARA O SEU USO NA SALA DE AULA	
Rodiney Marcelo Braga dos Santos	
Maria Beatriz Marim de Moura	
José Nathan Alves Roseno	
Francisco Bezerra Rodrigues	
<b>DOI 10.22533/at.ed.49119240511</b>	
<b>CAPÍTULO 12 .....</b>	<b>111</b>
MONDRIAN: APRECIÇÃO, REFLEXÕES E APROXIMAÇÕES – UM RELATO DE EXPERIÊNCIA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	
Dirceu Zaleski Filho	
<b>DOI 10.22533/at.ed.49119240512</b>	
<b>CAPÍTULO 13 .....</b>	<b>122</b>
MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE APOIO À APRENDIZAGEM: UMA EXPERIÊNCIA COM O TEMA REFORMA DA PRAÇA	
Alcides José Trzaskacz	
Ronaldo Jacumazo	
Joyce Jaquelinne Caetano	
Laynara dos Reis Santos Zontini	
<b>DOI 10.22533/at.ed.49119240513</b>	
<b>CAPÍTULO 14 .....</b>	<b>135</b>
MODELAGEM MATEMÁTICA, PENSAMENTO COMPUTACIONAL E SUAS RELAÇÕES	
Pedro Henrique Giraldo de Souza	
Sueli Liberatti Javaroni	
<b>DOI 10.22533/at.ed.49119240514</b>	

<b>CAPÍTULO 15</b> .....	<b>145</b>
MATEMÁTICA LÚDICA: CONSIDERAÇÕES DOS JOGOS DESENVOLVIDOS PELO GEMAT-UERJ PARA A SALA DE AULA	
Marcello Amadeo Luiza Harab Flávia Streva	
<b>DOI 10.22533/at.ed.49119240515</b>	
<b>CAPÍTULO 16</b> .....	<b>153</b>
O ENSINO DE ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL: COMO É ABORDADO EM DOCUMENTOS?	
Flávia Luíza de Lira Liliane Maria Teixeira Lima de Carvalho	
<b>DOI 10.22533/at.ed.49119240516</b>	
<b>CAPÍTULO 17</b> .....	<b>165</b>
O USO DO MATERIAL GEOBASES PARA A FORMAÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	
Francikelly Gomes Barbosa de Paiva Francileide Leocadio do Nascimento Fabiana Karla Ribeiro Alves Gomes	
<b>DOI 10.22533/at.ed.49119240517</b>	
<b>CAPÍTULO 18</b> .....	<b>171</b>
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA E CÔNICA COMO APLICAÇÃO DE CONTEÚDOS NA DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR	
Rogério dos Reis Gonçalves Vera Lúcia Vieira de Camargo André do Amaral Penteado Biscaro	
<b>DOI 10.22533/at.ed.49119240518</b>	
<b>CAPÍTULO 19</b> .....	<b>179</b>
UM ESTUDO SOBRE MULTICORREÇÃO COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA	
Rafael Filipe Novôa Vaz Lilian Nasser	
<b>DOI 10.22533/at.ed.49119240519</b>	
<b>CAPÍTULO 20</b> .....	<b>189</b>
JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA	
Angela Cássia Biazutti Lilian Nasser	
<b>DOI 10.22533/at.ed.49119240520</b>	
<b>CAPÍTULO 21</b> .....	<b>198</b>
JOGOS COOPERATIVOS: UMA EXPERIÊNCIA LÚDICA DE CONVIVER JUNTO NA EDUCAÇÃO INFANTIL	
Ana Brauna Souza Barroso Antônio Villar Marques de Sá	
<b>DOI 10.22533/at.ed.49119240521</b>	



**CAPÍTULO 22 ..... 206**

EFEITO DE HARDWARE E SOFTWARE SOBRE O ERRO DE ARREDONDAMENTO EM CFD

Diego Fernando Moro  
Carlos Henrique Marchi

**DOI 10.22533/at.ed.49119240522**

**CAPÍTULO 23 ..... 218**

O USO DO JOGO CORRIDA DE OBSTÁCULOS PARA O DESENVOLVIMENTO DE IDEIAS MATEMÁTICA EM UM LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA DE UM MUSEU

Leonardo Lira de Brito  
Erick Macêdo Carvalho  
Silvanio de Andrade

**DOI 10.22533/at.ed.49119240523**

**SOBRE O ORGANIZADOR..... 228**

## YENDO MÁS ALLÁ DE LA LÓGICA CLÁSICA PARA ENTENDER EL RAZONAMIENTO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

**Francisco Vargas**

Ludwigsburg University of Education,  
Ludwigsburg—Alemania y Universidad el Bosque,  
Bogotá — Colombia

**Laura Martignon**

Ludwigsburg University of Education,  
Ludwigsburg—Alemania

**RESUMEN:** La evidencia experimental acumulada en las últimas décadas en la literatura psicológica muestra que la interpretación y uso de los conectivos lógicos en distintos contextos están lejos de ser obvios. Estos resultados son a menudo interpretados sólo como una falta respecto a una única lógica tomada como normativa. Esto mismo ocurre muy frecuentemente en la literatura de Educación Matemática en donde los parámetros de análisis del razonamiento presente en los estudiantes se limitan a los conectivos y eventualmente los cuantificadores clásicos. Es posible, sin embargo, considerar otro tipo de lógicas que puedan ayudarnos no solo a reconsiderar esta perspectiva, sino a entender mejor cómo razonamos y por qué algunos “errores” lógicos en Matemáticas son tan consistentemente frecuentes. Proponemos un examen de los resultados de investigación de distintos experimentos y de la literatura, a la luz de algunas herramientas lógicas, en

particular de algunas lógicas computacionales no monotónicas.

**PALABRAS CLAVE:** razonamiento, lógica, implicación, abducción, educación matemática

**ABSTRACT:** The experimental evidence accumulated in recent decades in psychological literature shows that the interpretation and use of logical connectives in different contexts are far from obvious. These results are often interpreted only as a fault with respect to a single logic taken as normative. This very often occurs in the Mathematics Education literature where the parameters of analysis of the reasoning present in students are limited to the classical connectives including eventually the classical quantifiers. It is possible, however, to consider other types of logic that can help us not only to reconsider this perspective, but to better understand how we reason and why some logical “errors” in Mathematics are so consistently frequent. We propose an examination of the research results of different experiments and of the literature in the light of some logical tools, in particular of some non-monotonic computational logics.

**KEYWORDS:** reasoning, logic, implication, abduction, mathematical education

## 1 | INTRODUCCIÓN

Durante las últimas décadas la psicología cognitiva ha producido una gran cantidad de evidencia experimental que muestra que la interpretación y el uso de los conectivos lógicos en los lenguajes naturales y en diferentes contextos, están lejos de ser obvios. Los tipos de interpretaciones que se presentan no atañen solamente a un debate de tipo filosófico y teórico sino que se presentan en diferentes situaciones comunicativas, y en particular en aquellas que se presentan en contextos educativos.

Tal es el caso, por ejemplo, con respecto a los enunciados condicionales, cuyo sentido ha sido debatido ampliamente en diferentes disciplinas. Uno de los resultados que comúnmente han sido obtenidos es que este tipo de enunciados se interpretan de diferentes maneras y muy frecuentemente en desacuerdo con la semántica de la llamada implicación material.

Algunos experimentos muy conocidos de las últimas décadas del siglo pasado versan en esta dirección. Tal es el caso, por ejemplo, de la Tarea de selección de Wason (Wason, 1968, Cosmides, 1989) y de experimentos sobre el uso de esquemas deductivos del estilo *modus ponens* (como en Byrne, 1989). Estos resultados son interpretados normalmente como una falta en la competencia lógica normativa incluso a veces como mostrando nuestra falta de racionalidad. Sin embargo, como es bien sabido, son posibles otros enfoques, como el de tomar en consideración otros estándares lógicos aparte de la lógica clásica.

Estos pueden ayudarnos no sólo a reevaluar esas posiciones, sino también a darnos una comprensión más profunda acerca de el porqué razonamos como lo hacemos (Stenning y van Lambalgen, 2008).

En el ámbito de la de la educación matemática la situación es similar. En efecto, la investigación en este campo hasta el momento ha sido dominada por la idea de que una descripción completa de los estadios de desarrollo de los estudiantes puede ser guiada por el examen de los 16 posibles conectivos proposicionales clásicos. Esta clase de análisis, inspirado por algunos de los trabajos seminales de Piaget, ha sido complementado en algunos casos por consideraciones acerca de la interacción de estos conectivos con los cuantificadores usuales (por ejemplo en Durand-Guerrier 2003). A pesar de esto, incluso en estos casos, la semántica tarskiana para lógica de primer orden ha sido la única considerada entre las muchas posibles. Estudios y presentaciones recientes ampliamente influyentes como Hoyles et al. 2002 y Durand-Guerrier et al. 2011, dan cuenta de esta situación.

Un fenómeno acerca de la interpretación de enunciados condicionales es el de atribuirles un significado similar al de los enunciados bicondicionales correspondientes, tal como ha sido documentado en los distintos niveles educativos. Es significativo desde nuestro punto de vista, que haya sido visto como la manifestación de una “lógica infantil” (“child logic”) contrapuesta a la “lógica matemática” (“math logic”; véase O’Brien et al., 1968). Esta caracterización muestra que este tipo de fenómeno es interpretado

usualmente tan solo como una falta o carencia, y no como una manifestación que puede ser en sí misma caracterizada, explicada e incluso justificada. Proponemos el uso de algunas de las características salientes de Programación Lógica (Logic Programming). Algunas de estas han sido ya usadas en análisis psicológicos de la cognición humana (por ejemplo en Stenning y van Lambalgen, 2008).

## 2 | NUESTRO ESTUDIO

Presentaremos algunos de los resultados preliminares de un estudio en curso realizado hasta ahora con estudiantes universitarios en Colombia y Alemania a partir de cuestionarios. Nos focalizaremos en lo que sigue en dos ejemplos de las tareas desarrolladas.

### El Teorema de Pitágoras

¿Quién no conoce el Teorema de Pitágoras después de haber superado la educación primaria y secundaria? Sin embargo, incluso cuando su enunciado es dado explícitamente y no dejando espacio a la ambigüedad de sus distintas formulaciones posibles, el significado atribuido parece ir mucho más allá de lo que explícitamente afirma. Esto es lo que parecen indicar las respuestas a algunas de las preguntas en los cuestionarios aplicados. Consideremos, por ejemplo, la siguiente de selección múltiple:

“El Teorema de Pitágoras dice: Para todo triángulo rectángulo con hipotenusa  $a$  y catetos  $b$  y  $c$ , se tiene la igualdad  $a^2 = b^2 + c^2$ . Como una aplicación inmediata de este enunciado podemos concluir que (señale la o las opciones que considera correctas):

- el triángulo rectángulo con  $b=1$  y  $c=2$  tiene que tener
- el triángulo con  $a=4$ ,  $b=3$  y  $c=3$  no es rectángulo
- el triángulo con  $a=5$ ,  $b=4$  y  $c=3$  es rectángulo
- si un triángulo con  $b=1$  y  $c=2$  no es rectángulo, entonces ”

Sin entrar en los detalles relativos al uso de variables, cuantificadores, y la aplicación de reglas como la particularización universal, las distintas opciones corresponden, respectivamente, a la aplicación de los cuatro esquemas de inferencia *modus ponens*, *modus tollens*, afirmación del consecuente y negación del antecedente (MP, MT, AC y DA por sus siglas en Inglés), de los cuáles sólo los dos primeros son válidos clásicamente.

Los patrones de respuesta son indicadores de que en matemáticas también se presentan fenómenos bien conocidos como la asimetría entre los niveles de afirmación de MP y MT. Similarmente, se presenta en la escogencia de AC un tipo de razonamiento de tipo abductivo que a partir de las consecuencias de un teorema pasa a concluir sus hipótesis. Esto se manifiesta en el hecho que, dado un teorema en modo condicional, se pasa a concluir la validez de su converso. En este caso el converso resulta ser

cierto, pero no es un resultado abordado usualmente en las matemáticas escolares (ni superiores) y ninguno de nuestros participantes pudo dar un argumento válido matemáticamente para respaldar dicho teorema converso, ni siquiera de manera aproximada. De hecho, la argumentación más frecuente para concluir que el teorema converso es cierto, fue, simplemente, que el teorema directo lo es.

Veremos manifestarse el mismo fenómeno más adelante en la tarea sobre el Teorema de Lagrange en donde, a diferencia del caso que nos ocupa, el converso de Teorema es de hecho falso.

Consideremos ahora esta otra pregunta:

“Para todo triángulo rectángulo con hipotenusa  $a$  y catetos  $b$  y  $c$  se tiene lo siguiente (seleccione una única opción):

- la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados  $b$  y  $c$  es igual al área del triángulo equilátero construido sobre  $a$ .
- la suma de las áreas de los los semicírculos cuyos diámetros son  $b$  y  $c$  es igual al área del semicírculo con diámetro  $a$ .
- la suma de las mitades de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados  $b$  y  $c$  es igual a la mitad del área del cuadrado construido sobre  $a$ .
- la suma de las áreas de los pentágonos regulares construidos sobre los lados  $b$  y  $c$  es igual al área del pentágono regular construido sobre  $a$ .
- Todas las anteriores
- Ninguna de las anteriores

Justifique brevemente su respuesta”

Como esperábamos, las respuestas más frecuentes fueron la tercera (algunos pocos alumnos dieron incluso un argumento correcto de su validez) y la última. En este caso se presenta a nuestro modo de ver, una forma de “Razonamiento de Mundo Cerrado”. Tal como explicaremos en la última sección, esencialmente, aquello de lo que no se tiene una fuente de información afirmativa explícita es asumido como falso.

En resumen, un enunciado aparentemente simple y conocido como el Teorema de Pitágoras, conlleva en su interpretación toda una red semántica que no está necesariamente regida por las leyes de la lógica tradicional.

## El Teorema de Lagrange

Nuestro ejemplo del Teorema de Lagrange nos muestra cómo en situaciones corrientes de la enseñanza-aprendizaje los condicionales son revertidos, incluso en situaciones en que los estudiantes ya poseen un cierto grado de madurez y sofisticación matemática (en este caso un curso de álgebra abstracta para futuros docentes). También nos muestra cómo, este tipo de fenómenos con los condicionales se presenta también en casos en que los estudiantes no tienen aún intuiciones bien establecidas (a diferencia del ejemplo anterior de Geometría elemental) precisamente por tratarse de un tema abstracto y nuevo para ellos.

Recordemos el enunciado del teorema: “Dado un grupo  $G$  y dado  $H$ , un subgrupo de  $G$ , el orden de  $H$  divide el orden de  $G$ ”. Lo que documentamos es que en situaciones argumentativas en que los estudiantes deben aplicar el teorema, lo que hacen frecuentemente es aplicar su converso, es decir, que si  $G$  es un grupo y  $n$  divide al orden de  $G$ , entonces tiene que haber un subgrupo de  $G$  de orden  $n$ .

En uno de nuestros grupos, como parte de su examen final, los estudiantes fueron puestos ante la tarea de determinar si es verdadero o falso que todo grupo de orden 10 posee un elemento de orden 5. En tal caso debían dar un argumento justificando su respuesta. El ejercicio había sido desarrollado en clase y se había enfatizado, con contraejemplos, el hecho de que el converso del teorema es falso. Sin embargo, de 19 estudiantes, 7 respondieron que es verdadero dando el argumento (erróneo) de que “por el Teorema de Lagrange”, el grupo de orden 10 debe poseer un subgrupo de orden 5 por dividir 5 a 10. Esta fue la argumentación modal en el grupo estudiado.

### 3 | PROGRAMACIÓN LÓGICA Y ABDUCCIÓN

Para dar una explicación de las tendencias comunes evidenciadas por distintos experimentos, entre ellos los aquí discutidos, usamos algunas de las características de Programación Lógica, una serie de sistemas lógicos surgidos al interior de la Inteligencia Artificial (véase Doets, 1994 o Kowalski, 2011), en particular la variante llamada Programación Lógica Abductiva. Entre estas características consideramos en particular el razonamiento de mundo cerrado (“closed world reasoning”), la semántica de completión (“completion semantics”) y el uso de coacciones de integridad (“integrity constraints”).

La primera característica se manifiesta mediante el hecho de que dado un enunciado cuya validez no es afirmada explícitamente, se concluye que su negación es cierta. Podemos ver esta “negación como falla” (“negation as failure”) en la segunda pregunta del Teorema de Pitágoras: la elección de “ninguna de las anteriores” indica que por no conocerse ninguna de las variantes del Teorema de Pitágoras dadas en las demás opciones, estas son asumidas (erróneamente en este caso) como falsas. Esto se puede ver, en efecto, en algunas de las justificaciones ofrecidas:

“Se deben formar cuadrados sobre  $b$  y  $c$  para que la suma de sus áreas sea igual al cuadrado en  $a$ .” Otro alumno expresa: “no aplica ninguna respuesta ya que habla [sic] de otras figuras geométricas”

La semántica de completión y las coacciones de integridad juegan, por otra parte, un papel en la formalización de los esquemas de inferencia MP, MT, AC y DA, ya sean estos válidos o no clásicamente. Por otra parte, representan una manera de formalizar lógicamente el razonamiento de tipo abductivo que se presenta en algunos de estos esquemas, o que podemos ver en uso en la interpretación del teorema de Lagrange descrita anteriormente.

Este tipo de herramientas técnicas dan una formalización de tipo algorítmico de los posibles procesos que llevan a las respuestas predominantemente observadas en los ejemplos descritos. Este tipo de descripción va más allá de los estándares tenidos tradicionalmente como únicos o canónicos en la descripción de los procesos en acción, (en este caso la Lógica Clásica). Esta última se nos muestra, aquí como en tantos otros contextos, como el resultado excepcional de un entrenamiento y una educación, y no como nuestra manera espontánea y “natural” de razonar en todos. El estudio de las situaciones que faciliten el paso de un tipo de lógica usada espontáneamente (en este caso la Programación Lógica) a otra que normativamente es requerida en un contexto matemático (la Lógica Clásica), se convierte así en algo necesario para superar un verdadero obstáculo epistemológico.

## REFERENCIAS

BYRNE, R.M.J. Suppressing valid inferences with conditionals. **Cognition**, 31, 61–83. 1989

COSMIDES, L. The logic of social exchange: Has natural selection shaped how humans reason? Studies with the Wason selection task. **Cognition**, 31, 187–276. 1989.

DOETS K. **From Logic to Logic Programming**. Cambridge, MA, MIT Press. 1994.

DURAND-GUERRIER V. Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. **Educational Studies in Mathematics** 53, 5-34. 2003

DURAND-GUERRIER, V., BOERO, P., DOUEK, N., EPP, S. S., y TANGUAY, D. Examining the role of logic in teaching proof. En **Proof and proving in mathematics education** (pp. 369-389). Springer Netherlands. 2011.

HOYLES, C. y KÜCHEMANN D. Students' understanding of logical implication. **Educational Studies in Mathematics**, 51, 193-223. 2002.

KOWALSKI, R. **Computational Logic and Human Thinking: How to be Artificially Intelligent**. Cambridge University Press. 2011.

O'BRIEN, T.C., SHAPIRO, B.J. y REALI, N.C. Logical thinking – language and context, **Educational Studies in Mathematics**, 4, 201–219. 1971

STENNING, K., y VAN LAMBALGEN, M. **Human Reasoning and Cognitive Science**. Cambridge, MA: MIT Press. 2008.

WASON, P.C.. Reasoning about a rule. **Quarterly Journal of Experimental Psychology**, 20, 273–281. 1968,

## APROXIMANDO A PROBABILIDADE DA ESTATÍSTICA: CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO SOBRE A CURVA NORMAL

**André Fellipe Queiroz Araújo**

Universidade Federal de Pernambuco- UFPE  
Recife-Pernambuco

**José Ivanildo Felisberto de Carvalho**

Universidade Federal de Pernambuco- UFPE  
Recife-Pernambuco

**RESUMO:** Diversas recomendações curriculares (BRASIL, 1998, 2000) para o ensino de Estatística e Probabilidade na Educação Básica para a disciplina de Matemática, orientam para uma abordagem que interrelacione essas duas áreas de conhecimento; entretanto a estatística muitas vezes é abordada distanciada da probabilidade. Este artigo apresenta um projeto de dissertação que tem por objetivo investigar os conhecimentos matemáticos e didáticos de professores de Matemática no Ensino Médio sobre a articulação entre a estatística e a probabilidade por meio da curva normal. Teoricamente fundamentamo-nos nas ideias defendidas por Shulman (1986, 1987), o qual apresenta as categorias de conhecimento necessárias para a prática docente. Em termos metodológicos, o presente estudo apresenta uma abordagem qualitativa, onde investigaremos um grupo de 15 professores que atuam no Ensino Médio da rede pública da cidade de Nazaré da Mata no estado de PE. Esperamos que este estudo

possa promover novas discussões e reflexões sobre o ensino de Estatística e Probabilidade, que favoreçam a qualidade das ações docente em sala de aula, ampliando a potencialidade das tarefas didático-pedagógica e de aprendizagem em favor da construção do conhecimento estatístico e probabilístico.

**PALAVRAS-CHAVE:** Estatística; Probabilidade; Curva Normal; Conhecimento Docente; Formação de professores

**ABSTRACT:** Several curricular recommendations (BRAZIL, 1998, 2000) for the teaching of Statistics and Probability in Basic Education for the disciplined Mathematics, guide an approach that interrelates these two areas of knowledge; however, statistics are often approached far from probability. This article presents a dissertation project that aims to investigate the mathematical and didactic knowledge of Mathematics teachers in High School on the articulation between statistics and probability through the normal curve. Theoretically we base ourselves on the ideas defended by Shulman (1986, 1987), which presents the categories of knowledge necessary for the teaching practice. In methodological terms, the present study presents a qualitative approach, where we will investigate a group of 15 teachers who work in the High School of the public network of the city of Nazaré da Mata in



the state of PE. We hope that this study can promote new discussions and reflections on the teaching of Statistics and Probability, which favor the quality of teaching actions in the classroom, expanding the potential of didactic-pedagogical and learning tasks in favor of the construction of statistical and probabilistic knowledge .

**KEYWORDS:** Statistic; Probability; Normal Curve; Teaching Knowledge; Teacher training

## 1 | INTRODUÇÃO

O conhecimento matemático é de fundamental importância tanto para a formação escolar dos indivíduos quanto para suas relações em sociedade, pois estimula o desenvolvimento de competências, habilidades, raciocínio e estratégias, e está inerente às diversas áreas do conhecimento. A Educação Matemática, enquanto campo científico, tem como um dos seus objetivos oferecer condições que favoreçam aos estudantes a apropriação e compreensão das características essenciais dos conceitos matemáticos, tanto no contexto escolar como em suas práticas sociais.

Nesse sentido, dentre os inúmeros campos de conhecimentos presentes na Matemática, o de Estatística e Probabilidade exerce um papel importante no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, pois estimula o raciocínio, a capacidade de análise crítica e a argumentação. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997,1998, 2000), a abordagem e o desenvolvimento do raciocínio estatístico e probabilístico devem ser iniciados já nos primeiros anos do ensino fundamental e aprimorados e ampliados no Ensino Médio.

A educação estatística tem como um dos objetivos na educação básica, propiciar ao estudante o desenvolvimento de habilidades e competências relativas à seleção e interpretação crítica de tabelas e gráficos, como também a compreensão e análise de dados e informações de diferentes contextos presentes em nosso cotidiano.

Em relação ao processo de ensino e aprendizagem de Estatística e Probabilidade, alguns estudos (LOPES, 2008; PIETROPAOLO, CAMPOS, CARVALHO E TEIXEIRA; 2013) apontam algumas lacunas nesse processo, sobretudo pela não compreensão, por parte dos estudantes do significado dos conceitos estatísticos e probabilísticos. Os professores também apresentam dificuldades com relação aos conceitos de estatística e probabilidade (BATANERO, 2001; CARVALHO, 2017).

Diante desse contexto, com vistas a contribuir com processo de ensino e aprendizagem da Estatística e Probabilidade, partindo da premissa que o professor exerce um papel primordial no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, sendo considerado como o principal responsável por perpetuar o conhecimento e que a distribuição normal ou curva normal, se constitui um modelo matemático que permite a abordagem de conceitos da Estatística e a Probabilidade, de um ensino contextualizado e a inter-relação entre essas duas áreas, o presente estudo pretende responder as seguintes problemáticas: Quais os conhecimentos matemáticos de um

grupo de professores de Matemática no Ensino Médio concernente aos conceitos da Estatística e da Probabilidade? Quais os conhecimentos didáticos deste grupo de professores sobre a abordagem na sala de aula de matemática em que a probabilidade esteja articulada à estatística? O modelo da Curva Normal se caracteriza como uma possibilidade para a referida articulação (probabilidade e estatística) no Ensino Médio?

Deste modo, buscaremos, enquanto objetivo geral, investigar os conhecimentos matemáticos e didáticos de professores de Matemática no Ensino Médio sobre a articulação entre a Estatística e a probabilidade por meio da curva normal. De modo mais específico, analisaremos os conhecimentos dos professores em situações problemas envolvendo o cálculo de probabilidade por meio da curva normal e compreender as concepções dos professores sobre a curva normal e o seu ensino.

Para tanto, fundamentaremos a nossa pesquisa nas ideias sobre o conhecimento docente difundidas por Shulman (1986, 1987) o qual propõe as bases ou categorias de conhecimento necessárias para desenvolvimento de forma satisfatória da prática docente.

Assim, pelo presente estudo, buscamos desenvolver reflexões e um aperfeiçoamento docente relativo à curva normal, por acreditarmos que a mesma se configura como uma ferramenta para a abordagem de conceitos estatísticos e probabilísticos, por ser um modelo distribuição de normalidade de variáveis contínuas, frequentemente utilizado no nosso cotidiano e encontrado em diversas áreas do conhecimento.

## 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Ensino de Estatística e Probabilidade

A Estatística e a Probabilidade exercem um relevante papel em nossa vida cotidiana. Ambas podem ser aplicadas em diversas áreas de conhecimento, servindo de subsídio para diversos tipos de pesquisas científicas. O seu conhecimento é fundamental para a observação e interpretação de uma variedade de fenômenos, dados e informações.

De acordo com Bayer et al (2005), a Estatística é classificada como a ciência que se ocupa da coleta, organização, análise e interpretação de dados experimentais. Ainda segundo estes autores, a Estatística, em sua estrutura, contemplam duas áreas de conhecimento: Descritiva e Inferencial.

Em linhas gerais, na ótica dos autores supracitados, a Estatística Descritiva reúne métodos para organização, resumo e descrição de dados e informações, como por exemplo, tabelas, gráficos, medidas de tendência central (médias, moda e mediana) e medidas de variabilidade ou dispersão (desvio padrão e variância), técnicas comumente utilizadas para descrever o comportamento de conjuntos de dados. Por sua vez, a área

Inferencial é responsável por dar suporte ao pesquisador, apresentando um conjunto de técnicas que buscam caracterizar e projetar o comportamento de uma população a partir dos parâmetros observáveis de uma parte dela, ou seja, uma amostra dessa população.

Além disso, subjacentes à Estatística Inferencial estão outros dois campos de conhecimento: a Amostragem e a Probabilidade. A primeira é caracterizada como a área responsável pelo desenvolvimento de estudos e técnicas para escolha das unidades populacionais que formarão uma determinada amostra, possibilitando que as mesmas apresentem conclusões que possam caracterizar e representar as suas respectivas populações.

Por sua vez, a Probabilidade é classificada como o ramo da Matemática que trata de fenômenos aleatórios. Esta área contempla aspectos de análise combinatória, experimentos aleatórios, espaço amostral, operações com eventos e comportamentos probabilísticos de variáveis discretas e contínuas (BAYER et al, 2005).

Sobre esta temática, diversos estudos presentes na literatura, tais como Gal (2005) e Batanero (2001, 2005) apontam a necessidade e importância da inserção do estudo da Estatística e probabilidade na Educação Básica. Entre as várias razões os autores citam a necessidade de leitura e interpretação de dados estatísticos em muitas profissões e na vida cotidiana das pessoas, bem como o importante papel do raciocínio probabilístico na tomada de decisões.

Nesta direção, dada a notável importância da Estatística e Probabilidade, enquanto áreas de conhecimentos, para a formação educacional dos indivíduos, buscando propiciar aos mesmos o desenvolvimento de habilidades, competências, emancipação e o senso crítico, elas passaram a serem inseridas como componentes curriculares da disciplina de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio da Educação Básica no Brasil, a partir dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997, 1998, 2000).

Em relação ao Ensino Médio, em linhas gerais, os PCN (BRASIL, 2000) indicam que com o ensino de Estatística e Probabilidade, objetiva-se: a apropriação e ampliação do conhecimento sobre os conceitos relativos ao campo estatístico e probabilístico abordados no Ensino Fundamental; desenvolvimento competências e habilidades relativas à contextualização, interdisciplinaridade dos conteúdos abordados; o uso de recursos tecnológicos para resolver problemas que abarquem situações do nosso cotidiano; compreensão dos conceitos relativos à chance, certeza e probabilidade; a utilização de modelos para simular eventos e estimar probabilidade e a compreensão da integração entre Estatística e a Probabilidade, utilizando essa relação para a resolução de problemas a partir de situações do contexto social dos estudantes.

Gal (2002, 2005) discorre sobre a importância do ensino de Estatística e Probabilidade para o desenvolvimento do letramento estatístico e probabilístico dos estudantes, de modo que propicie aos mesmos a construção de habilidades básicas para tomada de decisões, a leitura e interpretação de dados estatísticos e probabilísticos

presentes em diferentes contextos sociais.

A importância de um ensino que aborde a inter-relação entre a probabilidade e a estatística é enfatizada por Lopes (2010) ao apontar que há uma interseção entre a Estatística e a probabilidade, pois o pensamento estatístico abarca noções e conceitos relativos a incerteza e inferência. Assim, os pensamentos estatísticos e probabilísticos atuam juntos no processo de tomada de decisões.

A Estatística, com seus conceitos e métodos, configura-se com um duplo papel: permite compreender muitas das características da complexa sociedade atual, ao mesmo tempo que facilita a tomada de decisões em um cotidiano onde a variabilidade e a incerteza estão sempre presentes (LOPES, 2010, p. 51).

No entanto, diante desse contexto, alguns estudos presentes na literatura têm apontando algumas lacunas no ao processo de ensino e aprendizagem de estatística e probabilidade na educação básica. Dentre esses estudos, destacamos Lopes (2008), e Damim (2015) que apontam que no Brasil o ensino de Estatística ainda não vem sendo abordado de forma satisfatória na educação básica e superior e que esse quadro deficitário está relacionado principalmente com a falta de uma formação acadêmica adequada de professores para lecionarem a Estatística na disciplina de Matemática.

Em continuidade, outros estudos (IVES, 2009; BATANERO E DÍAZ, 2012) constataram que no ensino da probabilidade é dada uma ênfase por muitos docentes unicamente ao tratamento de técnicas operatórias e procedimentos mecanizados. Carvalho (2017) pontua que os professores apresentam dificuldades tanto com o conceito de probabilidade na perspectiva da matemática, como da sua didática; advoga, entretanto, que mediante processos formativos idôneos, os professores avançam na construção e ressignificações dos seus conhecimentos matemáticos e didáticos sobre probabilidade.

Diante desse cenário, concordamos com Campos (2007), o qual enfatiza que para uma melhor assimilação de conceitos estatísticos e probabilísticos, o ensino dessa temática deve contemplar não só as técnicas operatórias, como também um ensino contextualizado que contemple situações do nosso cotidiano que abarquem a aplicabilidade dos conceitos e propriedades relativos ao campo estatístico e probabilístico.

Assim, pelo presente estudo, buscaremos desenvolver reflexões e um aperfeiçoamento docente relativo à curva normal, por acreditarmos que a mesma se configura como uma ferramenta para a abordagem de conceitos estatísticos e probabilísticos, por ser um modelo distribuição de normalidade de variáveis contínuas, frequentemente utilizado no nosso cotidiano e encontrado em diversas áreas do conhecimento.

## 2.2 A Curva Normal

A distribuição normal ou curva normal pode ser definida como modelo matemático que descreve o comportamento de variáveis aleatórias contínuas e tem

uma importância grande para a área da Estatística Inferencial. Através desse modelo, é possível a construção de intervalos de confiança e também calcular probabilidades. (GONÇALVES, 2014).

Sua representação algébrica é definida pela função de densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Graficamente, a curva normal é representada a seguir:

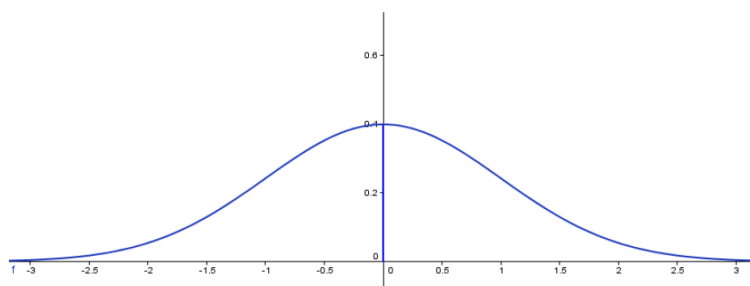


Figura 1: Representação gráfica da Curva Normal (Gonçalves, 2014)

A partir dessas informações, devemos compreender que a função densidade de probabilidade supracitada é uma função sempre não negativa e a área sob seu gráfico e o eixo das abscissas é sempre igual a 1. Assim, em termos matemáticos tal função satisfaz as seguintes condições: 1)  $f(x) \geq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$  e 2) A área definida por  $f(x)$  é igual a 1.

Nessas condições, uma variável aleatória contínua apresenta uma distribuição normal com parâmetros  $\mu$  (média) e  $\sigma$  (Desvio padrão), se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ para } x \in \mathbb{R}, -\infty < \mu < \infty \text{ e } \sigma > 0$$

Diante dessas informações, em termos matemáticos devemos compreender que a função  $f(x)$  é uma função exponencial de uma variável real, que possui dois parâmetros  $\mu$  (média) e  $\delta$  (Desvio padrão). Assim, a curva normal possui as seguintes propriedades: 1)  $f(x)$  é simétrica em relação a  $\mu$  (média), ou seja, ao centro. 2)  $f(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$  3) o valor máximo de  $f(x)$  é obtido quando  $x = \mu$  4) possui dois pontos de inflexões em  $x = \mu \pm \delta$  5) A área entre a curva e o eixo das abscissas é igual a 1. 6) A área sob a curva entre dois pontos é a probabilidade de uma variável normalmente distribuída tomar um valor entre esses pontos. e 7) A Curva Normal é assintótica em relação ao eixo das abscissas

No que diz respeito ao ensino da Curva Normal na educação básica, vários pesquisadores defendem a abordagem desse modelo matemático nesse nível de formação. Batanero et al (2004) realizou estudos onde foi possível desenvolver o ensino e a aprendizagem da curva normal na educação básica.

Em acréscimo, Tauber (2001) constatou que há razões que indicam a necessidade do estudo da Curva Normal, a saber: 1 - Muitos fenômenos físicos, biológicos e matemáticos podem ser modelados pela distribuição normal; 2 - Trata-se de um modelo adequado para distribuição de dados contínuos, espalhados ao longo de aproximações simétricas; 3 - Grande parte das variáveis aleatórias encontra-se distribuídas em uma distribuição normal, o que permite o uso em qualquer área do conhecimento; 4 - A média e outras variáveis estatísticas de amostras aleatórias aproximam-se da curva normal.

Diante disso, a autora conclui que o ensino da Curva Normal deve ser abordado na educação básica, contemplando conceitos estatísticos e probabilísticos através de um ensino contextualizado que abarque situações do cotidiano dos estudantes em que a curva normal pode ser aplicada.

Corroborando com essa temática, Macedo (2016), ao realizar um estudo com professores de Matemática sobre o ensino de Estatística e Probabilidade, conclui que é pertinente o ensino da curval normal, tendo em vista que o seu conceito e sua aplicação permeiam diversas situações do cotidiano em diferentes áreas do conhecimento. Assim, tal ensino pode promover o letramento estatístico e a aproximação da Probabilidade com a Estatística.

Logo, concordamos que abordagem da Curva Normal deve ser iniciada na educação básica, possibilitando o ensino e a aprendizagem de tais conceitos da forma menos “tradicional”, baseada unicamente na aplicação de técnicas operatórias.

### **2.3 Sobre o Conhecimento Docente**

Com vistas a analisar o conhecimento de professores do Ensino Médio sobre a curva normal, adotamos como aporte teórico as ideias de Shulman (1986, 1987) sobre o conhecimento docente por julgarmos que as categorias de conhecimento difundidas pelo autor e necessárias para a prática docente, nos dará suporte para nossa coleta e análise de dados.

Shulman (1986, 1987) em seus estudos, argumenta as bases ou categorias de conhecimento necessárias para um indivíduo desenvolver de forma satisfatória sua prática docente. Assim, são sete categorias de conhecimento elencadas pelo autor: 1) conhecimento de conteúdo específico; 2) conhecimento pedagógico geral; 3) conhecimento do currículo; 4) conhecimento pedagógico do conteúdo, 5) conhecimento dos estudantes e suas características”; 6) conhecimento dos contextos educativos e 7) conhecimento dos objetivos, metas e valores educacionais.

Explorando cada uma dessas categorias desenvolvidas pelo autor, devemos compreender que o “conhecimento de conteúdo específico” significa o conhecimento dos conteúdos das disciplinas escolares, englobando um conjunto de conceitos e procedimentos específicos de tais disciplinas ou assunto. O domínio do conhecimento de conteúdo específico torna-se essencial para que o professor seja um mediador em

sala de aula, oferecendo condições para que os estudantes se apropriem deles.

Em continuidade, Shulman (1986, 1987) define como conhecimento pedagógico geral, o conhecimento relacionado às formas e estratégias gerais para o ensino e abordagem de conteúdos em sala de aula. Esse conhecimento envolve noções pedagógicas e didáticas, motivação, planejamento e organização dos conteúdos a serem ensinados.

O conhecimento do currículo, segundo o autor, está relacionado com o conhecimento crítico do currículo de programas para o ensino de temas e tópicos de cada disciplina para cada nível de escolarização em um determinado período. Essa categoria contempla dois tipos de conhecimento: o conhecimento curricular vertical, possibilitando a articulação entre o que foi estudado e o que será estudado futuramente em uma determinada disciplina, e o conhecimento curricular horizontal, que possibilita a articulação entre o que será estudado e conteúdos que serão estudados no mesmo período em outras disciplinas, possibilitando a interdisciplinaridade entre diferentes áreas de conhecimento.

Por sua vez, o conhecimento pedagógico do conteúdo está relacionado com o conhecimento específico de uma determinada disciplina, voltado para o processo de ensino-aprendizagem da mesma. Tal conhecimento engloba noções didáticas, pedagógicas, estratégias e formas mais adequadas para a abordagem de conteúdos específicos em sala de aula, tornando a compreensão de conceitos e procedimentos por mais dos alunos de forma mais plausível possível.

O conhecimento dos estudantes e suas características, proposto pelo autor, engloba o conhecimento e a maneira como eles assimilam o conhecimento, levando em consideração as particularidades e especificidades de cada um, relativas aos aspectos cognitivos, emocional e social. Já o conhecimento dos contextos educativos, engloba as relações dos estudantes com seus pares, bem como o conhecimento do contexto social em que a escola está inserida e de toda a comunidade escolar. Por fim, o conhecimento dos objetivos, metas e dos valores educacionais necessários para a prática docente, está relacionado com a finalidade e os propósitos educacionais para cada nível de escolarização, envolvendo diretrizes pedagógicas e de aprendizagem.

### **3 | PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS**

Em termos metodológicos, esta pesquisa utiliza uma abordagem qualitativa. A principal característica desse tipo de abordagem é investigar um ambiente natural ou um fenômeno cabendo ao pesquisador interpretar os dados. (OLIVEIRA, 2011)

Assim, buscaremos analisar os conhecimentos de professores de Matemática no Ensino Médio sobre a articulação entre a Estatística e a probabilidade por meio da curva normal, da cidade de Nazaré da Mata, localizada na zona da mata norte do estado de Pernambuco, região a qual exerço a prática docente e realizei os estágios

supervisionados durante o curso de graduação em Licenciatura em Matemática, onde tem sido possível observar que o ensino de Estatística e Probabilidades, em linhas gerais, é unicamente pautado de forma independente, priorizando a abordagem das técnicas operatórias, bem como também é possível verificar um desempenho insatisfatório, por partes dos estudantes, na resolução de problemas que envolvem raciocínio estatístico e probabilístico

Nesta direção, o universo desta pesquisa serão 15 professores que ensinam Matemática no Ensino Médio da rede pública de ensino da cidade de Nazaré da Mata. A escolha por professores desse nível de escolarização está fundamentada nos Parâmetros Curriculares Oficiais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), e nos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco, (PERNAMBUCO, 2013) onde indicam, em linhas gerais, que o ensino de Estatística e Probabilidade nesse nível de escolarização, além de promover a inter-relação dessas áreas de conhecimento, deve ser visto como forma de a Matemática quantificar e interpretar um conjunto de dados ou informações.

Em continuidade, estruturamos e desenvolvemos a nossa pesquisa em três etapas: na primeira etapa, aplicaremos um questionário diagnóstico aos professores participantes que contemplará questões sobre o perfil docente dos professores investigados, como a formação acadêmica e experiência; além de itens que investigaram os conhecimentos sobre a estatística e a probabilidade e seu ensino.

Em seguida, na segunda etapa, denominada de intervenção, promoveremos com base nos dados obtidos do questionário diagnóstico, uma formação docente, onde juntamente com professores levantaremos discussões e reflexões sobre a curva normal, abordando o seu conceito, os conceitos estatísticos e probabilísticos abarcados por esse modelo, o cálculo de probabilidade em situações problemas envolvendo a curva normal e as possibilidades e aspectos relacionados ao seu ensino.

Na terceira e última etapa, aplicaremos o questionário avaliativo, semelhante ao questionário diagnóstico, com o objetivo de coletar informações que permitam verificar se houve alguma possível evolução no que diz respeito à base de conhecimento dos professores participantes sobre a temática do nosso estudo, após a intervenção.

## CONSIDERAÇÕES

Acreditamos que esta pesquisa pode promover novas discussões e reflexões sobre o ensino de Estatística e Probabilidade, ampliando a base de conhecimentos dos professores de Matemática do Ensino Médio relativa a conceitos estatísticos e probabilísticos abarcados pela curva normal, como também favorecer a qualidade das ações docente em sala de aula, ampliando a potencialidade das tarefas didático-pedagógica e de aprendizagem em favor do letramento estatístico e probabilístico dos estudantes. .



## REFERÊNCIAS

BATANERO, C. **Didáctica de La Estadística**. V.1, Granada. Universidad de Granada, Espanha, 2001.

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 8 n.3 p. 247-263, Nov. 2005

BATANERO, C. et al Student's reasoning about the normal distribution. In: BEN-ZVI Y, D. ; GARFIELD, J. **The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking**. Madrid, Kluwer, 2004, p. 257-276.

BATANERO, C.;DÍAZ, C. Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. **Chilean Journal of Statistics**, Granda, v.3, n.1, p.3-13, Abril, 2012.

BAYER et al. **Preparação do formando em Matemática-licenciatura plena para lecionar Estatística no Ensino Fundamental e Médio**, 2005. Disponível em: <[www.nutes.ufrj.br/abrapec/venpec/conteudo/artigos/3/doc/p508.doc](http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/venpec/conteudo/artigos/3/doc/p508.doc)> Acesso em: 10 Abr 2018.

BAYER et al. **Probabilidade na Escola**, 2005. Disponível em: <[http://exatas.net/artigo\\_ciem2.pdf](http://exatas.net/artigo_ciem2.pdf)>. Acesso em: 10 Mar. 2018.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**, 1997. Disponível em: <[portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf)> Acesso em: 12 Maio 2018.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**, 1998. Disponível em: <[portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf)> Acesso em: 12 Maio 2018

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria do Ensino Médio. **Parâmetros Curriculares Nacionais, 2000**. Disponível em: <[portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf](http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf)> Acesso em: 12 Maio 2018

CAMPOS , C. **A educação estatística**: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da estatística em cursos de graduação. 242 f. Tese (Doutorado em educação matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

CARVALHO, J. Aprender e Ensinar Probabilidade: um olhar para o conhecimento do professor. Tese (Doutorado em educação matemática) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2017.

DAMIN, W. **Ensino de Estatística para os Anos Finais do Ensino Fundamental**. 97 f. Dissertação (Mestrado ensino de ciência e tecnologia). Universidade federal do Paraná, 2014.

Gal, I. Adult's Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities – Appeared, **Internacional Statistical Review** Australia, v. 70 1 -33, Abril, 2002

Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones (Ed.), **Exploring probability in school. Challenges for teaching and learning**. The Netherlands, Kluwer, 2005, p. 39–63.

GONÇALVES, P. **Uma abordagem da distribuição normal através da resolução de uma situação problema com a utilização do software geogebra**. 102f. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Universidade Federal de Goiás, 2014.

IVES, S. **Learning to teach probability: relation ships among preservice teachers 'beliefs and orientations, content knowledge, and pedagogical content knowledge of probability**.. Disponível

em: <<http://repository.lib.ncsu.edu/ir/handle/1840.16/4058>. Acesso em: 17 Maio 2018

LOPES, C. **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores**, 2008. Disponível em: < <http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a05.pdf> > Acesso em: 30 jun.2018

LOPES, C. Os desafios para Educação Estatística no currículo de Matemática. In: LOPES, C; COUTINHO, C. ; ALMOULOUD, S. **A. Estudos e reflexões em Educação Estatística**. Campinas, Mercado de Letras, 2010, 47-64.

GONÇALVES, P. **Conhecimentos de professores de matemática sobre o processo de ensino e de aprendizagem de noções estatísticas– curva normal**. 206f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Universidade Anhanguera de São Paulo, 2016.

PERNAMBUCO, S. **Currículo de Matemática para o Ensino Fundamental** com base nos Parâmetros Curriculares do Estado de Pernambuco, Recife, SEDUC-PE, 2012

PIETROPAOLO, C.; CAMPOS, M.; FELISBERTO DE CARVALHO, J. ; TEIXEIRA, P. In :IV SEMINÁRIO DO OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO DA CAPES, IV, Brasília, 2013. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais**.

OLIVEIRA, M. **Como fazer projetos, relatórios, monografias, dissertações, teses**. 5. ed. Rio de Janeiro, Elsevier, 2011.

Shulman, L. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, Fev, 1986, vol. 15, p.4-14.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Educational Review**, Harvard Educational Review: Abril, 1987, Vol. 57, No. 1, p. 1-23.

TAUBER, L. **La Construcción del Significado de La Distribución Normal a partir de Actividades de Análisis de Datos**. Universidad de Sevilla, Sevilla, 2001.

## DESCOMPLICANDO FÓRMULAS MATEMÁTICAS

**Marília do Amaral Dias**

Universidade Católica de Pelotas  
Centro de Ciências Sociais e Tecnológicas  
Pelotas-RS

**RESUMO:** O minicurso tem como objetivo demonstrar fórmulas matemáticas relacionadas com a geometria plana, a geometria analítica e a trigonometria utilizando como recurso principal o Geoplano. O Geoplano é um recurso facilitador do processo ensino-aprendizagem e auxilia no desenvolvimento de habilidades necessárias à construção de raciocínio lógico-matemático, de forma prazerosa, e o trabalho matemático não será mais a memorização de fórmulas, mas sim, aquele conhecimento que o aluno compreende e constrói. Neste minicurso pretende-se explorar o Geoplano, em experiências de aprendizagem que leve à dedução de fórmulas sobre a soma dos ângulos internos de polígonos convexos, número de diagonais, Teorema de Pitágoras, apótema e lado de polígonos regulares inscritos em uma circunferência, áreas das principais figuras planas, relação fundamental da trigonometria, distância ente dois pontos, entre outras.

**PALAVRAS-CHAVES:** Geoplano; Fórmulas; Geometria; Trigonometria.

**ABSTRACT:** The mini-course aims to

demonstrate mathematical formulas related to flat geometry, analytical geometry and trigonometry using as main feature the Geoplano. The Geoplano is a facilitator of the teaching-learning process and assists in the development of skills necessary for the construction of logical-mathematical reasoning, in a pleasurable way, and the mathematical work will no longer be the memorization of formulas, but rather, that knowledge that the student understands and builds. In this mini-course we intend to explore the Geoplano, in learning experiences that leads to the deduction of formulas on the sum of the internal angles of convex polygons, number of diagonals, Pythagorean Theorem, apothema and side of regular polygons inscribed in a circumference, areas of main plane figures, fundamental relation of trigonometry, distance between two points, among others.

**KEYWORDS:** Geoplano; Formulas; Geometry; Trigonometry.

### 1 | INTRODUÇÃO

Para a compreensão e dedução de algumas fórmulas da geometria plana, da geometria analítica e da trigonometria optamos por utilizar, como recurso didático o Geoplano, em experiências de aprendizagem que levem o aluno a construir, guiado pelo pensamento

lógico, seus próprios conceitos matemáticos. O Geoplano é um modelo matemático que permite traduzir ou sugerir ideias matemáticas, serve de suporte concreto para a representação mental.

Não se deve esquecer que esse recurso é apenas um dos meios auxiliares do ensino e, sempre que se fizer necessário, é importante complementá-lo com outros meios instrumentais para possibilitar a inter-relação entre o concreto e o abstrato. Por isso, neste minicurso, iremos utilizar também dobraduras e recortes com a finalidade de explorar outros recursos juntamente com o Geoplano.

O idealizador do Geoplano, foi o inglês Caleb Gattegno. Este instrumento é um recurso didático que se pode classificar como múltiplo e dinâmico porque permite a representação de numerosas situações e possibilita o movimento da imagem das figuras no plano e no espaço e, se manipulado adequadamente, auxilia na compreensão de conceitos matemáticos relacionados com a Aritmética, Álgebra, Geometria (Plana, Espacial e Analítica) e Trigonometria. O Geoplano Retilíneo (Figura 1) é um tabuleiro de madeira, de forma quadrada ou retangular, de cor natural ou suave, onde se encontram linhas traçadas, formando uma rede quadricular e nos vértices destes quadrados, são fixados pregos ou pinos. Para a construção de conceitos relacionados à circunferência e o círculo utiliza-se o Geoplano Circular (Figura 2). Na figura 3, apresentamos outro tipo de Geoplano, o Geoplano Conjugado. Para representações geométricas usam-se atilhos coloridos (elásticos coloridos). Os vários tipos de Geoplanos apresentados nas figuras e utilizados no minicurso fazem parte do acervo do Laboratório de Matemática da Universidade Católica de Pelotas/UCPel.

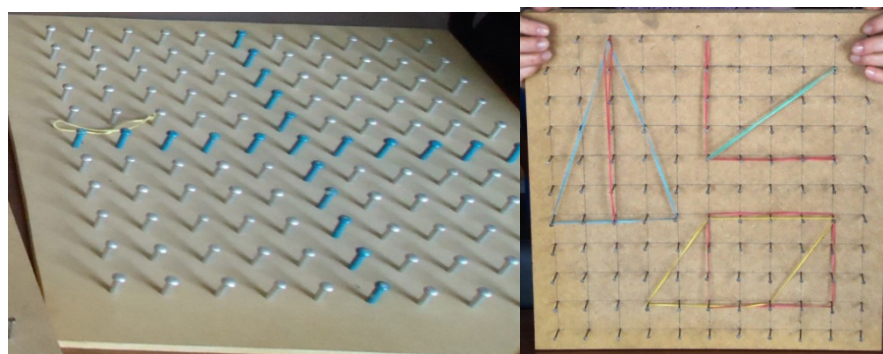


Figura 1 – Geoplano Retilíneo (no primeiro os eixos cartesianos destacados em azul)

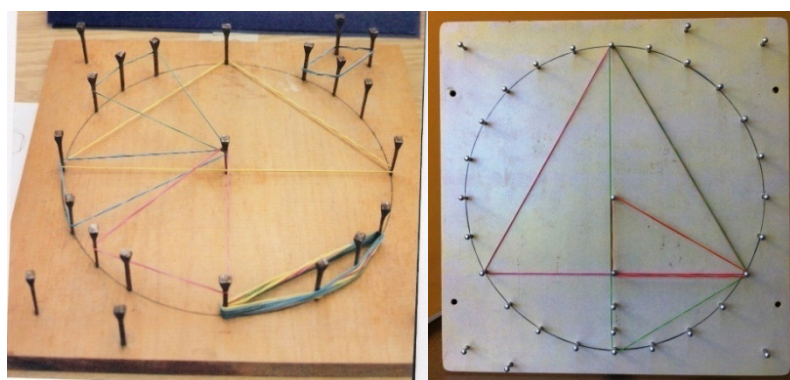


Figura 2 – Geoplano Circular

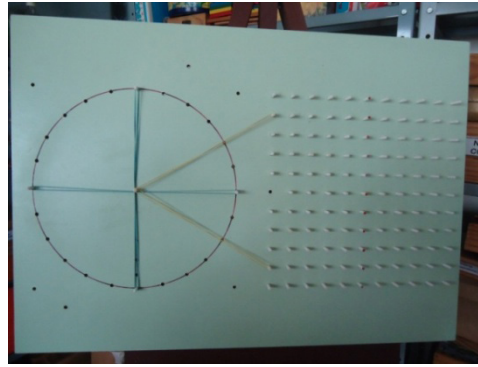


Figura 3 – Geoplano Conjugado: Retilíneo e Circular

## 2 | FÓRMULA DO NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO

Representar alguns dos polígonos: quadrado, pentágono, hexágono, etc e escolher um dos vértices do polígono e construir todas as suas diagonais que partem deste único vértice. Após, preencher a planilha a seguir (Planilha 1). O objetivo é deduzir a fórmula do número de diagonais de um polígono. Deve-se chegar a constante 3, que é a diferença entre o número de lados e o número de diagonais de cada vértice (Figura 4).

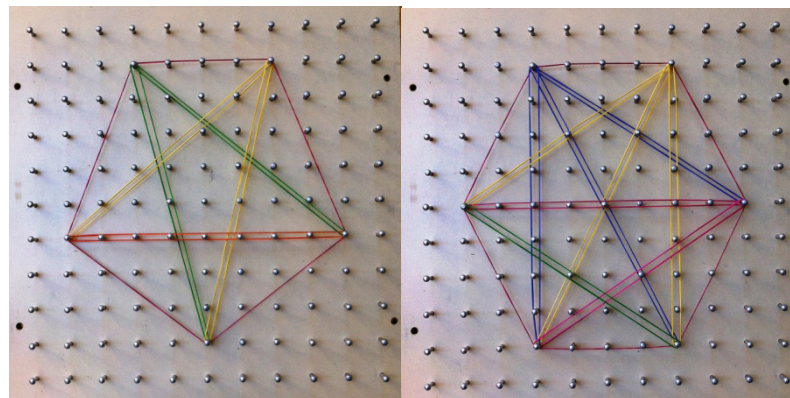


Figura 4 - Número de diagonais do pentágono e do hexágono

Observamos que cada vértice dá origem à  $(n-3)$  diagonais; os “ $n$ ” vértices dão origem a  $n(n-3)$  diagonais e, dividimos por dois, pois cada diagonal foi contada duas vezes. Portanto, a fórmula é dada por:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Polígono	Número de lados	Número de diagonais de cada vértice	Total de diagonais
Quadrado	4		
Pentágono	5		
Hexágono	6		
Heptágono	7		
Octógono	8		
Eneágono	9		
Decágono	10		
Undecágono	11		
Dodecágono	12		
.....	.....		
Qualquer	n	n - 3	$\frac{n(n - 3)}{2}$

Planilha 1 – Número de diagonais de um polígono

### 3 | FÓRMULA DOS SOMADOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM POLÍGONO CONVEXO

Construir diversos polígonos convexos no geoplano retilíneo e construir as diagonais que partem de um mesmo vértice do polígono (Figura 5). Após, preencher a planilha a seguir ( Planilha 2). O objetivo é deduzir a fórmula que dá a soma de seus ângulos internos. Ao construir as diagonais que partem de um mesmo vértice, o polígono fica dividido em triângulos, cujo total é sempre o número de lados menos dois.

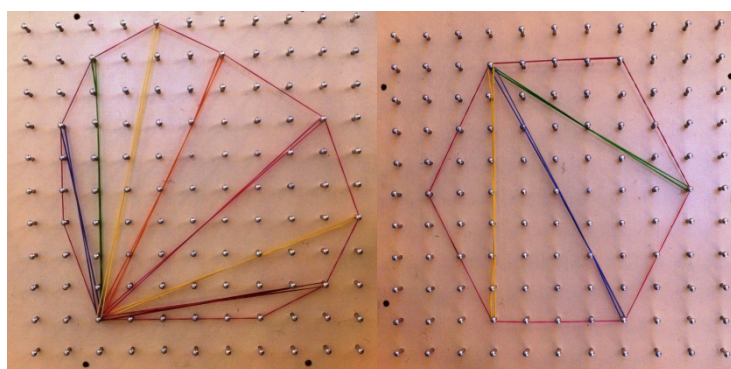


Figura 5- Soma dos ângulos internos do decágono e do hexágono

Um polígono de n lados será dividido em (n-2) triângulos. Logo, para obter a soma de seus ângulos internos ( $S_i$ ) basta multiplicar o número de triângulos por  $180^\circ$ , ou seja,  $S_i = (n-2) \times 180^\circ$ .

Polígono	Número de lados	Número de triângulos	Soma dos ângulos internos
Quadrado	4		
Pentágono	5		
Hexágono	6		
Heptágono	7		
Octógono	8		
Eneágono	9		
Decágono	10		
Undecágono	11		
Dodecágono	12		
.....	.....		
Qualquer	n	n-2	$(n-2) \cdot 180^\circ$

Planilha 2- Fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo

#### 4 | FÓRMULAS DE ÁREAS DAS PRINCIPAIS FIGURAS PLANAS

Para estas atividades deve-se considerar como unidade de medida, as distâncias entre os pregos colineares e consecutivos. Construir quadrados, retângulos, triângulos, paralelogramos, losangos, trapézios e realizar movimentos, transformações nessas figuras com o objetivo de deduzir as fórmulas para calcular suas áreas. Estas transformações são feitas a partir do retângulo (Figura 6).

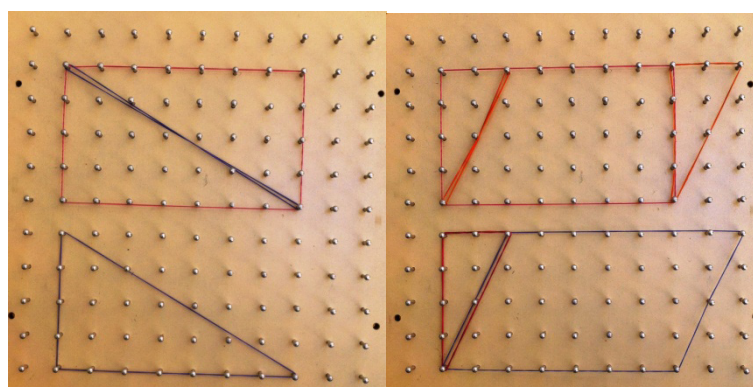


Figura 6 – Representação de figuras no geoplano retilíneo para dedução das fórmulas de áreas a partir de um retângulo

Tomando o retângulo como base, podem-se deduzir as fórmulas das outras figuras planas por transformações do retângulo. Adota-se, como unidade de área, o quadrado formado por quatro pregos. É conveniente que o aluno transporte para um papel quadriculado o que está sendo representado no geoplano para conclusão das áreas das diversas figuras formadas.

## 5 | DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Construir triângulos retângulos. Após construir quadrados sobre a hipotenusa e sobre os catetos; realizar movimentos com o objetivo de concluir que o quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.

Teorema de Pitágoras:  $a^2 = b^2 + c^2$  (Figura 7)

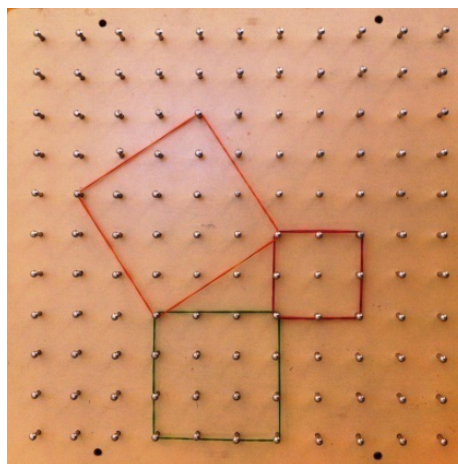


Figura 7 – Dedução do Teorema de Pitágoras

## 6 | FÓRMULAS PARA O CÁLCULO DO LADO E DO APÓTEMA DE POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Montar quadrado, hexágono regular e triângulo equilátero inscritos na circunferência e realizar transformações, com o objetivo de deduzir as fórmulas para o cálculo da medida dos lados e dos apótemas desses polígonos (Figura 8).

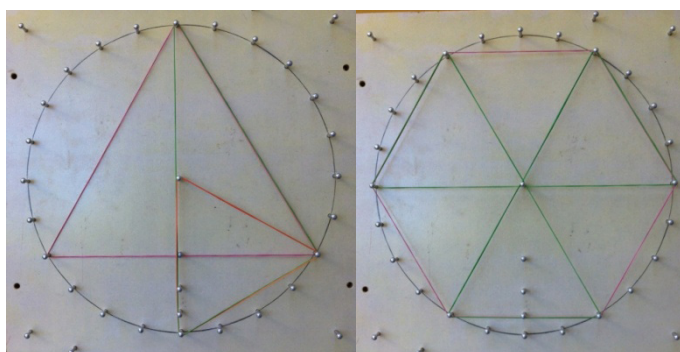


Figura 8 – Polígonos regulares inscritos na circunferência

## 7 | FUNÇÕES E RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Explorar no geoplano circular as funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, considerando a circunferência orientada



de raio unitário,  $r = 1$  (Figura 9) e deduzir as relações trigonométricas, entre elas, a relação fundamental:  $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$ .

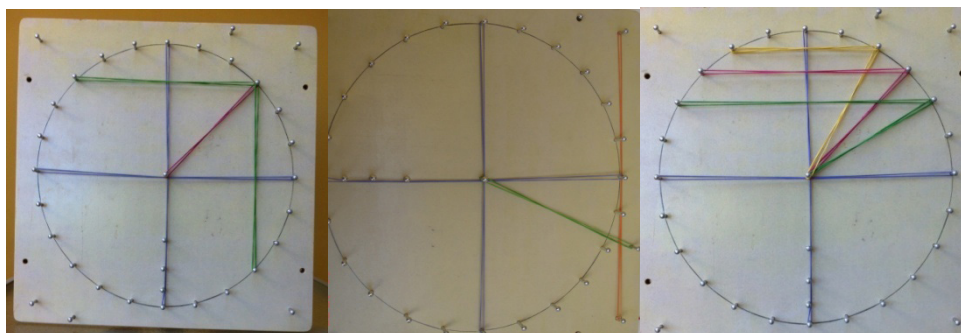


Figura 9 – Eixos trigonométricos (seno, cosseno e tangente) e arcos notáveis

## 8 | PLANO CARTESIANO E FÓRMULAS BÁSICAS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Reconhecer o Plano Cartesiano, identificar os eixos  $x$  e  $y$  (Figura 10) e pontos no plano cartesiano, construir retas e reconhecer função crescente e função decrescente, determinar distância entre dois pontos, coeficiente angular e linear de uma reta, etc.

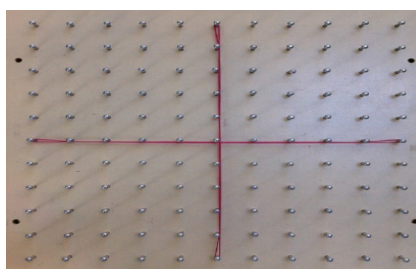


Figura 10 - Plano cartesiano

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Abordamos, nesse minicurso, as deduções de fórmulas matemáticas utilizando como principal recurso o Geoplano. A partir das sugestões apresentadas é possível pensar em muitas outras estratégias de utilização do Geoplano em experiências de ensino-aprendizagem que privilegie a construção do conhecimento lógico-matemático, que possibilite aos alunos o sucesso na aquisição de conceitos, e para tanto devemos reconhecer a importância de observar as etapas de desenvolvimento das estruturas do pensamento, necessárias ao conhecimento matemático.

O Geoplano, se explorado adequadamente, possibilita a compreensão e o estudo de novos conceitos matemáticos, em especial, conceitos relacionados à geometria plana, geometria analítica e trigonometria.

Muitas vezes, o aluno se vê à frente de regras superficiais e de símbolos desconhecidos, o que faz com que copie passivamente sem utilizar a sua capacidade

de raciocínio. O educador deve organizar ambiente favorável à experimentação e à troca de experiências, criando oportunidades de interações, em que o aluno possa levantar hipóteses e chegar a conclusões. Sendo agente de sua aprendizagem, o aluno irá construir seu conhecimento, e para que isso ocorra, é necessário promover atividades desafiadoras que despertem no aluno a curiosidade e o prazer de aprender.

## REFERÊNCIAS

- CARVALHO, D. **Metodologia do Ensino da Matemática**. São Paulo: Cortez, 1997.
- D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria a prática**. São Paulo: Ática, 1997.
- DANTE, L.R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2007.
- FAINGUELERNT, E.K.; NUNES, K.R.A. **Matemática: Práticas Pedagógicas para o Ensino Médio**. Porto Alegre: Penso, 2012.
- IMENES, L;M. **Descobrimos o Teorema de Pitágoras**. São Paulo: Scipione, 1997.
- KOBAYASHI, M.C.M. **A construção da geometria pela criança**. Bauru: ECDUSC, 2001.
- KNIJNIK, Gelsa. **Aprendendo e Ensinando Matemática com o Geoplano**. Ijuí: Unijuí, 1996.
- LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1996.
- MENDES, I.R.; SÁ, P.F. **Matemática por Atividades: Sugestões para sala de aula**. Natal: Flecha do tempo, 2006.
- TIGGEMANN, Iara Suzana. et al. **Geoplanos e Redes de Pontos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

## REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS DE FUNÇÕES: O SOFTWARE SIMCALC E A ANÁLISE DE PONTOS MÁXIMOS E MÍNIMOS

**Paulo Rogério Renk**

(prrenk@gmail.com)

Centro Nacional de Educação – São Paulo – São Paulo.

**Rosana Nogueira de Lima**

(rosananlima@gmail.com)

Universidade Anhanguera de São Paulo – São Paulo.

**RESUMO:** Neste artigo, apresentamos um recorte de um estudo sobre o ensino e a aprendizagem do comportamento de funções desenvolvido com o uso de representações dinâmicas. Em particular, focaremos em elementos relacionados ao reconhecimento e à obtenção de valores de máximo e de mínimo de funções representadas por meio do software *SimCalc*, quando inseridas na Janela do mundo desse software. A análise dos dados foi realizada a partir das ideias de *pensamento narrativo e paradigmático* de Bruner. Os resultados de nosso estudo evidenciam que a representação dinâmica de funções se confirma como uma potente ferramenta de apoio nos processos de ensino e de aprendizagem de funções. A versatilidade dessa ferramenta permite aos professores criarem atividades diversas que podem ser relacionadas a situações do cotidiano, possibilitando que a análise do comportamento de funções extrapole para

a ideia de comparação com os estudos de dinâmica da física. Assim, entendemos que o uso dessa ferramenta só se limita à criatividade do professor e do aluno que a utilizam em seus estudos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Função. Comportamento de função. Representação dinâmica. *SimCalc*. Máximos e Mínimos de funções.

### DYNAMIC REPRESENTATIONS OF FUNCTION: SIMCALC AND AN ANALYSIS OF MAXIMAL AND MINIMAL POINTS

**ABSTRACT:** In this paper we present part of a study regarding teaching and learning of the behavior of functions developed with using dynamic representations. Particularly, we focus on recognition and obtaining maximal and minimal values of functions represented in the software *SimCalc*, when inserted in the World Window. Results of our study evidenced that the dynamic representation of functions is powerful supportive tool in the teaching and learning processes. The versatility of this tool allows teachers to create a diversity of activities that can be related to everyday situations, allowing the analysis of functions behavior to extrapolate to the idea of comparing with the studies to dynamics of physics. We understand that the use of this tool is solely limited by creativity of

teacher and student who use it in their studies.

**KEYWORDS:** Function. Behaviour of functions. Dynamic representations. *SimCalc*. Maximal and minimal points.

## INTRODUÇÃO

Pereira (2013) trabalhou com as narrativas produzidas por estudantes de Licenciatura em Matemática quando estavam diante de uma abordagem para funções na “Janela do Mundo” do software *SimCalc* (Mais detalhes sobre esta janela e o software são explicados nas próximas seções do artigo, e também constam em Renk (2016)). Seus resultados indicavam que, com a utilização da representação dinâmica da “Janela do Mundo” desse software, seria possível que alunos interpretassem o comportamento de funções. Os resultados dessa pesquisa evidenciam a importância de estudos pautados por uma representação não convencional de funções: “Então, por trás desse movimento existe uma função que é estabelecida em sua parte gráfica e algébrica, nossa! Que legal!” (PEREIRA, 2013, p. 68). É essa ligação entre um recurso usado em aula que, entendemos, prende a atenção do aluno, tirando-o de sua zona de conforto e fazendo-o olhar para o objeto estudado com uma lente que não seja a que ele e nós estejamos acostumados.

Levando essas ideias em consideração, elaboramos uma pesquisa com o intuito de analisar a contribuição do software *SimCalc* para o estudo do comportamento de funções, em particular dos pontos de máximo e de mínimo. As atividades de nosso trabalho foram pautadas pela ideia do reconhecimento do comportamento de funções, quando representadas preferencialmente por meio do movimento de um ator na Janela do Mundo do *SimCalc*, e os resultados foram obtidos pela análise das contribuições dessa representação dinâmica.

Participaram de nossas atividades alunos do segundo semestre do curso de Licenciatura em Matemática de uma faculdade particular localizada na Grande São Paulo. Guiamo-nos por elementos da metodologia do *Design Experiment* (COBB; CONFREY; DISESSA; LEHRER; SCHAUBLE, 2003) no formato de uma experiência em sala de aula e a análise dos nossos dados ocorreu à luz dos *Modos de Pensamento Narrativo e Paradigmático* de Jerome Bruner (2001), já que precisávamos identificar de que maneira os alunos participantes formulariam suas considerações sobre os comportamentos das funções estudadas.

Para esse artigo, focaremos nos elementos que encontramos presentes na análise de pontos de máximo e de mínimo das funções nos domínios em que foram representadas. Essas análises consistiam no reconhecimento e na determinação desses valores em diversos tipos de função. Evidenciamos que a representação dinâmica presente na Janela do Mundo do *SimCalc* foi uma forte influência na elaboração das considerações durante a análise do comportamento de funções. As características do movimento do ator durante a representação dessas funções permitiram que os

alunos reconhecessem elementos relacionados a características de função constante, de função quadrática, de função trigonométrica, de função exponencial. Foi, também, possível aos participantes relacionarem o movimento do ator presente na Janela do Mundo no *SimCalc* a situações presentes em seu cotidiano, o que entendemos permitir a extrapolação da compreensão das características das funções.

Faremos uma breve apresentação do software *SimCalc*, para então trazermos algumas das atividades relacionadas à análise dos pontos de máximos e de mínimos pautadas pela movimentação de um ator na Janela do Mundo do software *SimCalc*.

## O SOFTWARE SIMCALC

*SimCalc MathWorlds*® é uma marca registrada do Centro Kaput de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática, da Universidade de Massachusetts Dartmouth, nos Estados Unidos. É um software de múltiplas representações de funções de variáveis reais correlacionadas (TALL, 2008, apud HEGEDUS et al, 2008), que possibilita a visualização das representações gráfica (Janela do Gráfico), numérica tabular (Janela da Tabela), algébrica (Janela da Função) e dinâmica (Janela do Mundo) de funções. Essas formas de representação de função podem ser exibidas uma a uma ou em conjunto, conforme a necessidade da atividade, sendo até mesmo possível impedir o acesso a algumas delas de acordo com a configuração imposta por quem estiver elaborando a atividade. Nesse artigo nos referiremos ao software como *SimCalc*.

Entendemos por representação dinâmica de uma função aquela em que um ator representa o comportamento de uma função por meio do movimento, esse ator pode ser um foguete, um carro ou até mesmo um boneco. O usuário pode mudar o sentido do movimento e a velocidade do ator. A representação do conjunto domínio é feita por meio de um relógio, e os respectivos valores do conjunto imagem em uma escala que está associada ao movimento do ator, conforme a Figura 1. De acordo com o tipo de função e o intervalo de domínio em que está representada, um ponto de máximo ou de mínimo é caracterizado nessa representação não convencional por uma inversão no sentido do movimento, pelo ponto de partida ou de chegada do ator.

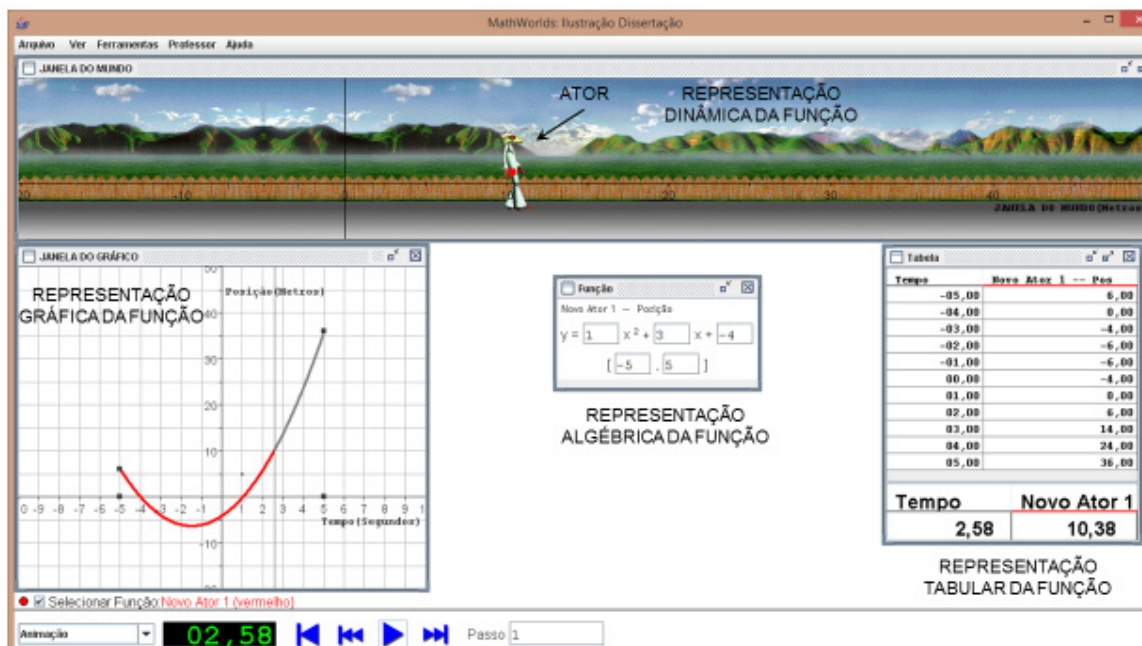


Figura 1: Tela do *SimCalc*

Fonte: Renk 2016, p. 50.

## AS ATIVIDADES DE MOVIMENTO DO ATOR

Nossas atividades foram basicamente compostas por um questionário e por fichas de atividades contendo instruções e questões relacionadas à análise do comportamento de funções com o uso do *SimCalc*. Espontaneamente, os alunos se organizaram em duplas em computadores que continham os arquivos de cada atividade. Para este artigo, nos restringiremos às atividades relacionadas ao reconhecimento e à determinação dos valores de máximo e de mínimo das funções nos intervalos em que foram representadas. Além das informações contidas nas fichas de atividades, nossos dados também foram compostos por meio da gravação do áudio e da tela do computador por meio do software Camtasia.

Na primeira das atividades que traremos para esse artigo, a Atividade 2 (RENK, 2016), solicitávamos que os alunos fizessem as análises com base na representação dinâmica da função  $f(x) = 3 \cdot (x)^2 - 3$ , no intervalo  $[-4; +4]$  na Janela do Mundo do *SimCalc*. Em um segundo momento, os participantes acessaram também a representação gráfica na Janela do Gráfico desse software.

Três grupos de alunos concluíram esta atividade, sendo que todos trouxeram elementos que nos levaram a concluir que reconheceram se tratar de uma função quadrática. Porém, somente um desses grupos identificou os pontos de máximo e de mínimo da função no intervalo estudado, inclusive mencionando valores, cuja leitura foi feita na escala da Janela do Mundo. Na Figura 2 trazemos o que essa dupla escreveu na Ficha de Atividade 2.

2. Qual tipo de função pode estar relacionada a este movimento?

Justifique sua resposta. *Quadrática paramétrica.*

*Parte de um ponto 48. desce até o zero e retorna ao 48.*

Figura 2: Resposta do grupo para a Atividade 2

Fonte: Renk, 2016, p. 89

Consideramos que as diferenças entre os valores de máximo (45) e de mínimo (-3) dessa função nesse intervalo, como na resposta da Ficha de Atividade 2 por meio da leitura feita na escala do mundo, não se configuram erros que venham a interferir na compreensão do comportamento dessa função. O importante é observar que reconheceram se tratar da representação de uma função quadrática ao utilizarem o termo contido no menu de criação do *SimCalc* para nomearem o tipo de função. Consideramos mais importante ainda o fato dos valores que compuseram a resposta serem oriundos da leitura do movimento do ator na Janela do Mundo, trazidos ainda na ordem em que ocorreram na representação dinâmica da função  $f(x) = 3 \cdot (x)^2 - 3$ .

Assim como nos trabalhos de Healy e Sinclair (2007), nos deparamos com os *Modos de Pensamento Narrativo e Paradigmático* de Bruner (2001) durante a representação de função por meio do movimento de um ator. Segundo Bruner (1969), a narrativa funciona como uma ferramenta organizadora das experiências, e em nossos trabalhos encontramos elementos dos *Modos de Pensamento* nos diálogos dos participantes e nas anotações feitas nas Fichas de Atividades. *O Modo de Pensamento Paradigmático* acontece baseado no pensamento científico, no qual quem o usa busca validar suas ideias em teorias, enquanto o *Modo de Pensamento Narrativo* ocorre sem o compromisso de uma justificativa lógico-científico para sua interpretação.

Mais adiante, ainda sem terem acessado a representação gráfica da função, os participantes descreveram novamente, agora por meio de um diálogo com claros elementos dos *Modos de Pensamento* de Bruner (2001), as características do movimento do ator que estão relacionadas a essa função quadrática, conforme o excerto a seguir:

Alexandre: Quando **ela** vai pousar na Terra ele faz um leve movimento de parada, né.

Valdir: É então, **ele** tem uma desaceleração, né.

Alexandre: **Ele** tem uma desaceleração, isso!

Valdir: Quer ver ó.

Alexandre: Diminuiu, diminuiu, diminuiu ...

Valdir: Schuuuhhhh!!! No caso aqui é uma parábola, né!

Alexandre: Seria uma parábola?

Valdir: É! Sim uma parábola! Vamos ver qual função que é. Álgebra não visível.

Fonte: Renk (2016, p. 93)

Todos os elementos desse diálogo que indicam a variação de velocidade do ator podem ser relacionados à representação de uma função quadrática, assim como a identificação do ponto de mínimo com a troca de sentido no movimento do ator. Em nosso trabalho chamamos de personificação a ação dos participantes de fazerem referência ao ator utilizando um pronome pessoal “ele”, o que julgamos significar que o aluno incorporou para si uma forma íntima de se relacionar com o ator da representação dinâmica. Quando acessaram a representação gráfica da função, que entendemos como uma representação mais familiar aos alunos quando comparada com a representação dinâmica, eles reafirmaram a descrição das características do movimento que os levaram às conclusões anteriormente obtidas por meio da leitura na escala da Janela do Mundo sobre os pontos de máximo e de mínimo dessa função.

Alexandre: **Ele** sai de um ponto de máximo para um ponto de mínimo.

Valdir: Isso.

Alexandre: **Ele** sai de um ponto de máximo para um ponto de mínimo.

Valdir: Voltando ao ponto máximo novamente. Ponto máximo novamente positivo, né.

Alexandre: Voltando ao máximo novamente, não é isso?

Valdir: Isso!

Fonte: Renk (2016, p. 96)

Por se tratar de uma função quadrática, a representação gráfica levou-os a se referirem imediatamente aos maiores e aos menores valores dessa função. Entendemos que os estudos de pontos de máximos e de mínimos acontecem claramente quando o objeto matemático é uma função quadrática.

Na Atividade 3 (RENK, 2016), as análises foram feitas em um primeiro momento com base na representação gráfica da função  $f(x) = \cos \cdot (4 \cdot x) + 1$ , representada no intervalo  $[0;+5]$ . Em seguida, as análises foram acompanhadas pelo movimento de um foguete (ator) na Janela do Mundo do *SimCalc*. Três grupos de alunos concluíram a Atividade 3 e somente um deles fez referência aos ciclos representados por essa função. Não houve elementos que indicassem o reconhecimento dos valores de máximo e de mínimo dessa função. Em seu trabalho, Sales (2008) destacou dois aspectos da narrativa de Bruner (2001) que talvez tenham faltado nesta atividade:



comportamento excepcional na representação gráfica e surpresa do estudante ao se deparar com um comportamento desconhecido. O movimento do foguete ocorreu, nessa atividade, com subidas e descidas regulares, representando os ciclos dessa função trigonométrica.

Entendemos que uma nova atividade poderia ser acompanhada de perguntas mais específicas sobre os pontos de maior e de menor valor representados pelo movimento do ator na Janela do Mundo do software *SimCalc*.

Na Atividade 6, as análises e considerações foram somente respaldadas pelas observações do movimento do ator na forma de um “palhaço” andando na Janela do Mundo do *SimCalc*. Representamos nessa atividade uma função polinomial de quarto grau definida algebricamente por  $f(x) = 2 \cdot (x)^4 + 2 \cdot (x)^3 - 22 \cdot (x)^2 - 18 \cdot x + 36$ , no intervalo  $[-5, +5]$ . A partir dessa atividade até as finais, nossa intenção foi a de trabalharmos com perguntas que mais explicitamente fizessem referência às características das funções representadas, sem solicitar do aluno que encontrasse uma lei algébrica.

Dos cinco grupos de alunos que concluíram essa atividade, consideramos quatro em nossas análises, dos quais apenas um grupo nos deu elementos de que identificaram que a representação dinâmica indicava a ocorrência de quatro raízes. Nessa atividade todos os grupos de participantes indicaram o maior e o menor valor representados por meio da Janela do Mundo do *SimCalc*, até mesmo porque havia perguntas diretas na ficha dessa atividade que exigiam essa leitura, como podemos observar na Figura 3.

6. Dentro do intervalo apresentado na animação, qual é o maior valor que essa função atinge?

O maior valor mostrado é o 900.

7. E o menor?

-50

Figura 3: Identificação de valores de máximo e mínimo

Fonte: Renk (2016)

Com esse modo de apresentação das questões, conseguimos que os participantes buscassem na representação dinâmica da função as ideias de máximos e mínimos.

Assim como na Atividade 6, na Atividade 7 (RENK, 2016), disponibilizamos somente a representação dinâmica da função trigonométrica  $f(x) = 0,5 \cdot [\cos \cdot (5 \cdot$

x)] , representada no intervalo  $[0,+5]$ . Porém, nessa atividade, tínhamos um foguete percorrendo uma escala vertical para representar essa função, e, das cinco equipes que concluíram essa atividade, duas reconheceram os maiores e os menores valores dessa função no intervalo estudado. Na Ficha de Atividade 6, que orientava as ações dos participantes, havia perguntas diretas sobre os intervalos de crescimento e decréscimo, além de referência direta aos pontos em que ocorreriam o valor de máximo e de mínimo dessa função. Na Figura 4, trazemos termos utilizados pelos alunos para descrever os pontos de máximo e de mínimo de funções.

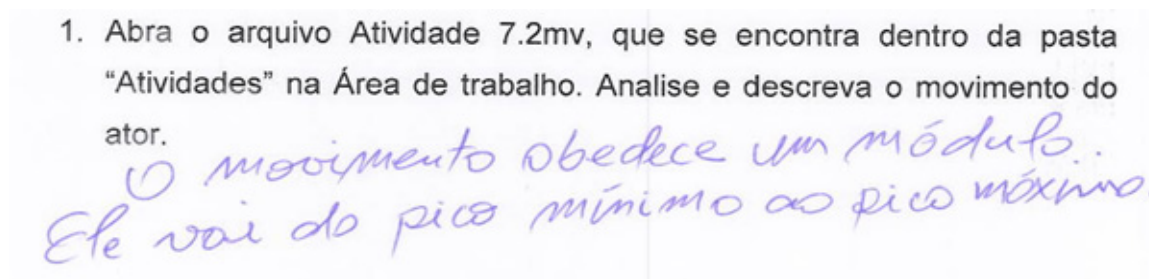


Figura 4: Descrição dos pontos de máximo e de mínimo

Fonte: Renk, 2016, p. 133.

Aparentemente, o termo “módulo” empregado está relacionado ao padrão de subidas e descidas do ator durante a representação dessa função trigonométrica. Porém, em nenhum instante ao comportamento cíclico da função foi explicitamente dito pelos integrantes desse grupo. O termo “pico” foi empregado para identificar um ponto de máximo valor e um de mínimo, como podemos encontrar em livros didáticos de Ensino Médio.

Na Atividade 8 (RENK, 2016) também trabalhamos com a representação dinâmica e não convencional de funções para a análise do seu comportamento e de suas características. A diferença é que nela trabalhamos com dois “foguetes” como atores, com cada um representando uma função, ambas simétricas em relação ao eixo  $x$ . Utilizamos as funções  $f(x) = 3 \cdot (x)^2 + 30$  e  $g(x) = -3 \cdot (x)^2 - 30$ , representadas simultaneamente e ambas no intervalo de  $[-5,+5]$ . Das quatro duplas que concluíram essa atividade, duas identificaram os maiores e os menores valores de cada função. Na Figura 5 temos uma descrição das características dessas funções baseadas nos movimentos dos atores.

4. Observe o comportamento dos atores com relação aos intervalos de crescimento e decrescimento e os descreva, observando o tempo em que ocorrem em cada um deles.

*Nos intervalos  $-3$  a  $0$  o ator de cima faz um movimento decrescente e o ator de baixo faz um movimento crescente, depois os movimentos se invertem quando o intervalo passa a ser de zero a cinco*

Figura 5: Descrição das características da função

Fonte: Renk, 2016, p. 141.

Percebemos uma leitura do movimento dos atores amparada tanto pela escala do mundo (o conjunto imagens das funções) como pelo “Relógio” do Menu animação (o domínio das funções). Entendemos que essas duas leituras dos respectivos parâmetros dos conjuntos que formam a função, juntamente com a percepção da mudança de velocidade dos atores que representam as funções na Janela do Mundo do *SimCalc*, são os indicativos que podem levar a conjectura da lei dessa função.

## CONCLUSÕES

Nosso estudo buscou pelas contribuições do uso do software *SimCalc* associado ao ensino de funções, de modo que o reconhecimento do comportamento dessas funções florescesse da leitura de uma representação que consideramos como não convencional de funções, a representação dinâmica. Dessa forma, conseguimos retirar o aluno de sua zona de conforto e levá-lo a repensar o seu modo de olhar para o comportamento de funções, e conseqüentemente a maneira de identificarem os valores de máximo e de mínimo das funções nos intervalos em que estavam representadas. Identificar esses valores em uma escala que norteia o movimento de um ator, muitas vezes tendo que associar essa leitura a uma troca de sentido do movimento, levou os alunos a uma forma diferente de interpretar essas características de funções.

Temos elementos de amadurecimento do uso da representação dinâmica de funções, no que se refere à leitura dos parâmetros dos conjuntos que compõem a função, assim como das características do movimento do ator que nos traz elementos que indicam o tipo de função representada.

Em nosso estudo, trabalhamos com essa forma de representação de funções por meio da Janela do Mundo do software *SimCalc*. As leituras dos parâmetros relacionados à análise das funções estudadas foram encontradas de forma abrangente, de modo

que esses parâmetros não eram considerados isoladamente e sim com uma leitura oriunda da simultaneidade da leitura do conjunto domínio, com a do conjunto imagem e também com as percepções das características do movimento do ator, elementos esses que contribuíram para as conclusões dos participantes sobre as funções estudadas.

Reafirmamos que os conceitos de cálculos podem chegar a um público mais jovem e dar novos olhares para os conceitos associados ao estudo de funções, ou seja, é possível colocar diante de crianças conceitos elaborados dos estudos de funções sem dizer que estamos estudando funções, e, ainda mais, dizer apenas que estamos olhando um “foguetinho” indo e vindo no espaço, um carro levando a família para passeios, pessoas indo e vindo em suas rotinas, etc., com as possibilidades se esgotando de acordo com a criatividade dos usuários dessa ferramenta.

Entendemos também que a representação dinâmica de funções pode ser levada para outros conceitos relacionados com o estudo de funções, assim como Imafuko (2018) fez como no estudo de imagem de conceito de derivadas.

## REFERÊNCIAS

- BRUNER, J. S. **Uma Nova Teoria de Aprendizagem**. Tradução de Norah Levy Ribeiro. 2º. ed. [S.l.]: Bloch, 1969.
- BRUNER, J. S. **A Cultura da Educação**. Tradução de Marcos A. G. Domingues. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- COBB, P.; CONFREY, J.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. **Design experiments in education research**. *Educational Researcher*, v. 32, n. 1, p. 913, 2003.
- HEGEDUS, S. J.; PENUEL, W. **Studying new forms of participation and identity in mathematics classrooms with integrated communication and representational infrastructures**. *Educ Stud Math*, p. 13, 2008. ISSN DOI 10.1007/s10649-008-9120x. Acesso em: 2015.
- IMAFUKO, R. S. **O uso dos softwares SimCalc e Geogebra para o enriquecimento da imagem de conceito de derivada**. Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo. 2018.
- LULU, H.; SINCLAIR, N. **If this is our mathematics, what are our stories?** Published online: 20 February 2007 Springer Science+Business Media B.V. 2007
- PEREIRA, J. C. **O Conceito de Função: A Utilização do Software SimCalc e as Narrativas Apresentadas por Alunos de Licenciatura em Matemática**. Universidade Bandeirante Anhanguera. São Paulo. 2013.
- RENK, P. R. **Narrativas produzidas a partir de representações dinâmicas: O software SimCalc e a análise do comportamento de funções**. Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo. 2016.
- SALES, C. O. R. **Explorando Função Através de Representações Dinâmicas: Narrativas de Estudantes do Ensino Médio**. Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo. 2008.

## UMA ANÁLISE PANORÂMICA E REFLEXIVA DOS OBJETOS DE APRENDIZAGEM DA PLATAFORMA SCRATCH PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

**Renato Hallal**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
(UTFPR)

Francisco Beltrão – PR

**Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
(UTFPR)

Ponta Grossa – PR

**Luiz Carlos Aires de Macêdo**

Universidade Federal Rural do Semi-Árido  
(UFERSA)

Mossoró – RN

**Eliziane de Fátima Alvaristo**

Escola Professora Julita de Ensino Fundamental  
na Modalidade de Educação Especial

Guarapuava – PR

**RESUMO:** A crescente produção e divulgação de objetos de aprendizagem na internet, tem instigado (motivado) professores e educadores a utilizarem dessas tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem. Em contrapartida, não se sabe dizer qual a qualidade pedagógica destes. Deste modo, pretende-se com este trabalho, avaliar a estrutura dos objetos de aprendizagem desenvolvidos com a Ferramenta Scratch presentes na própria plataforma de divulgação do Scratch, relacionado à conteúdos de matemática. Como instrumento de avaliação foi utilizado a metodologia LORI (Learning

Object Review Instrument). Do ponto de vista da forma de abordagem do problema este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa investigativa. Como resultado, observou-se que os objetos de aprendizagem estão bem estruturados, ou seja, são capazes de potencializar o processo de ensino e aprendizagem de matemática.

**PALAVRAS-CHAVE:** Avaliação dos objetos de aprendizagem. Plataforma scratch. Ensino e aprendizagem de matemática.

**ABSTRACT:** The growing production and dissemination of Learning Objects on the Internet has encouraged (motivated) teachers and educators to use these technologies in teaching and learning processes. On the other hand, it is not known what their pedagogical quality is. In this way, this work intends to evaluate the structure of the learning objects developed with the Scratch Tool present in Scratch's own dissemination platform, related to the contents of mathematics. The LORI (Learning Object Review Instrument) methodology was used as an evaluation tool. From the point of view of the approach to the problem this work is characterized as a qualitative research. As a result, it was observed that the learning objects are well structured, that is, they are capable of enhancing the teaching and learning process of mathematics.

**KEYWORDS:** Evaluation of learning objects. Scratch platform. Teaching and learning of mathematics.

## 1 | INTRODUÇÃO

A utilização da tecnologia, especialmente a do computador, pode ser encarada como colaboradora na sala de aula. Ao interagir com o computador o aluno passa a experimentar novas formas de conhecimento, além de desenvolver novas habilidades sociais no convívio, como o desenvolvimento da concentração e interação, contribuindo significativamente no processo de ensino e aprendizagem. Aliado ao computador, destacamos os objetos de aprendizagem (OA).

Objetos de aprendizagem, segundo Wiley (2000) “[...] é qualquer recurso digital que pode ser reusado para apoiar a aprendizagem”. Para Tarouco *et al.* (2003) é qualquer recurso, suplementar ao processo de aprendizagem, que pode ser reusado para apoiar a aprendizagem, termo geralmente aplicado a materiais educacionais projetados e construídos em pequenos conjuntos visando a potencializar o processo de aprendizagem onde o recurso pode ser utilizado. Gama & Scheer (2005) ainda os definem como elementos de uma nova metodologia de ensino e aprendizagem baseada no uso do computador e da *internet*, fundamentados em uma linguagem clara, com possibilidade de reusabilidade para diversos contextos.

Esses objetos de aprendizagem (recursos) são elaborados em formas variadas de apresentação conceitual como textos, imagens, animações, simulações, podendo ser distribuídos pela *internet* (AGUIAR & FLÔRES, 2004). Vale ressaltar que, quando esses recursos são bem selecionados para uso em atividades didática, definida a partir do objetivo que se pretende alcançar na aprendizagem de um determinado conteúdo, torna-se um ótimo aliado do professor na sala de aula.

Atualmente, existem repositórios livres divulgando inúmeros objetos de aprendizagem (por exemplo, CESTA, BIOE, RIVED, Plataforma SCRATCH, entre outros) com o objetivo de auxiliar e facilitar o trabalho de professores no processo de ensino e aprendizagem. Em contrapartida, não se sabe dizer qual a qualidade pedagógica destes (SOUZA *et al.*, 2005) e se atendem a critérios como qualidade do conteúdo, potencial como ferramenta de ensino e aprendizagem e usabilidade.

Diante do exposto, surge o seguinte problema de pesquisa: como tem sido desenvolvido os objetos de aprendizagem para o ensino de matemática, utilizando-se do *software* Scratch? Com base neste questionamento, o objetivo desta pesquisa é analisar a estrutura dos objetos de aprendizagem desenvolvidos com a Ferramenta Scratch presentes na própria plataforma de divulgação do Scratch, relacionado a conteúdos de matemática (ensino fundamental). Escolheu-se o Repositório do Scratch, devido a sua crescente utilização no processo de ensino e aprendizagem nos ambientes educacionais.

## 2 | A FERRAMENTA SCRATCH

A ferramenta Scratch foi idealizada e desenvolvida por uma equipe de investigação do *Media Laboratory* do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), no ano de 2003 e publicado em 2007. O Scratch é um *software* livre, utilizado por mais de 150 países, sendo oferecido em 40 idiomas devido sua rápida difusão pelo mundo (SCRATCH MIT, 2018).

Um dos principais objetivos do Scratch é introduzir noções de linguagem de programação como uma primeira experiência. Além disso, ele pretende facilitar a introdução de conceitos de matemática, enquanto instiga o pensamento criativo, o raciocínio sistemático e o trabalho colaborativo. Segundo Maloney *et al.* (2010), por meio de seus ambientes criativos o Scratch estimula jovens ao desenvolvimento de novas habilidades e ideias tecnológicas.



Figura 1 - Exemplo de programação no scratch.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Os comandos do Scratch são visualizados por meio de blocos que precisam ser arrastados e soltos em uma área específica, sendo posteriormente, conectados uns aos outros, formando a programação no ambiente (Figura 1 - acima).

Sua interface é composta por três áreas: (a) área formada pelos blocos de comando – região central, (b) área de comando, na qual os blocos de comando são arrastados e conectados – região à direita, e (c) o palco, que é a interface na qual é possível visualizar as criações – região à esquerda (Figura 2).

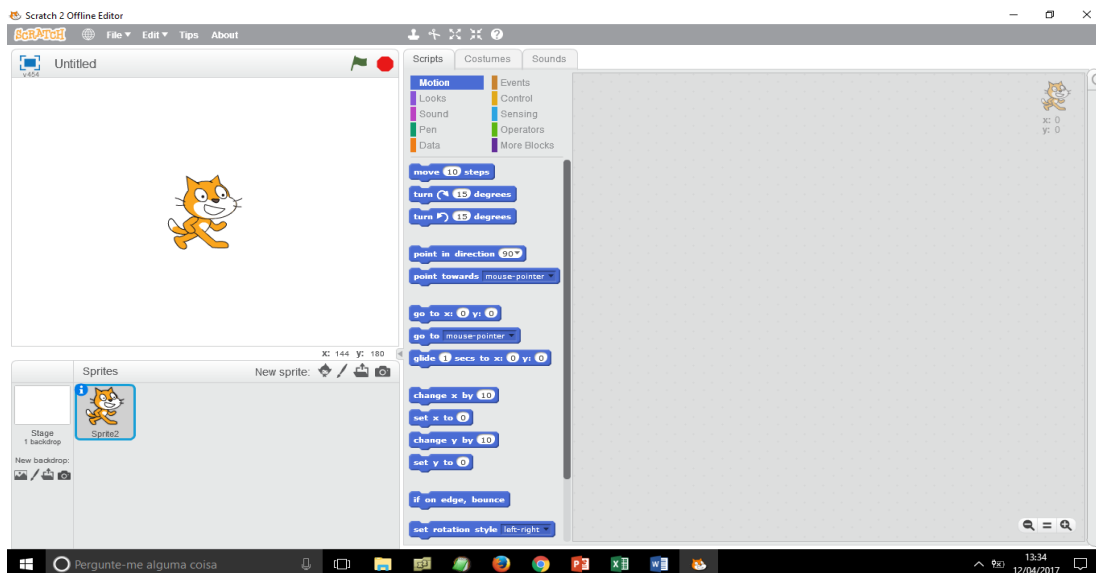


Figura 2 - Interface do scratch.

Fonte: (SCRATCH MIT, 2018).

Portanto, observa-se que, o Scratch se constitui como uma linguagem de programação visual e permite ao usuário construir interativamente seus objetos de aprendizagem (OA), como suas próprias histórias, animações, jogos, simuladores, ambientes visuais de aprendizagem, músicas, artes e tutoriais (SÁPIRAS *et al.*, 2015). Objetos estes, foco deste trabalho, o qual serão avaliados.

### 3 | METODOLOGIA

Esta seção, será desmembrada em três etapas: (a) desenvolvimento e organização, (b) instrumento de avaliação e (c) caracterização do método.

#### 3.1 Desenvolvimento e organização

Para o desenvolvimento deste trabalho, utilizou-se como alvo de pesquisa a plataforma Scratch, disponível no site <<https://scratch.mit.edu>>. Nesta plataforma, na seção explorar, encontram-se vários objetos de aprendizagem que podem ser utilizados nos ambientes educacionais, como animações, jogos, artes, músicas, tutoriais, entre outros. Neste trabalho, optou-se pela análise da categoria jogos.

Segundo Abramowicz & Wajskop (1998, p. 112) o jogo é um rico instrumento estimulador da aprendizagem e do desenvolvimento social, cultural, físico-motor, cognitivo e afetivo da criança, pois exercita sua inteligência e seu raciocínio. Se ele acontece em um ambiente adequado, tranquilo e de forma prazerosa, permite também que a criança desenvolva sua autonomia moral e intelectual. Para Silveira (1999, p. 12) os jogos quando utilizados em sala de aula podem auxiliar na aprendizagem, pois são elaborados para [...] prender a atenção, o que auxilia na aprendizagem de conceitos, conteúdos e habilidades, estimulando assim a autoaprendizagem, a descoberta, a curiosidade, incorporando a fantasia e o desafio.



De acordo com as Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (2008) as aulas podem ser potencializadas com o uso desses recursos tecnológicos. Os trabalhos com mídias tecnológicas inserem diversas formas de ensinar e aprender, e valoriza o processo de produção de conhecimentos (PARANÁ, 2008, p. 66).

Essas tecnologias da informação e comunicação (TIC) surgem uma vez que recursos tecnológicos são cada vez mais utilizados pelos estudantes, e na medida em que se desenvolvem, professores de matemática se deparam com a necessidade de buscar novas opções de trabalho com os alunos (BORBA & PENTEADO, 2003). Assim, a integração das TIC no trabalho com a Matemática (em especial, os jogos) é fundamental para que o processo de ensino e aprendizagem dos dias de hoje venha ao encontro das reais necessidades dos estudantes e também para que esse processo seja facilitado.

Mediante o exposto, buscou-se analisar alguns conteúdos de matemática presentes na plataforma Scratch, voltados ao Ensino Fundamental. Os Conteúdos Estruturantes investigados foram: números e álgebra. Dentro do conteúdo estruturante números e álgebra, buscou-se jogos que contemplassem operações matemáticas.

Ambos os jogos, envolvendo os conteúdos apresentados acima, foram selecionados de forma não probabilística e intencional (apenas dois objetos de aprendizagem foram escolhidos para avaliação). Segundo Moreira (2017, p. 07) neste tipo de amostragem o pesquisador deliberadamente escolhe alguns elementos para fazer parte de sua amostra, com base no seu julgamento de aqueles que seriam representativos da população. Para Oliveira (2001) a amostragem não probabilística é aquela em que a seleção dos elementos da população para compor a amostra depende do julgamento do pesquisador ou do entrevistador no campo. Dando sequência ao trabalho, na próxima subseção, será abordado o critério de avaliação.

### 3.2 Instrumento de avaliação

Autores como Souza *et al.* (2007), Macedo *et al.* (2007) e Gama & Scheer (2005) concordam com a concepção de que o uso de objetos de aprendizagem pode contribuir para melhorar o processo de ensino e aprendizagem e ainda proporcionar oportunidades para que o professor possa acompanhar o desenvolvimento de seus alunos e conhecer suas dificuldades. No entanto, é consenso entre esses e outros autores como Brandão (2004), Boff & Reategui (2005) e Romero *et al.* (2009) a necessidade e a importância da avaliação desses objetos de aprendizagem. Ambos concordam que, para garantir o melhor aproveitamento desses objetos de aprendizagem nas práticas pedagógicas, os professores devem dedicar uma atenção inicial e criteriosa na avaliação dos mesmos.

Neste sentido, como suporte ao desenvolvimento deste trabalho, investigou-se como instrumento de avaliação a metodologia LORI (*Learning Object Review Instrument*) desenvolvido pela *E-Learning Research and Assessment Network* (eLera) para avaliação de objetos de aprendizagem no âmbito internacional (como, Canadá e Estados Unidos). Este instrumento serve como guia na busca de objetos de

aprendizagem de qualidade. Sua avaliação segue nove itens, usando uma escala de cinco pontos que varia de muito baixo a muito alto (Tabela 1).

<b>SCORING SHEET</b>						
Folha de Pontuação						
	<b>Low (baixo)</b> →					<b>High (alto)</b>
<b>Content Quality</b> (Qualidade do conteúdo)	1	2	3	4	5	NA
<b>Learning Goal Alignment</b> (Alinhamento de Objetos de Aprendizagem)	1	2	3	4	5	NA
<b>Feedback and Adaptation</b> (Feedback e Adaptação)	1	2	3	4	5	NA
<b>Motivation</b> (Motivação)	1	2	3	4	5	NA
<b>Presentation Design</b> (Design de Apresentação)	1	2	3	4	5	NA
<b>Interaction Usability</b> (Usabilidade de Interação)	1	2	3	4	5	NA
<b>Accessibility</b> (Acessibilidade)	1	2	3	4	5	NA
<b>Reusability</b> (Reusabilidade)	1	2	3	4	5	NA
<b>Standards Compliance</b> (Conformidade a padrões)	1	2	3	4	5	NA

Tabela 1 - Instrumento de avaliação LORI.

Fonte: Nesbit, Belfer & Leacock (2003) e Nesbit & Leacock (2009).

Para este trabalho, fez-se uma reorganização na metodologia LORI (NESBIT & LEACOCK, 2009), considerando na avaliação apenas cinco itens, conforme Santos (2011, p. 89):

(A) Qualidade de Conteúdo: Apresentação equilibrada das ideias com nível de detalhes apropriado.

(B) Usabilidade de Interação: Facilidade de navegação (fácil, intuitiva e previsível) e recursos de ajuda da interface.

(C) Motivação: Capacidade de motivar, ou seja, o ambiente deve levar o aprendiz a ter maior interesse sobre o assunto abordado, contribuindo para a gradativa construção do conhecimento deste aluno.

(D) Potencial como Ferramenta de Ensino e Aprendizagem: Alinhamento entre as atividades dos objetos de aprendizagem e o objetivo pedagógico, conformidade a padrões internacionais e sua reusabilidade em outros cursos e contextos.

(E) Apresentação: Os objetos devem ser projetados para aprimorar o aprendizado, fazendo uso adequado dos recursos áudios-visuais para promover a apresentação da informação.

Outros aspectos relevantes e que podem ser levados em consideração quando

um Objeto de Aprendizagem é construído ou quando o professor for selecioná-lo para uso, pode ser visto no trabalho de Tarouco *et al.* (2014, p. 15).

### 3.3 Caracterização do método

A maneira como foi estruturado e desenvolvido este trabalho, do ponto de vista da forma de abordagem do problema e de seus objetivos, caracteriza-se respectivamente como uma pesquisa qualitativa, exploratória e investigativa.

Para Gil (1991), em trabalhos qualitativos a interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicos, ou seja, não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem. Ainda, segundo Gil (1991), enquadra-se como exploratória, pois visa proporcionar maior familiaridade com o problema com vistas a torná-lo explícito. Envolve levantamento bibliográfico e análise de exemplos que estimulem a compreensão. É investigativa, pois envolve a exploração da Plataforma Scratch, averiguando e questionando a qualidade de alguns dos seus objetos de aprendizagem, voltados a matemática.

## 4 | ANÁLISE E DISCUSSÃO

Analisar a estrutura dos objetos de aprendizagem da plataforma Scratch e a sua importância como ferramenta pedagógica no ensino e aprendizagem de matemática é o principal objetivo desta pesquisa. Os resultados obtidos, possibilitaram observar a realidade e a qualidade de alguns objetos relacionados ao conteúdo de matemática, como por exemplo, jogos que envolvem operações matemáticas. Para a avaliação (decisões sobre as pontuações), utilizou-se uma adaptação da metodologia LORI, tendo como participantes avaliadores, o relato de três professores, autores deste trabalho (ambos realizando a Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus de Ponta Grossa).

### 4.1 Objeto de aprendizagem 1: jogo do labirinto matemático

Este objeto encontra-se na plataforma Scratch (<https://scratch.mit.edu/projects/63994624/>), sendo classificado como jogo, cuja objetivo é exercitar o raciocínio lógico sobre adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Além disso, o aluno, ao entrar no labirinto matemático, deve percorrer um caminho (cheio de obstáculos) que o leve para a porta de saída, passando assim, para a próxima fase (Figura 3). A meta, é passar por todas as fases. O jogo é mais didático do que um jogo propriamente dito, ou seja, aqui não se morre, não tem limite de tempo para a resolução das operações, muito menos se volta para o início se errar um obstáculo matemático.

O jogo é composto por três fases, ou seja, (a) fase 1: ao entrar no labirinto o aluno encontrará obstáculos matemáticos envolvendo operações de adição e subtração, (b) fase 2: nesta etapa, encontrará obstáculos matemáticos envolvendo multiplicação e divisão e (c) fase 3: encontrará obstáculos matemáticos envolvendo potenciação e radiciação.



Figura 3 - Jogo do labirinto matemático.

Fonte: (SCRATCH MIT, 2018).

Diante do exposto, uma síntese avaliativa sobre o Jogo Labirinto Matemático, é apresentada na Tabela 2, conforme o instrumento de avaliação mencionado na seção 3.2, com a participação de três professores, XX, YY e CC (autores deste trabalho).

FOLHA DE PONTUAÇÃO					
Itens do instrumento de avaliação	A	B	C	D	E
Pontuação do Professor (XX)	5	5	5	5	5
Pontuação do Professor (YY)	5	5	5	5	5
Pontuação do Professor (CC)	5	4	3,5	5	3,5
<b>NOTA (média das pontuações)</b>	5	4,6	4,5	5	4,5

Tabela 2 - Instrumento de avaliação.

A: Qualidade do conteúdo, B: Usabilidade de interação, C: Motivação, D: Potencial como ferramenta de ensino e aprendizagem e E: Apresentação.

Fonte: Elaborado pelos autores (adaptado de Nesbit & Leacock, 2009).

Observa-se que os itens avaliados (A), (B), (C), (D) e (E) apresentaram uma média de pontuação elevado, respectivamente (5), (4,6), (4,5), (5) e (4,5), o que classifica este objeto de aprendizagem como apropriado para se trabalhar em ambientes educacionais, sendo útil para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Fazendo uma reflexão sobre o jogo, no que se refere a qualidade do conteúdo (item A), os três professores classificaram este item como ótimo para desenvolver o raciocínio lógico do aluno, além de envolver conteúdos de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, no decorrer de suas fases. No quesito potencial como instrumento de ensino e aprendizagem (item D), descrevem como, bem elaborado para ser utilizada em sala de aula. Como exemplo, destacam que o professor pode usar este recurso (este jogo) para verificar os alunos com maiores dificuldades conceituais, verificando o tempo que cada aluno demora para passar de uma fase para a outra. Também poderia ser trabalhado em duplas, onde cada aluno responda a um obstáculo matemático, promovendo assim a interatividade entre eles; enfim, é um recurso potencializador e depende da criatividade do professor aplicador. O objetivo é promover o interesse do aluno pelo conteúdo trabalhado, bem como pela aprendizagem. Como elementos motivacionais (item C), os professores classificaram as regras do jogo como um atributo motivacional; pois neste, o personagem não morre e não volta ao início do jogo, o que estimula o aluno a passar pelos outros obstáculos matemáticos, mesmo que o grau de dificuldade seja superior. Apenas um professor baixou a nota, por considerar que nem todos os alunos gostam de jogos matemáticos. A forma como foi apresentado/construído o jogo (item E), um labirinto com obstáculos coloridos, um personagem que interage com o aluno, propondo exercícios e parabenizando quando acerta, os professores classificaram como bem estruturado. Apenas um professor baixou a nota pelo fato da falta de som, uma vez que, para ele, isto faz parte da estrutura de quaisquer jogos. Quanto a funcionalidade e facilidade de uso (item B), classificaram como muito bom, apenas deve existir um tutorial explicando melhor as regras do jogo.

#### **4.2 Objeto de aprendizagem 2: jogo da calculadora básica**

Este objeto encontra-se na plataforma Scratch (<https://scratch.mit.edu/projects/20996420/>) sendo classificado como jogo, cujo objetivo é trabalhar com as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Neste jogo (Figura 4) o personagem do Scratch (de amarelo) interage com o aluno, passando as instruções do jogo. Cabe ao aluno, escolher a operação que deseja treinar, para então, iniciar o jogo. No decorrer do jogo, cada cálculo efetuado de forma correta é pontuado em total (ver Figura 4). O jogo só termina, quando se fecha a aba.

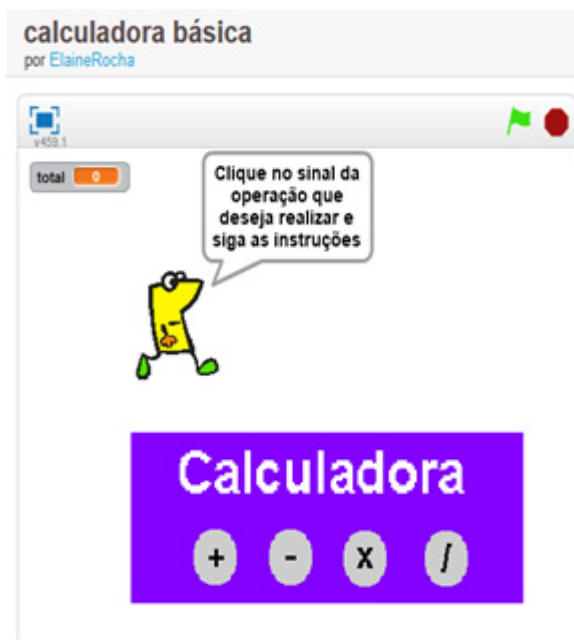


Figura 4 - Jogo da calculadora básica.

Fonte: (SCRATCH MIT, 2018).

Deste modo, uma síntese avaliativa sobre o mesmo, é apresentada na Tabela 3. Segundo os professores, os itens avaliados (A), (B), (C), (D) e (E) classificam a estrutura deste objeto de aprendizagem, como mediano, sendo respectivamente (4), (4,3), (3,3), (3,8) e (3,6). Para os avaliadores, o uso deste objeto, cabe ao professor pensar em como agregar este recurso em sua aula de forma a promover um maior dinamismo no processo de aprendizagem de matemática.

FOLHA DE PONTUAÇÃO					
Itens do instrumento de avaliação	A	B	C	D	E
Pontuação do Professor (XX)	4	5	3,5	4	4
Pontuação do Professor (YY)	4	4	3,5	4	4
Pontuação do Professor (CC)	4	4	3,0	3,5	3,0
<b>NOTA (média das pontuações)</b>	<b>4</b>	<b>4,3</b>	<b>3,3</b>	<b>3,8</b>	<b>3,6</b>

Tabela 3 - Instrumento de avaliação.

A: Qualidade do conteúdo, B: Usabilidade de interação, C: Motivação, D: Potencial como ferramenta de ensino e aprendizagem e E: Apresentação.

Fonte: Elaborado pelos autores (adaptado de Nesbit & Leacock, 2009).

Resumidamente, este recurso consiste de um *software* educacional livre destinado a alunos do ensino fundamental, com o objetivo de aprimorar/treinar cálculos envolvendo operações básicas. Segundo os professores participantes e avaliadores, este objeto pode ser utilizado para fixar o conteúdo, uma vez que, é necessário que o aluno tenha uma breve noção sobre como efetuar as operações. Nele, basta o usuário inserir os valores numéricos (conforme as instruções do personagem do jogo) que o

programa calcula o resultado final. Uma forma de potencializar a aula, com este objeto de aprendizagem, seria dividir os alunos em grupo, realizando uma competição entre eles. O grupo que fizer mais pontos, ganha o jogo. Outras dinâmicas poderiam ser utilizadas para potencializar a aula. Como elementos motivacionais destacam-se a simplicidade do objeto e a maneira como será utilizado na dinâmica da aula. O cenário, a disposição dos textos, a interatividade com o usuário, estão dispostos de forma adequada. O objeto é de fácil compreensão e navegação. Mas ambos os professores, também atribuíram pontos negativos, como: falta movimento, falta som, poderia ter um cenário mais apropriado com mais personagens, o resultado dos cálculos só poderia ser apresentado após pressionar a tecla *enter*, é necessário o professor pensar e ser criativo em como potencializar e motivar sua aula com este objeto de aprendizagem, entre outros quesitos.

## 5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscou-se avaliar, de forma panorâmica, a estrutura dos objetos de aprendizagem desenvolvidos com a Ferramenta Scratch presentes na própria plataforma de divulgação do Scratch, relacionado apenas, à conteúdos de matemática. Para tanto, utilizou-se como instrumento de avaliação uma adaptação da metodologia LORI, considerando a qualidade do conteúdo do objeto, usabilidade de interação, motivação, potencial no ensino e aprendizagem e sua apresentação.

Como resultado da avaliação/pontuação (sendo considerado um momento reflexivo e julgativo), verificou-se que os objetos avaliados estão aptos para serem utilizados como uma abordagem alternativa no processo de ensino e aprendizagem nas aulas de matemática. Ambos os objetos, categorizados como jogos, tem suas próprias características, notas e objetivos, e são capazes de envolver os alunos na atividade pedagógica estipulada. Mas, cabe ao professor, mediar e pensar em como adaptar esses objetos em suas atividades na aula, potencializando-a. Em Scratch Mit (2018) outros objetos poderiam ser avaliados, como: jogo da divisão, jogo dos números primos, jogo do polígono, jogo da tabuada, entre outros.

Os professores participantes/avaliadores, destacam o sistema de avaliação LORI muito simples, porém, muito importante; além de poder ter a participação de mais professores no processo de avaliação, colaborando na decisão sobre a qualidade do objeto que será utilizado em sala de aula.

Espera-se com esta análise, disseminar a relevância deste trabalho, o quanto é importante avaliar um objeto de aprendizagem voltado ao ensino de matemática, antes de colocá-lo em sala de aula, pois os mesmos devem estar aptos, fomentando e aumentando o desejo dos alunos em propagar seus conhecimentos, de forma motivada e colaborativa.

## REFERÊNCIAS

- ABRAMOWICS, A.; WAJSKOP, G. **Creches**: atividades para crianças de zero a seis anos. São Paulo: Moderna, 1995.
- AGUIAR, Eliane V. B.; FLÔRES, M. L. P. **Objetos de aprendizagem**: conceitos básicos. Capítulo 1. CINTED/UFRGS, Porto Alegre: Editora Evangraf, 2014. ISBN: 978-85-7727-643-1. Disponível em: < <http://penta3.ufrgs.br/ObjetosAprendizagem/LivroOA-total.pdf> >. Acesso em 20 dez. 2017.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- BOFF, E.; REATEGUI, E. A importância do processo de avaliação de software educativo. In: Seminário Nacional de Tecnologia na Educação (SNTE). **Anais eletrônicos do SNTE**, Caxias do Sul - RS: 2005. Disponível em: <http://ccet.ucs.br/dein/nase/snte2005.PDF>. Acesso em: 15 jan. 2018.
- BRANDÃO, E. J. R. **Repensando modelos de avaliação de software educacional**. 2004. Disponível em: <http://www.minerva.uevora.pt/simposio/comunicacoes/artigo.html>. Acesso em: 15 jan. 2018.
- GAMA, C.L.G.; SCHEER, S. Avaliação de objetos educacionais para Educação a Distância de engenharia: construção, reuso e avaliação. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA, 12, 2005, Florianópolis - SC. **Anais de programação do 12º CIED**. Florianópolis: ABED e UFSC, 2005. v.1. p.1-8.
- MACEDO, L. N.; MACEDO, A. A. M.; FILHO, J. A. C. Avaliação de um objeto de aprendizagem com base nas teorias cognitivas. **Anais eletrônicos do Workshop sobre Informática na Escola (WIE-2007)**. Rio de Janeiro, 2007, p. 330-338.
- MALONEY, J.; RESNICK, M.; RUSK, N.; SILVERMAN, B.; EASTMOND, E. **The scratch programming language and environment**. In: Communications of The ACM, v. 10, n. 4, article 16, 2010.
- MOREIRA, A. D. **Levantamentos Amostrais**. Dissertação (Mestrado em Administração de Empresas). FECAP – SP. 2017. Disponível em: <http://www.inf.ufsc.br/~marcelo.menezes.reis/Cap7.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2017.
- NESBIT, J. C.; BELFER, K.; LEACOCK, T. **Learning object Review Instrument (LORI)**: user manual. 2003. Disponível em: <http://www.transplantedgoose.net/gradstudies/educ892/LORI1.5.pdf>. Acesso em: 07 nov. 2017.
- NESBIT, J. C.; LEACOCK, T. L. **Collaborative argumentation in learning resource evaluation in** L. Lockyer, S. Bennet, S. Agostinho, & B. Harper (Eds.) Handbook of Research on Learning Design and Learning Objects: Issues, Applications and Technologies (pp. 574-588). Hershey, PA: Idea Group. 2009.
- OLIVEIRA, T. M. V. Amostragem não probabilística: adequações de situações para uso e limitações de amostras por conveniência, julgamento e quotas. **Revista Administração On Line** (Prática – Pesquisa - Ensino), v. 2, n. 3, setembro de 2001. ISSN 1517-7912.
- PARANÁ. Governo do Paraná. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática**, 2008.
- ROMERO, R. L.; ANDRADE, R.; PIETROCOLA, M. Parâmetros para análise de roteiros de Objetos de Aprendizagem. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA, 18, Vitória - ES, 2009.
- SANTOS, C. S. F. Avaliação de materiais virtuais interativos para o ensino de matemática na educação básica. Universidade do Estado do Paraná – UEPA. **Revista REnCiMa**, v. 2, n. 1, p. 84 –



95, jan/jun 2011.

SÁPIRAS, F. S.; VECCHIA, R. D.; MALTEMPI, M. V. Utilização do scratch em sala de aula. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 5, p. 973-988, 2015.

SCRATCH MIT. **Plataforma Scratch**. Disponível em: <<https://scratch.mit.edu>>. Acesso em: 12 fev. 2018.

SILVEIRA, S. R. **Estudo e construção de uma ferramenta de autoria multimídia para elaboração de jogos educativos**. 1999. 128 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 1999.

SOUZA, Maria de Fátima Costa de; PEQUENO, M. C.; CASTRO FILHO, José Aires de. Uma metodologia de apoio à seleção de softwares educativos o para o ensino de matemática. **Revista Latino-americana de Tecnologia Educativa**. Espanha, v. 3, n. 2, p. 6183, 2005.

SOUZA, M. F. C.; GOMES, D. G.; BARROSO, G. C.; SOUZA, C. T.; CASTRO, J. A.; PEQUENO, M. C.; ANDRADE, R. M. C. LOCPN: Redes de Petri coloridas na produção de objetos de aprendizagem. **Revista Brasileira de Informática na Educação**. v. 15, n. 3, p. 39-42. 2007.

TAROUCO, L. M. R.; FABRE M. J. M.; TAMUSIUNAS, F. R. Reusabilidade de objetos educacionais. In: RENOTE – **Revista Novas Tecnologias para a Educação**. Porto Alegre: Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação (CINTED- UFRGS), v. 1. nº 1, 2003.

TAROUCO, *et al.* **Objetos de aprendizagem: teoria e prática**. CINTED/UFRGS, Porto Alegre: Editora Evangraf, 2014.

WILEY, D. A. **Learning object design and sequencing theory**. Brigham Young University. 2000. Disponível em <<http://www.reusability.org/read/chapters/wiley.doc>>. Acesso em 22 fev. 2018.

## LESSON STUDY: O PLANEJAMENTO COLABORATIVO E REFLEXIVO

### Renata Camacho Bezerra

Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE), Centro de Engenharias e Ciências Exatas – CECE, Câmpus de Foz do Iguaçu/PR  
Foz do Iguaçu, Paraná

### Maria Raquel Miotto Morelatti

Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia - FCT, Câmpus de Presidente Prudente/SP  
Presidente Prudente, São Paulo

**PALAVRAS-CHAVE:** *Lesson study*. Processo formativo. Colaboração. Reflexão.

### LESSON STUDY: THE COLLABORATIVE AND REFLEXIVE PLANNING

**ABSTRACT:** The Lesson Study originated in Japan and has been adapted in Brazil in different ways. It is understood as a formative process in which teachers have the opportunity to reflect, analyze, discuss, plan their classes in a collaborative way and the focus of the process is student learning. The intervention, which gave rise to this research, was carried out in the dynamics of the Lesson Study and lasted for one year, with the accomplishment of two formative cycles. The purpose of this chapter is to reflect how reflection and collaboration on the part of the teachers' group occurs during the formative process. We found that the group became collaborative during the process and that reflection was the guiding thread, as well as that reflection and collaboration extrapolated the meeting environment and became the practice of teachers in their classrooms.

**KEYWORDS:** Lesson study. Formative process. Collaboration. Reflection.

**RESUMO:** A *Lesson Study* teve origem no Japão e tem sido adaptada no Brasil de diferentes maneiras. É entendida, como um processo formativo no qual professores tem a oportunidade de refletir, analisar, discutir, planejar suas aulas de forma colaborativa e o foco do processo é a aprendizagem do aluno. A intervenção, que deu origem a esta pesquisa, foi realizada na dinâmica da *Lesson Study* e teve duração de um ano, com a realização de dois ciclos formativos. O objetivo deste capítulo é refletir como ocorre no decorrer do processo formativo a reflexão e a colaboração por parte do grupo de professores. Constatamos que o grupo tornou-se colaborativo durante o processo e que a reflexão foi o fio condutor, bem como, que a reflexão e a colaboração extrapolaram o ambiente dos encontros e passaram a ser prática dos professores em suas salas de aula.

## 1 | INTRODUÇÃO

A “*Jyugyo Kenkyu*” como é conhecida no Japão ou “*Lesson Study*” como foi traduzida nos Estados Unidos, “Estudos de Aula/Estudos de Lição” como é denominado em Portugal, “*Estudio de Clases*” como é traduzido na Espanha, ou ainda, “Pesquisa de Aula e/ou Estudo e Planejamento de Lições” como tem sido traduzido no Brasil é um processo formativo que teve origem no Japão no final do século XIX, início do século XX, período que permaneceu isolada por quase um século, e que vem aos poucos ganhando destaque em todo o mundo, inclusive no Brasil.

Ao conhecermos um pouco mais da história da *Lesson Study* podemos verificar que encontramos,

[...] contribuições que ajudaram a consolidar esta proposta, [...] em referências pedagógicas ocidentais que ainda continuam em pleno vigor: como a pesquisa-ação, a filosofia de ensino de Pestalozzi e até mesmo a aprendizagem baseada na experiência de Dewey. (SOTO GÓMEZ; PÉREZ GÓMEZ, 2015, p. 16, tradução nossa)

Recentemente em 2017 é que tivemos a primeira defesa de doutorado no Brasil a respeito do tema (BEZERRA, 2017) e neste trabalho a autora apontou que até julho de 2016, existiam apenas cinco dissertações de mestrado abordando a temática no país, sendo que dentre elas, quatro eram de mestrados profissionais.

A *Lesson Study* (termo que adotaremos neste trabalho, por entender que esta terminologia é a mais utilizada como referência internacional) configura-se como “uma alternativa clara aos processos tradicionais de reflexão e melhora da prática educativa e [...] de reconstrução dos saberes e práticas docentes” (SOTO GÓMEZ; PÉREZ GÓMEZ, 2015, p. 16, tradução nossa), que tem o objetivo de melhorar e propiciar uma aprendizagem efetiva e mais participativa dos alunos, (SOUZA; WROBEL, 2017).

Um aspecto fundamental dos estudos de aula é que eles se centram nas aprendizagens dos alunos e não no trabalho dos professores. Isto distingue-os de outros processos formativos que envolvem observação de aulas, mas que se centram, principalmente, na atuação dos professores. (PONTE; QUARESMA; MATA-PEREIRA; BAPTISTA, 2016, p. 870)

Na dinâmica da *Lesson Study*, basicamente os professores em grupo elaboram o planejamento de uma aula. Esse planejamento diferentemente de um plano de aula comum, no qual o professor apenas descreve conteúdos, objetivos, procedimentos, recursos e avaliação, na *Lesson Study*, o plano de aula é criteriosamente elaborado pelo grupo de professores e não mais individualmente pelo professor e cada uma das fases deste planejamento da aula é cuidadosamente discutida entre os pares com o auxílio do pesquisador.

No Japão basicamente as fases da *Lesson Study* podem ser definidas como: planejamento, execução e reflexão, mas devido as características de cada localidade é importante destacar que sempre que se utiliza a *Lesson Study* são necessárias adaptações. Isto pode ser visto nos trabalhos desenvolvidos nos Estados Unidos

(TAKAHASHI; MCDUGAL, 2016), na Espanha (SOTO GÓMEZ; PÉREZ GÓMEZ, 2015), em Portugal (PONTE; QUARESMA; BAPTISTA; MATA-PEREIRA, 2014) e no Brasil (BEZERRA, 2017 e BALDIN, 2009), dentre outros lugares e autores.

Na adaptação do processo formativo realizado por (BEZERRA, 2017), embora tenhamos as mesmas etapas (planejamento, execução e reflexão) da *Lesson Study* realizada no Japão, foram apresentadas várias fases dentro de cada etapa o que tornou o processo didaticamente mais compreensivo por parte dos professores. São elas:

a) Planejamento – Momento em que conjuntamente os professores escolhem um conceito matemático e um objetivo para o preparo da aula. Esta etapa é subdividida em várias fases.

a1) Escolhe-se o conteúdo e a série para o qual a aula será preparada;

a2) Pesquisa-se a respeito do conteúdo em documentos oficiais, livros didáticos e paradidáticos;

a3) Em grupo os professores estudam o conteúdo escolhido;

a4) Os professores relatam uns aos outros, experiências nas quais tenham trabalhado em sala com o conteúdo escolhido;

a5) Conjuntamente os professores pensam tarefas desafiadoras para o ensino do conteúdo escolhido;

a6) Os professores procuram se antever ao raciocínio dos alunos em cada uma das tarefas elaboradas discutindo o grau de dificuldade e possíveis alterações;

a7) Os professores em conjunto resolvem as tarefas elaboradas e caso necessário reformulam.

Se os professores julgarem pertinente, nesta fase pode ser realizada uma tarefa diagnóstica com os alunos para os quais será ministrada a aula, de forma a identificar o nível da turma.

b) Execução da Aula – A aula é realizada por um professor do grupo (não necessariamente na sua sala de aula) e observada por outros. Além disso é pertinente que a aula seja filmada e fotografada para embasar as reflexões posteriores.

c) Reflexão – Após a realização da aula com os alunos, os professores assistem as gravações, discutem as atividades realizadas e podem refletir a respeito da aula elaborada no/pelo grupo, avaliam as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem e sugerem modificações para aula, mediante as discussões/reflexões realizadas.

A realização de todas as fases de cada etapa completa um ciclo. A pesquisa que fundamenta este capítulo contou com a realização de dois ciclos. O primeiro ciclo, no primeiro semestre de 2016, no qual os professores escolheram trabalhar o conteúdo divisão no 4º ano e o segundo ciclo, no segundo semestre de 2016, no qual escolheram trabalhar o conteúdo multiplicação, no 3º ano.

A *Lesson Study* tem como características principais a reflexão e a colaboração, diante disso, neste capítulo buscamos identificar se e de que forma estes dois aspectos ocorreram no grupo, que realizou o processo formativo, tendo a *Lesson Study* como

fio condutor do processo.

## 2 | LESSON STUDY – CONTEXTO COLABORATIVO E REFLEXIVO

Como diversas pesquisas já apontaram, dentre elas as realizadas por Teodoro (2016), Crecci (2016), Fiorentini (2013) e Fiorentini; Crecci (2013), Imbernón (2009), um grupo nem sempre nasce colaborativo, mas pode tornar-se ao longo do processo.

É importante incentivar a colaboração, pois de acordo com Nóvoa (2002) ao consolidar estas redes de colaboração como espaços de troca institucional “o trabalho colaborativo de professores, [...] contribui para a construção da identidade profissional docente” (SOUZA; WROBEL, 2017, p. 12).

Afinal,

[...] as condições de trabalho e as culturas organizacionais de muitas escolas nem sempre permitem que haja diálogos profissionais regulares acerca do ensino que possam ir para além de trocas anedóticas e de técnicas (Day, 1997), fazendo com que os professores se sintam verdadeiramente desencorajados para melhorar a sua prática. Estas condições e as culturas das escolas que frequentemente desencorajam a divulgação, o *feedback* e a colaboração agem como potenciais barreiras à participação em todas as formas de prática reflexiva. (DAY, 2004, p. 162)

Diante dessa realidade em nossas escolas, temos que pensar alternativas que auxiliem os professores.

A *Lesson Study* é

[...] uma forma de desenvolvimento profissional ao longo da vida no qual as equipes de professores, colaborativamente, busca planejar, pesquisar e estudar uma aula que será ministrada a fim de decidir qual a melhor estratégia para que seus alunos possam melhor aprender aquele objeto do conhecimento. (ARAGÃO; PREZOTTO; AFFONSO, 2015, p. 16117)

Por meio da colaboração, a formação do professor reflexivo acontece com o grupo de professores que planejam o ensino de um conteúdo matemático definido pelo grupo.

Assim, a *Lesson Study* tem sido entendida como

[...] um contexto privilegiado de formação [...] de professores no qual se aprende, na prática, pois o professor tem a oportunidade de refletir, analisar, discutir, planejar aulas tendo como foco, o conteúdo. O ponto de partida e de chegada é a prática do professor. (BEZERRA, 2017, p. 25)

Além disso, as pesquisas tem mostrado que quando um grupo de professores se reúne para planejar uma aula, pode por meio da *Lesson Study*, não apenas tornar se um grupo colaborativo já que esta é uma condição da *Lesson Study*, mas também construir “uma bagagem didático-pedagógica e matemática mais sólida” por meio de discussões, construções e (re) construções no próprio grupo e isso tende a “repercutir no desenvolvimento de sua própria segurança profissional, por meio do contato com um repertório mais amplo de estratégias, modos de pensamento e ideias” (SOUZA; WROBEL, 2017, p. 26), enfim, no grupo e com o grupo por meio do processo formativo

ocorre o Desenvolvimento Profissional do professor.

### 3 | METODOLOGIA

Desenvolvemos uma pesquisa qualitativa de natureza interpretativa (ERICKSON, 1986), na qual buscamos a pluralidade na interpretação e na compreensão dos contextos como sugere Sandín Esteban (2010), sendo para tal constituída uma intervenção no contexto da *Lesson Study*, com professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental numa escola Municipal de Foz do Iguaçu/PR.

Dos 20 (vinte) professores lotados na escola, 16 (dezesesseis) participaram voluntariamente da pesquisa. Todas as reuniões do grupo foram áudio gravadas e transcritas na íntegra pela pesquisadora. Sendo que todos os registros foram autorizados em termos de consentimento livre e esclarecido por cada um dos professores, pelos pais/responsáveis dos alunos que participaram das aulas, pelo diretor da escola e pela Secretaria Municipal de Educação, permitindo desta forma a utilização do material para fins acadêmico-científico. Além disso, todos os professores escolheram nomes fictícios para serem identificados no decorrer da pesquisa.

No primeiro ciclo os professores escolheram trabalhar com o conteúdo divisão numa quarta série e foram realizados dez encontros. Já no segundo ciclo, os professores escolheram trabalhar com o conteúdo multiplicação no terceiro ano e foram realizados nove encontros.

### 4 | MOMENTOS DE COLABORAÇÃO E REFLEXÃO

A seguir vamos apresentar pequenos episódios do processo formativo que retratam momentos em que os professores refletem a respeito de suas aulas, de suas experiências, dos objetivos que devem ter no processo de planejamento e de ensino e aprendizagem.

São diálogos que nos fazem perceber a interação do grupo, momentos de reflexão individual e/ou coletiva e a construção da colaboração entre os pares dentro e fora do processo formativo realizado indistintamente nos dois ciclos formativos.

No episódio 1 temos retratado o diálogo realizado na etapa de planejamento e nos episódios 2 e 3 diálogos ocorridos na etapa de reflexão, realizada após as aulas.

Os diálogos foram transcritos como realizados, buscando preservar a riqueza de detalhes do momento.

#### 4.1 Episódio 1

No primeiro episódio os professores refletem a respeito do processo de ensino e da importância de se ter objetivos definidos na realização do processo de ensino e aprendizagem.

**Professora Isadora:** *Se ele também não tiver um objetivo claro de nada vai adiantar os caminhos que ele não vai chegar a nada. Ele vai nadar, nadar e vai morrer na praia. Ele não tem claro aquele objetivo. Ele não vai buscar aqueles meios que realmente vão... Muitas vezes... ontem a professora Ana saiu e eu, em casa, fiquei pensando... ela é nova de carreira e já está sentindo o mesmo que eu venho (nossa!!) sentindo há muito tempo. Ela saiu meio tristonha no final do expediente. Aí eu falei. E aí Ana! O que foi? Ela falou: não sei... eu estou sentindo que estou remando, remando e estou ficando parada. Sabe? Então, às vezes, o que é isso? É as mudanças. Porque a gente não tem claro os objetivos ou até tem, mas não consegue com os meios alcançar aquilo, porque a gente, enquanto professor, a gente se frustra, né? A gente fica frustrado todo dia. A gente está com a sensação de que você está nadando... nadando e morre na praia!*

[...]

**Professora Isadora:** *Professora, por exemplo, se eu alcancei o meu objetivo, mas o aluno não realizou pelo método que eu ensinei, mas eu tenho que levar isso em consideração, né? Valorizar o fato dele ter atingido o objetivo?*

**Pesquisadora:** *O que vocês acham?*

**Professora Helena:** *Acho importante valorizar todas as resoluções.*

[...]

**Professora Isadora:** *E também trazer a vivência lá do aluno, né, professora? Eu tive uma aluninha [...] que a gente foi trabalhar porcentagem, aí os outros alunos da mesma série, ninguém dominava e ela dava aula, ela mal sabia ler, mas dominava, ela falava é assim professora, aí fiquei sabendo que ela vendia flor no semáforo.*

No processo formativo no qual retrata o episódio 1 estávamos discutindo e definindo os objetivos da aula que estávamos planejando na dinâmica da *Lesson Study* e os professores sentiram necessidade de refletir/discutir no e com o grupo situações do dia a dia vivenciadas nas salas de aula. Mas, mais do que respostas a função da pesquisadora no processo foi mediar e subsidiar as discussões permitindo e incentivando que o grupo ganhasse autonomia e identidade própria como pudemos acompanhar no diálogo.

## 4.2 Episódio 2

Definido os objetivos, elaborada a sequência didática era chegado o momento de realizar a aula. E, a mesma, foi realizada pelo professor Ileon na sala do quarto ano da professora Bia e foi observada/fotografada/filmada pelas professoras Flor, Vera, Brigitte e Bia. O professor Karl auxiliou na editoração dos vídeos, ao término da aula.

Todos os professores assistiram as gravações e refletiram em grupo sobre o processo realizado. Neste momento, os professores que participaram da aula, seja ministrando a mesma ou filmando ou fotografando ou observando, tiveram a oportunidade de relatar o que foi observado. Foi possível, então, verificar não só aspectos de colaboração entre o grupo, mas também de reflexão a respeito do trabalho

realizado.

**Professora Vera:** *Foi muito bom assim né, Bia? O resultado que nós pudemos observar falando assim que nós estávamos divididos em grupo e no próprio grupo. Às vezes, uma criança fazia de uma forma no papel para representar e a outra criança fazia de outra forma, uma fazia com continha, outra com desenho, então foi bem interessante o resultado.*

[...]

**Professora Bia:** *Hoje de manhã eu estava até falando com o Ileon, nós achamos que foi cansativo para as crianças. A gente poderia ter dado em dois dias. Ter dado um pouco das atividades e ter continuado em outro dia, porque foi se tornando maçante para eles. Eles queriam chupar a bala logo, o pirulito logo, e a gente falava deixa para depois, mesmo que eles são quarto ano, a gente tem que dosar um pouco de cada coisa, porque eles enjoam.*

A reflexão não é só do processo, mas também da atuação individual e do grupo. As sugestões são incorporadas à sequência didática para que ela seja reorganizada/adaptada para uma próxima aula, mas os professores não acharam necessário realizar a aula novamente.

Embora os professores tenham aceitado participar voluntariamente do processo formativo no contexto da Lesson Study, somente no final do primeiro ciclo formativo, após a realização da primeira aula e após observarem a reação dos alunos no que tange à participação e aprendizagem, é que, de fato, passaram a acreditar que é possível trabalhar a Matemática de uma forma diferente, atribuindo maior significado às aprendizagens dos alunos e, é neste momento também que a interação no grupo é maior.

Nosso objetivo neste capítulo é discutir as atividades matemática elaboradas/adaptadas pelos professores e realizadas com os alunos, mas como os professores reagiram perante o processo formativo diferenciado (*Lesson Study*), no qual, são sujeitos da própria formação.

### 4.3 Episódio 3

No segundo ciclo foi escolhido o conteúdo Multiplicação. A aula foi realizada pela professora Ana, com sua própria turma, filmada e fotografada pela professora Maria, observada pela professora Anita. O professor Karl auxiliou na editoração dos vídeos, ao término da aula.

Os professores refletiram a respeito da aula realizada e apresentaram fortes indícios de como a colaboração permeou não só o processo de planejamento, mas também o de realização da aula e de reflexão.

Apresentamos a seguir como terceiro episódio falas dos professores a respeito do processo desenvolvido.

**Professora Maria:** *Eu percebi que o fato de nós utilizarmos o jogo e isso não ser usual, para eles, gerou uma ansiedade. O que eu via na atividade era eles fazendo*



tranquilamente, estavam de boa, quando anunciamos que ia ter um jogo, eles ficaram ansiosos.

**Professora Ana:** Mas eles tinham que trabalhar em grupo. Não bastava um fazer certo o grupo tinha que fazer certo, nós trabalhamos com eles também o sentido de cooperação. Isso foi muito importante, porque cada aluno tinha que perceber a importância de ajudar seu colega.

**Professora Maria:** Tivemos um caso bem interessante, uma aluna que é muito boa e individualista e uma outra aluna que chegou agora que inclusive na outra escola frequentava uma turma de segundo ano e tem grandes dificuldades. Aí falamos que tem que funcionar a dupla. Teve uma hora que tivemos que parar a atividade e falar para os alunos se acalmarem porque eles estavam muito tensos.

**Professora Ana:** Estas duas meninas nós tivemos problemas porque a aluna, que é melhor, não aceitava ajudar a colega de jeito nenhum. A gente teve que trabalhar isso durante a aula.

**Professora Maria:** E no decorrer da aula isso mudou. Uma começou a ajudar a outra. Nós vimos a mudança acontecendo no decorrer da aula.

Os professores vão alterando momentos de diálogo, de interação com os colegas, no qual a colaboração está presente e a reflexão é o fio condutor do processo.

**Professora Maria:** Teve até uma aluna que eu perguntei como dá para fazer e ela falou que dava para fazer de vários jeitos, mas que ela gostava mais da conta de mais, mas que a conta de vezes era mais rápido. Acho que é isso mesmo, eles começam primeiro pelo que eles gostam mais.

**Professora Anita:** O que ficou muito claro para os alunos através desta primeira atividade foi que fazendo de três maneiras diferentes, a maneira mais rápida de fazer é através da multiplicação.

**Professora Mazdha:** De certa forma, a gente em sala de aula, começa a podar nos alunos a questão dos desenhos, a gente sempre valoriza mais a questão dos algoritmos, até porque nosso tempo é curto. Quanto mais velhos os alunos, mas eles são podados, menos eles podem usar os desenhos.

A colaboração entre os pares emerge a medida em que os professores se sentem parte do processo, e o planejamento passa a ser visto como uma etapa importante do processo de ensino e aprendizagem.

**Professora Helena:** Eu tenho uma pergunta com essa estratégia, que nós utilizamos, eles tiveram facilidade para perceber o algoritmo da multiplicação, como a gente queria?

**Professora Ana:** Sim, eu penso que sim. Com os nossos encontros, eu já tenho trabalhado dessa forma com eles. Então nossa atividade veio de encontro com o que já tenho procurado fazer, me pareceu que eles se saíram muito bem e compreenderam de verdade.

**Professora Helena:** Eu quero fazer isso com minha turma também. Quero ver como eles vão se sair, trabalhar com três formas diferentes de resolver uma

mesma situação, eles vão perceber que tem vários caminhos e ainda perceber que a multiplicação é mais rápida. A gente mata dois coelhos com uma cajadada só, né?!

**Professora Ana:** Hoje eles percebem a multiplicação como mais rápida hoje, mas isso foi um processo. Nossos encontros ajudaram muito nisso.

**Professora Maria:** Eu perguntei para eles: É 32, mas se fosse 320? Eles falaram: Ôô, a gente ia ficar o resto da vida desenhando. Eles percebem, na prática, a agilidade da multiplicação. Isso que foi legal.

**Professora Ana:** Professora, outro conceito que a aula trouxe para mim foi a questão do grupo. Facilitou o trabalho porque se você junta eles, é menos trabalho porque eles vão ter as mesmas dúvidas e dentro do grupo muitas dúvidas já são sanadas nem precisam chegar até mim. Facilita muito o meu trabalho. Eu vou trabalhar mais em grupo agora, gostei bastante.

**Professora Mazdha:** E fora a questão de que quando você ensina você está aprendendo. A troca é importante entre os colegas e você trabalha outras questões entre os alunos. Acho muito importante o trabalho em grupo desde os pequenos.

**Pesquisadora:** E os nossos objetivos foram atingidos?

**Professora Maria:** Eu achei que sim, os alunos compreenderam a multiplicação como uma operação que traz agilidade, mas acho que a gente trabalhou ainda mais coisas do que tinha previsto.

**Pesquisadora:** O que, por exemplo?

**Professora Maria:** A colaboração entre os alunos na atividade do stop. A possibilidade de resolver um problema de mais de uma forma [...].

Este terceiro episódio evidencia a colaboração presente não só no grupo de professores, mas também como eles a identificam no grupo de alunos.

A reflexão e a colaboração, à medida em que os ciclos avançam no processo formativo conduzido pela *Lesson Study*, vão se tornando mais evidentes e as falas dos professores espelham que a reflexão conduz não só os encontros formativos, mas também as aulas de matemática, para além do que é discutido no grupo de professores.

## 5 | CONCLUSÕES

No contexto da *Lesson Study*, os professores, em grupo e em trabalho colaborativo, se antecipam às possíveis soluções dos estudantes, passam a ter mais domínio do conteúdo matemático a ser explorado, bem como, das alternativas de resposta, de maneira que o objetivo inicial seja atingido. “Com isso os professores ganham confiança no processo, mudam/adaptam tarefas mediante as discussões e têm a oportunidade de, diante das reflexões, também se mudar/adaptar” (BEZERRA, 2017, p. 164). Ou seja, é uma possibilidade de que o “professor construa uma bagagem didático-pedagógica e matemática mais sólida, o que pode repercutir no desenvolvimento de sua própria segurança profissional” (SOUZA; WROBEL, 2017, p. 26).

De acordo com Day (2004, p.163), “apesar deste aspecto nem sempre ter sido explícito”, é fato que podemos relacionar o conceito de colaboração com o de prática reflexiva.

A professora Helena bem expressou este pensamento quando relatou que:

*A troca de experiências com os demais colegas também foi fundamental. Evoluímos mais rapidamente partilhando os conhecimentos, pois a percepção de cada um é diferente, e alguns elementos importantes e necessários para uma prática pedagógica dinâmica, passariam despercebidos caso não houvesse a colaboração do grupo.* (Professora Helena, grifo nosso)

Nossa pesquisa vivenciou e comprovou que a reflexão e a colaboração são aspectos fundamentais do contexto da *Lesson Study* vivenciados dentro e fora do grupo, sendo importante não só no processo formativo, mas também quando os professores realizam suas aulas após vivenciarem essa formação.

## REFERÊNCIAS

ARAGÃO, Ana Maria Falcão de; PREZOTTO, Marissol; AFFONSO, Bianca Fiod. Reflexividades e Parceria no Cotidiano da Escola: O Método de Formação Docente Lesson Study. In: XII Encontro Nacional de Educação, 2015, Curitiba/PR. **Anais XII EDUCERE**. Curitiba/PR: PUC, 2015. p. 16113-16124. ([http://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/17679\\_7904.pdf](http://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/17679_7904.pdf))

BALDIN, Yuriko Yamamoto. O Significado da introdução da Metodologia Japonesa de Lesson Study nos Cursos de Capacitação de Professores de Matemática no Brasil. In: Simpósio Brasil – Japão, 2009, São Paulo/SP. **Anais Simpósio Brasil – Japão**. São Paulo/SP: Associação Brasil-Japão de Pesquisadores - SBPN, 2009. p. 1-5. (<http://japao.org.br/simposio2010/wp-content/uploads/2010/PA027.pdf>)

BEZERRA, Renata Camacho. **Aprendizagens e Desenvolvimento Profissional de Professores que Ensinam Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no Contexto da Lesson Study**. 2017. 210f. Tese (Doutorado) – Faculdade de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” UNESP, Presidente Prudente/SP, 2017.

CRECCI, Vanessa Moreira. **Desenvolvimento Profissional de Educadores Matemáticos Participantes de uma Comunidade Fronteiriça entre Escola e Universidade**. 2016. 325f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas/SP.

DAY, Christopher. **A Paixão pelo Ensino**. Porto/PT: Porto Editora LDA, 2004.

DAY, Christopher; VAN VEEN, Dolf; WALRAVEN, Michael Guido (eds.). **Children and Youth at Risk and Urban Education: Research, Policy and Practice**. Appledooorn: Garant, 1997.

ERICKSON, Frederick. Qualitative methods in research on teaching. In: WITTRICK, M. C. (ed). **Handbook of research on teaching**. New York/NY: MacMillan, 1986. p. 119-161.

FIORENTINI, Dário. Learning and professional development of the mathematics teacher in research communities. **Sisyphus-Journal of Education**. v. 1, n. 3, 2013. p. 152-181.

FIORENTINI, Dário; CRECCI, Vanessa Moreira. Práticas de Desenvolvimento Profissional sob a Perspectiva dos Professores. **Diversa Prática**. Volume Especial de Lançamento, 2013. p. 65-76.

IMBERNÓN, Francisco. **Formação permanente do professorado: novas tendências**. São Paulo/SP: Cortez, 2009.

NÓVOA, Antonio. Concepções e Prática de Formação Contínua de Professores. In: NÓVOA, Antonio. (Org.) **Formação de Professores e Trabalho Pedagógico**. Coimbra/PT: Educa, 2002. p. 49-66.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana; BAPTISTA, Mônica. O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. **BOLEMA**. V. 30. No. 56. Rio Claro/SP, 2016. p. 868 – 891.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; BAPTISTA, Mônica; MATA-PEREIRA, Joana. Promover o desenvolvimento do raciocínio matemático: perspectivas de professoras num estudo de aula. In: BROCARD, Joana; BOAVIDA, Ana Maria; DELGADO, Catarina; SANTOS, Elvira; MENDES, Fátima; DUARTE, José; BAÍA, Mário; FIGUEIREDO, Miguel (Eds.). **Tarefas Matemáticas: Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática**. Lisboa/PT: SPIEM, 2014. p. 337-352.

SANDÍN ESTEBAN, Maria Paz. **Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições**. Porto Alegre: AMGH, 2010.

SOTO GÓMEZ, Encarnación; PÉREZ GOMEZ, Ángel. Lessons Studies: un viaje de ida y vuelta recreando el aprendizaje comprensivo. **Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado**. 83 (29.2), 2015. p. 15-28.

SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira de; WROBEL, Júlia Schaetzle. **Lesson Study em Matemática: Café, Leite e Matemática**. Vitória/ES: Edifez, 2017.

TAKAHASHI, Akihiko; McDOUGAL, Thomas. Collaborative Lesson research: maximizing the impact of Lesson study. **ZDM: the international journal on Mathematics Education**. June 2016, 48(4), p. 513-526. doi:10.1007/s11858-015-0752-x.

TEODORO, Klinger Círiaco **Professores iniciantes e o aprender a ensinar Matemática em um grupo colaborativo**. 2016. 334f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” UNESP. Presidente Prudente/SP.

## FAMÍLIAS CONSISTENTES E A COLORAÇÃO TOTAL DE GRAFOS

### **Abel Rodolfo García Lozano**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro,  
Departamento de Matemática  
São Gonçalo - RJ

Universidade do Grande Rio, Programa de Pós-  
Graduação em Ensino de Ciências  
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e  
Computacional  
Duque de Caxias – RJ

### **Angelo Santos Siqueira**

Universidade do Grande Rio, Programa de Pós-  
Graduação em Humanidades, Culturas e Artes  
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e  
Computacional  
Duque de Caxias – RJ

### **Sergio Ricardo Pereira de Mattos**

Universidade do Grande Rio, Escola de Ciências,  
Educação, Letras, Artes e Humanidades  
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e  
Computacional  
Duque de Caxias – RJ

### **Valessa Leal Lessa de Sá Pinto**

Universidade do Grande Rio, Escola de Ciências,  
Educação, Letras, Artes e Humanidades  
Grupo de Pesquisa em Matemática Discreta e  
Computacional  
Duque de Caxias – RJ

**RESUMO:** A Teoria dos Grafos é uma área da Matemática Discreta que permite modelar

e solucionar problemas reais através do desenvolvimento de algoritmos eficientes. Este trabalho apresenta um novo conceito, as Famílias Consistentes, que podem se juntar a esta Teoria, possibilitando a criação de modelos que poderão ser aplicados na resolução de várias situações. Aqui, o objetivo principal é desenvolver uma heurística para a coloração total de grafos, procurando respeitar a conjectura de Vizing. Para isso, definimos inicialmente alguns termos necessários para a identificação destas famílias. Em seguida, provamos quatro proposições relativas a este novo conceito, e finalizamos o texto fazendo a conexão entre estas famílias e a coloração total de grafos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Famílias consistentes. Conjectura de Vizing. Coloração total de grafos.

**ABSTRACT:** The Theory of Graphs is an area of Discrete Mathematics, which allows modeling and solving real problems through the development of efficient algorithms. This paper presents a new concept, Consistent Families, which can join to this theory, enabling the creation of models that can be applied in the resolutions of several situations. Here, the main aim is to develop a heuristic to the total coloring of graphs, respecting the Vizing's conjecture. In order to do it, initially, we defined some necessary terms for the identification of

these families. After that, we proved four propositions related to this new concept, and we finished the text by making the connection between these families and the total coloring of the graph.

**KEYWORDS:** Consistent Families. Vizing's conjecture. Total coloring of graphs.

## 1 | INTRODUÇÃO

A Matemática Discreta e o estudo de sistemas finitos assumem um papel importante, entre outros fatores, porque a tecnologia necessária à era da computação é basicamente uma estrutura discreta, na qual, muitas de suas propriedades são entendidas a partir dos sistemas matemáticos finitos. Assim, a exploração de tópicos desta parte da Matemática tem muito a oferecer e as áreas aqui abordadas, Famílias Consistentes e Teoria dos Grafos, permitem o desenvolvimento de modelos matemáticos que auxiliam na resolução de problemas reais.

Segundo Lozano *et. al.* (2016), o conhecimento destes campos da Matemática Discreta também possibilita a compreensão de planilhas eletrônicas e *softwares*, o domínio da escrita matemática formal e a linguagem computacional, e a elaboração de argumentos matemáticos. Estas teorias contribuem com a construção das ideias básicas que permeiam os processos algorítmicos e é a base da ciência da computação moderna. Existem diversas heurísticas que tratam do problema da coloração em grafos, tais como Chams *et. al.* (1987), Hertz e Werra (1987) e Galinier e Hertz (2006), e neste trabalho, apresentamos uma nova heurística para obter a coloração total de um grafo, com no máximo  $\Delta + 2$  cores (conjectura de Vizing), baseada no conceito de famílias consistentes.

Este texto está organizado da seguinte forma: inicialmente apresentamos os conceitos de família finita, subfamília, multiplicidade, igualdade de famílias e família robusta, que são necessários para a introdução dos conceitos de família consistente, elemento crítico e família associada. Em seguida, enunciaremos e provamos quatro proposições que são úteis para a identificação e construção das famílias consistentes. Logo após, tratamos dos conceitos básicos de teoria dos grafos e coloração, e finalizamos o trabalho fazendo a conexão entre estas famílias e o processo de coloração total de grafos.

## 2 | DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES BÁSICAS DAS FAMÍLIAS CONSISTENTES

Nesta seção, apresentamos os conceitos de família finita, subfamília, multiplicidade, igualdades de famílias, família robusta, família consistente e elementos crítico, que dão suporte para a leitura do restante do trabalho.

**Definição 2.1.** (Família finita). Uma família finita de partes de  $A$ , é uma função  $f: I_n \rightarrow P(A)$ , onde  $I_n$  denota o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ , para algum  $n \in P(A)$  denota o conjunto das partes de  $A$  e  $f = [f(1), f(2), \dots, f(n)]$  denota a família  $f$ .

Daqui em diante usaremos simplesmente a palavra família, para denotar uma família finita de partes de  $A$ .

**Definição 2.2.** (Subfamília). Sejam  $f: I_n \rightarrow P(A)$  e  $g: I_m \rightarrow P(A)$  famílias. Diz-se que  $g$  é subfamília de  $f$ , se existe uma função injetiva  $h: I_m \rightarrow I_n$ , tal que  $g(i) = f(h(i))$ , para todo  $i \in I_m$ . Neste caso, usamos a notação  $g < f$ .

Antes de continuar com as definições, vamos introduzir algumas notações necessárias para a clareza do texto:

- $f \vee g$  denota a menor família  $h$ , tal que  $f < h$  e  $g < h$ , ou seja, se existe outra família  $u$ , tal que  $f < u$  e  $g < u$ , então  $h < u$ ;
- $f \wedge g$  denota a maior família  $h$ , tal que  $h < f$  e  $h < g$ , ou seja, se existe outra família  $u$ , tal que  $u < f$  e  $u < g$  então  $u < h$ ;
- $\bigcup (f)$  denota o conjunto  $\bigcup_{i=1}^n f(i)$ ;
- $|X|$  denota a cardinalidade do conjunto  $X$ ;  $[X]^n$  denota a família  $\overbrace{[X, X, \dots, X]}^{n \text{ vezes}}$ ;
- $|f|$  denota a cardinalidade do domínio da família  $f$ , i.e. se  $f: I_n \rightarrow P(A)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f|$  denota o número  $n$ ;
- $X \in f$  denota que existe  $i \in I_n$ , tal que  $f(i) = X$  onde  $f: I_n \rightarrow P(A)$

**Definição 2.3.** (Multiplicidade). Sejam  $f$  uma família e  $X \in f$ . Diz-se que  $X$  tem multiplicidade  $n$  em  $f$ , se a família  $[X]^n$  é subfamília de  $f$ , mas a família  $[X]^{n+1}$  não é subfamília de  $f$ . Denotamos a multiplicidade do conjunto  $X$  na família  $f$  por  $\mu_f(x)$

**Definição 2.4.** (Igualdade de famílias). Dadas duas famílias  $f$  e  $g$  diz-se que  $f = g$  se  $f < g$  e  $g < f$ .

**Definição 2.5.** (Família robusta). Uma família  $f$  é dita robusta, se  $\bigcup (f) > |f|$

**Definição 2.6.** (Família consistente). Uma família  $f: I_n \rightarrow P(A)$  é dita consistente, se toda subfamília de  $f$  é robusta.

**Definição 2.7.** (Elemento crítico). Sejam  $f = [X_1, X_2, \dots, X_n]$  uma família consistente e  $i \in I_n$ . Um elemento  $x \in A$  é dito crítico de  $X_i$  com relação a  $f$  ou simplesmente crítico de  $X_i$  (se não existir ambiguidade), se as seguintes condições são verificadas:

1.  $x \in X_i$
2. A família  $f' = [X_1, X_2, \dots, (X_i - \{x\}), \dots, X_n]$  não é consistente.

### 3 | ALGUNS RESULTADOS ACERCA DAS FAMÍLIAS CONSISTENTES

Nesta seção, apresentamos quatro importantes proposições acerca das famílias consistentes, além de uma nova definição, família associada. Estes resultados dão

subsídios para a construção da heurística desenvolvida na seção 6.

**Proposição 3.1.** Dadas duas famílias  $f$  e  $g$ , então  $|\cup(f \vee g)| = |\cup(f)| + |\cup(g)| - |(\cup(f)) \cap (\cup(g))|$  e  $|f \vee g| = |f| + |g| - |f \wedge g|$ .

*Demonstração.* Dado que para quaisquer conjuntos  $X$  e  $Y$  tem-se que  $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ . Tomando  $X = \cup(f)$  e  $Y = \cup(g)$ , o primeiro resultado é imediato. Adicionalmente, temos que  $|f| = \sum_{x \in P(A)} \mu_f(x)$ ,  $|g| = \sum_{x \in P(A)} \mu_g(x)$ ,  $\mu_{f \vee g}(x) = \max\{\mu_f(x), \mu_g(x)\}$ ,  $\mu_{f \wedge g}(x) = \min\{\mu_f(x), \mu_g(x)\}$  e  $\max\{a, b\} = a + b - \min\{a, b\}$  para quaisquer  $a$  e  $b$ , de onde segue o segundo resultado.

**Proposição 3.2.** Sejam  $f = [X_1, X_2, \dots, X_n]$  uma família consistente,  $i_0 \in I_n$  e  $x \in X_{i_0}$  elemento crítico de  $X_{i_0}$  então existe uma subfamília  $g: I_m \rightarrow P(A)$  de  $f$ , tal que:

1.  $X_{i_0} \in g$ ,
2.  $|\cup(g)| = m + 1$  e
3.  $x$  é crítico de  $X_{i_0}$  com relação a  $g$ .

*Demonstração.* Como  $x$  é crítico de  $X_{i_0}$  então a família  $f' = [X_1, X_2, \dots, (X_{i_0} - \{x\}), \dots, X_n]$  não é consistente, i.e. existe uma subfamília de  $g' = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]$  que não é robusta. É claro que  $(X_{i_0} - \{x\}) \in g'$  pois caso contrário  $g'$  seria subfamília de  $f$  e toda subfamília de  $f$  é robusta. Seja então  $j_0$ , tal que  $Y_{j_0} = (X_{i_0} - \{x\})$ . A subfamília  $g = [Y_1, Y_2, \dots, Y_{j_0} \cup \{x\}, \dots, Y_m]$  de  $f$  satisfaz as condições desejadas. De fato, basta observar que  $|\cup(g) - \{x\}| = |\cup(g')|$ , pois  $g$  é robusta e  $g'$  não. Logo,  $|\cup(g)| = |\cup(g')| + 1$ , de onde se deduz facilmente que  $|\cup(g)| = m + 1$ .

**Proposição 3.3.** Dadas duas famílias  $f$  e  $g$ , então  $\cup(f \wedge g) \subset (\cup(f) \cap \cup(g))$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \cup(f \wedge g)$  então existe um conjunto  $X \in \cup(f \wedge g)$  tal que  $x \in X$ . Agora, se  $X \in \cup(f \wedge g)$  então  $X \in f$  e  $X \in g$ . Daí,  $X \in (\cup(f) \cap \cup(g))$ . Logo,  $\cup(f \wedge g) \subset (\cup(f) \cap \cup(g))$ .

**Definição 3.1.** (Família associada). Dados uma família consistente  $f$  e um elemento crítico  $x$  de  $X \in f$ . Uma subfamília  $g$  de  $f$  é dita associada a  $x$  relativamente a  $X$  e  $f$ , ou simplesmente associada a  $x$ , se não existir ambiguidade, se satisfaz as seguintes condições:

1.  $|\cup(g)| = |g| + 1$
2.  $x$  é crítico para  $X$  com relação a  $g$  e
3. Se existe uma subfamília de  $g'$  satisfazendo as condições 1 e 2, então  $g' = g$

**Proposição 3.4.** Sejam  $f = [X_1, X_2, \dots, X_n]$  uma família consistente e  $i_0 \in I_n$ . Então uma e somente uma das afirmações seguintes é verdadeira:

1.  $|X_{i_0}| = 2$  ou



2.  $X_{i_0}$  contém no máximo um elemento crítico.

*Demonstração.* Sejam  $g = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]$  uma subfamília de  $f$  e  $x$  um elemento crítico de  $X_{i_0}$  com relação a  $f$ , de forma que  $g$  é associada a  $x$  com relação a  $f$  e  $X_{i_0}$ . Sem perda de generalidade, suponhamos que  $X_{i_0} = Y_m$  e  $g' = [Y_1, Y_2, \dots, Y_{m-1}]$ . Antes de prosseguir com a demonstração da proposição, é necessário provar alguns fatos:

**Fato 1.**  $x \notin \cup(g')$ .

*Prova.* Suponhamos que  $x \in \cup(g')$  então  $g_1 = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m - \{x\}]$  é robusta, mas não consistente, logo existe  $g_2 = [W_1, W_2, \dots, W_s]$  subfamília de  $g_1$  que não é robusta. Sem perda de generalidade sejam  $W_s = (Y_m - \{x\})$  e  $g_3 = [W_1, W_2, \dots, W_s \cup \{x\}]$ . Se  $x \in \cup(g_2)$  então  $g_3$  não é robusta, mas  $g_3$  é uma subfamília de  $f$  o que é uma contradição, logo  $x \notin \cup(g_2)$ . Como  $x \in \cup(g')$  então  $g_3 < g$ ,  $|g_3| = |\cup(g_3)| + 1$ ,  $x$  é crítico para  $W_s - \{x\} = X_{i_0}$  com relação a  $g_3$  e  $g_3^{-1} \neq g$ , o que é uma contradição.

**Fato 2.**  $(X_{i_0} - \{x\}) \subset \cup(g')$ .

*Prova.* Suponhamos que existe  $Z \in X_{i_0}$  tal que  $z \neq x$  e  $z \notin \cup(g')$ . Pelo fato 1, temos  $x \notin \cup(g')$ , daí  $|\cup(g')| \leq |\cup(g)| - 2 = (m+1) - 2 = m - 1$  e  $|g| = |g| - 1 = -1$  portanto  $g'$  não é robusta. Mas  $g' < f$  logo  $f$  não pode ser consistente, o que é um absurdo.

**Fato 3.** A família  $g_1 = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m - \{x\}]$  não é robusta.

*Prova.* Como  $x \notin \cup(g')$  e  $|\cup(g)| = m+1$  então  $|\cup(g_1)| = m$  Como  $|g_1| = m$  então  $g_1$  não é robusta.

Continuamos agora com a demonstração da proposição. Se  $|X_{i_0}| = 2$  então para qualquer elemento  $u \in X_{i_0}$  a família  $[X_{i_0} - \{u\}]$  não é robusta, pois os dois elementos de  $X_{i_0}$  são críticos.

Se  $|X_{i_0}| > 2$  suponhamos que existe  $y \neq x$ , outro elemento crítico de  $X_{i_0}$  e  $h = [Z_1, Z_2, \dots, Z_t]$  a família associada a  $y$  com relação a  $X_{i_0}$  e  $f$ . Novamente por facilidade, suponhamos que  $X_{i_0} = Z_t$  e seja  $h' = [Z_1, Z_2, \dots, Z_{t-1}]$  Pela proposição 3.1, temos que  $|g \vee h| = |g| + |h| - |g \wedge h|$  e  $|\cup(g \vee h)| = |\cup(g)| + |\cup(h)| - |\cup(g) \cap \cup(h)|$ . Como  $g = g' \cup \{X_{i_0}\}$  e  $h = h' \cup \{X_{i_0}\}$  então  $|g \vee h| = m + t - (1 + |(g' \wedge h')|)$ . Por outro lado,  $|\cup(g \vee h)| = (m+1) + (t+1) - (2 + |\cup(g') \cap \cup(h')|) = m + t - |\cup(g') \cap \cup(h')|$ . Basta observar que pelo fato 1,  $x \notin \cup(g')$  e  $y \notin \cup(h')$  e pelo fato 2  $(X_{i_0} - \{x\}) \subset \cup(g')$  e  $(X_{i_0} - \{y\}) \subset \cup(h')$  Como  $|X_{i_0}| > 2$  então existe pelo menos um elemento  $z \in X_{i_0}$  tal que  $z \neq x$  e  $z \neq y$ . Pelo fato 2,  $z \in \cup(g')$  e  $z \in \cup(h')$  então  $|\cup(g') \cap \cup(h')| \geq 1$

Agora, as famílias  $g'$  e  $h'$  não têm elementos em comum (I) ou  $(g' \wedge h')$  é robusta (II), pois  $(g' \wedge h')$  é subfamília de  $f$ . De (I),  $|g \vee h| = m + t - 1$  e  $|\cup(g \vee h)| = m + t - |\cup(g') \cap \cup(h')|$  mas  $|\cup(g') \cap \cup(h')| \geq 1$  então  $|\cup(g \vee h)| \leq m + t - 1 = |g \vee h|$  o que é uma contradição, pois  $(g \vee h)$  é subfamília de  $f$ . De (II),  $|g \vee h| = m + t - (1 + |(g' \wedge h')|)$  e  $|\cup(g \vee h)| = m + t - |\cup(g') \cap \cup(h')|$ . Pela proposição 3.3,  $|\cup(g \vee h)| \leq m + t - |\cup(g' \wedge h')|$  Como  $(g' \wedge h')$  é robusta, então  $|\cup(g' \wedge h')| \geq 1 + |(g' \wedge h')|$  Logo,  $|\cup(g \vee h)| \leq |g \vee h|$  o que é uma contradição, pois  $(g \vee h)$  é subfamília de  $f$ .

**Exemplo 3.1.** (Famílias robustas, consistentes, elemento crítico, família associada).

1.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $f = [\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}]$ .  
 $n = 3$ ,  $f(1) = \{1, 2, 3\}$ ,  $f(2) = \{2, 3\}$ ,  $f(3) = \{2, 4\}$ .
2.  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $g = [\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 4\}]$ .  
 $n = 3$ ,  $g(1) = \{1, 2, 3\}$ ,  $g(2) = \{3, 4\}$ ,  $g(3) = \{3, 4\}$ .

No exemplo 3.1, a família  $f$  é robusta e consistente, vejamos:

$|f| = 3 < |\cup(f)| = |\{1, 2, 3, 4\}| = 4$ , logo  $f$  é robusta. Como  $\cup(\lceil f(1), f(2) \rceil) = 3$ ,  $\cup(\lceil f(1), f(3) \rceil) = 4$ ,  $\cup(\lceil f(2), f(3) \rceil) = 3$  e  $\cup(\lceil f(1) \rceil) = 3$ ,  $\cup(\lceil f(2) \rceil) = \cup(\lceil f(3) \rceil) = 2$ ,  $f$  também é consistente.

Já a família  $g$  é robusta, mas não é consistente, vejamos:

$|g| = 3 < |\cup(g)| = 4$ , logo  $g$  é robusta. Mas  $|\lceil g(2), g(3) \rceil| = 2 = |\cup(\lceil g(2), g(3) \rceil)|$ , logo  $g$  não é consistente.

No mesmo exemplo, 1 é elemento crítico de  $\{1, 2, 3\}$  para a família  $f$ , pois a família  $\{\{2, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$  não é consistente. A família associada a 1 é  $\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}\}$

## 4 | CONCEITOS BÁSICOS DE TEORIA DOS GRAFOS

Nesta seção, são apresentadas definições básicas e terminologias da teoria de grafos utilizadas neste trabalho. Outros conceitos sobre grafos podem ser encontrados em Bondy e Murty (1976), Yap (1986), Yap (1996) e Boaventura Netto (2003).

Denota-se por  $G(V, E)$  um grafo  $G$  composto por um conjunto não vazio de vértices  $V$  e um conjunto de arestas  $E$ , tais que cada aresta conecta dois vértices. A Figura 4.1 ilustra um grafo com 6 vértices e 10 arestas.

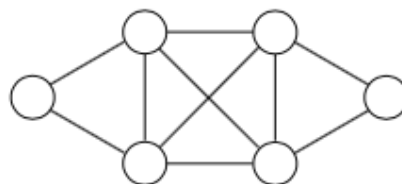


Figura 4.1. Um grafo  $G(V, E)$  com 6 vértices e 10 arestas.

Neste trabalho, a palavra grafo, tem o significado de grafos simples sem laços. Para cada vértice  $v$  o número de arestas incidentes em  $v$  é dito grau do vértice  $v$  e denotado por  $d(v)$ . O grau mínimo será denotado por  $\delta$ , enquanto o grau máximo é representado por  $\Delta$ . Um grafo  $G(V, E)$ , tal que todos os seus vértices tenham o mesmo grau  $k$  é chamado de grafo  $k$ -regular. Na Figura 4.1, temos  $\delta = 2$  e  $\Delta = 4$ , enquanto que na Figura 4.2, o grafo é 4-regular com 8 vértices, 16 arestas e  $\delta = \Delta = 4$ .

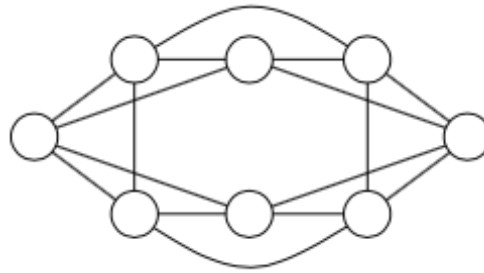


Figura 4.2. Um grafo 4-regular com 8 vértices e 16 arestas.

Um caminho em um grafo  $G(V, E)$  é uma sequência finita e não nula  $P_k = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$  cujos termos são alternativamente vértices e arestas, tais que, para  $i = 1, \dots, k$ , os extremos de  $e_i$  são  $v_{i-1}$  e  $v_i$  e nenhum elemento de  $P_k$  se repete. Neste caso, diz-se que o caminho  $P_k$  liga ou conecta os vértices  $v_0$  e  $v_k$ . Se uma sequência satisfaz as condições acima, e, além disso,  $v_k = v_0$ , então a sequência é chamada de ciclo  $C_k$ .

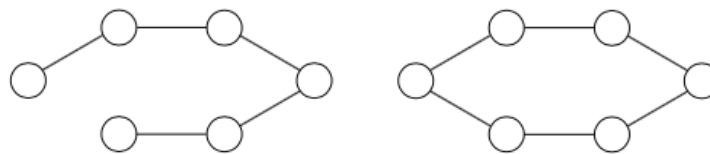


Figura 4.3. Um caminho  $P_6$  e um ciclo  $C_6$ .

## 5 | COLORAÇÃO EM GRAFOS

Nesta seção, são apresentados os conceitos de coloração de vértices, coloração total e coloração total equilibrada que servem de suporte para o restante do trabalho. Para um estudo mais aprofundado, pode-se consultar Yap (1996), Lozano (2005), Lozano *et. al.* (2009) e Siqueira (2011).

Dado um grafo  $G(V, E)$ , uma coloração de vértices de  $G$  é uma aplicação do conjunto de vértices  $V$  em um conjunto de cores  $C = \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Uma coloração de vértices com  $k$  cores, é chamada de  $k$ -coloração de vértices, e será dita própria, se nenhum par de vértices adjacentes tiver a mesma cor associada.

Uma coloração total de  $G$  é uma aplicação do conjunto  $E \cup V$  em um conjunto de cores  $C = \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Uma coloração total com  $k$  cores, é chamada de  $k$ -coloração total, e será própria se nenhum par de elementos incidentes ou adjacentes tiver a mesma cor associada. Esta coloração total será equilibrada se, para todo par de cores  $c_1$  e  $c_2$ , tem-se  $|a(c_1) - a(c_2)| \leq 1$ , onde,  $a(c_i)$  representa o número de aparições da cor  $c$  na coloração. A Figura 5.1 ilustra uma 4-coloração total equilibrada, com as cores 1, 2, 3 e 4. Nela, observa-se  $a(1) = a(2) = a(4) = 4$  e  $a(3) = 5$ , o que de fato caracteriza uma coloração equilibrada.

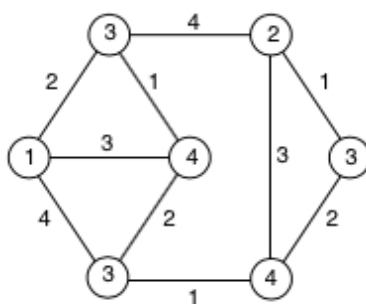


Figura 5.1. Uma 4-coloração total equilibrada.

## 6 | COLORAÇÃO TOTAL A PARTIR DAS FAMÍLIAS CONSISTENTES

Conceitos introdutórios sobre grafos e coloração foram apresentados nas seções 4 e 5. Conceitos mais específicos sobre coloração e coloração com folga de ordem  $k$ , podem ser vistos em Yap (1996), Lozano *et. al.* (2009), Lozano *et. al.* (2011) e Lozano *et. al.* (2016).

Abaixo ilustramos o passo a passo da coloração total de um grafo 3-regular, a partir do conceito das famílias consistentes. Segundo Lozano *et. al.* (2009) todo grafo  $G \neq C_5$  pode ser colorido com folga 2 com no máximo  $\Delta + 2$  cores. Iniciamos gerando uma coloração de vértices com folga 2, conforme mostra a Figura 6.1.

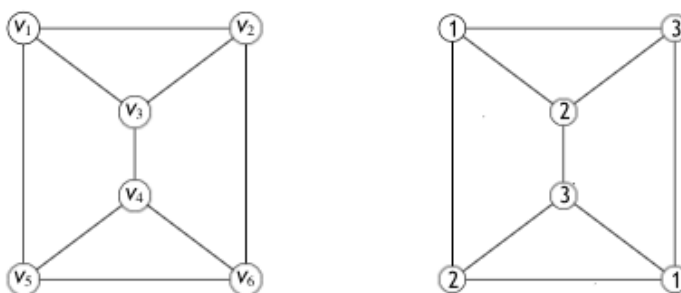


Figura 6.1. Um grafo 3-regular e sua respectiva coloração de vértices com folga 2

Na sequência associamos a cada aresta um conjunto de cores permissíveis a ela, respeitando a conjectura de Vizing, e a cada vértice associamos a família formada pelos conjuntos de cores correspondentes as arestas incidentes nele. É fácil ver que estas famílias são todas consistentes, uma vez que a coloração é com folga 2. O próximo passo é destacar os elementos críticos das famílias consistentes relacionadas a cada vértice. Optamos por inserir um sobreíndice no elemento crítico relativo à família ligada ao vértice de mesmo subíndice.

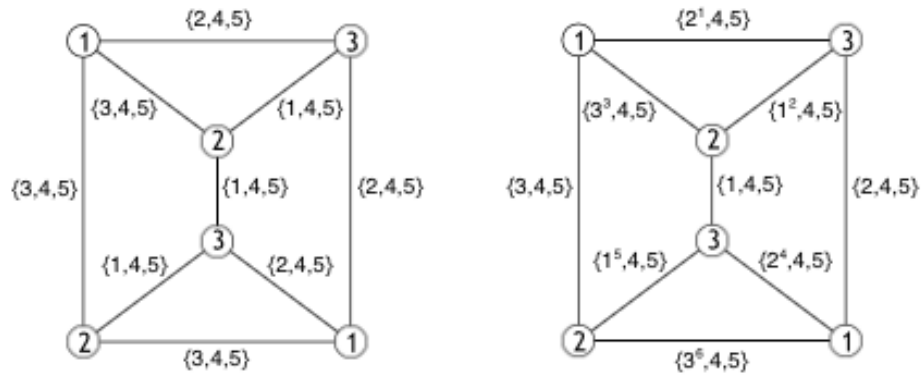


Figura 6.2. Conjunto de cores permissíveis a cada aresta e seus elementos críticos.

Em seguida iniciamos a coloração das arestas, escolhe-se uma aresta do grafo, por exemplo, aresta  $v_2v_6$  e atribui-se a ela uma cor que não elimine nenhum elemento crítico das famílias relacionadas aos seus vértices extremos. Cada aresta colorida é marcada (nas figuras aparecem com linhas mais espessas) e a cor escolhida para esta aresta é removida dos conjuntos associados as arestas adjacentes a ela. Note que a cor escolhida em cada passo mantém a consistência de todas as famílias associadas aos vértices, pois não foram removidos os elementos críticos. Esse processo se repete até a coloração total do grafo ou até não existir uma aresta factível de ser colorida por esse método. Neste caso, se completa a coloração com o menor número de cores possível.

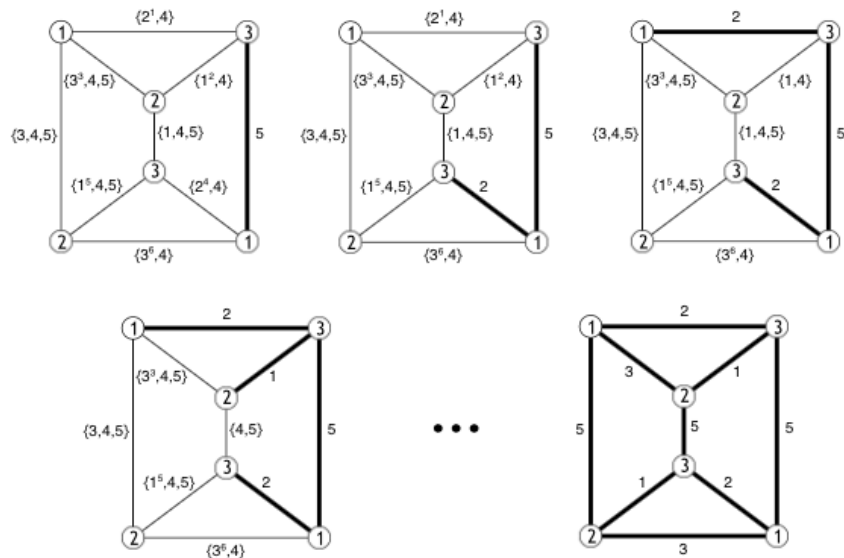


Figura 6.3. Processo de coloração das arestas.

## 7 | CONCLUSÕES

Muitos conceitos da Matemática Discreta, como estes que apresentamos aqui, são considerados assuntos indispensáveis ao desenvolvimento das ciências e da

tecnologia. Eles são instrumentos fundamentais para resolver problemas de gestão e de computação em atividades produtivas, como por exemplo, no transporte, telecomunicação, informática, entre outras.

Este trabalho, como salientamos, apresentou resultados que mostram o potencial do conceito de famílias consistentes no desenvolvimento de uma heurística para a coloração total de grafos, procurando respeitar a conjectura de Vizing. Ressaltamos ainda, que o fato de estarmos colorindo totalmente um grafo, não impede a busca por uma coloração total e equilibrada, conforme pode ser observado no exemplo acima.

Para trabalhos futuros, pretendemos apresentar novas proposições que garantam a coloração total de subfamílias de grafos, respeitando a conjectura de Vizing, e utilizando o conceito de famílias consistentes.

## REFERÊNCIAS

BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos: Teorias, Modelos Algoritmos**. Rio de Janeiro, Edgard Blücher, 2003.

BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. *Graph Theory with Applications*. New York, North-Holland, 1976.

CHAMS, M., HERTZ, A., WERRA, D. "Some experiments with simulated annealing for coloring graph", *European Journal of Operational Research*, v.32, 260-266, 1987.

GALINIER, P., HERTZ, A. "A survey of local search methods for graph coloring", *Computers & Operations Research*, v.33, 2547-2562, 2006.

HERTZ, A., WERRA, D. "Using tabu search techniques for graph coloring", *Computing*, v.39, 345-351, 1987.

LOZANO, A. R. G. **Coloração total equilibrada de grafos**. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2005.

LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., WAGA, C., MARKENZON, L. "Coloração de Vértices com Folga". In: *XLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Porto Seguro. Anais do XLI SBPO, pp. 3084-3091, 2009.

LOZANO, A. R. G., FRIEDMANN, C. V. P., SIQUEIRA, A. S. "Relação entre coloração de vértices com folga e coloração total equilibrada", *Almanaque Unigranrio de Pesquisa*, v.1, 103-106, 2011.

LOZANO, A. R. G., SIQUEIRA, A. S., FRIEDMANN, C. V. P., JURKIEWICZ, S. "Relationship Between Equitable Total Coloring and Range Coloring in Some Regular Graphs", **Pesquisa Operacional**, v.36, 101-111, 2016.

LOZANO, A. R. G., SIQUEIRA, A. S., MATTOS, S. R. P., JURKIEWICZ, S. "Produto Funcional de Grafos: Um Modelo para conexão de sistemas multiagentes", *Tendências em Matemática Discreta e Computacional*, v.17, 341-352, 2016.

SIQUEIRA, A. S. **Coloração total equilibrada em subfamílias de grafos regulares**. Tese de Doutorado em Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2011.

YAP, H. P. *Some topics in graph theory*. London, Cambridge University Press, 1986.

YAP, H. P. *Total colorings of graphs*. Berlin, Springer, 1996.

## BIBLIOTECA ESTATÍSTICA DESCRITIVA INTERVALAR UTILIZANDO PYTHON

### Lucas Mendes Tortelli

Universidade Federal de Pelotas, CDTec  
Pelotas – RS

### Dirceu Antonio Maraschin Junior

Universidade Federal de Pelotas, CDTec  
Pelotas – RS

### Alice Fonseca Finger

Universidade Federal de Pelotas, CDTec  
Pelotas – RS

### Aline Brum Loreto

Universidade Federal de Santa Maria, UFSM  
Cachoeira do Sul – RS

**RESUMO:** Uma alternativa ao processamento de dados utilizando aritmética de ponto flutuante está no emprego da aritmética intervalar. Com isto, existe a possibilidade de controle de erros numéricos gerados, os quais adicionam incertezas que comprometem a confiabilidade dos resultados. Nesse escopo, apresenta-se o desenvolvimento de uma biblioteca para o uso de indicadores estatísticos descritivos intervalares. Desenvolvida na linguagem Python, esta biblioteca comporta operações de média, mediana, amplitude total, variância, desvio padrão, covariância, coeficiente de correlação e coeficiente de variação; previamente definidas para parâmetros intervalares. Disponibilizada nos repositórios

da linguagem, o desenvolvimento da biblioteca visa promover a possibilidade de cálculos estatísticos com o máximo de exatidão.

**PALAVRAS-CHAVE:** Indicadores estatísticos, aritmética intervalar, intervalos, Python.

**ABSTRACT:** Alternative to data processing using floating-point arithmetic is the use of interval arithmetic. Therefore, there is the possibility of control of generated numerical errors, which add uncertainties and compromise the confiability of the results. In this scope, the development of a library for the use of interval statistical indicators is presented. Developed in Python language, this package includes operations of average, median, full span, variance, standard deviation, covariance, correlation coefficient and coefficient of variation; previously defined for interval parameters. Available in language repositories, the development this library aims to promote the possibility of statistical calculations with maximum of accuracy.

**KEYWORDS:** Statistical indicators, interval arithmetic, intervals, Python.

### 1 | INTRODUÇÃO

A computação científica é largamente utilizada quando há necessidade de exatidão e confiabilidade. Ao representar dados numéricos no sistema de ponto flutuante, estes são

aproximados para um subconjunto finito dos números reais. Através desta aproximação ocorrem erros pela impossibilidade de a máquina representar estes valores.

A matemática intervalar, proposta por Moore (1966), surge para automatizar o cálculo do erro computacional científico com limites confiáveis. Nesta forma de representação numérica os valores pontuais são representados por um intervalo  $[x]$  que os contenha. Todo erro originado no processamento dos valores é tratado pela aritmética intervalar.

Este trabalho visa a criação de uma Biblioteca Estatística Descritiva Intervalar na linguagem Python, fornecendo para a literatura formas de garantir resultados exatos, os quais estão contidos nos intervalos, além de controlar o erro aritmético gerado.

## 2 | METODOLOGIA E RESULTADOS

A Estatística Descritiva, que tem como objetivo a descrição e organização dos dados de uma população ou amostra. Devido à exigência de exatidão do resultado em cada etapa deste processo, se faz necessário o uso de técnicas que controlem o erro numérico gerado. A fim de alcançar tais objetivos, utiliza-se a aritmética intervalar (MOORE, 1996).

Para a realização da implementação de dados intervalares, o ambiente de desenvolvimento deve conter o tipo de dado intervalar com as definições das operações e funções básicas desta aritmética. O IntPy consiste em uma biblioteca que importa o tipo intervalar dentro da linguagem de programação Python (VARJÃO, 2011).

Os indicadores estatísticos descritivos intervalares foram implementados, conforme definido por Loreto (2006). Salienta-se que a biblioteca também implementa os cálculos do ponto médio intervalar (conversão do resultado intervalar em pontual), do erro absoluto, do erro relativo e do diâmetro intervalar. A Figura 1 apresenta a execução de cada indicador descritivo definido na biblioteca, como também os resultados obtidos em cada etapa do processamento. No passo (a) ocorre a importação da biblioteca, na etapa (b) são declarados dois conjuntos de dados (data1 e data2) e a respectiva representação intervalar com precisão  $1 \times 10^{-2}$ . No passo (c) ocorre a chamada da rotina de cada indicador estatístico sobre os dados intervalares no passo (b). A etapa (d) apresenta os resultados.



```

(a)>>> from intStatistics import *
(b)>>> data1 = [5.0,12.0,7.0,47.0,7.0,79.0,10.0]
    >>> data2 = [16.0,68.0,21.0,27.0,25.0,97.0,27.0]
    >>> data1 = initInterval(data1,0.01)
    >>> data2 = initInterval(data2,0.01)
(c)>>> md = iAverage(data1)
    >>> med = iMedian(data1)
    >>> at = iRange(data1)
    >>> va = iVariance(data1)
    >>> dp = iSDeviation(data1)
    >>> co = icoVariance(data1,data2)
    >>> cc = icoefCorrelation(data1,data2)
    >>> cv = icoefVariance(data1)
(d)>>> md
[23.84714285714285, 23.867142857142866]
>>> med
[9.989999999999998, 10.010000000000002]
>>> at
[74.0, 74.0]
>>> va
[689.5138693877544, 691.3032571428579]
>>> dp
[26.258596104661695, 26.29264644616167]
>>> co
[530.0893795918361, 531.6665224489802]
>>> cc
[0.7166765008646055, 0.720623030645976]
>>> cv
[1.1001985558905356, 1.1025491231242543]

```

Figura 1. Exemplo de execução da biblioteca.

Salienta-se que os resultados apresentados como exemplo, foram realizados com dados populacionais. Em relação à exatidão numérica, todos valores reais foram compreendidos nos intervalares obtidos pela biblioteca.

### 3 | CONCLUSÕES

A biblioteca desenvolvida neste trabalho visa fornecer uma ferramenta de fácil acesso e manipulação para processamento de dados estatísticos, além de garantir resultados exatos e controlar o erro gerado, uma vez que se utiliza a aritmética intervalar no lugar da aritmética real. Essa encontra-se disponível nos repositórios da linguagem Python.

### REFERÊNCIAS

LORETO, A. B. **Análise da Complexidade Computacional de Problemas de Estatística Descritiva com Entradas Intervalares**. Tese de Doutorado, UFRGS, (2006).

MOORE, R. E. **Interval Analysis**. Englewood Cliffs, 1966.

VARJÃO, F.R.G. **Computação científica autovalidável em Python**. Dissertação de Mestrado em Computação, UFPEL, 2011.

## COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS EXATOS FATORAÇÃO LU DOOLITTLE E FATORAÇÃO DE CHOLESKY

### **Matheus Emanuel Tavares Sousa**

Universidade Federal Rural do Semiárido,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia  
Elétrica  
Mossoró – RN

### **Matheus da Silva Menezes**

Universidade Federal Rural do Semiárido,  
Departamento de Ciências Naturais, Matemática e  
Estatística  
Mossoró – RN

### **Ivan Mezzomo**

Universidade Federal Rural do Semiárido,  
Departamento de Ciências Naturais, Matemática e  
Estatística  
Mossoró – RN

### **Sarah Sunamyta da Silva Gouveia**

Universidade Federal Rural do Semiárido,  
Departamento de Engenharias  
Angicos – RN

**RESUMO:** O presente trabalho tem por objetivo efetuar um comparativo entre dois métodos numéricos exatos (ou diretos) de resolução de sistemas de equações lineares, são eles fatoração LU e fatoração de Cholesky. Efetuamos um experimento computacional usando o software SciLab, comparando o tempo de execução e o erro máximo dos métodos. Foram utilizados oito problemas cuja ordem das matrizes quadradas variou de 237 a 729. Ao fim do trabalho concluiu-se que se os problemas

atenderem as restrições impostas por Cholesky, o tempo de execução será menor, já, se as restrições não forem atendidas, a Fatoração LU aparece como uma boa opção.

**PALAVRAS-CHAVE:** Equações Lineares. Sistemas de Equações Lineares. Fatoração.

**ABSTRACT:** The objective of this work is to compare two exact numerical (or direct) methods of solving systems of linear equations, which are LU factorization and Cholesky factorization. We performed a computational experiment using the SciLab software, comparing the execution time and the maximum error of the methods. Eight problems were used whose order of square matrices ranged from 237 to 729. At the end of the paper it was concluded that if the problems meet the constraints imposed by Cholesky, the execution time will be shorter, if the restrictions are not complied, the LU factorization appears as a good option.

**KEY WORDS:** Linear Equations. Linear System Equations. Factorization.

### 1 | INTRODUÇÃO

Em vários problemas, principalmente na engenharia, são aplicados sistemas lineares, seja implicitamente ou explicitamente na forma de matrizes, onde a obtenção da solução

desses problemas é utilizada em sistemas práticos da engenharia, como, por exemplo, a construção de uma estrutura, determinação da tensão em redes elétricas, sistemas massa-mola, cálculo das reações numa treliça, etc. (FRANCO, 2006).

Com a presença dos sistemas de equações lineares fazem parte de muitas situações na área científica, fica claro que é de grande relevância o estudo e entendimento dos métodos de resolução de sistemas de equações lineares, pois, como existem vários métodos, é preciso analisar a situação em que cada um melhor se encaixa, uma vez que um bom resultado apresentado na resolução de algum problema, pode não se repetir na resolução de outro, daí a importância de estar muito bem entendido o funcionamento do método, para que assim não se perca tempo ou até mesmo investimentos por causa da má escolha no momento de resolver a situação, e, também por possuir aplicação prática em muitas áreas.

Sabendo-se então que é preciso resolver sistemas de equações lineares, os métodos numéricos aparecem como ferramenta para isso.

Cada método é indicado por possuir vantagens e desvantagens em situações específicas, uma vez que é importante que primeiro se conheça as condições sob as quais a solução existe, pois, de acordo com Arenales (2008) não adianta tentar obter uma solução se não há nenhuma. Além disso, é necessário analisar a confiabilidade da solução encontrada, seja verificando o resíduo e os critérios de parada em ambos os métodos (RUGGIERO, 1996).

Nesse contexto, foram analisados dois métodos numéricos exatos, bem como suas aplicabilidades de acordo com as condições iniciais exigidas em suas formulações, por meio de simulações computacionais a fim de verificar o desempenho numérico de cada método.

## 2 | EQUAÇÃO LINEAR E SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Uma equação é linear se cada termo contém não mais do que uma variável e cada variável aparece na primeira potência e tem a forma geral apresentada na Equação 1.

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = b \quad (1)$$

com  $\alpha_i$  sendo os coeficientes da equação,  $x_n$  são as incógnitas do problema e  $b$  é o termo independente da equação. De acordo com Leon (2011), um sistema de equações lineares é o grupo que conterà mais de uma equação linear, ou seja, é o conjunto de  $m$  equações e  $n$  incógnitas. A forma geral para um sistema de equações lineares é apresentado na Equação 2.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2)$$

## 2.1 Métodos para a solução de sistemas de equações lineares

Para Sperandio (2003) um método é direto quando, na ausência de erros de arredondamento, determina a solução exata do sistema por meio de um número finito de passos previamente conhecidos.

## 2.2 Fatoração LU Doolittle

Quando é feita a decomposição de uma matriz inicial  $M$  no produto das matrizes  $LU$ , tal que  $M = LU$ , com  $L$  possuindo apenas elementos unitários na sua diagonal principal, e usando as definições de igualdade e produto de matrizes para encontrar os elementos de  $L$  e  $U$  ao invés de usar a eliminação de Gauss, como é feito na fatoração  $LU$  tradicional, chamamos de método de Doolittle. Na forma genérica, apresenta-se a Equação 3:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Para saber quem são os elementos das matrizes  $L$  e  $U$  calculamos os elementos das linhas de  $L$  e os elementos das colunas de  $U$  por meio do uso das formas gerais apresentadas na Equação 4.

$$\begin{cases} u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} & i \leq j \\ l_{ij} = \left( \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}} \right), & i > j \end{cases} \quad (4)$$

## 2.3 Fatoração de Cholesky

Os cálculos da Fatoração  $LU$  podem ser simplificados se a matriz em questão for classificada como simétrica ( $M = M^t$ ) e definida positiva (uma matriz real simétrica  $M_{(n,n)}$ , é definida positiva se para todos os menores principais  $A_k$ , constituídos das  $k$  primeiras linhas e  $k$  primeiras colunas de  $A$ , vale:  $\det(A_k) > 0, k = 1, 2, \dots, n$  (FRANCO,

2006).

Essa estratégia que é chamada de Método de Cholesky, que é baseado no seguinte corolário:

**Colorário 1:** Se a matriz  $M$  é simétrica, positiva definida, então  $M$  pode ser decomposta unicamente no produto  $GG^t$ , em que  $G$  é a matriz triangular inferior com elementos diagonais positivos (FRANCO, 2006).

A matriz inicial  $M$  é decomposta em outras duas,  $G$  e  $G^t$ , tal que  $GG^t = M$  A forma geral do produto  $GG^t$  é mostrada na Equação 5.

$$GG^t = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & 0 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ g_{n1} & g_{n2} & g_{n3} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & \dots & g_{1n} \\ 0 & g_{22} & g_{23} & \dots & g_{2n} \\ 0 & 0 & g_{33} & \dots & g_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

As formas gerias para os elementos diagonais e não diagonais da matriz  $M$  de ordem  $n \times n$  são dapad pelas Equações 6 e 7, respectivamente.

$$\begin{cases} g_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ g_{ii} = \left( a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2 \right)^{1/2}, i = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} g_{i1} = \frac{a_{i1}}{g_{11}}, i = 2, 3, \dots, n. \\ g_{ij} = \frac{(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk})}{g_{jj}}, 2 \leq j < i \end{cases} \quad (7)$$

### 3 | PROBLEMA E METODOLOGIA

Para a realização do comparativo entre a Fatoração LU Doolittle e a Fatoração de Cholesky foram selecionados oito problemas, todos com as matrizes do tipo real, simétrica e denifinida positiva obtidas por meio dos repositórios *Matrix Market* e *The University of Florida Sparse Matrix Collection*.

### 4 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados obtidos e o tamanho  $n$  de cada matriz estão mostrados na Tabela 1. O erro máximo é dado por:  $\max\{ |GG^t - M| \}$  para o Método de Cholesky e  $\max\{ |LU - M| \}$  para a Fatoração LU Doolittle.

Nome do Problema	n	CHOLESKY		LU DOOLITTLE	
		Tempo (s)	Erro Máximo	Tempo(s)	Erro Máximo
nos1	237	7,085	$2,000 \times 10^{-7}$	13,119	0,000
mesh2e1	306	15,003	$0,014 \times 10^{-16}$	27,582	$8,882 \times 10^{-16}$
mhdb416	416	37,187	$0,044 \times 10^{-18}$	68,071	$3,469 \times 10^{-18}$
bcsstk20	485	58,585	$3,125 \times 10^{-2}$	107,323	$3,125 \times 10^{-2}$
nos6	675	156,510	$9,313 \times 10^{-10}$	286,390	$1,164 \times 10^{-10}$
685_bus	685	163,284	$0,227 \times 10^{-14}$	299,306	$5,684 \times 10^{-14}$
msc00726	726	194,23	$0,500 \times 10^{-8}$	355,729	$5,960 \times 10^{-8}$
nos7	729	196,645	$9,313 \times 10^{-10}$	360,247	$1,164 \times 10^{-10}$

Tabela 1: Tempo de execução e erro máximo dos métodos LU Doolittle e Cholesky

Após a execução dos métodos foram comparados os tempos de execução e o erro máximo apresentado por cada um. O Método de Cholesky foi mais rápido com tempo de processamento em torno de 60% do tempo utilizado pela Fatoração LU Doolittle para a fatoração das matrizes. Com relação à eficácia, ambos apresentaram resultados satisfatórios, com baixo erro absoluto.

## 5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho buscou-se estudar a aplicabilidade dos métodos numéricos exatos Fatoração LU Doolittle e Fatoração de Cholesky em resolução de sistemas de equações lineares, sendo analisados e comparados entre cada método seus tempos de execução e erros máximos absolutos.

O Método de Cholesky apresenta-se como mais eficiente, porém mais restritivo em comparação com a Fatoração LU, uma vez que impõe a condição de as matrizes serem simétricas e definidas positivas. Já a Fatoração LU apresenta-se como um método mais abrangente porém com menor eficiência, quando comparado com o Método de Cholesky.

Os resultados apresentados não indicam que um método seja “melhor” que o outro, mas sim que há determinadas aplicações em que um mostra-se melhor aplicável do que o outro.

A etapa de seleção do método numérico utilizado na resolução de determinado problema deve levar em consideração a tipologia do problema, fato este que ficou evidente no trabalho realizado. Se a matriz obedecer às restrições do Método de Cholesky o tempo computacional gasto será menor do que o tempo gasto pela Fatoração LU, com erros máximos absolutos com magnitudes semelhantes. Mas, em problemas que não se enquadrem na metodologia do Método de Cholesky, a Fatoração LU Doolittle surge como boa opção de método de resolução exata.

## REFERÊNCIAS

ARENALES, Selma; DAREZZSO, Arthur. **Cálculo Numérico: Aprendizagem por meio de software.** São Paulo: Thomson Learning, 2008. 376 p.

FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo Numérico.** São Paulo: Prentice Hall, 2006. 505 p.

LEON, Steven J.. **Álgebra Linear Com Aplicações.** 8. ed. Rio de Janeiro: Ltc, 2011. 464 p.

RUGGIERO, Márcia A Gomes. e LOPES, Vera Lúcia da Rocha . **Calculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais.** 2.ed. São Paulo, Makron Books: 1996. 424 p.

SPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken e. **Cálculo Numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos.** São Paulo: Pearson Universidades, 2003. 368 p.

## HISTÓRIAS E JOGOS COMO POSSIBILIDADE DIDÁTICA PARA INTRODUIZIR O ESTUDO DE FRAÇÕES

### **Cristalina Teresa Rocha Mayrink**

Professora da Rede Municipal de Ensino de Belo Horizonte

Belo Horizonte – Minas Gerais

### **Samira Zaidan**

Professora da Faculdade de Educação da UFMG

Belo Horizonte – Minas Gerais

**RESUMO:** Nossa experiência como professora dos anos iniciais do ensino fundamental e como formadoras de professores(as) nos leva a constatar dificuldades com relação ao ensino e aprendizagem de frações. No âmbito do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional Educação e Docência-Promestre, da Faculdade de Educação da UFMG, realizamos uma pesquisa sobre o tema onde buscamos o conhecimento de estudos já realizados, elaboramos uma sequência didática e a desenvolvemos em uma Escola com estudantes do quarto ano, no que acreditamos ser uma proposta de ensino diferenciada. Para isto, utilizamos um livro de história infantil e jogos, introduzindo e desenvolvendo o conteúdo frações. Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo o ensino de frações trazendo as histórias infantis e os jogos como elementos capazes de contextualizar e promover a integração do assunto com outras áreas do conhecimento, a fim de proporcionar uma

melhor compreensão e aprendizagem por parte dos estudantes, além de apresentar para o(a) professor(a) uma possibilidade de realizar aulas mais interessantes e significativas.

**PALAVRAS-CHAVE:** ensino de frações; histórias infantis; jogos; ensino fundamental; educação matemática.

### STORIES AND GAMES AS DIDACTIC POSSIBILITIES TO INTRODUCE THE STUDY OF FRACTIONS

**ABSTRACT:** Our experience as teachers in the early years of elementary school and as teachers trainers has shown us the challenges regarding teaching and learning fractions. Under the scope of the Graduate Program- Professional Master in Education and Teaching- of UFMG, we did a research on the theme, in which we analyzed previous studies, created a didactic sequence, and developed it in a school with 4th grade students. We believe this was a distinct teaching proposal, as we used a children's story book and games to introduce and develop the content of fractions. Thus, this work aims to teach fractions by using children's stories and games as elements capable of contextualizing and integrating the topic with other areas of knowledge so as to reach a better understanding and learning. Besides, it introduces to teachers



a possibility of giving more interesting and meaningful classes.

**KEYWORDS:** Teaching fractions; children's stories; games; elementary school; Mathematics education.

## 1 | INTRODUÇÃO

As ideias que aqui apresentamos têm como objetivo o ensino de frações, assunto que mostra dificuldades de ensino e de aprendizagem, o que nos levou a propor uma sequência didática utilizando história infantil e jogos, visando tornar mais significativa a aprendizagem do assunto. Pretendemos contribuir com a qualificação do trabalho pedagógico docente em relação ao ensino das frações, no sentido de que seja realizado de forma mais interessante e ainda: proporcionar a construção de conhecimento sobre frações pelos estudantes a partir da exploração matemática de texto; promover a contextualização do assunto *fração* a partir da leitura de um livro que traz uma situação próxima ao vivenciado pela maioria dos estudantes; possibilitar o contato com conhecimentos já existentes na turma, considerando ser esse um assunto nem sempre presente no seu cotidiano.

Consultando o sítio do INEP – Escala SAEB de proficiência para o Ensino Fundamental, em relação aos números racionais, encontramos que os estudantes do 5º ano devem demonstrar ser capazes de:

- Localizar um número racional dado sua forma decimal em uma reta numérica graduada onde estão expressos diversos números naturais consecutivos, com dez subdivisões entre eles.
- Reconhecer uma fração como representação da relação parte-todo, com apoio de um polígono dividido em oito partes ou mais.
- Determinar o resultado da diferença entre dois números racionais representados na mesma forma decimal.
- Determinar porcentagens simples (25%, 50%).
- Associar a metade de um total a algum equivalente, apresentado como fração ou porcentagem.
- Reconhecer uma fração como representação da relação parte-todo, sem apoio de figuras.

(<http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb/matrizes-e-escalas>. Acesso em julho 2018)

Sabemos que precisamos nos esforçar muito a fim de conseguir alcançar resultados satisfatórios em relação a esses objetivos. Segundo Walle (2009), para bem efetuar a exploração do senso fracionário e promover o desenvolvimento do conceito de fração com os estudantes, seria necessário que as cinco ideias, citadas a seguir, fossem bem trabalhadas:

1. As partes fracionárias são partilhas iguais (repartir) ou porções de tamanhos

iguais de um todo ou unidade. Uma unidade pode ser um objeto ou uma coleção de coisas. Mais abstratamente, a unidade é contada como 1. Na reta numérica, a distância de 0 até 1 é a unidade.

2. As partes fracionárias têm nomes especiais que dizem quantas partes daquele tamanho são necessárias para compor o todo. [...]
3. Quanto mais partes fracionárias forem usadas para formar um todo, menores elas serão. [...]
4. O denominador de uma fração indica por qual número o todo foi dividido a fim de produzir o tipo de parte sob consideração. Assim, o denominador é um divisor. Em termos práticos, o denominador nomeia o tipo de parte fracionária considerada. O numerador de uma fração diz quantas partes fracionárias (do tipo indicado pelo denominador) são consideradas. Então, o numerador é um multiplicador – indica um múltiplo da parte fracionária dada.
5. Duas frações equivalentes são dois modos de descrever a mesma quantidade usando partes fracionárias de tamanhos diferentes. [...] (p. 322).

Devido à complexidade de trazer para a situação real o ensino de frações no 2º Ciclo do Ensino Fundamental, quando está previsto o estudo sistemático do assunto, verificamos ser necessária para a aprendizagem do estudante a apresentação de recursos que promovam entendimento, despertando o interesse. De acordo com Fonseca e Cardoso (2005, p. 67), *para muitos autores [...] a contextualização aparece como um elemento didático importante no processo de transposição do conhecimento formalizado para um conhecimento ensinável (e aprendível)*. Para tanto, sugerimos a prática da leitura de histórias e a realização de jogos nas aulas de Matemática, pois esses recursos podem trazer para a realidade temas/assuntos/ideias/sentimentos que, sendo mais abstratos, se tornam mais perceptíveis para o estudante dos anos iniciais do ensino fundamental.

Lembramos também que há um conjunto de fatores que interferem no ensino e na aprendizagem, como a diversidade dos estudantes que hoje chegam à escola, as suas condições de estudo e as próprias condições das práticas profissionais. É possível perceber, contudo, que há como avançar na criatividade dos planos de aulas, sem desconhecer as dificuldades em que os docentes e discentes estão inseridos nas escolas. Esperamos, então, com esta pesquisa, oferecer um material que subsidie professores(as) para o ensino de números fracionários.

## 2 | O USO DE TEXTOS LITERÁRIOS E JOGOS NO ENSINO DE FRAÇÕES

Com o objetivo de promover contextualização significativa para um determinado assunto, Smole, Cândido e Stancanelli (1997) sugerem que sejam realizadas leituras de textos literários não só nas aulas de Língua Materna, mas também nas aulas de Matemática, como uma interessante prática pedagógica capaz de levar magia e encantamento para a sala de aula, além da contextualização. Elas afirmam que: *De*

*algum modo a literatura aparece à criança como um jogo, uma fantasia muito próxima ao real* (Ibid., p. 11).

O trabalho com as histórias infantis entra nas aulas de Matemática com o objetivo não só de integrar áreas do conhecimento, mas de criar novos contextos com situações diferentes, promover conflitos cognitivos para serem discutidos e resolvidos conjuntamente, possibilitar questionamentos matemáticos ao longo da leitura do texto, de modo a proporcionar a construção do conhecimento. De acordo com Menezes (2011)

A especificidade da natureza do texto literário, diferente da do texto escolar, cria igualmente condições para que os alunos interajam e discutam o significado do que leem. A interação dos alunos com o texto e com os colegas faz emergir a necessidade de se avançar na base dos acordos e da negociação de significados. Esta abordagem à aprendizagem da Matemática favorece o desenvolvimento matemático dos alunos, [...] (p.71).

Em relação ao jogo, acreditamos ser um importante recurso pedagógico do qual podemos fazer uso em sala de aula, pois desempenha *funções psicossociais, afetivas e intelectuais básicas no processo de desenvolvimento infantil* (GRANDO, 2008, p.18). O ato de jogar consegue suscitar interesse e envolver tanto crianças como jovens e adultos, além de promover a ampliação de suas experiências e criatividade. Consideramos ser possível utilizá-lo nas diversas áreas do conhecimento, inclusive nas aulas de Matemática, pelo motivo de que através do jogo o estudante se sente desafiado e pode *estabelecer um caminho natural que vai da imaginação à abstração de um conceito matemático* (Idem, p. 20).

Para que isso aconteça, é necessário ressaltar que a atividade com o jogo precisa ser bem planejada pelo(a) professor(a), prevendo as situações que serão criadas. Smole (2007) afirma que

O trabalho com jogos nas aulas de matemática, quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades como observação, análise, levantamento de hipóteses, busca de suposições, reflexão, tomada de decisão, argumentação e organização, as quais estão estreitamente relacionadas ao assim chamado *raciocínio lógico*. (p. 9)

No entanto, a simples participação em um jogo pode ser divertido, pode promover socialização, mas não garante a aprendizagem do estudante. É necessário que o(a) professor(a) proponha atividades baseadas no jogo ou a situações de jogo – reais ou hipotéticas - que promovam o surgimento de “*conflitos cognitivos*” (GRANDO, 2008, p. 25) capazes de favorecer e proporcionar a aprendizagem. Ou seja, situações com as quais o estudante se depara e seus conhecimentos-informações não são suficientes para resolvê-las, provocando uma busca que vai levá-lo a um novo conhecimento e aprendizagem.

Sendo assim, o texto literário e o jogo podem tornar-se adequados quando se trabalha com frações, pois nossos estudantes nem sempre vivenciam cotidianamente situações em que são levados a lidar com quantidades fracionárias.

Quando muito, nossa criança vive a divisão de uma laranja ou de um bolo em duas partes iguais, e isso a prepara para a noção de metade e do número “1 meio”. Todavia, uma pizza dividida em quatro partes iguais não é uma imagem comum a muitas crianças. (BERTONI, 2002, p. 60)

Sendo assim, o ensino dos números racionais na forma fracionária se apresenta como um desafio para os(as) professores(as). Há um distanciamento, diferente de outros conteúdos que têm forte apelo social, entre a prática escolar e a vivência dos alunos com as frações. Nesse sentido,

O processo escolar de ensino-aprendizagem das frações não procura compensar essa lacuna. As frações são introduzidas rapidamente na 3ª série, incluindo nomes, símbolos e nomenclaturas. As operações são ensinadas por regras e sem compreensão. E o resultado é aquele que bem conhecemos: um grande fracasso na aprendizagem desses números. (BERTONI, 2002, p. 60)

Além desse distanciamento das frações do cotidiano social, outras duas dificuldades são apresentadas por Walle (2009) para o ensino de frações: [...] *A relação inversa entre número de partes e tamanho de partes [...]* (p. 333), pois quanto maior o número de partes, menor o seu tamanho e [...] *compreender que uma fração não diz nada sobre o tamanho do todo ou o tamanho das partes. Uma fração nos diz apenas sobre a relação entre a parte e o todo* (p. 335), ou seja, a fração expressa uma relação e adquire sentidos conforme a situação em que está sendo utilizada ou representada.

Para superar dificuldades como essas, nós professores(as) precisamos criar processos que promovam a reflexão dos estudantes sobre o assunto e elaborar meios que possam ajudá-los na consolidação desses conceitos fracionários, já que há situações da vida que necessitamos expressar, ler e compreender informações através dessa representação.

Segundo David e Fonseca (1997), é importante que o trabalho com números racionais e a sua representação fracionária esteja direcionado para um ensino que se preocupe com o aspecto conceitual, pois existe uma *variedade de perspectivas envolvidas na abordagem desses números*. (p. 55 e 56). Elas destacam quatro aspectos que merecem nossa atenção:

- Aspecto prático: os números racionais, em suas diferentes representações, surgem com freqüência nas diversas situações relacionadas à expressão de medidas e de índices comparativos.
- Aspecto psicológico: o trabalho com os números racionais surge como uma oportunidade privilegiada para se promover o desenvolvimento e a expansão de estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual.
- Na perspectiva da própria Matemática: serão justamente esses primeiros estudos com os números racionais, particularmente em sua forma fracionária, que fundamentarão o trabalho com as operações algébricas elementares a serem desenvolvidas ao longo do ensino fundamental.
- Aspecto didático-epistemológico: o trabalho com os números racionais pode se constituir numa oportunidade de experimentar uma situação de produção de conhecimento matemático, em resposta a conflitos ou dificuldades

surgidas no campo mais restrito dos números naturais. Essas dificuldades requerem a criação de um novo campo numérico que abrange e amplia as possibilidades do campo anterior (p. 56).

David e Fonseca (1997) defendem ainda a ideia que

Uma abordagem dos números racionais que contemple esse processo de gênese dos conceitos, em vez de ver o conteúdo matemático apenas como um produto, não só proverá o educador de elementos para compreender melhor o processo pelo qual o aluno assimila esse conteúdo, como também permitirá ao aluno uma percepção da intencionalidade e da dinâmica da produção do conhecimento matemático. (p. 56).

Em outras palavras, o ensino dos números racionais na forma fracionária envolve diversas ideias importantes para o desenvolvimento cognitivo, prático e psicológico do estudante. Tendo a possibilidade de ser sujeito da construção desse e de outros conhecimentos, o aluno terá a oportunidade de fazer matemática e maior probabilidade de compreendê-la. O(a) professor(a) poderá acompanhar e entender como seus alunos aprendem, além de interferir de forma adequada quando perceber dificuldades de compreensão.

É com o intuito de tentar contribuir para minorar a situação em que se encontra o ensino e a aprendizagem de frações no 2º ciclo que propomos levar o texto literário e o jogo para as aulas de matemática, pois eles podem proporcionar situações de emoção, afetividade, criatividade, fantasia, raciocínio e também de aprendizagem. Pretendemos que esta proposta possibilite ao(a) professor(a) tratar esse assunto com mais consistência, facilidade e clareza dos seus objetivos e que ele seja melhor compreendido pelos estudantes.

### 3 | UMA EXPERIÊNCIA PRÁTICA COM UMA PROPOSTA DE ENSINO

Dentro da perspectiva de integração de diferentes áreas do conhecimento, em especial Língua Materna e Matemática, a pesquisa foi realizada através da elaboração e desenvolvimento de uma sequência didática criada a partir da exploração de um texto literário. Informamos os estudantes e os seus pais, obtendo autorização formal para desenvolver nossa proposta. A sequência foi levada a três turmas do 4º ano do ensino fundamental de uma escola municipal, localizada no bairro Mantiqueira, região de Venda Nova, Belo Horizonte/MG.

A Instituição de Ensino funciona em três turnos, sendo que no turno da manhã estão as turmas de 1º ao 5º ano; à tarde funcionam duas turmas de 5º ano e as turmas do 6º ao 9º ano; à noite funcionam as turmas de EJA (Educação de Jovens e adultos).

A Escola possuía, no ano de 2018, dezesseis turmas de 1º ciclo e 2º ciclo no turno da manhã, sendo que três delas são do 4º ano do Ensino Fundamental. Decidimos realizar a pesquisa com as três turmas para que o trabalho da Professora que leciona Matemática fosse o mesmo nas turmas e para que tivéssemos um universo maior para experienciar e analisar.

A escolha dessa Escola para a realização da pesquisa se deu pelo fato da Professora que lecionava matemática para as turmas do 4º ano do 2º ciclo e a pesquisadora serem mestrandas da mesma linha de pesquisa, da mesma turma e serem orientadas da mesma Professora. Essa proximidade física possibilitou um maior e melhor entrosamento para a realização das discussões a respeito da pesquisa e para a elaboração da sequência didática. Além disto, a Professora da turma considerou a atividade de pesquisa de grande valor formativo para a turma, vindo a favorecer o seu próprio planejamento de ensino.

As atividades propostas na sequência didática buscavam contemplar a representação dos números racionais na forma fracionária e a comparação de frações, utilizando situações envolvendo história e jogo.

A sequência didática foi desenvolvida a partir da exploração matemática do livro *O pirulito do pato*, de Nílson José Machado (Editora Scipione, São Paulo, 2003). O texto conta a história de dois irmãos que ganham um pirulito de sua mãe e que deve ser dividido igualmente entre eles; antes que ele seja dividido, chega um amigo e o pirulito passa, então, a ser dividido em três partes iguais. Após a divisão da iguaria, chega um quarto patinho, que para não ficar sem a guloseima, recebe a metade do “um terço” do pirulito recebido por um dos patinhos. Como se pode perceber, a história envolve uma situação divertida e que pode ocorrer na vida cotidiana e possibilita abordar o tema proposto.

A escolha do livro se deu por diversos motivos, entre eles:

- Por trazer um contexto próximo ao vivido pela maioria dos estudantes desta faixa etária, ou seja, envolve uma situação que possivelmente já foi vivenciada pela maioria deles: a de precisar dividir algum alimento.
- A possibilidade de cada estudante reconhecer-se em um dos personagens da história, pois eles demonstram sentimentos e/ou desejos com os quais os estudantes podem se identificar. Podem ser sentimentos/desejos momentâneos – como, por exemplo, o desejo de ficar com o doce só para si - e/ou de personalidade - ser desprezado; gostar de dividir.
- A possibilidade dos estudantes representarem a história estando na “situação” de um personagem, vivenciando desta forma as diversas emoções e sentimentos.

A sequência didática foi pensada para ser realizada em dez aulas de duas horas cada. As aulas tiveram situações e momentos diferenciados – contação de história, representação artística de trechos do texto, registro no caderno, dinâmica de jogos, discussões em grupos e coletivas, entre outras – portanto a organização da turma foi feita de acordo com a necessidade da atividade a ser realizada a cada momento - roda, pequenos grupos, duplas - e das discussões com a Professora.

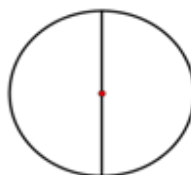
A partir da contação da História “O pirulito do pato” de Nílson José Machado, realizamos com os estudantes a encenação da história. Para que todos pudessem participar como um dos personagens, pedimos que se organizassem em grupo de quatro. A pesquisadora foi a narradora e a mãe pata e os estudantes os patinhos que

receberiam partes do pirulito. Para representar o pirulito que seria dividido, utilizamos um círculo de papel colado a um palito de picolé.

Os estudantes precisaram dividir o disco de papel de acordo com a história. Após a representação os estudantes receberam um novo círculo de papel para que dividissem da forma como achassem mais justa. Todos os grupos dividiram a representação do pirulito em quatro partes iguais. Após a representação, um pirulito foi oferecido a cada grupo para ser dividido igualmente entre eles. Os registros foram feitos quando cada estudante recebeu uma folha com um pequeno resumo de dois trechos do texto em que houve divisão do doce, conforme a seguir:

1- Agora é hora de registrar com desenhos e por extenso as frações que fizeram parte da história “O pirulito do pato”, de Nilson José Machado.

Mamãe Pata deu um pirulito a Dino e Lino. Ele deveria ser dividido igualmente em duas partes. Desta forma, que fração cada patinho receberia?



Antes que o pirulito fosse dividido, chegou o Pato Xato. Então, o pirulito teve que ser dividido igualmente em três partes. Que fração cada patinho recebeu?

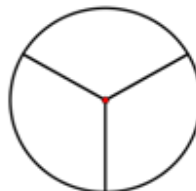


Figura 1 – Primeira atividade de registro sobre frações.

Os estudantes deveriam identificar e escrever por extenso o nome de cada parte. Desta forma, trabalhamos com uma representação do pirulito dividido e a nomenclatura das frações de “meios” até “décimos” sempre utilizando a ideia do pirulito sendo dividido igualmente para um determinado número de pessoas.

A representação simbólica das frações foi introduzida posteriormente, após realizarmos algumas discussões sobre o assunto e criarmos um texto para que pudesse ser consultado quando houvesse dúvidas (Figura 2).

### Representando simbolicamente as frações

Uma representação simbólica precisa ser reconhecida por nós e pelas demais pessoas que estão dentro e fora da escola, assim como acontece com a representação das medidas, com os sinais das operações, de pontuação, entre outros.

Na história “O pirulito do pato”, o pirulito foi dividido. Então, uma fração representa uma divisão.

Na convenção matemática o registro de frações é feito assim:

- Passando um traço para indicar que foi realizada uma divisão.
- Na parte que fica embaixo do traço, colocamos o número de partes em que o inteiro foi dividido; ele é chamado **DENOMINADOR** porque vai denominar, ou seja, dar nome à fração.
- Na parte de cima, colocamos o número de partes que estão sendo consideradas; ele é chamado **NUMERADOR**, pois representa o número de partes que estão sendo consideradas no todo dividido.

$$\frac{\text{NUMERADOR}}{\text{DENOMINADOR}}$$

- A leitura da fração é realizada de cima para baixo.

Agora vamos voltar às atividades que representam o pirulito dividido em partes iguais. Represente simbolicamente as frações registradas.

Figura 2 – Texto produzido após discussão com os estudantes.

Posteriormente, outras atividades que envolveram as diferentes ideias de frações foram realizadas. Ao criar cada atividade buscamos produzir uma história que estivesse próxima do cotidiano dessas crianças (Figura 3). Foram situações envolvendo a divisão de lanche, confecção de pipa, compra de pizza, observação de trabalhos artísticos e divisão de folhas coloridas (Figura 4). As folhas divididas foram transformadas em um mosaico criado por cada estudante e posteriormente exposto na sala.

Nome- \_\_\_\_\_ Data- \_\_\_\_\_

1 - Pedro e Ana foram visitar os trabalhos apresentados pelos alunos do 4º ano na Feira de Cultura que aconteceu na escola onde estudam. Numa das apresentações havia uma exposição de mosaicos. Ao lado de alguns mosaicos, havia uma representação fracionária faltando o numerador ou o denominador. Os visitantes precisavam completar as frações. Como você completaria as frações que estão ao lado dos seguintes mosaicos:

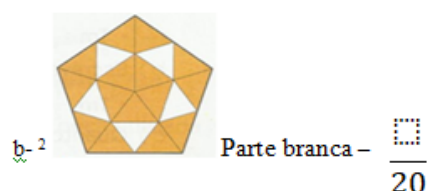


Figura 3 – Parte de atividade de fixação.



3 - A professora Maria gostou da exposição de mosaicos da turma do 4º ano e pensou em produzir alguns mosaicos com sua turma. Para produzi-los, ela entregou 3 folhas de papel colorido para cada grupo de 4 crianças. Os papéis têm cores diferentes e todos os componentes do grupo devem receber partes iguais de cada folha de papel.

a- Que fração de cada cor cada criança recebeu? (Represente simbolicamente e por extenso).

b- Que fração representa o total de folhas que cada criança recebeu? (Represente simbolicamente e por extenso).

c- Represente com desenho o que foi feito com as folhas de papel.

d- Faça um mosaico utilizando as frações das folhas que você recebeu.

Figura 4 – Atividade que culmina com a produção de mosaico.

Com o objetivo de promover a compreensão e a memorização do nome das partes das frações, confeccionamos um jogo da memória (Figura 5). Ele é composto por:

- Figura geométrica dividida igualmente em um determinado número de partes para que cada estudante pintasse uma quantidade dessas partes de acordo com sua escolha.
- Representação por extenso da parte pintada na figura
- Representação simbólica da parte pintada na figura.

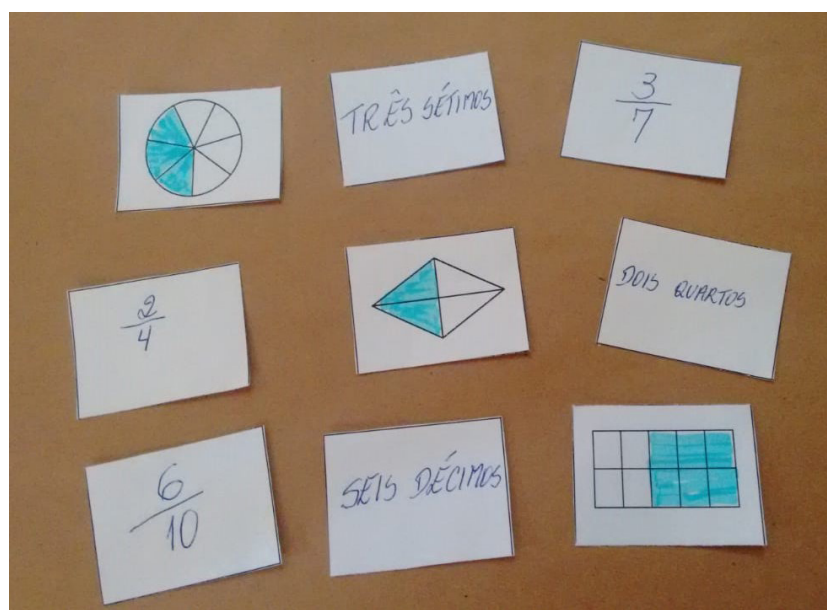
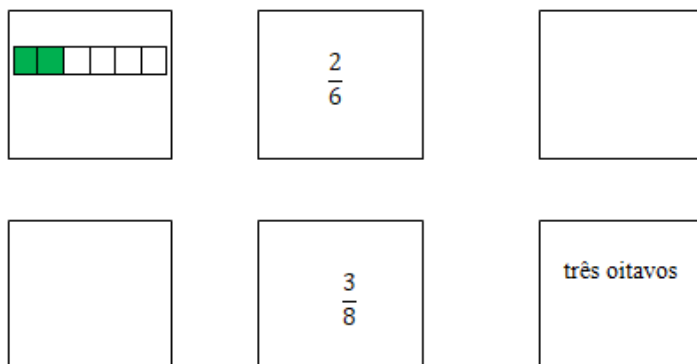


Figura 5 – Peças do Jogo da memória das frações. Arquivo da pesquisadora.

As regras do jogo foram criadas coletivamente com cada uma das turmas. Após jogarem algumas vezes em sala e em outros ambientes - no recreio com colegas de outras turmas e em casa com os familiares, de acordo com comentários realizados pelos estudantes - fizemos as atividades de exploração de situações do jogo (Figura 6).

Nome - \_\_\_\_\_ Sala - \_\_\_\_\_ Data - \_\_\_\_\_

4 - Para verificar se seu jogo estava completo, Alberto organizou todas as suas peças. Ele percebeu que os seguintes trios estavam incompletos:



a- Ajude Alberto completando as peças em branco que estão ao lado das peças que não foram perdidas.

b- Represente simbolicamente e por extenso a fração do jogo que Alberto perdeu. \_\_\_\_\_

Figura 6 – Parte das atividades de exploração do Jogo da memória das frações.

Utilizamos nas atividades as ideias envolvendo frações de grandezas discretas ou descontínuas mesmo informalmente nas turmas, depois criamos e realizamos algumas atividades para tratar especificamente desse assunto. Tivemos o cuidado de também trazer as diferentes ideias de frações nessas atividades (Figura 7).

Nome - \_\_\_\_\_ Sala - \_\_\_\_ Data - \_\_\_\_\_

1- A pesquisadora Cristalina precisa levar para a faculdade informações sobre as turmas da escola que ela está pesquisando.

Como ela está trabalhando com frações pensou em levar todas as informações utilizando a representação fracionária na forma simbólica e por extenso.

**Relatório sobre sua turma**

Nessa turma há \_\_\_\_\_ estudantes ao todo.

Que fração representa:

a- Todos os estudantes da turma - \_\_\_\_\_

b- Você na turma - \_\_\_\_\_

c- Os meninos desta turma - \_\_\_\_\_

d- As meninas desta turma - \_\_\_\_\_

e- Estudantes presentes hoje - \_\_\_\_\_

Figura 7 – Parte de atividade de fixação de frações de grandezas discretas ou descontínuas.

Como forma de conseguir identificar o que os estudantes aprenderam sobre frações, solicitamos a produção de histórias que envolvessem a ideia fracionária. A história poderia ser produzida individualmente ou em duplas e a partir de uma história já conhecida ou por situação vivenciada por eles (Figura 8).

Nome - \_\_\_\_\_ Sala - \_\_\_\_ Data - \_\_\_\_\_

Em grupo e baseando-se em histórias já conhecidas ou em situações vividas por vocês, escrevam uma situação problema envolvendo a ideia de fração. Resolvam a situação criada por vocês.

---

---

---

---

---

---

---

Figura 8 – Atividade para produção de histórias com frações.

Surgiram histórias envolvendo grandezas contínuas e descontínuas. A partir de cada história elaboramos uma ou mais questões envolvendo diversos conhecimentos que foram trabalhados durante a pesquisa, tais como: nome das partes de um inteiro

dividido igualmente; divisão de um inteiro em partes iguais; identificação do número de partes em que um inteiro foi dividido de acordo com o denominador; identificação do número de partes destacadas em um inteiro de acordo com o numerador; comparação e equivalência de frações, entre outras ideias. Com o material em mãos produzimos um livro com as histórias de cada turma. Todos os estudantes receberam um exemplar do livro de sua turma para ser trabalhado em sala (Figura 9).



Figura 9 – Livros elaborados com as histórias produzidas pelos estudantes.

As atividades, as investigações e os nossos registros das práticas desenvolvidas foram realizadas em novembro e dezembro de 2018. Atualmente estamos na fase de organização das informações coletadas em campo e na análise mais detalhada da experiência, considerada por nós como muito proveitosa.

Tendo como objetivo contribuir na tarefa de auxiliar os estudantes a construir o senso fracionário e pensando nas possibilidades de explorar o conteúdo sobre frações de forma significativa em sala de aula, a partir da contextualização promovida pelo texto literário, pretendemos elaborar um recurso educativo para apresentação pública e registro pelo nosso Promestre. Planejamos reproduzir o caderno nos formatos impresso e virtual e para ampliar o acesso a ele, disponibilizá-lo no Portal do professor – MEC com o material teórico.

Desejamos que esse material possa ser utilizado pelos(as) professores(as) como atividade didática em sala de aula com os estudantes na perspectiva apontada nesse trabalho, ou seja, articulando o ensino de frações com outras disciplinas escolares, na expectativa de contribuir para *mudar o isolamento e a fragmentação dos conteúdos [...] matemáticos.* (TOMAZ; DAVID, 2012, p. 14).

## REFERÊNCIAS

BERTONI, N.E. **Compreendendo a adição e a subtração.** In: SALGADO, M.U.C. e MIRANDA, G.V. (org): Guia de Estudo. Módulo 2. Volume 2. Coleção Veredas. Belo Horizonte: Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais, 2002b. p. 47 a 81.

DAVID, M.M.S.; FONSECA, M.C.F.R. **Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária.** Belo Horizonte: Presença Pedagógica, v.3, n.14, mar/abr. 1997.

FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis; CARDOSO, Cleusa de Abreu. Educação Matemática e letramento: textos para ensinar Matemática e Matemática para ler o texto. In: LOPES, Celi Aparecida Espasandin; NACARATO, Adair Mendes (Orgs.). **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. 2. ed. São Paulo: Paulus, 2008.

MENEZES, Luís. **Matemática, Literatura & Aulas**. Educação e Matemática, Viseu, n. 115, 67-71, 2011. Disponível em: <[http://www.esev.ipv.pt/mat1Ciclo/Nova%20pasta/\\_EM115\\_pp67-1\\_4f1d94c118b47\\_H.pdf](http://www.esev.ipv.pt/mat1Ciclo/Nova%20pasta/_EM115_pp67-1_4f1d94c118b47_H.pdf)>. Acesso em: 28 nov. 2016.

SMOLE, Kátia Stocco; CÂNDIDO, Patrícia T.; STANCANELLI, Renata. **Matemática e Literatura Infantil**. 2. ed. Belo Horizonte: Lê, 1997. 134p.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; MILANI, Estela. **Jogos de matemática de 1º ao 5º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

\_\_\_\_\_. **Jogos de matemática de 6º ao 9º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012. – (Coleção Tendências em Educação Matemática).

WALLE, John A. Van de. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Tradução de Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009. 514p.

#### Site consultado

<http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb/matrizes-e-escalas>. Acesso em 10 jul. 2018.

Imagens da figura 3

Adaptado de <http://www.decoratons.com.br/papel-de-parede-geometrico-colorido.html>. Acesso em 06 de julho de 2018.

<sup>2</sup> Adaptado de <http://webquest.gear.host/index.php/webquests/publicar/32>. Acesso em 06 de julho de 2018.

## HISTÓRIAS EM QUADRINHOS (HQ'S) NO CONTEXTO DE ENSINO: UMA PROPOSIÇÃO METODOLÓGICA PARA O SEU USO NA SALA DE AULA

### **Rodiney Marcelo Braga dos Santos**

Instituição Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB  
Cajazeiras – Paraíba

### **Maria Beatriz Marim de Moura**

Instituição Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB  
Cajazeiras – Paraíba

### **José Nathan Alves Roseno**

Instituição Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB  
Cajazeiras – Paraíba

### **Francisco Bezerra Rodrigues**

Instituição Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba – IFPB  
Cajazeiras – Paraíba

**RESUMO:** As Histórias em Quadrinhos (HQ's) são apresentadas ao cenário escolar como um instrumento didático interdisciplinar e transversal a ser trabalhado em sala de aula. É caracterizado por uma linguagem autônoma que possui um repertório estético e narrativo próprio. Destarte, o professor deve compreender como se dá a relação entre os elementos que estruturam a linguagem quadrinística. Diante do exposto, este estudo apresenta a experiência vivenciada com a linguagem dos quadrinhos na formação inicial do professor de Matemática. Ademais, analisa alguns aspectos

metodológicos do referido gênero de linguagem aplicado ao ensino de Matemática e apresenta uma proposta de roteiro metodológico para o professor. A tipologia da pesquisa utilizada no estudo com o intuito de alcançar os objetivos propostos compreende a abordagem, predominantemente, de caráter qualitativo do tipo aplicada e exploratória. O método utilizado na produção da HQ's é do tipo autoral. Os resultados positivos, evidenciados pela diversidade de estratégias visuais encontradas para a confecção das HQ's e pela criticidade diante dos temas abordados, vêm legitimar a importância desse recurso didático como uma linguagem que contribui para a aprendizagem da Matemática e para a formação de professores críticos e reflexivos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Formação de professores; Ensino de Matemática; Gênero de linguagem textual; Quadrinhos.

**ABSTRACT:** Comic Books (CB's) are presented to the school scene as an interdisciplinary and transversal teaching tool to be worked in the classroom. It is characterized by an autonomous language that has its own aesthetic and narrative repertoire. Thus, the teacher must understand how the relation between the elements that structure the quadratic language occurs. In view of the above, this study presents the experience lived with the comic language in the initial

formation of the Mathematics teacher. In addition, it analyzes some methodological aspects of the said language genre applied to the teaching of Mathematics and presents a proposal of methodological script for the teacher. The typology of the research used in the study in order to reach the proposed objectives comprises the predominantly qualitative approach of the applied and exploratory type. The method used in the production of the comics is of the author type. The positive results, evidenced by the diversity of visual strategies found for the creation of the HQ's and by the criticality of the themes addressed, legitimize the importance of this didactic resource as a language that contributes to the learning of Mathematics and to the formation of critical and reflexive teachers.

**KEYWORDS:** Teacher training; Mathematics Teaching; Gender of textual language; Comics.

## 1 | INTRODUÇÃO

A Matemática pode ser vista como uma ciência que permite a reconstrução de um contexto real por meio de modelos. No âmbito do seu ensino, a didática busca potencializar a promoção de um ambiente de aprendizagem que permita aos alunos a possibilidade de estreitamento de um diálogo entre essa ciência e seu cotidiano. Destarte, é necessário que o professor, constantemente, planeje sua prática pedagógica balizada na construção de um percurso metodológico comprometido com um fazer protagonista (SANTOS et al., 2018).

Outrossim, torna-se relevante por parte do professor a apropriação de estratégias didáticas que possibilite a ação-reflexão-ação frente aos contextos de ensino que não tem favorecido o ambiente de aprendizagem. Conforme sinalizado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's):

É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática (BRASIL, 1997, p. 32).

No que concerne a utilização de recursos didáticos na prática escolar, as Histórias em Quadrinhos (HQ's) estão diretamente relacionadas ao cotidiano dos nossos estudantes da Educação Básica, sendo caracterizada como uma alternativa potencial para promoção de um ambiente de aprendizagem amistoso e atraente. Todavia, este instrumental ainda é inexpressivo quanto a sua exploração como recurso pedagógico no ensino de Matemática (VERGUEIRO; RAMA, 2014).

As HQ's são apresentadas ao cenário escolar como um instrumento didático interdisciplinar e transversal a ser trabalhado em sala de aula. O referido gênero de textual é caracterizado por uma linguagem autônoma que possui um repertório estético e narrativo próprio. Assim, o professor deve compreender como se dá a relação entre os elementos que estruturam a linguagem quadrinística.

Apesar das HQ's terem se tornado um recurso potencial em sala de aula, os aspectos metodológicos que as permeiam só se tornam significativos se atingirem determinadas competências, a saber: a criatividade, a reflexão, a autonomia e entre outras.

Conforme Vergueiro e Rama (2014, p. 26), “o único limite para seu bom aproveitamento em qualquer sala de aula é a criatividade do professor e sua capacidade de utilizá-las [...]” que por muitas vezes consiste na prática limitada à leitura, produção e/ou (re)produção, enquanto um mero passatempo.

Diante do exposto, a questão de investigação que se apresenta é: como o gênero de linguagem HQ's pode contribuir para aprendizagem do ensino de Matemática? Assim, o objetivo deste estudo consiste em relatar duas experiências realizadas no contexto da formação inicial do professor de Matemática. A primeira, na promoção de um minicurso realizado em um evento científico e a segunda, a partir do desenvolvimento de um projeto de iniciação científica. Ademais, analisar aspectos metodológicos do referido gênero de linguagem aplicado ao ensino de Matemática e apresentar uma proposta de roteiro metodológico para o professor.

O gênero de linguagem HQ's foi escolhido em virtude da sua aproximação com o cotidiano dos alunos, bem como pela exploração de uma distinta forma de linguagem. Pereira (2010a, p. 01) afirma que, “a maioria dos recursos didáticos, como livros didáticos e paradidáticos, avaliações e até mesmo os vídeos educacionais, são cada vez mais utilizados os Quadrinhos para contextualizar um determinado assunto”.

O objeto de estudo aqui supracitado compreende um vasto e fértil campo de investigação. Assim, a motivação a ser percorrida em promover um diálogo acerca dos aspectos metodológicos do gênero de linguagem HQ's no ensino de Matemática, possivelmente, irá instigar o debate, na perspectiva do uso potencial deste instrumental didático no ambiente de aprendizagem.

## **2 | O GÊNERO DE LINGUAGEM TEXTUAL HQ'S: UM RECURSO DIDÁTICO POTENCIAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA**

As Histórias em Quadrinhos são um gênero de linguagem moderna que pode ser chamado de quadrinização (McCLOUD, 2005). Os quadrinhos podem ser definidos como ilustrações deliberadamente justapostas em sequência a partir da simulação da passagem do tempo narrativo e que tem em vista sua reprodução técnica (MALLETT, 2009). Araújo, Costa e Costa (2008, p. 30), apresentam a ideia de que:

a mensagem das histórias em quadrinhos é transmitida ao leitor por dois processos: por meio da linguagem verbal – expressa a fala, o pensamento dos personagens, a voz do narrador e o som envolvido – e por meio da linguagem visual – no qual o leitor interpretará as imagens contidas nas histórias em quadrinhos. Unindo estes dois processos, chega-se ao escopo que o enunciado verbal pretende transmitir ao leitor.



Embora existam histórias sem texto, neste trabalho assumimos a definição apresentada por Cagnin (1975, p. 25) que define uma HQ's como “um sistema narrativo formado por dois códigos de signos gráficos: a imagem, obtida pelo desenho, e a linguagem escrita”. Conforme McCloud (2005) e Mallet (2009), sua linguagem é constituída por meio de elementos essenciais um tanto expressivos, sendo reconhecidos universalmente, quais sejam: a página, vinheta e elipse. Outrossim, os autores destacam os elementos característicos dos quadrinhos que compreendem desde os requadros, os balões, os recordatórios, as onomatopéias, as linhas cinéticas até os símbolos.

A página considerada como um limiar físico, pela qual se estendem os outros elementos dos quadrinhos, é uma unidade significativa que orienta o desenvolvimento do roteiro narrativo. As vinhetas representam uma ação executada dentro dos campos distintos que as ilustrações ocupam na página ou na tela. A elipse compreende um espaço entre uma vinheta e outra, ou seja, sua justaposição simula a passagem do tempo nos quadrinhos (McCLOUD, 2005; MALLETT, 2009).

Na maioria das vezes, os requadros são as linhas que revestem as vinhetas, assim enfatizando as elipses. Os balões são envoltórios para o texto escrito, que indica a fala ou o pensamento de algum personagem. Os recordatórios, também, acomodam o texto escrito, ou seja, tem como função dentro do enredo a indicação do tempo e do lugar. As onomatopéias compreendem o estilo visual sonoro. As linhas cinéticas enfatizam a presença, a velocidade, a intensidade e a direção do movimento, também, por meio traços retos ou curvos, podem adquirir função expressiva. Os símbolos são recursos visuais que podem indicar algum estado físico, emocional ou psicológico das personagens (McCLOUD, 2005; MALLETT, 2009).

Nas HQ's há um estreitamento de escrita (informação percebida) e imagens (informações recebidas). Assim, as HQ's promovem o diálogo com os recursos da ilustração, das imagens e da narrativa. Esse diálogo e sua interpretação são reflexos dos elementos constitutivos da narrativa. Nesse sentido, Silva (2006, p. 77) corrobora quando sinaliza que:

a leitura (interpretação) de imagens integra-se numa história que é maior do que nós, num processo do qual não somos a origem; uma imagem, ao ser lida, insere-se numa rede de imagens já vistas, já produzidas, que compõem a nossa cotidianidade, a nossa sensação de realidade diante do mundo. A leitura (interpretação) de imagens não depende apenas do contexto imediato da relação entre leitor e imagem: para lê-la o leitor se envolve num processo de leitura (interpretação) que já está iniciado.

Segundo Vergueiro e Rama (2014), a linguagem quadrinizada no campo escolar é um recurso adicional e dinâmico no processo de ensino e de aprendizagem. É considerada um recurso didático em virtude da sua natureza lúdica que possibilita potencializar estratégias construtivistas de significados no resultado da compreensão de muitas situações. Ademais, são alternativas para atrair o aluno para as aulas, pois são “obras ricas em simbologia – podem ser vistas como objeto de lazer, estudo e investigação” (REZENDE, 2009, p. 126). Também, sua importância nas escolas é

tratada por Araújo, Costa e Costa (2008, p. 29) quando mencionam que:

os quadrinhos podem ser utilizados na educação como instrumento para a prática educativa, porque neles podemos encontrar elementos composicionais que poderiam ser bastante úteis como meio de alfabetização e leitura saudável, sem falar na presença de técnicas artísticas como enquadramento, relação entre figura e fundo entre outras, que são importantes nas Artes Visuais e que poderiam se relacionar perfeitamente com a educação [...].

Diante dos diferentes ciclos escolares, mais precisamente dos anos finais do Ensino Fundamental, Vergueiro e Ramo (2014, p. 28) enumeram algumas considerações acerca do uso das HQ's, quais sejam:

alunos se integram mais à sociedade que os rodeia, sendo capazes de distinguir os níveis local, regional, nacional e internacional, relacioná-los entre si e adquirindo a consciência de estar em um mundo muito mais amplo do que as fronteiras entre sua casa e a escola. O processo de socialização se amplia, com a inserção em grupos de interesse e a diferenciação entre os sexos. Têm a capacidade de identificar detalhes das obras de quadrinhos e conseguem fazer correlações entre eles e sua realidade social. As produções próprias incorporam a sensação de profundidade, a superposição de elementos e a linha do horizonte, fruto de sua maior familiaridade com a linguagem dos quadrinhos.

Não sabemos ao certo quando e onde surgiram as HQ's. Porém, sinalizamos a partir das contribuições de Carvalho (2006) que no Brasil foi criada a revista ilustrada e intitulada "Tico-Tico" que trazia poesias e passatempos divertidos, datada do ano de 1905.

No tocante aos primeiros registros das HQ's na educação brasileira, Mendonça (2002), Paiva (2017) e Ramos (2015) sinalizam que eram abordadas de forma clandestina, tolerada e recomendada. Outrossim, por muito tempo seu uso sofreu inúmeros protestos. Todavia, a partir da década de 80 do século passado eram inseridas, como acessórios, nos livros didáticos. Assim, caracterizando o momento da leitura ensinada/didatizada, mais precisamente no ensino da área de Linguagens e Códigos. Esse avanço deve-se ao longo processo de debates sobre a utilização de outras linguagens e gêneros no ambiente de ensino e aprendizagem. Ademais, em virtude dos documentos curriculares orientadores (Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil); da utilização em provas de avaliação de larga escala (Exame Nacional do Ensino Médio) e programas de incentivo à leitura criados pelo governo federal (Plano Nacional do Livro Didático e o Programa Nacional Biblioteca da Escola).

Segundo Pereira (2010b), as HQ's podem ser consideradas como recurso didático potencializador na prática do professor de Matemática, sendo os conteúdos abordados na perspectiva de uma aprendizagem lúdica e criativa. A autora enfatiza que:

quadrinhos poder ser utilizados de forma a estimular os alunos a criar tramas baseadas em situações matemáticas contribuindo, ainda, com a desmistificação da imagem negativa em torno da disciplina e mostrando que a Matemática pode ser vista de uma forma atraente, divertida e desafiadora (p. 01).

Todavia, seu emprego não deve ser subutilizado, ou seja, de forma discreta deve

estar em consonância com outras metodologias e recursos (SANTOS; RODRIGUES, 2013).

Ainda se tem um cenário pouco expressivo em virtude do escasso material direcionado e disponibilizado no campo de trabalho do professor de Matemática. Também, é inexpressivo o quantitativo de professores que tentam utilizar esse gênero de linguagem nas aulas de Matemática (PEREIRA, 2010b). Para Martins e Pereira (2013, p. 09), desenvolver atividades de construção de HQ's é duplamente desafiador:

para o professor, ante a necessidade de romper com a forma habitual de trabalhar e inserir em seu conjunto de ferramentas didáticas uma nova ferramenta. A ideia pré-concebida de que os alunos com maior idade não demonstrariam interesse em escrever, desenhar e apresentar através de HQ/Tirinhas suas dúvidas, dificuldade ou soluções de problemas. O segundo desafio foi o fato de serem alunos com maior idade e que poderiam rejeitar as atividades, desmotivando-se para a construção de HQ/Tirinhas.

A dificuldade no processo de ensino e aprendizagem da Matemática é uma problemática constatada por diversos pesquisadores que analisaram como os alunos apreendiam os diversos conteúdos ensinados (FIORENTINI; LORENZATO, 2012).

Diante do exposto, é necessário reinventar as aulas de Matemática para que possa corroborar na construção e promoção de um ambiente que favoreça a aprendizagem significativa, e, que, conseqüentemente, desmistifique que o fazer Matemática não é para todos.

### 3 | PERCURSO METODOLÓGICO

A tipologia da pesquisa utilizada no estudo com o intuito de alcançar os objetivos propostos compreende a abordagem, predominantemente, de caráter qualitativo do tipo aplicada e exploratória. Do ponto de vista da natureza, é do tipo aplicada porque tem o objetivo de gerar conhecimentos e contribuir para fins práticos. Quanto aos objetivos, é exploratória porque deve lançar luzes que possam permitir uma compreensão do objeto de estudo e, conseqüentemente, possibilitar a manipulação de elementos necessários para obtenção dos resultados que o pesquisador deseja generaliza-los.

O método utilizado na produção da HQ's é do tipo autoral. Para Brandão (2016, p. 09):

quando uma história em quadrinhos é produzida por um grupo de amigos ou por uma dupla criativa, o controle das ideias e/ou da experimentação está mais próximo das mãos dos autores. [...] o artista escreve, produz as imagens, as colore (se for o caso), faz o balonamento e a tipografia.

Destarte, foram definidos: os balões, utilizados para a escrita da fala dos personagens; as onomatopeias ou explosões sonoras, que representam os sons e ruídos; as linhas cinéticas, que representam os movimentos; os desenhos iconográficos, que são representados por uma imagem que têm uma característica específica;

as metáforas visuais, que representam um sentimento ou um acontecimento; a sequencialidade da narrativa e os modelos temáticos, utilizados para representar as personagens e o ambiente que os rodeiam.

Para tanto, foi delimitado como tópico de estudo as operações aritméticas fundamentais. Segundo Bezerra (2008, p. 17):

Documentos oficiais, como os [...] (PCN) de Matemática e relatórios de avaliação, entre eles os apresentados pelo Sistema de Avaliação de Educação Básica (SAEB), ressaltam o estudo das operações básicas como um tema central nos currículos do Ensino Fundamental.

## **4 | ATIVIDADE LABORAL NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: MINICURSO “HQ’S NO ENSINO DE MATEMÁTICA”**

Intitulado como “HQ’s no ensino de Matemática”, objetivamos em nosso minicurso promover o estudo de alguns conceitos básicos sobre o gênero de linguagem textual e planejar sua utilização para o ensino de Matemática.

O minicurso aconteceu no IV Encontro Cajazeirense de Matemática (IV ECMAT), trata-se de um evento promovido pelo Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), Campus Cajazeiras. Na data 24 de agosto de 2017 estiveram presentes 15 dos 20 inscritos, esses, acadêmicos dos cursos de Licenciatura em Matemática do IFPB e da Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). O minicurso tinha 08 horas aulas.

O uso de Quadrinhos na formação de professores de Matemática ainda é embrionária, por isso poucas pesquisas estão direcionadas para essa vertente, de modo que para esse recurso chegar às salas de aulas do ensino fundamental e médio precisa estar inserido à formação continuada dos professores. Alguns professores até utilizam os Quadrinhos nas suas aulas, mas isso representa uma parcela mínima no ensino (PEREIRA, 2010a, p. 08).

Iniciamos abordando os possíveis passos para a elaboração das HQ’s, quais sejam: linguagem e princípios da produção em HQ’s; roteiro e narrativa; criação e desenvolvimento de personagens; composição para quadrinhos; imagens – estilos e possibilidades; tiras; quadrinhos alternativos; balonamento, tipografia e onomatopeia; arte final – tradicional e digital; cores para quadrinhos; edição e mercado de HQ’s.

Após este, abordamos algumas notas sobre as potencialidades de Quadrinhos nas aulas de Matemática para construção de HQ’s e a criação dos mesmos a partir do estudo das operações aritméticas fundamentais.

Em seguida, foram encaminhadas as orientações para o planejamento, produção e culminância das HQ’s. A partir do modelo de instrumental de planejamento, foram definidos pelos participantes, o público-alvo, os objetivos (competências e habilidades); o conteúdo programático; o protocolo metodológico e a gestão do tempo para utilização das HQ’s nas aulas de Matemática.

À guisa de ilustração, a Figura 1 aborda os números primos a partir de um estilo

rápido de leitura e ao mesmo tempo interessante. Mayer (2009) explica que quanto mais a mensagem for parecida com conversa informal mais fácil será o entendimento da informação que está sendo repassada.

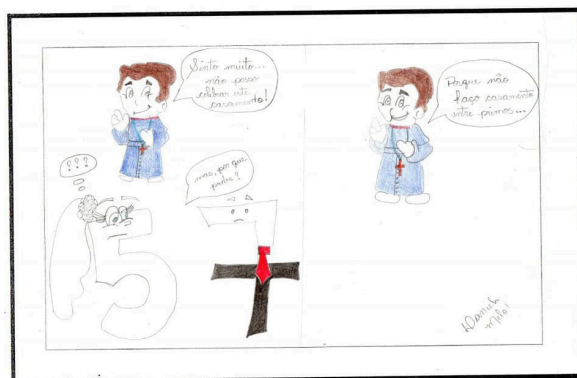


Figura 1: HQ's do participante A.

Fonte: Minicurso no IV ECMAT.

A Figura 2 aborda as expressões numéricas por meio da linguagem informal. O destaque é quanto ao uso da calculadora como recurso didático para a exploração conceitual em virtude de permitir que os alunos possam se concentrar nas regularidades, na análise de resultados e não apenas no algoritmo. Selva e Borba (2010, p. 112) consideram:

que temos que abandonar esta visão equivocada que coloca as ferramentas tecnológicas um poder que as mesmas não possuem, de restringir o desenvolvimento cognitivo, e apostar nas possibilidades que estas tecnologias trazem para este desenvolvimento.

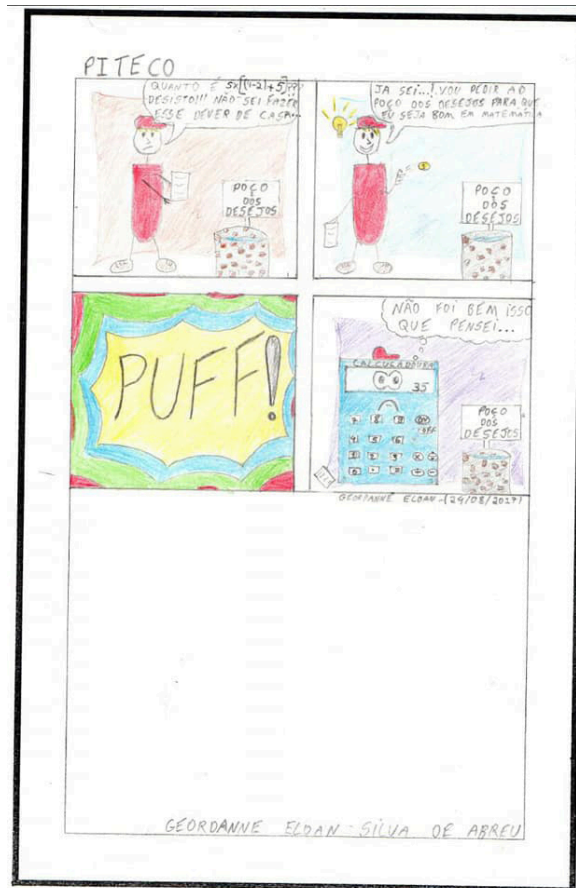


Figura 2: HQ's do participante B.

Fonte: Minicurso no IV ECMAT.

A partir das HQ's supracitadas e concordando com Silva, Leite e Lins (2018), de fato, as palavras e imagens, juntas, ensinam de forma mais eficiente, pois a interligação do texto com a imagem, existente nas HQ's, amplia a compreensão de conceitos.

Na etapa de confecção das HQ's, foram produzidos o enredo narrativo e o delineamento dos elementos constitutivos das HQ's de forma individual. A Figura 3 apresenta o enredo de um dos participantes do minicurso. O participante C considera que o uso de HQs pode auxiliar no entendimento das questões-problemas de conteúdos matemáticos, além de envolver assuntos relacionados ao dia-a-dia, que podem servir para aproximar os alunos, tanto do professor como da Matemática.

**Enredo**

Um professor estava planejando começar o conteúdo adição com suas crianças de repente ele teve uma ideia incrível de levar os alunos a entenderem que a adição poderia ser ensinada no cotidiano de uma forma simples, levando-os ao mundo mágico dos números. O professor transformou-se no super herói matemático levando os alunos por uma jornada as coisas simples do cotidiano. Agora os alunos não precisam mais se perguntar onde utilizam aquilo que estavam aprendendo.

Figura 3: Enredo da HQ's do participante C.

Fonte: Minicurso no IV ECMAT.

A atividade laboral realizada por eles lhes permitiu o manuseio de produções de HQ's de forma dinâmica, subsidiando o embasamento teórico e metodológico do recurso didático. Outrossim, percebemos que houve uma chamada de motivação para uma proposta metodológica potencial com o uso de HQ's por parte de professores em processo de formação inicial, a ser utilizado em aulas de Matemática.

Após a elaboração e socialização das HQs, aplicamos um curtigrama, no qual o principal objetivo foi promover a auto-avaliação da aprendizagem e o *feedback* da prática de ensino. Constatamos, que todos os sujeitos participantes se mostraram capazes para aplicar os conhecimentos e práticas adquiridas durante o minicurso, bem como sua aplicabilidade na rotina do professor de Matemática.

Conforme relato dos participantes, a produção das HQ's deve acontecer em um ambiente de autonomia e de criatividade, onde a elaboração dos roteiros compreenda a linguagem e os cenários mais próximos do cotidiano do público-alvo, ou seja, que apresente o texto das questões matemáticas de forma mais clara e compreensível para o aluno-leitor.

A experiência dessa atividade laboral não se esgota aqui. Assim, temos a motivação de ampliar esse minicurso para atingir um número maior de professores em processo de formação inicial e/ou continuada, bem como abordar o formato digital da linguagem quadrinística.

O uso da Histórias em Quadrinhos Digitais (HQD's) no ensino e aprendizagem de Matemática pode promover um ambiente investigativo, atrativo e prático. Ademais, pode potencializar a elaboração de construções de forma dinâmica, auxiliando na formalização dos conceitos e contribuindo como forma de incentivo ao uso de recursos tecnológicos em aulas de Matemática (SILVA; LEITE; LINS, 2018).

## **5 | INICIAÇÃO CIENTÍFICA NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: PROJETO “[...] HISTÓRIAS EM QUADRINHOS (HQ'S) NO ENSINO DE MATEMÁTICA”**

Nosso Projeto, intitulado “Aspectos metodológicos do gênero de linguagem Histórias em Quadrinhos (HQ's) no ensino de Matemática”, vinculado ao Programa Institucional de Voluntários de Iniciação Científica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (PIVIC/IFPB) Cota 2017/18, área temática: educação e processo de ensino e aprendizagem, teve como base as contribuições de Vergueiro e Rama (2014).

Vergueiro e Rama (2014) citam que em muitos países são desenvolvidas orientações específicas para o uso das HQ's no currículo escolar. No âmbito nacional, os autores apresentam inúmeros aspectos potenciais ao seu uso, enquanto instrumento didático e enumerados a partir dos documentos oficiais, Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) e os PCN's, quais sejam:

- os estudantes querem ler os quadrinhos;
- palavras e imagens, juntos, ensinam de forma mais eficiente;
- existe um alto nível de informação;
- as possibilidades de comunicação são enriquecidas pela familiaridade com as HQ's;
- auxiliam no desenvolvimento do hábito de leitura;
- enriquecem o vocabulário dos alunos;
- possibilita o leitor a pensar e imaginar;
- têm um caráter globalizador e
- podem ser utilizados em qualquer nível escolar e com qualquer tema.

Assim, os objetivos do referido projeto consistiam em apresentar aspectos metodológicos acerca da apropriação das HQ's no ensino de Matemática; produzir uma HQ's acerca do tema operações aritméticas fundamentais e confeccionar um roteiro com sugestões, para que professores da Educação Básica utilizem as HQ's no ensino de Matemática.

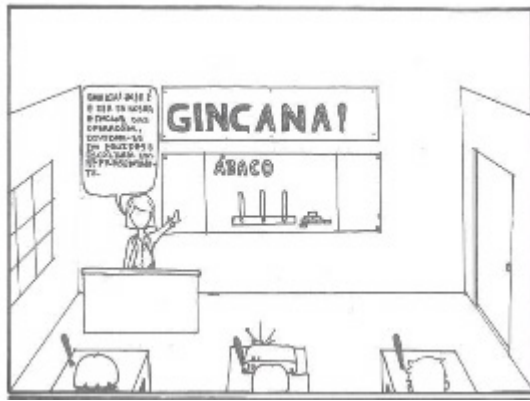
O protocolo do percurso metodológico compreendeu o estudo teórico e metodológico para a apropriação das HQ's no ensino de Matemática; o estudo dos elementos essenciais e característicos que constituem o gênero de linguagem HQ's; a elaboração da narrativa sobre o tópico “operações aritméticas fundamentais” e a confecção da HQ's.

Vale ressaltar que a confecção da HQs foi realizada pelos 03 (três) alunos participantes do projeto, matriculados no curso de Licenciatura em Matemática do Campus Cajazeiras, de forma colaborativa, pois a habilidade que um aluno não tem pode ser encontrada em outro aluno e complementarem-se.

Carvalho (2006) propõe duas maneiras para apropriação dos quadrinhos em sala de aula desde como ferramenta didática até o exercício multidisciplinar na criação de HQ's. Ademais, Pereira (2010a), acrescenta a utilização das HQ's e tirinhas já publicadas nas mídias, a sua confecção junto com os alunos e a sua utilização (confecção) para um fim educacional.

A Figura 4 apresenta uma HQ's, articulada com outros recursos didáticos apresentados em seu enredo, bem com o estreitamento de algumas estratégias de ensino para a promoção de um ambiente potencial de aprendizagem da Matemática.





**ÁBACO**

PRIMEIRA CALCULADORA UTILIZADA PELO HOMEM.

O ÁBACO É UM ANTIGO INSTRUMENTO DE CÁLCULO, FORMADO POR UMA MOLDBRA COM BASTIÇOS OU FRAZES PARALELOS, DISPOSTOS NO SENTIDO VERTICAL, CORRESPONDENTES, CADA UM A UMA POSIÇÃO DIGITAL (UNIDADES, DEZENAS, ...)

EMPREGA EM PROCESSO DE CÁLCULO COM SISTEMA DECIMAL, ATRIBUINDO A CADA HASTE UM MÚLTIPLO DE DEZ.

AGORA, QUE TODOS CONHECEM O ÁBACO, A PRIMEIRA ETAPA DA PROVA CONSISTE EM REALIZAR ALGUMAS SUBTRAÇÕES COM ESSE INSTRUMENTO. VAMOS VER SE VOCÊS SÃO CAPAZES PARA OBTEREM O RESULTADO.

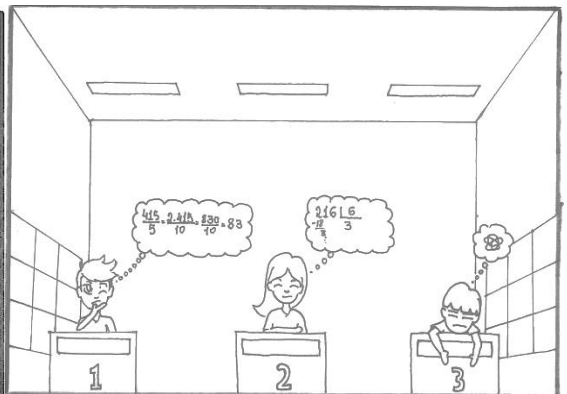
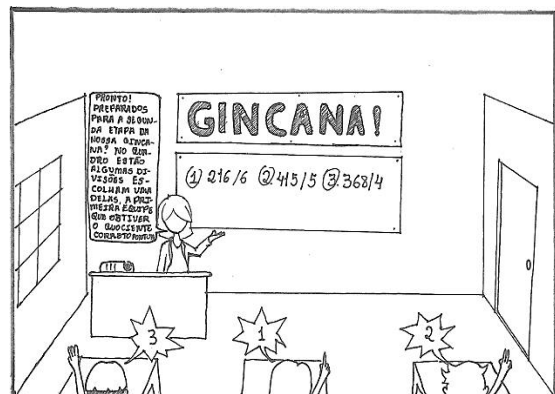
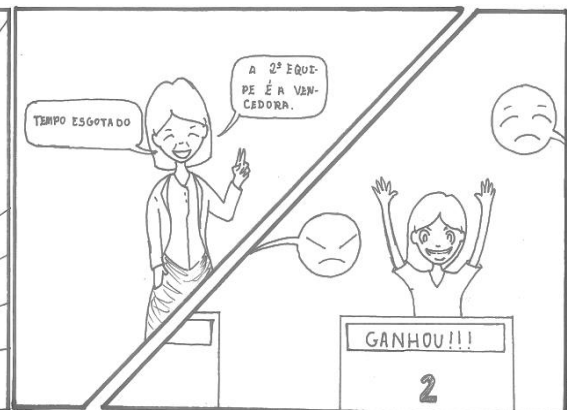
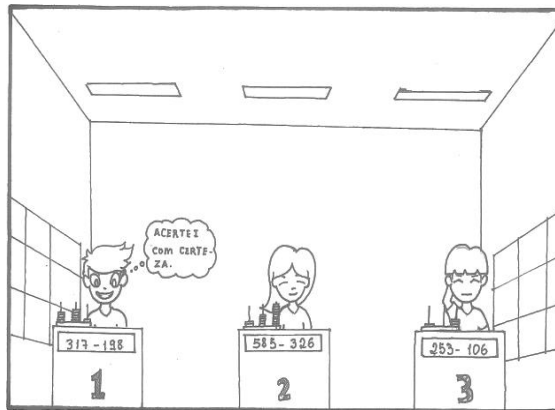




Figura 4: HQ's "A gincana das quatro operações".

Fonte: Elaboração própria.

A tomada de partida para a produção do enredo narrativo da HQ's, intitulada "A gincana das quatro operações" perpassa a abordagem de cunho interdisciplinar. Pombo (1994, p. 13) cita que do ponto de vista escolar e constituída numa concepção

bem ampla, a interdisciplinaridade pode ser entendida como:

qualquer forma de combinação entre duas ou mais disciplinas com vista à compreensão de um objeto a partir da confluência de pontos de vista diferentes e tendo como objetivo final a elaboração de uma síntese relativamente ao objeto comum.

Nessa perspectiva, os conteúdos abordados devem possibilitar a construção de novos instrumentos cognitivos e novos significados. A interdisciplinaridade acontece por meio do estreitamento de saberes e reflete na construção de diálogos a partir das suas confluências/divergências, bem como das fronteiras das diferentes disciplinas.

Outrossim, o recurso da linguagem escrita nas aulas de Matemática pode potencializar o fenômeno do letramento matemático. Assim, integrando as experiências individuais e coletivas na busca da construção e apropriação dos conceitos matemáticos. Conforme Nacarato e Lopes (2009, p. 141), “Sem dúvida, na conversa consigo mesmo – que precede a produção de um texto escrito, – e no diálogo que esse material desencadeia com o outro, podem-se fortalecer vínculos cognitivos e afetivos com a Matemática”.

Para os referidos autores, os alunos apresentam dificuldades com a articulação entre a língua materna e a linguagem matemática, ou seja, para resolver problemas matemáticos a partir da interpretação dos enunciados propostos. Diante disso, a linguagem das HQ's pode otimizar a funcionalidade para tarefa primeira de interpretar o enunciado da questão matemática, bem como aproximar o estudante do universo da leitura e da imaginação.

Ademais, por meio da resolução de problemas enquanto estratégia adequada para propiciar uma participação ativa e questionadora do aluno no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, foram apresentadas algumas sugestões de trabalho com referências históricas, conforme podem ser verificadas na Figura 4. Para Miguel e Miorim (2005) a utilização de problemas históricos é considerada como mais um elemento motivador para o ensino de Matemática.

Não obstante, as investigações matemáticas constituem uma das atividades que os sujeitos alunos podem realizar, bem como tem uma relação estreita com a resolução de problemas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 23), apresenta o conceito de investigação matemática, no âmbito de um ambiente de ensino e aprendizagem, como:

ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professor.

Também, a ludicidade, por meio da apropriação dos jogos matemáticos, surge no enredo da HQ's “A gincana das quatro operações” enquanto estratégia potencial para resolução de problemas, bem como para a promoção de um ambiente de aprendizagem motivador, criativo e autônomo. Lima (1991) caracteriza os jogos matemáticos por

situações problema que envolvem jogos com disputa, quebra-cabeças, desafios e outros.

Diante do exposto, enfatizamos que a experiência desse projeto de iniciação científica, bem como seus resultados preliminares, porém relevantes para o momento, nos despertou para a motivação em ampliar a discussão das potencialidades metodológicas do recurso didático, nosso objeto de estudo, de tantos outros conteúdos que compreendem o currículo da matemática escolar. Contudo, essa etapa da pesquisa é finalizada com a apresentação de uma proposta de roteiro metodológico para o uso das HQ's na sala de aula.

## 6 | PROPOSTA DE ROTEIRO METODOLÓGICO PARA O USO DAS HQ'S NA SALA DE AULA

Ainda existe o receio por parte do professor de Matemática quanto à aplicação das HQ's como recurso didático potencial para a promoção de um ambiente de aprendizagem problematizador do conhecimento e protagonista da atuação dos sujeitos envolvidos nessa construção.

De modo generalista, a Figura 5 ilustra uma sugestão de roteiro para que o professor faça a apropriação da HQ's na sala de aula de forma planejada e dirigida as suas potencialidades.

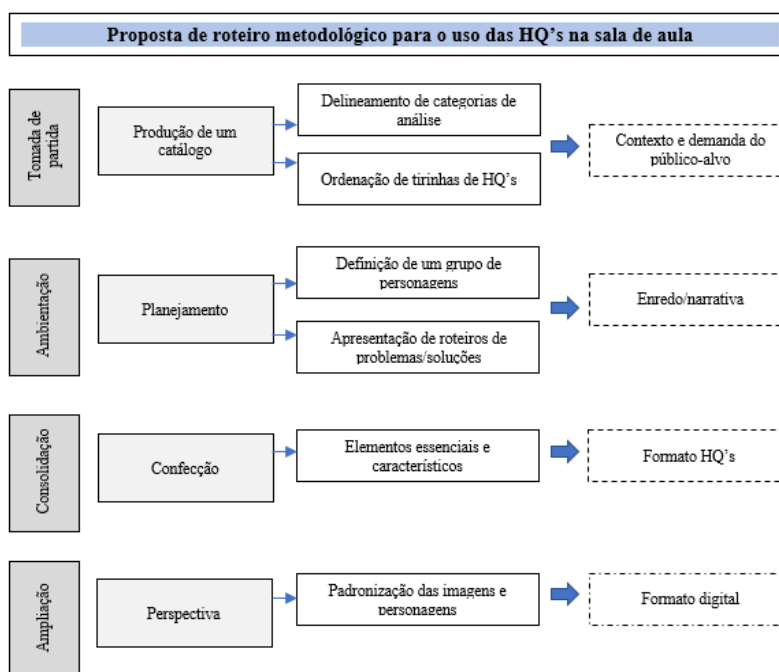


Figura 5: Proposição metodológica para o uso das HQ's na sala de aula.

Fonte: Elaboração própria.

A proposta de roteiro metodológico compreende 04 (quatro) momentos, quais

sejam: tomada de partida, ambientação, consolidação e ampliação. A tomada de partida consiste na produção de um portfólio, mais precisamente de um catálogo, que compreenda a ordenação de tirinhas de HQ's de algumas obras populares a partir do delineamento de categorias de análise que atenda o contexto e a demanda do público-alvo. No momento da ambientação, devem ser elaboradas questões do tipo adaptadas e/ou autorais a partir das HQ's selecionadas e catalogadas (portfólio), bem como a definição de um grupo de personagens para a elaboração das HQ's. Outra etapa, compreende desde o planejamento dos roteiros referentes aos problemas matemáticos com suas respectivas soluções por meio de quadrinhos até a consolidação dos roteiros em formato de HQ's (apresentação do referido gênero de linguagem a partir dos seus elementos essenciais e característicos). O momento da ampliação, consiste no aperfeiçoamento do projeto na perspectiva da padronização das imagens e dos personagens, assim, sugere-se a criação das HQD's.

## 7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresenta alguns desdobramentos metodológicos a partir da apropriação das HQ's para o ensino e aprendizagem da Matemática, mais precisamente para o estudo das operações aritméticas fundamentais. Portanto, depreendemos que o estreitamento de estratégias de ensino e articuladas com diversos recursos didáticos torna-se necessário na prática do professor de Matemática e vem ressignificar o referido recurso didático.

Contudo, os resultados positivos evidenciados pela diversidade de estratégias visuais encontradas para a confecção das HQ's e pela criticidade diante dos temas abordados vêm legitimar a importância desse recurso didático como uma linguagem que contribui para a aprendizagem da Matemática e para a formação de professores críticos e reflexivos.

## REFERÊNCIAS

ARAÚJO, G. C.; COSTA, M. A.; COSTA, E. B. As histórias em quadrinhos na educação: possibilidades de um recurso didático pedagógico. **Revista Eletrônica de Ciências Humanas, Letras e Artes**. Uberlândia, n. 2, julho/dezembro, 2008, p. 26-27.

BRANDÃO, D. **A linguagem e os princípios da produção em HQ's**. Fortaleza: Fundação Demócrito Rocha, 2016. (Fascículo 1)

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BEZERRA, M. C. A. **As quatro operações básicas: uma compreensão dos procedimentos algorítmicos**. Natal, 2008. 138 f. Dissertação (Mestrado) Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, 2008.

- CAGNIN, A. L. **Os Quadrinhos**. São Paulo: Ática, 1975.
- CARVALHO, D. J. **A Educação está no Gibi**. Campinas, SP: Papirus Editora, 2006.
- FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. – (Coleção formação de professores)
- LIMA, P. F. Jogos: Uma ponte para a matemática e a formação do cidadão. II ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** São Paulo, 1991.
- McCLOUD, S. **Desvendando os quadrinhos**. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, 2005.
- MALLET, T. **Os quadrinhos e a internet**: aspectos e experiências híbridas. 2009. 230 f. Dissertação (Mestrado em Artes). Escola de Belas-Artes da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.
- MARTINS, E. B.; PEREIRA, A. C. C. O ensino de análise combinatória utilizando história em quadrinhos: uma nova experiência. XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Curitiba, 2013.
- MAYER, R. E. The promise of multimídia learning: using the same instructional design methods across different media. **Learning and Instruction**, v. 13, p. 125–139, 2003.
- MENDONÇA, J. M. P. **Traça Traço Quadro a Quadro**: a produção de histórias em quadrinhos no ensino da Arte. Belo Horizonte: C/Arte, 2008.
- MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. – (Tendências em Educação Matemática, 10)
- NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (Orgs.). **Escritas e Leituras na Educação Matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.
- PAIVA, F. S. **Histórias em Quadrinhos na Educação**. 1. ed. Salvador: Quadro a Quadro, 2017.
- RAMOS, P. **Histórias em Quadrinhos na Formação de Professores**: uma discussão necessária. In: PEREIRA, S.; TOSCANO, M. (Eds.) 3º Congresso Literacia, Media e Cidadania – Livro de Atas. Lisboa, CECS: Universidade do Minho: 2015.
- PEREIRA, A. C. C. O uso de quadrinhos no Ensino da Matemática: um ensaio com alunos de licenciatura em Matemática pela UECE. X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. **Anais...** Salvador, 2010a.
- PEREIRA, A. C. C. Algumas notas sobre as potencialidades de quadrinhos nas aulas de matemática. REMATEC: **Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, Natal, RN: EDURFN, ano 5, n. 6, jul./nov., 2010b, p. 20-24.
- POMBO, O.; GUIMARÃES, H. M.; LEVY, T. **A interdisciplinaridade**: reflexão e experiência. 2. ed. Lisboa: Texto, 1994.
- PONTE, J. P. da.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. – (Tendências em Educação Matemática, 7)
- REZENDE, L. A. **Leitura e formação de leitores**: vivências teórico-práticas. Londrina: EdUEL, 2009.
- SANTOS, L. S. dos; RODRIGUES, C. G. Uma abordagem geométrica da utilização de história em quadrinhos nos anos finais do ensino fundamental. VI CONGRESSO INTERNACIONAL DO ENSINO

DE MATEMÁTICA. **Anais...** Canoas, 2013.

SANTOS, R. M. B. dos; MOURA, M. B. M. de.; ROSENO, J. N. A.; RODRIGUES, F. B. Potencialidades metodológicas do gênero de linguagem Histórias em Quadrinhos (HQ's) para o estudo das operações aritméticas fundamentais. X ENCONSTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, V ENCONTRO CAJAZEIRENSE DE MATEMÁTICA. **Anais...** Cajazeiras, 2018.

SELVA, A. C. V.; BORBA, R. E. S. R. **O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental.** Belo Horizonte: Autêntica, 2010. – (Tendências em Educação Matemática, 21)

SILVA, H. C. Lendo imagens na educação científica: construção e realidade. **Pro-Posições**, Campinas, v. 17, n. 1(49), jan./abr. 2006, p. 71-84.

SILVA, R. P. da.; LEITE, N. M.; LINS, A. F. Inclusão de histórias em quadrinhos digitais na educação matemática. III CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO INCLUSIVA. **Anais...** Campina Grande, 2018.

VERGUEIRO, W.; RAMA, A. **Como usar as histórias em quadrinhos na sala de aula.** São Paulo: Contexto, 2014.

## MONDRIAN: APRECIÇÃO, REFLEXÕES E APROXIMAÇÕES – UM RELATO DE EXPERIÊNCIA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**Dirceu Zaleski Filho**

Universidade Cidade de São Paulo – UNICID -  
Faculdade de Pedagogia  
São Paulo – SP

**RESUMO:** Alunas do curso de Pedagogia da UNICID – Universidade Cidade de São Paulo – visitaram em 2016 no CCBB “Centro Cultural Banco do Brasil” em São Paulo a exposição “Mondrian e o movimento de STIJL”. Esse grupo de pintores e arquitetos aproximou intencionalmente a Arte da Matemática. Posteriormente nas aulas de “Fundamentos Metodológicos do Ensino de Matemática” elaboraram um relatório com reflexões sobre a exposição com foco nessa aproximação e participam de uma socialização sobre a apreciação, reflexões individuais e aproximações entre a Matemática e a Arte de Mondrian e do grupo de STIJL.

**PALAVRAS-CHAVE:** Matemática; Arte; Pedagogia; Metodologia; Educação.

**ABSTRACT:** Students of the UNICID Pedagogy course - Universidade Cidade de São Paulo - visited in 2016 at the CCBB “Banco do Brasil Cultural Center” in São Paulo the exhibition “Mondrian and the STIJL movement”. This group of painters and architects intentionally approached the Art of Mathematics.

Subsequently in the classes of “Methodological Foundations of Mathematics Teaching”, they elaborated a report with reflections on the exhibition focusing on this approach and participate in a socialization on the appreciation, individual reflections and approximations between Mathematics and the Art of Mondrian and the group of STIJL .

### 1 | INTRODUÇÃO

Ainda soa estranho para grande parte das pessoas ouvirem termos como “Arte e Matemática” ou “Matemática e Arte”, pois, para elas esses temas, ou melhor, essas áreas do conhecimento em princípio nada têm em comum, e em suas vidas escolares Pintura sempre foi Arte e Matemática foi sempre Matemática. Esse é o caso da maioria das alunas do curso de Pedagogia que quando perguntadas sobre o que para elas é Matemática respondem com grande convicção:

-E número, são contas!

A Matemática e a Arte em geral em afastaram-se em algum momento de nossa história e como está escrito no livro Matemática e Arte, (ZALESKI FILHO, 2013. p. 13) “[...] a Arte “afastou-se” da Matemática e de outros campos das Ciências. Qual o motivo ou os motivos desse afastamento? Talvez uma das razões



tenha sido uma herança da filosofia grega: a ideia de um mundo dividido em superior e inferior [...]”. O mundo superior seria o mundo das ideias e o inferior seria onde estas ideias seriam materializadas, e a Arte seria uma das formas dessa materialização.

Matemática e Arte aparecem juntas desde os primeiros registros feitos pelos nossos ancestrais. Ao retratar animais e paisagens, esculpir em ossos marcas que representassem algum tipo de registro numérico sobre animais capturados ou outras quantidades esses homens iniciaram a busca da organização do seu entorno utilizando Arte e Matemática.

GOMBRICH (1995) apud (ZALESKI FILHO, 2013, p.13) nos diz que “[...]talvez esses caçadores tivessem a crença de que o ato de fazer a imagem de suas presas, e em alguns casos destruí-las com suas lanças e machados de pedra, faria com que os animais verdadeiros se submetessem ao seu domínio. [...]”

Esses desenhos eram também o início de uma primeira forma de escrita em que eram feitos registros sobre nossas primeiras histórias, nossos primeiros mitos. E à medida que o homem cria a escrita e os sistemas de numeração formalizando conceitos sobre as formas surgem a Arte e a Matemática as quais em um primeiro momento vistas de maneiras independentes.

Indo em direção ao século XX, em 1937 Euclides Roxo que foi Diretor do Colégio Pedro II na cidade do Rio de Janeiro e é considerado o primeiro educador matemático brasileiro publicou o livro *A Matemática na Educação Secundária*, um livro que expõe suas ideias em relação ao aprendizado da Matemática. (ROXO 1937, p.269) as justifica citando matemáticos como Felix Klein e Henri Poincaré, afirmando que eles sentiram o ponto de vista estreito, em que geralmente se mantinham os professores secundários de seus países, apegados ao sentido clássico do ensino, que não mais se coadunava com o papel que a ciência matemática, graças aos seus modernos desenvolvimentos, deve ter no progresso material e cultural dos tempos que corriam.

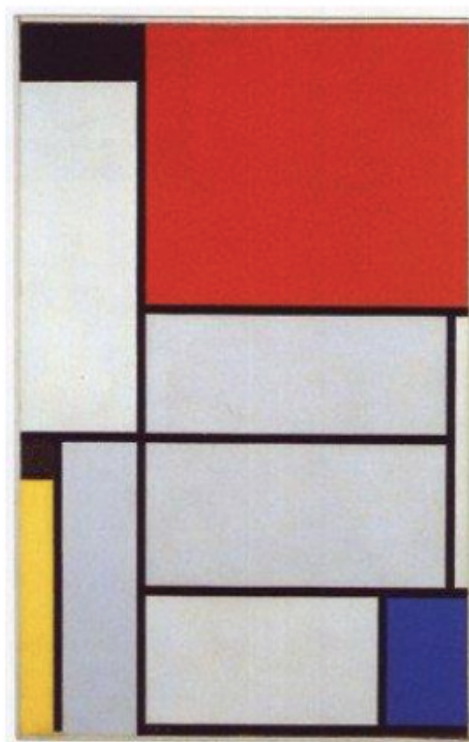
No livro, Euclides Roxo propõe que a Matemática faça conexões com as grandes representantes da atividade e da aspiração humana como as ciências naturais, etonologia, filosofia, jurisprudência, religião e com a **Arte** (grifo nosso) em um grande e único empreendimento do espírito humano.

Levando em conta as considerações de ROXO e as reflexões de ZALESKI FILHO e o fato de que em 2016 no CCBB “Centro Cultural Banco do Brasil” em São Paulo foi realizada a exposição “Mondrian e o movimento de STIJL” e que esse grupo de pintores e arquitetos aproximou intencionalmente a Arte da Matemática propusemos com a supervisão da coordenadora do curso de Pedagogia da universidade cidade de São Paulo, professora doutora Maria Heloisa Silva Aguiar, uma AACCC – Atividades Artísticas e Científicas Complementares – para as quase 600 alunas(os) que cursavam o segundo e terceiros semestre no meses de março/abril na disciplina de “Fundamentos Metodológicos do Ensino de Matemática 1”. Para essas atividades foram atribuídas uma nota e horas que foram computadas como estágio feito pelas(os) alunas(os). Feita a visita elaboraram um relatório com reflexões sobre a exposição com foco nessa

aproximação da Matemática e Arte e participaram posteriormente de uma socialização em sala de aula sobre a apreciação, reflexões individuais e aproximações entre a Matemática e a Arte de Mondrian e do grupo de Stijl.

## 2 | MONDRIAN E O GRUPO DE STIJL

Com sua arte abstracionista, Piet Cornelius Mondrian (1872-1944) é um exemplo da união moderna entre Matemática e Arte. A obra, Quadro no 1, de 1921, é marco inicial da aproximação entre as duas áreas. Na pintura, o artista faz uso de formas e conceitos geométricos, das cores primárias (vermelho, azul e amarelo, que ele considerava como as únicas existentes e que representavam as formas) e das cores preta, branca e cinza, que representavam os espaços. Nela, fica identificada a criação de um movimento de vanguarda o De Stijl (o Estilo), criado por pintores, arquitetos e designers, entre outros, chamado de “Neoplasticismo” ou “Nova Imagem da arte”.



Quadro I com Preto, Vermelho, Azul e Azul-claro de Piet Mondrian, 1921. Óleo sobre tela 96,5 x 60,5. Museu Ludwig, Colônia

(ZALESKI FILHO, 2013, pag. 90) comenta que Mondrian escreveu vários livros para explicar e defender suas ideias sobre a nova imagem da Arte. Em seu artigo autobiográfico “Rumo à verdadeira visão da realidade”, escrito em 1942 e publicado em 1957 escreve assim:

Excluí cada vez mais de minhas pinturas as linhas curvas, até que finalmente minhas composições consistiram unicamente em linhas horizontais e verticais, que formam cruces, cada uma separada e destacada da outra. Observando o mar, o céu, e as estrelas busquei definir a função plástica através de uma multiplicidade

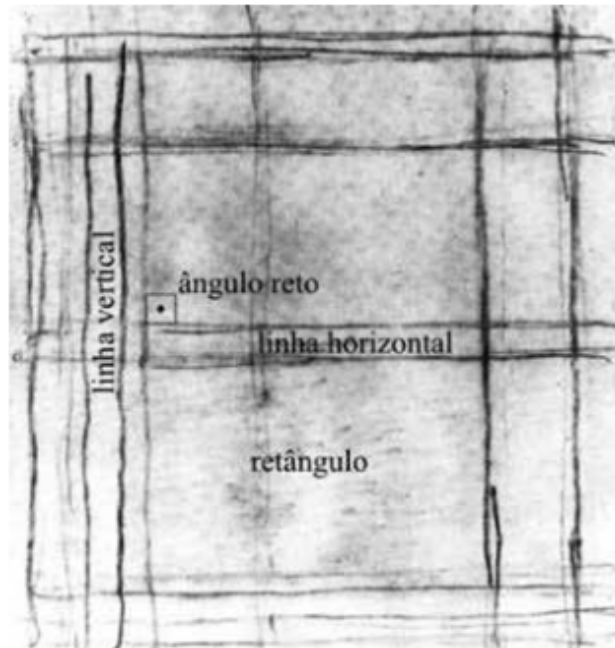
de verticais e horizontais que se cruzavam. Impressionado pela imensidão da natureza, tratava de expressar sua expansão, calma e unidade. Ao mesmo tempo, estava completamente convencido que a expressão visível da natureza é ao mesmo tempo sua limitação; as linhas verticais e horizontais são a expressão de forças opostas; isto existe em todas as partes e tudo o que domina sua ação recíproca constitui a vida. Reconheci que o equilíbrio de qualquer aspecto da natureza reside na equivalência dos elementos que se opõem. Senti que o trágico surgia quando faltava essa equivalência. Vi o trágico em um amplo horizonte ou em uma catedral.

E nesse mesmo artigo (pág. 34) cita conceitos de Geometria para novamente defender os fundamentos do Neoplasticismo que foram seguidos pelos pintores, designers e arquitetos que compuseram o movimento De Stijl, (ZALESKI FILHO, 2013, pag. 106).

[...]Concluí que o [ângulo reto] é única relação constante e que, por meio das proporções da dimensão, se podia dar movimento a sua expressão constante, quer dizer dar-lhe vida. [...]Excluí cada vez mais das minhas pinturas as [linhas curvas], até que finalmente minhas composições consistiram unicamente em linhas [horizontais e verticais] que formavam [cruzes], cada uma separada e destacada das outras. Observando o mar, o céu e as estrelas busquei definir a função plástica por meio de uma [multiplicidade] de [verticais e horizontais] que se [cruzavam]. [...]Ao mesmo tempo estava completamente convencido que a expansão visível da natureza e ao mesmo tempo sua limitação; as linhas verticais e horizontais são expressão de duas forças em oposição; isto existe em todas as partes e domina a tudo; sua ação recíproca tudo domina. [...]Comecei a determinar [formas]: as verticais e horizontais se converteram em [retângulos]. [...] Era evidente que os retângulos como todas formas, tratam de prevalecer uma sobre as outras e devem ser neutralizadas por meio da composição. Em definitivo, os retângulos nunca são um fim em si mesmo, mas uma consequência lógica de suas [linhas] determinantes que são [contínuas] no [espaço] e aparecem espontaneamente ao efetuar-se a cruz de linhas verticais e horizontais. [...]Mais tarde, a fim de suprimir as manifestações de [planos] como retângulos reduzi a cor e acentuei as linhas que os limitavam cruzando-as.

No artigo de 1937, “Arte plástica e arte plástica pura”, Mondrian (1957, p. 80) novamente faz uso da Geometria para fundamentar o Neoplasticismo, (ZALESKI FILHO, 2013, p.107):

Pois toda [linha], toda [forma], representa uma [figura]; nenhuma forma é absolutamente neutra. A rigor tudo de ser relativo, mas já que necessitamos das palavras para expressar nossos conceitos, devemos nos ater a estes termos. Entre as distintas formas, podemos considerar como neutras aquelas que não têm complexidade nem as particularidades que possuem as formas naturais ou abstratas em geral. Podemos chamar neutras aquelas que não evocam sentimentos ou ideias individuais. As formas geométricas podem ser consideradas neutras por ser uma abstração tão profunda, e podem ser preferidas as outras formas neutras por causa da elasticidade e pureza de suas formas.



Piet, Mondrian. *Estudo para Cidade de Nova Iorque*. 1941. Carvão em papel, 22,8 x 20,9 cm

Musée national d'art moderne, Centre Georges Pompidou, Paris.

Obras de outros artistas que fizeram parte do movimento De Stijl



Mies Van der Rohe - Pavilhão da Alemanha. Barcelona, 1929



Cinema-restaurant L'Aubette (1927) – Theo Van Doesburg



Cadeira Vermelha e Azul, 1917-18

Madeira pintada, 86 x 64 x 68 cm Gerrit Rietveld

Dusseldórfia, Sammlung Torsten Brohan

### **3 | A AACCC E ATIVIDADE DE FUNDAMENTOS METODOLÓGICOS DE MATEMÁTICA 1**

- Curso: Pedagogia;
- Coordenadora: Professora Dra. Maria Heloisa Aguiar da Silva;
- Professor Ms. Dirceu Zaleski Filho;
- Os alunos participarão em duas modalidades:
  - a) AACCC + Atividade;
  - b) Atividade (na qual será excluída o item 1 da descrição);

- horas de AACC: 20;
- Valor da atividade: 1,0 (um) ponto na nota A2 (avaliação contínua semestral);
- Tema: Mondrian: apreciação, reflexões e aproximações;
- Número de horas da AACC: 20;
- Público alvo: alunas(os) dos segundos e terceiros semestres do curso de Pedagogia;
- Data da visita: 7 a 28 de março de 2016;
- Vagas: ilimitadas;
- Responsável: Professor Ms Dirceu Zaleski Filho.
- Valor: Inscrição gratuita.
- Inscrições até; 20/3/2016.
- Descrição: Esta AACC é composta das seguintes etapas:
  - 1) Visita ao Centro Cultural Banco do Brasil - CCBB (Rua Álvares Penteado 112 – Centro – próximo as estações Sé e São Bento do Metrô) de 8/3/16 à 28/3/16 no horário das 9 às 21 horas de quarta a segunda – Informações: (11)3113-3651, onde está sendo apresentada a “exposição Mondrian e o movimento de STIL”;
  - 2) Leitura dos capítulos 3 e 4 do livro Matemática e Arte de Dirceu Zaleski Filho e dos textos disponibilizados no Blackboard;
  - 3) Participação da socialização e reflexão que serem feitas em sala de aula de 29/3/16 à 31/3/16;
  - 4) Entrega de um relatório com modelo a ser divulgado posteriormente;
  - 5) A aluna(o) que cumprir as etapas para validação de horas de AACC deve anexar o ingresso/bilhete que comprove sua visita à exposição;Após serem cumpridas todas as etapas, serão apontadas as horas da AACC para os inscritos.

#### 4 | O RELATÓRIO

Após a visita cada aluna(o) elaborou um relatório e que deveria constar o convite carimbado pela recepção da exposição (norma legal exigida pela universidade), fotografia e repostas as três questões abaixo que contribuiriam para compor uma narrativa reflexiva sobre a exposição.

Perguntas:

- 1)O que você viu na exposição?
- 2)Por que Mondrian passou a pintar com linhas verticais e horizontais e cores primárias (amarelo, vermelho e azul)?
- 3)Qual suas impressões sobre a exposição?

Esses relatórios após as reflexões em sala de aula foram entregues para a atribuição de notas e validação das horas de estágio (AACC).

## 5 | FLAGRANTES DA VISITA

Um fato importante da atividade é que a maioria das alunas nunca tinham tido a oportunidade de ir a uma exposição de arte e o encantamento foi grande. Foi uma exposição interativa com as mais significativas obras do movimento.



Fotografias feitas pelas(os) alunas(os) durante a exposição

## 6 | FRAGMENTO DE RELATÓRIO APRESENTADO POR UM ALUNO.

O relatório foi entregue em forma de e-mail e não pode ser formatado.

Tema: Mondrian: apreciação, reflexões e aproximações.

- 1) Visita realizada.
- 2) Leitura realizada.
- 3) De forma simplória:

Ainda nos tempos atuais, muitos acreditam que artes e matemática não conversam, sendo cada uma destas restritas à sua área. Alguns artistas com sua sensibilidade conseguem ir além desta crença e quebrar barreiras, bem como também os matemáticos vem desenvolvendo este olhar.

Piet Mondrian foi e é um artista (Neoplasticista) diferenciado para sua época, após anos de estudos e trabalhos realizados, começa a ter uma perspectiva diferenciada, e sendo assim, uniu de forma magnífica arte e matemática, ficando conhecido como um dos maiores dentre os artistas “ismos”.

Tendo recebido influências religiosas de seu pai, ainda assim Mondrian não se manteve “Dentro do quadrado”, ele queria mais e assim fez, passando por alguns momentos da arte e passeando dentre as técnicas, nas artes plásticas Mondrian começava a mostrar sua identidade, Pintura em tela - tinta óleo, eram juntamente com seus pinceis e amigos suas ferramentas de trabalho ... Muitos de seus quadros tinham uma característica comum, pintava paisagens e árvores por exemplo... Muitas destas obras com o passar do tempo foram sendo refeitas trazidas com novos traços e um olhar diferenciado, que foram tomando forma e cor criando uma identidade que para os que já tomaram contato com suas obras, a reconheçam de longe ...

Durante a visita, pude apreciar, e refletir sobre Mondrian e suas obras e até mesmo produzir inspirado neste artista incrível, com o intuito de encontrar matemática em suas obras, fui levado a ir muito mais além, me lembrei até mesmo do vídeo do Pato Donald no país da matemática, lembrando de suas falas, principalmente da questão do retângulo de ouro, conhecimento este que eu não tinha, que tinha começado a entender mas que pude compreender ainda mais diante das obras de Mondrian. Na visita fui também pensando sobre o exposto do professor, sobre a possibilidade de encontrar Mondrian em São Paulo, e então pude ver que São Paulo é muito Mondrian, apesar de ser uma cidade considerada Cinza, sempre a vi muito colorida e diversa, realmente diferenciada e rica, e as cores e traços de Mondrian muito bem lhe desenham, uma das maiores cidades verticais, havendo a necessidade de adaptação inclusive nas moradias, apoiados e embasados em Mondrian, as possibilidades se ampliaram e muito, e é incrível perceber que em um ambiente tão pequeno fosse possível de ser transformado em uma arte e esta ser utilizada das mais variadas e maravilhosas formas.

Após a visita, realmente onde quer que olhamos começamos a ter uma visão de tal forma “Mondrianiana” (risos), foi uma atividade rica em informações e conhecimentos, muito produtiva e oportuna... Me lavando a pensar ,,Apesar de ter visto muito nas obras de Mondrian a “RETA”, fui conduzido em diversos momentos a uma ação de “circumambulatio”, “sentamos em volta da fogueira, e contamos histórias” conversamos em grupo, com outros visitantes, com os colegas em sala de aula, e fui levado inclusive a encontrar outras formas inclusive pela internet, como por exemplo um jogo que mesmo que sem procurar algo do tipo, sincronicamente o jogo apareceu, e o incrível bolo inspirado nas obras? achei demais, muito interessante as possibilidades que fui levado por meio da atividade proposta.

4) Estou realizando o envio nesta data.

5) Minhas horas de atividades complementares já foram realizadas e cumpridas.



Álbum do meu Facebook com as fotos da visita: <https://www.facebook.com>.

Bom professor, caso queira questionar algo e eu puder responder, farei com prazer, quis aqui compartilhar um pouquinho da minha experiência, bem como também pude contribuir em sala de aula. Um grande abraço! e até breve!

Grato!

## **7 | A SOCIALIZAÇÃO EM SALA DE AULA.**

Vários alunos usaram da palavra para expor sensações, emoções, experiências vividas e comentar as respectivas respostas as perguntas e ao fazer o fechamento pedi que todos escrevessem uma reflexão final que envolvesse Mondrian. Muitas delas foram lidas encerrando o trabalho. Seguem algumas:

- Mondrian é simplificação;
- Mondrian nos mostra que devemos refletir sobre o que está por trás das aparências;
- Suas pinturas são universais com a Matemática;
- Mondrian é uma nova percepção;
- Mondrian é São Paulo;
- Mondrian é forma abstrata;
- Mondrian e o grupo de Stijl nos remetem a uma modernidade utópica;
- Mondrian é Matemática.

## **8 | CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Uma atividade importante para todos os envolvidos nela. Conseguir mostrar e sensibilizar futuros professores das ligações da Matemática com a Arte e como consequência com outras áreas do conhecimento foi um grande trunfo. Promover o acesso de futuros professores a ambientes de cultura sem dúvida foi outro entre tantos outros. Contribuir para que uma outra parte da Matemática chegue a nossas crianças talvez seja o maior das contribuições.

## **9 | AGRADECIMENTOS**

Ao CCBB – Centro Cultural Banco do Brasil, à UNICID – Universidade Cidade São Paulo, as alunas(os) do curso de Pedagogia e ao XII EPEM pelo espaço oferecido para a apresentação desse trabalho.

## REFERÊNCIAS

MINISTÉRIO DA CULTURA E BANCO DO BRASIL. Mondrian e o Movimento de Stijl. Exposição Arte, Arquitetura e Design da Holanda no início do século XX. CCBB – Centro Cultural Banco do Brasil SP.

-ROXO, Euclides. **A Matemática na educação secundária**. São Paulo: Nacional, 1937.

ZALESKI FILHO, Dirceu. **Matemática e Arte**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

## MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE APOIO À APRENDIZAGEM: UMA EXPERIÊNCIA COM O TEMA REFORMA DA PRAÇA

### **Alcides José Trzaskacz**

alcidestkz@gmail.com

Universidade Estadual do Centro – Oeste –  
Campus Universitário de Irati  
Irati – Paraná

### **Ronaldo Jacumazo**

rjacumazo@gmail.com.br

Universidade Estadual do Centro – Oeste –  
Campus Universitário de Irati  
Irati – Paraná

### **Joyce Jaquelinne Caetano**

joyce.tardo@yahoo.com.br

Universidade Estadual do Centro – Oeste –  
Campus Universitário de Irati  
Irati – Paraná

### **Laynara dos Reis Santos Zontini**

laynara.zontini@ifpr.edu.br

Instituto Federal do Paraná – Campus Irati  
Irati – Paraná

dois graduandos do curso de Licenciatura em Matemática, que orientados por pesquisadoras da área atuaram de maneira conjunta na sala de aula. O uso da modelagem como metodologia de ensino e aprendizagem propicia o maior interesse nas aulas e participação dos alunos, pois envolve trabalho em grupo, onde a colaboração individual é partilhada para enriquecer o aprendizado. A atividade revelou que a utilização da Modelagem Matemática motiva e atrai a atenção dos estudantes dando significado ao conteúdo trabalhado em sala de aula, bem como contribui na formação do professor, tanto a formação inicial quanto a continuada, pois fomenta a reflexão sobre a prática durante todo o desenvolvimento da atividade.

**PALAVRAS-CHAVE:** Metodologia de Ensino da Matemática, Ensino-Aprendizagem, Formação de Professores, Sala de Aula.

**ABSTRACT:** This work presents a reflective report about a practice with Mathematical Modeling conducted in a classroom of the Learning Support Room (LSR), with 6th and 7th grade students from a state school in the municipality of Irati - PR. For this activity we use Mathematical Modeling from a Mathematical Education perspective, as presented by Burak (2004; 2010). The activity was developed by the teacher of LSR and two undergraduate students

**RESUMO:** Este trabalho apresenta um relato reflexivo sobre uma prática com Modelagem Matemática realizada em uma turma do programa Sala de Apoio à Aprendizagem (SAA), com alunos de 6º e 7º ano de uma escola estadual do município de Irati - PR. Para essa atividade utilizamos a Modelagem Matemática em uma perspectiva de Educação Matemática, tal como apresentada por Burak (2004;2010). A atividade foi desenvolvida pela professora da SAA e

of the degree in Mathematics, who were guided by researchers of the area worked together in the classroom. The use of modeling as teaching and learning methodology provides the greatest interest in the classes and student participation, as it involves group work, where individual collaboration is shared to enrich learning. The activity revealed that the use of Mathematical Modeling motivates and attracts the attention of the students giving meaning to the content worked in the classroom, as well as contributes to the formation of the teacher, both initial and continuing training, as it encourages reflection on the practice during the whole development of the activity.

**KEYWORDS:** Mathematics Teaching Methodology, Teaching-Learning, Teacher Training, Classroom.

## 1 | INTRODUÇÃO

O trabalho consiste na apresentação de resultados da ação de extensão Modelagem Matemática na Sala de Apoio à Aprendizagem, que é uma parceria entre a Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO) campus Irati, Instituto Federal do Paraná (IFPR) campus Irati, Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) e Núcleo Regional de Educação de Irati; e tem como objetivo geral, vivenciar atividades de Modelagem Matemática nas Salas de Apoio à Aprendizagem das escolas do Núcleo Irati. Essa ação é parte de um projeto de pesquisa intitulado “Modelagem Matemática na formação continuada de professores: uma discussão sobre a passagem do 5° para o 6° ano” que ainda está em andamento.

A proposta realizada se constituiu de atividades conduzidas de forma conjunta pelos graduandos do curso de Licenciatura em Matemática da UNICENTRO e a professora de matemática da Sala de Apoio, tendo como opção metodológica a Modelagem Matemática. A ação docente foi acompanhada por duas professoras pesquisadoras das instituições parceiras: UNICENTRO e IFPR.

O projeto articula a formação inicial dos futuros professores de matemática e a formação continuada daqueles já em exercício na Sala de Apoio, sendo também uma oportunidade de contribuir com a aprendizagem matemática dos estudantes que frequentam a Sala de Apoio.

O programa Sala de Apoio à Aprendizagem (SAA) foi disponibilizado pela Secretaria do Estado do Paraná (SEED) com o objetivo de diminuir as reprovações e a evasão escolar. Conforme a resolução 371/2008, art. 1º, a SEED oferece sala de apoio em contraturno para os alunos de 6º e 7º anos. Tendo sido iniciada em 2004, e amparada pela LDBEN nº 9394/96 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional) a qual se refere a função do sistema de ensino de criar condições favoráveis, nas quais é assegurado ao aluno o direito a aprendizagem, a SAA foi implementada em caráter permanente em 2011 pela resolução 1690 de 27 de abril de 2011 (PARANÁ, 2011), e tem o propósito de contribuir na aprendizagem de Língua Portuguesa e Matemática.

Para esse ano, a SAA é balizada pela Instrução nº. 05/2017 – SUED/SEED, em

que:

A Sala de Apoio à Aprendizagem - SAA deve ser constituída para a ação pedagógica de enfrentamento e superação dos percalços de aprendizagem de Língua Portuguesa e de Matemática das (os) estudantes matriculadas (os) no Ensino Fundamental, anos finais (6º e 7º anos), no que se refere aos conteúdos básicos dessas disciplinas dos anos anteriores ao ano no qual as (os) estudantes se encontram matriculadas (os).

Quanto à carga horária, a Instrução nº. 07/2017 – SUED/SEED, mantém a estabelecida na Instrução nº 10/2014 – SUED/SEED, que é de 4 horas aulas semanais, sendo aulas geminadas em dias não subsequentes e prevê a possibilidade de abertura de mais de uma turma, porém, estabelece grupo de no mínimo 10 e no máximo 20 alunos. No entanto, o que orienta as atividades em 2018 na sala de apoio é a instrução normativa 05/2017, que não difere nos aspectos mencionados.

Para o bom andamento das atividades do programa é de extrema importância o trabalho colaborativo entre o professor regente, o professor de sala de apoio e a equipe pedagógica, buscando juntos a melhor maneira para que a aprendizagem aconteça.

As atividades foram desenvolvidas seguindo a metodologia da Modelagem Matemática em uma perspectiva da Educação Matemática, conforme orientação de Burak (2004; 2010). Seguindo os pressupostos estabelecidos no projeto, as atividades foram desenvolvidas em cinco escolas da região de Irati-PR, mas apresentamos aqui a atividade desenvolvida em uma das escolas.

Para situar a atividade realizada, iniciamos com a concepção metodológica que sustentou a prática, na sequência fazemos um relato detalhado da atividade e, por fim, algumas considerações sobre a experiência vivida com a Modelagem Matemática na Sala de Apoio.

## 1.1 Modelagem matemática na educação matemática

Enquanto alternativa metodológica para o ensino de matemática, a Modelagem Matemática busca um modo de trabalhar que tem foco na ação do estudante, o que difere da forma usual em que o ensino é deflagrado pelo professor.

Na forma usual, segundo Medeiros:

O professor dá aulas, dá a matéria, dá a Matemática para o aluno. É quase sempre assim. Ele faz para o aluno, mas não faz com o aluno. Por ser a Matemática, desta forma, uma estranha ao mundo do aluno, ao conjunto de significados que constitui a sua existência, o aluno recusa esta Matemática que lhe é dada como um presente, por não perceber um sentido na sua posse (MEDEIROS, 1985, p.28).

Considerando os desafios de ensinar matemática, percebidos no contexto da sala de aula pelo diálogo com os professores, compreendemos a necessidade de buscar alternativas para fomentar o aprendizado, contextualizando e partindo do cotidiano do estudante o estímulo para os conteúdos matemáticos trabalhados em sala de aula.

Como estratégia metodológica, a Modelagem Matemática desenvolve nos alunos uma forma diferente de ver a matemática. “O trabalho pedagógico com a Modelagem

Matemática possibilita a intervenção do estudante nos problemas reais do meio social e cultural em que vive, por isso, contribui para sua formação crítica” (PARANÁ 2008, p.65).

Silveira e Ribas afirmam acerca da Modelagem Matemática que:

Modelagem Matemática é acima de tudo uma perspectiva, algo a ser explorado, o imaginável e o inimaginável. A Modelagem Matemática é livre e espontânea, ela surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não em seu processo de construção. Ao trabalharmos Modelagem Matemática dois pontos são fundamentais: aliar o tema a ser escolhido com a realidade de nossos alunos e aproveitar as experiências extraclasse dos alunos aliadas à experiência do professor em sala de aula (SILVEIRA e RIBAS 2004, parte1, p.2).

Compreendemos que diferentes perspectivas de Modelagem conduzem a diferentes práticas e que na Educação Matemática atualmente não há uma única perspectiva, ou modo de conduzir uma atividade com uma metodologia chamada Modelagem Matemática. Assim, esclarecemos que nesse trabalho foi utilizada a Modelagem Matemática segundo a visão de Burak (2004; 2010), para ele temos que:

A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimento cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e tomar decisões (BURAK 2010, p.18).

Nessa perspectiva, a figura do professor passa de detentor do conhecimento para mediador entre o conhecimento matemático elaborado e o conhecimento do aluno ou grupo.

Estudante e professor são ativos no processo de ensino e aprendizagem, pois valoriza-se o conhecimento o que o estudante já tem e utiliza a Modelagem Matemática como facilitadora no processo de aprendizagem e estruturação do conhecimento.

Burak (2004) também sugere o encaminhamento da atividade em cinco etapas: 1) escolha do tema; 2) pesquisa exploratória; 3) levantamento dos problemas; 4) resolução dos problemas; 5) análise crítica das soluções. Essas etapas foram seguidas na atividade que será descrita, mas antes vamos esclarecer o caminho percorrido para esse trabalho.

## 2 | METODOLOGIA

Esse trabalho consiste em uma reflexão sobre a prática docente, partindo da experiência vivida com Modelagem Matemática na Sala de Apoio à Aprendizagem seguimos o caminho da pesquisa qualitativa, orientados pela pergunta: “O que se revela na prática com Modelagem Matemática na Sala de Apoio à Aprendizagem?”

Para responder essa questão fomos para a prática, vivemos o fenômeno investigado, ou seja, estivemos em sala de aula desenvolvendo a atividade, seguindo as etapas e as orientações metodológicas da Modelagem Matemática.

A primeira ação desenvolvida na escola foi a apresentação do Projeto Modelagem

Matemática na Sala de Apoio à Aprendizagem, na qual participaram a direção e equipe pedagógica do colégio juntamente com a professora de Sala de Apoio, acadêmicos da Unicentro e a professora organizadora do projeto.

A reunião decidiu a programação de datas e horários para a realização da atividade, bem como o material que poderíamos utilizar no desenvolvimento do projeto. Por sugestão da diretora optamos por usar o Jornal Folha de Irati como o ponto de partida para a escolha do tema a ser trabalhado.

A direção da escola se prontificou a colaborar com o projeto cedendo o espaço e alguns materiais necessários. Quanto à professora de Sala de Apoio, ela se mostrou receptiva e interessada no desenvolvimento da atividade.

A turma da Sala de Apoio era composta por 17 alunos, sendo 8 meninos e 9 meninas, oriundos do sexto ano do ensino fundamental. A atividade foi desenvolvida em 7 encontros de cem minutos (duas horas aulas) cada.

Na sequência apresentamos o relato da atividade, dialogando com a teoria e enfatizando as etapas da Modelagem Matemática.

### 3 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

No primeiro encontro com a turma observamos o espaço e direcionamos a escolha do tema, sendo essa primeira etapa da atividade. A organização da sala é considerada como não tradicional, pois os alunos ficam organizados em círculo dispostos a uma mesa central, conforme a Figura 1. Os estudantes se mostraram à vontade com a presença dos graduandos em sala, receberam explicações sobre o projeto e se mostraram receptivos e animados com a proposta de atividade.



Figura 1 – Organização dos alunos em sala de aula

Fonte: Os autores.

Conforme decidido na reunião, utilizamos o jornal como ponto de partida para a escolha do tema, assim distribuimos os jornais (FOLHA DE IRATI) para cada aluno, pedimos para que eles folhassem o jornal e nesse momento houve bastante conversa, ficando difícil a comunicação com eles. Com ajuda da professora regente controlamos os ânimos dos alunos, e explicamos o que queríamos que eles fizessem.

Pedimos para que eles escolhessem temas de seus interesses e nos falassem quais eram, fomos anotando no quadro cada tema escolhido, conforme pode ser visto na Figura 2. Houve bastante conversa e trocas de ideias entre eles, novamente tivemos que intervir em alguns momentos para que se mantivesse o foco na atividade.

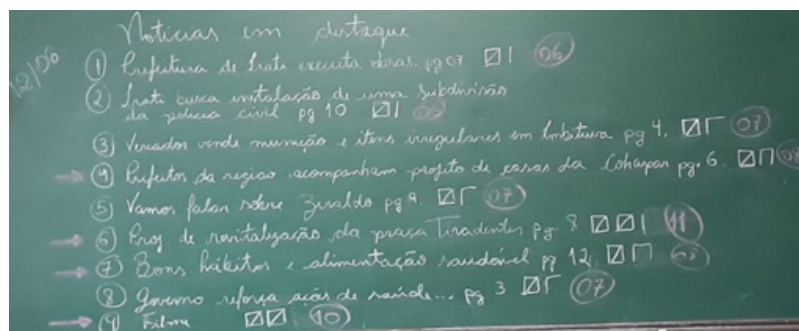


Figura 2 – Temas escolhidos pelos alunos

Fonte: Os autores.

A partir dos temas escolhidos (Figura 2), fizemos a leitura de cada notícia evidenciando a relevância que a mesma tem no cotidiano dos alunos. Com isso, o tema “Projeto de revitalização da Praça Tiradentes em Rio Azul” foi escolhido através de votação para ser o tema estudado.

Após a escolha do tema partimos para a pesquisa exploratória, segunda etapa da atividade, utilizando o laboratório de informática da escola. Os alunos estavam muito motivados com a possibilidade de pesquisar mais informações sobre a referida praça.

A escola mantém o laboratório de informática em pleno funcionamento, no entanto o acesso à internet é lento e instável, o que acaba gerando dificuldades na pesquisa. Nessa etapa contamos também com o apoio da bibliotecária da escola.

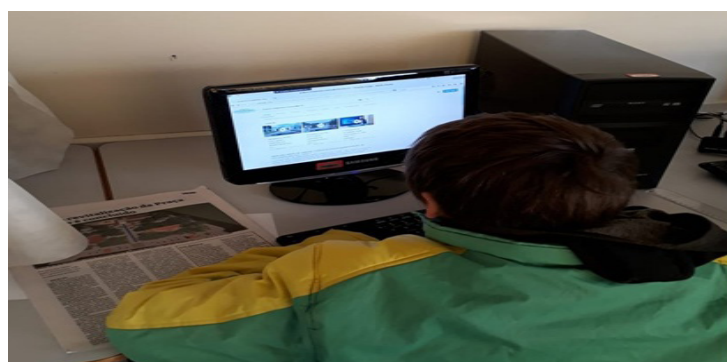


Figura 3 – Pesquisa no laboratório de informática da escola

Fonte: Os autores.



Na sala de informática (Figura 3) os alunos se mostraram muito interessados no desenvolvimento da pesquisa, visto que a possibilidade de trabalho fora da sala gera alegria e contentamento entre todos os alunos.

A oportunidade de pesquisa na internet agregou mais informações às já contidas no jornal. Por se tratar de uma praça regional do interior as informações se repetiam mesmo quando pesquisadas em sites diferentes, de forma que os resultados se resumiram na importância de revitalizar o espaço e no uso que a comunidade pode fazer do mesmo.

Com base na pesquisa os estudantes resolveram fazer uma maquete para visualizar e identificar os possíveis problemas matemáticos e suas respectivas soluções. Enquanto etapa da atividade de Modelagem Matemática a construção da maquete nessa atividade não foi um resultado, mas um caminho de problematização, um modo de explorar o tema e levantar questionamento. A matéria no jornal mostrava uma maquete como projeto de revitalização, como vemos na Figura 4, o que estimulou a busca por essa representação física.



Figura 4 - Projeto de revitalização da Praça Tiradentes

Fonte: Jornal Folha de Irati

Para tanto, a turma e a praça foi dividida em quatro, de forma que cada grupo ficou com um quarto da praça.

Com o apoio da escola foi disponibilizado materiais para a confecção da maquete, como: E.V.A, cola quente, tesoura, placas de isopor entre outros.

Para a construção da maquete os alunos se mostraram muito motivados e empenhados, visto que todos participaram ativamente da atividade, cada um contribuindo dentro de suas possibilidades, como pode ser visto na Figura 5.



Figura 5 – Construção da maquete pelos alunos

Fonte: Os autores.

Depois da confecção das maquetes e com base nas pesquisas os alunos iniciaram o processo de formulação de problemas, sendo estes observados nas maquetes.

Após essa etapa, com a ajuda dos professores, foram estabelecidas estratégias para reunir os problemas levantados estruturando-os para melhorar o desenvolvimento da atividade. Cada grupo formulou um problema/pergunta de acordo com a observação da maquete, visto que, como a praça está localizada em um município vizinho, a construção da maquete contribuiu na etapa de levantamento dos problemas permitindo ao aluno ter uma noção concreta da praça em estudo.

Elaboradas as situações problemas, cada grupo sendo orientado pelos professores buscou estudar formas de resolvê-los. Nesse momento os professores orientaram os alunos sobre quais ferramentas matemáticas poderiam ser durante a etapa de levantamento de problemas utilizadas para a resolução dos problemas formulados. Vale resaltar que quando necessário revisar conteúdos ou introduzir conceitos pertinentes para a resolução os professores retomaram o conteúdo de sala de aula com o qual os alunos poderiam resolver o problema.

Por ser uma praça pública, os alunos de um dos grupos manifestaram a curiosidade de saber quantas pessoas caberiam na praça. Conversando entre eles surgiu a dúvida de quantas pessoas podemos colocar em um metro quadrado, problema este resolvido de forma prática, com ajuda de uma régua e giz marcamos um metro quadrado no chão da sala de aula conforme podemos ver na Figura 6. Após a marcação convidamos os colegas dos demais grupos para que pudessemos contar quanto alunos cabem em um metro quadrado.



Figura 6 – Demarcação do metro quadrado

Fonte: Os autores.

Conforme observado na prática, estabelecemos uma quantia de 11 pessoas em pé por metro quadrado. Sendo encontrado a área total da praça, os alunos multiplicaram essa área pela quantia de pessoas que cabem por metro quadrado encontrando assim o total de pessoas que caberiam na praça, ou seja, 21.296 pessoas (Figura 7).

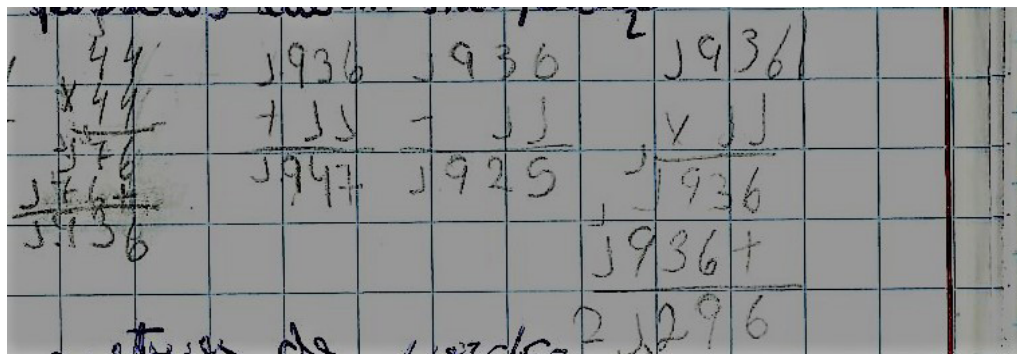


Figura 7 – Cálculo de pessoas por metro quadrado feito pelos alunos

Fonte: Os autores.

Percebemos que no primeiro problema, os alunos fizeram uso de vários conteúdos matemáticos vistos anteriormente, entre eles usamos a divisão, multiplicação e cálculo de área.

O segundo problema levantado pelo grupo tratou da segurança da praça, pois segundo os alunos o zelador da praça deveria identificar um risco em ter um lago sem proteção, por isso resolveram cercá-lo para a garantia de segurança a todos os públicos e para isso precisavam encontrar a quantia de corda necessária. Sabendo que o lago é quadrado e de medidas de lado igual a 10 m, calcularam quantos metros de corda o zelador iria utilizar para cercar o lago (Figura 8).

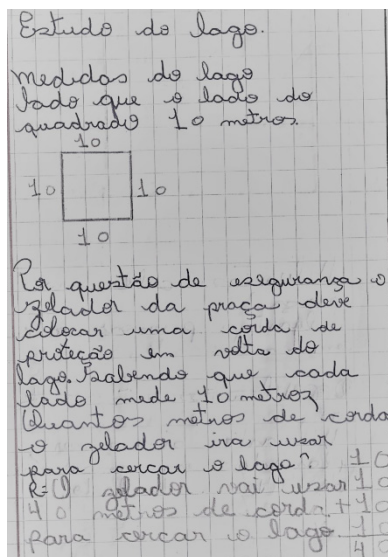


Figura 8 – Estudo do lago

Fonte: Os autores.

Utilizando da noção de perímetro os alunos calcularam essas medidas e chegaram à conclusão de que era necessário 40 m de corda para cercar o lago.

De início os alunos somaram as medidas dos lados para obter o perímetro,  $10+10+10+10 = 40$ , mas depois com a explicação do professor, e com o uso de um geoplano, os alunos puderam perceber que por se tratar de um quadrado bastava eles multiplicarem a medida do lado pela quantidade de lados, ou seja, 10 que é a medida do lado do lago vezes 4 lados.

O terceiro problema levantado foi a respeito da arborização da praça, pois os alunos queriam saber qual a quantidade de árvores que caberiam na praça de modo que ficassem bem distribuídas e de acordo com a orientação técnica indicada para o plantio correto. Conforme levantado em pesquisa na internet, ficou definido que o espaço recomendado para uma árvore ter um bom desenvolvimento é de  $20 \text{ m}^2$ .

Após encontrar a área total da praça que é de  $1936 \text{ m}^2$ , os alunos chegaram à conclusão de que é possível plantar aproximadamente 98 árvores, fazendo estes cálculos por meio de uma divisão de acordo com a Figura 9.

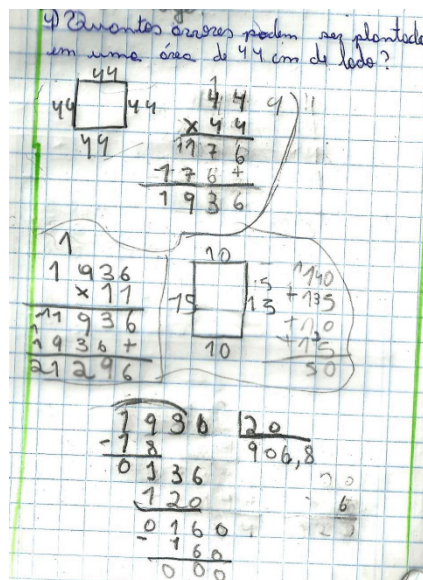


Figura 9 – Cálculo do número de árvores que podem ser plantadas na praça

Fonte: Os autores.

Na atividade desenvolvida tivemos a formação de quatro grupos, no entanto um dos grupos não compareceu para o término da atividade.

A análise crítica das soluções se deu durante resolução dos problemas, os grupos também apresentaram seus resultados para turma que puderam compartilhar as discussões.

#### 4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de utilizar a Modelagem Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem em Sala de Apoio superou as expectativas dos envolvidos no projeto. No princípio a dúvida e a incerteza da metodologia estavam presentes nos graduandos e na professora, mas a participação e o interesse dos estudantes contribuíram para um desenvolvimento muito satisfatório da atividade.

Verificamos que a metodologia favorece a ação dos professores de matemática por aproximá-los dos estudantes, valorizando todos os sujeitos no processo de ensino e aprendizagem. Ao ouvir o estudante e valorizar seu interesse o professor abre diálogo efetivo e favorece que esse estudante o escute e fique atento às aulas. Assim, a atividade trabalha com o interesse do estudante e por isso o mantém envolvido nas tarefas matemáticas que surgem pelos problemas levantados. Com o estudante envolvido e atento é possível perceber e sanar muitas dificuldades com conceitos matemáticos.

Com essa atividade foi possível trabalhar conteúdos importantes e que os estudantes geralmente têm dificuldades, como as operações fundamentais, principalmente multiplicação e divisão, além de área e perímetro.

A ação conjunta do professor da Sala de Apoio com os estudantes de Licenciatura

em Matemática, ambos atuando como professores, e a supervisão da coordenadora do projeto, favorecem aspectos da formação inicial e continuada. Além de momentos de aprendizagem matemática, os docentes puderem compartilhar experiências e refletir sobre cada etapa da prática. A professora pode refletir sobre sua prática mesmo com tantos anos de escola e os graduandos perceber o ambiente escolar, os desafios e os modos de lidar com isso.

Quando sozinho em sala o professor tem poucas oportunidades para discutir e repensar a sua prática docente, a presença dos graduandos fomentou uma reflexão permanente em cada etapa da atividade. O diálogo permanente entre professora, graduandos e pesquisadora permitiu avançar na compreensão sobre a metodologia e sobre a realidade do programa Sala de Apoio.

Os resultados positivos puderam ser evidenciados nos relatos finais dos estudantes, tal como pode ser visto na Figura 10.

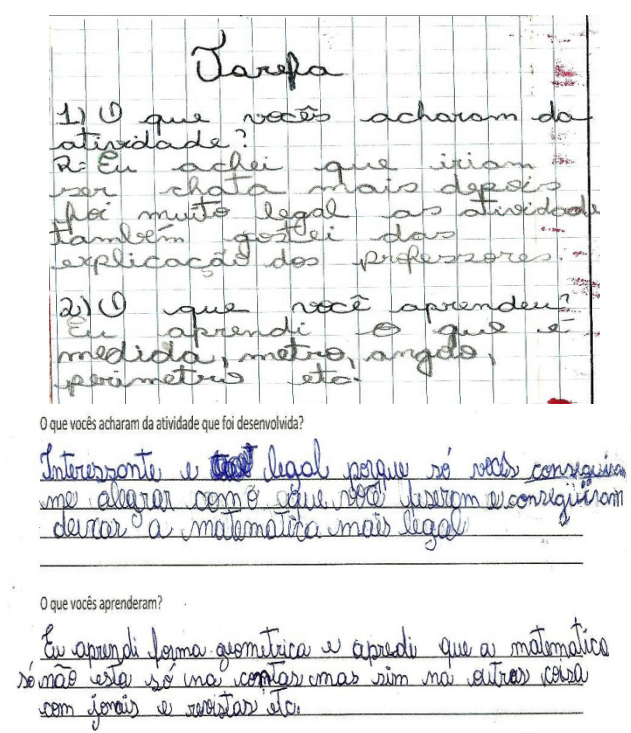


Figura 10 – Retorno por parte dos alunos quanto à atividade de modelagem

Fonte: Os autores.

A atividade relatada abre uma discussão sobre modos de fomentar a formação de professores pela articulação entre formação inicial e continuada. A ação conjunta propiciada pelo projeto é diferente do estágio e de outros momentos de inserção do acadêmico na escola, e traz contribuições importantes para a prática docente de todos os envolvidos.

A reflexão também evidencia as potencialidades da Modelagem Matemática como metodologia para a Sala de Apoio pelos resultados positivos em relação a aprendizagem de conteúdos matemáticos de anos anteriores e pela participação ativa

dos estudantes, que tornam a aula mais interessante e significativa.

## REFERÊNCIAS

BURAK, D. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. *In: I EPMEM -Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática* - Anais do I EPMEM, Londrina: 2004.

BURAK, D. **Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula.** Revista de Modelagem na Educação Matemática, v. 1, p. 10-27, 2010.

MEDEIROS, C. F. **Por uma Educação Matemática como intersubjetividade.** In. BICUDO, M. A. V. org. Educação Matemática. São Paulo: Moraes, 1985.

PARANÁ. Institui a partir de 2011, em caráter permanente, o Programa de Atividades Complementares Curriculares em Contra turno na Educação Básica na Rede Estadual de Ensino. **Resolução 1690 - 27 de Abril de 2011.** Publicado no Diário Oficial nº. 8472 de 24 de Maio de 2011. Curitiba: SEED, 2011b Disponível em: <http://www.legislacao.pr.gov.br/legislacao/pesquisarAto.do?action=exibir&codAto=69240&indice=1&totalRegistros=1>

PARANÁ. Critérios para a abertura da demanda de horas-aula, do suprimento e das atribuições dos profissionais das Salas de Apoio à Aprendizagem do Ensino Fundamental, da Rede Pública Estadual de Educação. **Instrução n. 007/2011– SUED/SEED**, 04 jul. 2011. Curitiba: SEED, 2011b. Disponível em: <http://www.educacao.pr.gov.br/arquivos/File/instrucoes/instrucao0072011.pdf> Acesso em janeiro de 2018.

PARANÁ. Autorização de Salas de Apoio à Aprendizagem para as (os) estudantes matriculadas (os) nos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, das instituições de ensino da rede pública estadual. **INSTRUÇÃO Nº 05/2017 - SUED/SEED.** Curitiba: 2017. Disponível em: [http://www.educacao.pr.gov.br/arquivos/File/instrucoes2017/instrucao052017sued\\_seed.pdf](http://www.educacao.pr.gov.br/arquivos/File/instrucoes2017/instrucao052017sued_seed.pdf) Acesso em maio de 2018.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Curitiba: Secretaria de Estado de Educação, 2008.

SILVEIRA, J. C.; RIBAS, J. L. D. **Discussões sobre Modelagem Matemática.** Só Matemática. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/artigos/a8/>. Acesso em 15 ago. 2018.

## MODELAGEM MATEMÁTICA, PENSAMENTO COMPUTACIONAL E SUAS RELAÇÕES

### **Pedro Henrique Giralddi de Souza**

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP – Campus Rio Claro/SP; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (mestrado acadêmico)

### **Sueli Liberatti Javaroni**

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – UNESP – Campus Rio Claro/SP; Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

**RESUMO:** Este capítulo apresenta uma pesquisa de mestrado que tem por objetivo investigar se o desenvolvimento do Pensamento Computacional articulado a atividades de Modelagem Matemática possibilitam a criação de um cenário que propicia a produção de conhecimento matemático elaborado pelos estudantes participantes. Para dar andamento à pesquisa desenvolvemos atividades com kits de robótica com estudantes do nono ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual paulista, da cidade de Rio Claro-São Paulo, pertencente ao Programa de Ensino Integral. Como objetivo específico pretende-se investigar se essa tendência em Educação Matemática é presente em aulas da disciplina Práticas de Matemática e se o Pensamento Computacional também se faz presente no processo de ensino e aprendizagem e

pretende-se entender quais as concepções do professor acerca da Modelagem Matemática e Pensamento Computacional para o trabalho com a disciplina. Adotando a abordagem qualitativa, os procedimentos metodológicos adotados têm sido as observações participantes, filmagens e intervenções nas aulas da disciplina Práticas de Matemática e a realização de entrevistas semiestruturadas com o professor responsável pela disciplina e com os grupos de estudantes cursantes da disciplina. Com a pesquisa, pretende-se contribuir para a Educação Matemática e Educação Básica trazendo reflexões acerca da Modelagem Matemática e Escola de Ensino Integral.

**PALAVRAS-CHAVE:** Educação Básica, Educação Matemática, Atividades Experimentais.

**ABSTRACT:** This chapter presents a master's research that aims to investigate if the development of Computational Thinking articulated to Mathematical Modeling activities allows the creation of a scenario that provides the production of mathematical knowledge elaborated by the participating students. To carry out the research, we developed activities with robotic kits with students from the ninth grade of Elementary School of a public school in the city of Rio Claro-São Paulo, belonging to the Integral Teaching Program. As a specific



objective we intend to investigate if this trend in Mathematics Education is present in classes of the Mathematics Practices course and if Computational Thinking is also present in the teaching and learning process and intends to understand what the teacher's conceptions about Modeling Mathematics and Computational Thinking for working with the discipline. Adopting the qualitative approach, the methodological procedures adopted have been the participant observations, filming and interventions in the classes of the Mathematics Practices and the accomplishment of semistructured interviews with the professor responsible for the discipline and with the student groups that study the discipline. With the research, it is intended to contribute to Mathematics Education and Basic Education bringing reflections about Mathematical Modeling and School of Integral Education.

**KEYWORDS:** Basic Education, Mathematics Education, Experimental Activities.

## 1 | INTRODUÇÃO

Nos últimos dois anos da minha graduação, em Licenciatura em Matemática na Unesp – Rio Claro, fui bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) na Escola Estadual de Ensino Integral (EEI) Marciano de Toledo Piza, que possui Ensino Médio, localizada no município de Rio Claro - SP. Foi meu primeiro contato com uma Escola pertencente ao Programa Ensino Integral (PEI), onde tive a possibilidade de observar que além das disciplinas da Base Nacional Comum, as EEI possuem disciplinas como: Eletivas, Projeto de Vida, Protagonismo Juvenil, Orientações de Estudo e Atividades Experimentais e laboratórios. Durante minha experiência na Escola Marciano, presenciei algumas Eletivas com temas como: astronomia, educação financeira, cinema e gestão de uma empresa de turismo. Percebi que o modo como os alunos investigavam os fenômenos surgidos nas aulas, usando a Matemática, tinha potencial para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática que podem ser a “[...] arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” (BASSANEZI, 2002, p. 16).

Quando ingressei no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na Unesp - Rio Claro, conheci minha atual orientadora e um de seus orientandos que, no ano de 2017 iniciou sua pesquisa de mestrado na E.E. Profa. Carolina Augusta Seraphim, também pertencente ao PEI, com o objetivo de analisar o processo de formação de conceitos matemáticos de estudantes do nono ano do Ensino Fundamental ao desenvolverem o Pensamento Computacional por meio da realização de atividades com robótica. Foi então que fui apresentado a Escola Carolina e vi as possibilidades de, nela, executar minha pesquisa sobre Modelagem Matemática aliada aos conceitos do Pensamento Computacional que, entre suas perspectivas, pode ser entendido, segundo Wing (2006), como processos mentais envolvidos na formulação de problemas e suas soluções para que estas sejam representadas de uma forma que

possa ser realizada por um agente de processamento de informações.

Assim, desde então, minha pesquisa tem sido realizada e seu cenário de investigação é a Escola Carolina, mais especificamente as aulas de Atividades experimentais que nesta escola denominam Práticas de Matemática. Nela, os alunos usam o kit de robótica e os softwares Scratch e Scratch for Arduino. Para uma melhor compreensão do que são essas aulas de Atividades Experimentais, recorro ao que as Diretrizes do Programa Ensino Integral dizem:

As Práticas Experimentais e laboratórios são um dos componentes da Parte Diversificada e, contribuem para a melhoria do desempenho dos estudantes proporcionando-lhes a oportunidade de manipular materiais e equipamentos especializados no ambiente de laboratório, comparar, estabelecer relação, ler e interpretar gráficos, construir tabelas dentre outras habilidades e, desta forma, construir seu conhecimento a partir da investigação com práticas eficientes (SÃO PAULO, 2014, p. 31).

As aulas de Práticas Experimentais são exclusivas do Ensino Fundamental das escolas pertencentes ao PEI e a intenção de suas atividades é contribuir para o desenvolvimento de competências e habilidades, que segundo as Diretrizes podem proporcionar alguns benefícios como:

Despertar o interesse pelas ciências e a motivação para o estudo; aprimorar a capacidade de observação e registro de informações; aprender a analisar dados e propor hipóteses; aprender conceitos científicos; estabelecer relação entre ciência, tecnologia e sociedade; aprimorar habilidades manipulativas; desenvolver a capacidade de trabalhar em grupos; estimular a criatividade (SÃO PAULO, 2014, p. 32).

O Pensamento Computacional (PC) pode ser desenvolvido nos processos de ensino e aprendizagem de diversas áreas de conhecimento, logo, tenho o intuito de vinculá-lo com a Modelagem Matemática, visto que nas aulas de Práticas de Matemática pode haver uma contextualização da Matemática, cuja compreensão possa ser “como um caminho para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática ou para o “fazer” Matemática em sala de aula” (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 79).

Assim, a relevância de tal projeto, que por sua vez, está sendo abordado neste presente capítulo, vem primeiramente do fato da Modelagem Matemática integrar os documentos oficiais do Ministério da Educação (MEC) como um caminho possível para os processos de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica (BRASIL, 2006), bem como o Pensamento Computacional, e também por ser considerada, segundo (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p. 85), “uma estratégia pedagógica motivadora, capaz de despertar o interesse do aluno pela Matemática, relacionando-a com fatos do seu cotidiano[...]”. Em segundo, porque está contextualizado no Ensino Integral, que por sua vez, tem sido expandido por meio do Programa de Ensino Integral no estado de São Paulo.

Falando de pesquisa e Modelagem Matemática, faço parte do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), em que um dos focos de pesquisa é o estudo dos efeitos do uso conjunto da Modelagem Matemática e

das tecnologias informáticas em salas de aula de Matemática. Assim, minha pesquisa colaboraria com as pesquisas já feitas e as pesquisas em andamento do grupo.

Portanto, tenho o objetivo de investigar se o desenvolvimento do Pensamento Computacional articulado a atividades de Modelagem Matemática possibilitam a criação de um cenário de produção de conhecimento matemático. Sendo essas atividades desenvolvidas por estudantes do nono ano do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual de Ensino Integral de Rio Claro/São Paulo, ao realizarem atividades com kits de robótica.

## 2 | REFERENCIAL TEÓRICO

O Programa Ensino Integral foi implementado em 2012 com o objetivo de “difundir, na rede de ensino do Estado de São Paulo, modelos de gestão escolar que visam a melhoria dos resultados educacionais [...]” (SÃO PAULO, 2014, p. 5). Segundo as Diretrizes do Programa, seus aspectos são:

1) jornada integral de alunos, com currículo integralizado, matriz flexível e diversificada; 2) escola alinhada com a realidade do jovem, preparando os alunos para realizar seu Projeto de Vida e ser protagonista de sua formação; 3) infraestrutura com salas temáticas, sala de leitura, laboratórios de ciências e de informática e; 4) professores e demais educadores em Regime de Dedicção Plena e Integral à unidade escolar (SÃO PAULO, 2014, p. 11).

Com isso, o Programa traz particularidades quando comparado ao Ensino Regular, como, por exemplo, a dedicação plena, que faz os professores trabalharem apenas em uma escola.

Dentro do Programa, temos: o Projeto de Vida, principal norteador das ações educativas do projeto escolar; o Protagonismo Juvenil que é um dos princípios educativos que sustentam a construção do Projeto de Vida e das Eletivas, o que visa fornecer ao aluno autonomia em suas ações no decorrer de seu desenvolvimento escolar (SÃO PAULO, 2014).

As aulas de Práticas de Matemática possibilitam trabalhos em grupo e a sala de aula tem o potencial para propiciar um ambiente convidativo para que haja interação entre os alunos no intuito de que busquem trabalhar em atividades de caráter investigativo. Nesse sentido, a direção da Escola cuja pesquisa é desenvolvida decidiu fazer uma Feira de Ciências com o tema de robótica, fazendo com que os alunos usem os kits de robótica para seus projetos.

Assim, tive a ideia de auxiliar os grupos no desenvolvimento de seus projetos pensando em como fazer uso da Modelagem Matemática para produzir algum conhecimento matemático (ou científico).

As aplicações da Modelagem no ensino de Matemática tiveram início no século XX. “Seu surgimento no Brasil, de acordo com Borba e Villarreal (2005), ocorreu com base nas ideias e trabalhos de Paulo Freire e Ubiratan D’Ambrosio, no final da década

de 1970 e começo da década de 1980” (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p.78).

A Modelagem é descrita de forma diferente por muitos autores, por exemplo, podemos considerá-la, “no contexto da Educação Matemática, a Modelagem pode ser compreendida como um caminho para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática ou para o “fazer” Matemática em sala de aula” (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p.79).

Já em outro momento, os autores trazem outras perspectivas como:

Gazzeta (1989), conceitua Modelagem como uma relação entre a realidade e a ação, na qual, a partir da realidade, o indivíduo codifica uma dada informação, que acaba gerando uma ação. [...] Em Borba, Meneguetti e Hermeni (1997), os autores defendem a Modelagem como uma estratégia pedagógica na qual os estudantes que trabalham em grupos são os responsáveis pela escolha do tema a ser investigado, com o auxílio do professor (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p.80).

Desta forma, há várias perspectivas que diferenciam a Modelagem, elas podem ser resumidas em se: a escolha do problema a ser investigado parte do professor, dos alunos ou há um acordo entre professor e alunos. Mesmo com diferentes perspectivas, a Modelagem possui um objetivo em comum: “estudar, resolver e compreender um problema da realidade, ou de outra(s) área(s) do conhecimento utilizando para isso a matemática e, obviamente, outras disciplinas e ideias” (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2013, p.85).

Assim como na Modelagem, há diferentes perspectivas para o Pensamento Computacional (PC), então tomo como referência, a perspectiva de Wing (2016) que o define nas seguintes frases:

“PC envolve a resolução de problemas, projeção de sistemas, e compreensão do comportamento humano, através da extração de conceitos fundamentais da ciência da computação”; “PC é pensar recursivamente”; “PC é usar abstração e decomposição ao atacar uma tarefa grande e complexa ou projetar um sistema complexo e grande” (WING, 2016, p.4).

Ou seja, como os alunos usarão o kit de robótica e softwares, como mencionado anteriormente, para desenvolverem suas atividades nas aulas de Práticas de Matemática bem como na Feira de Ciências, poderão desenvolver o Pensamento Computacional aliado as atividades de Modelagem, já que esse pensamento pode ser visto como a união do pensamento humano com as capacidades computacionais, ou seja, com a habilidade de pensar algorítmicamente. Isto é, ao resolver uma questão ou pensar no projeto da Feira de Ciências, por exemplo, o aluno desenvolve o pensamento abstrato para perceber o problema e tentar solucioná-lo, bem como desenvolve o raciocínio algorítmico para encontrar a forma mais eficaz de resolver o problema.

Nesse aspecto, as aulas de Práticas de Matemática aparentam proporcionar ambientes potencializadores para o desenvolvimento de atividades que assemelham ter sinergia com a Modelagem Matemática e o desenvolvimento do Pensamento Computacional. Podemos considerar esses ambientes como o que Skovsmose (2000)

denomina ambientes de aprendizagem, definindo-os:

(1) é aquele dominado por exercícios apresentados no contexto da “matemática pura”. [...] (2) é caracterizado como um ambiente que envolve números e figuras geométricas. [...] (3) é constituído por exercícios com referências à semirrealidade. [...] (4) também contém referências a uma semirrealidade, mas agora ela não é usada como um recurso para a produção de exercícios: é um convite para que os alunos façam explorações e explicações. [...] Exercícios baseados na vida real oferecem um ambiente de aprendizagem do tipo (5). [...] Já o ambiente tipo (6) pode ser exemplificado como um trabalho de projeto, envolvendo um grau maior de realidade no cenário de investigação (SKOVSMOSE, 2000, p.11).

Nesse sentido, Skovsmose (2000) afirma que a Matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício, cuja premissa central é que existe uma, e somente uma, resposta correta. Contrapondo este modelo, esse autor defende um cenário de investigação, no qual os alunos são convidados a se envolverem em processos de exploração e argumentação justificada. E ao assumir esses processos, o cenário para investigação passa a construir um novo ambiente de aprendizagem.

Quando o autor relata os tipos de referências que os exercícios de matemática trazem, ele faz menção à produção de significado na educação matemática. Primeiro, questões e atividades matemáticas que fazem referência somente a matemática. Segundo, referência a uma semirrealidade, que é uma realidade construída, por exemplo, em algumas questões de livros didáticos. E, por último, questões com referências a situações da vida real. Assim, o autor propôs a matriz com seis tipos diferentes de ambientes de aprendizagem.

	<b>Exercícios</b>	<b>Cenário para investigação</b>
Referências à matemática pura	1	2
Referências à semirrealidade	3	4
Referências à realidade	5	6

Tabela 1: Ambientes de aprendizagem

Fonte: SKOVSMOSE, 2000, p. 75.

Segundo Skovsmose (2000), a linha vertical separa o paradigma do exercício dos cenários de investigação e é “espessa” simbolizando um terreno de muitas possibilidades. Já as linhas horizontais são muito fluidas, elaborando uma noção dos ambientes de aprendizagem. O autor ainda diz que uma boa parte da educação matemática está alternando entre os ambientes (1) e (3). Para ele não há um ambiente ideal, porém, o melhor é mover-se entre os ambientes, pois “a rota entre os diferentes ambientes pode ajudar a dar novos significados para às atividades dos alunos” (SKOVSMOSE, 2000, p. 84).

Ainda sobre ambientes de aprendizagem, pode ser definido como o lugar “no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade” (BARBOSA, 2001, p.31).

A meu ver, as aulas de Práticas de Matemática proporcionam esse tipo de movimentação entre os ambientes de aprendizagem quando comparadas as aulas normais de Matemática. Por isso que justifico o meu propósito acerca da investigação da Modelagem Matemática nessa disciplina juntamente com o desenvolvimento do Pensamento Computacional. Além disso, o Programa de Ensino Integral, por ser recente, demanda investigações dentro da Educação Matemática, ainda mais por obter características diferentes das demais escolas, conforme já pontuado anteriormente.

### 3 | OBJETIVOS

Esse capítulo tem por objetivo apresentar um projeto de pesquisa de mestrado, cujo propósito é investigar se o desenvolvimento do Pensamento Computacional articulado a atividades de Modelagem Matemática possibilitam a criação um cenário que propicia a produção de conhecimento matemático elaborado pelos estudantes. Sendo essas atividades desenvolvidas por estudantes do nono ano do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual de Ensino Integral de Rio Claro/São Paulo, ao realizarem atividades com kits de robótica.

Assim, como objetivos específicos, pretende-se investigar se essa tendência em Educação Matemática é presente em aulas da disciplina Práticas de Matemática e se o Pensamento Computacional também se faz presente no processo de ensino e aprendizagem e pretende-se entender quais as concepções do professor acerca da Modelagem Matemática e Pensamento Computacional para o trabalho com a disciplina. Com o desenvolvimento dessa pesquisa, pretende-se contribuir para a Educação Matemática trazendo reflexões acerca da Modelagem Matemática, Pensamento Computacional e Escola de Ensino Integral. No próximo tópico apresentarei os procedimentos metodológicos que adotarei para alcançar tais objetivos.

### 4 | PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A metodologia de pesquisa adotada é de caráter qualitativo, pois como afirma Goldenberg, “na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc” (GOLDENBERG, 2004, p. 14). Sendo o cenário de investigação desta pesquisa uma sala de aula, tem-se a preocupação com a compreensão de Modelagem Matemática desenvolvida pelos estudantes ao realizarem atividades matemáticas com o kit de robótica e o desenvolvimento do Pensamento Computacional a partir das atividades desenvolvidas.

Como pesquisador, realizando as observações das aulas, proporei atividades para os grupos, elaboradas em conjunto com a docente responsável pela disciplina de Práticas de Matemática, que é ministrada para alunos do nono ano do Ensino

Fundamental. Existem duas turmas de aproximadamente 35 alunos cada. Para as aulas da disciplina de Práticas de Matemática, cada nono ano é dividido em dois grupos formando um total de quatro grupos que denominarei por 9°1-T1, 9°1-T2, 9°2-T1 e 9°2-T2. As aulas ocorrem às sextas-feiras, sendo duas aulas para cada grupo (em um total de quatro aulas), desse modo o ciclo de atividades é quinzenal.

A professora responsável pela disciplina faz uso do Caderno do Professor de Robótica, o qual orienta o desenvolvimento de projetos que abrangem conceitos fundamentais do ensino de robótica. Os conteúdos abordados no Caderno são conceitos essenciais de eletrônica e de programação. Dentre os projetos oferecidos no Caderno, o primeiro faz uma introdução geral à plataforma Arduino, que é composta de uma placa eletrônica e o software que permite programá-la, os demais projetos vão desde monitorar temperaturas a sentir a vibração da terra, sendo que todos usam linguagem de programação. Já o software Scratch tem sua programação baseada em uma linguagem de blocos visuais, isto é, ele substitui a digitação de códigos por blocos, o bloco pode ser escolhido, arrastado e encaixado em outros blocos para a formação de instruções para o computador. Ou seja, esses blocos facilitam a sintaxe da programação, onde acontecem os erros mais comuns quando o código é digitado. Porém, o Scratch não consegue uma programação para a plataforma Arduino, por isso foi criado o software Scratch for Arduino (S4A), que é uma modificação do Scratch que permite a programação simples da plataforma de hardware de código aberto do Arduino.

O foco da minha pesquisa são os projetos que os alunos apresentarão na Feira de Ciências da Escola, cujo tema é robótica. A gestão da Escola Carolina sugeriu que os alunos fizessem uso dos kits e a priori temos oito grupos formados, porém nem todos escolheram os temas até o momento. Como os estudantes farão uso dos kits de robótica para a apresentação de seus trabalhos, precisarão programar. Por esse motivo, que iniciei minhas atividades com o Scratch para depois avançar para o S4A. Até o presente momento foram seis atividades com o Scratch e uma com o S4A. O intuito das atividades foi apresentar para os alunos os recursos dos softwares.

Ao acompanhar as turmas, faço um diário de campo para anotar as ocorrências em sala de aula. Pretendo fazer entrevistas semiestruturadas possuindo perguntas abertas (GOLDENBERG, 2004) com alunos e professores, com o intuito de refletir, juntamente a eles, a perspectiva da Modelagem Matemática e do Pensamento Computacional colocados em prática em sala de aula.

No momento da escrita deste trabalho, estou em fase da produção de dados com previsão de acabá-la no fim deste semestre. Após esta fase, debruçarei na análise dos dados buscando atingir os objetivos da pesquisa.

## 5 | ANÁLISE DOS DADOS E RESULTADOS ESPERADOS

A análise de dados seguirá os procedimentos de Bogdan e Bliklen (1994), ou seja:

A análise de dados é o processo de busca e de organização sistemático de transcrição de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais [...] (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 205).

Além disso, confrontarei os dados da maneira que Borba e Araújo (2006) denominam triangulação, isto é, consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para analisar tais dados. Especificamente, os autores falam da triangulação de fontes e métodos, que gera uma maior credibilidade na pesquisa. Assim, para tal procedimento, usarei recursos, como, entrevistas, anotações feitas das intervenções e observações, bem como das aulas e reuniões.

Diante disso, a partir da análise dos dados, pretendo obter elementos para dar indícios sobre os questionamentos do objetivo da pesquisa, buscando contribuir com o rol de pesquisas no âmbito da Educação Matemática, na medida em que se investiga a temática de Modelagem Matemática e do Pensamento Computacional no contexto das Escolas de Ensino Integral.

### REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J.L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C. ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. 2. Ed. pag. 27-47.

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática**: concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

BASSANEZI, R. C. **Ensino e aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of Mathematical Thinking**: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005.

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. Modelagem, calculadora gráfica, interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de Ciências Biológicas. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v.5 n.3, p. 63-70, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Orientações Curriculares para o ensino médio – v.2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2006.

GAZZETTA, M. **A Modelagem como estratégia de ensino da Matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.



GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

MEYER, J. F. C. A; CALDEIRA, A. D; MALHEIROS; A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3. ed. – Belo Horizonte : Autêntica Editora, 2013.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Diretrizes do Programa Ensino Integral. Programa Ensino Integral**. 2014

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Informações básicas. Programa Ensino Integral, abr. 2014.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Bolema**, Rio Claro, ano 13, nº 14, pp. 66 a 91, 2000.

WING, J. M. Computational thinking and thinking about computing. **Communicatins of the ACM**. V. 49, p. 33-35, mar. 2006.

WING, J. M. Pensamento Computacional – Um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. **Revista Brasileira de Ensino, Ciência e Tecnologia (RBECT)**, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, mai/ago. 2016.

## MATEMÁTICA LÚDICA: CONSIDERAÇÕES DOS JOGOS DESENVOLVIDOS PELO GEMAT-UERJ PARA A SALA DE AULA

### Marcello Amadeo

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro  
(UNIRIO)

Rio de Janeiro – RJ  
marcello.amadeo@gmail.com

### Luiza Harab

Professora da Rede Particular do Rio de Janeiro  
Rio de Janeiro – RJ  
harab.luiza@gmail.com

### Flávia Streva

Professora da Rede Particular do Rio de Janeiro  
Rio de Janeiro – RJ  
fstreva@gmail.com

**RESUMO:** Enquanto professores de Matemática nos deparamos com diversas dificuldades quanto ao ensino e à aprendizagem dos conteúdos e cada um encontra seu método para superar esses desafios. A Matemática Lúdica é um recurso que pode servir como auxílio para a sala de aula de Matemática. A linha de pesquisa de Matemática Lúdica do Grupo de Educação Matemática do CAp – UERJ (GEMat – UERJ) possui quatro jogos de autoria própria dos quais iremos apresentar e discutir dois deles aqui neste espaço: Decimando e Jogo da Estrela. O objetivo do primeiro é desenvolver o conceito do sistema de numeração decimal e suas operações com os submúltiplos da

unidade e do segundo é trabalhar as diferentes representações de um mesmo número.

**PALAVRAS-CHAVE:** matemática lúdica; jogos; formação de professores.

**ABSTRACT:** As teachers of mathematics, we are faced with a number of difficulties in teaching and learning the content and each one finds his method to overcome these challenges. Ludic Mathematics is a resource that can serve as an aid to the Mathematics classroom. The research area of Ludic Mathematics of the Grupo de Educação Matemática do CAp – UERJ (GEMat – UERJ) has four games of own authorship of which we will present and discuss two of them here in this space: Decimando and Jogo da Estrela. The purpose of the first is to develop the concept of the decimal number system and its operations with the submultiples of the unit and the second one is to work the different representations of the same number.

**KEYWORDS:** ludic mathematics; games; formation of teachers.

### 1 | INTRODUÇÃO

O questionamento de quem está inserido no cotidiano escolar e se depara frequentemente com os desafios na aprendizagem matemática, de uma forma geral, giram em torno de como

fazer para superar esses desafios. O ensino de Matemática já sofreu algumas mudanças nas últimas décadas, no entanto as dificuldades na aprendizagem da disciplina ainda se fazem presentes. A procura por metodologias alternativas em busca de uma melhor compreensão e construção do conhecimento pelos alunos na sala de aula vem crescendo e se multiplicando em diversas áreas dentro da Educação Matemática.

Conhecer diferentes recursos pode ser uma forma de nos munirmos de ferramentas para encarar a sala de aula e buscarmos maior diversidade na forma de ensinar, mas sempre tendo a consciência de que ainda assim existem fatores sociais, institucionais ou cognitivos que podem não garantir o sucesso da metodologia escolhida. Conhecer os alunos, o perfil da turma, a escola e o contexto pedagógico em que estão todos inseridos é algo essencial para o uso de qualquer metodologia, pois é a partir desse conhecimento que será possível estruturar determinada atividade pensada para aquele público específico. O recurso que iremos focar neste trabalho é o uso de jogos no ensino de matemática.

Inserido no Grupo de Educação Matemática do CAp – UERJ (GEMat – UERJ), temos a linha de pesquisa de Matemática Lúdica que visa pesquisar o uso de recursos lúdicos para o ensino de Matemática. Apenas nos limitaremos aqui a discutir os jogos enquanto um desses recursos, mas entendemos que eles são uma ferramenta, dentre tantas outras, para o ensino de Matemática de uma forma lúdica.

A seguir iremos aprofundar nossas concepções teóricas acerca do uso de jogos como ferramenta de auxílio para as aulas de matemática destacando como é feito o seu uso em sala, quais as vantagens e o que podemos alcançar com esses recursos, tendo em mente suas limitações de acordo com o ambiente escolar que se deseja aplicar os jogos. Por último, apresentaremos dois jogos que foram criados pela linha de pesquisa de Matemática Lúdica e discutiremos suas possibilidades.

## 2 | MATEMÁTICA LÚDICA

O uso de jogos dentro da sala de aula vem sendo bastante disseminado na educação matemática. Podemos dividir o uso de jogos em duas vertentes: na primeira delas o uso dos jogos se destina à introdução do conteúdo e na segunda ele é utilizado como forma de fixação do conteúdo. Quando utilizado como introdução ao conteúdo, a proposta é que a partir do jogo o estudante comece a perceber alguns conceitos de forma intuitiva para que depois o professor formalize o conteúdo em questão. Por outro lado, ao utilizamos o jogo como forma de fixar o conteúdo, a ordem se inverte. Primeiro o professor irá introduzir o conteúdo e o jogo será uma forma de aplicar os seus conhecimentos recém desenvolvidos com um objetivo proposto no jogo.

Em ambos os casos, o professor poderá tirar vantagens para a sua sala de aula. Os jogos que introduzem algum conteúdo servem para trabalhar a capacidade

dos alunos de fazer conjecturas matemáticas sem que haja um roteiro padronizado a ser seguido. A aprendizagem se faz de forma dinâmica, uma vez que os alunos precisam observar as propriedades matemáticas para alcançar os objetivos do jogo. Eles próprios são convidados a formular conjecturas e descobrir sobre determinado conteúdo. Enquanto que o uso do jogo como fixador do conteúdo pode ser visto como uma forma motivacional, trazer um pouco de descontração para a sala de aula além de ser uma forma de desafiar os alunos. Dessa forma eles podem revisitar um conteúdo explorando novos aspectos e permitindo uma compreensão diversificada de determinado conceito. Uma vez que os jogos costumam ser trabalhados em grupo, os alunos costumam indicar os erros e acertos uns dos outros. Essa interação entre eles permite uma aprendizagem sem a hierarquia tradicional professor-aluno, favorecendo uma discussão horizontal entre os próprios estudantes.

O uso dos jogos dentro da sala de aula é bem-vindo, mas aqui cabe ponderarmos alguns cuidados que se fazem necessários. Os jogos, sem dúvida, fazem parte de uma metodologia lúdica que na maioria dos casos é bem aceita pelos alunos que muitas vezes insistem para que todas as aulas sejam daquele jeito. Por mais que aquela aula tenha tido um viés de descontração, não podemos esquecer que há um propósito para toda aquela atividade diferente. O uso do jogo como uma atividade arbitrária usada como forma de passatempo pode fazer com que a ludicidade se perca. Devemos sempre deixar claro aos alunos quais os motivos pelos quais estamos jogando, compreendendo a finalidade da atividade e muitas vezes até participando de forma mais ativa na confecção dos jogos e da discussão sobre as regras. Os alunos sentem-se envolvidos nesse processo, na construção e na execução das atividades propostas. Dessa forma, todos nos tornamos colaboradores ativos em nossa própria busca pelo aprendizado em sala de aula.

Não existe uma forma exata de como podemos trabalhar com os jogos para que eles sejam sempre bem aceitos pelos alunos, por isso devemos sempre nos conscientizar de que há atividades que darão certo com um grupo e com outros não. Para isso é essencial conhecermos o público em questão para saber qual maneira de se introduzir uma atividade diferente. Algumas boas formas de se propor os jogos é aguçando a curiosidade, deixando-os ávidos pelo que estiver para acontecer. Em uma analogia com o texto de Rubem Alves (2002), *A Arte de Produzir Fome*, é preciso que o professor provoque a fome em seus alunos, a curiosidade e a vontade de jogar. Conhecer bem sua turma para que com criatividade, seja possível travar diálogos de qualidade. Essas medidas têm se mostrado características favoráveis aos professores que utilizam jogos. Quando o jogo é imposto pelo professor, sem a aceitação dos alunos, este perde a ludicidade e provoca por muitas vezes o não envolvimento dos alunos e conseqüentemente experiências negativas.

A atividade lúdica que o uso do jogo proporciona vai além da mera reprodução ou mecanização de um conhecimento. Seja utilizando o jogo para introduzir o conteúdo ou para fixá-lo, o jogo permite criar uma situação em que o aluno veja as conseqüências

de um erro ou acerto sendo refletido no resultado do jogo. Não necessariamente será preciso que alguém aponte o erro ou parabeneze pelo acerto, essas duas situações aparecem como consequência direta no jogo. Em algumas situações o aluno pode ter percebido que determinada ação no jogo sempre o beneficia ou não, e essa percepção ao ser expressa por ele, será um momento rico que o professor deverá aproveitar para socializar com o restante do grupo a fim de que os outros também tomem conhecimento dessa jogada. Dessa forma é possível que professor e aluno possam juntos refletir sobre o assunto e então o professor deverá fazer a formalização matemática do que está por trás dessa ação. Dessa forma, o estudante será capaz de compreender o que está acontecendo, seja para reproduzi-lo ou evitá-lo. Essa decisão do que fazer está diretamente ligada com uma tomada de decisão pautada na estratégia matemática, como destaca Streva (2015):

Há também a questão da tomada de decisão com base em uma estratégia criada pelo próprio aluno. O fato dos alunos buscarem a vitória os faz analisar matematicamente suas escolhas. Essa análise engloba diversas possibilidades, tendo que ser feita com concentração. Os jogadores interagem entre si, muitas vezes discutindo suas estratégias e justificando-as. (STREVA, 2015, p. 23)

No momento do jogo o aluno tem a possibilidade de explorar caminhos diferentes daqueles ditos “certos” pelo professor, ele se permite testar e observar as consequências. O aluno é convidado a entender que o erro também faz parte do processo de aprendizagem. Cabe a ele reconhecer o que o levou aquele erro e compreender quais outras alternativas o trariam um resultado desejado. Por outro lado, o correto também não seria necessariamente um caminho único e exclusivo. O aluno por iniciativa própria poderia encontrar uma solução correta diferente de outro aluno ou do professor. De acordo com a educadora Beatriz D’Ambrosio, sabemos que “falta aos alunos uma flexibilidade de solução e a coragem de tentar soluções alternativas, diferentes das propostas pelos professores” (1989, p.15). Portanto, o jogo permitiria essa flexibilidade, uma vez que os alunos possuem um papel ativo nessa interação lúdica. A iniciativa da solução está com o aluno e ele próprio seria capaz de desenvolver seu raciocínio, sem que haja uma imposição do professor.

Pensando nesse espaço para explorar novos caminhos, defendemos a ideia de que o professor não deve ficar constantemente interferindo nas ações dos alunos, destruindo a essência do jogo. Por causa disso, destacamos a importância do professor propor aos alunos que haja o registro daquilo que eles estão fazendo, as suas jogadas ou os seus raciocínios. Com esses dados, é possível pesquisar o quanto esses jogos proporcionaram um conhecimento matemático. Ter esse registro permite ao professor analisar e identificar o pensamento do aluno ao longo da atividade, podendo sinalizar eventuais distorções ou equívocos. Ainda permite ao professor utilizar esse material em sala posteriormente com objetivo de formalizar o conteúdo a partir das percepções e comentários dos próprios alunos. Além do mais, o registro dos passos e de suas decisões ao longo do jogo pode proporcionar ao aluno uma reflexão sobre a atividade.

Os jogos, quando usados, trazem uma forma instigante de trabalhar conceitos que muitas vezes parecem incompreensíveis ou entediantes para o aluno:

Os professores em geral mostram a matemática como um corpo de conhecimentos acabado e polido. Ao aluno não é dado em nenhum momento a oportunidade ou gerada a necessidade de criar nada, nem mesmo uma solução mais interessante. O aluno assim, passa a acreditar que na aula de matemática o seu papel é passivo e desinteressante. (D'AMBROSIO, 1989, p.16)

Portanto o jogo traz uma alternativa metodológica que possibilita novas experiências. Transformar em jogo um novo saber pode ter uma nova significação para o aluno, pois requer a sua participação ativa na construção de seu próprio conhecimento e não mais um papel passivo diante do que lhe é apresentado.

O lúdico mobiliza outras formas de aprender, não deixando assim que o aluno se faça presente apenas por copiar a matéria. Estamos diante de uma mudança de paradigma. O processo tradicional da aula expositiva em que o aluno copia calado e o professor *passa o seu conhecimento adiante* é uma concepção a ser superada por alguns professores, pois hoje acreditamos que o professor não tem esse papel de transmissor de conhecimento. O professor é responsável por guiar o estudante na descoberta dos seus saberes e os jogos auxiliam esse objetivo. Por meio dos jogos o aluno tem uma alternativa que possibilita a aprendizagem sem a dependência do professor para se deparar com situações matemáticas desconhecidas.

Os jogos geralmente são associados a um ganhador e aqui vemos mais uma possibilidade de aprendizado. Devemos desenvolver uma competição saudável, onde todos, independente do que suas notas afirmam, têm chances reais de se superar e vencer. Não existe uma correlação clara entre os alunos que ganham destaque nos jogos e seu desempenho na disciplina, dentro do sistema tradicional de exposição e avaliação de conteúdo.

Nossas falas estão fundamentadas em Grandó (2000), que apresenta suas ideias de vantagens e desvantagens que ocorrem na utilização dos jogos.

A seguir destacamos a tabela apresentada em sua tese que acreditamos ser de grande valia para quem tem interesse em pesquisar e utilizar os jogos na sala de aula.

Vantagens	Desvantagens
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fixação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno;</li> <li>• Introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão;</li> <li>• Desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos);</li> <li>• Aprender a tomar decisões e saber avaliá-las;</li> <li>• Significação para conceitos aparentemente incompreensíveis;</li> <li>• Propicia o relacionamento de diferentes disciplinas (interdisciplinaridade);</li> <li>• O jogo requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento;</li> <li>• O jogo favorece a socialização entre alunos e a conscientização do trabalho em equipe;</li> <li>• A utilização de jogos é um fator de motivação para os alunos;</li> </ul> <p>Dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, de senso crítico, da participação, da competição “sadia”, da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender;</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tomando-se um “apêndice” em sala de aula. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber porque jogam;</li> <li>• O tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é maior, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo;</li> <li>• A coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente a natureza do jogo;</li> <li>• As falsas concepções de que devem ensinar todos os conceitos através dos jogos. Então, as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno;</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• As atividades em jogos podem ser utilizadas para reforçar ou recuperar habilidades de que os alunos necessitem. Útil no trabalho com alunos de diferentes níveis;</li> <li>• As atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as dificuldades dos alunos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A perda da “ludicidade” do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo;</li> <li>• A dificuldade de acesso e disponibilidade de materiais e recursos sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.</li> </ul>

Fonte: GRANDO, 2000, p.35

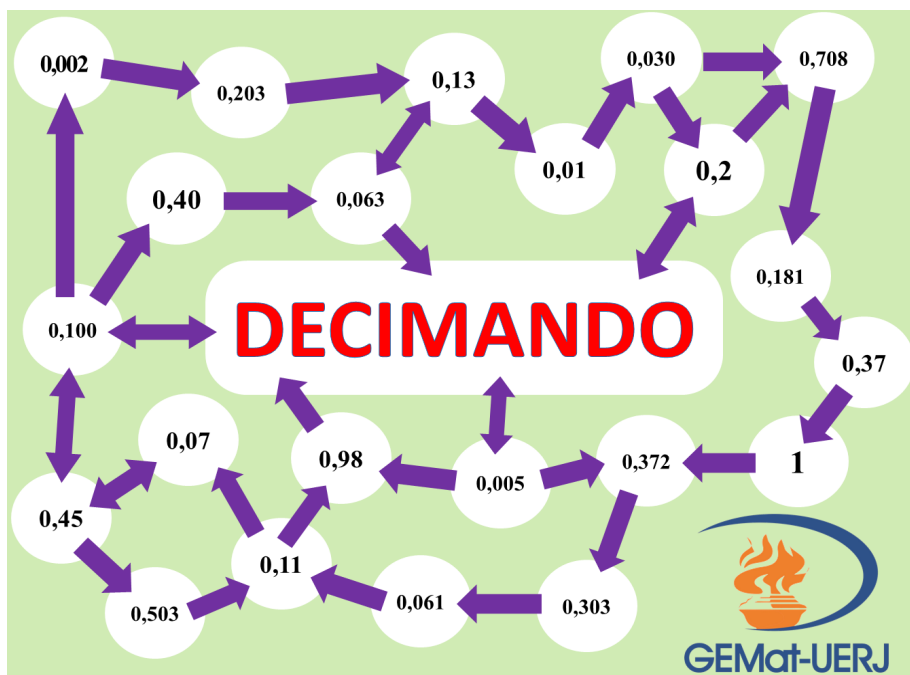
As ideias presentes nessa tabela nos acompanham em nossas atividades e pesquisas e acreditamos que um ambiente em que podemos discutir esses tópicos é sempre de muita importância.

### 3 | OS JOGOS DO GEMAT – UERJ

O GEMat – UERJ possui atualmente a linha de pesquisa de Matemática Lúdica que elaborou quatro jogos envolvendo conteúdos do Ensino Fundamental II: Decimando, Jogo de Estrela, Jogo Monetário e Poker Partição. Cada um com um objetivo e construídos inicialmente para determinado público, no entanto todos já passaram por adaptações a partir de cada atividade realizada. Dos quatro jogos iremos relatar quais as possibilidades de dois deles: Decimando e Jogo da Estrela. Ambos os jogos foram criados inicialmente para uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental II do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira - CAp/UERJ, devido a uma dificuldade específica daquela turma em trabalhar números decimais e as diferentes representações de um mesmo número. Desde então os jogos já foram aplicados em outras turmas da Educação Básica, turmas de licenciatura Matemática

e com professores de Matemática já formados. Cada atividade nos indicou diferentes reflexões as quais iremos abordar aqui.

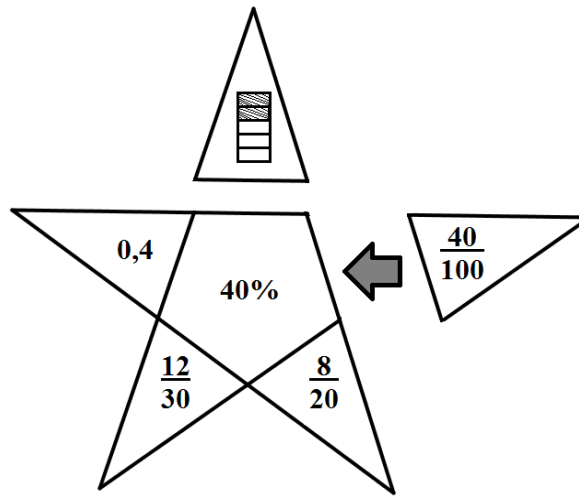
O jogo Decimando tem como objetivo principal trabalhar a construção dos números decimais. Há um tabuleiro como mostrado na figura a seguir e a movimentação entre as casas deve respeitar o sentido das setas. Junto com o tabuleiro há fichas de 1 inteiro, 1 décimo, 1 centésimo e 1 milésimo que serão usadas para formar os números das casas. Para jogar é lançado um dado que indicará quantas casas serão percorridas e naquela em que o jogador parar ele deverá pegar as fichas que compõe esse número respeitando a regra de que não é possível ter mais do que 9 fichas de uma mesma unidade decimal. Sendo assim, toda vez que ele obtém mais do que 9 fichas de uma dessas ordens, ele é obrigado a fazer uma troca, sendo bonificado com mais 1 ponto por isso. Como exemplo citamos que se ele possui 10 fichas de 1 centésimo, ele deverá trocá-las por 1 ficha de 1 décimo. Dessa forma o jogo trabalha com a construção dos números decimais no nosso sistema posicional decimal.



O Decimando é um jogo competitivo que desenvolve o lado da estratégia envolvendo números decimais. O aluno para ganhar precisa fazer o maior número de trocas e para isso é preciso identificar qual a melhor casa que ele pode ir a fim de obter as fichas o ajudará nas trocas.

O Jogo da Estrela tem como objetivo a identificação das diferentes representações de um mesmo número. O jogo consiste em montar um quebra-cabeça em formato de estrela, como mostra a figura abaixo de modo que as pontas da estrela e o centro representem o mesmo número.





O jogo da estrela é um jogo cooperativo em que a turma é dividida em grupos e cada grupo tem como tarefa juntar as peças que têm o mesmo valor em diferentes representações. Os alunos devem se ajudar para que o quebra-cabeça possa ser completado. Portanto, é comum nesta atividade que os próprios alunos identifiquem os eventuais erros que os colegas possam cometer.

#### 4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho com jogos passa pela criação de um ambiente democrático em sala de aula: do diálogo entre professor e alunos, da discussão sobre as possibilidades e a construção do conhecimento coletivamente. Tais processos de competição saudável, escuta e diálogo são características inerentes não somente à aprendizagem matemática, mas a formação cidadã dos nossos discentes.

Como acreditamos na potencialidade dos jogos para o ensino-aprendizagem da matemática, queremos trazer as nossas experiências como professores que abraçam essa ideia em suas práticas. No entanto, compreendemos que existem inúmeras formas de lidar com o conhecimento matemático e que é a fluidez de ideias e metodologias que torna a aprendizagem possível.

#### REFERÊNCIAS

ALVES, Rubem. **A arte de produzir fome**. Folha de São Paulo. 2002

D'AMBROSIO, Beatriz. **Como ensinar matemática hoje?** In: Temas e Debates. SBEM. Ano II, n. 2, Brasília, 1989, p. 15-19.

GRANDO, Regina. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Campinas, SP, 2000. Tese de doutorado. Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

STREVA, Flávia. **O surgimento de um jogo didático e suas contribuições na formação de professores**: Decimando. Rio de Janeiro, 2015. Projeto Final, Instituto de Matemática Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ.

## O ENSINO DE ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL: COMO É ABORDADO EM DOCUMENTOS?

**Flávia Luíza de Lira**

Universidade Federal de Pernambuco

Recife- PE

**Liliane Maria Teixeira Lima de Carvalho**

Universidade Federal de Pernambuco

Recife- PE

**RESUMO:** O artigo consiste em recorte de uma dissertação de mestrado que investiga como acontece o ensino de Estatística na Educação Infantil. Objetiva-se aqui identificar como documentos oficiais abordam o ensino de Estatística, buscando analisar possibilidades e desafios nessa inserção. A partir de uma perspectiva metodológica centrada na pesquisa documental analisou-se o ensino de Estatística no RCNEI, na DCNEI e na BNCC. Não se encontrou abordagens diretas quanto ao ensino de Estatística nos blocos de conteúdos e nas orientações didáticas do RCNEI e nas DCNEI. Na BNCC existem indicações para o ensino de Estatística na Educação Infantil através de objetivos de aprendizagem e desenvolvimento de atividades propostas no campo de experiência Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações. A inserção intencional desses conteúdos pelos professores em seus planejamentos se constitui em desafio na Educação Infantil. Contudo, processos de formação continuada, sobretudo aqueles que

discutem a prática docente podem se configurar em possibilidade nesse nível de ensino.

**PALAVRAS-CHAVE:** Educação Estatística. Educação Infantil. Documentos. BNCC.

**ABSTRACT:** The article consists of a dissertation cut that investigates how the teaching of Statistics in Child Education happens. The purpose of this study is to identify how official documents deal with the teaching of statistics, trying to analyze possibilities and challenges in this insertion. From a methodological perspective centered on documentary research, we analyzed the teaching of Statistics in the RCNEI, DCNEI and BNCC. There were no direct approaches to teaching Statistics in the content blocks and didactic guidelines of the RCNEI and in the DCNEI. At BNCC there are indications for the teaching of Statistics in Child Education through learning objectives and development of proposed activities in the field of experience Spaces, times, quantities, relationships and transformations. The intentional insertion of these contents by the teachers in their planning constitutes a challenge in Early Childhood Education. However, continuous training processes, especially those that discuss the teaching practice can be configured in possibility at this level of teaching.

**KEYWORDS:** Statistical Education. Child education. Documents. BNCC.

## 1 | INTRODUÇÃO

O currículo da Educação Infantil vem sendo muito discutido e passando por mudanças significativas nos últimos anos. Inicialmente, o atendimento às crianças da Educação Infantil era assistencialista e tinha como intenção preparar a criança para o ensino fundamental. A esse respeito Kuhlmann Jr. (1998) destaca que “durante as duas décadas iniciais do século XX, implantaram-se as primeiras instituições pré-escolares assistencialistas no Brasil.” A criação desses espaços visava atender as necessidades das mães que trabalhavam na indústria e não as necessidades das crianças. Posteriormente, com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, LDB (BRASIL, 1996), tem-se a ampliação do entendimento da Educação Infantil como primeira etapa da Educação Básica.

O Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil – RCNEI (BRASIL, 1998), surge numa perspectiva de trazer alternativas pedagógicas para romper com a visão assistencialista das creches e de antecipação da escolaridade que considerava a Educação Infantil como uma preparação para o Ensino Fundamental. O RCNEI aborda as Linguagens a serem vivenciadas na Educação Infantil, sugerindo objetivos, conteúdos e situações didáticas para guiarem as vivências dos professores. A Linguagem da Matemática é abordada numa perspectiva de valorizar os conhecimentos de mundo das crianças e proporcionar novas aprendizagens.

As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil– DCNEI (BRASIL, 2009), por sua vez, considera a Educação Infantil como etapa inicial da Educação Básica na qual as crianças aprendem através das interações e brincadeiras.

A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) é uma diretriz que orienta os estados e municípios a elaborarem os seus currículos. Na Educação Infantil, espera-se que as crianças tenham direitos de aprendizagem e que estes sejam assegurados no cotidiano da escola para que as crianças aprendam e ampliem seus saberes. Esses direitos são pautados em Campos de Experiência, sendo que alguns propõem atividades que envolvem conhecimentos matemáticos, dentre os quais o de Estatística.

No âmbito da Educação Estatística ressalta-se a importância da pesquisa como um dos eixos estruturadores de abordagens interdisciplinares, estimulando desde cedo o senso investigativo das crianças (GITIRANA, 2014). Nesse sentido, o conhecimento de Estatística, pode contribuir para a formação científica da criança através de pesquisas realizadas no âmbito escolar e do incentivo que o professor pode dar ao possibilitar que a criança seja protagonista de suas descobertas ao confrontar suas hipóteses. Constitui-se, portanto, em tema de relevância e que precisa fazer parte do currículo escolar desde a educação infantil. Neste artigo buscamos analisar se e como os documentos oficiais mencionados abordam conteúdos de Estatística.

Além dessa introdução, o artigo apresenta em seguida uma discussão sobre o ensino de Estatística na educação infantil, pontuando algumas pesquisas na área. Na sequência, apresentamos os aspectos metodológicos da pesquisa, as análises

realizadas no RCNEI, DCNEI e BNCC sobre o ensino de Estatística e nossas Considerações Finais.

## 2 | O ENSINO DE ESTATÍSTICA NA EDUCAÇÃO INFANTIL

A criança está em constante aprendizagem e geralmente imersa em ambientes repletos de informações que ela busca compreender. Embora muito pequenas, elas estão atuantes nesse mundo de conhecimentos diversificados, como aqueles que envolvem a Estatística, e suas experiências precisam ser apreciadas na escola. Os conhecimentos prévios das crianças precisam ser valorizados na Educação Infantil e serem cada vez mais estimulados, conduzindo-as a reflexões e aprendizagens significativas.

A Estatística está presente em nosso cotidiano, sendo comum sermos expostos a dados veiculados na mídia sob a forma de gráficos, tabelas e/ou textos. Algumas vezes nós precisamos compreender criticamente essas informações para tomarmos decisões. No entanto, para que isso aconteça, é necessário que o ensino de Estatística seja garantido nas escolas desde a Educação Infantil. Um ensino que envolva todo o ciclo de investigação, desde a coleta dos dados até a criança desenvolver um posicionamento crítico diante das informações.

Carvalho (2011, p. 682) ressalta que:

O grande desafio do ensino de Estatística na escola seria, então, a valorização dos conhecimentos prévios que os estudantes possuem sobre como tratar dados em diferentes situações de seus cotidianos. Uma forma de superar tal desafio seria o desenvolvimento de abordagens de ensino que contribuíssem para a emergência de raciocínio voltados para inferências informais.

Dessa forma, quando o professor propõe em sua rotina diária a escuta das crianças valorizando os saberes que elas trazem, abre-se uma oportunidade para que novas questões apareçam e novos conhecimentos sejam adquiridos na escola.

Pesquisas como aquelas que discutimos em seguida nessa seção, colocam em evidência que desde a educação infantil as crianças demonstram que possuem potencial para tratar dados e desenvolver habilidades envolvendo conhecimentos estatísticos. Contudo, o ensino de Estatística precisa envolver temas do interesse das crianças e que ocasionem debates e reflexões, valorizando o desenvolvimento da curiosidade o que pode direcionar toda a turma para uma investigação (GITIRANA, 2014). O trabalho com a Estatística proporciona a integração das linguagens vivenciadas na Educação Infantil, tornando a aprendizagem mais envolvente e cheia de significados.

Gal (2002) salienta que a capacidade de compreender e analisar criticamente dados estatísticos que perpassam pelo nosso dia a dia consiste em uma espécie de Letramento Estatístico. O professor precisa ser um mediador no desenvolvimento desse letramento estatístico, superando os desafios e possibilitando experiências que envolvam as crianças numa perspectiva investigativa, mas para tanto, precisa de

orientações curriculares e de experiências formativas que o estimulem a desenvolver esse trabalho na escola. Contudo, é comum professores focarem em conteúdos voltados para números e operações e deixarem por último, ou mesmo não abordar, a Educação Estatística na escola. Em relação a Educação Infantil, são poucas as pesquisas desenvolvidas em relação a esse tema, conforme discutimos em seguida.

### 3 | PESQUISAS DESENVOLVIDAS NA ÁREA

Em um levantamento de pesquisas sobre Educação estatística na Educação Infantil, encontramos poucos trabalhos. Dos que localizamos, destacamos os estudos de Selva (2003), Lopes (2003), Guimarães (2009), Camargo (2010) e Souza (2013).

Camargo (2010) relata uma experiência envolvendo o trabalho com gráficos de setores com crianças da Educação Infantil, cujo tema era pesquisar como as crianças se deslocavam até a escola. A autora analisou, em especial, a Proposta Curricular de Itatiba que foi elaborada em 2009 e implantada em 2010. Nesta Proposta Curricular encontram-se conteúdos de Estatística, dentro do eixo “Experiências com a exploração do conhecimento matemático” em particular no bloco Análise de Possibilidades e Tratamento da Informação. Nessa experiência relatada todos os momentos foram realizados coletivamente, tendo a professora como mediadora. As crianças realizaram a coleta dos dados e registraram em uma tabela, construída previamente pela professora e denominada de “concreta”. Nessa tabela cada criança representava amaneira própria de se deslocarem de casa até a escola. A construção do gráfico foi realizada em etapas, tendo a professora utilizado um barbante para demarcar cada setor representado pelas crianças. Tendo o barbante como base, a professora desenhou o gráfico no chão usando giz. Segundo a autora, o trabalho com gráfico “proporciona a comunicação das ideias matemáticas, a produção de sentidos próprios do objeto matemático e a reflexão sobre os diferentes dados contidos ali” (CAMARGO, 2010, p.5).

Esse relato nos mostra o quanto é possível o trabalho com a Educação Estatística na Educação Infantil. O envolvimento das crianças através de uma temática de seu interesse as conduz a pesquisa e a coleta de dados de forma prazerosa podendo gerar resultados significativos.

Assim, destacamos a relevância do trabalho com a pesquisa estatística realizada por Camargo (2010), que transforma dados do cotidiano da criança em importantes componentes matemáticos e aproxima o professor do ambiente cultural das crianças.

Guimarães, Gitirana, Marques e Cavalcanti (2009) realizaram um estudo apresentando um Estado da Arte das pesquisas sobre a Educação Estatística na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Nesse estudo elas analisaram publicações em anais de congressos e em periódicos científicos nacionais do período de 2001 a 2006 relacionados a Educação Matemática. Dos artigos analisados 41% foram de intervenção, 25% foram teóricos ressaltando a importância

do ensino da Estatística, 24% envolveram diagnose de professores e estudantes sobre a Educação Estatística, 8% sobre análise do livro didático e um artigo que apresenta uma proposta didática. Dos 25% dos artigos que abordavam a importância do ensino da Educação Estatística, apenas um fazia referência a Educação Infantil.

Com base em Curcio (1987) as autoras pontuam três tipos de leitura dos gráficos: “leitura dos dados”, “leitura entre os dados” e “leitura além dos dados”. Assim, a “leitura além dos dados” estaria relacionada ao conhecimento de mundo que as crianças possuem. É o momento de refletir criticamente sobre os dados observados e atuar sobre eles. Contudo, as autoras pontuam a falta de formação inicial e continuada para o professor sobre a temática da Educação estatística voltada para uma leitura além dos dados.

Souza et al. (2013) apresentam reflexões sobre atividades e projetos de estatística e probabilidade desenvolvidos em pesquisas resultantes de estudos de mestrado. Uma pesquisa discutida pelos autores, realizada com 17 crianças que não sabiam ler, analisa a forma como elas problematizavam, elaboravam instrumentos, coletavam, organizavam e analisavam os dados. Foi desenvolvido um projeto de investigação estatística com seis etapas bem definidas: escolha do tema; elaboração de um instrumento de pesquisa, nesse caso foi um questionário com figuras para a reprodução das respostas a ser usado na etapa seguinte; coleta dos dados; organização dos dados; análise, interpretação e conclusão sobre os dados; e comunicação dos resultados. O uso de figuras no instrumento de pesquisa revela uma preocupação com as crianças que ainda não estavam alfabetizadas e valoriza os recursos pictóricos para a comunicação. A etapa de organização dos dados, não foi muito interessante para as crianças, pois segundo o autor da pesquisa analisada por visto que não é uma atividade natural e espontânea. Os gráficos foram construídos do mesmo tamanho, subdivididos em retângulos e as crianças pintavam. Segundo Souza et al. (2013, p. 54) o autor dessa pesquisa pontua que:

Para a representação gráfica dos dados, as crianças fizeram uso de conhecimentos que lhes possibilitaram visualizar, analisar e comparar. Além disso, ao “ler” as tabelas e representar os dados nos gráficos, tiveram a oportunidade de estabelecer algumas correspondências, como, por exemplo, entre a frequência do valor de uma determinada variável e a altura que a representava.

Os autores buscam mostrar que crianças da Educação infantil têm condições de aprender sobre estatística.

Selva (2003) pesquisou em sua tese de doutorado o uso de gráficos de barras na resolução de problemas aditivos e as dificuldades surgidas na interpretação e construção dessa representação. A autora realizou dois estudos, contudo, destacamos aqui apenas um deles por envolver crianças que cursavam a Educação Infantil.

Participaram do estudo 24 crianças as quais nunca haviam realizado trabalhos com gráficos na escola. Elas resolveram problemas aditivos usando blocos de encaixe e gráficos de barras. A autora considerou a importância da interação e desenvolveu o

seu estudo com duplas de crianças que participaram de três grupos que realizavam tipos de atividades diversas. Os protocolos das duplas foram analisados minuciosamente considerando suas descobertas em relação as atividades realizadas com gráficos.

Foi constatado que as crianças sentiam dificuldades durante a construção e interpretação dos gráficos, mas estas foram superadas quando o problema proposto pela pesquisadora foi relevante para elas e vinha acompanhado de materiais manipulativos.

[...] as duplas resolveram problemas envolvendo a representação gráfica. Em caso de dificuldades das duplas, o experimentador voltava ao uso dos manipulativos através de intervenções que faziam referências às atividades com blocos ou mesmo propondo um outro problema semelhante com blocos. (SELVA, 2003, p. 211).

Adespite da importância do uso de materiais manipulativos, Selva (2003) ressalta que não são estes que garantem a aprendizagem das crianças, mas a intervenção realizada pelo professor no uso desses materiais e nas reflexões propostas.

Lopes (2003) realizou sua pesquisa de doutorado com um olhar mais específico sobre o conhecimento profissional de professores e suas relações com a Estatística na Educação Infantil. Ela realizou um trabalho minucioso de caráter colaborativo com professoras da Educação Infantil e coordenadoras, durante três anos e constatou que “modelos prontos e objetivos bem definidos por outros no currículo não são eficazes, uma vez que reduzem a capacidade de juízo profissional do professor e sua possibilidade de aspiração educativa.” (LOPES, 2003, p. 237). O currículo em ação foi extremamente relevante, pois cada professora reelaborava sua prática de acordo com o desenvolvimento da turma. Elas se tornaram construtoras do currículo.

Lopes (2003) argumenta sobre a importância de um processo de formação que valorize os saberes docentes e contribua para reflexões sobre a prática. Destaca a ousadia das profissionais de Educação Infantil diante do conhecimento delas sobre a criança que permitiu um processo de autonomia na elaboração do currículo.

Acreditamos que o ensino e a aprendizagem que abordem o pensamento estatístico e o probabilístico, desde a Educação Infantil, possibilitarão a formação de um aluno com maiores possibilidades no exercício de sua cidadania, com maior poder de análise e criticidade diante de dados e índices (LOPES, 2003, p. 241).

Diante das leituras realizadas constatamos que é possível um trabalho com a Educação Estatística em turmas de Educação Infantil, rompendo assim com a crença de que seria difícil para as crianças se interessarem e aprenderem sobre essa temática. Contudo, seria necessário também que os documentos prescritos explicitassem sobre abordagens de ensino de Estatística na Educação Infantil. Esses documentos oficiais orientam os planejamentos e as práticas de professores na Educação Infantil, então eles podem contribuir para estimular ou não a inserção de conteúdos de ensino específicos, como o de Estatística, no currículo da escola.

## 4 | MÉTODO

Na pesquisa apresentada neste artigo utilizamos a análise documental que “visa a representar o conteúdo intelectual do documento, a fim de facilitar a consulta ou a posterior recuperação” (GUIMARÃES, 2009, p. 109). Nessa representação se busca mostrar o conteúdo do documento de uma maneira diferente do original, para promover a apreciação do seu conteúdo mais claramente.

A trajetória metodológica foi constituída por três etapas. Na primeira etapa escolhemos os documentos oficiais para análise. Elegemos os documentos que discutem o currículo da Educação Infantil como o RCNEI que orienta conteúdos e situações didáticas, as DCNEI que legitimam políticas públicas e propostas pedagógicas e a BNCC que é o mais recente e é a base para a organização do currículo.

Na segunda etapa observamos os documentos realizando uma leitura preliminar, destacando artigos e capítulos que estavam relacionados com o ensino de Estatística nessa etapa da educação básica.

E finalmente realizamos a análise dos dados. Nessa etapa examinamos a abordagem dos três documentos no âmbito do ensino da Matemática e enfatizamos como são apresentados os conceitos de Estatística e quais os desafios e as possibilidades para o ensino.

Os resultados dessa análise encontram-se apresentados em dois tópicos dispostos em seguida: abordagens sobre conteúdos de Estatística no RCNEI e DCNEI; e abordagens de Estatística na BNCC.

Destacamos a BNCC em uma seção por ser essa a prescrição curricular que orienta atualmente o desenvolvimento e as práticas curriculares na Educação Infantil.

## 5 | ABORDAGENS SOBRE CONTEÚDOS DE ESTATÍSTICA NO RCNEI E DCNEI

De um modo geral, o RCNEI considera que os conhecimentos matemáticos na Educação Infantil são assimilados pelas crianças através das interações e das brincadeiras (BRASIL, 1998). Assim, a prática docente necessita considerar o caráter lúdico do ensino possibilitando uma aprendizagem prazerosa e significativa para as crianças.

Este documento contesta a realização de atividades pré-numéricas tais como aquelas que consideram a classificação, a seriação e a comparação primordiais para a compreensão da noção de número e desenvolvimento do raciocínio lógico pela criança. Esses conceitos, conforme o RCNEI, são fundamentais não apenas para a matemática como também para outras áreas de conhecimentos.

O RCNEI ressalta a importância do jogo como uma atividade educativa que proporciona a aprendizagem de forma lúdica. No entanto, a intencionalidade do professor durante o planejamento é essencial para que haja a construção do conhecimento, pois a livre manipulação das peças do jogo não garante o desenvolvimento da criança. A



resolução de problemas também é primordial no ensino da matemática, visto que a criança utiliza conhecimentos que já possui e conhecimentos novos para resolver os desafios.

Diversas ações intervêm na construção dos conhecimentos matemáticos, como recitar a seu modo a sequência numérica, fazer comparações entre quantidades e entre notações numéricas e localizar-se espacialmente. Essas ações ocorrem fundamentalmente no convívio social e no contato das crianças com histórias, contos músicas, jogos, brincadeiras etc. (RCNEI, 1998, p. 213).

O conhecimento matemático está organizado no RCNEI em três blocos (eixos): números e sistema de numeração, grandezas e medidas e espaço e forma. Os objetivos e os conteúdos estão divididos entre crianças de zero a três anos e crianças de quatro a seis anos de idade.

Tópicos de Estatística, portanto, não são parte dos eixos do conhecimento matemático prescrito para esse nível de ensino. Contudo, é possível identificar abordagens ao conhecimento estatístico no RCNEI como, por exemplo, na referência a atividade destinada a crianças de 4 e 5 anos, tal como a que segue:

Com a ajuda do professor, as crianças podem montar uma tabela e criar problemas que comparem e ordenem escritas numéricas, buscando as informações necessárias no próprio quadro (RCNEI, 1998, p. 223).

Essa passagem encontra-se inserida no bloco de conteúdos Números e Sistema de Numeração e é sugerida como atividade para se trabalhar notação e escrita numérica na Educação Infantil. A proposta envolve a criação de uma tabela com informações numéricas dos membros de cada família das crianças.

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil – DCNEI (BRASIL, 2009), em seu Art. 4º, as propostas pedagógicas desse nível de ensino devem considerar a criança como o centro do planejamento curricular, pois ela se constitui como sujeito epistêmico e histórico do seu conhecimento. Nas interações sociais e cotidianas, a criança “constrói sua identidade pessoal e coletiva, brinca, imagina, fantasia, deseja, aprende, observa, experimenta, narra, questiona e constrói sentidos sobre a natureza e a sociedade, produzindo cultura.” (BRASIL, 2009, Art.4º).

Assim, salientamos a relevância da valorização dos conhecimentos de mundo da criança e a reflexão sobre eles. As suas experiências com a matemática, por exemplo, são perceptíveis ao mostrarem a idade com os dedos, repartirem balas e brinquedos, contarem os pontos de um jogo, comparando distâncias, etc.

Ainda de acordo com a DCNEI, (BRASIL, 2009), o currículo da Educação Infantil deve contemplar as vivências das crianças e os conhecimentos que fazem parte do patrimônio cultural. As práticas pedagógicas, por sua vez, devem ter como eixos norteadores as interações e as brincadeiras que perpassem por todas as linguagens vivenciadas nas instituições que trabalhem com crianças da Educação Infantil.

No âmbito da Linguagem da Matemática de acordo com a DCNEI, é preciso garantir nas escolas experiências que: “recriem, em contextos significativos para as

crianças, relações quantitativas, medidas, formas e orientações espaço temporais;” (BRASIL, 2009, Artigo 9º, inciso IV). Ao mencionar nessa passagem a recriação de contextos significativos para as crianças, é possível identificar uma relação com a abordagem proposta no RCNEI que faz referência a necessidade de aprendizagens significativas.

Notamos que esses dois documentos analisados mostram a importância do conhecimento matemático no currículo da educação infantil, oportunizando as crianças a construção de saberes com bastante ludicidade. Entretanto, no que se refere ao ensino de estatística, os blocos de conteúdos tanto do RCNEI como do DCNEI não abordam conceitos que fazem menção ao seu ensino. No entanto, embora não se encontre uma recomendação explícita, existe a possibilidade de ensino de estatística na sugestão de atividades nas orientações didáticas referente ao bloco de conteúdos de Números e Sistema de numeração.

No próximo tópico iremos analisar as possibilidades e desafios na Base Nacional Comum Curricular com relação ao ensino de Estatística na Educação Infantil.

## 6 | ABORDAGENS DE ESTATÍSTICA NA BNCC

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC aborda a importância das interações e brincadeiras como eixos estruturantes das práticas pedagógicas na Educação Infantil. O documento apresenta em sua organização seis direitos de aprendizagem e desenvolvimento das crianças na Educação Infantil, quais sejam: conviver, brincar, participar, explorar, expressar e conhecer-se. A partir desses direitos busca-se assegurar condições de aprendizagem desafiadoras e significativas para as crianças.

A BNCC organiza sua estrutura curricular em Campos de Experiências, sendo: O eu, o outro e o nós; Corpo, gestos e movimentos; Traços, sons, cores e formas; Escuta, fala, pensamento e imaginação; Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações. A partir dos quais são definidos os objetivos de aprendizagem para a Educação Infantil. Essa organização em Campos de Experiência busca proporcionar um planejamento que considere a criança como um ser integral, possibilitando-a a fazer conexões com o contexto em que está inserida, tornando a aprendizagem significativa. Esses campos são baseados nas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil (DCNEI, 2009).

A criança é um ser com curiosidade natural e que precisa ser estimulada no ambiente escolar para se apropriar dos saberes culturais. Para isso o professor precisa planejar experiências que apreciem os objetivos explicitados na BNCC de forma lúdica e significativa para a criança. A esse respeito a BNCC (2018, p. 36) destaca:

Essa concepção de criança como ser que observa, questiona, levanta hipóteses, conclui, faz julgamento e assimila valores e que constrói conhecimentos e se apropria do conhecimento sistematizado por meio da ação e nas interações com o mundo físico e social não deve resultar no confinamento dessas aprendizagens a um processo de desenvolvimento natural ou espontâneo. Ao contrário, impõe a

Essa intencionalidade do professor diante das experiências propostas é bastante relevante para o desenvolvimento integral das crianças, garantindo que as mesmas vivenciem diferentes momentos de aprendizagem no ambiente escolar.

O campo de experiência “Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações” encontra-se associado ao conhecimento matemático que precisa ser vivenciado nas instituições de Educação Infantil. Dentre os objetivos desse campo de experiências, destacamos “Classificar objetos e figuras de acordo com suas semelhanças e diferenças” (BNCC, 2017, p.49).

Ao fazer menção à classificação de objetos, notamos que já há uma preocupação com a Educação Estatística nesse novo documento. A classificação é um processo fundamental na organização de dados estatísticos e segundo Guimarães (2016), gera muita dificuldade para ser aprendida. Nesse sentido, ao considerar a classificação como elemento importante da experiência da criança, essas orientações podem contribuir para estimular o desenvolvimento do pensamento estatístico.

Em outro objetivo de aprendizagem desse mesmo campo de experiências encontramos na BNCC: “Expressar medidas (peso, altura, etc.), construindo gráficos básicos” (BNCC, 2017, p.50). Nesse objetivo está mais clara a realização de atividades envolvendo conteúdo de estatística, voltados para a construção de gráficos.

A BNCC também apresenta uma “Síntese das aprendizagens esperadas” ao final da Educação Infantil, para que os professores tenham elementos que indiquem os objetivos a serem explorados, dentro de cada Campo de experiência. E naquele campo de experiência “Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações” destacamos a seguinte habilidade “Identificar e registrar quantidades por meio de diferentes formas de representação (contagens, desenhos, símbolos, escrita de números, organização de gráficos básicos, etc.)” (BNCC, 2017, p.51). Notamos nessa passagem que há uma preocupação em contemplar a Educação Estatística na Educação Infantil.

## 7 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi buscando identificar como o ensino de Estatística é abordado na proposta do RCNEI, DCNEI e da BNCC que realizamos esse estudo. Também numa perspectiva de analisar os desafios e as possibilidades para o ensino desse tema na Educação Infantil.

O RCNEI e a DCNEI enfatizam o ensino de Matemática numa perspectiva de valorização dos conhecimentos de mundo que a criança tem e da construção de novos saberes. No entanto, não abordam os conhecimentos sobre a Estatística de maneira explícita. O RCNEI destaca que as atividades pré-numéricas para crianças da Educação infantil, a exemplo daquelas de classificação, não são pré-requisitos para

aprender sobre os números, mas são relevantes para qualquer área do conhecimento. Esse é um motivo de grande desafio para o professor vivenciar os conceitos estatísticos na escola.

A BNCC introduz de forma mais clara o trabalho com a educação estatística na Educação Infantil. Destacamos a esse respeito menção à classificação de objetos e de figuras no campo de experiência “Espaços, tempos, quantidades, relações e transformações”. Também constatamos que o trabalho abordando a estatística com as crianças dessa faixa etária é bastante relevante, por envolver dados ligados a temáticas do cotidiano da criança tais como: a escola e a família. Além desse campo de experiência, nos outros campos de experiência também é possível abordar elementos de Estatística de forma articulada com os objetivos de aprendizagem e desenvolvimento e a prática docente.

Pesquisas revelam que ainda é muito escasso o ensino de Estatística na Educação Infantil, seja por insegurança do professor sobre a temática ou porque consideram que esse conteúdo é difícil para as crianças aprenderem. Contudo, algumas pesquisas mostram que é possível realizar um trabalho com estatística que envolva as crianças e valorize seus conhecimentos de mundo se investe-se na formação continuada do professor.

Esperamos que este estudo contribua com as discussões recentes a respeito do ensino de Matemática, em especial de Estatística, no âmbito da Educação Infantil, a partir de prescrições curriculares oficiais.

## REFERÊNCIAS

BRASIL, Presidência da República. Casa Civil. Lei Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as **diretrizes e bases da educação nacional**. Brasília, 1996. Disponível em: <[http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/LEIS/L9394.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm)>. Acesso em: 25 mar. 2013.

\_\_\_\_\_, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>>. Acesso em: mar. 2018.

\_\_\_\_\_, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – Educação Estatística**, Caderno 7. Brasília, DF, 2014.

\_\_\_\_\_, Ministério de Educação e do Desporto. **Referencial Nacional para Educação Infantil**. Brasília, DF: MEC, 1998.

\_\_\_\_\_, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Infantil**. Secretaria de Educação Básica. -Brasília: MEC, SEB, 2009.

CAMARGO, Giancarla Giovanelli de. **Gráfico de setores – o trabalho com tratamento da informação na Educação Infantil**. 2010.

CARVALHO, L. M. T. L.; CAMPOS, T. M. M.; MONTEIRO, C. E. F. Aspectos Visuais e Conceituais nas Interpretações de Gráficos de Linhas por Estudantes. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, n. 40, p. 679-700, dez. 2011.

GAL, I. Adults statistical literacy: meanings, components, responsibilities. **InternationalStatisticalReview**, The Hague, v. 70, n. 1, p. 1-25, abr, 2002.

GUIMARÃES, Gilda Lisboa; GITIRANA, Verônica; MARQUES, Mabel; CAVALCANTI, Milka. A Educação estatística na educação infantil e anos iniciais. **ZETETIKÉ**, v. 17, n. 32, p. 11-28, jul/dez, 2009.

\_\_\_\_\_, Gilda Lisboa; BARRETO, M.N.S. Estratégias utilizadas por crianças na Educação Infantil para classificar. **EMTEIA**, v. 07, n. 01, 2016.

GUIMARÃES, José Augusto Chaves. Abordagens teóricas de tratamento temático da informação: catalogação de assunto, indexação e análise documental. **IBERSID**, v.03, p. 95-104, 2009.

KUHLMANN. Junior, Moysés. **Infância e educação infantil: uma abordagem histórica**. Porto Alegre: Mediação, 1998.

LOPES, C. E. **O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil**. 2003. 290 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

SELVA. A. C. V. **Gráficos de barras e materiais manipulativos: analisando dificuldades e contribuições de diferentes representações no desenvolvimento da conceitualização matemática em crianças de seis a oito anos**. 2003. 225 f. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva)-Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.

SOUZA, A.C.; SOUZA, L. O.; MENDONÇA, L. O.; LOPES. C.E. O ensino de estatística e probabilidade na educação básica: atividades e projetos gerados a partir de pesquisas de mestrado profissional. **VIDYA**, Santa Maria, v. 33, n. 1, p.49-65, jan./jun., 2013.. Disponível em: <http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/245/222>. Acesso em: agos. 2017.

## O USO DO MATERIAL GEOBASES PARA A FORMAÇÃO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

**Francikelly Gomes Barbosa de Paiva**

Universidade Federal de Campina Grande  
(UFCG), Campina Grande-PB

**Francileide Leocadio do Nascimento**

Universidade Federal de Campina Grande  
(UFCG), Campina Grande-PB

**Fabiana Karla Ribeiro Alves Gomes**

Universidade Federal de Campina Grande  
(UFCG), Campina Grande-PB

**RESUMO:** Este trabalho traz uma apresentação e discussão a respeito do material didático “Geobases”, destacando sua importância de sua utilização para a aprendizagem de conteúdos matemáticos. A metodologia utilizada para o estudo foi uma pesquisa bibliográfica a partir de um texto e mediante experiências vivenciadas por nós na disciplina Matemática I na Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental do curso de Pedagogia da Universidade Federal de Campina Grande. Trata-se de uma material relevante, tanto por ser manipulável, quanto por ser de fácil confecção e acesso.

**PALAVRAS-CHAVE:** Geobases, conteúdos matemáticos e aprendizagem.

**ABSTRACT:** This work presents a presentation and discussion about the didactic material “Geobases”, highlighting its importance of its use for the learning of mathematical contents.

The methodology used for the study was a bibliographical research based on a text and through experiences that we experienced in Mathematics I in Early Childhood Education and the initial years of Primary Education in the Pedagogy course of the Federal University of Campina Grande. It is a relevant material, both because it is manipulable, and because it is easy to make and access.

**KEYWORDS:** Geobases, mathematical contents and learning.

### 1 | INTRODUÇÃO

Neste trabalho discutimos acerca do material didático “Geobases”, apresentando suas características, os conteúdos com os quais podem ser trabalhados, além de destacar sua importância para a aprendizagem do ensino de Matemática.

Por meio do uso do material didático “geobases” é possível propor uma variedade de atividades, desde construções livres, historinhas, desafios e atividades sistemáticas, como é o caso de contagem para alunos que tenham o primeiro contato com o material e possam se familiarizar com esse recurso manipulável.

Por fim, apontaremos nossa conclusão do trabalho, ressaltando a importância do material

didático no intuito de ajudar alunos a compreenderem melhor aspectos matemáticos e da sua utilidade em escolas dos anos iniciais do ensino fundamental.

## 2 | METODOLOGIA

O presente estudo surgiu inicialmente mediante um trabalho proposto pela disciplina Matemática I na Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental do curso de Pedagogia da Universidade Federal de Campina Grande na qual, posteriormente tivemos o intuito de ampliar nossos conhecimentos a respeito do material.

Para que o estudo fosse realizado, fizemos um estudo bibliográfico a partir de um texto, que tivemos acesso, publicado em um minicurso no Encontro Paraibano de Educação Matemática (EPBEM), na cidade de Campina Grande em 2008, de autoria de Brito, Oliveira, Mélo e Fernandes.

O estudo se concretizou também, a partir das nossas experiências com o material adquiridas com o estudo do mesmo, na disciplina acima citada, na qual tivemos a oportunidade de registrar as imagens do material em fotos, colhidas no LAMADEM.

## 3 | O MATERIAL DIDÁTICO “GEOBASES”

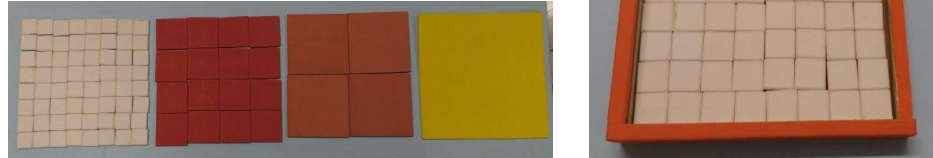
O “geobases” é um material didático ainda pouco conhecido, pois há raras publicações sobre esse recurso. Consiste em uma das criações de materiais didáticos do professor doutor Pedro Ribeiro Barbosa da Universidade Federal de Campina Grande – UFCG, coordenador do Laboratório de Materiais Didáticos de Ensino de Matemática – LAMADEM. Barbosa está por concluir um livro sobre o material na qual expõe explicações mais significativas sobre o recurso.

Segundo Brito (et al, 2008), usar materiais didáticos para o ensino da Matemática auxilia os alunos numa melhor compreensão dos conteúdos. Assim, o objetivo do uso do material “geobases” é justamente proporcionar aos alunos uma melhor aprendizagem sobre bases fazendo conexão com conteúdos associados à geometria. Por isso o jogo de palavras observado em “geo” e “bases”. Há um tempo a geometria envolvia aspectos geométricos e aspectos de grandeza e medida, sendo assim, um dos conteúdos a serem explorados pelo “geobases” são grandeza e medida, além do trabalho com bases não decimais. Porém, não constitui um material didático para se trabalhar com grandes quantidades, pois se torna inviável pelo grande número de peças.

Quanto a sua estrutura física, o material didático “geobases” é composto por kits nos seguintes formatos:

- Quadrangular ou quadrático, nos quais é possível trabalhar a base quatro, agrupando de quatro em quatro, sobrepondo às peças. Este kit possui no

total 80 peças – 64 peças representam as unidades; 12 peças representam o grupinho e 4 peças representam o grupão.



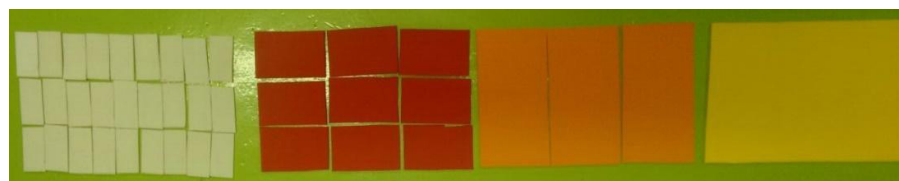
Fonte: fotos tiradas no Laboratório de Materiais Didáticos de Ensino de Matemática – LAMADEM.

- Triangular, nos quais é trabalhada, também, a base quatro, no mesmo processo de agrupar e sobrepor. O total de peças que compõem este kit é de 85 – sendo 64 peças representando as unidades; 16 peças representando o grupinho; 4 peças representando o grupão e 1 peça representando a super unidade.



Fonte: fotos tiradas no Laboratório de Materiais Didáticos de Ensino de Matemática – LAMADEM.

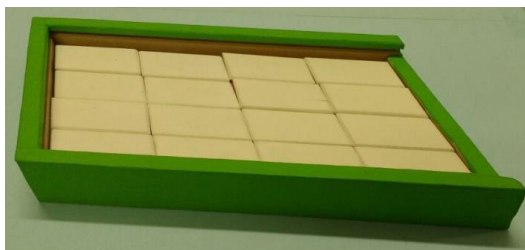
- Retangular, que diferente dos já citados, trabalha a base três, agrupando de três em três e depois sobrepondo. O total de peças que constituem este kit somam 40 – a unidade representada por 27 peças; o grupinho por 9 peças; o grupão por 3 peças e a super unidade por 1 peça.



Fonte: fotos tiradas no Laboratório de Materiais Didáticos de Ensino de Matemática – LAMADEM.

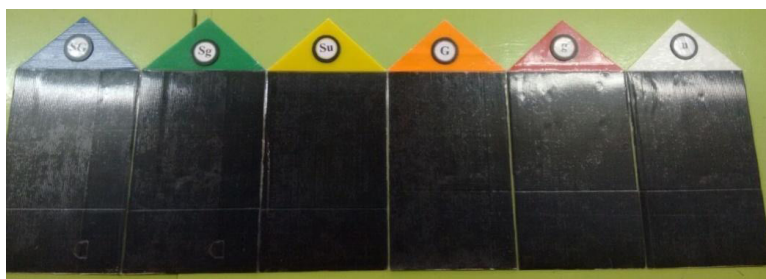
- Paralelogramo, explorando a base dois, no mesmo processo dos anteriores, tendo por total de peças no kit 31 – a unidade sendo representada por 16 peças; o grupinho sendo representado por 8 peças; o grupão por 4 peças; a super unidade por 2 peças e o super grupinho por 1 peça.





Fonte: fotos tiradas no Laboratório de Materiais Didáticos de Ensino de Matemática – LAMADEM.

Para trabalhar com conteúdos como: contagem, sistema de numeração e operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) é usado o quadro metodológico de bases “QP” – quadro pedagógico conhecido por “hotel das peças geométricas” (BRITO, et al, 2008). Trata-se de um acessório de fácil manipulação, pois é leve, maleável, podendo ampliar ou reduzir as ordens a serem exploradas.



Fonte: fotos tiradas no Laboratório de Materiais Didáticos de Ensino de Matemática – LAMADEM.

As cores que compõem os kits são a branca, vermelha, laranja, amarela, verde e azul fazem alusão às cores do Laboratório de Materiais Didáticos de Ensino de Matemática – LAMADEM. Outro aspecto importante sobre as cores é que a unidade sempre começa com a cor branca, as demais entre um e nove seguem as cores do arco íris, a cor da base nove é preta para fechar a sequência de um a nove, e quando se mistura a cor branca com a vermelha vai gerar a dez que é a cor rosa.

O material didático “geobases” possui duas naturezas de material para ser confeccionado, que são a madeira e o EVA/emborrachado, este último torna o material alternativo e acessível, pois é fácil de ser confeccionado e com um menor custo.



Fonte: fotos tiradas no Laboratório de Materiais Didáticos de Ensino de Matemática – LAMADEM.

São várias as possibilidades de aplicações do material “geobases”. A riqueza da abordagem pedagógica do material para a formação do pensamento geométrico é bastante relevante, uma abordagem que não pode ser descartada e tem que ser trabalhada na expectativa de cada vez expandir, divulgar esse material e assim, criar possibilidades de acesso em escolas. Para que assim possa beneficiar comunidades em geral, contribuindo para a formação de cidadãos conscientes e autônomos.

Uma das possibilidades de ser trabalhar o material “geobases” é a partir de construções livres. É importante deixar o material disponível para que os alunos conheçam o mesmo e a partir daí se sintam mais a vontade para realizar as atividades propostas. Despertando cada vez mais sua criatividade para o material e assim contribuindo para que haja um processo educativo eficaz de fato.

O material possibilita uma abordagem geométrica, lançando desafios geométricos a respeito do que seria possível explorar com o material. Sendo preciso motivar os alunos a realizar desafios do tipo: construção de sequências lógicas, códigos e etc. Desta forma, é explorado a identificação qualitativa das peças.

Com o material pedagógico “geobases” também podemos abordar a noção de grandeza e medidas, quanto à área e o perímetro do material.

Para explorar o conceito de contagem com o material didático “geobases”, é preciso inicialmente apresentar as regras, ordenar as peças, defini a base e a quantidade de unidades que se quer trabalhar. De acordo com Brito (et al, 2008) o kit é utilizado de modo que as peças maiores sobreponham às peças menores quantas vezes for preciso, registrando todas as sobreposições.

É possível explorar contagem, também, através dos quadros metodológicos “QP” que auxiliará neste processo. Portanto, cada “apartamento” representa uma ordem dos numerais e a partir da base e das sobreposições, as peças vão se mudando de um “apartamento” para outro, assim é necessário se conhecer as regras, na qual as peças só podem entrar no “hotel” pelo “apartamento” das unidades e de acordo com cada base, só é possível permanecer uma predestinada quantidade de peças em cada “apartamento”.

Com o material didático “geobases”, também é possível explorar Sistema de Numeração, que consiste na representação dos numerais ou das peças para determinar sua quantidade. Na qual, através das representações das peças no “QD” é possível identificar os numerais representados pelas peças ou das peças representar os numerais estabelecidos.

Assim, é possível sugerir atividades como:

- Represente a quantidade máxima suportáveis de peças do kit na base 3 do “QD”;
- Representação do numeral 102 na base 4;
- Determine o maior numeral de três ordens na base 2.

Para se trabalhar operações matemáticas por meio do material “geobases” e do

quadro didático “QD”, só é preciso definir as operações ou fazer as representações das peças no “QD”.

Através das operações ou representações é hora de realizar o processo e conhecer os resultados.

#### 4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

O material didático “geobases” é de extrema importância, tanto para uso do professor, quanto para o aprendizado do aluno. Trata-se de um recurso de fácil manipulação e até mesmo para confeccioná-lo, podendo ser confeccionado pelos próprios alunos com E.V.A, que o torna de fácil acesso e de baixo custo. Para trabalhar os sistemas de numeração é usado juntamente a este, o quadro metodológico, que também trata-se de um material de fácil acesso e confecção, bem como manuseio, condução, além de possibilitar a redução e ampliação dependendo das ordens que se deseja trabalhar.

O material é importante, pois possibilita uma aprendizagem mais eficaz por parte dos alunos e permite o aprendizado de aspectos matemáticos, como contagem, sistema de numeração de bases diferentes, operações, conseguindo ainda fazer construções geométricas, equivalência diária. Este, permite trabalhar uma diversidade de conteúdos, além de que permite ainda dar continuidade no caso de avanços nos conteúdos como é o caso de quando se trabalha o conteúdo dos políminos, com o quadrangular, que geralmente se explora até os pentaminós. Mas, caso o aluno no momento da aula se sinta desafiado a avançar é possível, pois o material permite este avanço. Podem serem explorados também desafios geométricos diversos, que possam ser construídos a partir da junção das regiões triangulares.

Os materiais didáticos funcionam como recursos de apoio para o professor, e como uma estratégia para o aprendizado do aluno. Tomando como base as experiências manipulativas que vivenciamos com os kits de geobases, entendemos que seria um material interessante para se trabalhar nos anos iniciais do Ensino Fundamental, por se tratar de um ambiente didático diferente dos convencionais, por conseguinte, favorecer um trabalho alternativo. Além de ser viável no que diz respeito aos custos de confecção e possuir um colorido agradável para se trabalhar com o público infantil. Por fim, foi possível descobrir relações matemáticas que não conseguíamos por meio de outros caminhos metodológicos.

#### REFERÊNCIAS

BRITO, Alexandra Félix et al. **Aprendendo contagem e sistema de numeração por meio do material pedagógico geobases**. In: Encontro Paraibano de Educação Matemática (EPBEM). Campina Grande: 2008.

## RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA E CÔNICA COMO APLICAÇÃO DE CONTEÚDOS NA DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR

### Rogério dos Reis Gonçalves

rogerio.goncalves@unemat.br

Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas -  
UNEMAT, Sinop, MT, Brasil

### Vera Lúcia Vieira de Camargo

vera.camargo@unemat.br

Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas -  
UNEMAT, Sinop, MT, Brasil

### André do Amaral Penteadó Biscaro

andre.biscaro@unemat.br

Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas -  
UNEMAT, Sinop, MT, Brasil

**RESUMO:** Este trabalho visa apresentar uma proposta de abordagem para o ensino da Álgebra Linear (AL) por meio da resolução de problemas como aplicação de conteúdos, ou seja, ensinar determinados conceitos matemáticos para se resolver problemas. Será proposta a resolução de um problema de programação quadrática com restrições quadráticas (PQRQ) para que sejam determinados os modelos equivalentes na sua forma matricial e posteriormente associados com a respectiva notação de norma. Conceitos de norma, operações com matrizes, matriz semidefinida positiva, determinantes, autovalores, autovetores, cálculo da matriz inversa e diagonalização são utilizados para a resolução do problema equivalente determinado. Além disso, do problema equivalente na

forma matricial com notação de norma é possível encontrar também o seu equivalente de programação cônica de segunda ordem (PCSO). Para resolvê-los, optamos em utilizar a linguagem de modelagem matemática AMPL [3], com o uso dos solvers comerciais CPLEX [5] e KNITRO [1]. Esta escolha é importante, pois contribuirá nas diversas discussões que apresentamos no decorrer deste trabalho. Esta proposição se justifica à medida que julgamos fundamental no processo de ensino e aprendizagem que os alunos da graduação vivenciem situações-problema com diferentes métodos de resolução aliado ao uso de recursos computacionais apropriados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Ensino, Resolução de problemas, Álgebra linear, Programação quadrática, Programação cônica, Linguagem de Modelagem Matemática AMPL.

### 1 | INTRODUÇÃO

A disciplina de AL está presente na maioria dos currículos dos cursos superiores nas ciências exatas, tendo em vista a vasta quantidade de aplicações de seus conceitos em outras áreas do conhecimento. Diante da importância dessa disciplina encontramos na literatura alguns trabalhos desenvolvidos tratando dos aspectos que envolvem o ensino e

aprendizagem da AL, entre eles, destacamos o trabalho de [4] que investigou em que medida um tratamento geométrico e a articulação entre registros de representação (algébrico, gráfico e geométrico), auxiliado pelo ambiente Cabri-Géomètre, influenciam nas concepções de estudantes e de [2] que pesquisou sobre as contribuições dos vídeos digitais e da metodologia de aula reversa para a conceitualização em AL. Segundo [2] há também outras pesquisas nesta área, dentre elas, o estudo sobre as concepções de estudantes sobre a AL, levantamento de registros do ensino e aprendizagem na década de 90, compreensão de alunos acerca de determinados temas desta área e registros de representação em livros didáticos. Pelo apresentado, não há trabalhos desenvolvidos visando verificar as contribuições para o ensino e aprendizagem desta disciplina ao se utilizar os conceitos da AL em sala de aula para se resolver problemas de otimização. Com o intuito de contribuir com o ensino e aprendizagem desta área é que propomos uma atividade de ensino a ser desenvolvida a partir de problemas de otimização matemática junto com o uso de recursos computacionais.

## 2 | PROBLEMA MODELO DE PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA COM RESTRIÇÕES QUADRÁTICAS

**Definição 2.1.** *Um problema de otimização é chamado de programação quadrática (PQ) se a função objetivo é quadrática e as restrições são funções afins. A PQ pode ser expressa na forma*

$$\min X^T P X + 2q^T X + r \quad (1)$$

*s. a.*

$$G X \leq h \quad (2)$$

$$A X = b, \quad (3)$$

onde  $P \in S_+^n$ ,  $G \in R^{m \times n}$ ,  $A \in R^{p \times n}$  e  $X \in R^n$ .

Após apresentar a definição de um problema de PQ, o professor deve solicitar aos alunos que verifiquem se os produtos de matrizes estão bem definidos na função objetivo (1) e nas restrições (2) e (3). Além disso, os alunos deverão exibir exemplos de um problema de PQ a fim de familiarizar-se com a notação utilizada. Nessa etapa, é importante verificar se em cada problema a matriz P é semidefinida positiva e discutir sua relevância na PQ.

**Definição 2.2.** *Um problema de otimização é chamado de PQRQ se for um problema de PQ e as restrições de desigualdades são quadráticas. A programação quadrática com restrições quadráticas pode ser expressa na forma*

$$\min X^T P_0 X + 2q_0^T X + r_0 \quad (4)$$

s. a.

$$X^T P_i X + 2q_i^T X + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (5)$$

$$AX = b, \quad (6)$$

onde  $P_i \in S_+^n, i = 1, \dots, m$ .

Uma análise análoga ao problema de PQ deve ser feita com o problema de PQRQ. Para trabalhar em sala de aula, propomos o seguinte problema de PQRQ definido nas equações (7)-(9).

$$\min f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 + 6 \quad (7)$$

s. a.

$$4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 36 \quad (8)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (9)$$

O próximo passo que o professor deverá propor aos alunos é o reconhecimento de que o problema (7)-(9) é de PQRQ. Dessa forma, após discussões sobre o modelo acima, os alunos deverão encontrar elementos  $P_0, q_0, r_0, P_1, q_1$  e  $r_1$  e escrever o modelo acima conforme mostrado nas equações (10)-(13).

$$\min X^T P_0 X + 2q_0^T X + r_0 \quad (10)$$

s. a.

$$X^T P_1 X + 2q_1^T X + r_1 \leq 0 \quad (11)$$

$$P_0, P_1 \in S_+^n \quad (12)$$

$$X \geq 0 \quad (13)$$

A saber,  $P_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $q_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $r_0 = 6$ ,  $P_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ ,  $q_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $r_1 = -36$  e  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ .

Utilizando a norma euclidiana usual, o problema (10)-(13) pode ser reescrito por meio das equações (14)-(16).

$$\min \|P_0^{1/2} X + P_0^{-1/2} q_0\|^2 + r_0 - q_0^T P_0^{-1} q_0 \quad (14)$$

s. a.

$$\|P_1^{1/2} X + P_1^{-1/2} q_1\|^2 + r_1 - q_1^T P_1^{-1} q_1 \leq 0 \quad (15)$$

$$X \geq 0 \quad (16)$$

A transposição do problema (10)-(13) para o problema (14)-(16) é relativamente difícil. Desse modo, o professor deve apresentar este e pedir para que os alunos verifiquem sua equivalência com aquele. No entanto, é necessário primeiramente que os alunos determinem  $P_0^{1/2}, P_0^{-1/2}, P_0^{-1}, P_1^{1/2}, P_1^{-1/2}, P_1^{-1}$ , conforme apresentado nas seções 2.1 e 2.2.

## 2.1 Cálculo de $P_0^{1/2}, P_0^{-1/2}$ e $P_0^{-1}$

A notação  $P_0^{1/2}$  representa a raiz quadrada de  $P_0$ .

**Definição 2.3.** Uma matriz  $B$  com entradas reais é denominada raiz quadrada real de uma matriz  $A$  se  $B^2 = A$ .

Sabe-se que se uma matriz de ordem  $n$  é diagonalizável e todos os seus autovalores são não-negativos, então ela possui uma raiz quadrada. Assim, fica evidente que  $P_0$  admite raiz quadrada, visto que  $P_0$  é simétrica e, portanto, diagonalizável e seus autovalores são não-negativos, pois  $P_0 \in S_+^n$ . Como  $P_0$  é diagonalizável, existe uma matriz diagonal  $D$ , cujas entradas na diagonal são os autovalores de  $P_0$  (neste caso, os autovalores são não-negativos), e uma matriz  $M$  cujos vetores coluna (autovetores) formam uma base para  $P_0$ , tais que  $P_0 = MDM^{-1}$ .

Os conceitos apresentados no parágrafo anterior devem ser lembrados em sala de aula com os alunos. A partir daí o professor deve propor que mostrem porque  $M\sqrt{D}M^{-1}$  é raiz quadrada de  $A$ . Eles devem notar que  $(M\sqrt{D}M^{-1})^2 = (M\sqrt{D}M^{-1})(M\sqrt{D}M^{-1}) = MDM^{-1} = A$ .

Após constatar que  $P_0$  possui raiz quadrada, os alunos devem calcular seus autovalores, isto é, determinar as raízes do polinômio característico  $p(\lambda) = \det(P_0 - \lambda I_2)$ , em que  $I_2$  denota a matriz identidade de ordem 2.

De  $P_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ , segue que  $P_0 - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$ . Assim, tem-se  $p(\lambda) = (2-\lambda)^2 - 1$ . Logo,  $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$  ou  $\lambda = 3$ . Desse modo, os autovalores de  $P_0$  são 1 e 3 e, portanto,  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  e  $\sqrt{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ .

O próximo passo é determinar uma base para  $P_0$ .

Para  $\lambda = 1$  temos,  $P_0 X = \lambda X$  se, e somente se,  $(P_0 - \lambda I_2)X = 0$  se, e somente se  $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , se, e somente se,  $x_1 = x_2$ . Assim,  $(1, 1)$  é um autovetor de  $P_0$ .

Para  $\lambda = 3$ , temos,  $P_0 X = \lambda X$  se, e somente se,  $(P_0 - \lambda I_2)X = 0$  se, e somente se,  $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  se, e somente se,  $x_1 = -x_2$ . Assim,  $(1, -1)$  é um autovetor de  $P_0$ .

Portanto,  $\{(1, 1), (1, -1)\}$  representa uma base para  $P_0$  formada por autovetores. Logo,  $M$  pode ser dada por  $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  e, conseqüentemente, sua inversa é  $M^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ .

Como  $P_0^{1/2} = M\sqrt{D}M^{-1}$ , segue que  $P_0^{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$  e, portanto, as inversas de  $P_0^{1/2}$  e  $P_0$  são dadas por:

$$P_0^{1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} & \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} & \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_0^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

## 2.2 Cálculo de $P_1^{1/2}$ , $P_1^{-1/2}$ e $P_1^{-1}$

Note que  $P_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ , e uma matriz diagonal definida positiva, logo  $P_1^{1/2}$  está bem definida e claramente, tem-se

$$P_1^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 \\ 0 & \sqrt{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$P_1^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{bmatrix}$$

O cálculo das matrizes  $P_0^{1/2}$ ,  $P_0^{-1/2}$ ,  $P_0^{-1}$ ,  $P_1^{1/2}$ ,  $P_1^{-1/2}$ ,  $P_1^{-1}$  muito importante, pois contempla aplicações de vários temas estudados na disciplina de AL.

## 3 | PROBLEMA EQUIVALENTE DE PROGRAMAÇÃO CÔNICA DE SEGUNDA ORDEM

Definição 3.1. Um problema de otimização é chamado de programação cônica de segunda ordem (PCSO) se ele pode ser expresso na forma

$$\min c^T X \tag{17}$$

s. a.

$$\|A_i X + b_i\| \leq c_i^T X + d_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{18}$$

$$AX = b \tag{19}$$

onde  $c \in R^n$ ,  $A_i \in R^{n_i \times n}$ ,  $b_i \in R^{n_i}$  e  $A \in R^{p \times n}$ .

A representação do problema proposto de PQRQ por meio das equações (14)-(16) é interessante, pois a partir dele, obtém-se o equivalente problema de PCSO representado pelas equações (20)-(23).

$$\min t \tag{20}$$

$$\text{s. a.} \tag{21}$$

$$\|P_0^{1/2} X + P_0^{-1/2} q_0\| \leq t \tag{22}$$

$$\|P_1^{1/2} X + P_1^{-1/2} q_1\| \leq (q_1^T P_1^{-1} q_1 - r_1)^{1/2} \tag{22}$$

$$X \geq 0 \tag{23}$$



Vale ressaltar que para obter o modelo cônico, foi necessário adicionar a variável  $t$ . Esta estratégia transforma o problema bidimensional de PQRQ em um equivalente cônico tridimensional. Conforme definição 3.1, tem-se que (20)-(23) é um problema de PCSO. O professor deve propor aos alunos para que determinem no último modelo os parâmetros  $c$ ,  $A_i$ ,  $b_i$  e  $A$ , apresentados na definição 3.1.

O valor ótimo do problema de PQRQ é dado por  $p^{*2} + r_0 - q_0^T P_0^{-1} q_0$ , em que  $p^*$  é o valor ótimo do problema de PCSO. Isto pode ser verificado facilmente comparando os modelos (14)-(16) e (20)-(23).

O próximo passo proposto aos alunos é a representação, na forma explícita, do modelo (20)-(23). Os alunos deverão encontrar o modelo representado pelas equações (24)-(27).

$$\min t \tag{24}$$

s. a.

$$\sqrt{2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 6x_1 + 6} \leq t \tag{25}$$

$$4x_1^2 + 9x_2^2 \leq 36 \tag{26}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \tag{27}$$

Muitas análises interessantes podem ser feitas a partir do modelo acima, e algumas serão discutidas na Seção 4.

## 4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste trabalho os modelos propostos foram implementados na linguagem de modelagem matemática AMPL [3] e resolvidos usando os solvers comerciais CPLEX [5] e KNITRO [1]. É importante ressaltar que o primeiro solver foi desenvolvido para resolver problemas de programação linear, enquanto o segundo, problemas de programação não linear.

Vimos que os modelos matemáticos (14)-(16) e (20)-(23) são equivalentes aos modelos (7)-(9) e (24)-(27), respectivamente. Visto que a implementação no AMPL é próxima da linguagem matemática usual, foram implementados estes dois últimos a fim de obter os resultados.

A solução do problema (7)-(9) é dada por  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$ , portanto, o valor da função objetivo é igual a 15. Ambos os solvers encontraram esta solução. Note que o problema proposto é um problema de programação não linear, pois a função objetivo (7) e/ou a restrição (8) são não lineares. No entanto, são quadráticas e estão associadas a matrizes hessianas semidefinidas positivas. O CPLEX também resolve este tipo de problema.

Em se tratando do problema (24)-(27), o CPLEX acusou restrição não linear

não quadrática, devido à restrição (25) e essa é uma condição suficiente para não resolubilidade do modelo. Por outro lado, este foi resolvido com o uso do KNITRO e a solução encontrada foi igual ao do seu equivalente de PQRQ (a menos de erros de aproximações). Neste caso, o valor da função objetivo está em função da nova variável  $t$  adicionada no problema original. O valor encontrado para essa variável foi igual a 2,44949. Após determinar este valor, o professor deverá propor ao aluno a encontrar o valor da função objetivo. O aluno deverá perceber que para isso, basta verificar o “papel” da expressão  $p^{*2} + r_0 - q_0^T P_0^{-1} q_0$ .

Outra discussão muito interessante em sala de aula é propor aos alunos se é possível utilizar o CPLEX para resolver o modelo de PCSO. O aparecimento da raiz quadrada na Equação (25) é determinante para limitar seu uso, mas o que acontece se elevarmos ao quadrado tal equação? Claramente teremos uma restrição quadrática não linear. Nesse momento, gera-se uma falsa expectativa de que com estes ajustes o problema seja contornado, o que não ocorrerá, visto que a hessiana associada possui autovalor negativo e, portanto, não é semidefinida positiva. Essa discussão também é essencial para que o aluno tenha uma maior compreensão sobre a hessiana e perceba sua importância.

## 5 | CONCLUSÕES

O estudo de problemas de PQRQ é muito importante, pois nele o aluno vivencia situações em que, para se resolver este tipo de problema, é necessário lançar mão de vários conceitos da disciplina de AL, tais como, norma de um vetor, multiplicação e cálculo da inversa de matrizes, determinantes, autovalores, autovetores, matriz simétrica, matriz definida positiva (e não negativa), diagonalização, dentre outros. Acreditamos que este tipo de atividade pode se revelar bastante promissora para favorecer a aprendizagem dos alunos e desenvolver atitudes favoráveis frente a Matemática ao perceber as possíveis conexões entre diferentes ramos da matemática e outras áreas do conhecimento.

Outras discussões a partir dessa proposta podem ser adicionadas pelo professor. Este trabalho foi escrito para auxiliá-los na disciplina de AL e, assim, espera-se que a aprendizagem e o ensino ocorram de modo interativos.

## REFERÊNCIAS

- [1] R. H. Byrd, J. Nocedal and R. A. Waltz, KNITRO: an integrad package for nonlinear optimization. Large-Scale Nonlinear Optimization. New York: Springer, Nonconvex Optimization and its Applications, volume 83, chapter 8, pages 35-59, 2006.
- [2] V. C. Cardoso, Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear: Uma Discussão Acerca de Aulas Tradicionais, Reversas e de Vídeos Digitais, Tese de Doutorado, Unicamp, 2014.
- [3] R. Fourer, D. M. Gay and B. W. Kernighan. A modeling language for mathematical programmin.

Pacific Grove: Brooks/Cole-Thomson Learning, 2003.

[4] M. V. D. França, Conceitos Fundamentais de Álgebra Linear: Uma Abordagem Integrando Geometria Dinâmica, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

[5] ILOG. CPLEX Optimization subroutine library guide and reference, version 11.0. Incline Village: ILOG, 2008.

## UM ESTUDO SOBRE MULTICORREÇÃO COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

**Rafael Filipe Novôa Vaz**

IFRJ/Paracambi - RJ

Doutorando PEMAT/UFRJ

rafael.vaz@ifrj.edu.br

**Lilian Nasser**

Projeto Fundação/UFRJ – Brasil

lnasser.mat@gmail.com

**RESUMO:** As provas ou exames se constituem como o principal instrumento avaliativo em matemática nos diferentes níveis de ensino. Desde as séries iniciais, os alunos são submetidos a exames para “ aferir ” o conhecimento, essa aferição está associada à crença de que o conhecimento de um indivíduo pode ser medido. As concepções positivistas sustentam que as provas são instrumentos precisos e imparciais, conferindo um forte caráter de justiça. Partindo da hipótese que as provas ainda são necessárias para o sistema educacional e que os registros escritos fornecem realmente dados da aprendizagem dos estudantes, é possível questionar se a prova é realmente um instrumento tão objetivo. Nossos primeiros estudos de multicorreção com licenciandos em matemática indicaram a possível ocorrência do efeito halo na correção das provas, em que, a solução da primeira questão influenciava a correção das demais e, conseqüentemente, a atribuição de notas

do professor. Na fase seguinte da pesquisa, o destaque foi a grande amplitude de notas atribuídas. Ambos os resultados fornecem indícios do grau de subjetividade existente na correção de provas de matemática e colocam em “ xeque ” a crença na precisão, justiça e imparcialidade.

**PALAVRAS-CHAVE:** avaliação, matemática, multicorreção, provas.

**ABSTRACT:** Tests or examinations constitute the main evaluation instrument in mathematics at the distinct levels of education. Since the initial grades, students are tested in order to evaluate knowledge, this estimation (gauging) is associated with the belief that an individual’s knowledge can be measured. The positivist conceptions maintain that the tests are precise and impartial instruments, fostering a strong character of justice. Based on the assumption that tests are still needed for the education system and that written records actually provide student learning data, it is possible to question whether tests are, in fact, an objective tool. Our first studies of multicorrection indicated the possible occurrence of the halo effect in the correction of math tests, in which the solution of the first question influenced the teacher’s correction and assignment of grades. In the next phase of the research, the highlight was the enormous range of marks awarded. Both

results provide indications of the degree of subjectivity in the correction of mathematics tests and call into question the belief in the accuracy, fairness, and impartiality.

**KEYWORDS:** assessment, mathematics, multicorrection, tests

## 1 | INTRODUÇÃO

Desde o início do século XX, os estudos docimológicos buscavam “essencialmente a construção de instrumentos de medida das aprendizagens que oferecessem um elevado grau de validade, medissem o que se queria medir, e de fidelidade, reduzissem a discrepância entre avaliadores” (SANTOS; PINTO, 2018, p.503). A avaliação com a concepção de medida, representada pelos testes, provas ou exames, implica na aceitação da avaliação como um instrumento de medida, desconsiderando que possa ocorrer interferência do avaliador na correção e pontuação (MORAES, 2012). Hoje, associação da avaliação escolar a uma medição é contestada por diversas pesquisas (HADJI, 2001; SANTOS; CONTIJO, 2015; SANTOS; PINTO, 2018). No entanto, as mudanças de tais concepções no meio acadêmico parecem não ter se fortalecido a ponto de romper o forte bloqueio gerado por crenças bem implementadas no contexto escolar.

A consequência imediata da concepção de medida das avaliações justifica a predominante utilização da “prova tradicional” – compreendida como exame escrito, individual e sem consulta. As características essenciais desse instrumento avaliativo estão relacionadas ao “fato de serem esporádicas, intermitentes e breves; a ausência de convivência como exigência para avaliar; o tratamento genérico que dá a todos os alunos; a pretensão de ser neutra” (RAPHAEL, 1998, p.102). Santos e Contijo (2015) comparam a avaliação escolar com a avaliação no mundo externo. Na escola, ela é programada, ocorrida em um espaço artificial, associado ao sentimento de dever cumprido, de obrigação e julgamento com a distinta avaliação realizada na vida. “Em contrapartida, a avaliação realizada na vida significa refletir para mudar, para tentar melhorar nossas vidas. Fazemos isso permanentemente, sem programações ou registros formais”. (p.7-8)

A suposta objetividade da avaliação escolar, em que seria possível medir o conhecimento de alguém, está associada a uma filosofia positivista, na qual, a neutralidade e imparcialidade são seus pilares. Tais concepções estão presentes nos três pressupostos básicos que, segundo Morgan (2000), sustentam o pensamento geral na avaliação:

primeiro, presume-se que os indivíduos possuem atributos (como conhecimento, compreensão, habilidade, etc.) que são detectáveis e mensuráveis. Em segundo lugar, o objetivo principal da avaliação é descobrir e medir esses atributos. Finalmente, o processo de avaliação e seus resultados são considerados fundamentalmente benignos ou mesmo benéficos (embora efeitos colaterais infelizes possam ser reconhecidos e tentativas feitas para melhorá-los) (p. 225-226, *tradução nossa*).

Complementando tais ideias, Buriasco, Ferreira e Ciani (2009) defendem que a avaliação escolar é composta por um rito e um mito. “O rito de avaliar – aplicar uma prova ou um teste escrito e converter as resoluções e respostas de cada estudante a um valor numérico” (p.70) está associado ao mito de “medir e classificar de maneira precisa os alunos” (p.71). Segundo as autoras,

via de regra, negligencia-se que o quantitativo advém do qualitativo, e, no caso da avaliação, a nota atribuída não emerge de maneira pura e unívoca dos instrumentos utilizados, mas é produzida pelo avaliador, que, para fazê-lo, pode se valer de instrumentos. Por fim, o rito de avaliar se constitui numa prática que confere uma validade ilusória ao mito da possibilidade do exercício da precisão e da justiça. (BURIASCO; FERREIRA; CIANI, 2009, p.72)

## 2 | O MITO DA OBJETIVIDADE

Segundo Hadji (2001), o julgamento do avaliador é “sempre infiltrado por elementos provenientes do contexto escolar e social, desde a carga afetiva e a dimensão emocional devido à presença efetiva dos alunos” e, geralmente, “ignora que se baseia em parte em uma representação construída do aluno e em convicções íntimas que nada tem de científicas” (p.32). Para esse autor, a avaliação não é uma medida, porque “o avaliador não é um instrumento” e porque o “que é avaliado não é um objeto no sentido imediato” (p.34).

Pacheco (1998, p.114), anteriormente, já havia colocado em xeque a neutralidade da prova escrita e atribuiu a essa forma avaliativa um caráter intrinsecamente subjetivo, relacionado à correção ao afirmar que “a nota do aluno é o resultado da relatividade de um juízo e que é delimitado tanto por fatores de ordem pessoal, psicológica e social como por fatores curriculares”. Segundo esse autor, estudos docimológicos,

ligados à experiência de multcorreção, têm demonstrado as divergências de notação quando um mesmo corretor, com algum intervalo de tempo, atribui resultados diferentes a um teste, ou quando em 120 testes somente 3% deles obtêm as mesmas classificações. (PACHECO, 1998, p.114)

Fischer (2008) realizou uma pesquisa com professores universitários que atuam em cursos de licenciatura afim de investigar suas concepções em relação à avaliação. Neste trabalho, foi constatado que os professores formadores associam a objetividade na avaliação escolar à clareza, à uniformidade nos critérios de avaliação e à neutralidade no campo da matemática. A autora cita a fala ambígua de um professor que diz privilegiar “a exatidão do conteúdo, mas valoriza, na correção, o desenvolvimento apresentado pelo aluno” (p.85) e conclui que a pesquisa realizada

mostrou que os professores de matemática ainda refletem, em suas práticas avaliativas, muitas das concepções acerca do conhecimento matemático e de seu ensino construídas com base no discurso de modernidade. As características apontadas como constituintes do *habitus* desse professor, como a busca pela objetividade, a concepção positivista de rigor no trato dessa ciência e de seu ensino, um certo descrédito do fazer pedagógico e a adoção de uma postura pouco flexível, tem fortes marcas desse paradigma de ciência. (FISCHER, 2008,

Há duas ideias relacionadas à Educação Matemática Crítica que podem nos ajudar a compreender o forte vínculo entre professores de Matemática e as concepções positivistas: o absolutismo burocrático e a ideologia da certeza.

O absolutismo burocrático no meio escolar, para Alrø e Skovsmose (2010) engessam o ensino, estabelecendo o que é certo ou errado, definindo os critérios e orientações que professores e educadores devem seguir.

As coisas são do jeito que são por causa das regras e das normas: a pessoa atrás da mesa não pode mudar as regras. (...) o professor de matemática numa sala de aula absolutista está impedido de mudar o fato de que os alunos têm que fazer certo tipo de exercícios e que as fórmulas que eles têm que usar são aquelas escritas no alto da página. O absolutismo burocrático faz parte da vida de muitos estudantes de matemática. (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010, p.26)

Se o professor está impedido de modificar as regras relacionadas à escolha e utilização de exercícios (ou pelo menos encontra barreiras para tal mudança), provavelmente, encontrará dificuldades ainda maiores em modificar concepções relacionadas às práticas avaliativas. Deste modo, seria plausível supor que esse absolutismo atue nas concepções e, principalmente, nas práticas dos professores referentes às avaliações em Matemática.

Outra ideia poderosa que pode oferecer contribuições à discussão da avaliação escolar em matemática é a ideologia da certeza. A matemática é apresentada na escola como sendo um saber exato, verdadeiro e aplicável a outras áreas do conhecimento. A ideologia da certeza está difundida por toda a sociedade. Para Borba e Skovsmose (1997, p.19), “o professor, o livro texto e os exercícios formam uma autoridade que esconde os critérios de correção. Torna-se desnecessário para o professor especificar a autoridade que está por trás dos diferentes tipos de correção”. Segundo esses autores, a ideologia da certeza é confirmada quando testes e exames passam a desempenhar um papel crucial no ensino, ao encará-los como uma preparação para testes futuros.

### 3 | O PERCURSO METODOLÓGICO

A pesquisa apresentada neste trabalho se iniciou em 2017, com a investigação do efeito halo na correção de provas. O efeito halo está relacionado a um raciocínio dúbio, que ocorre quando uma impressão é formada a partir de uma característica inicial influenciando múltiplos julgamentos ou classificações de fatores não relacionados. O efeito halo consiste no julgamento do todo a partir de características obtidas inicialmente e, de acordo com a Enciclopédia Britânica, se apresenta quando uma impressão é formada a partir de uma característica inicial influenciando múltiplos julgamentos ou classificações de fatores não relacionados. A pesquisa pioneira sobre o fenômeno do efeito halo foi desenvolvida pelo psicólogo americano Edward L. Thorndike, que observou uma correlação entre traços positivos e negativos não relacionados em sua pesquisa com avaliação de militares por seus oficiais. Ao serem avaliados, os

militares mais altos e mais atraentes também foram classificados como soldados mais inteligentes e melhores (NEUGAARD, 2016).

Este trabalho foi inspirado em Daniel Kahneman (2012) que sugeriu que o efeito halo influenciaria a nota atribuída por professores na correção das provas de seus alunos. Os primeiros resultados desta pesquisa apontavam para a existência do efeito halo na correção de prova por futuros professores, isto é, a correção das questões iniciais influenciava a correção das seguintes. (VAZ; NASSER, 2018)

A primeira investigação foi realizada com alunos da Licenciatura de um Instituto Federal, localizado no estado do Rio de Janeiro. Os 40 alunos que participaram dessa fase foram divididos aleatoriamente em dois grupos: A e B. Cada aluno corrigiu uma prova e atribuiu uma nota de 0 a 10. A prova era composta de 4 questões discursivas relacionadas à equação do 2º grau (simulando uma turma do 9º ano do ensino fundamental). O valor de cada questão foi estipulado em 2,5. Ficou a cargo de cada corretor atribuir outros valores a respostas parcialmente incorretas. Havia uma diferença entre o ordenamento das questões contidas nas duas provas: no teste A, a primeira questão continha uma solução correta, duas soluções parcialmente corretas para as questões seguintes e uma solução incorreta para a quarta questão. Já no teste B, ocorria o oposto, utilizando as mesmas questões e soluções. A única distinção era a ordem de apresentação das questões resolvidas. A ideia era verificar se os licenciandos atribuiriam notas semelhantes às provas dos tipos A e B, mostrados da figura 1.

Resolva as seguintes equações:

a)  $x^2 - 5x + 6 = 0$   
 $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$   
 $\Delta = 25 - 24$   
 $\Delta = 1$   
 $x = \frac{5 \pm 1}{2}$   
 $\frac{5+1}{2} = 3$   
 $\frac{5-1}{2} = 2$

b)  $x^2 - 4x = 0$   
 $x \cdot (x - 4) = 0$   
 $x - 4 = 0$   
 $x = 4$

c)  $x^2 + 5 = 30$   
 $x^2 = 30 - 5$   
 $x^2 = 25$   
 $x = \pm 5$

d)  $x^2 - 5x + 4 = 0$   
 $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$   
 $\Delta = 25 - 16$   
 $\Delta = 9$   
 $S = \emptyset$

a)  $x^2 - 5x + 4 = 0$   
 $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$   
 $\Delta = 25 - 16$   
 $\Delta = 9$   
 $S = \emptyset$

b)  $x^2 - 4x = 0$   
 $x \cdot (x - 4) = 0$   
 $x - 4 = 0$   
 $x = 4$

c)  $x^2 + 5 = 30$   
 $x^2 = 30 - 5$   
 $x^2 = 25$   
 $x = \pm 5$

d)  $x^2 - 5x + 6 = 0$   
 $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$   
 $\Delta = 25 - 24$   
 $\Delta = 1$   
 $x = \frac{5 \pm 1}{2}$   
 $\frac{5+1}{2} = 3$   
 $\frac{5-1}{2} = 2$

Figura 1 – Testes A e B

Fonte: VAZ; NASSER (2018)



Os resultados iniciais indicaram a existência do efeito halo. No teste A, em que a primeira questão apresentava uma solução correta, a média, a moda e a mediana das notas foram menores do que os mesmos resultados do teste B em que a primeira questão apresentava uma solução incorreta.

	Teste A	Teste B
Média	6,43	7,17
Moda	6,25	7,25
Mediana	6,5	7,25

Tabela 1 – Medidas de tendência central. Fase 1

Fonte: VAZ; NASSER (2018)

Um intervalo de confiança para a média populacional foi estimado a partir da média amostral calculada, com um nível de significância de 5%. Observe, na tabela 2, que não há interseção entre os intervalos.

Teste A	Teste B
[6,2; 6,7]	[7,1; 7,3]

Tabela 2 - Intervalo de confiança. Fase 1

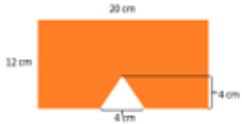
Fonte: VAZ; NASSER (2018)

Uma segunda fase da pesquisa foi construída para retificar ou ratificar esses resultados. Uma nova prova foi confeccionada, contendo, desta vez, 5 questões e versando sobre áreas de figuras planas, em que também seria atribuída uma nota de zero a dez, cada questão “valendo” 2 pontos (pontuação determinada pelos pesquisadores). Novamente a pontuação parcial ficou a cargo dos corretores. Na primeira fase o tema equação do 2º grau foi escolhido a partir da hipótese de ser um tema amplamente conhecido pelos estudantes. Na segunda fase, optou-se pela mudança para um tema em que o conhecimento dos estudantes fosse similar e, que também, possibilitaria – na opinião dos pesquisadores – a elaboração de questões “discursivas com características mais argumentativas, cujas respostas pressupõem a interpretação dos respondentes” (VAZ; NASSER, 2018, p.10).

De modo análogo à primeira fase da investigação, os testes foram aplicados em duas versões X e Y, distribuídos de modo arbitrário entre dois grupos de licenciandos, a partir do seu posicionamento na sala. No teste X, a primeira questão apresentava uma solução correta, a quinta questão apresentava uma solução totalmente incorreta e as três questões intermediárias (2, 3 e 4) apresentavam questões parcialmente corretas. A figura 2 apresenta o teste X. No teste Y, as mesmas questões e resoluções eram apresentadas na ordem inversa. A segunda fase contou com 45 licenciandos em

Matemática de dois campi do Instituto Federal do Rio de Janeiro, com 22 estudantes corrigindo o teste X e 23 corrigindo o teste Y.

1 - Calcule a área da placa abaixo:



Solução:

$$A_T = 20 \cdot 12 = 240 \text{ cm}^2$$

$$A_D = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

$$A = 240 - 8 = 232 \text{ cm}^2$$

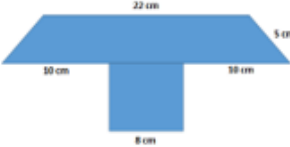
2 - Dois terrenos retangulares A e B possuem a mesma área. O terreno A possui 30 metros de comprimento por 24 metros de largura. Calcule o perímetro do terreno B, considerando que este possui 15 metros de largura.

Solução:

Terreno A	Terreno B
$A = 30 \cdot 24$	$A = 15 \cdot x$
$A = 720 \text{ m}^2$	$720 = 15x$
	$x = \frac{720}{15} = 48$

Perímetro =  $15 + 15 + 48 + 48 = 126 \text{ m}$

3 - A figura abaixo foi construída a partir de um trapézio isósceles e um quadrado. Calcule a área total desta figura.



Solução:

$$A_1 = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}^2$$

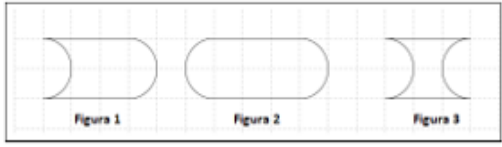
$$A_2 = \left( \frac{22 + 10}{2} \right) \cdot 5$$

$$A_2 = 25 \cdot 5$$

$$A_2 = 125 \text{ cm}^2$$

$$A_T = 48 + 125 = 173 \text{ cm}^2$$

4 - As três figuras a seguir foram construídas em uma malha quadrada de lado 1 cm. Classifique as afirmativas em verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.



Afirmativa 1: A área da figura 1 é menor que a área da figura 2 e maior que a área da figura 3

Verdadeira     falsa

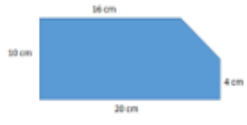
*A área da figura 1 é menor que a área da figura 2, pois a figura 1 tem dentro da figura 2 e outra espaço. No mesmo modo, a figura 3 cabe dentro da figura 1 e também abra espaço.*

Afirmativa 2: O perímetro da figura 2 é igual ao perímetro da figura 3

Verdadeira     falsa

*O perímetro da figura 2 é igual a  $3 + 3 + 2\pi \cdot r = 6 + 2\pi$ . Logo ele é maior que o perímetro da figura 3.*

5 - Calcule a área hachurada abaixo:



Solução:

$$A = \left( \frac{20 + 16}{2} \right) \cdot 10$$

$$A = \frac{36}{2} \cdot 10$$

$$A = 18 \cdot 10$$

$$A = 180 \text{ cm}^2$$

Figura 2 – Teste X

Fonte: elaborado pelos autores

Os resultados desta segunda amostra, no entanto, não indicam a existência do efeito halo. A diferença entre as médias obtidas é muito pequena e a mediana é a mesma, como mostra a tabela 3. Uma alteração maior é encontrada na moda, mas este resultado, sozinho, não caracteriza o efeito halo.

	Teste X	Teste Y
Média	4,37	4,62
Moda	4,5	5,5
Mediana	4,5	4,5

Tabela 3 – Medidas de tendência central. Fase 2

Fonte: elaborado pelos autores

A tabela 4 indica que, sob as mesmas condições da primeira fase (nível de confiança de 95% e de significância 5%), os novos dados geram intervalos de confiança com um grande intervalo de interseção. Então, não é possível afirmar que há diferença

significativa entre as médias, como foi possível constatar na primeira amostra.

Teste X	Teste Y
[3,76; 4,98]	[4,03; 5,21]

Tabela 4 - Intervalo de confiança. Fase 2

Fonte: elaborada pelos autores

Por outro lado, há algo que, talvez, seja mais relevante que a existência ou não do efeito halo. A imensa amplitude entre as “notas” atribuídas nos dois grupos é um indício que sugere ou, por que não, comprova o caráter subjetivo na correção das provas. O gráfico 1 apresenta as notas atribuídas pelos 45 licenciandos aos testes X e Y e suas respectivas frequências.

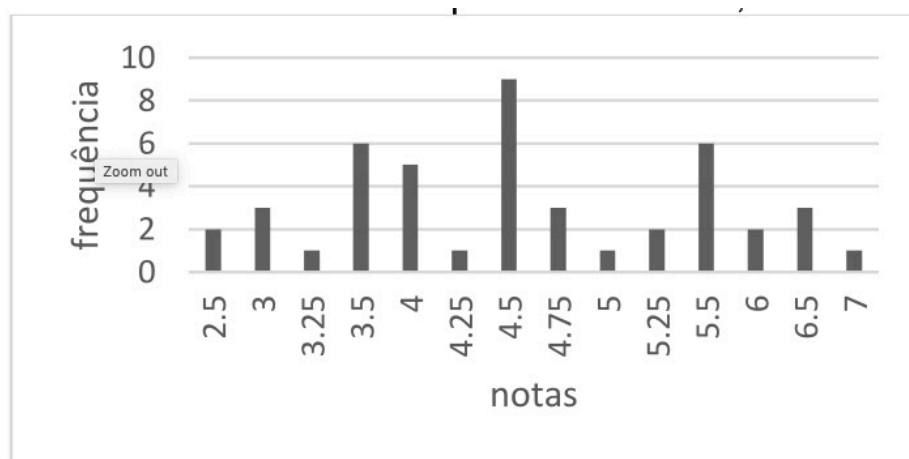


Gráfico 1 – Frequência de notas, fase 2.

Fonte: elaborado pelos autores

A média das notas obtidas é 4,54 e o intervalo de confiança com (nível de confiança de 95% é [4,22; 4,86]. Note que há uma probabilidade de 95% de que a “média desta prova” – supondo que a nota seja uma medida – pertença a esse intervalo. Isto significa dizer que 17 corretores atribuíram uma nota menor ao intervalo de confiança (nota < 4,22) e que 15 corretores atribuíram uma nota superior a ele (nota > 4,86). Além disso, apenas, 13 corretores atribuíram uma nota no intervalo estatisticamente determinado pela média.

#### 4 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Em primeiro lugar, consideramos que os resultados obtidos na segunda fase, relacionados ao efeito halo, foram inconclusivos. Não constatamos nenhuma influência da aplicação das questões mais argumentativas no que diz respeito à amplitude das pontuações, tendo em vista que na segunda fase a amplitude continuou alta. No

entanto, não sabemos se esse tipo de questão pode ter influenciado a redução do efeito halo, pois os estudantes corretores tiveram a necessidade de dedicar um tempo maior para a correção e a análise das respostas na fase 2 se comparado à fase 1. A amplitude nas notas ao longo de toda a pesquisa fornece subsídios para questionar a suposta objetividade das práticas avaliativas em sala de aula.

Tais resultados, em consonância com as ideias de Hadji (2001), Buriasco, Ferreira e Ciani (2009), apontam que a avaliação não pode ser considerada uma medida e nem uma operação científica. Para Hadji (2001), todos os professores deveriam ter compreendido que a noção de “*nota verdadeira*” quase não faz sentido, pois “hoje se sabe que a avaliação não é uma medida pelo simples fato de que o avaliador não é um instrumento, e por que o que é avaliado não é um objeto no sentido imediato do termo”. (HADJI, 2001, p.34, *grifo do autor*).

Consideramos que este trabalho traz à tona a importante discussão sobre a subjetividade na avaliação matemática. Como dito anteriormente, influenciados por uma visão positivista e absolutista, os professores de matemática ainda creem na prova como um instrumento de medida justo, imparcial e preciso. É necessário romper esta visão absolutista. Consideramos que trabalhos relacionados à avaliação escolar realizados por professores e pesquisadores de matemática são alavancas para essa transformação, pois, segundo Fischer (2008, p.97), “a reflexão, necessária a uma mudança, terá que ser realizada com base nas concepções ou nos elementos constitutivos do habitus do professor de matemática”.

Cabe ressaltar que este texto foi inicialmente apresentado no Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática em 2018, quando a pesquisa estava na sua segunda etapa. Nessas fases iniciais, o estudo foi realizado com estudantes da licenciatura, o que gerava a possibilidade de questionar a validade desses resultados com professores formados e atuantes. A fase seguinte, realizada com professores, forneceu resultados similares que serão divulgados no decorrer de 2019.

## REFERÊNCIAS

BORBA, M. C.; SKOVSMOSE, O. The ideology of certainty in mathematics education. **For the learning of Mathematics**, Ontario, v. 17, n. 3, p. 17-23, nov.1997.

BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A.; CIANI, A. B. Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 22, n. 33, p.69-96, 2009.

FISCHER, M. C. B. Os formadores de professores de matemática e suas práticas avaliativas. In: VALENTE, W. R. (Org.). **Avaliação em matemática: história e perspectivas atuais**. Campinas: Papirus, 2008. p. 75 -100.

GATTI, B. A. Avaliação educacional no Brasil: pontuando uma história de ações. **EccoS Revista Científica**, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 17-41, jun. 2002.

- HADJI, C. **Avaliação desmistificada**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001. 136 p.
- KAHNEMAN, D. **Rápido e devagar**: duas formas de pensar. Rio de Janeiro: Objetiva, 2012. 608 p.
- MORAES, C. A. P. **Avaliação em Matemática**: pontos de vista dos sujeitos envolvidos na educação básica. Jundiaí: Paco Editorial, 2012. 244 p.
- MORGAN, C. Better assessment in mathematics education? A social perspective. In: BOALER, J. (Org.). **Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning**. Westport, Ablex Publishing, 2000. p. 225-242.
- NEUGAARD, B. **Halo Effect** In: Encyclopædia Britannica On-line. Ago. 2016. Disponível em: <<https://www.britannica.com/topic/halo-effect>>. Acesso em 09 de out. 2017
- PACHECO, J. A. A avaliação da aprendizagem. In: ALMEIDA, L. S.; TAVARES, J. (Org.). **Conhecer, aprender, avaliar**. Porto: Porto Editora, 1998. p.111-132.
- RAPHAEL, H. S. **Avaliação escolar**: em busca de sua compreensão. São Paulo: Brasiliense, 1998. 170 p.
- SANTOS, V. S. Percepções de docentes de matemática de ensino médio em relação ao processo de avaliação da aprendizagem. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais...**Pirenópolis: SBEM, 2015.
- SANTOS, L., PINTO, J. Ensino de conteúdos escolares: A avaliação como Fator estruturante. In: VEIGA, F. H. (Org.). **O Ensino como fator de envolvimento numa escola para todos**. Lisboa: Climepsi Editores, 2018. p. 503-539.
- SKOVSMOSE, O.; ALRO, H. **Diálogo e aprendizagem em educação matemática**. 2.ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010. 160 p.
- VAZ, R. F. N.; NASSER, L. Um estudo sobre o efeito halo na correção de provas. In: ENCONTRO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DO RIO DE JANEIRO, 7., 2018, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: SBEM, 2018.

## JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

**Angela Cássia Biazutti**

Projeto Fundão – IM/UFRJ

Rio de Janeiro, RJ

**Lilian Nasser**

Projeto Fundão – IM/UFRJ

Rio de Janeiro, RJ

**RESUMO:** A Educação Financeira é um tema motivador, que pode ser usado para atrair os estudantes na Educação Básica para a aprendizagem de Matemática. Apesar de não estar inserido em grande parte dos cursos de Formação de Professores que ensinam Matemática no Brasil, o tema deve ser abordado de forma motivadora e eficaz, preparando os futuros cidadãos a resolver desafios financeiros. Isso pode ser alcançado por meio das estratégias de visualização gráfica da situação problema e pela exploração de jogos. A visualização pode facilitar a aprendizagem de conceitos básicos, sem a necessidade de decorar fórmulas. Para fixar os conhecimentos, foram criados jogos que envolvem a resolução de tarefas de Educação Financeira. Os jogos envolvendo Matemática Financeira foram originalmente desenvolvidos como parte das atividades do Projeto Fundão, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM/UFRJ), para apresentação no Festival de Matemática, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), em

Abril de 2017. Posteriormente, os jogos foram aplicados em outros eventos e em sala de aula, com grande aceitação por parte dos alunos.

**PALAVRAS-CHAVE:** jogos, visualização, Matemática Financeira

**ABSTRACT:** Financial Education is a motivating subject, that can be used to attract students in the Basic Education for the learning of Mathematics. Although it is not be inserted in a large number of courses of Formation of Teachers who teach Mathematics in Brazil, the subject must be approached in a broad and efficient form, preparing the future citizens to decide financial challenges. This can be reached by means of the strategies of graphical visualization of the problem situation and by the exploration of games. The visualization can facilitate the learning of basic concepts, without the necessity of using formulas known by heart. To fix the knowledge, games had been created, involving the solution of tasks of Financial Education. The games involving Financial Mathematics had been developed originally as part of the activities of the Fundão Project, from Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM/UFRJ), to be presents in the Mathematics Festival, organized by the Brazilian Society of Mathematics, in April of 2017. Afterwards, the games have been applied in other events and in classrooms, whit

great acceptance on the part of the students.

**KEYWORDS:** games, visualization, Financial Mathematics

## 1 | INTRODUÇÃO

Os alunos passam por um processo de alfabetização matemática nos primeiros anos do Ensino Fundamental, quando um dos objetivos é a resolução de problemas. Nessa etapa, são formados os alicerces da Matemática, com a exploração de conteúdos básicos dos blocos de Números e Operações e Grandezas e Medidas, entre outros. Nos anos finais são apresentados a tópicos como razões e proporções, equações, etc. Uma das causas das dificuldades dos estudantes deste segmento se deve a lacunas de aprendizagem desde o processo de alfabetização matemática nos anos iniciais.

Atender de forma personalizada a cada aluno com suas diferentes dificuldades e continuar o processo de construção do conhecimento matemático de forma motivadora ao mesmo tempo é o desafio com que se defronta a maior parte dos educadores. Isso justifica a pesquisa desenvolvida por um grupo de Projeto Fundação (IM/UFRJ), em busca de estratégias para facilitar a aprendizagem desse tema (Nasser, 2010).

A proposta deste artigo é mostrar uma visão moderna e abrangente da Educação Financeira, contribuindo na formação de professores, conforme proposta recente da nova Base Nacional Curricular Comum (BNCC, BRASIL, 2018), a ser implementada a partir do próximo ano. Tais estratégias apontam em duas direções. A primeira é a exploração da visualização na representação e resolução de atividades que envolvem situações financeiras do cotidiano dos alunos. A segunda estratégia é o uso de jogos, em que os alunos devem resolver tarefas envolvendo situações financeiras.

As atividades propostas podem ser utilizadas principalmente para motivar, mas também para ajudar alunos com dificuldades na resolução de tarefas básicas de Matemática Financeira. Foram desenvolvidas partindo do pressuposto que os alunos formam um grupo heterogêneo, no que se refere à idade ou nível de conhecimento matemático, ou até mesmo no que se refere ao nível de conhecimento da língua materna. As atividades envolvem jogos ou projetos, sendo possível não só a cada aluno trabalhar individualmente, como também em grupo, e podem ser aplicadas com diferentes graus de complexidade.

## 2 | A VISUALIZAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

Diversos pesquisadores chamam atenção para o objetivo principal da Matemática Financeira, que é estudar a evolução do valor do dinheiro ao longo do tempo, como alerta Sá (2009):

Fundamental, em matemática comercial e financeira, é o valor do dinheiro no tempo, conceito tão simples quanto negligenciado pela maioria das pessoas. Não podemos operar diretamente com valores monetários referentes a datas distintas.

É necessário que coloquemos todos os valores numa mesma data, valorizando-os ou desvalorizando-os na linha do tempo. (SÁ, 2009, p. 15)

Para facilitar a aprendizagem e o entendimento, a taxa de aumento ou desconto deve ser interpretada como um fator, na notação decimal. Sugerimos a representação da situação problema num eixo de tempo, com setas indicando o valor a cada unidade de tempo, que pode ser mensal ou anual, por exemplo. Para que esses valores possam ser comparados e/ou somados, devem ser transpostos para uma data comum, usando o fator de aumento ou desconto. Nesse processo, o aluno deve ser incentivado a usar calculadoras simples, para efetuar os cálculos. Não recomendamos o uso de calculadoras financeiras, que apresentam as fórmulas prontas, impedindo o raciocínio e acompanhamento do processo de resolução. A visualização pode ainda ser valorizada por meio da exploração da animação na apresentação eletrônica de slides, mostrando a variação do dinheiro ao longo do tempo.

A estratégia visual para a abordagem da Matemática Financeira na Educação Básica facilita o esclarecimento para os alunos das diferenças entre os juros simples e compostos, mostrando quando é conveniente o uso de cada uma dessas modalidades. Essa abordagem enfoca ainda a integração com outros conteúdos como progressões aritméticas e o gráfico da função afim no caso dos juros simples, e das progressões geométricas e o gráfico da função exponencial no caso dos juros compostos. Essa proposta está consolidada em Nasser (2010), que contém diversas situações reais, exemplificando o seu uso.

### 3 | OS JOGOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

De acordo com Grandó (2000), “o jogo possibilita que o aluno passe de ouvinte das explicações do docente para participante, construindo a sua própria aprendizagem. Os jogos podem trazer grandes benefícios ao processo de ensino aprendizagem, desde que bem planejados. Para isso, o professor precisa ter bem claros os objetivos a serem alcançados com o uso do jogo.” (Grandó, 2000. p. 19). Segundo Borin(2007), a atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, tão necessárias no aprendizado, em especial da Matemática. No caso da Matemática financeira, é uma oportunidade de vivenciar de forma lúdica um tema para o qual os alunos já são naturalmente motivados.

Três jogos foram desenvolvidos por um grupo do Projeto Fundação, inicialmente para o Festival de Matemática, organizado pela Sociedade Brasileira de Matemática, em 2017. O público alvo era constituído por alunos e familiares de diferentes idades e escolas, que visitaram as atividades do Festival na Escola Eleva, RJ.

Depois, esses jogos foram apresentados na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), nas atividades da Semana Nacional de Ciência e Tecnologia e a alunos do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental em algumas escolas.



No festival, que fez parte do Biênio da Matemática, professores e alunos de graduação do IM/UFRJ apresentaram situações matemáticas por meio de jogos e brincadeiras para alunos da Educação Básica com seus respectivos professores e, alguns, com familiares. A proposta do festival foi mostrar a professores do ensino básico, pais e alunos uma forma diferente de aprender matemática. A seguir, descrevemos cada um dos três jogos.

### **Jogo 1: Derrubando Muros.**

O jogo “*Derrubando Muros*” tem como objetivo fixar conhecimentos sobre porcentagem. Os jogadores se movimentam em um tabuleiro onde, durante o jogo, se deparam com barreiras/muros a serem destruídas com a ajuda da Matemática Financeira (figura 1).

Material: 1 tabuleiro (de Damas ou de Xadrez); 2 a 4 peças diferentes de plástico (para movimentar no tabuleiro); 30 cartões com perguntas sobre porcentagem; conjunto de peças representando barreiras/muros; calculadoras; papel para anotações; lápis e borrachas.

Número de jogadores: 2 a 4.

Modo de jogar: Cada jogador escolhe a sua peça e a posiciona em qualquer casa da linha do tabuleiro mais próxima dele. Na sua vez de jogar, ele pode mover sua peça uma casa na horizontal ou vertical para a casa vizinha, ou pode escolher colocar uma barreira em um lado comum a duas casas. Dois jogadores não podem ocupar a mesma casa. Diante de uma barreira que atrapalhe seu deslocamento, um jogador, na sua vez de jogar, pode escolher (se for possível) contorná-la ou tentar destruí-la respondendo uma pergunta aleatória do conjunto de cartões (com tempo limitado para resposta, acesso a calculadora, papel, lápis e borracha). Ao destruir uma barreira o jogador anda uma casa, caso contrário fica no lugar. Caso as barreiras se esgotem, o jogo prossegue. Ganha o jogador que primeiro chegar à linha oposta à sua, do outro lado.

Os cartões têm perguntas relativamente simples e diretas de porcentagem. Por exemplo, uma das perguntas é “Um pequeno sofá custa R\$400,00 e é vendido por R\$520,00. Qual é a taxa de lucro?”

Perguntas dos outros cartões podem ser visualizadas com as respostas em [https://www.dropbox.com/s/1expli63enl745v/Jogo\\_1\\_cartoes.pdf?dl=0](https://www.dropbox.com/s/1expli63enl745v/Jogo_1_cartoes.pdf?dl=0).



Figura 1: Jogo Derrubando muros: material e aplicação.

Fonte: Os autores

## Jogo 2: O barato das Receitas

O segundo jogo, “*O Barato da Receitas*”, tem como objetivo desenvolver nos alunos uma percepção de otimização e de economia doméstica que, muitas vezes, o sistema econômico em que vivemos inibe. Trata esse jogo de perceber nuances em uma simples compra de supermercado, aplicando matemática elementar. Ele se destina a alunos a partir do 5º ano do Ensino Fundamental, portanto, futuros compradores agora na faixa de 11-15 anos. Pode ser jogado com dois jogadores ou dois grupos de jogadores. As receitas escolhidas para o jogo são divididas em três classes, a saber, fáceis, médias e difíceis.

Ao escolher uma receita, o jogador/grupo deverá calcular o menor custo total da compra dos ingredientes, a partir da pesquisa de preços em três supermercados. Nesse jogo, o aluno trabalha com preços reais (no Rio de Janeiro, valores de 2017), deverá fazer escolhas de preços, considerando possíveis promoções e comparar. Embora tendo como pré-requisito uma matemática bastante elementar, o aluno se depara com contas envolvendo decimais e se desenvolve ao usar a Matemática para a economia doméstica. É um jogo que demanda tempo, porém, basta jogar uma vez para o estudante ser capaz de se tornar um observador crítico nas suas relações de compra.

Material: Tabelas para serem preenchidas por cada jogador/grupo; pranchetas; calculadoras; papel para anotações; 2 tabelas de preços de 3 supermercados (Global, Baratinho e Municipal); 13 cartões com receitas (ingredientes e modo de fazer). Ver figura 2 (a).

Número de jogadores: 2 (em grupo ou individuais)

Modo de jogar: Os jogadores/grupos escolhem um nível de receita (FÁCIL, MÉDIO, DIFÍCIL) e, a partir dessa escolha de nível, um cartão de receita. Com os preços dos produtos em 3 supermercados em mãos, cada jogador/grupo calcula o custo total da compra dos ingredientes da receita escolhida. Com esses dados, o jogador/grupo deve apresentar o menor e o maior preço dentre os três supermercados, segundo a escolha dos produtos para fazer a receita. Em seguida, apresentar o menor preço se a compra pudesse ser feita com os produtos dos 3 supermercados (Mix Mercados) e,

finalmente, comparar com o menor preço apresentado anteriormente. Calcular, por fim, o percentual da economia, considerando o custo da compra dos ingredientes no supermercado de menor preço, escolhido dentre os três, e o Mix Mercados.

Caso o jogador/grupo acerte, para a receita escolhida, as contas a serem feitas, ele ganha pontos. São 10 (dez) pontos para os seguintes acertos: o menor e o pior preço utilizando um supermercado valem 10 (dez) pontos cada; o supermercado mais econômico para a receita escolhida; o menor preço utilizando os ingredientes comprados nos três supermercados (Mix Mercados); o percentual de economia (pior x Mix Mercados). Atenção quanto à compra dos produtos nos três supermercados, que devem seguir as seguintes regras: a compra de um produto deverá ser obrigatoriamente maior que a quantidade gasta no preparo, exceto quando o produto, na tabela de preços, estiver acompanhado com (f), quando então poderá ser comprada quantidade fracionada. Pode-se repetir o processo, escolhendo outra receita, por várias rodadas, contando os pontos de cada jogador/grupo. O jogador/grupo vencedor é aquele que obtiver maior quantidade de pontos, após todas as rodadas.

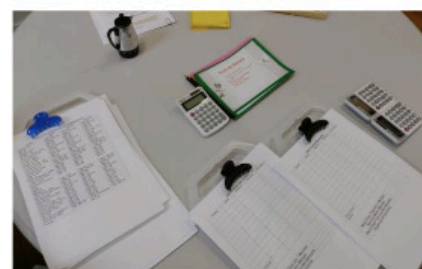
A figura 2(a) mostra a tabela de preços nos três supermercados que, juntamente com a ficha dos jogadores e as receitas - segundo os níveis 1 (Fácil), 2 (Médio), 3 (Difícil)- podem ser visualizadas em [https://www.dropbox.com/s/knb5pzb5zzaxnof/Jogo\\_2.f?dl=0](https://www.dropbox.com/s/knb5pzb5zzaxnof/Jogo_2.f?dl=0). Nas figuras 2 (b)-(c), respectivamente, aparecem a partida realizada no Festival de Matemática, em 2017 e o material do jogo.

TABELA DE PREÇOS EM SUPERMERCADOS			
Produto	Global	Baratinho	Municipal
Apucar (1kg)	R\$ 2,99	R\$ 2,89	R\$ 3,58
Alho (f)	500gr, R\$ 4,99	200gr, R\$ 4,09	1kg, R\$ 19,50
Banana, 1kg (f)	R\$ 4,99	R\$ 4,50	R\$ 4,89
Batatas, 1kg	R\$ 2,99	R\$ 2,40	R\$ 2,98
Biçoito maizena, 200gr	R\$ 2,48	R\$ 2,40	R\$ 3,35
Carne Moída chã (f)	500gr, R\$ 16,90	1kg, R\$ 31,90	500gr, R\$ 17,70
Cebola, 1kg (f)	R\$ 2,89	R\$ 3,75	R\$ 2,98
Cenoura, 1kg (f)	R\$ 3,69	R\$ 2,99	R\$ 3,59
Creme de leite	300gr, R\$ 5,75	300gr, R\$ 4,95	200gr, R\$ 2,99
Farinha de trigo, 1kg	R\$ 2,79	R\$ 3,50	R\$ 2,55
Fermento em pó, 100gr	R\$ 2,85	R\$ 2,29	R\$ 2,59
Filé de peixe (f)	1kg, R\$ 21,99	500gr, R\$ 12,50	1kg, R\$ 22,50
Gelatina sem sabor	25gr, R\$ 0,99	25gr, R\$ 0,89	12,5gr, R\$ 0,79
Iogurte natural	160gr, R\$ 1,59	160gr, R\$ 1,68	170gr, R\$ 1,75
Leite, 1L	R\$ 3,99	R\$ 3,98	R\$ 3,85
Leite condensado, 395gr	R\$ 5,99	R\$ 6,98	R\$ 4,99
Leite de coco, 200ml	R\$ 2,59	R\$ 3,15	R\$ 3,98
Limão, 1kg (f)	R\$ 3,99	R\$ 3,98	R\$ 3,75
Macarrão p/ Lasanha, 500gr	R\$ 3,15	R\$ 2,80	R\$ 3,09

(a)



(b)



(c)

Figura 2: Jogo 2. O barato das receitas: (a) Detalhe da Tabela de Preços dos três supermercados; (b) Jogadoras com instrutora; (c) Material.

Fonte: Os autores

### Jogo 3: Trilha de Matemática Financeira

O objetivo deste jogo é percorrer a trilha determinada, de acordo com o número

obtido ao jogar um dado, chegando à casa final. As questões contêm situações reais, retiradas de encartes de divulgação de lojas. O vencedor é o jogador que tiver maior número de pontos, no momento em que um jogador alcançar primeiro a casa final.

**Material:** 2 calculadoras simples, 2 blocos para anotar pontos, tabuleiro tamanho A3 emborrachado, cartões coloridos com as perguntas, apostilas com as perguntas e respostas corretas, comentadas, para uso do “banqueiro” e para compreensão dos participantes, 1 dado comum, 2 peões para representar cada jogador ou grupo em cima do tabuleiro, 1 ampulheta para marcar tempo.

**Número de jogadores:** 2 (em grupo ou individuais).

**Modo de jogar:** O tabuleiro ficará em cima de uma mesa, juntamente com os grupos de cartões virados para baixo: os com o desenho do triângulo contêm questões fáceis sobre consumo consciente, valendo 1 ponto cada; os com o texto Nível 1 contêm questões fáceis, valendo 2 pontos cada, com o texto Nível 2 contêm questões médias, valendo 4 pontos cada e os com o texto Nível 3 contêm questões difíceis, valendo 6 pontos cada. As questões N1, N2 e N3 são todas de Matemática Financeira. Os peões correspondentes aos participantes são colocados ao lado da primeira casa. Em cada jogada o jogador/grupo anda o número de casas do tabuleiro correspondente ao número que saiu no dado. Se a casa estiver em branco, nada a fazer, é a vez do jogador seguinte. As casas que não estão em branco contêm as tarefas que deverão ser realizadas para obter pontos, ou penalidades: casa do tabuleiro ordenando que fique sem jogar a próxima rodada; casa do tabuleiro com triângulo significa que o jogador deverá responder uma pergunta sobre consumo consciente. Se acertar, ganha a pontuação já descrita. Da mesma forma para as casas com texto N1, N2, N3. Haverá casas com o sinal de ?/ Teste seu conhecimento, em que o jogador, se parar nelas, poderá escolher o tipo de questão (N1,N2,N3) para responder. As questões terão tempo limitado para serem respondidas, com uso de ampulheta. O “banqueiro” conta os pontos de cada jogador/grupo. Quando o primeiro jogador/grupo alcançar a casa de chegada contam-se os pontos dos dois jogadores/grupos e o vencedor é o que tiver o maior número de pontos. A figura 3 mostra a trilha do jogo, e os cartões com as perguntas, nos três níveis.

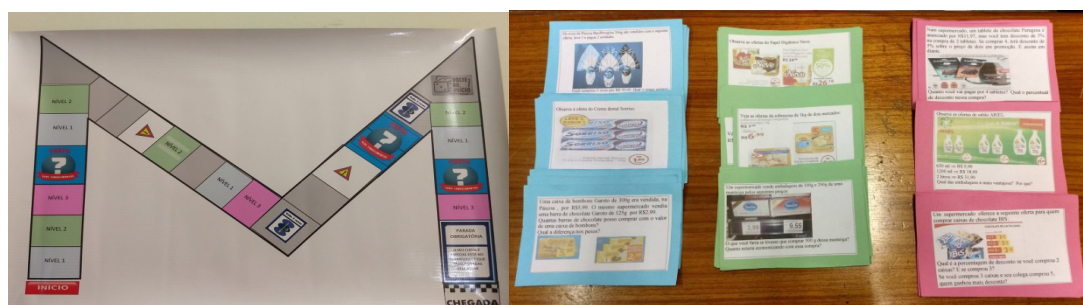


Figura 3: Jogo 3: a trilha a ser percorrida e os cartões com os três níveis de perguntas.

Fonte: Os autores.

Algumas questões a serem respondidas demandavam a comparação de situações de compra, para a escolha da mais vantajosa, como a mostrada na figura 4.

Uma caixa de bombons de 300g era vendida, na Páscoa, por R\$5,99. O mesmo supermercado vendia um ovo de Páscoa, da mesma marca, de 220g, por R\$19,99.

*Qual a diferença nos preços do quilo desses produtos?*

Figura 4: Uma das perguntas do jogo da trilha.

Fonte: Os autores

## 4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os professores que trabalham com Matemática Financeira na Educação Básica enfrentam um grande desafio, pois transformar fórmulas em significados que envolvam resolução de tarefas reais sobre Educação Financeira não é uma tarefa fácil.

Para que haja um maior interesse por parte do aluno, sugerimos estratégias que envolvem a visualização dos problemas e a utilização de jogos, fazendo com que o aluno não decore fórmulas, buscando resolver a situação proposta de uma maneira prática e lúdica.

Nossa proposta sugere explorar atividades que levem os alunos a terem um senso crítico em situações relacionadas a como escolher entre comprar à vista ou a prazo, se há desconto para a compra à vista, e se este vale a pena ou não. Isso faz com que o aluno enfrente problemas do cotidiano, além de levá-lo a pensar sobre o consumismo exagerado, que transforma a população numa sociedade que consome e não poupa de maneira responsável. Buscamos enfatizar a importância de se começar a discussão sobre o assunto nos anos iniciais do Ensino Fundamental e não, como nos principais currículos, que valorizam o assunto apenas no Ensino Médio.

A estratégia de usar a visualização na resolução de situações financeiras já foi aplicada por vários professores, que comprovam sua eficácia (Nasser, 2010). A apresentação dos jogos desenvolvidos, tanto no Festival da Matemática quanto na Semana Nacional de Ciência e Tecnologia da UFRJ, foi um sucesso, atraindo a atenção de jovens e adultos. Os jogos têm sido aplicados em atividades de sala de aula nos anos finais do Ensino Fundamental, como relatado em Coutinho (2018).

Esperamos que este artigo contribua para a reflexão sobre a importância da exploração na escola da Educação Financeira, que é fundamental para a formação do cidadão desde os primeiros anos escolares, usando abordagens distintas das que são apresentadas em geral nos livros didáticos.

## REFERÊNCIAS

BLAZUTTI, A. C. e NASSER, L. **O papel dos jogos envolvendo Otimização e Matemática Financeira na aprendizagem.** Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

BORIN, J. **Jogos e Resolução de Problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática.** CAEM, IME-USP, 2007.

BRASIL **Base Nacional Comum Curricular,** MEC, 2018.

COUINHOS, J. M. S. **Aprendizagem de Matemática Financeira por meio de jogos.** Monografia de final de curso de Licenciatura em Matemática. UFRJ, 2018.

GRANDO, C. R. **O conhecimento matemático e o uso de jogos em sala de aula.** 2000. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2000.

NASSER, L (coord.). **Matemática Financeira na Escola Básica: uma abordagem prática e visual.** Editora IM-UFRJ, 2010.

SÁ, I P. e Sá, V. G. P. **Dois vezes 100 é igual a 200?** Revista do Professor de Matemática, nº 70, p.13-16, SBM, 2009.

## JOGOS COOPERATIVOS: UMA EXPERIÊNCIA LÚDICA DE CONVIVER JUNTO NA EDUCAÇÃO INFANTIL

**Ana Brauna Souza Barroso**

Secretaria de Estado de Educação

Brasília - Distrito Federal

**Antônio Villar Marques de Sá**

Universidade de Brasília, Faculdade de Educação

Brasília – Distrito Federal

**RESUMO:** O presente trabalho tem a finalidade de analisar os comportamentos manifestados nas relações entre os educandos da educação infantil a partir da aplicação de jogos cooperativos, no contexto de uma escola pública do Distrito Federal. Para isso, foi necessário esclarecer o significado desses jogos e explicar que os processos de aprendizagens matemáticas podem ser mais prazerosos com uma abordagem lúdica. A metodologia adotada foi de cunho qualitativo, fundamentando-se nos princípios da pesquisa-ação e foram utilizadas observações participantes, rodas de conversas guiadas por grupo focal e jogos cooperativos como fonte de dados para essa pesquisa. Os resultados evidenciaram que a maioria dos sujeitos demonstrou satisfação em participar dos jogos e vivenciou relações sociais significativas, como a amizade, cooperação e competição. Nesses processos de interação, foi perceptível também a presença de conflitos e desentendimentos que atrapalhavam o andamento de certos momentos lúdicos e

que provocaram sensações e sentimentos de tristeza entre os envolvidos. Apesar das dificuldades, foram identificadas possibilidades nessa ação educativa lúdica para a integração entre as crianças e para a promoção de novas experiências e aprendizagens afetivas, sociais, cognitivas e metacognitivas, colaborando para uma adequada formação pessoal e social do ser humano.

**PALAVRAS-CHAVE:** Jogos cooperativos; Ludicidade; Aprendizagem lúdica; Educação Infantil.

**ABSTRACT:** This article aims to analyze the behaviors manifested in the relations between the students of early childhood education during the application of cooperative games, in the context of a public school in the Federal District. For this purpose, it was necessary to clarify the meaning of these games and explain that the processes of mathematical learning can be more pleasant with a playful approach. The adopted methodology was of a qualitative approach, which is based on principles of action research, using participant observations, focus groups and cooperative games as data source for this research. The results show that most subjects demonstrated satisfaction in playing the games and experienced significant social relationships such as friendship, cooperation and competition. In these interaction processes,

it was also noticeable the presence of conflicts and misunderstandings that hindered the progress of certain playful moments and that caused sensations and feelings of sadness among those involved. Despite the difficulties, possibilities for the integration of children and the promotion of new affective, social, cognitive and metacognitive experiences and learning were identified in these entertaining educational activities, contributing to an adequate personal and social development of the human.

**KEYWORDS:** Cooperative Games; Playfulness; Playful learning; Early childhood education.

## 1 | INTRODUÇÃO

A educação tem o papel de propiciar o desenvolvimento integral do ser humano em todos os aspectos: cognitivo, afetivo, psicomotor, social, éticos e estéticos. Contudo, a escola, muitas vezes sem perceber, está se preocupando muito mais com o ensino do que com a educação. Assim, os aspectos sociais e o trabalho de valores são deixados de lado em favor dos conteúdos escolares. Isso é reflexo da própria visão atual de sociedade, que tem como propósito o individualismo, a riqueza material, o acúmulo de informações e uma maior produtividade.

Os jogos cooperativos, ao estimularem outro tipo de relação entre as pessoas baseado na capacidade de cooperar, podem vir a ser uma valiosa ferramenta na formação do ser humano. Em vez de o indivíduo estar todo tempo competindo com os seus semelhantes, ele poderá desenvolver uma nova forma de interagir com o outro. Isso implica, necessariamente, pesquisar, conhecer, aplicar e introduzir esses jogos dentro de sala de aula, trazendo-os para o cotidiano da prática pedagógica e fazendo-os presentes nas reflexões, nas atitudes e nos métodos educacionais.

De acordo com Barreto (2000) e Brotto (1999), os jogos cooperativos são jogos em que todos trabalham em conjunto, conseguindo alcançar objetivos, e ganham juntos também. Além disso, representam uma oportunidade para que processos de aprendizagens matemáticas possam ser realizados com significado uma vez que, segundo Kishimoto (2011), utilizar jogos favorece a exploração e construção de conhecimentos pela motivação interna do aspecto lúdico, contudo exigindo do trabalho pedagógico uma oferta de estímulos externos bem como a sistematização de conteúdos em outras situações.

Diante dos fatos mencionados, esse artigo traz um recorte de uma pesquisa de mestrado intitulada “Jogos cooperativos na educação infantil e suas implicações para o espaço da sala de aula” e tem como objetivo investigar os comportamentos manifestados nas relações entre as crianças durante o desenvolvimento dos jogos cooperativos (BARROSO, 2016).



## 2 | O JOGAR NA EDUCAÇÃO

Para conhecer os jogos cooperativos, é importante que se entenda anteriormente a questão do jogo e a sua ação que é o jogar. Assim, Huizinga (2014, p. 10) mencionou que o jogo representa um elemento da cultura e é "[...] uma atividade voluntária, exercida dentro de certos limites de tempo e espaço, segundo regras livremente consentidas, mas absolutamente obrigatórias, dotado de um fim em si mesmo [...]". Percebe-se que o jogar é um fenômeno cultural com diversos significados que variam de acordo com o tempo e com a cultura. Além disso, possui algumas características consideradas importantes que, conforme Huizinga (2014), se referem à questão do caráter não sério da ação, do prazer pelo jogador, da liberdade do jogo, da existência de regras, da limitação no tempo e no espaço, do caráter fictício ou representativo, da separação dos fenômenos do cotidiano.

Para esse autor, o aspecto da não seriedade não significa que o jogar deixa de ser sério, porque, quando a criança joga, ela o realiza de forma concentrada. Essa questão está relacionada ao aspecto do riso e do cômico que está em oposição ao aspecto do trabalho considerado algo sério. Além disso, há a questão das regras que podem ser tanto explícitas quanto implícitas, dando uma condução para a atividade. Por fim, segundo Huizinga (2014), o fenômeno de separação do cotidiano representa a parte do mundo imaginário em que a criança se distancia da vida real quando participa do ato de jogar.

As características mencionadas do jogo, como a liberdade, a existência de tempo e espaço e a questão das regras, são elementos defendidos também por Caillois (1990) que ainda acrescentou mais dois aspectos para o jogo que se referem à incerteza acerca dos procedimentos e resultados, como também ao aspecto da improdutividade. O que importa é o processo e não a aquisição de conhecimentos, pois no jogar a criança não está preocupada em adquirir alguma coisa ou desenvolver alguma habilidade. Todavia, esta comunicação considera que o ato de jogar é algo produtivo, que vai enriquecer o participante em vários níveis. Enfim, todas essas características favorecem o conhecimento dos fenômenos que ocorrem no jogo e evidenciam que essa atividade é relevante na formação do ser humano em sua cultura.

No jogar, as crianças compreendem regras, vivenciam situações que se repetem, assimilam conhecimentos sobre si e sobre os outros. Dentro de um jogo, há infinitas possibilidades de se resolver um problema, permitindo que os participantes formulem e reformulem hipóteses. Nessa prática, eles se tornam mais livres.

Ainda por cima, jogando com os outros, os seres humanos reforçam a convivência e aprimoram as relações interpessoais. De acordo com Brougère (1998), uma das motivações dessa ação de jogar é estar junto com o outro, interagir, fazer parte de, sendo o jogo um caminho para a interação, desempenhando uma função social explícita. Além disso, o jogo pode ser educativo se bem explorado, sendo um gerador de experiências com esses fins. Confirmando essas ideias, Moura (2011, p. 89)

afirmou que o jogo é importante aliado para o ensino da matemática ao ser utilizado nas práticas escolares, por ser um promotor da aprendizagem e do desenvolvimento, uma vez que "colocar o aluno diante de situações de jogo pode ser uma boa estratégia para aproximá-lo dos conteúdos culturais a serem veiculados na escola, além de poder estar promovendo o desenvolvimento de novas estruturas cognitivas".

E como a educação infantil é um espaço onde os jogos estão presentes no seu dia a dia e é a fase mais importante da infância, porque a criança está aprendendo a viver, é uma etapa ideal para se utilizar o recurso do jogo como ferramenta de trabalho pedagógico, se tiver o estímulo correto.

### 3 | OS SIGNIFICADOS E AS CARACTERÍSTICAS DOS JOGOS COOPERATIVOS

Após a explanação sobre o jogo e sua relevância para a educação, o que vêm a ser os jogos cooperativos? Segundo Orlick (1989), os jogos cooperativos são jogos em que os participantes cooperam entre si e todos ganham. Para alcançar esse objetivo, as pessoas precisam jogar umas com as outras e não contra as outras para superar um desafio. Nessa superação, a participação efetiva de todos torna-se muito importante. Dessa forma, é fácil identificar que esses jogos se caracterizam por apresentar metas coletivas em vez de metas individuais. Em consequência dessa proposta, a diversão e a união entre as pessoas passam a ser a finalidade principal do jogo em vez do ganhar ou perder.

Essa finalidade dos jogos cooperativos pode ser confirmada pelas ideias de Almeida (2011, p. 37), ao dizer que eles representam uma atividade "[...] em que as regras não são o mais importante, o que importa de fato é o relacionamento, a criação coletiva e a integração entre os membros do jogo. As regras existem para ajudar o processo e não para provocar conflitos ou atitudes competitivas". Todavia, é possível que ocorra embates e até conflitos entre os participantes em razão dos processos a serem desencadeados por esse exercício cooperativo.

Essas características indicam que a experiência cooperativa é um processo de interação e de socialização no qual o objetivo torna-se comum para se ultrapassar um obstáculo ou um desafio, o compartilhamento de tarefas passa a ser exercido e os benefícios são distribuídos a todos os sujeitos. Entretanto, nos dias de hoje, a maioria ainda não está acostumada com essa atividade cooperativa, sendo desafiadora, conflituosa, confusa e até desinteressante. Logo, "não podemos esperar que os jogos cooperativos sejam incorporados e aceitos de pronto ou de imediato" (CORREIA, 2006, p. 155). Contudo, não há a necessidade de preocupação, porque a cooperação pode ser exercitada por diversas formas e em diferentes graus conforme Orlick (1989), propôs em sua divisão de jogos cooperativos em categorias: jogos cooperativos sem perdedores, jogos de resultado coletivo, jogos de inversão e jogos semicooperativos.

## 4 | METODOLOGIA

Para esse estudo, de abordagem qualitativa, fundamentou-se na perspectiva da pesquisa-ação que é “realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo” (THIOLLENT, 2011, p. 20). Essa investigação foi desenvolvida em uma escola pública do Distrito Federal. Teve como participantes a professora e uma turma de 14 crianças da educação infantil, na faixa etária de cinco anos que foram escolhidas devido à aceitação da profissional e dos educandos em participar da experiência com os jogos cooperativos.

A observação participante foi adotada como instrumento metodológico para conhecer e entender o ambiente onde estavam inseridos, ocorrendo ao longo de duas semanas. Além do mais, essa observação se fez pertinente durante todo o desenvolvimento dos jogos cooperativos a fim de compreender as relações estabelecidas entre os jogadores nessas vivências cooperativas.

Os momentos lúdicos se concretizaram em dez encontros que tiveram duração média de 25 a 45 minutos por encontro, sendo aplicados dois por semana. Os dez jogos cooperativos selecionados são nomeados da seguinte forma: achados e perdidos, dado bola, jogos de criação de histórias, eco-nome, famílias, duas pessoas e uma bexiga, cada macaco no seu galho, “Hoot Owl Hoot”, “Max” e “Princess”. Esses recursos se basearam no livro “Manual dos Jogos Cooperativos” do autor Jim Deacove (2004) e “Jogos cooperativos na Educação Infantil” do autor Reinaldo Soler (2006). Além disso, utilizaram-se três jogos cooperativos de tabuleiro das marcas Family Pastimes e da Peaceable Kingdom que não estão disponíveis no mercado brasileiro.

A roda de conversa foi utilizada para evidenciar as percepções das crianças sobre os momentos vividos no desenvolvimento dos jogos cooperativos. Essa conversa se baseou na técnica de grupo focal que, de acordo com Morgan (1997), é um procedimento de coleta de dados por meio das interações grupais em que se discute um tema sugerido pelo pesquisador. Assim, era usada a cada aplicação de jogo com todos os participantes presentes, a fim de que relatassem suas impressões e sentimentos a partir dessa prática lúdica, fazendo uma avaliação dos momentos (O que acharam? Gostaram ou não? etc.).

## 5 | ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

Para fazer a análise dos dados obtidos, evidenciou-se a necessidade de fazer uma adaptação da proposta da Análise de Conteúdo de Bardin (2011) que tem a finalidade de estabelecer inferências de conhecimentos relacionados às condições de produção e de recepção de mensagens.

Os educandos destacaram em suas respostas as seguintes ideias sobre os

jogos cooperativos: os jogos foram muito interessantes em razão de terem amigos para brincar. Assim, percebe-se que os amigos eram importantes nos momentos lúdicos, porque os alunos sabiam que podiam contar com essas pessoas para as suas participações na ação de jogar e, conseqüentemente, eles oportunizaram instantes agradáveis durante os jogos.

Essas ideias podem ser corroboradas com os estudos de Winnicott (2013), ao destacar que a brincadeira permite que as relações emocionais sejam organizadas e, dessa forma, possibilita que os contatos sociais sejam desenvolvidos. Assim, os educandos iniciam seus círculos de amizades e reforçam esses laços por meio do ato de brincar e de jogar em que há trocas de afetos e de sentimentos entre si.

As crianças relataram também que o jogo cooperativo se mostrou divertido e empolgante porque proporcionou que todos estivessem presentes naquele momento lúdico, representando uma possibilidade de estar em contato com colegas, vivenciando situações de trocas e descobertas no processo de socialização entre elas.

Percebe-se que estar com o outro é um fator determinante para que o jogo faça sentido e um grande incentivo para a sua realização, uma vez que o ser humano é um ser essencialmente social, precisando do outro para se sentir pertencente a um grupo. Isso vai ao encontro dos pressupostos de Brougère (1998), que também foram citados nos estudos de Muniz (2016) ao evidenciar que a grande motivação do jogo consiste em relacionar-se e "estar com", sendo que essa atividade lúdica favorece a interação e a aprendizagem conforme as estruturas ofertadas.

Pelos relatos verbais, as crianças mencionaram ainda que o jogo cooperativo se tornou algo divertido e fácil de jogar, porque todos estavam ajudando no jogo. E estar todo mundo colaborando e cooperando nessa ação significa que o jogo pode ser realizado e vivenciado de forma agradável, visto que todos estão fazendo parte de um mesmo grupo que trabalha em conjunto para a concretização de uma ação.

Foi possível evidenciar pelas ações e pelas falas dos pesquisados, que a competição também se mostrou presente nos momentos dos jogos cooperativos ao considerarem que só um jogador ganhou e os outros colegas perderam em razão de conhecerem que há poucos vencedores ou só um ganhou no final.

Observou-se ainda desentendimentos, atitudes individualistas e ações de atrapalhar o colega com verbalizações negativas como, por exemplo, "vai perder" ou "perde, perde" ao longo da prática dos jogos cooperativos. Assim, alguns jogadores mostraram-se tristes e insatisfeitos em determinados jogos e acabaram fazendo uma associação dessas experiências negativas com o fato do jogo ter sido chato.

Diante do exposto, fica claro que a relação social de competição fez parte de momentos dos jogos cooperativos, visto que cooperar é mais difícil que competir e, principalmente, para o grupo pesquisado, essa ação não fazia parte do cotidiano deles. Entretanto, ela não é impossível de ser exercitada e requer prática, pois segundo Brown (1994), já se sabe competir, sendo necessária a vivência cooperativa como uma forma de se enfrentar as situações e buscar soluções juntos.

Portanto, os jogos requerem alguns cuidados para o educador, incluindo que esse também se faça presente em alguns momentos do jogar, envolvendo-se junto com o grupo, o que possibilitará à atividade lúdica ser atraente, bem orientada e favorável ao desenvolvimento infantil, conforme novas investigações apontaram (SÁ; NOGUEIRA; JESUS, 2017).

## 6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em virtude dos fatos mencionados, conclui-se que a maioria das crianças gostaram de ter participado da vivência dos jogos cooperativos. No que se refere às relações estabelecidas, percebeu-se que houve a construção de vínculos entre os envolvidos, em que se estabeleciam parcerias nos momentos dos jogos. Os processos de interação social foram intensificados nas vivências lúdicas cooperativas em que se exercitavam a participação mútua, o incentivo positivo, a comunicação, a argumentação, a confiança no outro, a cooperação e a aprendizagem de regras.

As informações produzidas e analisadas também apontaram a relação de fluir nos jogos em que as crianças jogavam sem a preocupação de serem excluídas e sem ênfase demasiada de quem seria a vencedora no final, favorecendo um bom relacionamento e maior integração entre elas.

Enfim, pode-se dizer que os jogos, e, em especial, os jogos cooperativos, são também relevantes para se trabalhar com as crianças, podendo exercer uma função pedagógica no espaço escolar. Logo, esses jogos puderam desenvolver habilidades intelectuais (imaginar, perguntar, decidir e adivinhar) como também solucionar situações problemas importantes para a construção do conhecimento matemático. Além disso, estimularam as habilidades interpessoais, linguísticas, motoras e o desenvolvimento da autonomia.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. T. P. de. **Jogos cooperativos**: aprendizagens, métodos e práticas. Várzea Paulista, SP: Fontoura, 2011.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução de Luís Antero Neto e Augusto Pinheiro. 70. ed. São Paulo: Edições, 2011.

BARRETO, A. V. de B. **Jogos cooperativos**: metodologia do trabalho popular. [s.l.: s.n], 2000. Disponível em: <[http://www.paulofreire.org/forum\\_resumo.htm](http://www.paulofreire.org/forum_resumo.htm)>. Acesso em: 1 set. 2016.

BARROSO, A. B. S. **Jogos cooperativos na educação infantil e suas implicações para o espaço da sala de aula**. 2016.179 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2016. Disponível em:<<http://repositorio.unb.br/handle/10482/20028>>. Acesso em: 24 abr. 2017

BROTTO, F. O. **Jogos cooperativos**: o jogo e o esporte como um exercício de convivência. 1999. 209 f. Dissertação (Mestrado em Educação Física) – Faculdade de Educação Física, Universidade

Estadual de Campinas, São Paulo, 1999. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?down=vtls000202203>>. Acesso em: 10 abr. 2014.

BROUGÈRE, G. **Jogo e educação**. Tradução de Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

BROWN, G. **Jogos cooperativos: teoria e prática**. 4. ed. Tradução de Rui Brender. São Leopoldo, RS: Sindonal, 1994.

CAILLOIS, R. **Os jogos e os homens: a máscara e a vertigem**. Tradução de José Garcez Palha. Lisboa: Cotovia, 1990.

CORREIA, M. M. Jogos cooperativos: perspectivas, possibilidades e desafios na Educação Física escolar. **Revista Brasileira de Ciências e Esporte**, Campinas, v. 27, n. 2, p. 149-164, jan. 2006. Disponível em: <<http://revista.cbce.org.br/index.php/RBCE/article/view/99>>. Acesso em: 05 jan. 2017.

DEACOVE, J. **Manual de jogos cooperativos**. 2. ed. Tradução de Andréia de Faria Freire. Santos: Projeto Cooperação, 2004.

HUIZINGA, J. **Homo Ludens: o jogo como elemento da cultura**. [1939] 7. ed. Tradução de João Paulo Monteiro. São Paulo: Perspectiva, 2012.

KISHIMOTO, T. M. O jogo e a educação infantil. In: \_\_\_\_\_. (Org.) **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2011. p. 15-48.

MORGAN, D. Focus group as qualitative research. **Qualitative Research Methods Series**. London: Sage Publication, v.16, n. 4, p. 32-46, jul. 1997. Disponível em: <[http://studysites.uk.sagepub.com/gray3e/study/chapter18/Book%20chapters/Planning\\_and\\_designing\\_focus\\_groups.pdf](http://studysites.uk.sagepub.com/gray3e/study/chapter18/Book%20chapters/Planning_and_designing_focus_groups.pdf)>. Acesso em: 28 mar. 2017.

MOURA, M. O. de. A séria busca no jogo: do lúdico na matemática. In: KISHIMOTO, T. M. (Org.). **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2011. p. 81-97.

Muniz, C. A. Educação lúdica da matemática, educação matemática lúdica. In: SILVA, A. J. N da; TEIXEIRA, H. S. T. (Orgs.). **Ludicidade, formação de professores e Educação matemática em diálogo**. Curitiba: Appris, 2016, pp. 17-45.

ORLICK, T. **Vencendo a competição**. Tradução de Fernando J. Guimarães Martins. São Paulo: Círculo do Livro, 1989.

Sá, A. V. M. de; Nogueira, C. A.; Jesus, B. G. de. **Anais do II Encontro de Aprendizagem Lúdica**. Brasília: Universidade de Brasília. Disponível em: <<http://repositorio.unb.br/handle/10482/23065>>. Acesso em: 24 abr. 2017.

SOLER, R. **Jogos cooperativos para educação infantil**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sprint, 2006.

THIOLLENT, M. **Metodologia da pesquisa-ação**. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

WINNICOTT, D. W. Por que as crianças brincam. In: \_\_\_\_\_. **A criança e seu mundo**. 6. ed. Tradução de Álvaro Cabral. Rio de Janeiro: LTC, 2013. p. 161-165.

## EFEITO DE HARDWARE E SOFTWARE SOBRE O ERRO DE ARREDONDAMENTO EM CFD

**Diego Fernando Moro**

Engenharia Mecânica, Universidade Positivo  
Curitiba - PR

**Carlos Henrique Marchi**

Departamento de Engenharia Mecânica,  
Universidade Federal do Paraná  
Curitiba - PR

**RESUMO:** Neste trabalho verifica-se o efeito do erro de arredondamento sobre soluções numéricas, pois este efeito não é bem conhecido em transferência de calor e dinâmica dos fluidos computacional. Para análise, foram utilizados dois problemas de condução de calor e um de escoamento de fluidos compressíveis, ambos códigos computacionais foram escritos em Fortran 90. A condução de calor é resolvida utilizando-se o método de diferenças finitas com esquema de segunda ordem de acurácia e considerando: (1) uma e duas dimensões espaciais; (2) nove configurações diferentes de computadores (Intel e AMD); (3) precisões simples ou dupla; (4) sistemas operacionais Windows XP 32 bits, 64 bits e Linux 64 bits (Ubuntu); (5) três tipos de variáveis (globais e pontuais); (6) quatro tipos de compiladores: Microsoft 4.0, Compaq 6.6 e Intel 11.1 no Windows e gfortran no Linux; (7) diversas opções de compilação; (8) solver direto (1D), iterativo com Multigrid (2D) e (9) número de

incógnitas de 2 a 67 milhões. Já o escoamento de fluidos compressíveis é resolvido com volumes finitos e esquema de primeira ordem de acurácia em dois sistemas operacionais (Windows e Linux) e dois tipos de solvers (ADI e MSI) com o compilador Intel 14.0. De todos os aspectos citados anteriormente apenas o compilador afetou o erro de arredondamento.

**PALAVRAS-CHAVE:** Erro de arredondamento, transferência de calor computacional, dinâmica dos fluidos computacional, erro numérico, verificação.

**ABSTRACT:** The rounding-off error effect over numerical solutions is verified, because this effect is not well known in computational heat transfer and computational fluid dynamics. In this analysis, two heat conduction problems and one compressible fluid flow problem were used, both computational codes were written in Fortran 90. The heat conduction is solved using finite difference method with scheme of second order of accuracy and considering: (1) one and two spatial dimensions; (2) nine different configurations of computer (Intel and AMD); (3) simple and double precision variables; (4) operational systems Windows XP 32 bits, 64 bits and Linux 64 bits (Ubuntu); (5) three types of variables (global and point); (6) four types of compilers: Microsoft 4.0, Compaq 6.6 and Intel 11.1 in Windows and gfortran in Linux; (7) varied

options of compilation; (8) direct solver (1D), iterative with Multigrid (2D) and (9) 2 to 67 million grid elements. The compressible flow is solved using finite volume method and scheme of first order of accuracy in two operational systems (Windows and Linux) and two types of solvers (ADI and MSI) with the compiler Intel 14.0. Of the numerous aspects quoted earlier only the compiler affected the rounding-off error.

**KEYWORDS:** Rounding-off error, computational heat transfer, computational fluid dynamics, numerical error, verification

## 1 | INTRODUÇÃO

Para resolver problemas de engenharia, pode-se optar por três tipos de métodos: (1) experimentais, (2) analíticos ou (3) numéricos.

Nos métodos experimentais (1) avalia-se o fenômeno físico diretamente, são empregados sistemas de medição para obter o valor das grandezas de interesse diretamente e os erros existentes nestes resultados devem-se às condições do experimento, aferição dos sistemas de medição, entre outras.

Nos métodos analíticos (2) utiliza-se uma representação matemática do fenômeno físico chamada modelo matemático, este modelo é então simplificado e resolvido. Apresentam erros de modelagem, ou seja, erros entre o modelo matemático e o fenômeno real.

Nos métodos numéricos (3) também utiliza-se o modelo matemático, no entanto sem as simplificações do método analítico, o que permite resolver problemas com equações, geometrias e condições de contorno mais gerais. No entanto é necessário o uso de computadores para obter as soluções numéricas e estas soluções além de apresentarem os erros de modelagem citados nos métodos analíticos, também apresentam erros numéricos (MARCHI, 2001).

Os erros numéricos podem ser causados por quatro fontes: (A) erros de truncamento, (B) erros de iteração, (C) erros de programação e (D) erros de arredondamento.

Os erros de truncamento (A) resultam das aproximações numéricas feitas na discretização do modelo matemático. Eles causam os erros de discretização (E) sobre as variáveis de interesse ( $\phi$ ) que são modelados por

$$E(\phi) = C_1 h^{p_L} + C_2 h^{p_2} + C_3 h^{p_3} + \dots \quad (1)$$

onde:

$p_L, p_2, p_3, \dots$  = ordens verdadeiras de  $E(\phi)$  geralmente números inteiros e positivos

$\phi$  = solução numérica sem erros de discretização, de iteração e de arredondamento

$p_L$  = ordem assintótica de  $E(\phi)$ ;  $p_L \geq 1$  inclinação da curva de erro num gráfico  $\log(|E|)$  versus  $\log(h)$  para  $h \rightarrow 0$

$h$  = tamanho dos elementos da malha



Os erros de iteração (B) resultam de vários fatores: emprego de métodos iterativos para resolver um sistema de equações; problemas não lineares, onde os coeficientes do sistema de equações dependem da própria solução; modelos matemáticos constituídos por mais de uma equação, onde cada uma é resolvida separadamente, entre outros.

Os erros de programação (C) podem ser causados por: uso incorreto do modelo numérico na aproximação do modelo matemático; implementação incorreta do modelo numérico no programa computacional; pelo uso incorreto do programa computacional durante a obtenção da solução numérica; e por qualquer outra eventual fonte de erro.

Os erros de arredondamento (D) são causados pela representação finita das variáveis nas computações numéricas, que está ligada à precisão dos números apresentados pelo computador. O objetivo deste trabalho foi avaliar se este erro depende do software usado para gerar o código computacional e/ou do computador (hardware) empregado em sua execução. Os erros de arredondamento provocam perda de precisão dos números, que ocorre basicamente por dois motivos: um grande número de operações nos cálculos provoca perda de precisão no lado direito dos números e o cancelamento subtrativo nos cálculos que provoca perda de precisão no lado esquerdo dos números.

No entanto não há um trabalho específico que quantifique este efeito na solução de problemas de dinâmica dos fluidos computacional (CFD). Outra motivação para este trabalho foi o constante questionamento em bancas de mestrado/doutorado: se a precisão da solução numérica depende do computador utilizado? Pois acredita-se que em diferentes computadores os programas computacionais se comportam de maneira diferente, ao se usar linguagens de programação científica como C++ ou Fortran.

## 2 | METODOLOGIA

Foram utilizados dois problemas de condução de calor (1D e 2D) para realizar a análise do erro de arredondamento verdadeiro e um problema de escoamento de fluidos compressíveis cujo código é chamado Mach2D (MARCHI; ARAKI, 2009) para analisar a variação da solução numérica. O procedimento adotado para analisar o erro de arredondamento verdadeiro foi: discretizar a equação diferencial com diferenças finitas e aproximações de segunda ordem de acurácia, em seguida, aplicar condições de contorno tal que a solução gerada seja linear, desta forma, o modelo numérico resulta na solução analítica nos nós analisados, a qual é conhecida. No caso do Mach2D foi analisada a solução numérica obtida variando o sistema operacional e o solver utilizado para resolver o sistema de equações.

Todos os códigos computacionais foram compilados e executados no mesmo computador. Quando este procedimento não era adotado, resultados significativamente diferentes eram obtidos nos diferentes computadores testados, principalmente em problemas mais complexos. Sugere-se portanto que na execução de códigos

computacionais siga esta mesma metodologia.

Em relação ao hardware, a Tab. 1 apresenta os computadores utilizados neste trabalho. Os resultados obtidos com cada um deles serão mencionados pelos seus respectivos nomes.

Em relação ao software, foram usados cinco compiladores diferentes da linguagem computacional utilizada nos códigos (Fortran), são eles: (1) Microsoft Fortran PowerStation 4.0, (2) Compaq Visual Fortran 6.6, (3) Intel Fortran Compiler 11.1, (4) GNU Fortran e (5) Intel Fortran Composer XE 2013 14.0.

Nome	Modelo	Processador	Threads	Clock	RAM	OS
CFD-1	Intel	Pentium III	1	0,75	0,77	Win. XP
CFD-2	Intel	Pentium IV	1	2,40	1,00	Win. XP
CFD-5	Intel	Pentium IV	1	3,41	3,00	Win. XP
CFD-7	Intel	Core 2 6700	2	2,66	3,50	Win. XP
CFD-10	Intel	Xeon X5355	8	2,66	2,49	Win. XP
CFD-13	Intel	Core Q6600	4	2,40	3,25	Win. XP
CFD-14	AMD	Athlon 4200+	2	2,20	1,75	Win. XP
CFD-19	AMD	Athlon 5200B	2	2,69	3,76	Win. XP
CFD-20	Intel	Core E7500	2	2,93	2,00	Ubuntu
CFD-21	Intel	Xeon X5690	24	3,46	192	Ubuntu e Win. XP

Tabela 1 Hardware utilizado nas simulações

onde: Clock é dado em GHz, RAM é dado em GB e OS é os sistemas operacionais disponíveis

## 2.1 Equação de Laplace, condução de calor unidimensional e bidimensional em regime permanente sem geração de calor

A equação de Laplace pode modelar entre outros problemas, a condução de calor em regime permanente sem geração de calor. Para estas simplificações tem-se a Eq. (2), que é a equação diferencial que modela o problema 1D e a Eq. (3) que modela o problema 2D.

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

onde:  $T$  é o campo de temperaturas ao longo do domínio e  $x$  e  $y$  são as direções coordenadas

O domínio 1D é uma barra com uma unidade de medida de comprimento e o 2D é uma placa quadrada com uma unidade de medida de aresta. As condições de contorno no problema 1D são as seguintes:  $T(0) = 0$  e  $T(1) = 1$  e no problema 2D:

$T(0,y) = T(x,0) = 0$  ;  $T(1,y) = y$  e  $T(x,1) = x$ . Isto permite obter soluções analíticas lineares para a incógnita dos problemas: no 1D  $T(x) = x$  e no 2D  $T(x,y) = x y$ .

Os dados numéricos além dos citados no início do capítulo são: as condições de contorno são aplicadas nos nós dos contornos; no problema 1D, foi utilizado o solver TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm) (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007), tem-se portanto a solução direta do sistema de equações. Já no problema 2D a parada do processo iterativo se dá com base num número fixo de iterações externas igual a 100, de forma a garantir que o processo iterativo termine no dobro de iterações necessárias para chegar ao erro de máquina. Isto ocorre pois utiliza-se o solver Gauss-Seidel com multigrid (BRIGGS *et al.*, 2000) para resolver o problema 2D. No problema 1D, foi avaliado o erro de arredondamento verdadeiro em 9 malhas distintas: 2,  $10^1$ ,  $10^2$ ,  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$ ,  $10^7$  e  $2,5 \cdot 10^7$  nós. Já no 2D foi avaliado em 5 malhas:  $32^2$ ,  $128^2$ ,  $512^2$ ,  $2048^2$  e  $8192^2$  nós.

As variáveis analisadas nos problemas 1D e 2D: Temperatura Central  $T_c$ , variável primária local. Solução analítica:  $T_{c,1D}(x=0,5) = 0,5$  e  $T_{c,2D}(x=0,5,y=0,5) = 0,25$ ; Temperatura Média  $\bar{T}$ , variável secundária global. Solução analítica:  $T_D = 0,5$  e  $\bar{T}_{DD} = 0,25$ . E Inclinação em  $x=1$ , variável secundária local. Solução analítica:  $I_{1D}(x=1) = 1$ .

## 2.2 Avaliação da variação da solução obtida com o código mach2d

O código computacional Mach2D utiliza o método dos volumes finitos para a resolução das equações diferenciais de conservação da massa, quantidade de movimento linear axial e transversal, a conservação da energia térmica e a equação de estado dos gases perfeitos. As equações citadas estão apresentadas abaixo:

$$\frac{c_p \partial(\rho u_k T)}{\partial x_k} = u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \frac{c_p \partial(\rho u_k u_i)}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0 \quad p = \rho R T \quad (5)$$

onde:

$p$ : Massa específica do gás;  $u_k$ : Componente da velocidade na direção  $k$ ;  $x_k$ : Direção  $k$ ;  $u_i$ : Componente da velocidade relativa a quantidade de movimento linear na direção  $i$ ;  $p$ : pressão do gás;  $c_p$ : Calor específico a pressão constante do gás;  $T$ : Temperatura do gás e  $R$ : Constante do gás (Lei dos gases ideais).

A Eq. (5) à esquerda representa a conservação da massa, a Eq. (4) à direita representa a conservação da quantidade de movimento linear em qualquer direção  $x_k$ , a Eq. (4) à direita representa a conservação da energia e a Eq. (5) à direita representa a equação de estado.

O código Mach2D foi utilizado neste trabalho para a simulação de escoamento interno invíscido de fluido compressível, contínuo, não reativo, termicamente perfeito, bidimensional axissimétrico e o esquema numérico é de primeira ordem de acurácia.

No caso deste trabalho foi simulado uma tubeira de motor-foguete e a variável analisada foi o coeficiente de descarga ( $C_d$ ), definido pela razão entre o fluxo de massa numérico 2D (obtido pelo código computacional) e o fluxo de massa teórico 1D (SUTTON, 1992).

Os solvers utilizados para comparação da variação do erro de arredondamento foram o ADI (PEACEMAN; RACHFORD, 1955), que consiste em utilizar alternadamente o método TDMA em uma direção com a outra implícita e vice-versa e o MSI (SCHNEIDER; ZEDAN, 1981) que utiliza uma decomposição LU parcial do sistema de equações para resolver o sistema linear para a correção da variável dependente.

### 3 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em relação ao hardware, foram realizadas simulações com o problema 1D e o problema 2D em todos os computadores mostrados na Tab. 1, com precisão simples e dupla. Não houve diferenças no erro de arredondamento obtido para o mesmo compilador utilizado (Microsoft Powerstation 4.0).

Em relação ao software, foram realizadas simulações no computador CFD-19 com o problema 1D, modificando as opções de compilação (Debug, Release, otimização ou não). Estas opções não influenciaram no erro de arredondamento obtido.

Ainda no software, foram realizadas simulações com o problema 1D e 2D alterando-se os compiladores utilizados e a precisão dos cálculos empregada.

No problema 1D, utilizando-se precisão simples, em dois computadores testados (CFD-19 e CFD-13) houve diferenças no erro de arredondamento obtido para os diferentes compiladores utilizados; na Fig. 1 é possível analisar o comportamento do erro de arredondamento em função do número de nós da malha utilizada para a variável  $\dot{T}_{1D}$  comparando diversos compiladores. O erro mostrado na figura é qualitativamente análogo para as outras três variáveis. Já na precisão dupla, não houve diferenças no erro de arredondamento obtido.

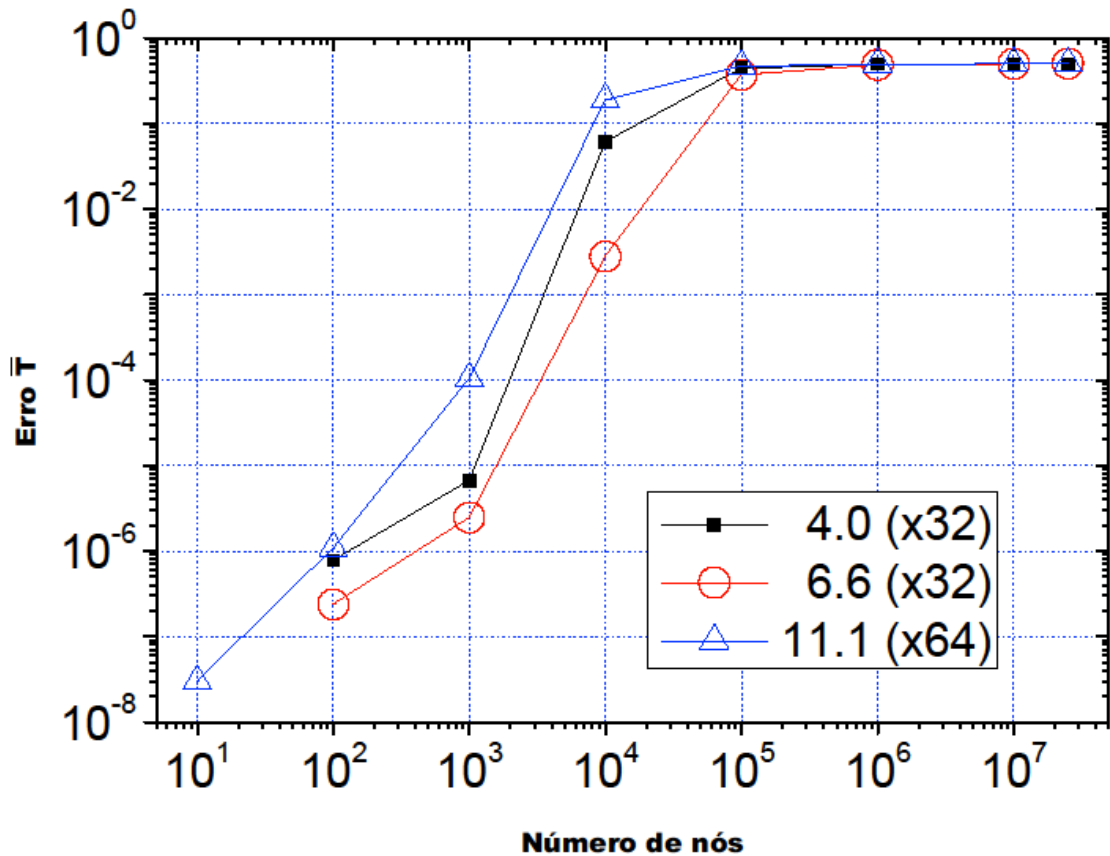


Figura 1 Erro de arredondamento, variável , precisão simples

Ainda na Fig. 1, o maior erro de arredondamento é devido ao compilador 11.1 da Intel seguido pelo 4.0 da Microsoft e o menor erro de arredondamento é dado pelo compilador 6.6 da Compaq.

No problema 2D, utilizando-se precisão simples, foram obtidos erros de arredondamentos diferentes para os compiladores testados. A Fig. 2 mostra o comportamento da variável global temperatura média.

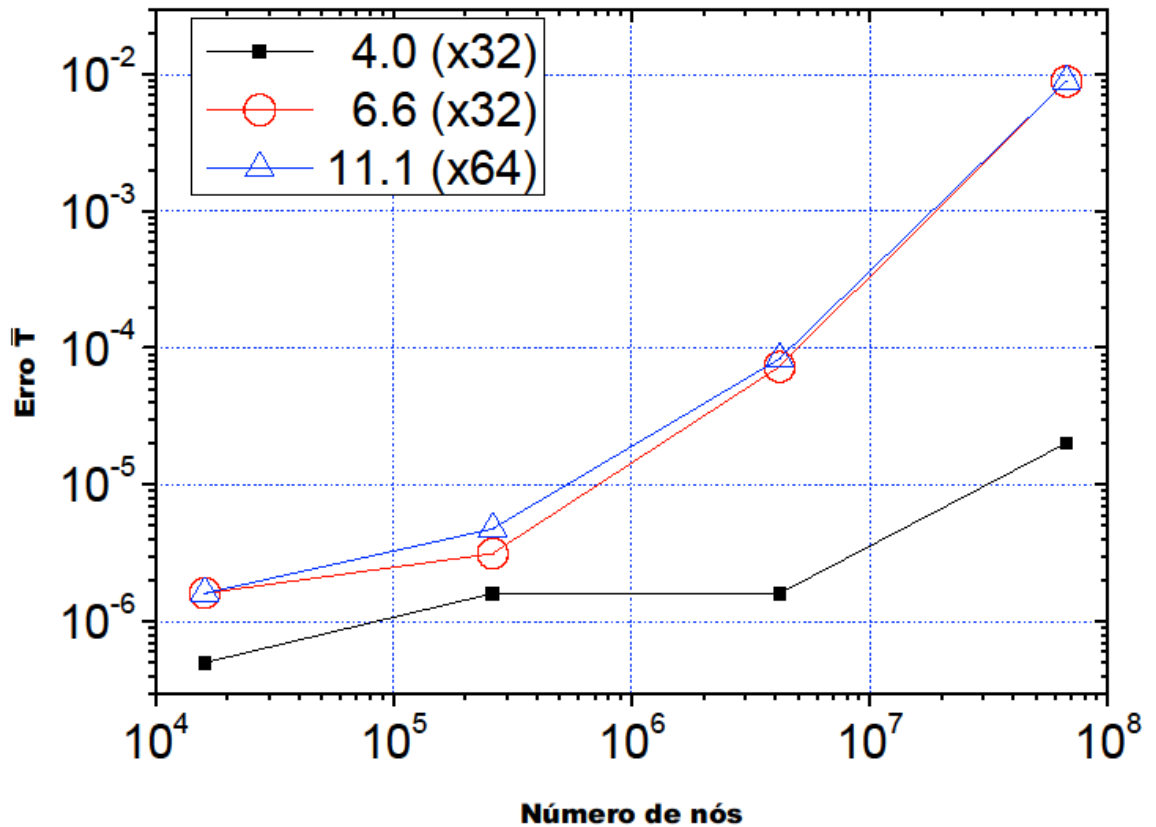


Figura 2 Erro de arredondamento, variável  $T_{c,2D}$ , precisão simples

Na Fig. 2, há um comportamento diferente, o compilador que apresentou o maior erro é o 11.1 da Intel, seguido pelo 6.6 da Compaq e o menor erro é dado pelo compilador 4.0 da Microsoft.

Ainda no problema 2D a Fig. 3 mostra o comportamento da variável pontual temperatura central, percebe-se um comportamento estocástico, não sendo possível analisar qual seria o compilador que apresenta maior ou menor erro de arredondamento.

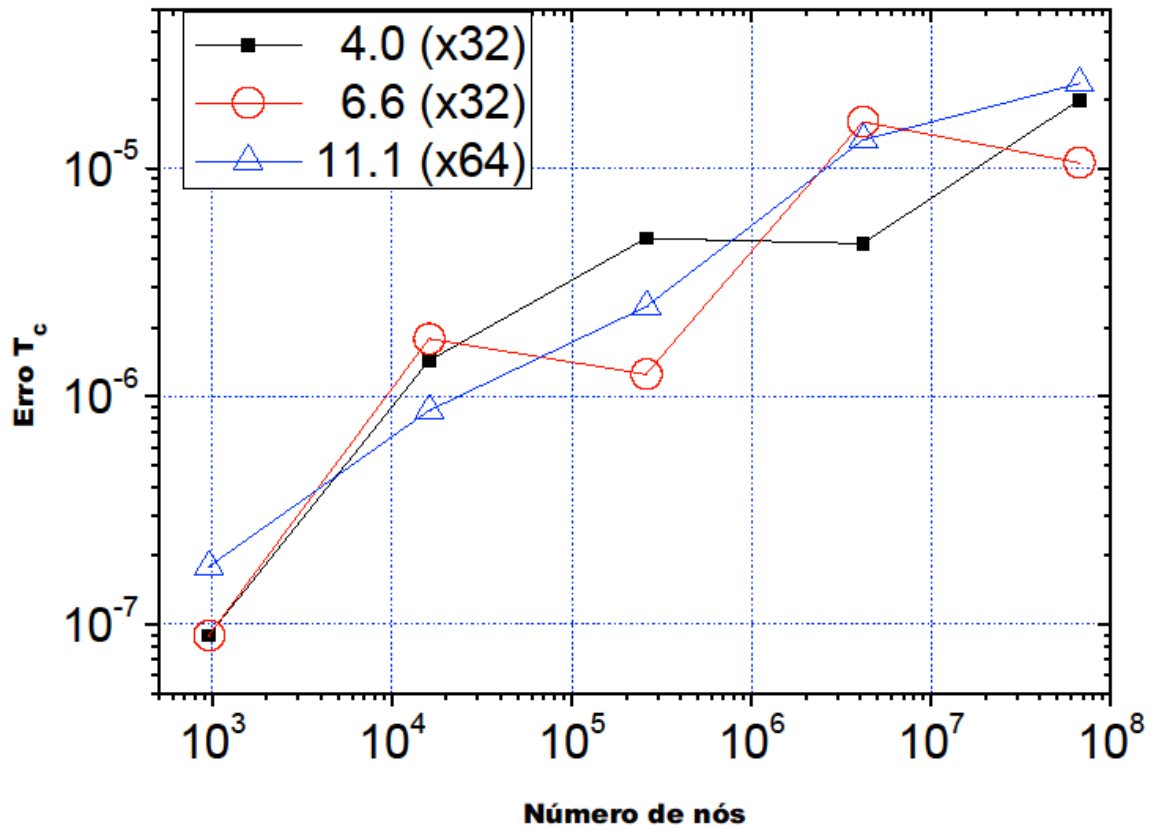


Figura 3 Erro de arredondamento, variável  $T_{c,2D}$ , precisão simples

Já na precisão dupla, das duas variáveis avaliadas, apenas a temperatura central apresentou diferença no erro de arredondamento e apenas no compilador Microsoft Fortran Powerstation 4.0, com mostrado na Fig. 4.

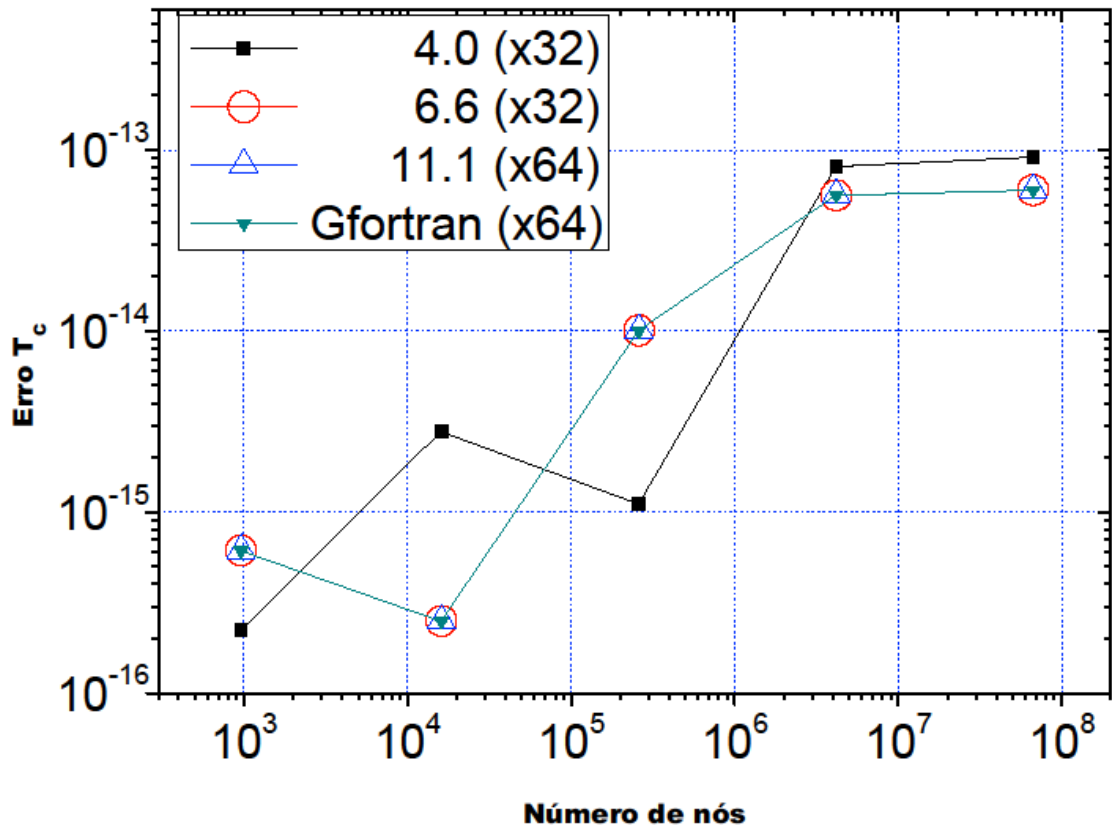


Figura 4 Erro de arredondamento, variável  $T_{c,2D}$ , precisão dupla

O último caso testado neste trabalho foi do Mach2D com precisão dupla: foi avaliado o resultado de  $C_q$  obtido com o compilador Intel Fortran Composer XE 2013 14.0 tanto na versão Windows quanto na versão Linux na solução numérica e dois tipos de solvers aplicados na resolução do sistema de equações gerado: o método MSI e o método ADI.

Foram simuladas seis malhas:  $24 \times 10$ ,  $48 \times 20$ ,  $96 \times 40$ ,  $192 \times 80$ ,  $384 \times 160$  e  $768 \times 320$  volumes no CFD-21, com diferentes parâmetros de relaxação para conduzir a convergência. Não houve diferenças na solução numérica obtida em cada uma das malhas simuladas.

O resultado acima corrobora com os demais resultados obtidos em precisão dupla, ou seja, pela precisão maior dos cálculos há mínima (Fig. 4) ou nenhuma influência do erro de arredondamento nas simulações realizadas.

Foi avaliado também a repetitividade do erro de arredondamento para a variável  $T_c$  e as outras variáveis citadas neste trabalho.

Observou-se que ao repetir as simulações, o erro de arredondamento obtido é sempre o mesmo, ou seja, neste caso o valor numérico do erro de arredondamento não é aleatório.



## 4 | CONCLUSÃO

Neste trabalho foram estudados diferentes problemas: condução de calor 1D, 2D e escoamento de fluidos compressíveis. Os erros de arredondamento verdadeiros foram obtidos para os problemas de condução de calor e para o escoamento de fluidos, foi analisada a influência do erro de arredondamento em cada um dos problemas. Com base nos testes realizados conclui-se que:

1 - Independente da precisão (dupla, simples) e dimensão (1D e 2D), o hardware e as opções de compilação não influenciam no erro de arredondamento verdadeiro, desde que a compilação e a execução do código sejam no mesmo computador.

2 - Utilizando precisão simples, independente da dimensão (1D e 2D), o erro de arredondamento verdadeiro apresenta diferenças estocásticas utilizando os diferentes compiladores testados: (1) Microsoft Fortran Powerstation 4.0, (2) Compaq Visual Fortran 6.6, (3) Intel Fortran Compiler 11.1.

3 - Não houve variações na solução numérica obtida para a variável  $C_d$  no Mach2D utilizando-se dois sistemas operacionais (Windows e Linux) e dois solvers diferentes (ADI e MSI).

4 - Salvo o uso do compilador mais antigo (Microsoft Fortran Powerstation 4.0), cálculos com precisão dupla apresentaram o mesmo erro de arredondamento verdadeiro para todos os fatores analisados (Hardware e Software).

5 - A medida que o número de nós da malha cresce, o erro de arredondamento também cresce, pelo fato do método utilizado sofrer de cancelamento de algarismos significativos. A razão calculada para obter as derivadas nos métodos utilizados sofre de redução no número de algarismos significativos, isto ocorre, pois tanto o numerador quanto o denominador se tornam números cada vez menores.

Os resultados recalculados também mostram que valor numérico do erro de arredondamento obtido é sempre o mesmo, ou seja, independe do número de vezes o qual foi calculado.

Em trabalhos futuros serão feitos estudos sistemáticos com ênfase nas opções de otimização dos compiladores utilizados e uso de outros problemas como equações elípticas e parabólicas.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao programa UNIESPAÇO da AEB (Agência Espacial Brasileira), o CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro. O primeiro autor foi bolsista da CAPES e o segundo é bolsista do CNPq.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## REFERÊNCIAS

- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. **A multigrid tutorial**. 2. ed. Philadelphia: SIAM, 2000.
- MARCHI, C. H. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2001.
- MARCHI C. H.; ARAKI L. K., **Relatório técnico do projeto CFD-10/UFPR: códigos Mach2D 6.1 e RHG2D 1.0**, UFPR, Curitiba, 2009.
- PEACEMAN, D. W.; RACHFORD, H. H. **The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations**. J. Soc. Ind. Appl. Math, v. 3, p. 28–41, 1955.
- SCHNEIDER, G. E.; ZEDAN, M. A. **A modified strongly implicit procedure for numerical solution of field problems**. Numerical Heat Transfer, v. 4, p. 1–19, 1981.
- SUTTON G. P., **Rocket Propulsion Elements**. 6 ed. New York: John Wiley & Sons. Inc., 1992.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method**. 2. ed. Harlow, England: Prentice Hall, 2007.

## O USO DO JOGO CORRIDA DE OBSTÁCULOS PARA O DESENVOLVIMENTO DE IDEIAS MATEMÁTICA EM UM LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA DE UM MUSEU

**Leonardo Lira de Brito**

Universidade Federal de Campina Grande  
Cuité – Paraíba

**Erick Macêdo Carvalho**

Universidade de Pernambuco  
Petrolina - Pernambuco

**Silvanio de Andrade**

Universidade Estadual da Paraíba  
Campina Grande - Paraíba

**RESUMO:** Este capítulo apresentará uma descrição de uma experiência com alunos do 9º ano de uma escola da cidade de Campina Grande – PB, com o objetivo de desenvolver ideias matemáticas a respeito de cálculos com expressões algébricas. Para o desenvolvimento dessa atividade foi feita uma revisão da literatura na tentativa de entender como os jogos podem auxiliar no processo de desenvolvimento de ideias matemáticas, em seguida, ocorreu o planejamento da atividade e a escolha do jogo Corrida de Obstáculos, no qual visa trabalhar o desenvolvimento do pensamento algébrico. A partir dessa atividade, foi possível observar algumas fragilidades dos alunos com relação a conceitos e procedimentos matemáticos, tais como: adição, subtração, multiplicação e divisão com números inteiros. Mas, essas dificuldades que surgiram foram sanadas no

decorrer da atividade, pelos monitores ou até mesmo, por alguns alunos da turma. Também foi possível observar, uma maior interação dos alunos com relação a atividade que estava sendo desenvolvida e a motivação dos mesmos em desenvolver estratégias que conseguissem vencer no jogo.

**PALAVRAS-CHAVES:** Educação Matemática, Laboratório de Matemática, Jogos, Pensamento Algébrico.

**ABSTRACT:** This chapter will present a description of an experience with students from the 9th grade of a school in the city of Campina Grande – PB, with the goal of developing mathematical ideas about calculations with algebraic expressions. For the development of this activity was made a review of the literature, in an attempt to understand how games can help in the process of developing mathematical ideas, after, was the planning of the activity and the choice of the game Obstacle Racing, in which aims to work the development of algebraic thinking. From this activity, it was possible to observe some frailties of the students with respect to mathematical concepts and procedures, such as: addition, subtraction, multiplication and division with whole numbers. But, these difficulties that have arisen have been resolved during the activity, by the monitors or by some students of the class. It was also possible

to observe, increased student interaction in relation to the activity being developed and their motivation in developing strategies that could win in the game.

**KEYWORDS:** Mathematics Education, Math Laboratory, Games, Algebraic thinking

## 1 | INTRODUÇÃO

Tanto no passado, como nos dias atuais os jogos atraem a atenção de pessoas de todas as classes sociais, independentemente da idade, sejam eles em tabuleiros, cartas ou digitais.

Almeida (1987, apud. ALVES, 2001) relata que nos povos egípcios, romanos e maias, a prática dos jogos era utilizada para que os mais jovens aprendessem valores, conhecimentos, normas e padrões de vida com a experiência dos adultos. Os jogos de tabuleiro eram muito comuns no antigo Egito e pessoas de todos os níveis sociais, os jogavam. Muitos desses jogos foram encontrados por arqueólogos, mas as regras que diziam como jogá-los não resistiram ou não foram encontradas. Segundo Anjos (2013) os primeiros jogos teriam surgido há cerca de 5.000 anos a.C., em regiões da Mesopotâmia e Egito.

Para Alves (2001), os jogos e as brincadeiras eram admitidos e estimulados pela grande maioria. Porém, para uma minoria poderosa e para a igreja, eram considerados como profanos, imorais e sua prática não era admitida de forma alguma. Por este fato, com à ascensão do cristianismo, os jogos foram veementemente proibidos e imposta uma educação rígida e disciplinadora.

Já no século XVI, época do Renascimento, vem à tona novas ideias e novas concepções pedagógicas que consideravam as brincadeiras e os jogos como uma forma de preservar a moralidade das crianças, tidas até então, como adultos em miniaturas.

A Companhia de Jesus, fundada por Ignácio de Loyola em 1534, compreende a grande importância dos jogos como aliados ao ensino, pois verifica não ser possível nem desejável suprimi-los, mas, sim, introduzi-los oficialmente por meio do *Ratio Studiorum*. Desse modo, os jesuítas são os primeiros a recolocar os jogos de volta a prática, de forma disciplinadora e recomendada. (ALVES, 2001, p. 17).

Surge então, no século XVI o jogo educativo, com o objetivo de ancorar ações didáticas que visam, segundo Kishimoto (1994, apud. ALVES, 2001), à aquisição de conhecimentos. Ele considera que a diversificação dos jogos ocorre a partir do movimento científico da Revolução Francesa do século XVIII, propiciando então a criação, adaptação e a popularização dos jogos no ensino. A partir dessa época, observa-se uma crescente valorização do uso dos jogos como recurso pedagógico.

O ensino da Matemática hoje se resume a fazer contas, seguir fórmulas e regras de soluções pré-determinadas, ou seja, uma ciência pronta, acabada e incontestável. E pelo fato de a grande maioria dos alunos não conseguirem compreender o que está sendo estudado, há um grande desânimo em estudá-la. Como professores devemos

incentivar nossos alunos à participarem desse processo de aprendizagem e que eles construam esse conhecimento junto com o professor e não fique apenas como um espectador, como afirma os REFERENCIAIS CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO DA PARAÍBA (2008, p.91):

Há ênfase no ensino-aprendizagem que valoriza a construção do conhecimento e do raciocínio matemático pelo educando, e desaconselha a simples aplicação de regras e fórmulas à lista repetitiva de exercícios, frequentemente presentes em boa parte dos livros didáticos.

O motivo para a introdução dos jogos nas aulas de Matemática é a possibilidade de tentar diminuir os bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la.

Um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver. PCN (BRASIL, 2001. apud. STAREPRAVO, 2009, p. 75).

O aluno, ao aprender com um jogo matemático, o faz sem muitos esforços, pois estará antes de tudo divertindo-se, cabe ao professor orientá-lo e fazê-lo enxergar a Matemática do jogo, o conceito que está sendo estudado.

O uso de jogos para o ensino representa uma mudança de postura do professor em relação ao o que é ensinar Matemática, ou seja, o papel do professor muda de comunicar conhecimento para o de observador, organizador, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem, do processo de construção do saber pelo aluno. (BORIN, 2004)

É uma maneira de se estudar os conteúdos de forma atraente e interessante, já que os mesmos são motivadores, levando-os assim a sentirem prazer em estudar os conteúdos, e na atitude de jogar eles mesmos irão descobrir e utilizar recursos matemáticos para vencer o jogo, tornando-se independentes na busca do conhecimento, levando assim a eles não só esperarem que o professor lhes apresentem os conteúdos como um corpo de conhecimento pronto, e sim incentivando eles a irem por si mesmo ao encontro dos conteúdos e estudá-los, tornando-os assim sujeitos pesquisadores e independentes, agora, caso os alunos não consigam enxergar por si mesmo que estejam utilizando conteúdos matemáticos durante o jogo, o professor deve levá-los a enxergá-los, pois é preciso que fique bem claro para eles que os jogos foram trazidos para a sala de aula como uma ferramenta educativa, seja para introduzir um conteúdo ou para fixá-lo, e o sucesso da sua aplicação está diretamente ligado ao planejamento realizado pelo professor.

Os jogos exercem um papel importante na construção de conceitos matemáticos por se constituírem em desafios aos alunos. Por colocar as crianças constantemente diante de situações- problemas, os jogos favorecem as (re)elaborações pessoais a partir de seus conhecimentos prévios. Na solução dos problemas apresentados pelos jogos, os alunos levantam hipóteses, testam a sua validade, modificam seus esquemas de conhecimento e avançam cognitivamente. (STAREPRAVO, 2009, p.20)

Outro aspecto que é melhor trabalhado ao se utilizar os jogos, onde podemos associar a dimensão lúdica à dimensão educativa, são os erros por parte dos alunos, pois muitas vezes eles sentem-se intimidados a expor suas dúvidas e responder ao que o professor pergunta, pois temem o erro e a reação de seus colegas de sala diante do mesmo.

O jogo reduz a consequência dos erros e dos fracassos do jogador, permitindo que ele desenvolva iniciativa, autoconfiança e autonomia. No fundo o jogo é uma atividade séria que não tem consequências frustrantes para quem joga, no sentido de ver o erro como algo definitivo ou insuperável. Os erros são revistos de forma natural na ação das jogadas, sem deixar marcas negativas, mas propiciando novas tentativas, estimulando previsões e checagem. (SMOLE, 2007, p.10).

Mas, o fato de estar utilizando os jogos, não garante que todos os alunos irão aprender todos os conteúdos, ou que todas as dúvidas irão desaparecer. Como diz Smole (2007), é preciso ter alguns cuidados, quando se trabalha com jogos, quando for propor e explorá-los.

## 2 | METODOLOGIA

Essa atividade foi desenvolvida no Laboratório de Matemática de um Museu, na cidade de Campina Grande, foi observado uma turma de 9º ano com 18 alunos, na faixa etária de 14 a 17 anos, oriundos de uma Escola Municipal, dessa mesma cidade.

O Jogo Corrida de Obstáculos

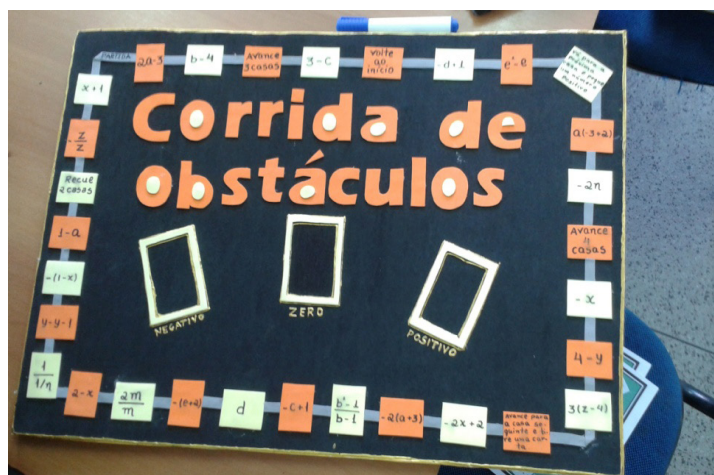


Figura 1: Jogo corrida de obstáculos

Fonte: Arquivos dos autores (Jogo adaptado do caderno do mathema 6º ao 9º ano)

Conteúdo trabalhado

- Cálculo com expressões algébricas;
- Desenvolvimento do pensamento algébrico

Objetivo do experimento

- Desenvolver a capacidade de resolver alguns cálculos algébricos usando o cálculo mental;
- Trabalhar o valor numérico de uma expressão algébrica.

#### Material utilizado

- Um tabuleiro com o jogo corrida de obstáculo;
- Um dado;
- Marcadores de cores diferentes;
- 18 cartas com números positivos, sendo três cartas de cada um dos seguintes valores: + 1, + 2, + 3, + 4, +5, +6, e 18 cartas de números negativos, sendo 3 cartas um dos valores: -1, -2, -3, -4, -5, -6 e 5 cartas zero.

#### Regras do jogo

1. As cartas são embaralhadas e colocadas nos respectivos lugares do tabuleiro viradas para baixo.
2. Os jogadores posicionam seus marcadores sobre o tabuleiro no ponto de partida.
3. Cada jogador, na sua vez, lança o dado e avança o número de casas igual ao número obtido no dado e retira uma carta de um dos montes à sua escolha.
4. Efetuam-se os cálculos e o resultado obtido indica o valor e o sentido do movimento. Se for positivo, recua o número de casas correspondentes ao número obtido. Se for zero, não se desloca.
5. Se o marcador cair em uma casa que contenha uma instrução, o jogador deverá exaltá-la nessa mesma jogada.
6. Sempre que o jogador escolher um número que anule o denominador da expressão, deverá voltar à casa de partida.
7. O vencedor é o jogador que completar em primeiro lugar duas voltas no tabuleiro.
8. Caso um dos três montes de cartas esgote-se antes do final do jogo, então as respectivas cartas devem ser embaralhadas e recolocadas no tabuleiro.

### 3 | DESCRIÇÃO, ANÁLISE E RESULTADOS

Para o desenvolvimento dessa atividade dividimos a exposição do jogo em 3 momentos:

- Momento 1:

Os alunos chegaram no Laboratório se acomodaram ao longo da mesa, em seguida, os monitores perguntaram quem já tinha ido ao Laboratório de Matemática. Alguns disseram que sim, o monitor perguntou qual experimento eles tinham visto no laboratório, eles disseram que foi o dominó das operações.

Como tinha alunos que ainda não tinham visitado o Laboratório de Matemática do

Museu, o monitor disse que esse espaço ia ser um local do museu onde iríamos estudar Matemática na forma de experimentos. Perguntamos ainda, quem sabia resolver expressões algébricas. Alguns disseram que sabiam, outros que não lembravam mais e os demais ficaram calados.

- Momento 2:

Nesse momento, os monitores perguntaram aos alunos se eles eram bons de fazer cálculos mentais, um dos alunos respondeu dizendo que era, e os demais ficaram calados. Daí o monitor disse que o experimento que iríamos realizar seria a corrida de obstáculos, que era um jogo matemático onde iríamos lembrar expressões algébricas, exercitar o cálculo mental e trabalhar o valor numérico das expressões algébricas.

Feito isso o monitor apresentou o tabuleiro e as regras do jogo aos alunos, explicando regra por regra aos alunos, enfatizando que fizessem mentalmente os cálculos, só em último caso utilizassem lápis e papel.



Figura 2: Explicação das regras do jogo corrida de obstáculos.

Fonte: Arquivo dos autores

- Momento 3



Figura 3: Alunos jogando o jogo corrida de obstáculos

Fonte: Arquivos dos autores

Dado início ao jogo foi possível observar algumas fragilidades com relação as



operações solicitadas pelo jogo. Por exemplo, o jogo tinha a seguinte expressão  $-d+1$ , quando  $d = -3$  uma equipe disse que o resultado era 2.

**Outra dificuldade observada foi  $-(1-x)$ , quando  $x = -1$ , uma equipe disse que o resultado era 0, quando perguntamos o porquê obtivemos como resposta:**

**A3E7:** O resultado dar zero porque  $1-1=0$

**Monitor:** Você está esquecendo da relação de sinais.

**A3E7:** Aonde?

**Monitor:** Olha, você tem  $-1$  para substituir por  $x$  não é isso?

**A3E7:** É

**Monitor:** Só que o  $x$  é negativo. Nesse caso você tem que fazer a relação de sinais.

**A3E7:** Ah... entendi, então vai ficar menos por menos ai fica mais NE?

Monitor: Isso mesmo. Então o resultado é quanto?

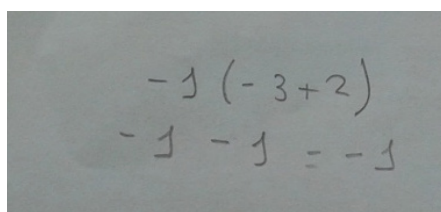
**A3E7:** Menos dois.

**Monitor:** Exato!

(Descrição das falas dos alunos)

**Um outro ponto observado foi a insistência dos alunos em usar caneta e papel na hora de resolver os cálculos. Até nas expressões mais simples como no caso de  $4-d$ , quando  $d = -2$  eles insistiam em usar. Poucos alunos não usaram caneta e papel para responder todas as expressões trabalhadas no jogo.**

Isso mostra que apesar dos alunos estarem no 9º ano do Ensino Fundamental II, eles apresentam muitas dificuldades, tanto na parte de relação de sinais, quanto na parte de resolver as expressões algébricas mesmo. Isso fica evidente na figura 4 a seguir.



The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. The first line is  $-1(-3+2)$ . The second line shows the student's calculation:  $-1 - 1 = -1$ . This is an error because the student did not apply the distributive property correctly, failing to multiply  $-1$  by  $2$ .

Figura 4: Erro cometido por um aluno.

Fonte: Arquivos dos autores.

Outro objetivo do jogo era fazer com que o aluno percebesse que em uma mesma expressão algébrica poderíamos ter vários valores numéricos a depender do valor da carta escolhida pelo jogador. Por exemplo se tinha a expressão  $4-d$  e tinha as cartas 0, 3 e  $-3$ , qual seria a carta mais vantajosa para que o aluno escolhesse?

Foi possível perceber que alguns tinham essa preocupação pois alguns faziam quadros, como mostra o modelo a seguir:

Carta	Expressão 4 - d	Resultado
0	$1-0=$	4
3	$4-3=$	1
-3	$4-(-3)=$	7

Fazendo um quadro, os alunos viam que dependendo da carta o valor da expressão mudava, assim eles tinham que escolher uma carta que desse o maior valor numérico para que eles pudessem avançar mais rápido no jogo e conseqüentemente ganhar. Então nesse jogo é possível deslocar ou não dependendo do valor numérico da expressão.

Nesse momento a ideia principal é trabalhar o conceito de variável, pois a depender do valor da variável, ou seja, o número contido na carta, o valor da expressão muda, apesar da expressão ser a mesma. O que se espera do professor pode fazer com que o aluno pense em outros valores da expressão além do valor das cartas do jogo.

A medida que as dúvidas iam surgindo o monitor ia de grupo em grupo e tirava as dúvidas ou quando percebia que a dúvida era mais geral ia para o quadro e explicava para todos.

O jogo foi avaliado de forma positiva pelos alunos. Podemos observar isso quando pedimos para eles falarem um pouco sobre a atividade realizada no museu e obtivemos alguns comentários como os descritos na figuras 5 e 6.

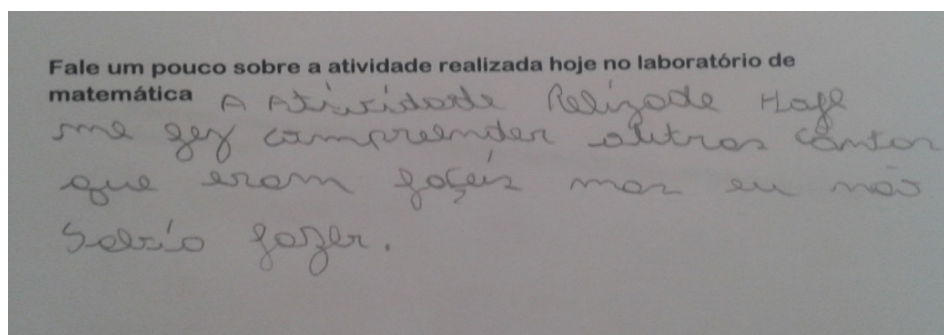


Figura 5: Fala do aluno

Fonte: Arquivos dos autores

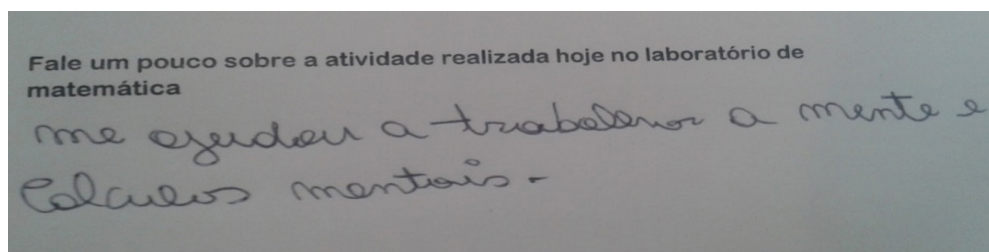


Figura 6: Fala do aluno

Fonte: Arquivos dos autores

## 4 | CONCLUSÕES

O uso dos jogos, nessa atividade, serviu para mostrar algumas fragilidades de alunos em relação as operações matemáticas e relações de sinais. Também foi possível perceber, as dificuldades em resolver expressões algébricas, muitas vezes eles não sabiam se resolviam primeiro uma divisão ou uma multiplicação, ou uma adição ou uma subtração.

Além disso, pode-se observar o uso dos jogos no desenvolvimento de conteúdo, quando bem conduzido em relação aos seus objetivos em sala de aula, apresentam fortes potencialidades, tais como:

O trabalho em grupo – a necessidade do trabalho em parceria com o colega, com o grupo ou com toda a turma. A argumentação do colega ou do professor sugere ao aluno envolvido com a atividade, um repensar sobre os conteúdos matemáticos, observando aspectos da atividade que não foram observados num primeiro momento. E como afirma SMOLE (2007. p. 9):

O trabalho com jogos é um dos recursos que favorece o desenvolvimento da linguagem, diferentes processos de raciocínio e de interação entre os alunos, uma vez que durante um jogo cada jogador tem a possibilidade de acompanhar o trabalho de todos os outros, defender pontos de vista e aprender a ser crítico e confiante em si mesmo.

Um ensino-aprendizagem reflexivo – No movimento de tentar justificar o desenvolvimento da atividade e no processo de exploração dos conteúdos identificou-se um movimento de justificativa sobre o **como** ou **de que forma** determinada fórmula, jogo ou atividade se relacionam com a aprendizagem de conceitos em Matemática.

Diversificar as estratégias de ensino – O professor, ao abordar os conteúdos explorando estratégias diferentes, possibilita que os alunos vivenciem situações que lhes permitam abordar os conteúdos de forma investigativa.

Consideramos que nossos objetivos foram alcançados, pois de início percebemos que os alunos apresentavam muitas dúvidas em relação as operações simples, mas este fato não impediu que os mesmos continuassem tentando jogar, em momento algum falaram em desistir, pelo contrário, durante o jogo, tanto através da nossa intervenção como de seus próprios colegas, vimos que muitas dúvidas foram expostas e sanadas, possibilitando assim uma melhor compreensão dos conteúdos abordados, fato este que pode ser visto no desenvolvimento de atividades que realizamos posteriormente.

## REFERÊNCIAS

ALVES, E. M. S. **A ludicidade e o ensino da matemática**: Uma prática possível. Campinas, SP: Papyrus, 2001.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. 5.ed. São Paulo: CAEM/IME, USP, 2004. 100p.

BRASIL, PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília. MEC, 1998.

PARAÍBA. Secretaria de Educação e Cultura. Gerência Executiva da Educação Infantil e Ensino Fundamental. **Referenciais Curriculares do Ensino Fundamental: Matemática, Ciências da Natureza e Diversidade Sociocultural**. / Governo do Estado da Paraíba. Secretaria de Educação e Cultura. Gerência Executiva da Educação Infantil e Ensino Fundamental. – João Pessoa: SEC/Graf, set, 2010.

SMOLE, K. S. **Jogos de matemática de 6º a 9º ano**/ Kátia StoccoSmole, Maria Ignez Diniz, Estela Milani. – Porto Alegre: Artmed, 2007.

STAREPRAVO, A. R. **Jogando com a matemática: números e operações**. Aymar. 1º Ed. Curitiba, 2009.

## **SOBRE O ORGANIZADOR**

**FELIPE ANTONIO MACHADO FAGUNDES GONÇALVES** Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná(UTFPR) em 2018. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), em 2015 e especialista em Metodologia para o Ensino de Matemática pela Faculdade Educacional da Lapa (FAEL) em 2018. Atua como professor no Ensino Básico e Superior. Trabalha com temáticas relacionadas ao Ensino desenvolvendo pesquisas nas áreas da Matemática, Estatística e Interdisciplinaridade.

Agência Brasileira do ISBN  
ISBN 978-85-7247-349-1

